MUTLAK TOPLANABİLME ÇARPANLARI

Tufan Sait KUZPINARI

Dumlupınar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin BOR

Haziran-2000

Tufan Sait KUZPINARI'NİN YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "MUTLAK TOPLANABİLME ÇARPANLARI " başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

03./07./2000

Üye: Prof. Dr. Hüseyin BOR

Üye: Prof. Dr. Bırali MUSAYEV

Üye: Doç. Dr. Ekrem AĞACANOĞLU

Üye: Yrd. Doç. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

Üye: Yrd. Doç. Dr. Murat ALP

Fen Bilimleri Enstitüsünün Yönetim Kurulu'nun 06./07./2000 gün ve 06/29 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Zemanon KÖSE

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

MUTLAK TOPLANABİLME ÇARPANLARI

Tufan Sait KUZPINARI
Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2000
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hüseyin BOR

ÖZET

Mutlak Toplanabilme Çarpanları üzerine hazırlanmış bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm de tez içerisinde kullanılan tanımlar sunulmaktadır.

Bölüm 2'de $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ toplanabilme metodu için bazı teoremler ve lemmalar sunulmaktadır.

Son olarak Bölüm 3'te, Bölüm 2'de $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ toplanabilme metodu için sadece ifadelerini verdiğimiz teoremleri $\left|\overline{N}, p_n; \delta\right|_k$ toplanabilme metodu için ifade ve ispat edeceğiz.

Anahtar Kelimeler: Serilerin mutlak toplanabilmesi, mutlak toplanabilme çarpanları, hemen hemen artan dizi, Riesz toplanabilme metodları

ABSOLUTE SUMMABILITY FACTORS

Tufan Sait KUZPINARI
Department of Mathematics, MsC Thesis, 2000
Supervisor : Prof. Dr. Hüseyin BOR

SUMMARY

This thesis which based on Absolute Summability Factors, consist of three chapters.

In the first chapter, some basic definations have been given.

In the second chapter, some theorems and lemmas have been given for $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ summability method.

In the third chapter, when we given only their expressions of theorems and lemmas for $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ summability method in chapter two, have been prooved for $\left|\overline{N}, p_n;\delta\right|_k$ summability method.

Keywords: Absolute summability of series, absolute summability factors, almost increasing sequence, Riesz methods of summability

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın yürütülmesinde büyük emeği geçen , hiçbir zaman ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam **Prof. Dr. Hüseyin BOR** 'a şükranlarımı sunarım.

Ayrıca çalışmalarım sırasında fikir ve yardımlarından istifade ettiğim **Yrd.Doç. Dr. Murat ALP** 'e teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Çalışmalarım esnasındaki yardımlarından dolayı **Arş.Grv. Sedat PAK**'a teşekkürlerimi sunarım.

Kütahya – 2000 **Tufan Sait KUZPINARI**

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler		Açıklama
N	:	Pozitif tamsayılar kümesi
(s_n)	:	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi
$(s_n) = O(1)$	:	(s_n) dizisi sınırlı
$\sum a_n$	:	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi
(X_n)	:	Pozitif terimli kat sayılar dizisi

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Mutlak toplanabilme çarpanları konusunda, önce sırasıyla $|\overline{N},p_n|$ toplanabilme çarpanları ve $\left|\overline{N},p_n\right|_k$ toplanabilme çarpanları ile ilgili bilinen bazı teoremler ifade ve ispat edilmişti. Bu tezde de bugüne kadar bilinenlerin genelleştirilmişi olan $\left|\overline{N},p_n;\delta\right|_k$ toplanabilirliği için bazı teoremlerin ifadeleri ve ispatları sunulmuştur.

Birinci bölümde mutlak toplanabilme çarpanları ile ilgili tanımlara yer verilmiştir. İkinci bölümde verilen teoremlerle üçüncü bölümde verilen teoremler arasındaki fark şu özel durumda incelenmektedir.

$\delta = 0$ için $\left|\overline{N},p_n;\delta\right|_k$ toplanabilirliği $\left|\overline{N},p_n\right|_k$ toplanabilirliği ile aynıdır. Eğer $\forall n\in N$ için $p_n=1$ alırsak $\left|\overline{N},p_n;\delta\right|_k$ toplanabilirliği $\left|C,1\ ;\delta\right|_k$ toplanabilirliğine indirgenir

BİRİNCİ BÖLÜM

Bu bölümde ilk olarak tez içerisinde sıkça faydalandığımız tanımları sunmakla işe başlayalım.

Aksi bir şey söylenmediği taktirde bu çalışmamızda baştan sona kadar (s_n) , $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisini ve (p_n),

$$P_n = \sum_{v=0}^{n} p_n \to \infty$$

olacak şekilde pozitif reel sabitlerin bir dizisini gösterecektir.

