ÇAPRAZLANMIŞ KARE

Ahmet BEKİR

Dumlupınar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Murat ALP

Haziran-2000

Ahmet BEKİR'İN YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "ÇAPRAZLANMIŞ KARE" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

03./07./2000

Üye: Prof. Dr. Binali MUSAYEV

Üye: Doç. Dr. Mahmut KOÇAK

Üye: Yrd. Doç. Dr. Murat ALP

Fen Bilimleri Enstitüsünün Yönetim Kurulu'nun 06./07./2000 gün ve 06/29. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Ramazan KÖSE

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ÇAPRAZLANMIŞ KARE

Ahmet BEKİR
Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2000
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Murat ALP

ÖZET

Çaprazlanmış Kare üzerine hazırlanmış bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm teze kısa bir giriş olup tez içerisinde sıkça kullanılan temel kavramlar ikinci bölümde sunulmaktadır.

Bölüm 3, çaprazlanmış modüllerin , hem grup yapıları hem de cebir yapıları üzerindeki incelenmesini ve bu yapılar üzerindeki örnekleri içermektedir. Ayrıca bu kategorinin Cat^1-gruplar kategorisine denkliği de bu bölüm içersinde verilmektedir.

Çaprazlanmış Kare teorisi ve örnekleri ile birlikte denk olduğu Cat^2- grup kategorisi hem gruplar hem de cebir yapısı üzerinde incelenerek bölüm 4'te sunulmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Modül, Etki, Yarı-direkt çarpım, Cat^1-grup, Cat^2-grup, Çaprazlanmış modül, Çaprazlanmış kare

CROSSED SQUARE

Ahmet BEKİR
Department of Mathematics, M.Sc Thesis, 2000
Supervisor : Associative Prof. Dr. Murat ALP

SUMMARY

This thesis is based on Crossed Square over Groups and Algebras , it consists of four chapters.

A brief introduction is given in chapter 1. Chapter 2 contains the basic concepts of Semi-direct product , Cat^1-group , Cat^2-groups. Crossed Modules and Crossed Modules Morphisms . The examples of Crossed Modules over groups and algebras were presented in Chapter 3. Crossed Square and its morphism , its examples over groups and algebras have been given in Chapter 4.

Key Words: Modul, Action, Semi-direct product, Cat^1-group, Cat^1-group, Crossed modul, Crossed square.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın yürütülmesinde büyük emeği geçen , hiçbir zaman ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam **Yrd. Doç. Dr. Murat ALP**'e şükranlarımı sunarım.

Ayrıca çalışmalarım sırasında fikir ve yardımlarından istifade ettiğim Arş. Gör. Erdal ULUALAN'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Çalışmalarım esnasındaki yardımlarından dolayı Yrd. Doç. Dr. Ercan UÇGUN'a teşekkürlerimi sunarım.

Kütahya – 2000 **Ahmet BEKİR**

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\propto$	Yarı Direk Çarpım
Mod	*k*-modülleri Kategorisi
Xmod	Çaprazlanmış Modüller Kategorisi
SimpCeb	Simplisel cebir Kategorisi
CAT	Cat ^{n}-gruplar Kategorisi
Csr^2	Çaprazlanmış Kare Kategorisi
M	Cat^1-grubun tanım grubu
N	Cat^1-grubun değer grubu
s,b,e	Cat^1-grubun bitiş,başlangıç ve embedding homomorfizmleri
$\ker s, \ker b$	Bitiş ve başlangıç homomorfizmlerinin çekirdeği
$\langle \sigma, \rho \rangle$	Cat^1-grup morfizm çifti
M	Çaprazlanmış Modül'ün tanım grubu
N	Çaprazlanmış Modül'ün değer grubu
∂	Çaprazlanmış Modül homomorfizmi
$\langle \lambda, \nu \rangle$	Çaprazlanmış Modül Morfizm çifti
X	Bir Çaprazlanmış Modül
C	Bir Cat^1-grup
C^2	Bir Cat^2-grup
ϕ	Çaprazlanmış Kare Morfizmi Dönüşümü
Y	Bir Çaprazlanmış Kare
CAT^1	Cat^1-grup olma şartı
CAT^2	Cat^2-grup olma şartı
CM	Çaprazlanmış Modül olma şartı
CS	Çaprazlanmış Kare olma şartı
CEB	Cebir üzerinde etki olma şartı

1.GİRİŞ

Gruplar ve Cebirler üzerinde tanımlı olan çaprazlanmış modüller ve çaprazlanmış kare'nin incelenecek olduğu bu tezde , konular ayrı ayrı ele alınarak inceleme yapılmaktadır.

Bölüm 2 tez içerisinde kullanılan çaprazlanmış modüller ve çaprazlanmış kare'ye temel oluşturan konuları içermektedir.

Öncelikli olarak grup ve cebir üzerindeki etki aşağıdaki gibi tanımlanmış olup, M ve N değişmeli grup olmak üzere ,

$$M \times N \to N$$
$$(m,n) \to mn$$

dönüşümü her $m \in M, n \in N$ için tez içerisinde verilen özellikleri sağlaması gerekir.
Ayrıca, M ve N, k-cebir olmak üzere ,

$$M \times N \to N$$
$$(m,n) \to mn$$

dönüşümü her $m,m' \in M, n,n' \in N, k \in k$ için C1), C2), C3), C4), C5) özelliklerini sağlaması gerekir.

Daha sonra Cat^1-gruplar ve Cat^2-gruplar tanımı aşağıdaki gibi verilip,
G bir grup ve $K \subset G$ bir alt grup olmak üzere $s,b : G \to K$ homomorfizmleri aşağıdaki aksiyomları sağlıyor ise ,

$CAT^1 1)$ $\quad seb = b$ ve $bes = s$

$CAT^1 2)$ $\quad [\ker s, \ker b] = id_G = \{1_G\}$

$$s^2 = s \qquad ses = s$$
$$b^2 = b \qquad beb = b$$

$C = (e,s,b : G \to K)$ şeklinde gösterilen C 'ye bir Cat^1-grup olarak tanımlanabilir.
Yine buna benzer olarak Cat^2-grup tanımı verilebilir. Cat^2-grup yapısını da $C^2 = (e, s_i, b_i : G \to G_i)$ şeklinde tanımlayabiliriz.

Loday tarafindan ortaya konulan ve çaprazlanmış modüller kategorisine **Xmod**'a denk olan Cat^1-gruplar kategorisi **Cat** tanımlanmakta olup bu kategorilerin bilgisayar uygulamaları hakkında da bilgiler verilmektedir.

Bölüm 3 , çaprazlanmış modüller kategorisini hem gruplar üzerinde hem de cebirler üzerinde incelemekte olup, bu kategoriler üzerinde bu konularla ilgili olarak geniş geniş örneklere de yer verilmektedir. Yine iki çaprazlanmış modül arasındaki çaprazlanmış modül morfizmleri hem gruplar için hem de cebirler için incelenerek , örnekleri ile birlikte sunulmuştur. Morfizmlerin daha iyi anlaşılması için morfizmleri oluşturan homomorfizm çiftleri şekillerle de yorumlanmıştır.

Loday tarafından ortaya konulan Cat^2-gruplar kategorisine denk olan ve yine Brown-Loday tarafından tanımlanan çaprazlanmış kare kategorisi hem gruplar için hem de cebirler için incelenmesi Bölüm 4 te yapılmıştır. Çaprazlanmış kare tanımı aşağıdaki gibi verilmiş olup, tez içerisinde verilen Y diyagramı bütün $l \in L$, $m,m' \in M$, $n,n' \in N$, $p \in P$ için aşağıdaki özellikleri sağlaması gerekmektedir.

$CS1)$ μ,ν,λ,λ' dönüşümlerinin herbiri ve $\lambda'\nu$ bileşeni çaprazlanmış modül

$CS2)$ μ,ν dönüşümleri P etkilerini korur.

