LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL DENKLEMLERİN NEWTON METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Ahmet BOZ

Dumlupınar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Prof. Dr. Binali MUSAYEV

Haziran-2000

Ahmet BOZ'un Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığı "LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL DENKLEMLERİN NEVTON METODU İLE ÇÖZÜMÜ" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisans üstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

03 / 07 / 2000

Üye : Prof. Dr. Binali MUSAYEV

Üye : Doç. Dr. İdris DAĞ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Murat ALP

Fen Bilimleri Enstitüsünün Yönetim Kurulu'nun 06 / 07 / 2000 gün ve 06/29. Sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Ramazan KÖSE
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Lineer Olmayan Regüler İntegral Denklemlerin
Newton Metodu İle Çözümü

Ahmet BOZ

Yüksek Lisans Tezi , Matematik Bölümü

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Binali MUSAYEV

Bu çalışmada lineer olmayan regüler integral denklemlerin Newton Metodu ile çözümlerinin varlığı ve tahmini çözümlerinin bulunması problemleri incelenmektedir.

Birinci bölüm ileride kullanılan esas kavramları ve temel bilgileri içermektedir. Bunlara Banach uzayı, sürekli lineer operatörler, ters operatörler, lineer olmayan operatörlerin diferansiyel hesabı, integral denklemlerin sınıflandırılması, Banach Sabit Nokta Prensibi gibi konular dahildir.

İkinci bölümde integral denklemlerin belli tahmini çözüm yöntemlerinden : Ardışık Yaklaşımlar Yöntemi, Fredholm Determinantlar Yöntemi, Ardışık Çekirdekler Yöntemi ve bunların bazı uygulamaları verilmektedir.

Üçüncü bölümde Kantoroviç L.V. tarafından lineer olmayan operatörlü denklemler için genelleştirilmiş Newton Metodunun yakınsaklığı ile ilgili sonuçlar incelenmektedir. Bu bölümde söz konusu metodun temel taşlarından biri olan başlangıç yaklaşımlarının seçilmesi problemi ele alınmış ve bazı sınıf lineer olmayan regüler integral denklemlerin Newton Metodu ile tahmini çözümleri bulunmuştur. Konu ile ilgili ispatlanmış Teorem 3.1.3 ve onun Teorem 3.2.2, Problem 3.2.8 'deki uygulamaları orjinaldir.

Anahtar Kelimeler : Lineer ve lineer olmayan regüler integral operatörler, ters operatörler, lineer olmayan operatörlerin Freshe türevleri, çözücü çekirdekler, lineer ve lineer olmayan Fredholm ve Volterra integral denklemler.

SUMMARY

Solution of Nonlinear Regular İntegral Equations By Newton Method

Ahmet BOZ

Master Thesis , Department of Mathematics

Thesis Supervisor : Prof.Dr.Binali MUSAYEV

In this study , by the help of Newton Method nonlinear regular integral equations the problems of existance of solutions and its approximate solutions are being examined.

The first section involves essential concepts and basıc information used in the following sections. Banach Spaces , lasting linear operators , inverse operators , differential calculations of nonlinear operators , classification of integral equations , Banach Fixed Point Principle are included in these sections.

In the second section, among the certain approximate solution methods of integral equations ; Iterative Method , Fredholm Determinations Method , Iterated Kernel Method and some applications of these have been given.

In the third section , results about the convergence of the Newton Method which are generalized by Kantaroviç L.V. for the nonlinear equations with operator are being examined. In this section , the problem of choosing primary approache which are one of the basic phase of this method is dealt with and approximate solutions of some class nonlinear regular integral equations are found by the help of the Newton Method. Theorem 3.1.3 , Theorem 3.2.2 which are proved about this subject and its applications in the problem of 3.2.8 are orijinal.

Key Words : Lineer and nonlinear regular integral operators, inverse operators, Freshe derivative of nonlinear operators, resolvent kernels, Lineer and nonlinear Fredholm and Volterra integral equations.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarımın yönetimini kabul ederek bana bu tezi hazırlama imkanı sağlayan , çalışmam süresince yapıcı eleştirileri ile destek olan , yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Binali MUSAYEV ' e , çalışmalarımızın yürütülmesinde her türlü imkanı sağlayan D.P.Ü. Fen - Edebiyat Fakültesi Matematik Bölüm Başkanı Sayın Hocam Yrd. Doç.Dr. Murat ALP 'e , tezin yazımında yardımcı olan arkadaşım Selim BİÇER ' e ve beni daima destekleyen aileme sonsuz teşekkür ederim.

Ahmet BOZ
Haziran 2000

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER	**AÇIKLAMALAR**
$\Re(A)$	A operatörünün görüntü kümesi
$A^{-1}(F)$	F ‘ nin ters görüntüsü
Çek A	A operatörünün çekirdek uzayı
$\|A\|$	A operatörünün normu
$\Im$	Freshe türevi
$\overline{S_r(\theta)}$	Kapalı yuvar
$R(x,t;\lambda)$	Fredholm çözücü çekirdeği(Resolventa)
$D(\lambda)$	Fredholm determinantı
$D(x,t;\lambda)$	Fredholm minörü
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar kümesi
(x_n)	n elemanlı bir dizi
$K(t,s)$	Çekirdek
$\int_a^b K(t,s)x(s)ds$	Lineer integral operatör
$\int_a^b f(t,s,x(s))ds$	Lineer olmayan integral operatör
A^{-1}	A operatörünün tersi
I	Birim operatör
x^*	Lineer veya lineer olmayan integral denklemlerin gerçek çözümü
$\|\cdot\|$	Bir uzayda tanımlı norm

BÖLÜM 1

KAVRAMLAR VE TEMEL BİLGİLER

Lineer ve lineer olmayan cebirsel denklem sistemleri , lineer ve lineer olmayan integral denklemler , adi ve kısmi türevli diferansiyel denklemler için varlık ve teklik teoremlerinin gösterilmesi, bu denklemlerin genellikle tahmini çözümlerinin bulunması problemlerinin incelenmesinde Fonksiyonel Analiz' in birçok konuları faydalanır(vektör ve normlu uzaylar , lineer ve lineer olmayan operatörler ve özellikleri , ters operatörler ve özellikleri , lineer olmayan operatörlerin diferansiyel hesabı , Banach Sabit Nokta Teoremi , Newton Metodu v.b.). Şimdi Fonksiyonel Analiz' de lineer olmayan regular integral denklemlerin tahmini çözüm yöntemlerinin uygulanmasında yapılması gereken işlemlerde kullanılan temel kavramları ve gerekli sonuçları verelim. (Bkz. (Bayraktar , 1996)(Hutson , Pym , 1980)(Kantoroviç , Akilov , 1984)(Kreyszig , 1987)(Rudin , 1973)(Trenogin , 1980))

1.1.Vektör Uzayları: L boş olmayan bir cümle , K reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan L cümlesine K cismi üzerinde vektör uzayı (lineer uzay) denir ve bu uzayın elemanlarına da vektör veya nokta adı verilir.

A)L , + işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani;

G1) Her $x,y \in L$ için $x+y \in L$ 'dir. (Kapalılık Özelliği)

G2) Her $x,y,z \in L$ için $x+(y+z) = (x+y)+z$ 'dir. (Birleşme Özelliği)

G3) Her $x \in L$ için $x+\theta=\theta+x=x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır.(Özdeş elemanın varlığı Özelliği)

G4) Her $x \in L$ için $x+(-x) = (-x)+x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır. (Ters elemanın varlığı Özelliği)

G5) Her $x,y \in L$ için $x+y = y+x$ 'tir. (Değişme Özelliği)

B) $x,y \in L$ ve $\alpha,\beta \in K$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L1) $\alpha x \in L$ 'dir. (Skalerle çarpmaya göre kapalılık Özelliği)

L2) α (x+y) = α x+α y 'dir.

L3) $(\alpha+\beta)$x =α x+β x 'dir.

L4) $(\alpha\beta)$x = $\alpha\beta$ x

L5) 1.x = x'dir. (Burada 1 , K'nın birim elemanıdır.)

Yukarıdaki tanıma dikkat edilirse vektör uzayı L sırasıyla A, B şartlarını sağlayan +:LxL$\rightarrow$L , .: KxL$\rightarrow$L dönüşümlerinden ibarettir. + ve . işlemlerine kısaca vektör uzayı işlemleri denir. Vektör uzayları (L,+;.) veya kısaca L ile göstereceğiz. Vektör uzayın tanımındaki K cismine vektör uzayın skaler cismi , K'nın elemanlarına ise skaler denir.

L bir vektör uzayı ve x,y $\in$L olsun. x+(-y) vektörüne x ve y vektörlerinin farkı denir ve x-y ile gösterilir.

L , K cismi üzerinde bir vektör uzay olsun. L'nin bir M alt cümlesi L'deki işlemlere göre K üzerinde vektör uzay ise M'ye L'nin alt uzayı denir. Bu tanıma göre M'deki vektörlerin toplamı , tersleri , skalerle çarpımları yine M'ye aittir. Aynı zamanda –x = (-1)x olduğundan kesin olarak diyebiliriz ki boş olmayan bir M alt kümesi her α $\in$K ve her x,y$\in$M için x +y$\in$M , α x$\in$M şartlarını sağlıyorsa M'ye L'nin alt uzayı denir. Bu iki şart x, y $\in$ M ve $\alpha,\beta \in$ K olmak üzere α x+β y$\in$M olmasına denktir.

L , K cismi üzerinde vektör uzayı ve x $\in$L olsun.

$$x=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+...+\alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$$

olacak şekilde $x_i \in$L ve $\alpha_i \in$K varsa x vektörüne $x_1, x_2, ... x_n$, vektörlerinin lineer terkibi veya kombinasyonu denir.

Lineer Bağımlılık ve Bağımsızlık: L , K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve M={$x_1, x_2, ..., x_n$} de L'nin sonlu bir alt kümesi olsun. $\alpha_i \in$K olmak üzere $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i = 0$ olması her i için $\alpha_i = 0$ olmasını gerektiriyorsa x_1, x_2,..., x_n vektörlerine lineer bağımsız denir. Lineer bağımsız olmayan vektörlere de lineer bağımlı vektörler denir. L , K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve B, L'nin bir alt cümlesi olsun. B'nin elemanları lineer bağımsız ve B , L'yi geriyorsa B'ye K üzerinde L'nin bazı(tabanı)denir.

L , K cismi üzerinde sıfırdan farklı bir vektör uzayı olsun. L`nin herhangi bir bazındaki vektör sayısına L`nin K üzerindeki boyutu denir ve BoyL ile gösterilir. Şayet L={θ} ise BoyL=0 olarak tanımlanır. BoyL=0 olması için gerek ve yeter şart L={θ} olmasıdır. Bir vektör uzayının boyutu sıfır veya pozitif bir tamsayı ise vektör uzayına sonlu boyutlu , aksi taktirde sonsuz boyutlu denir.

1.2 Normlu Uzaylar: Bir vektör uzayı L üzerinde tanımlı, gerçel değerli ve $x \in L$ noktasındaki değeri $\|x\|$ ile gösterilen bir fonksiyon aşağıdaki koşulları sağlarsa bu fonksiyona norm denir.

N1) $x \neq 0$ için $\|x\|>0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = y$

N2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\, \|x\|$, $\alpha \in K$ ve $x \in L$

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall\, x,y \in L$

Bu durumda $(L, \|.\|)$çiftine normlu uzay ve $\|x\|$ sayısına da x 'in normu denir. . Üçgen eşitsizliği denilen (N3)ve (N2) kullanılarak daha genel olan

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|\, \|x_j\| \ , \ \alpha_j \in K \, , \ x_j \in L \quad j = 1,2,\ldots,n$$

eşitsizliği ispat edilebilir. Verilen bir normla U(x,y) = $\|x - y\|$olarak tanımlanan U bir uzaklık (metrik)fonksiyonudur. Böylece her normlu uzay aynı zamanda bir metrik uzaydır.

1.3 Banach Uzayı:Normlu bir uzay $(E, \|.\|)$ ve bu uzay içinde bir dizi (x_n)olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n_0 \leq n,m$ için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir. Bir $(E, \|.\|)$ normlu uzayı , normun indirgediği metriğe göre tam ise bu normlu uzaya bir Banach uzayı denir.

1.4 Lineer Operatörler: X ve Y boş olmayan kümeler , $D \subset X$ olsun. D' nin her elemanına Y'nin bir elemanını karşılık getiren bir kurala D' den Y' ye bir **operatör veya dönüşüm** denir. A operatörünün x' e karşılık getirdiği eleman A(x) ile gösterilir. A operatörünün $x \in D$ ' yi $A(x) \in Y$ ' ye gönderdiğini belirtmek için $A:D \rightarrow Y$ gösterimi kullanılır. Bu durumda D ' ye A operatörünün tanım kümesi denir. D(A) ile gösterilir.

$$\Re = \Re(A) = \{y \in Y : y = A(x),\ x \in D(A)\}$$

kümesine A operatörünün değer veya görüntü kümesi denir. $A:X \to Y$ ve $E \subset X$, $F \subset Y$ olsun.

$$A(E) = \{ A(x) : x \in E \}$$

kümesine F ' nin görüntüsü ,

$$A^{-1}(F) = \{ x \in X : A(x) \in F \}$$

kümesine F ' nin ters görüntüsü denir.

X ve Y normlu uzayları ve $A:X \to Y$ operatörü verilsin. Aşağıdaki şartlar sağlandığında A operatörü $x_0 \in D(A)$ noktasında süreklidir denir.

a) $\forall \varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki $x \in D(A)$ ve $\|x - x_0\| < \delta$ iken $\|A(x) - A(x_0)\| < \varepsilon$ ' dur.

b) x_0 noktasına yakınsayan her $(x_n) \subset D(A)$ dizisi için

$$\lim_{x \to x_0} A(x_n) = A(x_0)$$

dır. Limit tanımına göre $A:X \to Y$ operatörünün $x_0 \in D(A)$ noktasında sürekli olması için $x \to x_0$ iken $A(x) \to A(x_0)$ olması demektir.

Eğer $A:X \to Y$ operatörü D(A) ' nın her noktasında sürekli ise A operatörü D(A) üzerinde süreklidir denir.

X ve Y aynı K cismi üzerinde iki lineer uzay ve $A:X \to Y$ operatörü verilsin. Eğer D(A) , X' in bir alt uzayı , her $x, y \in D(A)$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

ise A operatörüne lineer operatör veya lineer dönüşüm denir.

X ve Y normlu uzaylar ve A tanım kümesi, $D(A) \subset X$ ve görüntü kümesi $R(A) \subset Y$ olan bir operatör olsun. Eğer A operatörü D(A) ' nın X' de sınırlı her kümesine R(A)' nın Y ' de sınırlı bir kümesine karşılık getiriyorsa A operatörüne sınırlı operatör adı verilir. Bir başka deyişle eğer her $x \in D(A)$ için $\|A(x)\| \le c\|x\|$ olacak şekilde bir c>0 sabit sayısı varsa A operatörü sınırlı bir operatördür.

$A:X \to Y$ lineer operatörünün D(A) üzerinde sınırlı olması için gerekli ve yeterli koşul A operatörünün D(A) üzerinde sürekli olmasıdır.

1.5 Ters Operatörler: Lineer cebirsel denklem sistemi, lineer integral denklemler, adi ve kısmi türevli lineer diferansiyel denklemler gibi çok çeşitli problemler $Ax = y$ lineer operatörlü denklem şeklinde yazılabilir. Eğer A^{-1} ters operatörü mevcut ise $Ax = y$ denkleminin çözümü $x = A^{-1}y$ olarak yazılabilir. O halde ters operatörün varlığı ve onun gerekli özelliklere sahip olması koşullarının incelenmesi önem taşımaktadır.

X ve Y aynı K cismi üzerinde birer vektör uzayı olsun. Bilindiği gibi bir $A:X \to Y$ operatörü $D(A) \subset X$ tanım bölgesindeki farklı noktalara farklı görüntüler karşılık getiriyorsa , yani herhangi bir $x_1, x_2 \in D(A)$ için $x_1 \neq x_2$ iken $Ax_1 \neq Ax_2$ yada buna eşdeğer bir ifade $Ax_1 = Ax_2$ iken $x_1 = x_2$ oluyorsa $A:D(A) \to Y$ operatörüne birebir operatör adı verilir. Böyle bir durumda , her $y_0 \in \Re(A)$ elemanını $Ax_0 = y_0$ olacak şekilde $x_0 \in D(A)$ elemanına dönüştüren $A^{-1}: \Re(A) \to D(A)$ operatörü vardır. A^{-1} operatörüne A ' nın tersi adı verilir. Buna göre $\forall x \in D(A)$, $A^{-1}Ax = x$ ve $\forall y \in \Re(A)$ için $AA^{-1}y = y$ yazılabilir.

Tanım kümesi $D(A) \subset X$ ve değer bölgesi $\Re(A) \subset Y$ olan $A:X \to Y$ lineer operatörü verilmiş olsun. $\text{Çek}A = \{x \in D(A) : Ax = 0\}$ kümesine A operatörünün sıfır uzayı veya çekirdeği denir. ÇekA uzayı boş değildir. Çünkü $A0 = 0$ olduğundan $0 \in \text{Çek}A$ olur.

$A:X \to Y$ lineer operatörünün ÇekA sıfır uzayı ve R(A) değer bölgesi sırasıyla X ve Y uzaylarının lineer alt uzaylarıdır.

$A:D(A) \to R(A)$ operatörünün birebir ve örten olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\text{Çek}A = 0$ olmasıdır.

X,Y normlu uzaylar ve $A:D(A) \to Y$ bir lineer operatör olsun. $A^{-1}: R(A) \to D(A)$ ters operatörünün var ve sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $x \in D(A)$ için $\|Ax\| \geq m\|x\|$ olacak şekilde bir $m > 0$ sayısının bulunmasıdır.

Ters operatör teoremine göre X,Y Banach uzayları $A:X \to Y$ lineer, birebir, örten ve sınırlı bir operatör olsun. Bu durumda $A^{-1}: Y \to X$ ters operatörü var ve sınırlıdır.(Banach Teoremi)

$\|Ax\| \leq C\|x\|$ eşitsizliğini sağlayan C>0 sayılarının en küçük alt sınırına (infimumuna) $A:X \to Y$ sınırlı lineer operatörünün normu denir ve $\|A\|$ ile gösterilir. Buna göre

$$\|A\| = \inf\{\, C>0 : \forall\ x \in D(A) \text{ için } \|Ax\| \leq C\|x\| \,\}$$

olur. X,Y normlu uzaylar ve $A: X \to Y$ sınırlı bir lineer operatör ise A' nın normu $\|A\|$ aşağıdaki denk eşitliklerle verilebilir:

$$\|A\| = \mathrm{Sup}\{\, \|Ax\| : x \in D(A), \|x\| \leq 1 \,\},$$

$$\|A\| = \mathrm{Sup}\{\, \frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in D(A), x \neq \theta \,\}.$$

X ve Y normlu vektör uzayları verilsin. X 'den Y ' ye sınırlı vektör operatörlerden oluşan L(X,Y) vektör uzayı operatör normuna göre bir normlu vektör uzayıdır. Eğer Y bir Banach uzayı ise L(X,Y)' de bir Banach uzayıdır. L(X,Y) uzayı L(x) şeklinde gösterilir.