Tanım1.1.

Bir $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun. Eğer $\sum a_n \lambda_n$ serisi bir B toplama metodu yardımıyla toplanabiliyorsa (λ_n) dizisine $\sum a_n$ serisinin B metodu için bir toplanabilme çarpanı denir (Hardy,1949).

Tanım1.2.

$\alpha > -1$ olmak üzere σ_n^α ve t_n^α sırasıyla $\sum a_n$ serisinin ve (na_n) dizisinin α. mertebeden n. Cesaro ortalamasını göstersinler:

$$\sigma_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{v=0}^{n} A_{n-v}^{\alpha-1} s_v$$

$$t_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{v=1}^{n} A_{n-v}^{\alpha-1} v a_v$$

$$A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} = O(n^\alpha) \quad , \quad A_0^\alpha = 1 \quad , n > 0 \text{ için } A_{-n}^\alpha = 0$$

Eğer;

$$\sum_{n=1}^{\infty} | \sigma_n^{\alpha} - \sigma_{n-1}^{\alpha} | \qquad < \qquad \infty$$

ise $\sum a_n$ serisi $|C,\alpha|$ toplanabilirdir denir (Fekete,1911).

Burada;

$$t_n^{\alpha} \qquad = \qquad n(\sigma_n^{\alpha} - \sigma_{n-1}^{\alpha})$$

olduğu biliniyor (Fekete,1911).

Tanım1.3.

$k \geq 1$ ve $\delta \geq 0$ olsun. Eğer;

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \left| \sigma_n^{\alpha} - \sigma_{n-1}^{\alpha} \right|^k \qquad < \qquad \infty$$

ise $\sum a_n$ serisi $|C, \alpha|_k$ toplanabilirdir denir (Flett,1957).

Ayrıca;

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\delta k + k - 1} \left| \sigma_n^{\alpha} - \sigma_{n-1}^{\alpha} \right|^k < \qquad \infty$$

ise $\sum a_n$ serisi $|C,\alpha;\delta|_k$ toplanabilirdir denir(Flett,1958).

Özel olarak $\delta=0$ ve $\alpha=1$ için $|C,\alpha;\delta|_k$ toplanabilirliği sırasıyla $|C,\alpha|_k$ ve $|C,1;\delta|_k$ toplanabilirliği ile aynıdır.

Tanım1.4.

Pozitif terimli (a_n) ve (b_n) dizileri verilsin. Eğer her $n \geq n_0$ için $a_n \leq c.b_n$ olacak şekilde $c > 0$ ve $n_0 \geq 1$ tam sayısı varsa, $a_n=O(b_n)$, $n\to\infty$ şeklinde yazılır.

Tanım1.5.

Eğer;

$$\sum_{v=1}^{n}\frac{|s_v|}{v} = O(\log n), \quad n\to\infty$$

ise, $\sum a_n$ serisi 1-indisli logaritmik ortalama yardımıyla kuvvetli sınırlı veya kısaca $[R,\log n,1]$ sınırlıdır denir (Pati,1962).

Tanım1.6.

$k\geq 1$ sabit bir sayı olmak üzere

$$\sum_{v=1}^{n}\frac{|s_v|^k}{v} = O(\log n), \quad n\to\infty$$

ise, $\sum a_n$ serisi k-indisli logaritmik ortalama yardımıyla kuvvetli sınırlı veya kısaca $[R,\log n,1]_k$ sınırlıdır denir (Mıshra,1965).

Şimdi (p_n),

$$P_n = p_0+ p_1+ p_2+...+ p_n \to \infty \quad , n \to \infty$$

olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisi olsun ve

$$t_n = \frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n} p_v s_v$$

yazalım.

Tanım1.7.

Eğer,

$$\sum_{v=1}^{n} p_v \,|\, s_v \,| \quad = \quad O(P_n)$$

ise $\sum a_n$ serisi $[\overline{N}, p_n]$ sınırlıdır denir (Daniel,1964).

Tanım1.8.

k≥1 sabit bir sayı olmak üzere

$$\sum_{v=1}^{n} p_v |s_v|^k \quad = \quad O(P_n) \qquad , \qquad n \to \infty$$

ise $\sum a_n$ serisi $[\overline{N}, p_n]_k$ sınırlıdır denir (Bor,1985).

k=1 için Tanım1.6 ile Tanım 1.7 aynıdır.Fakat k>1 için aşağıdaki durum söz konusudur. Eğer k>1 ve $\sum a_n$ serisi $[\overline{N}, p_n]_k$ sınırlı ise $\sum a_n$ serisi $[\overline{N}, p_n]$sınırlı olmak zorundadır (Bor,1985).