$CS3)$ $h(mm',n) = {}^{m}h(m',n).h(m,n)$

$h(m,nn') = h(m,n).{}^{n}h(m,n')$

$CS4)$ ${}^{p}h(m,n) = h({}^{p}m, {}^{p}n)$

$CS5)$ $\nu h(m,n) = {}^{m}nn^{-1}$

$\mu h(m,n) = m\,{}^{n}m^{-1}$

$CS6)$ $h(m,\nu l) = {}^{m}ll^{-1}$

$h(\mu l,n) = l\,{}^{n}l^{-1}$

İncelenen bu konuların örnekleri ve morfizmleri de bu bölüm içerisinde incelenmiştir. Bu bölüm içerisinde verilen örnekler açık bir şekilde incelenerek bilgisayar uygulamalarına temel teşkil edecek şekilde yorumlanmıştır. Bu nedenle bu tez çaprazlanmış modülün bilgisayar uygulamaları göz önüne alınarak , çaprazlanmış kare'ninde bilgisayar uygulanmasına ışık tutacaktır.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölüm içerisinde çaprazlanmış modülün ve çaprazlanmış karenin oluşturulmasında temel teşkil eden modül, bimodül tanımlarının yanı sıra, grup ve cebir üzerindeki etkiler tanımlanmıştır.

Ayrıca hem grup hem de cebir için yarı-direkt çarpım tanımı verilmiştir. Çaprazlanmış modüllere denk olan cat^1 – gruplar, çaprazlanmış kareye denk olan cat^2 – gruplar incelenmektedir.

2.1 Modül ve bimodüller

Tanım:(M-modül) M bir halka olsun. Her $n,n_1,n_2 \in N$ ve $m,m_1,m_2 \in M$ için

$$M \times N \to N$$

$$(m,n) \mapsto mn$$

çarpımı ile

$$\begin{aligned} m(n_1+n_2) &= mn_1+mn_2 \\ (m_1+m_2)n &= m_1n+m_2n \\ (m_1m_2)n &= m_1(m_2n) \end{aligned}$$

şartlarını sağlayan , bir N toplamsal abelyan gruba sol M -modül denir. Eğer çarpım ,

$$N \times M \to N$$

$$(n,m) \mapsto nm$$

şeklinde sağdan tanımlı ise N bir sağ M -modül yapısı oluşturur.

Örnek 2.1.1 : M bir halka olmak üzere , herhangi bir K abelyan grubu $m \in M, k \in K$ için,

$$M \times K \rightarrow K$$

$$(m,k) \mapsto mk = 0$$

tanımlaması ile bir M -modül yapısı oluşturur.

Tanım:(M-N)-bimodül M ve N iki halka olsun. Bir K abelyan grubu hem sol M -modül hem de sağ N -modül ve her $m \in M, n \in N, k \in K$ için,

$$m(kn) = \quad (mk)n$$

Örnek 2.1.2 : M halkasının kendisi bir (M -M)-bimodüldür. M halkası birleşme özelliğini sağladığından yukarıdaki tanıma uygundur.

Örnek 2.1.3 : M komütatif halka ise her N sol M -modülden $nm = mn$ tanımlaması ile bir sağ M -modül elde edilir ve N bir (M -M)-bimodül olur.

Eğer M birimli halka , her $n \in N$ için ,

$$1_{m^n} = n$$

şartını sağlayan N 'ye birimli M -modül denir.

Örnek 2.1.4 : Her N toplamsal abelyan grup bir birimli M -modüldür.

Örnek 2.1.5 : M , bir cisim ise M -modül bir vektör uzayı oluşturur.

Örnek 2.1.6 : Bir komütatif M halkasının N ideali, bir M -modüldür.

Bu örneklerin geniş açıklamasını (Ege,Ü. 1998) referansında bulabilirsiniz.

2.2 Grup ve Cebir üzerindeki Etki:

Bir grubun herhangi bir küme üzerine etkisi:

M bir grup ve N herhangi bir küme olmak üzere, her $n \in N$, $m_1, m_2 \in M$ için,

$$M \times N \to N$$

$$(m,n) \mapsto {}^m n$$

fonksiyonu

$${}^e x = x \qquad \text{ve} \qquad {}^{(m_1 m_2)}x = {}^{m_1}({}^{m_2}x)$$

eşitlikleri sağlanıyor ise bu fonksiyona M grubunun N kümesi üzerine sol etkisi denir. Buna benzer olarak n^m ile sağ etki gösterilebilir.

Örnek 2.2.1 :M_n, simetri grubunun $I_n = \{1,2,...,n\}$ kümesi üzerine etkisi

$$M_n \times I_n \to I_n$$
$$(\sigma, x) \mapsto \sigma(x)$$

ile tanımlanır.

Bir G grubu $P = (X,M)$ şeklindeki formunu göz önüne alalım. Bu durumda bir kısa tam diziye

$$1 \to N \to F \to G \to 1$$

şeklinde sahip olup F, X cümlesinde bir serbest gruptur. $M \subset F, N = N(M), M$ cümlesinin F 'deki normal N grubunun üzerindeki konjuge etkisi

$$n \mapsto n^u = u^{-1}nu \quad , \quad n \in N \quad , \quad u \in F \qquad (1.1)$$

şeklinde tanımlanır.

N 'nin elemanları M cümlesinin

$$n = \left(m_1^{\varepsilon_1}\right)^{u_1}\left(m_2^{\varepsilon_2}\right)^{u_2}\ldots\left(m_k^{\varepsilon_k}\right)^{u_k} \quad , n \in N$$

formundaki tüm sonuçları içerir. Burada $m_k \in M$, $\varepsilon_k = \pm 1$, $u_k \in F$ dir.

Örnek 2.2.2 : $m, n \in M$ için

$$m^{-1}n^{-1}mn^{m} = 1$$

ve

$$mn^{-1}m^{-1}n^{m^{-1}}$$

şeklinde birimleri vardır.

Gerçektende (1.1) etkisi kullanılarak

$$mn^{-1}m^{-1}n^{m^{-1}} = mn^{-1}m^{-1}\left(m^{-1}\right)^{-1}nm^{-1} = mn^{-1}m^{-1}mnm^{-1} = 1$$

olduğu gösterilir.

Örnek 2.2.3 : $[m,n] = m^{-1}n^{-1}mn$ şeklimde tanımlanan komütatörleri göz önüne alalım. (Ellis,G.J.,1993) .Bu durumda ,

$$[m,n][m,r]^{n}[n,r][n,m]^{r}[r,m][r,n]^{m} = 1$$

ifadesi elde edilir.

Gerçektende , tanım kullanılarak

$$[m,n][m,r]^{n}[n,r][n,m]^{r}[r,m][r,n]^{m} = \left(m^{-1}n^{-1}mn\right)\left(m^{-1}r^{-1}mr\right)^{n}\left(n^{-1}r^{-1}nr\right)$$

$$\left(n^{-1}m^{-1}nm\right)^{r}\left(r^{-1}m^{-1}rm\right)\left(r^{-1}n^{-1}rn\right)^{m}$$

$$= m^{-1}n^{-1}mnn^{-1}m^{-1}r^{-1}mrnn^{-1}r^{-1}nr$$

$$r^{-1}n^{-1}m^{-1}nmrr^{-1}m^{-1}rmm^{-1}r^{-1}n^{-1}rnm$$

$$= \ 1$$

olduğu görülür.

Örnek 2.2.4 : $m,n \in M$ için

$$m = x^2yxy^3$$

ve

$$n = y^2xyx^3$$

olmak üzere $m = n = 1$ ve $x^7 = 1$ alınarak

$$n^{x^{-1}}\left(m^{-1}\right)^{xyx^2}\left(n^{y^3}m^{-1}\right)^{x^2}\left(m^{-1}\right)^{x^2y^{-1}}n^{y^{-1}x^{-1}y^{-2}}n = x^7 = 1$$

olduğu kolayca görülebilir.