$A_1 \in L(X,Y)$ ve $A_2 \in L(Y,Z)$ operatörlerinin sırasıyla A_1^{-1} ve A_2^{-1} sınırlı ters operatörleri varolsun. Bu durumda $A_2 A_1 \in L(X,Z)$ operatörünün $(A_2 A_1)^{-1} = A_1^{-1} A_2^{-1} \in L(Z,X)$ tersi vardır.

X bir Banach uzayı ve $A \in L(X)$ olsun. Eğer $\|A\| < 1$ ise $(I-A)^{-1} \in L(X)$ ters operatörü mevcuttur ve

$$\|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$$

eşitsizliği doğrudur. (Bkz. Kantaroviç L.V. Akilov G.P.)

$A,B \in L(X,Y)$, $A^{-1} \in L(Y,X)$ ters operatörü varolsun ve $\|(B-A)A^{-1}\| < 1$ eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $B^{-1} \in L(Y,X)$ ters operatörü vardır ve

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|(B-A)A^{-1}\|}$$

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|\|(B-A)A^{-1}\|}{1-\|(B-A)A^{-1}\|}$$

eşitsizlikleri doğrudur. (Bkz. Kantaroviç L.V. Akilov G.P.)

1.6 Lineer Olmayan Operatörlerin Freshe Türevleri: Lineer olmayan fonksiyonel, diferansiyel, integral, integro - diferansiyel v.b. denklemlerin incelenmesinde uygun lineer olmayan operatörlerin yerel olarak lineer operatörlerle yaklaşımlar yardımıyla yapılabilir. Bu nedenle normlu uzaylarda lineer olmayan operatörlerin diferansiyel hesabının araştırılması önem taşımaktadır.

Bilindiği gibi bir f : (a,b) $\to$R fonksiyonunun herhangi bir $x_0 \in$(a,b) noktasında türeve sahip olması

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0) \tag{1.6.1}$$

eşitliğini sağlayan bir $f'(x_0)$ reel sayısının varlığı demektir. Bu eşitliğin f:$R^n \to R^m$ (m>1 veya n>1) şeklindeki fonksiyonların (genel olarak X ve Y Banach uzayları olmak üzere $f : X \to Y$ şeklindeki operatörler için)bir anlamı yoktur. $\lambda(h)=f'(x_0)h$ şeklinde tanımlanan $\lambda : R \to R$ lineer dönüşümü için (1.6.1) eşitliği

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-\lambda(h)}{h}=0 \tag{1.6.2}$$

eşitliğine denk olur.

Böylece bir $f:(a,b)\to R$ fonksiyonunun $x_0\in(a,b)$noktasında türeve sahip olması demek

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-\lambda(h)}{h}=0$$

eşitliğini sağlayacak bir $\lambda : R \to R$ lineer dönüşümünün varolması demektir.

$x=x_0+h$ ve $W(x)=f(x)-f(x_0)-\lambda(x-x_0)$ dersek $f:(a,b)\to R$ fonksiyonunun bir $x_0\in(a,b)$noktasındaki türevi şu şekilde tanımlanabilir:

$f:(a,b)\to R$ fonksiyonunun $x_0\in(a,b)$noktasında türevlenebilir olması demek $f(x)=f(x_0)+\lambda(x-x_0)+W(x)$, $x\in(a,b)$ olacak şekilde bir $\lambda : R \to R$dönüşümünün ve $\lim_{x\to x_0}\frac{W(x)}{x-x_0}=0$ veya $\lim_{x\to x_0}\frac{|W(x)|}{|x-x_0|}=0$ olacak şekilde bir $W:(a,b)\to R$ fonksiyonunun varolması demektir.

X ve Y Banach uzayları ve lineer olmayan $F:D \subset X \to Y$ operatörü verilmiş olsun. intD , D kümesinin iç noktalarından oluşan küme olmak üzere her bir $x \in \text{intD}$ için

$$F(x) = F(x_0)+A(x-x_0)+W(x-x_0) \tag{1.6.3}$$

olacak şekilde $A \in L(X,Y)$ sürekli lineer operatörü ve

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|W(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} = 0 \tag{1.6.4}$$

olacak şekilde $W:D \to Y$ operatörü varsa F(x) operatörüne $x_0 \in \text{intD}$ noktasında Freshe türevlenebilir ($\Im$- türevlenebilir)denir. (1.6.3)' deki A operatörüne F(x) operatörünün x_0 noktasında Freshe türevi($\Im$-türevi)denir. $\Im'(x_0)$ veya $D\Im(x_0)$ ile gösterilir. $x-x_0=h$ alınırsa (1.6.3) ve (1.6.4)eşitlikleri sırasıyla

$$F(x_0+h) - F(x_0) = F'(x_0)h + W(h) \tag{1.6.5}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|W(h)\|}{\|h\|} = 0 \tag{1.6.6}$$

şeklide yazılabilir.

Eğer $F(x):D \subset X \to Y$ operatörü $x_0 \in \text{intD}$ noktasında $\Im$-türevlenebilirse

$dF(x_0;h) \equiv F'(x_0)h$ ifadesine F(x) operatörünün x_0 noktasında h artışına uygun Freshe diferansiyeli($\Im$-diferansiyeli) denir.

Böyle $dF(x_0;h)$, $\Im$ diferansiyeli h elemanının $F'(x_0)$ lineer operatörü altındaki görüntüsüdür. F(x) operatörü x_0 noktasında $\Im$- türevlenebilirse F(x) operatörü x_0 noktasında süreklidir. Gerçekten $\lim\limits_{x \to x_0} W(x-x_0) = \theta$ olduğundan (1.6.3)' e göre $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$ elde edilir.

Türev almada şu kurallara dikkat edilir:

1) $D \subset X$ açık kümesinde sabit bir $F:X \to Y$ operatörü için D üzerinde $F'(x) = \theta$ ' dır.

2) $F:X \to Y$ ve $G:X \to Y$, $x_0 \in X$ noktasında $\Im$-türevlenebilir operatörler ve α, β skalerler olmak üzere $(\alpha F + \beta G)(x) = \alpha F(x) + \beta G(x)$ operatörü de x_0 noktasında F-türevlenebilirdir ve $(\alpha F + \beta G)'(x_0) = \alpha F'(x_0) + \beta G'(x_0)$ ' dır. Gerçekten F ve G operatörleri x_0 noktasında $\Im$-türevlenebilir olduğundan sırasıyla

$$F(x_0+h) - F(x_0) = F^{'}(x_0)h + W_1(h)$$

$$G(x_0+h) - G(x_0) = G^{'}(x_0)h+W_2(h) \quad \text{ve}$$

$$\lim_{h\to\theta}\frac{\|W_i(h)\|}{\|h\|}, \; i = 1,2,...'$$

dir. Bu durumda $H(x) = \alpha F(x) + \beta G(x)$ ve

$$\overline{W}(h) = \alpha\, W_1(h) + \beta\, W_2(h)$$

olmak üzere

$$H(x_0+h)-H(x_0) = \alpha F^{'}(x_0)h + \beta G^{'}(x_0)h + \alpha\, W_1(h) + \beta\, W_2(h)$$

$$= H^{'}(x_0)h + \overline{W}(h)$$

ve $\|h\| \to 0$ iken $\|\overline{W}(h)\| = 0(\|h\|)$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla H operatörü x_0 noktasında $\Im$-türevlenebilirdir ve $H^{'}(x_0) = \alpha\, F^{'}(x_0) + \beta G^{'}(x_0)$' dır.

3)Zincir Kuralı: X, Y ve Z Banach uzayları $G(z):Z\to X$ operatörü $z_0 \in Z$ noktasında $F(x):X\to Y$ operatörü $x_0 = G(z_0) \in X$ noktasında $\Im$-türevlenebilir ise $(F*G)(z) = F[G(z)]:Z\to Y$ operatörü z_0 noktasında $\Im$ - türevlenebilir ve $(F*G)^{'}(z_0) = F^{'}(z_0)\, G^{'}(z_0)$ olur.

Problem 1.6.1:. $D:[a,b]^2 \times R$ ve $f(x, s, u)$: $D\to R$ fonksiyonu ve onun $f_u(x, s, u)$ kısmi türevi D üzerinde sürekli olsun. Bu durumda

$$F(u) = u(x)-\int_a^b f(x, s, u(s))\, ds$$

şeklinde tanımlanan F: $C[a,b]\to C[a,b]$ operatörünün her bir $u_0(x) \in C[a,b]$ noktasında $\Im$-türevlenebilir olduğunu ve

$$F^{'}(u_0)h = h(x)-\int_a^b f(x, s, u_0(s))\, h(s)\, ds$$

eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Çözüm :Her bir $h(x) \in C[a,b]$ için

$$F(u_0+h)-F(u_0)=h(x)-\int_a^b f_u(x,s,u_0(s))\,h(s)\,ds+W(u_0,h)(x) \qquad (1.6.7)$$

burada $0 \le \theta \le 1$ olmak üzere

$$W(u_0,h)(x)=-\int_a^b \{\int_0^1 [(f_u(x,s,u_0(s)+\theta h(s))-f_u(x,s,u_0(s))]\,h(s)\,d\theta\}\,ds \qquad (1.6.8)$$

olduğu açıktır.

R>0 olmak üzere R^3' ün kapalı ve sınırlı

$$T_R=\{(x,s,u): x,s\in[a,b],\ u_0(s)-R\le u\le u_0(s)+R\}$$

kümesini göz önüne alalım. $f_u(x,s,u)$ fonksiyonu T_R üzerinde düzgün sürekli olduğundan $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ öyle ki

$\forall\ (x_1,s_1,u_1),(x_2,s_2,u_2)\in T_R$ için $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(s_1-s_2)^2+(u_1-u_2)^2}<\delta$ olduğunda $|f_u(x_1,s_1,u_1)-f_u(x_2,s_2,u_2)|<\varepsilon$ olur. (1.6.7) ve (1.6.8) ' de $\|h\|_\infty<\delta$ olsun. Bu durumda her bir $x,s\in[a,b]$ ve $0\le\theta\le1$ olmak üzere $(x,s,u_0(s)+\theta h(s))\in T_R$ olur. $x_1=x_2=x$, $s_1=s_2=s$, $u_1=u_0(s)+\theta h(s)$, $u_2=u_0(s)$ alınırsa her bir $x,s\in[a,b]$ için $\|h\|_\infty<\delta$ olacağından

$$\|W(u_0,h)\|_\infty=\max\{\int_0^1 [\int_0^1 (|f(x,s,u_0(s)+\theta h(s))-f_u(x,s,u_0(s))|\ |h(s)|\,d\theta]\,ds : x\in[a,b]\}<\varepsilon\|h\|_\infty$$

olduğu elde edilir. Dolayısıyla $\|h\|_\infty\to0$ ' da

$$\|W(u_0,h)\|_\infty=o(\|h\|_\infty)$$

olur. Buradan

$$F(u)=u(x)-\int_a^b f(x,s,u(s))\,ds$$

ifadesiyle tanımlı F operatörünün $u_0(x)\in C[a,b]$ noktasında $\mathfrak{J}$ - türevlenebilir olduğu ve

$$F'(u_0)h=h(x)-\int_a^b f(x,s,u_0(s))\,h(s)\,ds$$

eşitliğinin doğruluğu görülür.

$$F(u) = u(x) - \int_a^b f(x, s, u(s))\, ds$$

ifadesinde $K(x, s, u) = K(x,s)\, f(s,u)$ olsun. Eğer $K(x,s)$ fonksiyonu $[a,b]^2$ üzerinde $f(s,u)$ fonksiyonu ve onun $f_u(s,u)$ kısmi türevi

$$D_1 = \{(s,u) \in R^2 ;\ s \in [a,b],\ u \in R\}$$

üzerinde sürekli fonksiyon iseler

$$F_1(u) = u(x) - \int_a^b K(x,s)\, f(s, u(s))\, ds$$

şeklinde tanımlanan $F_1 : C[a,b] \to C[a,b]$ operatörü her bir $u_0 \in C[a,b]$ noktasında $\mathfrak{I}$-türevlenebilirdir ve

$$F_1{}'(u_0)h = h(x) - \int_a^b K(x,s)\, f_u(s, u_0(s))\, h(s)\, ds$$

eşitliği doğrudur.

1.7. İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması: λ sayısal bir parametre , $f(t)$ ve $K(t,s)$ bilinen fonksiyonlar , $x(t)$ ise bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$x(t) - \lambda \int_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds = f(t) \qquad (1.7.1)$$

şeklindeki denkleme **ikinci çeşit Fredholm lineer integral denklem** adı verilir.

$K(t,s)$ fonksiyonu , integral denklemin çekirdeği olarak isimlendirilir. $K(t,s)$ fonksiyonu (t,s) düzleminin bir $D = \{(s,t) \in R^2 : a \le t \le b ,\ a \le s \le b\}$ karesi üzerinde tanımlıdır , süreklidir veya süreksizlik noktalarında

$$\iint_D |K(t,s)|^2\, ds dt < \infty \qquad (1.7.2)$$

koşulu sağlanır.

$f(t)$ fonksiyonu özdeş olarak sıfıra eşit değilse (1.7.1) denklemi homojen olmayan lineer integral denklem olarak isimlendirilir. $f(t) \equiv 0$ ise (1.7.1) denkleminin yerini

$$x(t) - \lambda \int_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds = 0 \qquad (1.7.3)$$

alacaktır. Bu denkleme homojen lineer integral denklem denir.

$x(t)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds = f(t) \tag{1.7.4}$$

şeklindeki denkleme **birinci çeşit Fredholm lineer integral denklem** adı verilir.

(1.7.1) , (1.7.3) ve (1.7.4) integral denklemlerinin bir çözümü bu denklemlerde yerine konulduğunda $t \in (a,b)$ ' ye göre yazılmış bir özdeşliğin ortaya çıkmasını olası kılan herhangi bir x(t) fonksiyonudur.

(1.7.1) , (1.7.3) ve (1.7.4) integral denklemleri çekirdeklerinin simetrik olması durumunda , yani $K(t,s) = K^*(t,s) = \overline{K(t,s)}$ sağlandığı durumda simetrik çekirdekli integral denklemler olarak isimlendirilir.

λ sayısal bir parametre , g(t) ve M(t,s) bilinen fonksiyonlar , y(t) ise bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$y(t) - \lambda \int_a^t M(t,s)\,y(s)\,ds = g(t) \tag{1.7.5}$$

şeklindeki denkleme **ikinci çeşit Volterra lineer integral denklem** adı verilir. $g(t) \equiv 0$ ise (1.7.5) denklemine , yani

$$y(t) - \lambda \int_a^t M(t,s)\,y(s)\,ds = 0$$

denklemine ise **birinci çeşit Volterra lineer integral denklem** adı verilir.

x(t) bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$x(t) = f(t) + \int_a^t \phi[t,s,x(s)]ds \quad , t \in [a,b]$$

şeklindeki integral denkleme lineer olmayan Volterra integral denklemi

$$x(t) = f(t) + \int_a^b \phi[t,s,x(s)]ds \quad , t \in [a,b]$$

şeklindeki integral denkleme ise lineer olmayan Fredholm integral denklem denir.

İntegral denklemlerin daha detaylı sınıflandırılması bibliyografyada gösterilen (Aksoy , 1998) , (Petrovskiy , 1965) , (Tricomi , 1957) , (Hüseynov , 1981) eserlerde verilmektedir.

NOT :İleride lineer ve lineer olmayan integral denklemlerin belli bazı çözüm yöntemleri incelenmektedir.

1.8. Banach Sabit Nokta Prensibi :X Banach uzayının D kümesinde tanımlı A:D→X operatörü verilmiş olsun. Eğer her x,y∈D için $\|Ax-Ay\| \le \alpha\|x-y\|$ olacak şekilde $0\le \alpha \le 1$ sayısı varsa A:X→X operatörü daralma dönüşüm operatörüdür. Burada α daralma dönüşüm katsayısıdır.

Teorem 1.8.1 :(Banach Sabit Nokta Prensibi) D kümesi kapalı olsun ve A:X→X daralma operatörü D ' yi D' ye çevirir. A(D)⊂D ' dir. Bu durumda A operatörünün D 'de tek bir sabit x* noktası vardır. Başka bir deyişle x = Ax denkleminin tek bir x*∈D çözümü vardır ve bu çözümü $x_n = Ax_{n-1}$ n =1,2,... formülü ile tanımlanmış (x_n) dizisinin limiti gibi bulunabilir. Burada x_0 D 'nin herhangi elemanıdır. (x_n) dizisinin x* çözümüne yaklaşma hızı

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\|$$

dır.

Kaynaklarda Banach Sabit Nokta Prensibine Daralma Dönüşüm Prensibi de denilir.

Problem 1.8.1:. $x(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 t\,s\,x(s)\,ds + \frac{5}{6}t$ (1.8.1)

integral denkleminin ardışık yaklaşımlar yöntemi ile çözümünü bulunuz.

Çözüm: Denklemin çekirdeği K(t,s) = ts , $G = \{(t,s)\in R^2 : 0\le t, s\le 1\}$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$M = \max\{\int_0^1 |ts|ds : 0\le t, s\le 1\} = \max\{\frac{t}{2} : 0\le t\le 1\} = \frac{1}{2}$$

olur. Buradan $\lambda = \frac{1}{2}$ olduğundan $\alpha = \lambda M = \frac{1}{4} < 1$ ve dolayısıyla Banach Sabit Nokta Prensibi gereğince (1.8.1)denkleminin [0,1] üzerinde sürekli tek bir x*(t) çözümü vardır. Bu çözüm

$$x_n(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\, x_{n-1}(s)\, ds + f(s) , \; n = 1,2,...$$

formülleri ile tanımlanan $(x_n(t))$ dizisinin limiti olarak bulalım.

$$x_0(t) = 0$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 t\,s\,x_0(s)\,ds + \frac{5}{6}t = \frac{5}{6}t$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 t\,s\,x_1(s)\,ds + \frac{5}{6}t = \frac{5}{6}t\,(1+\frac{1}{6})$$

$$x_3(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 t\,s\,x_2(s)\,ds + \frac{5}{6}t = \frac{5}{6}t\,(1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2})$$

. . .

. . . . .

$$x_n(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 t\,s\,x_{n-1}(s)\,ds + \frac{5}{6}t = \frac{5}{6}t\,(1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{6^{n-1}}) = t\,(1-\frac{1}{6^n})$$

. . . .