Gerçekten de

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{k'} = \frac{k-1}{k}$$

olmak üzere $\sum_{v=1}^{n} p_v \,|\, s_v \,|$ ifadesine Hölder Eşitsizliğini uygularsak;

$$\sum_{v=1}^{n} p_v \,|\, s_v \,| \quad = \quad \sum_{v=1}^{n} |\, s_v \,| (p_v)^{\frac{1}{k}} (p_v)^{\frac{k-1}{k}} \leq \left(\sum_{v=1}^{n} |\, s_v \,|^k \; p_v \right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{v=1}^{n} p_v \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

$$= \quad O\left\{ (P_n)^{\frac{1}{k}} . (P_n)^{\frac{k-1}{k}} \right\}$$

$$= \quad O(P_n)$$

elde ederiz. Buda neticeyi bize verir.

Burada özel olarak $p_n = \dfrac{1}{n}$ alırsak;

$$P_n = \sum_{v=1}^{n} p_v$$

$$= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \cong \log n$$

olduğundan $[R, \log n, 1]_k$ sınırlılığını elde ederiz.

Tanım1.9.

Eğer $k \geq 1$ ve $\delta \geq 0$ için

$$\sum_{v=1}^{n} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\delta k} p_v \, | s_v |^k = O(P_n) \,, \qquad n \to \infty$$

ise $\sum a_n$ serisi $\left| \bar{N}, p_n ; \delta \right|_k$ sınırlıdır denir (Bor,1992,1993).

Tanım1.10.

Eğer $n \to \infty$ için (t_n)'nin bir limiti varsa $\sum a_n$ serisi $|\bar{N}, p_n|$ toplanabilirdir denir (Hardy,1949).

Tanım1.11.

Eğer, $k \geq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|t_n - t_{n-1}\right|^k < \infty$$

ise $\sum a_n$ serisi $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ toplanabilirdir denir (Bor,1985).

Tanım1.12.

Eğer, $k \geq 1$ ve $\delta \geq 0$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|t_n - t_{n-1}\right|^k < \infty$$

ise $\sum a_n$ serisi $\left|\overline{N}, p_n;\delta\right|_k$ toplanabilirdir denir (Bor,1992).

$\delta = 0$ özel halinde $\left|\overline{N}, p_n;\delta\right|_k$ toplanabilirliği $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ toplanabilirliği ile aynıdır. Eğer $\forall n \in N$ için $p_n=1$ alırsak $\left|\overline{N}, p_n;\delta\right|_k$ toplanabilirliği $\left|C,1\ ;\delta\right|_k$ toplanabilirliğine indirgenir (Bor,1993).

Tanım1.13.

A ve B iki pozitif sabit olsun. Ayrıca (b_n) pozitif bir dizi ve (c_n)'de pozitif artan bir dizi olsun. Eğer $A\ c_n \leq b_n \leq B\ c_n$, $n \in N$ şartı sağlanıyorsa bu taktirde (b_n) dizisine hemen hemen artan bir dizi denir (Aljancic-Aramdeloviç,1977).

Tanım1.14. (Hölder Eşitsizliği)

$p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $a_1,a_2,\ldots,a_n\geq 0$ ve $b_1,b_2,\ldots,b_n\geq 0$

olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k{}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

dır (Maddox,1970).

Tanım1.15. (Minkovski eşitsizliği)

$p\geq 1$, $a_1,a_2,\ldots,a_n\geq 0$ ve $b_1,b_2,\ldots,b_n\geq 0$

olsun. Bu taktirde

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k)^P\right)^{\frac{1}{P}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k{}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

dır (Maddox,1970).

İKİNCİ BÖLÜM

Bu bölümde bazı teoremleri ve lemmaları vereceğiz. $\left[\overline{N}, p_n\right]_k$ toplanabilme metodu için genelleştirilen teoremlerin sadece ifadelerini vereceğiz. Lemmalardan ise sadece Lemma 2.1'in ispatı verilmiştir.Diğer Lemmaların ise yalnızca ifadelerinden bahsedilmiştir.

TEOREM 2.1:

$k \geq 1$ olsun. Eğer $\sum a_n$ serisi $\left[\overline{N}, p_n\right]_k$ sınırlı ve (λ_n) ile (p_n) dizileri $n \to \infty$ için

i) $p_{n+1} = O(p_n)$

ii) $\sum_{v=0}^{n} p_v \,|\lambda_v| = O(1)$

iii) $P_n\,|\Delta\lambda_n| = O(p_n|\lambda_n|)$

şartlarını sağlıyorsa ,bu taktirde $\sum a_n P_n \lambda_n$ serisi $|\overline{N}, p_n|_k$ toplanabilirdir (Bor,1996).