Cebir ve Cebir üzerindeki etki :

Tanım:(Cebir) k bir değişmeli halka olsun. Bir M k-cebiri (k üzerinde bir M cebiri)

$$M \times M \to M$$

$$(m_1, m_2) \mapsto m_1m_2$$

ve

$$(m_1m_2)m_3 \quad = \quad m_1(m_2m_3)$$

asosyatif çarpımını sağlayan bir k-modüldür.

Örnek 2.2.5 : Her halka bir Z -cebirdir.

Örnek 2.2.6 : V , bir F cismi üzerinde vektör uzayı olmak üzere , $Hom_F(V,V)$ endomorfizm halkası bir F -cebirdir.

Biz cebir üzerindeki etkiyi de aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

M ve N , k -cebir olmak üzere

$$M \times N \rightarrow N$$

$$(m,n) \mapsto m \cdot n$$

dönüşümü $m,m' \in M, n,n' \in N, k \in k$ için,

CEB1) $k(n \cdot m) = (kn) \cdot m = n \cdot (km)$

CEB2) $n \cdot (m + m') = n \cdot m + n \cdot m'$

CEB3) $(n + n') \cdot m = n \cdot m + n' \cdot m$

CEB4) $n \cdot (mm') = (n \cdot m)m' = m(n \cdot m')$

CEB5) $(nn') \cdot m = n(n' \cdot m)$

şartlarını sağlıyor ise bu dönüşüme , bir sol etki denir. $n \in N$ nin $m \in M$ üzerine etkisi $n \cdot m$ ile gösterilir. Benzer şekilde $m \cdot n$ ile de sağ etki tanımlanabilir.

2.3 Yarı-Direkt Çarpım

M ve N iki grup olsun.

$$h : N \times M \rightarrow M$$

$$(n,m) \mapsto {}^{n}m$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlayalım.

$$(m,n)(m',n') = (m\,{}^{n}m', nn')$$

ile verilen $M \propto N$ yarı-direkt çarpımı bir gruptur. Gerçekten de;

$$(m,n)(1,1) = (m,n)$$

yine

$$\begin{aligned}
(m,n)(m,n)^{-1} &= (m,n)({}^{n^{-1}}m^{-1}, n^{-1}) \\
&= \left(m\,{}^{n}\left({}^{n^{-1}}m^{-1}\right), nn^{-1} \right) \\
&= \left(m\,{}^{n}\left(n^{-1}m^{-1}n\right), nn^{-1} \right) \\
&= \left(mnn^{-1}m^{-1}nn^{-1}, nn^{-1} \right) \\
&= (1,1)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylelikle ters eleman $(m,n)^{-1}$ ve birim eleman $(1,1)$ şeklinde bulunmuş olur. Ayrıca n, m üzerinde bir etki olduğundan kapalılık özelliği de sağlanmış oldu.

Şimdi de asosyatiflik özelliğinin sağlanıp sağlanmadığını kontrol edelim.

$$[(m,n)(p,q)](r,s) \quad = \quad (m,n)[(p,q)(r,s)]$$

$$(m^n p,nq)(r,s) \quad = \quad (m,n)(p^q r,qs)$$

$$(m^n p^{nq} r,nqs) \quad = \quad (m^n p^{nq} r,nqs)$$

olur. O halde yarı-direkt çarpım bir gruptur.

Aynı şekilde cebirler için yarı-direkt çarpımı tanımlayalım.

M bir k-cebir ve $n \geq 2$ için $M_1, M_2, \ldots, M_n, M$ 'nin alt cebirleri olsun.

i) $M_1 + M_2 + \ldots + M_s$, M 'nin bir ideali $\quad 1 \leq s \leq n$

ii) $M_1 + M_2 + \ldots + M_n = M$

iii) $(M_1 + M_2 + \ldots + M_s) \cap M_t = 0 \quad 1 \leq s < t \leq n$

şartlarını sağlayan M , k-cebirine $M_1, M_2, \ldots, M_n$ nin bir n-yarı-direkt çarpımı denir ve $M = M_1 \propto M_2 \propto \ldots \propto M_n$ ile gösterilir.

Örnek 2.3.1 : M ve N, bir G grubunun alt grupları olsun. Eğer ,

$$M < N, \qquad N \lhd G, \qquad G = MN \qquad \text{ve} \qquad M \cap N = \{e\}$$

ise G, M ve N nin yarı-direkt çarpımıdır.

2.4 Cat^1-Gruplar

Cat ^{1}-Gruplar , ilk olarak 1982 yılında Loday tarafından 1-Cat grup olarak adlandırıldı . Daha sonra Loday ve Brown (Loday,J.L. and Brown,R.,1987) 1987 yılında bu notasyonu Cat^1-grup şekline çevirdiler. Loday (Loday,J.L.,1982) makalesinde Cat^1-grupların yanısıra Cat^2 ,Cat^n-gruplarının tanımını vererek Cat^2-gruplar kategorisi ile Çaprazlanmış kare arasındaki bağıntıları ispatlamıştır. Bu çalışmada ise Cat^1-grup ve Cat^2-grup notasyonu üzerinde durulacaktır. Bilgisayar hesaplamaları için 1997 yılında Alp (Alp,M.,1997) Cat^1-grup tanımını yeniden düzenleyerek bilgisayara uygulanabilir duruma getirmesinin yanı sıra Cat^1-gruplar kategorisini **CAT** olarak göstermiştir.

Bu çalışmada Alp'in notasyonu olan **CAT** ve düzenlenen tanımı kullanarak **XMod** kategorisi ile **CAT** kategorisinin denkliğini düzenlenmiş haliyle vereceğiz.

Tanım:(Cat^1-grup) G bir grup ve $K \subset G$ bir alt grup olmak üzere $s,b:G \to K$ homomorfizmleri aşağıdaki aksiyomları sağlıyor ise ,

$CAT^1 1)$ $\quad seb = b$ ve $bes = s$

$CAT^1 2)$ $\quad [\ker s, \ker b] = id_G = \{1_G\}$

$$s^2 = s \qquad ses = s$$

$$b^2 = b \qquad beb = b$$

$C = (e,s,b:G \to K)$ şeklinde gösterilen C 'ye bir Cat^1-grup denir. Burada b ve s 'yi genellikle C 'nin başlangıç ve bitiş dönüşümleri olarak adlandıracağız.

$$G \underset{b}{\overset{s}{\rightrightarrows}} K$$

Tanım: $C = (e;s,b:M \to N)$ ve $C' = (e';s',b':M' \to N')$ iki Cat^1-grup olsun. Bu durumda C den C' ne tanımlanan Cat^1-grup morfizmi $\langle \sigma, \rho \rangle = C \to C'$ homomorfizmlerinden oluşan bir $\langle \sigma, \rho \rangle$ çiftidir ki bu $\sigma : M \to M'$ ve $\rho : N \to N'$ şeklindeki homomorfizmler aşağıdaki özellikleri sağlarlar.

$$b'\sigma = \rho b$$

$$s'\sigma = \rho s$$

$$e'\rho = \sigma e$$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "b"] & M' \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "b'"] \\
N \arrow[r, "\rho"'] \arrow[u, bend left=60, "e"] & N' \arrow[u, bend right=60, "e'"']
\end{tikzcd}$$

Gerçekten de; $m \in M, m' \in M', n \in N, n' \in N'$ olmak üzere

$$\sigma(m) = m',\ b'(m') = n'$$

ve

$m \in M, n \in N, n' \in N'$ olmak üzere

$$b(m) = n, \rho(n) = n'$$

$$b'\sigma(m) = b'(m') = n' = \rho(n) = \rho b(m)$$

$$s'\sigma(m) = s'(m') = n' = \rho(n) = \rho s(m)$$

olur. Yine $n \in N, n' \in N', m' \in M'$ olmak üzere

$$\rho(n) = n', e'(n') = m'$$

ve $n \in N, m \in M, m' \in M'$ olmak üzere

$$e(n) = m, \sigma(m) = m'$$

$$e'\rho(n) = e'(n') = m' = \sigma(m) = \sigma e(n)$$

dir.(Alp,M., 1998)

Loday tarafından(Loday,J.L.,1982) verilen teoremle Çaprazlanmış modüller kategorisi ile Cat^1-gruplar arasındaki eşdeğerlik ispatlanmıştır.