Buradan ;

$$x_*(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = \lim_{n\to\infty} t(1-\frac{1}{6^n}) = t$$

Eğer $x_0(t) = t$ ise $x_1(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 t\,s^2\,ds + \frac{5}{6}t = t$, $x_2(t) = t$ v.b. Böylece (1.8.1) denkleminin çözümü hemen bulunabilir. Görüldüğü gibi başlangıç yaklaşımının başarılı seçimi integral denkleminin çözümünün ardışık yaklaşımların limiti olarak hesaplanması prosesini kısaltmaktadır.

Problem 1.8.2:. $x(t) = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \frac{ts}{1+x^2(s)}ds + 1$ (1.8.2)

integral denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm: $K(t, s, z) = \frac{ts}{1+z^2}$ fonksiyonu $G = \{(t,s,z) : -1 \le t\ ,\ s \le 1\ ,\ -\infty < z < \infty\}$ üzerinde süreklidir. K(t, s, z) fonksiyonunun z ' ye göre kısmi türevi

$$\frac{\partial K}{\partial z} = -\frac{2tsz}{(1+z^2)^2} \qquad \text{G üzerinde sınırlıdır.}$$

$$\left|\frac{\partial K}{\partial z}\right| = \left|-\frac{2tsz}{(1+z^2)^2}\right| \le 1 \qquad , \ (t, s, z) \in G$$

Şu halde K(t, s, z) fonksiyonu L=1 katsayısı ile Lipshitz koşulunu sağlar.

$$\lambda = \frac{1}{3}, \ a=-1, \ b=1 \text{ ve } \alpha = |\lambda| L(b-a) = \frac{2}{3} < 1 \qquad \text{olduğundan}$$

$$Ax(t) = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\frac{ts}{1+x^2(s)}ds + 1 \qquad t \in [-1,1]$$

operatörü herhangi $0<r$ sayısı için $\overline{S_r(\theta)} = \{x \in C[-1,1] \ : \|x\|_\infty \le r\}$ üzerinde daralma operatörü olur.

$$L_1 = \max\left\{\left|\int_{-1}^{1} K(t,s,0)\right| ds \ : t \in [-1,1]\right\} = \max\left\{\left|\int_{-1}^{1} tsds\right| : t \in [-1,1]\right\} = 1$$

olduğundan $r \ge 4$ sayısı için $Ax(t) = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\frac{ts}{1+x^2(s)}ds + 1$ $\quad t \in [-1,1]$ formülü ile

tanımlı A operatörü $\overline{S_r(\theta)} = \{x \in C[-1,1] \ : \|x\|_\infty \le r\}$ yuvarını kendisine çevirir. O zaman Banach Sabit Nokta Prensibi gereğince (1.8.2) denkleminin C[-1,1] uzayının $\overline{S_r(\theta)}$ yuvarında tek bir $x_*(t)$ çözümü vardır. Bu çözümü

$$x_n(t) = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\frac{ts}{1+x_{n-1}{}^2(s)}ds + 1 \quad , n=1,2,...$$

şeklinde tanımlanan $(x_n(t))$ dizisinin limiti olarak bulalım.

$$x_0(s) \equiv 1 \ ,$$

$$x_1(t) = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\frac{ts}{1+1^2}ds + 1 = 1 \ ,$$

. . . . .

$$x_n(t) = 1 \qquad n=2,3,...$$

Buradan $x_*(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) = 1$ ' dir.

Banach Sabit Nokta Prensibinin başka türlü lineer ve lineer olmayan denklemlere uygulamaları Bölüm 2 ' de incelenmektedir.

BÖLÜM 2

İntegral Denklemlerin Tahmini Çözümü İçin Bazı Yöntemler

2.1 Ardışık Yaklaşımlar Yöntemi

2.1.1 Lineer Fredholm integral denklemleri :İkinci çeşit Fredholm integral denklemler

$$x(t) - \lambda \int_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds = f(t) \quad , t \in [a,b] \qquad (2.1.1)$$

formundadır. Burada x(t) bilinmeyen K(t,s) ve f(t) ise bilinen fonksiyonlardır. t ve s reel değişkenler olup [a,b] aralığında değerler almaktadır. λ ise skaler bir parametredir.

K(t,s) fonksiyonu integral denklemin çekirdeğidir. K(t,s) çekirdeği (t,s) düzleminin bir $\Omega\{\ a \le t \le b,\ a \le s \le b\}$ karesinin üzerinde tanımlanmıştır. Süreklidir veya süreksizlik noktalarında

$$\int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 \, dt\, ds$$

iki katlı integralin sonlu bir değeri vardır.

f(t) fonksiyonu özdeş olarak sıfıra eşit değilse (2.1.1) denklemi homojen olmayan integral denklem olarak isimlendirilir. $f(t) \equiv 0$ ise (2.1.1) ' in yerini

$$x(t) - \lambda \int_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds = 0 \qquad (2.1.2)$$

alacaktır; bu denklem homojen integral denklem olarak isimlendirilir.

(2.1.1) ve (2.1.2) denklemlerinde integrasyon sınırları a ve b sonlu olabileceği gibi sonsuz da olabilir. (2.2.1) ve (2.2.2) integral denklemlerinin bir çözümü bu denklemlerde yerine konulduğunda $t \in [a,b]$ ' ye göre yazılmış bir özdeşliğin ortaya çıkmasını olası kılan herhangi bir x(t) fonksiyonudur.

Daralma dönüşüm prensibi yardımıyla ikinci cins homojen olmayan (2.1.1) integral denkleminin çözümünün varlığını ve tekliğini ispatlayalım. K(t,s) fonksiyonu $G = \{(t,s) \in R^2 : a \le t \le b,\ a \le s \le b\ \}$ üzerinde , f(t) ise [a,b] üzerinde sürekli ve

$M = \max\{ \int_a^b |K(t,s)|\, ds : a \leq t \leq b \}$ olsun. $x \in C[a,b]$ için

$$Ax(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds + f(t) \quad , \quad t \in [a,b]$$

şeklinde tanımlı A operatörüne bakalım. $x_1(t)$, $x_2(t) \in C[a,b]$ fonksiyonları için

$$|Ax_1(t) - Ax_2(t)| = \left| \lambda \int_a^b K(t,s)[x_1(s) - x_2(s)]ds \right|$$
$$\leq |\lambda| M \, \|x_1 - x_2\|_\infty$$

ve buradan $\alpha = |\lambda| M$ olmak üzere

$$\|Ax_1 - Ax_2\|_\infty \leq \alpha \, \|x_1 - x_2\|_\infty$$

elde edilir. Dolayısıyla $\alpha = |\lambda| M < 1$ olduğunda A , C[a,b] üzerinde daralma operatörü olur.

$\alpha = |\lambda| M < 1$ olduğunda Banach Sabit Nokta Prensibi gereğince (2.1.1) denkleminin [a,b] aralığı üzerinde sürekli tek bir $x^*(t)$ çözümü vardır ve her bir başlangıç $x_0 \in C[a,b]$ fonksiyonu için

$$x_n(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\, x_{n-1}(s)\, ds + f(s) \quad , n = 1,2,...$$

şeklinde tanımlanan (x_n) dizisi x^* fonksiyonuna [a,b] üzerinde düzgün yakınsaktır ve her bir $t \in [a,b]$ için

$$|x_n(t) - x*(t)| \leq \frac{(|\lambda| M)^n}{1 - |\lambda| M} \|x_1 - x_0\|_\infty \quad , n = 1,2,...$$

eşitsizliği doğrudur.

2.1.2 Lineer Volterra integral denklemler: u(t) bilinmeyen fonksiyon ve K(t,s) çekirdek fonksiyon olmak üzere

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,s)\, x(s)\, ds \qquad (2.1.3)$$

şeklinde bir bağıntıya ikinci cins lineer Volterra integral denklem denir. Burada λ bir skaler parametredir. Eğer $f(t) \equiv 0$ ise

$$x(t) = \lambda \int_a^t K(t,s)\, x(s)\, ds$$

şeklindeki denkleme ise ikinci cins lineer homojen Volterra integral denklem denir. Bu tür denklemleri Fredholm integral denklemlerden ayıran tek fark integral sınırlarından birinin t olmasıdır. Ayrıca t ' nin alt sınır olarak verilmesi halinde

$$\int_t^b K(t,s)\, x(s)\, ds = -\int_b^t K(t,s)\, x(s)\, ds$$

yazılabileceğinden genel ifade bozulmayacaktır.

$$\int_a^t K(t,s)\, x(s)\, ds = \phi(t)$$

şeklindeki denklemler genellikle bir diferansiyel denkleme dönüştürülmek suretiyle çözülürler. (2.1.3) denkleminin her bir $\lambda \in R$ sayısı için çözümün varlığı ispat edilebilir. $x(t) \in C[a,b]$ için

$$Ax(t) = \lambda \int_a^t K(t,s)\, x(s)\, ds + f(t) \qquad , t \in [a,b]$$

şeklinde tanımlanan $A : C[a,b] \to C[a,b]$ operatörüne bakalım. $M = \max\{|K(t,s)| : a \le t,\ s \le b\}$ olsun. $x_1(t)$, $x_2(t)$ $\in C[a,b]$ fonksiyonları için

$$|Ax_1(t) - Ax_2(t)| = \left|\lambda \int_a^t K(t,s)[x_1(s) - x_2(s)]ds\right|$$

$$\le |\lambda|\ M(t-a)\|x_1 - x_2\|_\infty$$

elde edilir. Buradan

$$|A^2x_1(t) - A^2x_2(t)| = |A(Ax_1(t) - Ax_2(t))|$$

$$= \left|\lambda \int_a^t K(t,s)[Ax_1(s) - Ax_2(s)]ds\right|$$

$$\leq |\lambda| \, M \int_a^t |Ax_1(s) - Ax_2(s)| ds$$

$$\leq |\lambda|^2 M^2 \int_a^t (s-a) \, \|x_1 - x_2\|_\infty \, ds$$

$$= |\lambda|^2 M^2 \frac{(t-a)^2}{2} \|x_1 - x_2\|_\infty$$

ve genellikle

$$|A^m x_1(t) - A^m x_2(t)| \leq |\lambda|^m M^m \frac{(t-a)^m}{m!} \|x_1 - x_2\|_\infty$$

olur. Buradan

$$\alpha_m = \frac{(|\lambda| M(b-a))^m}{m!}$$

olmak üzere

$$\|A^m x_1 - A^m x_2\|_\infty \leq \alpha_m \|x_1 - x_2\|_\infty$$

elde edilir.

Her bir $\lambda \in R$ için $\lim\limits_{m\to\infty} \alpha_m = 0$ olduğundan öyle m doğal sayısı seçilebilir ki $\alpha_m < 1$ olur. Dolayısıyla A^m operatörü C[a,b] üzerinde daralma operatörü olur. Banach Sabit Nokta Prensibi gereğince her bir $x_0 \in$ C[a,b] başlangıç fonksiyonu için terimleri

$$x_n(t) = \lambda \int_a^t K(t,s)\, x_{n-1}(s)\, ds + f(t) \qquad , n = 1,2,... \qquad (2.1.4)$$

şeklinde tanımlanan $(x_n(t))$ dizisi $x^*(t)$ fonksiyonuna [a,b] üzerinde düzgün yakınsaktır ve her bir $t \in [a,b]$ için

$$|x_n(t) - x*(t)| \leq \frac{\alpha_m{}^n}{1-\alpha_m} \|x_1 - x_0\|_\infty$$

$$\alpha_m = \frac{(|\lambda| M(b-a))^m}{m!}$$

eşitsizliği doğrudur. Eğer

$$x_n(t) - x_{n-1}(t) = \lambda^n y_n(t) \qquad , \quad n = 1,2,... \quad \text{dersek}$$

$$x_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \lambda^j \, y_j(t) \quad \text{, burada}$$

$$y_0(t) = f(t) \qquad \text{ve}$$

$$y_n(t) = \int_a^t K(t,s) y_{n-1}(s) ds \qquad , n = 1,2,...$$

elde edilir. Bununla beraber

$$K_1(t,s) = K(t,s) \; ,$$

$$K_{n+1}(t,s) = \int_s^t K(t,z) \, K_n(z,s) \, dz, \quad n = 1,2,...$$

rekürans bağıntıları yardımıyla belirlenen ve ardışık çekirdekler olarak isimlendirilen $K_1(t,s)$, $K_2(t,s)$, $K_3(t,s)$,........fonksiyonları yardımıyla (2.1.4) iterasyon prosesi

$$y_n(t) = \int_a^t K_n(t,s) \, f(s) \, ds \quad , n = 1,2,.....$$

şeklinde yazılabilir.

2.2. Fredholm Determinantlar Yöntemi:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t) \, \varphi(t) \, dt = f(x) \tag{2.2.1}$$

formunda ikinci çeşit Fredholm integral denkleminin çözümü

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda) \, f(t) \, dt \tag{2.2.2}$$

formülü ile verilir. Burada $R(x,t;\lambda)$ fonksiyonu (2.2.1) denkleminin Fredholm çözücü çekirdeği olarak isimlendirilir ve $D(\lambda) \neq 0$ olmak koşuluyla

$$R(x,t;\lambda) = \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)} \tag{2.2.3}$$

bağıntısı ile tanımlanır. Burada $D(x,t;\lambda)$ ve $D(\lambda)$, λ cinsinden yazılmış kuvvet serileridir.

$$D(x,t;\lambda) = K(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x,t) \lambda^n \tag{2.2.4}$$

$$D(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}c_n\lambda^n \qquad (2.2.5)$$

ve katsayıları $B_0(x,t) = K(x,t)$ olmak üzere

$$B_n(x,t)=\int_a^b\int_a^b ......\int_a^b \begin{vmatrix} K(x,t) & K(x,t_1)...... & K(x,t_n) \\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1)...... & K(t_1,t_n) \\ K(t_n,t_1) & K(t_n,t_2)...... & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1dt_2...dt_n \qquad (2.2.6)$$

$$c_n=\int_a^b\int_a^b ......\int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2)...... & K(t_1,t_n) \\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2)...... & K(t_2,t_n) \\ K(t_n,t_1) & K(t_n,t_2)...... & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1dt_2...dt_n \qquad (2.2.7)$$

ile verilir.

D(x,t; λ) fonksiyonu Fredholm minörü , D(λ) fonksiyonu ise Fredholm determinantı olarak isimlendirilir. K(x,t) çekirdeği sınırlı veya $\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)$ dx dt integrali sonlu ise (2.2.4) ve (2.2.5) serileri λ' nın her değeri için yakınsaktır ve dolayısıyla λ' nın analitik fonksiyonlarıdır.

$$R(x,t;\lambda)=\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}$$

çözücü çekirdeği λ' nın D(λ) ' yı sıfır kılan değerlerin dışında λ' nın analitik bir fonksiyonudur. D(λ) ' yı sıfır kılan λ değerleri R(x,t; λ) çözücü çekirdeğinin kutup noktaları olarak da isimlendirilir.

Problem 2.2.1: Fredholm determinantlarını kullanarak $a = 0$ ve $b = 1$ olmak üzere $K(x,t) = xe^{t}$ çekirdeği için çözücü çekirdeği bulunuz.

Çözüm :Önce $B_0(x,t) = xe^{t}$ olduğunu belirtelim. İntegral işareti altındaki determinantların sıfır olması nedeniyle

$$B_1(x,t) = \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^{t} & xe^{t_1} \\ t_1e^{t} & t_1e^{t_1} \end{vmatrix} dt_1 = 0 \ ,$$

$$B_2(x,t) = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^{t} & xe^{t_1} & xe^{t_2} \\ t_1e^{t} & t_1e^{t_2} & t_1e^{t_2} \\ t_2e^{t} & t_2e^{t_2} & t_2e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1 dt_2 = 0$$

olur.

$n=3,4,\ldots$ için de $B_n(x,t) = 0$ olacaktır. Şimdi de c_n ' leri bulalım.

$$c_1 = \int_0^1 K(t_1,t_1)\,dt_1 = \int_0^x t_1e^{t_1}\ dt_1 = 1$$

$$c_2 = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} t_1e^{t_1} & t_1e^{t_2} \\ t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1\, dt_2 = 0$$

n 'in diğer değerleri için de $c_n = 0$ olduğu görülür. Bu problem için (2.2.4) ve (2.2.5) bağıntılarında yer alan büyüklüklerin $D(x,t;\lambda) = K(x,t) = xe^{t}$; $D(\lambda) = 1-\lambda$ olduğu söylenebilir. Dolayısıyla

$R(x,t;\lambda) = \dfrac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)} = \dfrac{xe^{t}}{1-\lambda}$ olacaktır. Elde ettiğimiz sonucu

$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 xe^{t}\varphi(t)\ dt = f(x)$, $(\lambda \neq 1)$ denkleminin çözümü için kullanalım. (2.2.2) formülüne göre

$$\varphi(x) = e^{-x} + \lambda \int_0^1 \frac{xe^t}{1-\lambda} f(t)\, dt$$

dir. Özellikle $f(x) = e^{-x}$ için

$$\varphi(x) = e^{-x} + \frac{\lambda}{1-\lambda} x$$

olacaktır. Uygulamalarda ancak nadir durumlarda (2.2.4) ve (2.2.5) serilerinin $B_n(x,t)$, c_n katsayıları (2.2.6) ve (2.2.7) formülleri kullanılarak hesaplanır. Bu formüllerden hareketle aşağıdaki reküranş bağıntılarını oluşturmak ve bu yolu izleyerek hedefe ulaşmak yaygın olarak kullanılan bir yöntemdir.

$$B_n(x,t) = c_n K(x,t) - n \int_a^b K(t,s)\, B_{n-1}(s,t)\, ds \qquad (2.2.8)$$

$$c_n = \int_a^b B_{n-1}(s,s)\, ds \qquad (2.2.9)$$

$c_0 = 1$, $B_0(x,t) = K(x,t)$ olduğu dikkate alınır ve (2.2.8) ve (2.2.9) formülleri ard arda kullanılırsa c_1, $B_1(x,t)$, c_2 , $B_2(x,t)$, c_3 ve diğerleri bulunur.

ÖRNEK: (2.2.8) ve (2.2.9) formüllerini kullanarak $K(x,t) = x-2t$ çekirdeği için çözücü çekirdeği bulalım. $0 \le x \le 1$, $0 \le t \le 1$ olarak belirlenmiştir. $c_0 = 1$, $B_0(x,t) = x-2t$ ' dir. (2.2.9) bağıntısı kullanılarak

$$c_1 = \int_0^1 (-s)\, ds = -\frac{1}{2}$$

buluruz. (2.2.8) bağıntısından

$$B_1(x,t) = -\frac{x-2t}{2} - \int_0^1 (x-2s)(s-2t)\,ds = -x-t+2xt+\frac{2}{3}$$ bulunur.

$$c_2 = \int_0^1 \left(-2s + 2s^2 + \frac{2}{3}\right) ds = \frac{1}{3}$$

$$B_2(x,t) = \frac{x-2t}{3} - 2\int_0^1 (x-2s)\,(-s-t+2st+\frac{2}{3})\,ds = 0$$

$$c_3 = c_4 = \ldots = 0 \quad \text{ve } B_3(x,t) = B_4(x,t) = \ldots = 0$$

bulunur. Dolayısıyla $D(\lambda) = 1+\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^2}{6}$; $D(x,t;\lambda) = x-2t+(x+t-2xt-\frac{2}{3})\lambda$

ve verilen çekirdeğin çözücü çekirdeği

$$R(x,t,;\lambda) = \frac{x-2t+(x+1-2xt-\frac{2}{3})\lambda}{1+\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^2}{6}}$$

olacaktır.