TEOREM 2.2:

(p_n), $p_n = O(np_n)$ olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisi ve

$$t_n = \frac{1}{n+1}\sum_{v=1}^{n} v a_v \tag{2.1}$$

olsun. Eğer $n \to \infty$ için $\lambda_n \to 0$ ve

$$\sum_{n=1}^{m} nX_n\left|\Delta^2\lambda_n\right| = O(1), \qquad m \to \infty \tag{2.2}$$

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{p_n}{P_n}\left|t_n\right|^k = O(X_m)\ , \quad m \to \infty \tag{2.3}$$

se bu taktirde $\sum a_n \lambda_n$ serisi $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilirdir (Bor,1998).

Burada;

$$\Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1} \quad \text{ve} \quad \Delta^2\lambda_n = \Delta\lambda_n - \Delta\lambda_{n-1} \tag{2.4}$$

dir.

TEOREM 2.3:

(p_n) pozitif sayılar dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın,

$$P_n = O(n\, p_n) \quad n \to \infty \tag{2.5}$$

(X_n) pozitif azalmayan bir dizi ve varsayalım ki (β_n) ve (λ_n) dizileri aşağıda verilenleri sağlıyor olsun

$$|\Delta \lambda_n| \leq \beta_n \tag{2.6}$$

$$\beta_n \to 0 \quad , \quad n \to \infty \tag{2.7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|\Delta\beta_n| X_n < \infty \tag{2.8}$$

$$|\lambda_n| X_n = O(1) \quad , \quad n \to \infty \tag{2.9}$$

$$t_n = \frac{1}{n+1}\sum_{v=1}^{n} v a_v \tag{2.10}$$

olmak üzere , eğer; $k \geq 1$

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{p_n}{P_n} |t_n|^k = O(X_m) \quad , \quad m \to \infty \tag{2.11}$$

ise $\sum a_n \lambda_n$ serisi $|\overline{N}, p_n|_k$ toplanabilirdir (Bor-Seyhan,1999).

LEMMA 2.1:

Eğer (λ_n) ile (p_n) dizileri Teorem 2.3'deki şartları sağlıyorsa, bu taktirde ;

$$P_m |\lambda_m| = O(1) \ , \ m \to \infty$$

dir (Bor,1996).

İSPAT:

Abel kısmi toplama formülünden dolayı ;

$$\sum_{n=1}^{m} p_n \lambda_n = \sum_{n=1}^{m-1} p_n \Delta\lambda_n + p_m \lambda_m$$

elde ederiz. O halde

$$\begin{aligned}
|P_m \lambda_m| &= \left| \sum_{n=1}^{m} p_n \lambda_n - \sum_{n=1}^{m-1} p_n \Delta\lambda_n \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{m} p_n |\lambda_n| + \sum_{n=1}^{m-1} p_n |\Delta\lambda_n| \\
&= \sum_{n=1}^{m} p_n |\lambda_n| + O(1) \sum_{n=1}^{m-1} p_n |\lambda_n| \\
&= O(1) \quad , \quad m \to \infty
\end{aligned}$$

Demek ki ;

$$P_m |\lambda_m| = O(1) \ , \ m \to \infty \qquad \text{dir.}$$

LEMMA 2.2:

Eğer (2.2) şartı sağlanıyorsa; bu taktirde

$$nX_n|\Delta X_n| \quad = \quad O(1) \quad , \quad n \to \infty ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n |\Delta \lambda_n| \quad < \quad \infty \quad ,$$

$$X_n|\lambda_n| \quad = \quad O(1) \quad , \quad n \to \infty$$

olur (Bor,1994).

LEMMA 2.3:

(β_n) , (λ_n) , (X_n) dizileri Teorem 2.3 de ifade edildiği gibi olmak üzere (2.7) şartı sağlanıyorsa, bu taktirde ,

$$n\beta_n X_n \quad = \quad O(1) \quad , \quad n \to \infty \qquad (2.3.1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n X_n \quad < \quad \infty \qquad (2.3.2)$$

olur (Mazhar,1997).

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

Bu bölümde ikinci bölümde $\left|\bar{N},p_n\right|_k$ toplanabilme metodu için sadece ifadelerini verdiğimiz teoremleri $\left|\bar{N},p_n;\delta\right|_k$ toplanabilme metodu için ifade ve ispat edeceğiz.