2.5. Cat^2-gruplar

Tanım:(Cat^2-grup) Cat^2-grup , Cat^2 yapılarını içeren bir G grubudur. Buradaki Cat^2-grupları , G 'nin G_1 ve G_2 alt grupları ile $s_1, b_1 : G \to G_1$ ve $s_2, b_2 : G \to G_2$ gibi 4 grup homomorfizmlerinden oluşur.

$1 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq 2$ için

$CAT^2 1)$ $\quad s_i/G_i = b_i/G_i = id_{G_i}$

$CAT^2 2)$ $\quad [\ker s_i, \ker b_i] = 1$

$CAT^2 3)$ $\quad s_i s_j = s_j s_i$, $b_i b_j = b_j b_i$ ve $b_i s_j = s_j b_i$, $i \neq j$

şartları sağlanıyorsa bu $C^2 = (e, s_i, b_i : G \to G_i)$ yapısına Cat^2-grup denir.

Bundan sonra $CAT^2 3)$, s_i ve b_i morfizmleri üzerinde , G 'nin endomorfizleri olarak kabul edilecektir. Biz bunu $G_i \to G$ olarak göstereceğiz.

Bu tanım bilgisayar uygulamaları için yeniden yorumlanırsa ;

$CAT^2 1)$ $\quad s_i e b_i = b_i$

$\quad b_i e s_i = s_i$

$CAT^2 2)$ $\quad [\ker s_i, \ker b_i] = 1$

$CAT^2 3)$ $\quad s_i s_j = s_j s_i$, $b_i b_j = b_j b_i$ ve $b_i s_j = s_j b_i$, $i \neq j$

şekline dönüşür ki bunlar 2-boyutlu Moore komplekslerin simplisel grup kategorisine denktir. (Brown,R.,and Loday,J.L., 1987) Yine aynı şekilde 2-boyutlu Moore komplekslerin simplisel cebir kategorisine denkliği 1997 yılında (Arvasi,Z.,1997) ile gösterilmiştir.

3. ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Çaprazlanmış Modül kavramı ilk olarak (Whitehead, J.H.C.,1949) tarafından verilmiş olup bu Çaprazlanmış Modüller kategorisinin denk kategorileri araştırılmaya başlanılmış ve bu kategoriye denk olan Cat^1-gruplar kategorisi (Loday, J.L.,1982) tarafından ispatlanmıştır. Bu denk kategoriler üzerine çeşitli çalışmalar yapılmış olup yapılan çalışmaların bilgisayar uygulamaları ve denk kategorilerin bilgisayar programı yardımıyla gösterilmesi de ilk olarak (Alp,M.,1997) tarafından verilmiştir.

Bilgisayar uygulamaları ile yeni boyut kazanan bu denk kategorilerden elde edilen sonuçlar (Alp,M. and Wensley, C.D.,1999) ışığı altında yeni yeni çalışmalar yapılmıştır. Bu nedenle bu denk kategorilerin kapsamlı bir açıklamasına ve bu kategorilerin denkliklerine bu bölümde yer verilecektir. Bu nedenle bu bölümde bilgisayar uygulamalarında kullanılan notasyon ve kısaltmalar kullanılacaktır. Bilgisayar uygulamalarında kullanılan program GAP (Group,Algorithm and programming) (Schönert,M.,1993) olup kullanılan notasyon ve uygulamalar geniş bir şekilde (Alp,M. and Wensley,C.D.,1996) da yer almaktadır. Program hakkında daha geniş bilgi GAP[*] da bulunabilir. Tezin bundan sonraki bölümlerinde kolaylık sağlaması açısından Çaprazlanmış Modüller kategorisi **XMod** ile gösterilecektir.

N ve M iki grup olsun. Eğer M,N üzerinde bir etki ise n üzerindeki m'nin sağ etkisini n^m sol etkisini ${}^m n$ şeklinde tanımlarız. Eğer $M \subset N$ ise bu durumda M kendi kendisini etkiler denir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$ {}^{m_2}m_1 = m_2 m_1 m_2^{-1} \quad , \quad m_1, m_2 \in M $$

Tanım: N ve M bir grup homomorfizmi $\partial : N \to M$ ile birlikte iki grup olsun. Eğer M,N üzerinde bir etki ise, bu durumda $M \to Aut(N)$ şeklinde bir homomorfizm mevcuttur. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa bu durumda $(X = \partial : N \to M)$'e bir çaprazlanmış modül adı verilir.

$$ CM1) \quad \partial({}^m n) = m\partial n m^{-1} \quad , \quad \forall n \in N, m \in M $$

$$ CM2) \quad {}^{\partial n'}n = n' n n'^{-1} \quad , \quad \forall n, n' \in N $$

Genellikle ∂ homomorfizmi çaprazlanmış modülün boundary dönüşümü olarak adlandırılır.

Şimdi ise çaprazlanmış modüllerin standart örneklerini verelim.

Örnek 3.1 : N, M grubunun normal alt grubu olmak üzere

$$\text{İç} \quad : \quad N \to M$$

$$i \mapsto i$$

içine homomorfizmi ve

$$M \times N \to N$$

$$(m,n) \mapsto {}^{m}n = mnm^{-1}$$

şeklindeki M nin N üzerine etkisi ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Örnek 3.2 : M , bir ZN – modül olmak üzere

$$\partial = 1 \quad : \quad M \to N$$

$$m \mapsto 1_N$$

aşikar homomorfizmi ve

$$N \times M \to M$$

$$(n,m) \mapsto {}^{n}m = nm$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Örnek 3.3 : N bir grup ve

$$M = \{\ f_n : f_n : N \to N\ ,\ f_n(n') = nn'n^{-1}\ \}$$

kümesi N 'nin iç otomorfizmlerinin grubu olmak üzere

$$\begin{aligned} \partial \quad : \quad & N \to M \\ & n \mapsto f_n \end{aligned}$$

homomorfizmi ,

$$\begin{aligned} & M \times N \to N \\ & (f_n, n) \to (f_{n'})^n = nn'n^{-1} \end{aligned}$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Örnek 3.4 :

$$1 \to S \to M \xrightarrow{\partial} N \to L$$

grupların bir merkezsel genişlemesi olmak üzere ,

$$\begin{aligned} \partial \quad : \quad & M \to N \\ & m \mapsto \partial(m) \end{aligned}$$

grup homomorfizmi

$$\begin{aligned} s \quad : \quad & N \to M \\ & n \mapsto s(n) \end{aligned}$$

kesit homomorfizmi yardımıyla tanımlanan

$$N \times M \to M$$

$$(m,n) \mapsto {}^{n}m = s(n)ms(n)^{-1}$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Örnek 3.5 : N ve M iki abelyan grup ve N'deki M grup etkisini trivial sıfır ''0'' olmak üzere $\partial : N \to M$ bir çaprazlanmış modül oluşturur.

Örnek 3.6 : X_1 ve X_2 çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda $X_1 \times X_2$'nin kartezyen çarpımı, M_1, M_2, N_1 ve N_2 de trivial etkiye sahipse $\partial_1 \times \partial_2 : N_1 \times N_2 \to M_1 \times M_2$ bir çaprazlanmış modül oluşturur. (Çaprazlanmış modüllerin direk çarpımından)

Örnek 3.7 : N deki M etkisi uyumlu ve M , N'nin bir normal alt grubu olmak üzere bir normal alt grubunun $M \to M$ dönüşümünü sağlayan içine morfizm bir çaprazlanmış modül oluşturur.