2.3. Ardışık Çekirdekler. Çözücü Çekirdeğin Ardışık Çekirdekler Vasıtasıyla Oluşturulması:

Aşağıdaki gibi Fredholm integral denklemini ele alalım.

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt \tag{2.3.1}$$

(2.3.1) integral denklemi Volterra integral denklemlerinde olduğu gibi ardışık yaklaşımlar yöntemi yöntemiyle çözülebilir. Bu amaçla

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)\lambda^n \tag{2.3.2}$$

alalım. Burada yer alan $\psi_n(x)$ fonksiyonları şu bağıntılardan elde edilir:

$$\psi_1(x) = \int_a^b K(x,t) f(t)\,dt$$

$$\psi_2(x) = \int_a^b K(x,t)\,\psi_1(x)\,dt = \int_a^b K_2(x,t)\,f(t)\,dt$$

. . . .

$$\psi_n(x) = \int_a^b K(x,t)\ \psi_{n-1}(x)\ dt = \int_a^b K_n(x,t)\ f(t)\ dt$$

Burada $K_1(x,t) = K(x,t)$ olmak üzere

$$K_2(x,t) = \int_a^b K(x,z)\, K_1(z,t)\, dz \ ,$$

$$K_3(x,t) = \int_a^b K(x,z)\, K_2(z,t)\, dz \ ,$$

. . . .

$$K_n(x,t) = \int_a^b K(x,t)\ K_{n-1}(z,t)\ dz \qquad (2.3.3)$$

$K_n(x,t)$ fonksiyonları (2.3.3) formüllerinden elde edilir ve ardışık çekirdekler olarak adlandırılır. Ardışık çekirdekler şu bağıntıyı gerçekler;

$$K_n(x,t) = \int_a^b K_m(x,s) K_{n-m}(s,t)\ ds \qquad (2.3.4)$$

Burada n ve m doğal sayılar olup $m \leq n$ ' dir. (2.3.1) integral denkleminin çözücü çekirdeği ardışık çekirdekler cinsinden

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x,t)\lambda^{n-1} \qquad (2.3.5)$$

ile verilir. (2.3.5)' in sağ yanındaki seri $K(x,t)$ çekirdeğinin NEYMAN serisi olarak adlandırılır. Bu seri

$$B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x,t)dxdt} \qquad \text{olmak üzere}$$

$$|\lambda| < \frac{1}{B} \tag{2.3.6}$$

için yakınsaktır. (2.3.1) ile verilen ikinci çeşit Fredholm denkleminin çözümü

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t;\lambda)\, f(t)\, dt \tag{2.3.7}$$

formülü ile ifade edilir. (2.3.6) ile verilen sınır (2.3.5) serisinin yakınsak olması için esas olmakla beraber (2.3.1) denkleminin $|\lambda| > \frac{1}{B}$ için de bir çözümü olabilir.

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \varphi(t)dt = 1 \tag{2.3.8}$$

Burada K(x,t) = 1 ve dolayısıyla

$$B^2 = \int_0^1\int_0^1 K^2(x,t)dxdt = \int_0^1\int_0^1 dxdt = 1$$

olur. (2.3.6) koşulundan hareketle (2.3.5)serisinin $|\lambda|<1$ için yakınsak olduğunu söyleyebileceğiz. (2.3.8) denklemini dejenere çekirdeğe sahip bir denklem olarak çözerken

$(1-\lambda)c = 1$ olarak alacağız. Burada $c = \int_0^1 \varphi(t)dt$ ' dir. $\lambda = 1$ için bu denklem çözülemez ve dolayısıyla (2.3.8) integral denkleminin bir çözümü olamaz.

Bazı Fredholm denklemleri için (2.3.5) Neyman serisi λ ' nın her değeri için çözücü çekirdeğe yakınsar. K(x,t) ve L(x,t) gibi iki çekirdek alalım. x ve t 'nin belirli değerleri için aşağıdaki iki koşulun gerçekleşmesi halinde çekirdeklerin ortogonal olduğu söylenebilir.

$$\int_a^b K(x,z)\, L(z,t)\, dz = 0\,,$$

$$\int_a^b L(x,z)\, K(z,t)\, dz = 0 \tag{2.3.9}$$

ÖRNEK: $K(x,t) = \sin(x-2t)$;$0 \leq x \leq 2\pi$ olsun.

$$\int_0^{2\pi} \sin(x-2z)\sin(z-2t)\,dz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos(x+2t-3z)-\cos(x-2t-z)]\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\sin(x+2t-3z)+\sin(x-2t-z)\right]\Big|_{z=0}^{z=2\pi}$$

$$= 0$$

Bu problem için çekirdeğin çözücü çekirdeği , çekirdeğin kendisine eşittir.

$$R(x,t;\lambda) = \sin(x-2t)$$

olur. Dolayısıyla (2.3.5) Neyman serisi bir ve yalnız bir terimden ibarettir. λ ' nın her değeri için yakınsaktır.

Ardışık $K_n(x,t)$ çekirdekleri $K(x,t)$ aracılığıyla doğrudan doğruya

$$K_n(x,t) = \int_a^b \int_a^b \ldots\ldots\int_a^b K(x,s_1)K(s_1,s_2)\ldots\ldots K(s_{n-1},t)\,ds_1 ds_2 \quad ds_{n-1} \qquad (2.3.10)$$

formülü ile ifade edilebilir.

$K_2(x,t)$ çekirdeği ile başlayan tüm $K_n(x,t)$ çekirdekleri $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq b$ karesi üzerinde $K(x,t)$ ' nin kuadratik olarak integre edilebilir olması halinde söz konusu kare üzerinde sürekli fonksiyonlardır. $K(x,t)$ çekirdeği simetrik ise diğer ardışık $K_n(x,t)$ çekirdekleri de simetriktir. Ardışık çekirdekler şu formda ifade edilebilir:

(1) $n = 2k-1$ $\qquad K_{2k-1}(x,t) = \dfrac{(-1)^k}{12^{k-1}}(x-t)$

(2) $n = 2k$ $\qquad K_{2k}(x,t) = \dfrac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}}\left(\dfrac{x+t}{2}-xt-\dfrac{1}{3}\right) \qquad k = 1,2,\ldots$

ÖRNEK: a = 0, b = 0, $K(x,t) = e^{\min(x,t)}$ olsun. $K_1(x,t)$ ve $K_2(x,t)$ çekirdeklerini bulalım. Tanım gereği

$$\min(x,t) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le t \\ t, & t \le x \le 1 \end{cases}$$

dir. Bu nedenle verilen çekirdek

$$K(x,t) = \begin{cases} e^x, & 0 \le x \le t \\ e^t, & t \le x \le 1 \end{cases}$$

formunda yazılabilir. Bu çekirdek simetriktir. Başka bir deyişle $K(x,t) = K(t,x)$ ' dir. $K_1(x,t) = K(x,t)$ ' dir. İkinci ardışık çekirdeği bulalım:

$$K_2(x,t) = \int_0^1 K(x,s)\, K_1(t,s)ds = \int_0^1 K(x,s)\, K(s,t)ds$$

dir. Burada

$$K(x,s) = \begin{cases} e^x, & 0 \le x \le s \\ e^s, & s \le x \le 1 \end{cases}, \quad K(s,t) = \begin{cases} e^s, & 0 \le s \le t \\ e^t, & t \le s \le 1 \end{cases}$$

olur. $K(x,t)$ çekirdeği simetrik olduğundan $x > t$ için $K_2(x,t)$ 'yi bulmak yeterlidir.

$$K_2(x,t) = \int_0^t K(x,s)\, K(s,t)ds + \int_t^x K(x,s)\, K(s,t)ds + \int_x^1 K(x,s)\, K(s,t)ds$$

yazılabilir. $(0,t)$ aralığında $s < t < x$ 'tir. Dolayısıyla

$$\int_0^t K(x,s)\, K(s,t)ds = \int_0^t e^s\, e^s ds = \int_0^t e^{2s} ds = \frac{e^{2t} - 1}{2}$$

olacaktır. (t,x) aralığında $t < s < x$ olup ;

$$\int_t^x K(x,s)\, K(s,t)ds = \int_t^x e^s e^t ds = e^{x+t} - e^{2t}$$

olur. $(x,1)$ aralığında $s > x > t$ olup;

$K_1(x,t) = K(x,t)$ ' dir. İkinci ardışık çekirdeği bulalım:

$$K_2(x,t) = \int_0^1 K(x,s)\, K_1(t,s)ds = \int_0^1 K(x,s)\, K(s,t)ds$$

dir. Burada

$$K(x,s) = \begin{cases} e^x, & 0 \le x \le s \\ e^s, & s \le x \le 1 \end{cases} \quad , K(s,t) = \begin{cases} e^s, & 0 \le s \le t \\ e^t, & t \le s \le 1 \end{cases}$$

olur. K(x,t) çekirdeği simetrik olduğundan x > t için $K_2(x,t)$ 'yi bulmak yeterlidir.

$$K_2(x,t) = \int_0^t K(x,s)\, K(s,t)ds + \int_t^x K(x,s)\, K(s,t)ds + \int_x^1 K(x,s)\, K(s,t)ds$$

yazılabilir. (0,t) aralığında s < t < x 'tir. Dolayısıyla

$$\int_0^t K(x,s)\, K(s,t)ds = \int_0^t e^s\, e^s ds = \int_0^t e^{2s} ds = \frac{e^{2t}-1}{2}$$

olacaktır. (t,x) aralığında t < s < x olup ;

$$\int_t^x K(x,s)\, K(s,t)ds = \int_t^x e^s e^t ds = e^{x+t} - e^{2t}$$

olur. (x,1) aralığında s > x > t olup;

$$\int_x^1 K(x,s)\, K(s,t)ds = \int_x^1 e^x e^t ds = (1-x)\, e^{x+t}$$

dir. Bulduğumuz bu integralleri toplayarak

$$K_2(x,t) = (2-x)\, e^{x+t} - \frac{1+e^{2t}}{2} \quad , (x > t)$$

elde ederiz. x > t için bulduğumuz $K_2(x,t)$ 'de x ve t 'nin karşılıklı olarak yerlerini değiştirerek x < t için $K_2(x,t)$ ifadesini bulmuş oluruz.

$$K_2(x,t) = (2-t)\, e^{x+t} - \frac{1+e^{2x}}{2} \quad , (x < t)$$

Sonuç olarak ardışık ikinci çekirdek

$$K_2(x,t) = \begin{cases} (2-t)e^{x+t} - \dfrac{1+e^{2x}}{2}, 0 \le x \le t \\ (2-x)e^{x+t} - \dfrac{1+e^{2t}}{2}, t \le x \le 1 \end{cases}$$

formunda olacaktır.

Bir integral denklemin çözücü çekirdeğinin ardışık çekirdekler yöntemiyle bulunuşunu gösterelim.

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 xt\varphi(t)dt = f(x) \qquad (2.3.11)$$

integral denklemini ele alalım. Burada K(x,t) = x t , a =0 , b =1 ' dir. Süreci adım adım sürdürerek ;

$$K_1(x,t) = x\,t \quad ,$$

$$K_2(x,t) = \int_0^1 (xz)(zt)\,dz = \frac{xt}{3} \quad ,$$

$$K_3(x,t) = \int_0^1 (xz)(zt)\,dz = \frac{xt}{3^2} \quad ,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$K_n(x,t) = \int_0^1 (xz)(zt)\,dz = \frac{xt}{3^{n-1}}$$

buluruz. (2.3.5) formülüne göre

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x,t)\,\lambda^{n-1}$$

$$= x\,t \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{3}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{3xt}{3-\lambda}$$

olur. Burada $|\lambda| < 3$ 'tür. (2.3.7) formülüne göre (2.3.11) integral denkleminin çözümü

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{3xt}{3-\lambda}\,f(t)\,dt$$

ile verilecektir. Özellikle f (x) = x için

$$\varphi(x) = \frac{3x}{3-\lambda}$$

olacaktır. ($\lambda \neq 3$)

2.4 Lineer Olmayan İntegral Denklemler

Banach Sabit Nokta Prensibini kullanarak şu teoremi ispat edebiliriz.

Teorem 2.4.1 : K(t,s,x) fonksiyonu G üzerinde sürekli ve her bir (t,s,x_1) , $(t,s,x_2) \in G$ için

$$|K(t,s,x_1) - K(t,s,x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \tag{2.4.1}$$

olacak şekilde $L > 0$ sayısı varsa

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t,s,x(s))ds \tag{2.4.2}$$

denkleminin $|\lambda| < \lambda_0$ olduğunda C[a,b] uzayında tek bir $x^*(t)$ çözümü vardır. Burada

$$\lambda_0 = \min\{\frac{1}{L(b-a)}, \frac{r}{rL(b-a)+L}\}$$

$$L_1 = \max\{\int_a^b |K(t,s,o)|ds \ : t \in [a,b]\}$$

r >0 ise (2.4.1) Lipshitz koşulunun sağlandığı herhangi bir sayıdır. Herhangi başlangıç $x_0 \in C[a,b]$, $\|x\|_\infty \leq r$ fonksiyonu için

$$x_n(t) = \lambda \int_a^b K(t,s,x_{n-1}(s))ds \quad , \quad n = 1, 2, \ldots.. \tag{2.4.3}$$

şeklinde tanımlanan $(x_n(t))$ dizisi $x^*(t)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır ve her bir $t \in [a,b]$ için

$$\|x_n - x^*\|_\infty \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\|_\infty \quad , \quad \alpha = |\lambda| L(b-a) \tag{2.4.4}$$

eşitsizliği doğrudur

İspat: (2.4.1) Lipshitz koşulunun r herhangi bir pozitif sayı olmak üzere

$$\overline{G} = \{(t,s,x) \in R^3 : a \le t\ ,\ s \le b\ ,\ -r \le x \le r\}$$

üzerinde sağlandığını varsayalım. C[a,b] uzayının

$$\overline{S_r(\theta)} = \{\ x \in C[a,b] : \|x\| \le r\ \}$$

kapalı yuvarında

$$Ax(t) = \lambda \int_a^b K(t,s,x(s))ds \tag{2.4.5}$$

operatörü verilsin.

$x_1, x_2 \in \overline{S_r(\theta)}$ fonksiyonları için (2.4.1) koşuluna göre

$$|Ax_1(t) - Ax_2(t)| \le |\lambda| \int_a^b |K(t,s,x_1(s)) - K(t,s,x_2(s)| ds$$

$$\le \alpha \|x_1 - x_2\|_\infty \qquad , \ \alpha = |\lambda| L(b-a)$$

olduğu elde edilir. Dolayısıyla $\alpha < \dfrac{1}{L(b-a)}$ olduğundan (2.4.5) şeklinde tanımlanan A operatörü üzerinde daralma operatörü olur. $|\lambda| < \lambda_0$ olduğunda (2.4.2) denkleminin tek bir $x^*(t) \in C[a,b]$ çözümü vardır ve (2.4.3) biçiminde tanımlı $(x_n(t))$ dizisi $x^*(t)$ fonksiyonuna [a,b] üzerinde düzgün yakınsaktır ve (x_n) dizisinin x^* çözümüne yakınsama hızı (2.4.4) ile verilir.

Lineer olmayan

$$x(t) = \int_0^t f(t,s,x(s))ds + g(t) \quad , \ 0 \le t \le T \tag{2.4.6}$$

Volterra integral denklemi verilmiş olsun. Burada x(t) , bilinmeyen bir fonksiyon , f(t,s,x) ve g(t) fonksiyonları ise sırasıyla

$\{(t,s,x) \in R^3\ ,\ 0 \le t\ ,\ s \le T,\ -\infty \le x \le \infty\ \}$ ve

[0, T] üzerinde verilen sürekli fonksiyonlar ve her bir

$(t, s) \in [\,0, T]^2\ ,\ x, y \in (-\infty\ ,\ \infty)$ için

$$|f(t,s,x) - f(t,s,y)| \le a(t,s)|x-y| \tag{2.4.7}$$

olacak şekilde $[\,0, T]^2$ üzerinde negatif olmayan ve sürekli $a(t,s) \ge 0$ fonksiyonu vardır.

$x(t) \in C[\,0, T]$ için

$$x(t) = \int_0^t f(t,s,x(s))ds + g(t) \quad , \quad 0 \le t \le T$$

şeklinde tanımlanan A : C[0, T]→ C[0, T] operatörüne bakalım ve $x \in C[\,0,\,T]$ fonksiyonunun normunu

$$\|x\|_* = \max \{ e^{-L_1 t} |x(t)| \ : t \in [\,0, T] \} \tag{2.4.8}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada L_1 herhangi bir pozitif sayıdır. Her bir $x \in C[\,0, T]$ için

$$e^{-L_1 t}\|x\|_\infty \le \|x\|_* \le \|x\|_\infty$$

eşitsizliği doğru olduğundan ($\|x\|_\infty = \max\{|x(t)| : t \in [\,0, T]\}$) C[0, T] üzerindeki $\|.\|_\infty$ ve $\|.\|_*$ normları denktirler.

x , y ∈ C[0, T] fonksiyonları için (2.4.7) koşuluna göre

$$\begin{aligned} |Ax(t) - Ay(t)| &\le \int_0^t |f(t,s,x(s)) - f(t,s,y(s))| ds \\ &\le \int_0^t a(t,s)|x(s) - y(s)| ds \\ &\le \|x-y\|_* \int_0^t a(t,s)e^{L_1 s} ds \end{aligned}$$

olduğundan

$$e^{-L_1 T}|Ax(t) - Ay(t)| \le \|x-y\|_* e^{-L_1 t} \int_0^t a(t,s)e^{L_1 s} ds$$

ve dolayısıyla

$$\|Ax - Ay\| \le \alpha \|x-y\|_* \quad , \quad \alpha = \max \{ e^{-L_1 t} \int_0^t a(t,s)e^{L_1 s} ds \ : t \in [\,0, T] \}$$

elde edilir. Eğer $a(t,s) = L > 0$ ise

$$\begin{aligned} \alpha &= \max \{ \frac{L(1 - e^{-L_1 t})}{L_1} \ : t \in [\,0, T] \} \\ &= \frac{L(1 - e^{-L_1 T})}{L_1} \end{aligned}$$

Eğer $\alpha < 1$ ise ($a(t,s) = L > 0$ olduğunda $L \le L_1$ ise) A operatörü (C[0,T] , $\|.\|_*$) uzayında daralma operatörü olur. Bu halde Banach Sabit Nokta Teoremi gereğince (2.4.6) denkleminin tek bir $x^*(t) \in C[0,T]$ çözümü vardır ve her bir başlangıç $x_0(t) \in C[0,T]$ fonksiyonu için

$$x_n(t) = \int_0^t f(t,s,x_{n-1}(s))ds + g(t) \qquad , n = 1, 2, \ldots \tag{2.4.9}$$

biçiminde tanımlanan $(x_n(t))$ dizisi $x^*(t)$ fonksiyonuna (2.4.8) normuna göre $[0, T]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır ve

$$\|x_n - x^*\|_* \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\|_* \tag{2.4.10}$$

eşitsizliği doğrudur.