TEOREM 3.1:

$k \geq 1$ ve $0 \leq \delta \leq \frac{1}{k}$ olsun. Teorem 2.2 deki (2.3) şartını

$$\sum_{v=1}^{n}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k-1}\left|t_v\right|^k = O(X_n), \qquad n \to \infty \tag{3.1}$$

şeklinde değiştirdiğimizde aynı teoremin şartlarını sağlayan diziler (p_n) ve (λ_n) dizileri olsun.

Eğer;

$$\sum_{n=v+1}^{\infty}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}} = O\left\{\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k}\frac{1}{P_v}\right\} \tag{3,2}$$

ise $\sum a_n\lambda_n$ serisi $\left|\bar{N},p_n;\delta\right|_k$ toplanabilirdir (Bor,1996).

Eğer bu teoremde δ =0 alırsak Teorem 2.2'yi elde ederiz.

Hatırlatma:

Eğer bu teoremde δ =0 alırsak (3,2) şartı gereksiz olur, çünkü bu durumda (3,2) şartı

$$\sum_{n=v+1}^{\infty}\frac{p_n}{P_nP_{n-1}} = O(\frac{1}{P_v})\text{'} \qquad \text{ye}$$

indirgenmiş olur ve bu her zaman gerçeklenir.

İSPAT:

(T_n), $\sum a_n \lambda_n$ serisinin $\left(\overline{N}, p_n\right)$ ortalaması olsun. Tanımdan dolayı,

$$T_n = \frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n} p_v \sum_{r=0}^{v} a_r \lambda_r$$

$$= \frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n} (\ P_n - P_{v-1}\ ) a_v \lambda_v$$

elde ederiz. Böylece; $n \geq 1$ için

$$T_n - T_{n-1} = \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} \frac{P_{v-1}\lambda_v}{v} v a_v$$

elde ederiz. Abel dönüşümünü uygularsak;

$$T_n - T_{n-1} = \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \Delta(\ \frac{P_{v-1}\lambda_v}{v}\ ) \sum_{r=1}^{v} r a_r + \frac{p_n \lambda_n}{n P_n} \sum_{v=1}^{n} v a_v$$

$$= -\frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v \lambda_v \frac{v+1}{v} t_v + \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} P_v \Delta\lambda_v \frac{v+1}{v} t_v$$

$$+ \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} P_v \lambda_{v+1} \frac{1}{v} t_v + \frac{(n+1) p_n \lambda_n t_n}{n P_n}$$

$$= T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3} + T_{n,4}$$

$$|\ T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3} + T_{n,4}\ |^k \leq 4^k (|T_{n,1}|^k + |T_{n,2}|^k + |T_{n,3}|^k + |T_{n,4}\ |^k)$$

olduğundan Teoremin ispatını tamamlamak için, aşağıdaki ifadeyi göstermek yeterlidir.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,r}\right|^k \quad < \quad \infty \quad , \qquad r=1,2,3,4$$

r=1 ,için ispatlayalım, r=2,3,4 için ispatlamak bunun benzeridir.

k>1 olmak üzere Hölder eşitsizliğini kullanırsak;

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,1}\right|^k \le \sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{p_{n-1}^k}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}p_v\,|\lambda_v|\,\frac{v+1}{v}\,|t_v|\right\}^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}p_v\,|\lambda_v|\,|t_v|^k\left\{\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}p_v\right\}^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m}p_v\,|\lambda_v|\,|t_v|^k\sum_{n=v+1}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k-1}|t_v|^k\,|\lambda_v|$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\Delta|\lambda_v|\sum_{r=1}^{v}\left(\frac{P_r}{p_r}\right)^{\delta k-1}|t_r|^k$$

$$+O(1)\,|\lambda_m|\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k-1}|t_v|^k$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m}|\Delta\lambda_v|\,X_v + O(1)\,|\lambda_m|\,X_m$$

$$= O(1) \quad , \qquad m\to\infty$$

elde ederiz.

Eğer teoremdeki tüm n değerleri için $p_n=1$ alırsak bu taktirde $|C,1;\delta|_k$ toplanabilme çarpanı ile ilgili bir sonuç elde ederiz.

TEOREM 3.2:

$\delta \geq 0$ ve $k \geq 1$ olsun.

$\sum a_n$ serisi $\left[\overline{N}, p_n; \delta\right]_k$-sınırlı ve (λ_n) ve (p_n) dizileri Teorem 2.2'nin **i)** ve **iii)** şartlarını sağlıyor olsunlar. Eğer,

$$\sum_{n=v+1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1} \frac{1}{P_{n-1}} = O\left(\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k} \frac{1}{P_v}\right), \tag{3.3}$$

ise, $\sum a_n P_n \lambda_n$ serisi $\left|\overline{N}, p_n; \delta\right|_k$ toplanabilirdir (Bor,1998).