Bu örneklerin hepsi GAP program aracılığıyla hesaplanmış olup hesaplama için gerekli algoritma ve elde edilen sonuçlar (Alp,M.,1997) da verilmiştir.

3.1 Çaprazlanmış Modül Morfizmi

Tanım: $W = (\partial : M \to N)$ ve $W' = (\partial' : M' \to N')$ iki çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda çaprazlanmış modül morfizmi ,

$$\langle \lambda, \nu \rangle = W \to W'$$

bir homomorfizm çiftidir ki ,

$$\lambda : M \to M' \ ,$$

$$\nu : N \to N'$$

ve aşağıdaki özellikleri sağlarlar.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\partial"'] & M' \arrow[d, "\partial'"] \\
N \arrow[r, "\nu"'] & N'
\end{tikzcd}$$

1) $\quad \partial'\lambda(m) = \nu\partial(m) \qquad , \forall m \in M$

2) $\quad \lambda({}^{n}m) = \lambda^{\nu(n)}(m)$

Gerçekten de;

$$m \in M, m' \in M', n' \in N'$$

için

$$\lambda(m) = m', \partial(m') = n'$$

$$m \in M, n \in N, n' \in N'.$$

için

$$\partial(m) = n, \nu(n) = n'$$

olmak üzere

$$\partial\lambda(m) = \partial(m') = n' = \nu(n) = \nu\partial(m)$$

olur.

$\lambda({}^{n}m) = n\lambda mn^{-1}$ CM1) den

$= nm'n^{-1}$

$= {}^{\nu n}m'$ CM2) den

$= {}^{\nu n}\lambda(m)$ $\lambda(m) = m'$ den

eşitlik sağlanır.

W bir çaprazlanmış modül olmak üzere W' den W 'e tüm morfizmlerin cümlesine W 'nin endomorfizmlerinin cümlesi denir ve $End(W)$ ile gösterilir. Eğer λ ve ν birlikte grup homomorfizmi ise bu durumda $\langle \lambda, \nu \rangle$ çiftine bir izomorfizm denir.

Loday pre-Cat^1-grup ve Cat^1-grup tanımını aşağıdaki gibi vermiştir.

Tanım: Bir Cat^1-grup bir G grubu ile bir alt grup olan G_1 ve aşağıdaki şartları sağlayan

$$s, b : G \to G_1$$

homomorfizmleri ile tanımlanır.

$$i) \qquad s / G_1 = b / G_1 = idG_1$$

$$ii) \qquad [\ker s, \ker b] = 1$$

Bu tanımdaki 1. şartın sağlanması ile birlikte oluşan Cat^1-gruba pre Cat^1-grup denir. İleride pre Cat^1-grup yapısı oluşturulmaya çalışılacağından aşağıda bilgisayar hesaplamaları için Alp'in yeniden düzenleyerek bilgisayar hesaplamalarında kullanılan Cat^1-grup tanımı da bundan sonraki kısımlarda aynen kullanılacaktır.

Teorem: Aşağıdaki verilen önermeler birbirine denktir. (Loday, J.L.,1982)

1) $X = (\partial : M \to N)$ bir çaprazlanmış modül

2) $C = (e; s, b : G \to N)$ bir Cat^1-grup

İspat: $1 \Rightarrow 2$ Kabul edelim ki $\partial : M \to N$ bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durunda çaprazlanmış modül tanımı gereği çaprazlanmış modül aksiyomları olan $CM1)$ ve $CM2)$ aksiyomları sağlanır. Buna göre Cat^1-grup aksiyomları olan $CAT1)$ ve $CAT2)$ aksiyomlarını sağlatmalıyız. Bunun için $G = N \propto M$ grubu için başlangıç dönüşümü

$$b(n,m) = n\partial m$$

bitiş dönüşümü

$$s(n,m) = n$$

ve embedding dönüşümünü

$$e(n) = (n,1)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} seb(n,m) &= se(n(\partial m)) \\ &= s(n(\partial m),1) \\ &= n(\partial m) \\ &= b(n,m) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} bes(n,m) &= be(n) \\ &= b(n,1) \\ &= n\partial 1 \\ &= n \\ &= s(n,m) \end{aligned}$$

olup Cat^1-grup aksiyomlarından $CAT1)$ aksiyomu sağlanır. Benzer şekilde $CAT2)$ aksiyomunun sağlandığını gösterelim.

$s(n,m) = n$ olduğundan $\ker s = (1,m)$ olur. Diğer yandan $b(n,m) = n\partial m$ olup $n\partial m = 1$ ise $n = (\partial m)^{-1}$ olduğu için $\ker b = ((\partial m)^{-1}, m)$ olur. Buna göre ,

$$
\begin{aligned}
[\ker s, \ker b] &= [(1,m), ((\partial m)^{-1}, m)] \\
&= (1,m)^{-1}\big((\partial m)^{-1}, m\big)^{-1}(1,m)((\partial m)^{-1}, m) \\
&= (1,m^{-1})((\partial m), {}^{\partial m}(m^{-1}))(1,m)((\partial m)^{-1}, m) \\
&= (\partial m, {}^{\partial m^{-1}} m \; {}^{\partial m}(m^{-1}))\big((\partial m)^{-1}, {}^{(\partial m)^{-1}} m\, m\big) \\
&= \big(\partial m, m m^{-1} m^{-1} m m^{-1} m^{-1}\big)\big((\partial m)^{-1}, m^{-1} m m m\big) \\
&= \big(\partial m, m^{-2}\big)\big((\partial m)^{-1}, m^{2}\big) \\
&= \big((\partial m)(\partial m)^{-1}, {}^{(\partial m)^{-1}}(m^{-2}) m^{2}\big) \\
&= \big(1, m^{-1} m^{-2} m m^{2}\big) \\
&= (1,1)
\end{aligned}
$$

$2 \Rightarrow 1$ Kabul edelim ki $C = (e; s, b : G \to N)$ bir Cat^1-grup olsun. Göstermemiz gereken $\partial : M \to N$ 'nin bir çaprazlanmış modül olduğudur. Bunun için $CM1)$ ve $CM2)$ aksiyomlarının sağlandığını göstermeliyiz. O halde kabul edelim ki $x \in \ker s$ ve $y \in \ker b$ olsun. Bu durumda $x = (1,m)$ ve $y = \big(\partial n, n^{-1}\big)$ $\forall n \in M$ için

$$[x, y] = xy = yx$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
xy &= (1,m)\big((\partial n),n^{-1}\big) \\
&= \big((\partial n),n^{-1\,\partial n}m\big) \\
&= \big((\partial n),n^{-1}nmn^{-1}\big) \\
&= \big((\partial n),mn^{-1}\big) \\
yx &= \big((\partial n),n^{-1}\big)(1,m) \\
&= \big((\partial n),mn^{-1}\big)
\end{aligned}
$$

olup;

$$
\begin{aligned}
n^{-1\,\partial n}m &= mn^{-1} \Rightarrow \\
{}^{\partial n}m &= nmn^{-1}
\end{aligned}
$$

bulunur. Dolayısıyla $CM2)$ aksiyomu sağlanır.(Pak,S.,1999)

3.2. Cebirler için Çaprazlanmış Modüller

Whitehead'in gruplar üzerine tanımladığı çaprazlanmış modül kavramı, diğer cebirsel yapılarda da önemlidir. T. Porter (Porter,T.,1986) komütatif cebirler için literatüre uygun bir biçimde çaprazlanmış modül kavramını tanımlamıştır.