(2.4.1) denkleminde $f(t,s,x) = K(t,s)\,h(s,x)$ olsun. Burada $K(t,s)$ ve $h(s,x)$ fonksiyonları sırasıyla $[0, T]^2$, $G = \{ (s,x) \in R^2 : 0 \le s \le T, -\infty \le x \le \infty \}$ üzerinde sürekli fonksiyonlardır ve her bir $s \in [0, T]$, $x, y \in (-\infty,\infty)$ için

$$|h(s,x) - h(s,y)| \le a(s)|x-y|$$

olacak şekilde [0, T] üzerinde negatif olmayan ve sürekli $a(s) > 0$ fonksiyonu vardır. Bu durumda

$$a(t,s) = |K(t,s)|a(s)$$

olduğundan

$$\alpha = \max \{ e^{-L_1 t}\int_0^t |K(t,s)|a(s)e^{L_1 s}ds \ : t \in [0, T] \}$$

olur. Her $(t,s) \in [0, T]^2$ için $|K(t,s)| \le L$ ve her $s \in [0, T]$ için $a(s) \le l$ ise $\alpha = Ll\frac{1-e^{-L_1 T}}{L_1}$ olur. Bununla beraber

$$Ax(t) = \int_0^t K(t,s)\,h(s,x(s))\,ds + g(t) \qquad , \quad x \in C[0, T]$$

için $\quad \|Ax - Ay\|_* \le \alpha\|x-y\|_*$

elde edilir. Eğer $\alpha < 1$ ise (her $(t,s) \in [0, T]^2$ için $|K(t,s)| \le L$ ve $a(s) \le l$ olduğunda $Ll \le L_1$ ise) A operatörü daralma operatörü olur. Bu halde

$$x(t) = \int_0^t K(t,s)\,h(s,x(s))\,ds + g(t) \tag{2.4.11}$$

denkleminin tek bir $x^*(t) \in C[0,T]$ çözümü vardır. Her bir başlangıç $x_0 \in C[0,T]$ fonksiyonu için

$$x_n(t) = \int_0^t K(t,s)h(s,x_{n-1}(s))ds + g(t) \quad , n = 1, 2, \ldots$$

biçiminde tanımlanan $(x_n(t))$ dizisi $x^*(t)$ fonksiyonuna (2.4.8) normuna göre yakınsar ve (2.4.10) eşitsizliği doğrudur.

BÖLÜM 3

Lineer Olmayan İntegral Denklemlerin Newton Metodu ile Çözümü

3.1 Newton Metodu

Lineer olmayan fonksiyonel denklemlerin çözümlerinin gerçekten bulunması için en çok kullanılan metotlardan biri de Newton Metodudur. İlk kez bu metod reel değişkenli ve reel değerli $F : R \to R$ fonksiyonları halinde

$$F(x) = 0 \qquad (3.1.1)$$

şeklinde denklemler için Newton tarafından ileri sürülmüş ve Banach uzaylarında verilen operatörlü denklemler için L.V.Kantoroviç tarafından genelleştirilmiştir. (Bkz.(Hutson , Pym , 1980) , (Kantoroviç , Akilov , 1984) , (Krasnoselskiy v.b.,1969) ,(Trenogin , 1980) , (Moore , 1964) , (Noble , 1964) , (Vertgeim , 1956) , (Musayev , Alp , 2000))

(3.1.1) denkleminin x^* kökü komşuluğunda F kesin artan ve yukarı dış bükey bir fonksiyon olsun. x^* köküne yeteri kadar yakın olan x_0 başlangıç yaklaşımı seçelim. $M_0(x_0, F(x_0))$ noktasından $y = F(x)$ eğrisine çizilen

$$y = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$$

teğet denklemini yazalım. $F'(x_0) \neq 0$ olduğunda bu doğru ile x ekseninin kesiştiği nokta

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$$

olur. Sonra $M_1(x_1, F(x_1))$ noktasından $y = F(x)$ eğrisine çizilen teğet denklemi

$$y = F(x_1) + F'(x_1)(x - x_1)$$

bulunur ve $F'(x_1) \neq 0$ olduğundan bu doğrunun x ekseni ile kesiştiği

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)}$$

noktası bulunur. $F'(x_n) \neq 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ olduğunda bu proses benzer şekilde devam ettirilerek

$$x_n = x_{n-1} - \frac{F(x_{n-1})}{F'(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

biçiminde tanımlanan $(x_n) \subset R$ dizisi kurulmuş olur.

$|x_0 - x^*|$ yeteri kadar küçük olduğunda (x_n) dizisi x^* köküne yüksek hızla yaklaşır. Skaler denklemler için tanımlanan bu yönteme Newton Teğetler Yöntemi adı verilir.

X ve Y Banach uzayı ve $F : X \to Y$ bir operatör olmak üzere $F(x) = 0$ şeklindeki denklemi göz önüne alalım. F operatörü $r > 0$ yarıçaplı $S_r(x_0)$ yuvarında ($x_0 \in X$ olarak $F(x) = 0$ denkleminin istenen x^* çözümü için başlangıç yaklaşım kabul edilir.) $\Im$ – türevlenebilir olsun. Ardışık yaklaşımların

$$x_n = x_{n-1} - [F'(x_{n-1})]^{-1} F(x_{n-1}) \ , \ n = 1, 2, \ldots \tag{3.1.2}$$

formülü (iterasyon prosesi) yardımıyla hesaplanabilir.

Sonsuz boyutlu uzaylar halinde $[F'(x_{n-1})]^{-1}$ ters operatörlerin bulunması yeteri kadar karmaşık bir problem olduğundan (3.1.2) formülleri yardımıyla bulunan (x_n) dizisi yerine

$$x_n = x_{n-1} - [F'(x_0)]^{-1} F(x_{n-1}) \ , \ n = 1, 2, \ldots \tag{3.1.3}$$

biçiminde tanımlanan (x_n) dizisine bakılması uygun olur. (3.1.3) dizisini bulmak için $[F'(x_0)]^{-1}$ ters operatörü her adımda hesaplanmaz yalnız x argümentinin tek bir $x = x_0$ değerinde hesaplanır. Kaynaklarda (3.1.2) yöntemine esas , (3.1.3) yöntemine ise şekli değiştirilmiş Newton Metodu denir. Şimdi (3.1.2) ve (3.1.3) iterasyon proseslerinin yakınsaklığı ile ilgili şu teoremleri verelim.

Teorem 3.1.1 : X ve Y Banach uzayları $F : X \to Y$ operatörü şu koşulları sağlasın :

1) $r > 0$ ve $x_0 \in X$ olmak üzere F operatörü $S_r(x_0) \subset X$ yuvarında $\Im$ – türevlenebilirdir.
2) $F'(x)$ türevi $S_r(x_0)$ yuvarında $l > 0$ katsayısı ile Lipschitz koşulu sağlanır.
3) $F'(x) : S_r(x_0) \to L(X,Y)$ operatörünün sürekli tersi var ve $\forall x \in S_r(x_0)$ için

$$\|[F'(x)]^{-1}\| \leq m \tag{3.1.4}$$

olacak şekilde bir $m > 0$ sayısı vardır.

4) $\|F(x_0)\| \leq \eta$.

Bu durumda eğer

$$q = \frac{1}{2} m^2 l \eta < 1$$

ve

$$r' = m\eta \sum_{k=0}^{\infty} q^{2^k - 1} < r \qquad (3.1.5)$$

ise (3.1.1) denkleminin (3.1.2) Newton iterasyon prosesinin yaklaştığı bir $x^* \in \overline{S_r(x_0)}$ çözümü vardır ve terimleri (3.1.2) biçiminde tanımlanan (x_n) dizisinin x^* ' a yaklaşma hızı

$$\|x_n - x^*\| \le m\eta \frac{q^{2^n - 1}}{1 - q^{2^n}}$$

eşitsizliği yardımıyla verilir.

İspat: Tümevarım yöntemini kullanarak ispatlayalım. İşlemlerde kolaylık sağlaması için $r(x) = [F'(x)]^{-1}$, $r_n = r(x_n)$, $F_n = F(x_n)$, $F'_n = F'(x_n)$ şeklinde notasyonlar kullanalım. Bu durumda (3.1.2) Newton prosesi

$$x_{n+1} = x_n - r_n F_n \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3.1.6)$$

şeklinde yazılabilir.

$(x_n) \subset \overline{S_{r'}(x_0)}$ olduğunu gösterelim. $x_1 - x_0 = - r_0 F_0$ olduğundan

$$\|x_1 - x_0\| \le \|r_0\| \|F_0\| \le m\eta$$

ve (3.1.5) dolayısıyla

$$x_1 \in \overline{S_{r'}(x_0)}$$

elde edilir.

$$F_0 + F'_0 (x_1 - x_0) = 0$$

olduğundan

$$F_1 = F_1 - F_0 - F'_0 (x_1 - x_0) = F(x_1) - F(x_0) - F'(x_0)(x_1 - x_0)$$

olur , buradan

$$\|F_1\| \le \frac{1}{2} l \|x_1 - x_0\|^2$$

elde edilir. (Bkz. Musayev B.İ.,Alp , M.)

Herhangi $n > 1$ doğal sayısı için $(x_n) \in \overline{S_{r'}(x_0)}$ olduğunu ve

$$\|x_n - x_{n-1}\| \le m\eta q^{2^{n-1} - 1} \qquad (3.1.7)$$

$$\|F_n\| \leq \frac{1}{2} l \|x_n - x_{n-1}\|^2 \tag{3.1.8}$$

eşitsizliklerinin doğruluğunu varsayalım. Şimdi $x_{n+1} \in \overline{S_{r'}(x_0)}$ olduğunu ve

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq m\eta q^{2^n-1} \quad , \tag{3.1.9}$$

$$\|F_{n+1}\| \leq \frac{1}{2} l \|x_{n+1} - x_n\|^2 \tag{3.1.10}$$

eşitsizliklerinin doğruluğunu gösterelim.

(3.1.3), (3.1.6), (3.1.7) ve (3.1.8) den dolayı

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|r_n F_n\| \leq m\|F_n\| \leq \frac{1}{2} ml \|x_n - x_{n-1}\|^2$$

$$\leq \frac{1}{2} ml (m\eta)^2 q^{2^n-2}$$

$$= m\eta (\frac{1}{2} m^2 \ln) q^{2^n-2} \; = m\eta q^{2^n-1}$$

olduğu ve bu sebepten (3.1.9) eşitsizliğinin doğruluğu görülür. (3.1.5). koşuluna göre

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - x_{n-1}\| + ... + \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\|$$

$$\leq m\eta + m\eta q + m\eta q^2 + ... + m\eta q^{2^n-1}$$

$$\leq m\eta \sum_{k=0}^{\infty} q^{2^k-1} = r$$

olduğundan $x_{n+1} \in \overline{S_{r'}(x_0)}$ olur. (3.1.6) ' ya göre

$$F_n + F'_n (x_{n+1} - x_n) = 0$$

olduğundan

$$F_{n+1} = F_{n+1} - F_n - F'_n (x_{n+1} - x_n)$$

$$= F(x_{n+1}) - F(x_n) - F'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

olur ve buradan

$$\|F_{n+1}\| \leq \frac{1}{2} l \|x_{n+1} - x_n\|^2$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. (3.1.9) eşitsizliğinden üçgen eşitsizliği kullanılarak her bir $p \geq 1$ doğal sayısı için

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \|x_{n+p-1} - x_{n+p-2}\| + \dots\dots\dots + \|x_{n+1} - x_n\|$$

$$\leq m\,\eta \sum_{k=n}^{n+p-1} q^{2^k-1} \qquad (3.1.11)$$

elde edilir. $\sum_{k=0}^{\infty} q^{2^k-1}$ serisi yakınsak olduğundan her bir $p \in N$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+p} - x_n\| = 0$$

olduğu ve dolayısıyla

$$x_n = x_{n-1} - [F'(x_{n-1})]^{-1} F(x_{n-1}) \qquad , \quad n = 1, 2, \dots\dots\dots$$

biçiminde tanımlanan (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu görülür. X bir tam uzay olduğundan (x_n) yakınsak bir dizidir.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$$

diyelim. $(x_n) \subset \overline{S_{r'}(x_0)}$ ve $\overline{S_{r'}(x_0)}$ yuvarı kapalı olduğundan $x^* \in \overline{S_{r'}(x_0)}$ 'dır.

Şimdi x^* noktasının $F(x) = 0$ denkleminin bir çözümü olduğunu gösterelim. Bu nedenle (3.1.6) eşitliğinde $n \to \infty$ için limite geçilmesi yeterlidir. O zaman

$$x^* = x^* - \mathrm{r}(x^*)\,\mathrm{F}(x^*)$$

olduğu ve $\mathrm{r}(x^*) = [\mathrm{F}'(x^*)]^{-1}$ operatörünün tersi var olduğundan $\mathrm{F}(x^*) = 0$ olduğu görülür. (3.1.11) eşitsizliğinde $p \to \infty$ için limite geçersek

$$\|x^* - x_n\| \leq m\,\eta \sum_{k=n}^{\infty} q^{2^k-1}$$

$$\leq m\eta \sum_{s=0}^{\infty} q^{2^n 2^s - 1}$$

$$\leq m\eta q^{2^n-1} \sum_{s=0}^{\infty} q^{2^n(2^s+1)}$$

her bir $s \geq 0$ tamsayısı için $2^s + 1 \geq s$ ve dolayısıyla $q^{2^n(2^s+1)} \leq q^{2^n s}$ ve $0 < q < 1$ olduğundan

$$\sum_{s=0}^{\infty} q^{2^n(2^s+1)} \leq \sum_{s=0}^{\infty} q^{2^n s} = \frac{1}{1-q^{2^n}}$$

olur. Bu durumda son eşitsizlikten

$$\left\|x_n - x^*\right\| \leq \frac{m\eta q^{2^n-1}}{1-q^{2^n}}$$

ifadesinin doğruluğu elde edilir.

Teorem 3.1.2: X Banach uzayı , F : X→X operatörü $S_r(x_0) \subset$X yuvarında $\Im$-türevlenebilir ve her x, y∈ $S_r(x_0)$ için

$$\left\|F'(x) - F'(y)\right\| \leq l\left\|x - y\right\| \tag{3.1.12}$$

olacak şekilde l>0 sayısı mevcut olsun. İlave olarak $F'(x_0) \in L(X)$ operatörünün $[F'(x_0)]^{-1}$ tersi var ve

$$\left\|[F'(x_0)]^{-1}\right\| \leq m \quad , \quad \left\|[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\right\| \leq \eta \tag{3.1.13}$$

olacak şekilde $m > 0$ ve $\eta > 0$ sayıları varolsun. Eğer $2ml\eta < 1$ ve $r_0 = \dfrac{(1-\sqrt{1-2ml\eta})}{ml} \leq r$ ise F(x) = 0 denkleminin $x^* \in \overline{S_{r_0}(x_0)}$ tek bir çözümü vardır ve (3.1.3) biçiminde tanımlanan Newton iterasyon prosesi bu çözüme

$$\left\|x_n - x^*\right\| \leq \frac{(1-\sqrt{1-2ml\eta})^n}{\sqrt{1-2ml\eta}} m\eta \tag{3.1.14}$$

hızla yaklaşır.

İspat: Önce $\phi(x) = x - [F'(x_0)]^{-1}F(x)$ operatörünün $\overline{S_{r_0}(x_0)}$ yuvarını kendisine dönüştürdüğünü gösterelim. (3.1.13) koşulları dolayısıyla her x∈ $\overline{S_{r_0}(x_0)}$ için

$$\begin{aligned}\left\|\phi(x) - x_0\right\| &\leq \left\|\phi(x) - \phi(x_0)\right\| + \left\|\phi(x_0) - x_0\right\| \\ &\leq \left\|[F'(x_0)]^{-1}(F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0))\right\| + \left\|[F'(x_0)]^{-1}F(x_0)\right\| \\ &\leq m\left\|F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0)\right\| + \eta\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2} ml \|x - x_0\|^2 + \eta$$

$$\leq \frac{1}{2} ml r_0^2 + \eta$$

olduğu elde edilir. r_0 sayısı $\frac{1}{2} ml r_0^2 - r_0 + \eta = 0$ denkleminin küçük kökü olduğundan son eşitsizliğin sağ tarafı r_0 ' a eşit olur. Böylece her $x \in \overline{S_{r_0}(x_0)}$ için $\|\phi(x) - x_0\| \leq r_0$ ve dolayısıyla

$$\phi(\overline{S_{r_0}(x_0)}) \subset \overline{S_{r_0}(x_0)}$$

olur. Şimdi $\phi(x)$ operatörünün $S_{r_0}(x_0)$ yuvarında bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. Her bir $x, y \in S_{r_0}(x_0)$ için

$$\phi(x) - \phi(y) = x - y - [F'(x_0)]^{-1}(F(x) - F(y))$$

$$= [F'(x_0)]^{-1}[F'(x_0)(x - y) - F(x) + F(y)]$$

$$= [F'(x_0)]^{-1} \int_0^1 [F'(x_0) - F'(y + Q(x - y)] dQ (x - y)$$

eşitsizliği doğru olduğundan (3.1.12) formülü kullanılarak

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq m \int_0^1 \|F'(x_0) - F'(y + Q(x - y)\| dQ \|x - y\|$$

$$\leq ml \int_0^1 \|x_0 - (y + Q(x - y))\| dQ \|x - y\|$$

$$\leq ml r_0 \|x - y\|$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$ml r_0 = 1 - \sqrt{1 - 2ml\eta} < 1$$

olduğundan $\phi(x)$ operatörü $S_{r_0}(x_0)$ yuvarında $q = 1 - \sqrt{1 - 2ml\eta}$ katsayısıyla Lipshitz koşulunu sağlar. $1 - q = \sqrt{1 - 2ml\eta}$ ve $\|\phi(x_0) - x_0\| = \|[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\| \leq \eta$ olduğundan $x = \phi(x)$ denkleminin dolayısıyla F (x) = 0 denkleminin tek bir $x^* \in \overline{S_{r_0}(x_0)}$ çözümü vardır ve terimleri (3.1.3) biçiminde tanımlanan (x_n) dizisi x^* çözümüne (3.1.14) hızıyla yaklaşır.