$\delta \leq 0$ için Teorem 3.2, Teorem 2.2' yı içerir. Çünkü bu durumda $\left[\overline{N}, p_n; \delta\right]_k$ sınırlılığı $\left[\overline{N}, p_n\right]_k$ sınırlılığına indirgenir ve (3.3) şartı her zaman kullanılan

$$\sum_{n=v+1}^{\infty} \left(\frac{p_n}{P_n P_{n-1}}\right) = O\left(\frac{1}{P_v}\right)$$

haline indirgenir.

İSPAT:

Genellemeyi bozmaksızın $a_0 = s_0 = 0$ kabul edebiliriz. $\sum a_n P_n \lambda_n$ serisinin $\left(\overline{N}, p_n\right)$ ortalamasını T_n ile gösterelim.

$$T_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} p_v \sum_{r=0}^{v} P_i a_i \lambda_i$$

$$= \quad \frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n}(P_n - P_{v-1})P_v a_v \lambda_v$$

$$T_n - T_{n-1} \quad = \quad \frac{p_n}{P_n . P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n} P_{v-1} P_v a_v \lambda_v$$

elde ederiz. Abel dönüşümünden dolayı;

$$T_n - T_{n-1} \quad = \quad -\frac{p_n}{P_n P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1} P_v p_v s_v \lambda_v + \frac{p_n}{P_n P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1} P_v \Delta\lambda_v p_v s_v$$

$$-\frac{p_n}{P_n P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1} P_v p_{v+1} s_v \lambda_{v+1} + p_n s_n \lambda_n$$

$$= \quad T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3} + T_{n,4}$$

elde ederiz. Teoremin ispatını tamamlamada k>1 için Minkovski eşitsizliği gereğince; r =1,2,3,4 için;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1} \left|T_{n,r}\right|^k \quad < \quad \infty$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi k ve k' indisleri $\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1$ olmak üzere Hölder eşitsizliğini uygulayalım.

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1} \left|T_{n,1}\right|^k \quad \leq \quad \sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{\delta k-1}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}(P_v \mid \lambda_v \mid)^k p_v \mid s_v \mid^k\right\}\left\{\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1} p_v\right\}^{k-1}$$

$$= \quad O(1)\sum_{v=1}^{m}(P_v \mid \lambda_v \mid)^k p_v \mid s_v \mid^k \sum_{n=v+1}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}}$$

$$= \quad O(1)\sum_{v=1}^{m}(P_v\,|\,\lambda_v\,|)^{k-1}\,|\,\lambda_v\,|\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k} p_v\,|\,s_v\,|^k$$

$$= \quad O(1)\sum_{v=1}^{m}|\,\lambda_v\,|\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k} p_v\,|\,s_v\,|^k$$

$$= \quad O(1)\sum_{v=1}^{m-1}|\,\Delta\lambda_v\,|\sum_{i=1}^{v}\left(\frac{P_i}{p_i}\right)^{\delta k} p_i\,|\,s_i\,|^k$$

$$+O(1)\,|\,\lambda_m\,|\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k} p_v\,|\,s_v\,|^k$$

$$= \quad O(1)\sum_{v=1}^{m-1}|\,\Delta\lambda_v\,|P_v + O(1)\,|\,\lambda_m\,|\,P_m$$

$$= \quad O(1)\sum_{v=1}^{m-1}p_v\lambda_v + O(1)\,|\,\lambda_m\,|\,P_m$$

$$= \quad O(1) \quad , \qquad m\to\infty$$

teoremin hipotezi ve Lemmadan dolayı bunu elde ettik. Böylece ;

$$P_v|\Delta\lambda_v| \;=\; 0(p_v|\lambda_v|)$$

olduğunu görürüz. Teorem 2.2' nin **iii)** şartını kullanarak $T_{n,1}$' elde ettiğimiz gibi;

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,2}\right|^k \;=\; O(1)\sum_{v=1}^{m}|\,\lambda_v\,|\,(\frac{p_v}{P_v})^{\delta k}\,p_v\,|\,s_v\,|^k$$

$$= \quad O(1) \qquad m\to\infty$$

elde ederiz.

Tekrar $p_{n+1}=O(p_n)$ olduğunda, Teorem 2.2' nın **i)** şartına göre $T_{n,1}$' elde ettiğimiz gibi;

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,3}\right|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m}|\lambda_{v+1}|\left(\frac{p_v}{P_v}\right)^{\delta k} p_v\,|s_v|^k$$

$$= O(1) \qquad m\to\infty$$

elde ederiz.