Çaprazlanmış modüller , modüller ve ideallerin genelleştirilmesidir. Ayrıca herhangi bir halka (cebir) bir çaprazlanmış modüldür. Böylece çaprazlanmış modüller, halka (cebir) kavramının genelleştirilmesi olarak görülebilir. Şimdi ise daha önce bahsettiğimiz cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramını inceleyelim. k sıfırdan farklı birimi olan komütatif halka olmak üzere k-cebirler üzerinde çaprazlanmış modül tanımını verelim. Daha sonra ise çeşitli cebirsel yapılar üzerinde örnekler vereceğiz.

Tanım : M , birimli bir k -cebir olsun .

$$\partial : N \rightarrow M$$

bir M -cebir morfizmi ve

$$M \times N \rightarrow N \qquad \text{ve} \qquad N \times M \rightarrow M$$

$$(m,n) \mapsto m.n \qquad\qquad (n,m) \mapsto n.\mathrm{m}$$

M nin N üzerine etkisi ile birlikte , her $n,n' \in N$ ve $m \in M$ için

CM1) $\partial(m.n) = m\partial(n)$

$\partial(n.m) = \partial(n)m$

CM2) $\partial n.n' = nn'$

$n.\partial n' = nn'$

şartlarını sağlıyor ise M üzerinde N cebirine bir çaprazlanmış modül denir ve (N,M,∂) ile gösterilir.

Şimdi , çaprazlanmış modül tanımını verdikten sonra, iki çaprazlanmış modül arasındaki morfizm tanımını verelim.

Tanım : (N,M,∂) ve (N',M',∂') iki çaprazlanmış modül olsun.

$$\mu(m \cdot n) = \lambda(m) \cdot \mu(n)$$

$$\mu(n \cdot m) = \mu(n) \cdot \lambda(m)$$

ve

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\partial"'] \arrow[dr] & N' \arrow[d, "\partial'"] \\ M \arrow[r, "\lambda"'] & M' \end{tikzcd}$$

diyagramı komütatif , yani

$$\partial' \mu(n) = \lambda\partial(n)$$

olacak şekilde

$$\mu : N \to N'$$

ve

$$\lambda : M \to M'$$

k -cebir morfizmleri varsa

$$(\mu,\lambda) : (N,M,\partial) \to (N',M',\partial')$$

morfizmine cebirler üzerinde çaprazlanmış modül morfizmi denir.

O halde , $M = M'$ ve λ birim dönüşüm ise , μ bir M-cebir morfizmi olduğundan

$$\mu(m \cdot n) = m\mu(n)$$

dir ve bunu aşağıdaki diyagram ile gösterebiliriz.

$$
\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\partial"'] & N' \arrow[dl, "\partial'"] \\
M &
\end{tikzcd}
$$

Bu verilen diyagram komütatif olduğundan , yani

$$\partial' \mu(n) = \partial(n)$$

sağlandığından μ bir çaprazlanmış M-modül morfizmidir.

Şimdi ise cebirler üzerinde çaprazlanmış modüllere standart örnekler verelim.(Ege,Ü.,1998)

Örnek 3.2.1 : N bir k-cebiri ve I , N nin bir ideali olsun.

$$iç : I \to N$$

$$i \mapsto i$$

içine dönüşümünü ele alalım. N nin I üzerine etkisi

$$N \times I \to I$$

$$(n,i) \mapsto n \cdot i = ni$$

şeklinde çarpım işlemi verilsin . Bu durumda çaprazlanmış modül aksiyomları

$$CM1) \quad \partial(n \cdot i) = \partial(ni) = ni = n\partial(i)$$

$$CM2) \quad \partial(i \cdot i') = i \cdot i' = ii'$$

şeklinde kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla , $(I,M,iç)$ yapısı bir çaprazlanmış modül oluşturur.

Tersine , herhangi bir $\partial : N \to M$ çaprazlanmış modül yapısı verildiğinde $\partial N = I$ nın M de bir ideal olduğu kolayca gösterilebilir.

Örnek 3.2.2 : N , herhangi bir M-bimodül olsun.

$$N \times N \to N$$

$$(n_1,n_2) \mapsto n_1 n_2 = 0$$

çarpımı tanımlanırsa , N bir M-cebir yapısı oluşturur. Bu durumda

$$0 : N \to M$$

$$x \mapsto 0(x) = 0$$

şeklinde verilen sıfır morfizmi ,

$$M \times N \to N$$

$$(m,n) \mapsto m \cdot n = mn$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Örnek 3.2.3 : N bir k -cebir ve her $n,n' \in N$ için

$$M = \{f_n \,;\; f_n : N \to N \quad f_n(n') = nn'\}$$

olmak üzere

$$\partial : N \to M$$

$$n \mapsto f_n$$

cebir homomorfizmi ,

$$M \times N \to N$$

$$(f_n, n') \mapsto (f_n) \cdot n' = nn'$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Örnek 3.2.4 : $0 \to S \to M \xrightarrow{\partial} N \to 0$

cebirlerin bir merkezsel genişlemesi (yani $s \in S$, $m \in M$ olmak üzere $sm = ms = 0$ olacak şekilde bir tam dizi) olmak üzere

$$\partial : M \to N$$

$$m \mapsto \partial(m)$$

cebir homomorfizmi ,

$$\partial r(n) = n$$

şartını sağlayan

$$r : N \to M$$

$$r \mapsto r(n)$$

kesit homomorfizmi yardımıyla tanımlanan

$$N \times M \to M$$

$$(n, m) \mapsto n \cdot m = r(n)m$$

etki fonksiyonu ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Örnek 3.2.5 : N ve M birer R-modül ve

$$h: N \to M$$

R-modüllerinin bir morfizmi olsun . $R \propto M$ yarı direkt çarpımı

$$(r,m)(r',m') = (rr',rm',r'm)$$

şeklinde bilinen çarpım ile ifade edilir. Bu durumda N, her $n,n' \in N$ için

$$nn' = 0$$

şeklinde sıfır çarpım ve

$$R \propto M \to R$$

$$(r,m) \mapsto r$$

şeklinde izdüşüm yoluyla bir $R \propto M$ - modül yapısı verildiğinde

$$\widetilde{h}: N \to R \propto M$$

$$n \mapsto (0,h(n))$$

fonksiyonu bir çaprazlanmış $R \propto M$ -modül yapısı oluşturur.

4. ÇAPRAZLANMIŞ KARE

Çaprazlanmış kare N, L, M üzerindeki bir P etkisiyle birlikte aşağıdaki diyagramı içeren gruplardan oluşur. Çaprazlanmış kare ilk olarak D.Guin-Walery ve J.L.Loday tarafından (Walery,D.G. and Loday,J.H.,1981)'de verilmiştir. Daha sonra bunun değişmeli cebirler üzerindeki uygulamaları G. Ellis tarafından (Ellis,G. and Steiner,R.,1987)'de gösterildi.

$$\mathrm{Y} = \begin{tikzcd} L \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\nu"'] & M \arrow[d, "\lambda"] \\ N \arrow[r, "\lambda'"'] & P \end{tikzcd}$$

Yukarıdaki diyagramda M, L ve N nin üzerinde bir etki ve N de L ve M nin üzerinde bir etki olsun. Bütün $l \in L$, $m, m' \in M$, $n, n' \in N$, $p \in P$ için,

$h : M \times N \to L$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

$CS1)$ $\mu, \nu, \lambda, \lambda'$ dönüşümlerinin herbiri ve $\lambda'\nu$ bileşeni çaprazlanmış modül

$CS2)$ μ, ν dönüşümleri P etkilerini korur.

$CS3)$ $h(mm', n) = {}^{m}h(m', n).h(m, n)$

$$h(m, nn') = h(m, n).{}^{n}h(m, n')$$

$CS4)$ ${}^{p}h(m, n) = h({}^{p}m, {}^{p}n)$

$CS5)\quad vh(m,n) = {}^{m}nn^{-1}$

$$\mu h(m,n) = m^{n}m^{-1}$$

$CS6)\quad h(m,vl) = {}^{m}ll^{-1}$

$$h(\mu l,n) = l^{n}l^{-1}$$

Yukarıdaki 6 özellikleri sağlayan Y 'ye bir çaprazlanmış kare denir.