Şimdi F (x) operatörünün

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x)$$

şeklinde gösterilebildiğini varsayalım. Eğer $F_1(x)$ operatörünün $F_1'(x)$, $\Im$- türevinin $[F_1'(x)]^{-1}$ tersi varsa ve kolayca hesaplanabiliyorsa , $F_2(x)$ operatörü ise norma göre yeteri kadar küçük bir operatör ise

$$F_1(x) + F_2(x) = 0 \qquad (3.1.15)$$

Denkleminin tahmini çözümünün bulunması için terimleri

$$x_n = x_{n-1} - [F'(x_{n-1})]^{-1}(F_1(x_{n-1}) + F_2(x_{n-1})) \quad , \quad n = 1, 2, ... \qquad (3.1.16)$$

biçiminde veya

$$x_n = x_{n-1} - [F_1'(x_0)]^{-1}(F_1(x_{n-1}) + F_2(x_{n-1})) \quad , \quad n = 1, 2, ... \qquad (3.1.17)$$

şeklinde tanımlanan iterasyon proseslerinden birisinin kullanılması faydalı olur. Örneğin (3.1.17) prosesinin yakınsaklığına dair şu teorem ispatlanabilir:

Teorem 3.1.3 : X bir Banach uzayı , $F_1 : X \to X$ operatörü $S_r(x_0) \subset X$ yuvarında $\Im$- türevlenebilir ve her x, y$\in S_r(x_0)$ için

$$\|F_1'(x) - F_1'(y)\| \le l_1\|x - y\| \qquad (3.1.18)$$

olacak şekilde bir $l_1 > 0$ sayısı ve $F_1'(x_0) \in L(X)$ operatörünün $[F_1'(x_0)]^{-1}$ tersi mevcut ve

$$\|[F_1'(x_0)]^{-1}\| \le m_1 \quad , \quad \|[F_1'(x_0)]^{-1}F_1(x_0)\| \le \eta_1 \qquad (3.1.19)$$

olacak şekilde $m_1 > 0, \eta_1 > 0$ sayıları varolsun. $F_2 : X \to X$ operatörü her x$\in S_r(x_0)$ için

$$\|[F_1'(x_0)]^{-1}F_2(x_0)\| \le \eta_2 \qquad (3.1.20)$$

ve her x, y $\in S_r(x_0)$ için

$$\|F_2(x) - F_2(y)\| \le l_2\|x - y\| \qquad (3.1.21)$$

olacak şekilde $\eta_2 > 0$, $l_2 > 0$ sayıları varolsun. Eğer

$$m_1^2 l_2^2 < 1 - 2m_1 l_1(\eta_1 + \eta_2) \quad \text{ve} \quad \delta_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2m_1 l_1(\eta_1 + \eta_2)}}{m_1 l_1} \le r$$

ise (3.1.15) denkleminin tek bir $x^* \in \overline{S_{\delta_0}(x_0)}$ çözümü vardır ve terimleri (3.1.17) biçiminde tanımlanan iterasyon prosesi x^* çözümüne

$$q_1 = 1 - \sqrt{1 - 2m_1 l_1(\eta_1 + \eta_2)} + m_1 l_2$$

olmak üzere

$$\left\|x_n - x^*\right\| \le \frac{q_1^{\,n}}{1-q_1}(\eta_1 + \eta_2) \qquad , n = 1, 2, ... \qquad (3.1.22)$$

hızıyla yaklaşır.

İspat:

$$\phi_1(x) = x - [F_1{}'(x_0)]^{-1} F_1(x),$$

$$\phi_2(x) = - [F_1{}'(x_0)]^{-1} F_2(x),$$

$$\phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x)$$

ve $x \in S_r(x_0)$ olmak üzere (3.1.15) denklemi

$$x = \phi(x) \qquad (3.1.23)$$

denklemi şeklinde yazılabilir. $\phi(x)$ operatörünün $\overline{S_{\delta_0}(x_0)}$ yuvarını kendisine dönüştürdüğünü gösterelim. Her $x \in \overline{S_{\delta_0}(x_0)}$ için

$$\phi(x) - x_0 = [F_1{}'(x_0)]^{-1}(F_1{}'(x_0)(x - x_0) - F_1(x) + F_1(x_0))$$

$$- \quad [F_1{}'(x_0)]^{-1} F_1(x_0) - [F_1{}'(x_0)]^{-1} F_2(x)$$

eşitliği doğru olduğundan (3.1.18) ve (3.1.20) eşitsizlikleri kullanılarak

$$\left\|\phi(x) - x_0\right\| \le \frac{1}{2} m_1 l_1 \delta_0{}^2 + \eta_1 + \eta_2$$

elde edilir. δ_0 sayısı

$$\frac{1}{2} m_1 l_1 \delta^2 - \delta + \eta_1 + \eta_2 = 0$$

denkleminin küçük kökü olduğundan son eşitsizliğin sağ yanı δ_0 ' a eşit olur. Böylece her $x \in \overline{S_{\delta_0}(x_0)}$ için

$$\left\|\phi(x) - x_0\right\| \le \delta_0$$

olur ve dolayısıyla

$$\phi\left(\overline{S_{\delta_0}(x_0)}\right) \subset \overline{S_{\delta_0}(x_0)}$$

olur.

Şimdi $\phi(x)$ operatörünün $S_{\delta_0}(x_0)$ yuvarında bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. Herhangi x , y $\in S_{\delta_0}(x_0)$ için

$$\phi(x) - \phi(y) = x - y - [F_1{}'(x_0)]^{-1}(F_1(x) - F_1(y)) - [F_1{}'(x_0)]^{-1}(F_2(x) - F_2(y))$$

olduğundan (3.1.18), (3.1.19), (3.1.21) koşulları kullanılarak

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \le (m_1 l_1 \delta_0 + m_1 l_2)\|x - y\|$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla

$$m_1{}^2 l_2{}^2 < 1 - 2m_1 l_1(\eta_1 + \eta_2)$$

durumunda

$$m_1 l_1 \delta_0 + m_1 l_2 < 1$$

olduğundan $\phi(x)$ operatörü $S_{\delta_0}(x_0)$ yuvarında

$$q_1 = 1 - \sqrt{1 - 2m_1 l_1(\eta_1 + \eta_2)} + m_1 l_2$$

katsayısıyla Lipschitz koşulunu sağlar.

$$1 - q_1 = \sqrt{1 - 2m_1 l_1(\eta_1 + \eta_2)} - m_1 l_2$$

ve

$$\|\phi(x_0) - (x_0)\| \le (1 - q_1)\delta_0$$

olduğundan x = $\phi(x)$ denkleminin , dolayısıyla (3.1.15) denkleminin tek bir $x^* \in \overline{S_{\delta_0}(x_0)}$ çözümü vardır ve terimleri (3.1.17) şeklinde tanımlanan (x_n) dizisi x^* çözümüne (3.1.22) hızıyla yaklaşır.

Teorem 3.1.1 , Teorem 3.1.2 ve Teorem 3.1.3 ' ün koşullarından görüldüğü gibi (3.1.2) , (3.1.3) ve (3.1.17) iterasyon proseslerinin yakınsaklığı x_0 başlangıç yaklaşımının (3.1.1) denkleminin x^* çözümüne yeteri kadar yakın olduğu durumda gerçekleşebilir. Bu nedenle söz konusu özelliğe sahip başlangıç yaklaşımların iyi seçilmesi önem taşımaktadır.

NOT : $F_1(x) = 0$ denkleminin bir $x_0{}^*$ çözümü varsa (3.1.17) iterasyon prosesinde x_0 başlangıç yaklaşımı olarak $x_0{}^*$ elemanı veya $x_0{}^*$ elemanına yakın olan herhangi bir elemanın alınması faydalı olur.(Bkz. Problem 3.2.8)

3.2 Lineer Olmayan Fredholm İntegral Denklemlerin Newton Metodu İle Çözümü:

$$x(t) = \int_a^b f(t,s,x(s))ds \quad , \quad a \le t \le b \tag{3.2.1}$$

lineer olmayan Fredholm integral denklemini göz önüne alalım. Burada f(t,s,x) sürekli ve x değişkenine göre birinci mertebeden sürekli kısmi türeve sahip bir fonksiyondur.

X = (C[a,b], $\|\cdot\|_\infty$) Banach uzayında

$$\mathrm{F(x)(t)} = \mathrm{x(t)} - \int_a^b f(t,s,x(s))ds \quad , \quad a \le t \le b \tag{3.2.2}$$

biçiminde tanımlanan F : X→X operatörü yardımıyla (3.2.1) denklemi F(x) = 0 operatörlü denklem şeklinde yazılabilir. Bu denklem için Newton iterasyon prosesi şu şekilde kurulur:

$x_0 \in$ C[a,b] başlangıç yaklaşımı olsun. Birinci yaklaşım olan $x_1(t)$ fonksiyonu

$$\mathrm{F}'(x_0)(x - x_0) = -\mathrm{F}(x_0) \tag{3.2.3}$$

denkleminden (x(t) = $x_1(t)$ bilinmeyen fonksiyondur.) bulunur.

$$\mathrm{F}'(x_0)\,\mathrm{h} = \mathrm{h(t)} - \int_a^b f_x(t,s,x_0(s))h(s)ds$$

olduğundan (3.2.3) denklemi çekirdeği

$$\mathrm{K(t,s)} = f_x(t,s,x_0(s))$$

olan

$$\mathrm{h(t)} - \int_a^b K(t,s)h(s)ds = g_0(t)$$

lineer integral denklemi biçiminde yazılabilir. Burada h(t) = $x_1(t)$ - $x_0(t)$

$$g_0(t) = \int_a^b f(t,s,x_0(s))ds - x_0(t)$$

sonraki $x_n(t)$, n = 2, 3, ...yaklaşımlar

$$h(t) - \int_a^b K(t,s)h(s)ds = g_{n-1}(t)$$

denkleminden bulunur. Burada

h(t) = $x_n(t)$ - $x_{n-1}(t)$,

ve

$$g_{n-1}(t) = \int_a^b f(t,s,x_{n-1}(s))ds - x_{n-1}(t) \quad , \ n = 2, 3, \ldots$$

olur.

Teorem 3.1.2 ' den doklayı şu teorem ispatlanabilir.

Teorem 3.2.1: x(t) $\in$ C[a,b] başlangıç yaklaşımı ve f(t,s,x) fonksiyonu için

1) f(t,s,x) ve f_x (t,s,x) fonksiyonları G üzerinde sürekli ve her (t,s) $\in [a,b]^2$ ve $x_1, x_2 \in [-r,r]$ için

$$|f_x(t,s,x_1) - f_x(t,s,x_2)| \le l_0 |x_1 - x_2| \quad ;$$

2) R(t,s) fonksiyonu K(t,s) = f_x (t,s,x_0(s)) çekirdeğinin resolventası olmak üzere

$$\max\{ \int_a^b |R(t,s)|ds : t \in [a,b]\} \le m_0 \quad ;$$

3) $\|g_0\|_\infty \le P_0$;

4) $q_0 = 2(b-a)(1+m_0)^2 \, l_0 \, P_0 < 1$

olacak şekilde m_0, l_0, P_0 pozitif sayıları mevcut olsun. Bu durumda

$$r_0(b-a)(1+m_0)l_0 = 1 - \sqrt{1-q_0}$$
$$< r\,(b-a)(1+m_0)l_0$$

ise

$$x(t) = \int_a^b f(t,s,x(s))ds$$

denkleminin $x^* \in \overline{S_{r_0}(x_0)}$ şeklinde tek çözümü vardır ve bu çözüm terimleri

$$x_n(t) = x_{n-1}(t) + \int_a^b R(t,s)[\int_a^b f(s,\xi,x_{n-1}(\xi))d\xi - x_{n-1}(s)]ds \quad , n=1,2,..$$

biçiminde tanımlanan ($x_n(t)$) fonksiyon dizisinin limiti olarak bulunabilir ve ($x_n(t)$) dizisi $x^*(t)$ çözümüne

$$\|x_n - x^*\|_\infty \le \frac{(1-\sqrt{1-q_0})^n}{\sqrt{1-q_0}}(1+m_0)P_0$$

hızıyla yaklaşır.

$$Q(t,s,x) = f(t,s,x) - H(t,s,x)$$

ve

$$F_1(x)(t) = x(t) - \int_a^b H(t,s,x(s))ds$$

$$F_2(x)(t) = - \int_a^b Q(t,s,x(s))ds$$

olmak üzere (3.2.2) denklemini

$$F_1(x) + F_2(x) = 0 \qquad (3.2.4)$$

şeklinde yazalım. Bu denklem için (3.1.17) iterasyon prosesi şu şekilde kurulur:

$x_0 \in C[a,b]$ herhangi başlangıç yaklaşımı olmak üzere birinci yaklaşım olan $x_1(t)$ fonksiyonu

$$F_1'(x_0)h = - F_1(x_0) - F_2(x_0) \qquad (3.2.5)$$

denkleminden bulunur.

$$F_1'(x_0)h = h(t) - \int_a^b H_x(t,s,x_0(s))h(s)ds$$

olduğundan (3.2.6) denklemi , çekirdeği

$$\tilde{R}(t,s) = H_x(t,s,x_0(s))$$

olan

$$h(t) - \int_a^b \tilde{R}(t,s)h(s)ds = \tilde{g}_0(t)$$

lineer integral denklemi şeklinde yazılabilir , burada:

$$h(t) = x_1(t) - x_0(t)$$

$$\tilde{g}_0(t) = \int_a^b H(t,s,x_0(s))ds + \int_a^b Q(t,s,x_0(s))ds - x_0(s)$$

dir. Sonraki yaklaşımlar

$$h(t) - \int_a^b \tilde{R}(t,s)h(s)ds = \tilde{g}_{n-1}(t)$$

denkleminden bulunur. Burada

$$h(t) = x_n(t) - x_{n-1}(t)$$

$$\tilde{g}_{n-1}(t) = \int_a^b H(t,s,x_{n-1}(s))ds + \int_a^b Q(t,s,x_{n-1}(s))ds - x_{n-1}(s) \quad , n = 1, 2, ...$$

dır. Teorem 3.1.3 ' den dolayı şu teorem ispatlanabilir.

Teorem 3.2.2 : $x_0(t) \in C[a,b]$ herhangi başlangıç yaklaşımı ve H(t,s,x), Q(t,s,x) fonksiyonları için

1) H(t,s,x) ve H_x (t,s,x) fonksiyonları G üzerinde sürekli ve her $(t,s) \in [a,b]^2$, $x_1, x_2 \in [-r,r]$ için

$$|H_x(t,s,x_1) - H_x(t,s,x_2)| \le l_0|x_1 - x_2| \quad ;$$

2) $\tilde{\Re}(t,s)$ fonksiyonu $\tilde{\Re}(t,s) = H_x(t,s,x_0(s))$ çekirdeğinin resolventası olmak üzere

$$\max\{ \int_a^b |\tilde{R}(t,s)|ds : t \in [a,b] \} \le m_0 \quad ;$$

3) $\|F_1(x_0)\|_\infty \le P_0{}'$;

4) $\max\{ \int_a^b |Q(t,s,x)|ds; t \in [a,b], |x - x_0(t)| \le r\} \le \eta_0{}'$;

5) $\forall(t,s) \in [a,b]^2$ ve $\forall x_1, x_2 \in [-r,r]$ için

$$|Q(t,s,x_1) - Q(t,s,x_2)| \le L_0{}'|x_1 - x_2| \quad ;$$

6) $q_0{}' = 1 - 2(1 + m_0{}')^2(b-a)l_0{}'(P_0{}' + \eta_0{}') > (m_0{}'L_0{}')^2$

olacak şekilde negatif olmayan $m_0', l_0', P_0', \eta_0'$ ve L_0' sayıları mevcut olsun. Bu durumda $(1+m_0')(b-a)l_0'\delta_0 = 1-\sqrt{1-q_0'} < r(1+m_0')(b-a)l_0'$ ise (3.2.4) denkleminin tek bir $x^* \in \overline{S_{\delta_0}(x_0)}$ çözümü vardır ve bu çözüm terimleri

$$x_n(t) = \int_a^b H(t,s,x_{n-1}(s))ds + \int_a^b Q(t,s,x_{n-1}(s))ds$$

$$+ \int_a^b \widetilde{R}(t,s)[\int_a^b H(s,\xi,x_{n-1}(\xi))d\xi + \int_a^b Q(s,\xi,x_{n-1}(\xi))d\xi - x_{n-1}(s)]ds$$

$$n = 1,2,3,\ldots \qquad (3.2.6)$$

biçiminde tanımlanan $(x_n(t))$ dizisinin limiti olarak bulunabilir ve

$$q_2 = 1-\sqrt{1-q_0'} + (1+m_0')(b-a)L_0'$$

olmak üzere $(x_n(t))$ dizisinin $x^*(t)$ çözümüne yaklaşma hızı :

$$\left\|x_n - x^*\right\|_\infty \le \frac{q_2^{\,2}}{1-q_2}(1+m_0')(P_0' + \eta_0')$$

eşitsizliği yardımıyla verilir.

$\forall x, y \in S_r(x_0)$ için

$$\left\|F_1'(x) - F_1'(y)\right\|_\infty \le (b-a)l_0' \left\|x-y\right\|_\infty$$

$$\left\|[F_1'(x_0)]^{-1}\right\|_\infty \le 1+m_0'$$

$$\left\|[F_1'(x_0)]^{-1}F_1(x)\right\|_\infty \le (1+m_0')P_0'$$

$$\left\|[F_1'(x_0)]^{-1}F_2(x)\right\|_\infty \le (1+m_0')\eta_0'$$

$$\left\|F_2'(x) - F_2'(y)\right\|_\infty \le (b-a)L_0'\left\|x-y\right\|_\infty$$

ifadeleri doğru olduğundan Teorem 3.1.3 'deki $l_1, m_1, \eta_1, \eta_2, l_2$ sayıları olarak sırasıyla $(b-a)l_0', 1+m_0', (1+m_0')P_0', (1+m_0')\eta_0', (b-a)L_0'$ sayıları alınırsa Teorem 3.2.2 'nin doğruluğu görülür.

Eğer teoremde adı geçen H(t,s,x) fonksiyonu f(t,s,x) fonksiyonuna yeteri kadar yakın bir fonksiyon ise

$$x(t) = \int_a^b H(t,s,x(s))ds \qquad (3.2.7)$$

denkleminin çözümü (3.2.1) ve (3.2.4) denklemleri için başlangıç yaklaşımı olarak kabul edilmesi faydalı olur. Örneğin H(t,s,x) fonksiyonu olarak f(t,s,x) fonksiyonunun herhangi bir tam ortonormal $(\omega_k(s))_{k=1}^{\infty}$ fonksiyonlar sistemine göre

$$f(t,s,x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t,x)\omega_k(s)$$

Fourier serisinin m. kısmi toplamı

$$H(t,s,x) = \sum_{k=1}^{m} f_k(t,x)\omega_k(s)$$

fonksiyonu seçilebilir. Bu durumda (3.2.5) denklemi dejenere çekirdekli bir lineer integral denklem olduğundan bu denklemin $\widetilde{\Re}(t,s)$ resolventası kolayca bulunabilir.