Son olarak yine $T_{n,1}$ i elde ettiğimiz işlemleri yaptığımızda;

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,4}\right|^k = O(1)\sum_{n=1}^{m}|\lambda_{n}|\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k} p_n\,|s_n|^k$$

$$= O(1) \qquad m\to\infty$$

elde ederiz. Özetlersek;

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,r}\right|^k = O(1),\quad m\to\infty, \qquad r=1,2,3,4$$

için elde etmiş oluruz. Bu da Teorem 3.2'nin ispatını tamamlar.

TEOREM 3.3:

$k\geq 1$ ve $0\leq\delta<1/k$ olsun.

(X_n) hemen hemen artan bir dizi ve (β_n) ve (λ_n) dizileri Teorem 2.3'ün (2.6)ve (2.9) şartlarını sağlıyor olsun. Eğer, (p_n) dizisi Teorem 2.3'ün (2.5) şartını sağlıyorsa ve

$$t_n = \frac{1}{n+1}\sum_{v=1}^{n} v a_v$$

şeklinde verilmiş ise,

$$\sum_{n=v+1}^{\infty}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}} = O\left\{\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k}\frac{1}{P_v}\right\} \tag{3.4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}|t_n|^k = O(X_m) \tag{3.5}$$

bu taktirde $\sum a_n\lambda_n$ serisi $\left|\overline{N}, p_n; \delta\right|_k$ toplanabilirdir (Bor,1999).

Hatırlatma:

Eğer bu teoremde (X_n) pozitif azalmayan bir dizi ve $\delta = 0$ alırsak Teorem 2.3'ü elde ederiz. Bu durumda (3.5) şartı Teorem2.3'te verilen (2.11) şartına indirgenir ve (3.4) şartı ;

$$\sum_{n=v+1}^{\infty}\frac{p_n}{P_n P_{n-1}} = O\left(\frac{1}{P_v}\right) \tag{3.6}$$

şartına indirgenir.

İSPAT:

(T_n) , $\sum a_n\lambda_n$ serisinin $(\overline{N}, p_n)$ ortalamasını göstersin tanımdan ve toplamanın sırasının değişme özelliğinden dolayı

$$T_n = \frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n} p_v \sum_{i=0}^{v} a_i\lambda_i$$

$$= \frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n}(P_n - P_{v-1})a_v\lambda_v$$

elde ederiz. n ≥1 için

$$T_n - T_{n-1} = \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} P_{v-1} a_v \lambda_v$$

$$= \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n} \frac{p_{v-1}\lambda_v}{v} v a_v$$

Abel dönüşümünden dolayı;

$$T_n - T_{n-1} = \frac{n+1}{nP_n} p_n t_n \lambda_n - \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v t_v \lambda_v \frac{v+1}{v}$$

$$+ \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} P_v \Delta\lambda_v t_v \frac{v+1}{v} + \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} P_v t_v \lambda_{v+1} \frac{1}{v}$$

$$= T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3} + T_{n,4}$$

diyelim. Böylece

$$| T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3} + T_{n,4} |^k \le 4^k(|T_{n,1}|^k + |T_{n,2}|^k + |T_{n,3}|^k + |T_{n,4}|^k),$$

Teoremin ispatını tamamlamak için, aşağıdaki ifadeyi göstermek yeterlidir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1} |T_{n,r}|^k < \infty \quad , \quad r = 1,2,3,4$$

Teorem 2.3'te (2.9) şartına göre $\lambda_n = O(1/X_n) = O(1)$ olur buradan;

$$\sum_{n=1}^{m} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1} |T_{n,1}|^k = O(1) \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1} |\lambda_n|^{k-1} |\lambda_n| |t_v|^k$$

$$= \quad O(1)\sum_{n=1}^{m}|\lambda_n|\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}|t_n|^k$$

$$= \quad O(1)\sum_{n=1}^{m-1}\Delta|\lambda_n|\sum_{v=1}^{n}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k-1}|t_v|^k$$

$$+ \; O(1)|\lambda_m|\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}|t_n|^k$$

$$= \quad O(1)\sum_{n=1}^{m-1}|\Delta\lambda_n|X_n + O(1)\,|\,\lambda_m\,|\,X_m$$

$$= \quad O(1)\sum_{n=1}^{m-1}\beta_n X_n + O(1)\,|\,\lambda_m\,|\,X_m$$

$$= \quad O(1) \quad , \qquad m\to\infty$$

sonucunu elde ederiz. k>1 için Hölder eşitsizliğini uygularsak; $T_{n,1}$'de olduğu gibi;

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}|T_{n,2}|^k \quad = \quad O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}p_v|\lambda_v|^k|t_v|^k\right\}\times\left\{\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}p_v\right\}^{k-1}$$

$$= \quad O(1)\sum_{v=1}^{m}p_v|\lambda_v|^{k-1}|\lambda_v||t_v|^k\sum_{n=v+1}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}}$$

$$= \quad O(1)\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k-1}|t_v|^k|\lambda_v| = O(1)$$

elde edilir.