4.1. Çaprazlanmış Kare Morfizmi

$\phi : \begin{pmatrix} L & N \\ M & P \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} L' & N' \\ M' & P' \end{pmatrix}$ dönüşümü için

$$\phi_L : L \rightarrow L' \; ,$$

$$\phi_M : M \rightarrow M' \; ,$$

$$\phi_N : N \rightarrow N'$$

$$\phi_P : P \rightarrow P'$$

gibi dört grup homomorfizmi verilsin. Öyleki , grup homomorfizmlerinin küplerinin sonuçları komütatifdir.(G. Ellis , 1993) $\forall m \in M, n \in N$ için ,

$$\phi_L h(m,n) = h(\phi_{M^m}, \phi_{N^n})$$

$$\phi_M h(m,n) = h(\phi_{L^m}, \phi_{P^n})$$

$$\phi_N h(m,n) = h(\phi_{L^m}, \phi_{P^n})$$

$$\phi_P h(m,n) = h(\phi_{M^n}, \phi_{N^n})$$

herbir homomorfizm için sağlanan ϕ dönüşümüne çaprazlanmış kare homomorfizmi denir.

Şimdi çaprazlanmış karelere birkaç örnek verelim.

Örnek 4.1.1 : M ve N , P grubunun normal alt grupları olmak üzere aşağıdaki diyagram verilsin.

$$\begin{tikzcd} M \cap N \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\nu"'] & N \arrow[d, "\lambda"] \\ M \arrow[r, "\lambda'"'] & P \end{tikzcd}$$

Bununla birlikte $M, N, M \cap N$ ise P nin etkileri ve $M \cap N$ konjugasyon etkisiyle,

$$h : M \times N \to M \cap N$$

$$(m,n) \mapsto [m,n]$$

fonksiyonu ile verilen diyagram bir çaprazlanmış karedir.

Gerçekten de ;

$h : (m,n) \to [m,n]$

${}^{p}m = pmp^{-1}$, ${}^{p}n = pnp^{-1}$, ${}^{p}l = plp^{-1}$

etkileri ile verilen diyagram çaprazlanmış kare olması için yukarıdaki 6 özelliği sağlaması gerekir.

$CS1)$ sağlandığını gösterelim.

$\mu, \nu, \lambda, \lambda'$ dönüşümlerinin çaprazlanmış modül olduğu açıktır.

$\mu : M \cap N = L \to N$ bir dönüşüm ,

$$CM1)\ \mu({}^{n}l) = n\mu(l)n^{-1}$$

$$CM2)\ {}^{\mu l}l' = ll'l^{-1}$$ şartlarını sağlaması gerekir.

Etkimiz ${}^{n}l = nl\,n^{-1}$ olduğuna göre ,

$$\mu({}^{n}l) = \mu(nl\,n^{-1})$$

$$= \mu(n)\mu(l)\mu(n^{-1}) \qquad (\mu \text{ homomorfizm})$$

$$= n\mu(l)n^{-1}$$

Böylece $CM1)$ sağlanmış olur.

$${}^{\mu l}l' = {}^{l}l' = ll'l^{-1} \qquad \text{(Şekilden açıkça görülür.)}$$

Böylece $CM2)$ de sağlanmış olur. Yani μ dönüşümü çaprazlanmış modüldür.

Aynı şekilde $\nu : L \to M$, $\lambda : M \to P$, $\lambda' : N \to P$ dönüşümleri de çaprazlanmış modül olduğu açıktır.

$\lambda\mu$ bileşeni çaprazlanmış modül olabilmesi için ,

$$CM1)\ \lambda\mu({}^{n}l) = n\lambda\mu(l)n^{-1}$$

$$CM2)\ {}^{\lambda\mu l}l' = ll'l^{-1}$$ şartları sağlanmalıdır.

$$\lambda\mu({}^{n}l) = \lambda\mu(nl\,n^{-1})$$

$$= \lambda[\mu(n)\mu(l)\mu(n^{-1})]$$

$$= \quad \lambda\left(n\mu(l)n^{-1}\right)$$

$$= \quad \lambda n\lambda\mu(l)\lambda\left(n^{-1}\right)$$

$$= \quad n\lambda\mu(l)n^{-1}$$

$$^{\lambda\mu l}l' = {}^{\lambda l}l' = {}^{l}l' = ll'l^{-1}$$

$CM1)$ ve $CM2)$ sağlandığına göre $\lambda\mu$ bileşeni çaprazlanmış modüldür.

$CS2)$ sağlandığını gösterelim.

$$\mu : L \to N \quad , \quad \nu : L \to M$$

M, L ve N üzerinde bir etki , N de L ve M üzerinde bir etki olduğundan M ve N ise P nin normal alt grupları olduğundan μ,ν dönüşümleri P yi etkiler.

$CS3)$ sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned}
h(mm', n) &= [mm', n] \\
&= mm'n(mm')^{-1}n^{-1} \\
&= mm'nm'^{-1}\,m^{-1}n^{-1} \\
&= mm'nm'^{-1}\,n^{-1}m^{-1}mnm^{-1}n^{-1} \\
&= m[m', n]m^{-1}[m, n] \\
&= {}^{m}[m', n][m, n]
\end{aligned}$$

$$= \quad {}^{m}h(m',n)h(m,n)$$

$$h(m,nn') = [m,nn']$$

$$= mnn'm^{-1}(nn')^{-1}$$

$$= mnn'm^{-1}n'^{-1}n^{-1}$$

$$= mnm^{-1}n^{-1}nmn'm^{-1}n'^{-1}n^{-1}$$

$$= [m,n]n[m,n']n^{-1}$$

$$= [m,n]^{n}[m,n']$$

$$= h(m,n)^{n}h(m,n')$$

$CS4)$ sağlandığını gösterelim.

$${}^{p}h(m,n) = {}^{p}[m,n]$$

$$= {}^{p}(mnm^{-1}n^{-1})$$

$$= pmnm^{-1}n^{-1}p^{-1}$$

$$= pmp^{-1}pnp^{-1}pm^{-1}p^{-1}pn^{-1}p^{-1}$$

$$= [{}^{p}m,{}^{p}n]$$

$$= h({}^{p}m,{}^{p}n)$$

$CS5)$ sağlandığını gösterelim.

$$
\begin{aligned}
\nu h(m,n) &= \nu[m,n] \\
&= \nu\left(mnm^{-1}n^{-1}\right) && (\ \nu\text{ - homomorfizm }) \\
&= \nu(m)\nu(n)\nu\left(m^{-1}\right)\nu\left(n^{-1}\right) \\
&= m^{\nu n}m^{-1} && (\ \nu\text{ - çaprazlanmış modül }) \\
&= {}^{m}nn^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu h(m,n) &= \mu[m,n] \\
&= \mu\left(mnm^{-1}n^{-1}\right) && (\ \mu\text{ - homomorfizm }) \\
&= \mu(m)\mu(n)\mu\left(m^{-1}\right)\mu\left(n^{-1}\right) \\
&= {}^{\mu m}nn^{-1} && (\ \mu\text{ - çaprazlanmış modül }) \\
&= mnm^{-1}n^{-1} \\
&= m^{n}m^{-1}
\end{aligned}
$$

$CS6)$ sağlandığını gösterelim.

$$
\begin{aligned}
h(m,\nu l) &= [m,\nu l] \\
&= m(\nu l)m^{-1}(\nu l)^{-1} \\
&= m^{\nu l}m^{-1} && (\ \nu\text{ - çaprazlanmış modül })
\end{aligned}
$$

$$= \quad mlm^{-1}l^{-1}$$

$$= \quad {}^{m}ll^{-1}$$

$$h(\mu l, n) \quad = \quad [\mu l, n]$$

$$= \quad \mu(l)n(\mu l)^{-1}n^{-1}$$

$$= \quad {}^{\mu l}nn^{-1} \qquad (\mu\text{-çaprazlanmış modül})$$

$$= \quad l\,nl^{-1}n^{-1}$$

$$= \quad l^{n}l^{-1}$$

Çaprazlanmış karenin 6 özelliği sağlandığından yukarıdaki diyagram çaprazlanmış karedir.