ÖRNEK 3.2.3: $x(t) = \int_0^1 [1+\frac{1}{2}x^2(s)\sin ts]ds \qquad (3.2.8)$

integral denklemi için bir $x_0(t)$ başlangıç yaklaşımı bulalım.

$$\sin ts = st - \frac{s^3t^3}{6} + \frac{s^5t^5}{120} - \ldots\ldots$$

Taylor serisinden yararlanarak

$$f(t,s,x) = 1+\frac{1}{2}x^2 \sin ts$$

fonksiyonuna yakın olan

$$H(t,s,x) = 1+\frac{1}{2}x^2 ts$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu durumda (2.10.7) denklemi

$$x(t) = \int_0^1 [1+\frac{1}{2}x^2(s)ts]ds \qquad (3.2.9)$$

biçiminde olur. (3.2.9) denkleminin çözümü

$$c = \frac{1}{2}\int_0^1 sx^2(s)ds \qquad (3.2.10)$$

olmak üzere

$$x(t) = 1 + ct$$

şeklindedir. x(t) ' nin bu ifadesini (3.2.10) ' da yerine yazarsak:

$$3c^2 - 16c + 6 = 0$$

denklemi elde edilir. c = 0.405887 bu denklemin bir çözümü olduğundan

$$x_0(t) = 1 + 0.405887\,t$$

fonksiyonu (3.2.8) denklemi için bir başlangıç yaklaşımı olarak seçilebilir.

ÖRNEK 3.2.4: $x_0(t) = 0.9\,t$ başlangıç yaklaşımı olmak üzere

$$x(t) = \int_0^1 tsx^2(s)ds + \frac{3}{4}t \qquad (3.2.11)$$

integral denklemini Newton metodu ile çözünüz.

$f(t,s,x) = tsx^2$ ve $f_x(t,s,x) = 2tsx$ fonksiyonları

$G = \{(t, s, x) \in R^3 : 0 \le t \le 1,\ 0 \le s \le 1,\ -\infty < x < \infty\}$ üzerinde sürekli olduğu ve her $(t,s) \in [0,1]^2$ ve $x_1, x_2 \in (-\infty,\infty)$ için

$$\left|f_x(t,s,x_1) - f_x(t,s,x_2)\right| = 2ts\left|x_1 - x_2\right|$$
$$\le 2\left|x_1 - x_2\right|$$

olduğu açıktır. Böylece $l_0 = 2$ elde edilir.

Şimdi $x_0(t) = 0.9\,t$ başlangıç yaklaşımı olmak üzere

$$K(t,s) = f_x(t,s,x_0(s))$$
$$= 1.8\,ts^2$$

çekirdeğinin resolventasını bulalım.

$$F(x)(t) = x(t) - \int_0^1 tsx^2(s)ds - \frac{3}{4}t$$

biçiminde tanımlanan $F : C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ operatörünün $x_0(t) = 0.9\,t$ noktasında $\mathfrak{F}$ - türevi

$$F'(x_0)h = h(t) - 2\int_0^1 tsx_0(s)h(s)ds$$
$$= h(t) - 1.8\int_0^1 ts^2h(s)ds$$

olduğundan $q(t) \in C[0,1]$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$q(t) = h(t) - 1.8\int_0^1 ts^2 h(s)ds \tag{3.2.12}$$

lineer integral denkleminin çözümünün bulunması gerekir. (3.2.12) denkleminin çözümü

$$c = \int_0^1 s^2 h(s)ds$$

olmak üzere

$$h(t) = 1.8\, ct + q(t)$$

biçimindedir. Burada c sayısını bulmak için

$$h(s) = 1.8\, cs + q(s)$$

eşitliğini s^2 ile çarparak bulunan eşitliğin [0,1] üzerinde integrali alınması gerekir.

$$\int_0^1 s^2 h(s)ds = 1.8\, c\int_0^1 s^3 ds + \int_0^1 s^2 q(s)ds$$

olur ve dolayısıyla

$$c = \frac{36}{11}\int_0^1 s^2 q(s)ds$$

elde edilir. Böylece (3.2.12) denkleminin çözümü

$$h(t) = q(t) + \frac{36}{11}\int_0^1 ts^2 q(s)ds$$

olur. Buradan

$$R(t,s) = \frac{36}{11}ts^2$$

olduğu görülür.

$$\int_0^1 |R(t,s)|ds = \frac{12}{11}t$$

olduğundan

$$\max\{\int_0^1 |R(t,s)|ds \ :\ t \in [0,1]\} = \frac{12}{11}$$

olur. Diğer taraftan

$$g_0(t) = -\frac{9}{10}t + \frac{81}{100}\frac{1}{4}t + \frac{3}{4}t = \frac{21}{400}t$$

olduğundan

$$\|g_0\|_\infty = \max\{\frac{21}{400}t \ : \ t\in[0,1]\} = \frac{21}{400}$$

Böylece $l_0 = 2$, $m_0 = \frac{12}{11}$, $P_0 = \frac{21}{400}$ ve b-a =1 olduğundan

$$q_0 = 2(b-a)(1+m_0)^2\, l_0\, P_0 = \frac{11109}{12100} < 1$$

elde edilir. Bu durumda

$$r_0 = \frac{110-\sqrt{991}}{460}$$

olmak üzere terimleri (3.2.11) denkleminin tek bir $x^*(t) \in \overline{S_{r_0}(x_0)}$ çözümü vardır ve bu çözüm

$$x_n(t) = \frac{3}{4} + t\int_0^1 s x_{n-1}^2(s) + \frac{36}{11}t\int_0^1 s^2[-x_{n-1}(s) + s\int_0^1 \xi x_{n-1}^2(\xi)d\xi + \frac{3}{4}s]ds$$

biçiminde tanımlanan $(x_n(t))$ fonksiyon dizisinin limiti olarak bulunabilir ve $(x_n(t))$ dizisi $x^*(t) = t$ çözümüne

$$\|x_n - x^*\|_\infty \le \frac{460}{\sqrt{991}}\left(\frac{110-\sqrt{991}}{110}\right)^n \qquad , n = 1, 2, ...$$

hızıyla yaklaşır.

ÖRNEK 3.2.5 : $x_0(t) = 0{,}01 + \cos 2\pi t$ başlangıç yaklaşımı olmak üzere

$$x(t) = -\frac{\pi}{2}\int_0^1 t\sin 2\pi s \ \ x^2(s)ds + \cos 2\pi t \qquad (3.2.13)$$

integral denklemini Newton metodu ile çözünüz.

$$f(t,s,x) = -\frac{\pi}{2} t\sin 2\pi s \ \ x^2$$

fonksiyonu ve onun

$$f_x(t,s,x) = -\pi t\sin 2\pi s\, x$$

kısmi türevi

$$G = \{(t,s,x)\in R^3 \ : 0\le t\le 1 \ , 0\le s\le 1, \ -\infty \le x\le \infty\}$$

üzerinde sürekli olduğunu ve her $(t,s) \in [0,1]^2$ ve $x_1, x_2 \in (-\infty,\infty)$ için

$$|f_x(t,s,x_1) - f_x(t,s,x_2)| = \pi s|\sin 2\pi s||x_1 - x_2|$$

$$\le \pi|x_1 - x_2|$$

olduğu açıktır. Böylece $l_0 = \pi$ olarak bulunur.

Şimdi

$$K(t,s) = f_x(t,s,x_0(s))$$
$$= -\pi t \sin 2\pi s\,(0{,}01 + \cos 2\pi s)$$

çekirdeğinin R(t,s) resolventasını bulalım. Bu nedenle

$$F(x)(t) = x(t) + \frac{\pi}{2}\int_0^1 t \sin 2\pi s\; x^2(s)\; ds - \cos 2\pi t$$

biçiminde tanımlanan $F : C[0,1] \to C[0,1]$ operatörünün x_0 noktasında $\Im$ - türevi :

$$F'(x_0)h = h(t) + \pi\int_0^1 t \sin 2\pi s\; x_0(s) h(s)\; ds$$

$$= h(t) + \pi\int_0^1 t \sin 2\pi s\,(0{,}01 + \cos 2\pi s)h(s)ds$$

olduğundan $q(t) \in C[0,1]$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$q(t) = h(t) + \pi\int_0^1 t \sin 2\pi s\,(0{,}01 + \cos 2\pi s)h(s)ds \qquad (3.2.14)$$

lineer integral denkleminin çözümünün bulunması gerekir. (3.2.14) denkleminin çözümü

$$c = \int_0^1 t \sin 2\pi s\,(0{,}01 + \cos 2\pi s)h(s)ds$$

olmak üzere

$$h(t) = q(t) - \pi c t$$

olduğu görülür. Bu c sayısını bulmak için

$$h(s) = q(s) - \pi c s$$

eşitliğini $\sin 2\pi s(0.01 + \cos 2\pi s)$ ile çarparak bulunan eşitliğin [0,1] üzerinde integrali alınması gerekir.

$$\int_0^1 t \sin 2\pi s\,(0{,}01 + \cos 2\pi s)h(s)ds = -\pi c\int_0^1 s\,(0{,}01 + \cos 2\pi s)\sin 2\pi s\; ds$$
$$+ \int_0^1 (0{,}01 + \cos 2\pi s)\sin 2\pi s\; q(s)\; ds$$

$$(3.2.15)$$

olduğu ve

$$\int_0^1 s\,(0{,}01 + \cos 2\pi s)\sin 2\pi s\, ds = 0.01\int_0^1 s\ \sin 2\pi s\, ds$$

$$+\int_0^1 s\cos 2\pi s \sin 2\pi s\, ds$$

$$= 0.01\,(-\frac{1}{2\pi}) + (-\frac{1}{8\pi})$$

$$= -\frac{13}{100\pi}$$

olduğundan (3.2.15) eşitsizliğinden

$$c = \frac{100}{87}\int_0^1 (0{,}01 + \cos 2\pi s)\sin 2\pi s\, q(s)\, ds$$

olur. Böylece (2.10.14) denkleminin çözümü

$$h(t) = q(t) - \frac{100\pi}{87}\int_0^1 t\,(0{,}01 + \cos 2\pi s)\sin 2\pi s\, q(s)\, ds$$

olur. Buradan

$$R(t,s) = -\frac{100\pi}{87}\, t\,(0.01 + \cos 2\pi s)\sin 2\pi s$$

olduğu görülür.

$$\int_0^1 |R(t,s)|ds = \frac{100\pi}{87}\, t\int_0^1 |0.01 + \cos 2\pi s||\sin 2\pi s|ds$$

$$\leq \frac{101}{87}\, t$$

olduğundan

$$\max\{\int_0^1 |R(t,s)|ds \ :\ t \in [0,1]\} \leq \frac{101}{87}$$

ve dolayısıyla $m_0 = \dfrac{101}{87}$ olduğu görülür. Diğer taraftan

$$g_0(t) = x_0(t) + \frac{\pi}{2}\int_0^1 t\sin 2\pi s\ x_0^2(s)ds - \cos 2\pi t$$

$$= 0.01 + \cos 2\pi t + \frac{\pi}{2}\int_0^1 t\sin 2\pi s\ (0.01 + \cos 2\pi s)^2\ ds - \cos 2\pi t$$

$$= \cos 2\pi t + \frac{\pi}{2}\int_0^1 t \sin 2\pi s \cos^2 2\pi s\, ds - \cos 2\pi t + 0.01$$

$$+ (0.01)^2 \frac{\pi}{2} t \int_0^1 \sin 2\pi s ds + 0.01\pi t \int_0^1 \sin 2\pi s \cos 2\pi s ds$$

$$= 0.01$$

olduğundan

$$\|g_0\|_\infty = 0.01$$

olur.

Böylece $l_0 = \pi$, $m_0 = \frac{101}{87}$, $P_0 = 0.01$ ve $b - a = 1$ olduğundan

$$q_0 = 2(b-a)(1+m_0)^2 l_0 P_0 = \frac{35344}{378450} < 1$$

elde edilir. Bu durumda

$$r_0 = \frac{87}{188\pi}(1 - \sqrt{\frac{171553}{189225}})$$

olmak üzere (2.10.13) denkleminin $x^*(t) \in \overline{S_{r_0}(x_0)}$ tek çözümü vardır ve bu çözüm terimleri

$$x_n(t) = -\frac{\pi}{2} t \int_0^1 \sin 2\pi s\; x_{n-1}(s) ds + \cos 2\pi t$$

$$+ (-\frac{100\pi}{87}) t \int_0^1 (0.01 + \cos 2\pi s) \sin 2\pi s$$

$$[x_{n-1}(s) + \frac{\pi s}{2}\int_0^1 \sin 2\pi\xi\; x_{n-1}^2(\xi) d\xi - \cos 2\pi s]\, ds \quad , n = 1, 2, \ldots$$

biçiminde tanımlanan $(x_n(t))$ fonksiyon dizisinin limiti olarak bulunabilir ve $(x_n(t))$ dizisi $x^*(t) = \cos 2\pi t$ çözümüne

$$\|x_n - x^*\|_\infty \le \frac{47}{2175}\sqrt{\frac{189925}{174555}}(1 - \sqrt{\frac{174555}{189225}})^n \qquad , n = 1, 2, \ldots$$

hızıyla yaklaşır.

ÖRNEK 3.2.6 : $x_0(t) = 0.9 \sin t$ başlangıç yaklaşımını kullanarak

$$x(t) = \frac{1}{8\pi}\int_0^{\pi} \sin t[x(s)\sin s + x^2(s)]ds$$

integral denklemini Newton metodu ile çözünüz.

$$f(t,s,x) = \frac{1}{8\pi}\sin t[x(s)\sin s + x^2(s)]ds$$

$$f_x(t,s,x) = \frac{1}{8\pi}\sin t[\sin s + 2x]$$

$G = \{(t,s,x)\in R^3 : 0\le t\le \pi\ ,\ 0\le s\le \pi\ ,\ -r \le x\le 0.9+r\ ,\ r>0\}$

(t,s,x_1) , $(t,s,x_2) \in G$ olmak üzere

$$|f_x(t,s,x_1) - f_x(t,s,x_2)| = \left|\frac{1}{4\pi}\sin t(x_1 - x_2)\right|$$
$$\le \frac{1}{4\pi}|x_1 - x_2|$$

$l = \dfrac{1}{4\pi}$ olarak bulunur.

$$F(x)(t) = x(t) - \frac{1}{8\pi}\int_0^{\pi}\sin t[x(s)\sin s + x^2(s)]ds$$

$F : C[0,\pi] \rightarrow C[0,\pi]$ olmak üzere

$$F'(x_0)h = h(t) - \frac{1}{8\pi}\int_0^{\pi}\sin t(\sin s + 2x_0(s))h(s)ds$$

$$h(t) - \frac{1}{8\pi}\int_0^{\pi}\sin t(\sin s + 2x_0(s))h(s)ds = q(t)$$

$$h(t) - \frac{1}{8\pi}\sin t\int_0^{\pi}(\sin s + 2x_0(s))h(s)ds = q(t)$$

$$h(t) - \frac{1}{8\pi}\sin t\int_0^{\pi}(\sin s + 1.8\sin s)h(s)ds = q(t)$$

$$h(t) - \frac{2.8}{8\pi}\sin t\int_0^{\pi}\sin s h(s)ds = q(t)$$

$$c = \int_0^{\pi}\sin s h(s)ds$$

olmak üzere

$$h(t) = q(t) + \frac{2.8}{8\pi}\sin t\, c$$

olduğu görülür. c sayısını bulmak için aşağıdaki işlemleri yapalım.

$$c = \int_0^{\pi}\sin s(q(s) + \frac{2.8}{8\pi}\sin s\;\; c)ds$$

$$c = \frac{2.8}{8\pi}c\int_0^{\pi}\sin^2 s ds + \int_0^{\pi}\sin s q(s)ds$$

$$c = \frac{2.8}{8\pi}c(\frac{1}{2}s - \frac{\sin 2s}{4})\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\sin s q(s)ds$$

$$c = \frac{2.8}{8\pi}c\frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi}\sin s q(s)ds$$

$$c = \frac{1.4}{8}c + \int_0^{\pi}\sin s q(s)ds$$

$$c = 0.175c + \int_0^{\pi}\sin s q(s)ds$$

$$c - 0.175c = \int_0^{\pi}\sin s q(s)ds$$

$$c = \frac{1}{0.825}\int_0^{\pi}\sin s q(s)ds$$

$$c = 1.2121\int_0^{\pi}\sin s q(s)ds$$

olarak bulunur.

$$h(t) = q(t) + \frac{2.8}{8\pi}\sin t(1.2121\int_0^{\pi}\sin s q(s)ds)$$

olur. Buradan

$$h(t) = q(t) + \frac{3.3938}{8\pi}\int_0^{\pi} \sin t \sin s q(s) ds$$

$$[F'(x_0)]^{-1} q(t) = q(t) + \frac{3.3938}{8\pi}\int_0^{\pi} \sin t \sin s q(s) ds$$

$$\|[F'(x_0)]^{-1} q\|_\infty \le (1 + \frac{3.3938}{8\pi}\int_0^{\pi} \sin s ds)\|q\|_\infty$$

$$\le (1 + \frac{6.7876}{8\pi})\|q\|_\infty$$

ise $m = 1 + \frac{6.7876}{8\pi}$ olarak bulunur.

$$\|[F'(x_0)]^{-1}\| \le 1 + \frac{6.7876}{8\pi}$$

$$[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)h(t) = F(x_0)h(t) + \frac{3.3938}{8\pi}\int_0^{\pi} \sin t \sin s F(x_0)h(s) ds$$

$$= h(t) - \frac{1}{8\pi}\int_0^{\pi} \sin t \sin s h(s) ds$$

$$+ \frac{3.3938}{8\pi}\int_0^{\pi} \sin t \sin s [h(s) - \frac{1}{8\pi}\int_0^{\pi} \sin s \sin \xi h(\xi) d\xi] ds$$

$$\|[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)h\| \le (1 + \frac{3.3938}{8\pi}\int_0^{\pi} \sin s ds) \left\| h(t) - \frac{1}{8\pi}\int_0^{\pi} \sin t \sin s h(s) ds \right\|_\infty$$

$$\le (1 + \frac{6.7876}{8\pi})(1 + \frac{1}{4\pi})\|h\|_\infty$$

$$\|[F'(x_0)]^{-1} F(x_0)\| \le (1 + \frac{6.7876}{8\pi})(1 + \frac{1}{4\pi})$$

$$\eta = (1 + \frac{6.7876}{8\pi})(1 + \frac{1}{4\pi})$$

olarak bulunur. $2ml\eta < 1$ olmalıdır.

$$2m\ l\eta = 2(1+\frac{6.7876}{8\pi})^2 \frac{1}{4\pi}(1+\frac{1}{4\pi})$$
$$= (1+\frac{6.7876}{8\pi})(\frac{1}{2\pi})(\frac{1+4\pi}{4\pi})$$
$$= (1+\frac{6.7876}{8\pi})(\frac{1+4\pi}{8\pi^2})$$
$$= (1.27)(0.17182)$$
$$= 0.2182 < 1$$

$2ml\eta < 1$ koşulu sağlanır. Son olarak

$$r_0 = \frac{1-\sqrt{1-2ml\eta}}{ml}$$

$$r_0 = \frac{1-\sqrt{1-0.2182}}{0.101}$$

$$r_0 = \frac{1-\sqrt{0.7818}}{0.101}$$

$$r_0 = 1.146$$

olarak bulunur.