$P_v=O(vp_v)$ ve $n\beta_n = O(1/X_n)$ ifadelerini kullanarak tekrar Hölder eşitsizliğini uygularsak;

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,3}\right|^k = O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}(v\beta_v)^k p_v\left|t_v\right|^k\right\}\times\left\{\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}p_v\right\}^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m}(v\beta_v)(v\beta_v)^{k-1}p_v\left|t_v\right|^k\sum_{n=v+1}^{\infty}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m}(v\beta_v)\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k-1}\left|t_v\right|^k$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\Delta(v\beta_v)\sum_{i=1}^{v}\left(\frac{P_i}{p_i}\right)^{\delta k-1}\left|t_i\right|^k + O(1)m\beta_m\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k-1}\left|t_v\right|^k$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\left|\Delta(v\beta_v)\right|X_v + O(1)m\beta_m X_m$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m-1}vX_v\left|\Delta\beta_v\right| + O(1)\sum_{v=1}^{m-1}\beta_{v+1}X_v + O(1)m\beta_m X_m$$

$$= O(1) \quad , \quad m\to\infty$$

elde ederiz.

Son olarak; $P_v=O(vp_v)$ ifadesini kullanarak, $T_{n,1}$ ve $T_{n,2}$ ifadelerinde olduğu gibi

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,4}\right|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k-1}\left|\lambda_{v+1}\right|\left|t_v\right|^k$$

ifadesi elde edilir. Böylece r=1,2,3,4 için

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_{n,r}\right|^k = O(1) \quad , m\to\infty$$

ifadesini elde ederiz. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

KAYNAKLAR DİZİNİ

ALJANCIC,S.-ARAMDELOVIÇ,D.: *O* Regularly varying Functions. Publ. Inst. Math. 22(1977)5-22

BOR,H.: On two summability methods. Proc. Cambr. Phil. Soc. 97 (1985) , 147-149.

BOR,H.: On $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ -summability factors of infinite series. Tamkang J. Math.16 (1985), 13-20.

BOR,H.: On $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ -summability factors. Proc. Amer. Math. Soc.94(1985),419-422.

BOR,H.: Absulate summability factors of infinite series. PanAmer. Math. J. 2 (1992),33-38.

BOR,H.: On the local property of $\left|\overline{N}, p_n;\delta\right|_k$ -summability of factored Fourier series. J.Math.Anal. Appl. 179(1993), 644-649.

BOR,H.: On the absolute Riesz summability factors.Rocky MountainJ.Math. 24 (1994),1263-1271.

BOR,H.: On absolute summability factors. Journal for analysis and its applications .15(1996)2,545-549.

BOR,H.: Factors for absolute Riesz summability methods.Acta Et commentationes deMatematica 2(1998),23-26.

BOR,H.-SEYHAN,H.:On almost ıncreasing sequences and ıts applications. Indıan J.pureappl.Math., 30(1999), 1041-1046.

DANIEL,E.C.: On Absolute Summability Factors of Infinıte Series. Japan Acad.Jour.40(1964),65-69

FEKETE,M.: Zur Theorie Der Divergenten Reihen.Math.Éstermezs értesitö (Budapest),29(1911),719-726

FLETT,T.M.: On an extension of absulate summability and some theorems of Littlewood and Paley. Proc. London Math. Soc. 7(1957), 113-141.

FLETT,T.M.: Some More Theorems Concerning The Absulate Summability of Fourier Series and power series. Proc. London Math. Soc. 8(1958), 357-387.

HARDY,G.H.: Divergent Series. Oxford Unıversity Press.(1949)

KISHORE,N.-HOTTA, G.C.: On $\left|\overline{N}, p_n\right|$-summability factors. Acta Sci.Math. (Szeged),31 (1976), 9-12.

MADDOX,I.J.: Elements Of Functional Analysis. Cambridge University Press.(1970)

MAZHAR,S.M.:Bull. Ins. Math. Acad. Sinica, 25(1997),233-242.

MISHRA,B.P.: On The Absolute Cesaro Summability Factors Of Infinite Series. Rend. Circ. Math. Palermo

PETERSON,G. M.:Regular matrix transformation. Mc. Graw Hill.(1996)

PATI,T. :Absolute Cesaro Summability Factors Of Infinite Series.Math. Zeit 78(1962),293-297.