ÖRNEK 3.2.7 : $x_0(t) = e^{-t}$ başlangıç yaklaşımı olmak üzere

$$x(t) = \frac{1}{8}\int_0^1 te^s x^2(s)ds + e^{-t}$$

integral denklemini Newton metodu ile çözünüz.

$$x(t) = \frac{1}{8}\int_0^1 te^s x^2(s)ds + e^{-t}$$

$$f(t,s,x) = \frac{1}{8}te^s\, x^2$$

$$f_x(t,s,x) = \frac{1}{4}te^s x$$

$G = \{(t,s,x) \in R^3 : 0 \leq t \leq 1 , 0 \leq s \leq 1 , \frac{1}{e} - r \leq x \leq 1+r , r > 0\}$

$(t,s,x_1) , (t,s,x_2) \in G$ olmak üzere

$$|f_x(t,s,x_1) - f_x(t,s,x_2)| = \frac{1}{4} te^s |x_1 - x_2|$$

$$\leq \frac{1}{4} e |x_1 - x_2|$$

$l = \frac{1}{4} e$ olarak bulunur.

$$F(x)(t) = x(t) - \frac{1}{8} \int_0^1 te^s x^2(s) ds - e^{-t}$$

$F : C[0,\pi] \to C[0,\pi]$ olmak üzere

$$F'(x_0)h = h(t) - \frac{1}{4} \int_0^1 te^s x_0(s) h(s) ds$$

olur. Buradan hareketle denklem

$$h(t) - \frac{1}{4} \int_0^1 te^s x_0(s) h(s) ds = q(t)$$

$$h(t) - \frac{1}{4} t \int_0^1 h(s) ds = q(t)$$

halini alır.

$$c = \int_0^1 h(s) ds$$

dersek

$$c = \int_0^1 (\frac{1}{4} sc + q(s)) ds$$

$$c = \frac{1}{8} c + \int_0^1 q(s) ds$$

$$\frac{7}{8} c = \int_0^1 q(s) ds$$

$$c = \frac{8}{7}\int_0^1 q(s)ds$$

olarak bulunur ve yerine yazılırsa

$$h(t) = \frac{2}{7}\int_0^1 tq(s)ds + q(t)$$

$$[F'(x_0)]^{-1} q(t) = \frac{2}{7}\int_0^1 tq(s)ds + q(t)$$

$$\left\|[F'(x_0)]^{-1}\right\|_\infty = \frac{2}{7}(1+1)\ \|q\|_\infty$$

$$= \frac{4}{7}\ \|q\|_\infty$$

olur. Böylece $m = \dfrac{4}{7}$ olarak bulunur. Şimdi η' yı hesaplayalım.

$$[F'(x_0)]^{-1} F(x_0) = \frac{2}{7}\int_0^1 t[F(x_0)(s)]ds + F(x_0)(t)$$

$$= \frac{2t}{7}\int_0^1 [x_0(s) - \frac{1}{8}\int_0^1 se^{\xi} x^2(\xi)d\xi - e^{-s}]ds$$

$$+ x_0(t) - \frac{1}{8}\int_0^1 te^{s} x_0^2(s)ds - e^{-t}$$

$$= \frac{2t}{7}\int_0^1 [-\frac{1}{8}\int_0^1 se^{-\xi}d\xi]ds - \frac{t}{8}\int_0^1 e^{-s}ds$$

$$= \frac{2t}{7}\int_0^1 [\frac{1}{8}se^{-\xi}\Big|_0^1]ds + \frac{1}{8}te^{-s}\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{7}t\frac{1}{8}\int_0^1 s(\frac{1}{e}-1)ds + \frac{1}{8}t(\frac{1}{e}-1)$$

$$= (\frac{1}{e}-1)\frac{t}{8}(\frac{2}{7}.\frac{1}{2}+1)$$

$$= \frac{1-e}{e}.\frac{t}{8}.\frac{8}{7}$$

$$= \frac{1-e}{7e}t$$

$$\left\| [F'(x_0)]^{-1} F(x_0) \right\| \le \frac{e-1}{e} \frac{1}{8} \frac{8}{7}$$

$$\eta = \frac{e-1}{7e}$$

bulunur. $2ml\eta < 1$ olmalıdır.

$$2ml\eta = 2 \frac{4}{7} \frac{1}{4}e \frac{e-1}{7e}$$

$$= \frac{2(e-1)}{49} < 1$$

istenilen şart sağlanmıştır.

$$r_0 = \frac{1-\sqrt{1-2ml\eta}}{ml}$$

$$r_0 = \frac{1-\sqrt{1-\frac{2(e-1)}{49}}}{\frac{4}{7}\frac{1}{4}e}$$

$$r_0 = \frac{1-\sqrt{\frac{49-2(e-1)}{49}}}{\frac{1}{7}e}$$

$$r_0 = \frac{1-\frac{\sqrt{49-2(e-1)}}{7}}{\frac{1}{7}e}$$

$$r_0 = \frac{7-\sqrt{49-2(e-1)}}{e}$$

olarak bulunur.

Problem 3.2.8 :

$$\varphi(t) = \int_0^1 e^{st} e^{-[\varphi(s)]} ds + \sqrt{t} - \frac{1}{t-1}[e^{t-1} - 1] \qquad (3.2.16)$$

integral denklemini Newton metodu ile çözünüz.

$\varphi(x) = \sqrt{t}$ fonksiyonu (3.2.16) denkleminin bir çözümü olduğundan $x(t) = 0$ fonksiyonu

$$x(t) - \int_0^1 e^{s(t-1)}[e^{-2\sqrt{s}\ x(s) - x^2(s)} - 1]ds = 0 \qquad (3.2.17)$$

denkleminin bir çözümü olduğu açıktır.

$$H(s,x) = e^{-2\sqrt{s}(x-x^2)} - 1 \ , \ Q(t,s,x) = (1-e^{s(t-1)})(e^{-2\sqrt{s}(x-x^2)} - 1)$$

ve

$$F_1(x)(t) = x(t) - \int_0^1 H(s,x(s))ds \ ,$$

$$F_2(x)(t) = \int_0^1 Q(t,s,x(s))ds$$

olmak üzere (3.2.17) denklemini

$$F_1(x) + F_2(x) = 0 \qquad (3.2.18)$$

operatörlü denklem şeklinde yazabiliriz.

$0 < r < 1$ olmak üzere

$$x_0 \in \overline{S_{r/2}}(\theta) = \{x \in C[0,1] : \|x\|_\infty \le r/2\}$$

$$G = \{(t,s,x) \in \mathrm{R}^3 : 0 \le t, s \le 1, \ x_0(s) - r/2 \le x \le x_0(s) + r/2\}$$

olsun.

$$H(s,x) = e^{-2\sqrt{s}(x-x^2)} - 1 \ , \ H_x(s,x) = -2(\sqrt{s} + x)e^{-2\sqrt{s}(x-x^2)}$$

fonksiyonları G üzerinde sürekli fonksiyonlardır. $g(x) = -2\sqrt{s}x - x^2$ olmak üzere her $s \in [0,1]$ ve her $x_1, x_2 \in [x_0(s) - r/2, x_0(s) + r/2]$ için

$$H_x(s,x_2) - H_x(s,x_1) = 2(\sqrt{s} + x_1)(e^{g(x_1)} - e^{g(x_2)}) + 2(x_1 - x_2)e^{g(x_2)}$$

$$g(x_1) - g(x_2) = -2\sqrt{s}(x_1 - x_2) - (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$$

$$H(s,x) = e^{-2\sqrt{s}(x-x^2)} - 1 \quad , H_x(s,x) = -2(\sqrt{s} + x)e^{-2\sqrt{s}(x-x^2)}$$

fonksiyonları G üzerinde sürekli fonksiyonlardır. $g(x) = -2\sqrt{s}x - x^2$ olmak üzere her $s \in [0,1]$ ve her $x_1, x_2 \in [x_0(s) - r/2, x_0(s) + r/2]$ için

$$H_x(s,x_2) - H_x(s,x_1) = 2(\sqrt{s} + x_1)(e^{g(x_1)} - e^{g(x_2)}) + 2(x_1 - x_2)e^{g(x_2)}$$

$$g(x_1) - g(x_2) = -2\sqrt{s}(x_1 - x_2) - (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$$

olduğundan her $x_1, x_2 \in [x_0(s) - r/2, x_0(s) + r/2]$ için $e^{g(x_2)} \le 1$,

$|g(x_1) - g(x_2)| \le 2(1+r)|x_1 - x_2|$ ve $|e^{g(x_1)} - e^{g(x_2)}| \le 2(1+r)|x_1 - x_2|$ elde edilir. Bu nedenle her $s \in [0,1]$ ve her $x_1, x_2 \in [x_0(s) - r/2, x_0(s) + r/2]$ için

$$|H_x(s,x_1) - H_x(s,x_2)| \le 2(1 + 2(1+r)^2)|x_1 - x_2|$$

olur. Böylece $\overline{l_0'} = 2(1 + 2(1+r)^2)$ elde edilir. $x_0 \in \overline{S_{r/2}}(\theta)$ bir başlangıç yaklaşımı olmak üzere

$$R(s) = H_x(s, x_0(s)) = -2(\sqrt{s} + x_0(s))e^{-2\sqrt{s}[x_0(s) - x_0^2(s)]}$$

çekirdeğinin $\widetilde{\mathfrak{R}}(s)$ resolventasını bulalım.

$$F_1(x)(t) = x(t) - \int_0^1 H(s, x(s))ds$$

biçiminde tanımlanan $F_1 : C[0,1] \to C[0,1]$ operatörünün $x_0(t)$ noktasında $\mathfrak{I}$ - türevi

$$F'(x_0)h(t) = h(t) + 2\int_0^1 (\sqrt{s} + x_0(s))e^{-2\sqrt{s}[x_0(s) - x_0^2(s)]}h(s)ds$$

olduğundan $q(t) \in C[0,1]$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$q(t) = h(t) + 2\int_0^1 (\sqrt{s} + x_0(s))e^{-2\sqrt{s}[x_0(s) - x_0^2(s)]}h(s)ds \qquad (3.2.19)$$

lineer integral denkleminin çözümünün bulunması gerekir. (3.2.19) denkleminin çözümü

$$c = 2\int_0^1 (\sqrt{s} + x_0(s))e^{-2\sqrt{s}[x_0(s) - x_0^2(s)]}h(s)ds \qquad (3.2.20)$$

olmak üzere $h(t) = q(t) - c$ biçimindedir. $h(t)$' nin bu ifadesini (3.2.20) denkleminde yerine yazarsak

$$c[1+2\int_0^1(\sqrt{s}+x_0(s))e^{-2\sqrt{s}x_0(s)-x_0^2(s)}ds] =$$

$$2\int_0^1(\sqrt{s}+x_0(s))e^{-2\sqrt{s}[x_0(s)-x_0^2(s)]}q(s)ds \quad (3.2.21)$$

denklemi elde edilir. $x_0(t)\in\overline{S_{r/2}}(\theta)$ başlangıç yaklaşımı için

$$T(x_0) = 1+ 2\int_0^1(\sqrt{s}+x_0(s))e^{-2\sqrt{s}[x_0(s)-x_0^2(s)]}ds \neq 0 \qquad (3.2.22)$$

koşulu sağlansın. Bu durumda

$$c=\frac{2}{T(x_0)}\int_0^1(\sqrt{s}+x_0(s))e^{-2\sqrt{s}[x_0(s)-x_0^2(s)]}q(s)ds$$

olduğu görülür. Böylece (3.2.19) denkleminin çözümü

$$\widetilde{\Re}(s) = -\frac{2}{T(x_0)}(\sqrt{s}+x_0(s))e^{-2\sqrt{s}x_0(s)-x_0^2(s)}$$

olmak üzere

$$h(t_1) = [F_1'(x_0)]^{-1}q(t) = q(t) + \int_0^1\widetilde{R}(s)q(s)ds$$

elde edilir.

$$\int_0^1\left|\widetilde{\Re}(s)\right|ds \le \frac{2}{|T(x_0)|}\int_0^1\left|\sqrt{s}+x_0(s)\right|e^{-2\sqrt{s}x_0(s)-x_0^2(s)}ds$$

olduğundan m_0' sayısı olarak

$$\overline{m_0'} = \frac{2}{|T(x_0)|}\int_0^1\left|\sqrt{s}+x_0(s)\right|e^{-2\sqrt{s}x_0(s)-x_0^2(s)}ds$$

alınabilir.

$$\overline{P_0'} = \max\{\left|x_0(t)-\int_0^1(e^{-2\sqrt{s}x_0(s)-x_0^2(s)}-1)ds\right| : t\in[0,1]\}$$

$$\overline{\eta_0'} = \max\{\int_0^1\left|1-e^{s(t-1)}\right|\left|e^{-2\sqrt{s}x(s)-x^2(s)}-1\right|ds : t\in[0,1], |x(s)|\le r\}$$

diyelim. Her $(t, s)\in[0,1]^2$ ve her $x_1, x_2\in[x_0(s)-r/2\ ,\ x_0(s)+r/2\ ]$ için

$$|Q(t,s,x_1)-Q(t,s,x_2)| = \left|(1-e^{s(t-1)})(e^{g(x_1)}-e^{g(x_2)})\right|$$

$$\leq 2(e-1)(1+r)|x_1 - x_2|$$

olduğundan $L_0^{'}$ sayısı olarak $L_0^{'} = 2(e-1)(1+r)$ alınabilir.

Böylece $x_0 \in \overline{S_{r/2}(\theta)}$ başlangıç yaklaşımı için (3.2.22) koşulu ve

$$\overline{q_0^{'}} = 1 - 2[(1+\overline{m_0^{'}})\overline{l_0^{'}}]^2(\overline{P_0^{'}} + \overline{\eta_0^{'}}) > (\overline{m_0^{'}}\,\overline{L_0^{'}})^2$$

$$(1+\overline{m_0^{'}})\overline{l_0^{'}}\delta_0 = 1 - \sqrt{1-\overline{q_0^{'}}} < r(1+\overline{m_0^{'}})\frac{\overline{l_0^{'}}}{2}$$

eşitsizlikleri gerçekleşiyorsa (3.2.16) denkleminin tek bir $x^*(t) = 0$ çözümü vardır ve bu çözüm

$$\widetilde{\Re}(s) = -\frac{1}{T(x_0)}(\sqrt{s} + x_0(s))e^{-2\sqrt{s}x_0(s) - x_0^2(s)}$$

olmak üzere terimleri

$$x_n(t) = -\int_0^1 e^{s(t-1)}(1 - e^{-2\sqrt{s}x_{n-1}(s) - x_{n-1}^2(s)})ds -$$

$$\int_0^1 \widetilde{R}(s)[x_{n-1}(s) + \int_0^1 e^{\tau(s-1)}(1 - e^{-\sqrt{\tau}x_{n-1}(\tau) - x_{n-1}^2(\tau)})d\tau]ds \quad , n = 1,2,...$$

biçiminde tanımlanan $(x_n(t))$ dizisinin limiti gibi bulunabilir ve $(x_n(t))$ dizisi $x^*(t) = 0$ çözümüne

$$\overline{q_2} = 1 - \sqrt{1-\overline{q_0^{'}}} + (1+\overline{m_0^{'}})\overline{L_0^{'}}$$

olmak üzere

$$\|x_n\|_\infty \leq \frac{(\overline{q_2})^n}{1-\overline{q_2}}(1+\overline{m_0^{'}})(\overline{P_0^{'}} + \overline{\eta_0^{'}}) \quad , n = 1,2,.....$$

hızıyla yaklaşır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

AKSOY ,Y. " İntegral Denklemler." Cilt I . İstanbul 1998.

BAYRAKTAR , M . " Fonksiyonel Analiz ." Atatürk Üniversitesi . Erzurum 1996

HUTSON , V. PYM. J. " Applicatious of Fonctional Analysis and Operatör Theory " Acad Press London , New York 1980

HÜSEYNOV , A. İ. (İntegral Tenlikler) , " İntegral Denklemler " , Maarif , Bakü 1981

KANTAROVİÇ , L.V. , AKİLOV G. P. (Fonksiyonelnıy Analiz) , " Fonksiyonel Analiz ." , Nauka , Moskova 1984

KRASNOSELSKİY , M. A. ve b. (Priblijonnoye Reşeniye Operatornıh Uravneniy) , " Operatör Denklemlerin Tahmini Çözümü ", Nauka , Moskova 1969

KREYSZİG , E. " İntrodictory Fonctional Analysis With Application " New York 1987 , (Türkçe Uyarlayan ÖNER , Ç. , Ankara 1998)

MOORE , R.H. Newton Method and Variatious " Nonlinear İntegral Equations " University of Wisconsin Press , Madison 1964

MUSAYEV , B. İ. (Konctruktivnıye Metodı Reşeniye Singulyarnıh İntegralnıh Uravneniy) , "Singüler İntegral Denklemlerin Konstruktif Çözüm Yöntemleri " , Dr. Tezi , Tiflis 1988

MUSAYEV , B. İ. , ALP , M. " Fonksiyonel Analiz ." Ders Notu , Kütahya 2000

NOBLE , B. The Numerical Solution of Nonlinear İntegral Equations and Related Topics. "Nonlinear İntegral Equations " , University of Wisconsin Press , Madison 1964

PETROVSKİY , İ.G. (Leksii Po Teori İntegralnıh Uravneniy) , " İntegral Denklemler Teorisi Notları " Nauka , Moskova 1965

RUDİN , W. " Functional Analysis " , Tata Mc Graw - Hill Publishing Company Ltd. , New Delhi 1973

TRENOGİN , V.A. (Fonksiyonelnıy Analiz) , " Fonksiyonel Analiz ." , Nauka , Moskova 1980

TRİCOMİ , F.G. " İntegral Equations " , New York 1957

VERTGEİN , B.A. " On Conditions of Newton ' s Method " , Dokl. Akad . Nauk . SSSR , 110 , 1956 , s. 719 - 722