Örnek 4.1.2 : Aşağıdaki diyagram verilsin.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "x"] \arrow[d, "x"'] & InnM \arrow[d, "i"] \\ InnM \arrow[r, "i"'] & AutM \end{tikzcd}$$

Burada X^{m} iç otomorfizm $m \in M$ ile tanımlanır. Ayrıca i dönüşümü iç automorfizm alt gruplarının bir sonucudur. Bununla birlikte standart etkilerde bulunur.

$$h : InnM \times InnM \to M \ ,$$

$$\left(X^{m}, X^{m'}\right) \mapsto [m, m']$$

fonksiyonu ile verilen diyagram bir çaprazlanmış karedir. Çünkü ;

$^{m'}m = m'mm'^{-1}$ ve $m^{m'} = m'^{-1}mm'$ etkileri verildiğinden ,

$X : M \to M$ dönüşümünün çaprazlanmış modül olduğunu gösterelim.

$CM1)$ $X\left({}^{m'}m\right) = m'X(m)m'^{-1}$

$CM2)$ ${}^{xm'}m = mm'm^{-1}$

şartları sağlanmalıdır.

$$
\begin{aligned}
X\left({}^{m'}m\right) &= X(m'mm'^{-1}) \\
&= X(m')X(m)X(m'^{-1}) \\
{}^{xm'}m &= {}^{xm}(m') \\
&= {}^{m}m' \\
&= mm'm^{-1}
\end{aligned}
$$

X dönüşümü $CM1)$ ve $CM2)$ özellikleri sağladığı için çaprazlanmış modüldür.

Aynı şekilde $i : M \to M$ dönüşümü de çaprazlanmış modül olur.

$CS2)$ sağlandığını gösterelim.

Verilen diyagrama göre X dönüşümü $AutM$ nin bir etkisi olduğu açıktır. Çünkü ;

$$X : M \to M \ ,$$

$i : M \to M$ dönüşümleri $AutM$ yi korur.

$CS3$) sağlandığını gösterelim.

$$h(X^{mm_1}, X^{m_2}) = {}^{m}h(X^{m_1}, X^{m_2})h(X^{m}, X^{m_2})$$

$$
\begin{aligned}
h(X^{mm_1}, X^{m_2}) &= [mm_1, m_2] \\
&= mm_1m_2(mm_1)^{-1}m_2^{-1} \\
&= mm_1m_2m_1^{-1}m^{-1}m_2^{-1} \\
&= mm_1m_2m_1^{-1}m_2^{-1}m^{-1}mm_2m^{-1}m_2^{-1} \\
&= m[m_1, m_2]m^{-1}[m, m_2] \\
&= {}^{m}[m_1, m_2][m, m_2] \\
&= {}^{m}h(X^{m_1}, X^{m_2})h(X^{m}, X^{m_2})
\end{aligned}
$$

$$h(X^{m_1}, X^{m_1m_2}) = h(X^{m}, X^{m_2})^{m_1}h(X^{m}, X^{m_2})$$

$$
\begin{aligned}
h(X^{m_1}, X^{m_1m_2}) &= [m, m_1m_2] \\
&= mm_1m_2m^{-1}(m_1m_2)^{-1} \\
&= mm_1m_2m^{-1}m_2^{-1}m_1^{-1} \\
&= mm_1m^{-1}m_1^{-1}m_1mm_2m^{-1}m_2^{-1}m_1^{-1}
\end{aligned}
$$

$$= \quad [m,m_1]m_1[m,m_2]m_1^{-1}$$

$$= \quad [m,m_1]^{m_1}[m,m_2]$$

$$= \quad h\left(X^m, X^{m_1}\right)^{m_1} h\left(X^m, X^{m_2}\right)$$

$CS4)$ sağlandığını gösterelim.

$${}^{m'}h(X^m, X^{m_1}) = \quad h\left({}^{m'}X^m, {}^{m'}X^{m_1}\right)$$

$${}^{m'}h(X^m, X^{m_1}) = \quad {}^{m'}[m,m_1]$$

$$= \quad {}^{m'}\left(mm_1m^{-1}m_1^{-1}\right)$$

$$= \quad m'mm_1m^{-1}m_1^{-1}m'^{-1}$$

$$= \quad m'mm'^{-1}\ m'm_1m'^{-1}\ m'm^{-1}m'^{-1}\ m'm_1^{-1}m'^{-1}$$

$$= \quad {}^{m'}m\,{}^{m'}m_1\,{}^{m'}m^{-1}\,{}^{m'}m_1^{-1}$$

$$= \quad h\left({}^{m'}X^m, {}^{m'}X^{m_1}\right)$$

$CS5)$ sağlandığını gösterelim.

$$Xh(m,m_1) \quad = \quad {}^{m}m_1m_1^{-1}$$

$$Xh(m,m_1) \quad = \quad X[m,m_1]$$

$$= \quad X(mm_1m^{-1}m_1^{-1})$$

$$= \quad X(m({}^{m_1}m^{-1})) \quad (X \text{ - çaprazlanmış modül })$$

$$= \quad X(m)X({}^{m_1}m^{-1})$$

$$= \quad X(m)m_1X(m^{-1})m_1^{-1}$$

$$= \quad {}^{xm}m_1m_1^{-1} \qquad (X \text{ -çaprazlanmış modül })$$

$$= \quad {}^{m}m_1m_1^{-1}$$

$CS6)$ sağlandığını gösterelim.

$$h(m, xm_1) \quad = \quad {}^{m}m_1m_1^{-1}$$

$$h(m, xm_1) \quad = \quad [m, xm_1]$$

$$= \quad mX(m_1)m^{-1}(Xm_1)^{-1}$$

$$= \quad m^{xm_1}m^{-1} \qquad (X \text{ - çaprazlanmış modül })$$

$$= \quad mm_1m^{-1}m_1^{-1}$$

$$= \quad {}^{m}m_1m_1^{-1}$$

Verilen h fonksiyonu 6 özelliği sağladığı için verilen diyagram çaprazlanmış karedir.

Örnek 4.1.3 : $g : N \times M \to L$, $g(n,m) = h(m,n)^{-1}$ fonksiyonu

$$^{m}n = (vh(m,n))n$$

ve

$$^{n}m = (\mu h(m,n))^{-1}m$$

şeklinde tanımlanan etkileriyle aşağıdaki diyagram bir çaprazlanmış kare oluşturur. Çünkü ,

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\mu} & M \\ {\scriptstyle \nu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} \\ N & \xrightarrow[\lambda']{} & P \end{array}$$

$$h : M \times N \to L$$

ve

$$g : N \times M \to L$$

$CS1)$ sağlandığını gösterelim.

μ, ν dönüşümlerinin çaprazlanmış modül olduğunu gösterelim.

$$\mu : L \to M \quad , \quad \nu : L \to N$$

verildiğinden ,

$$CM1)\ \mu({}^{m}l) = \mu(mlm^{-1}) \qquad (\ \mu\text{- homomorfizm}\ )$$

$$= \mu(m)\mu(l)\mu(m^{-1})$$

$$= m\mu(l)m^{-1}$$

$$CM2)\ {}^{\mu l}l' = {}^{l}l'$$

$$= ll'l^{-1}$$

$CM1)$ ve $CM2)$ şartları sağlandığından μ çaprazlanmış modüldür.

$$CM1)\quad \nu({}^{n}l) = \nu(nln^{-1}) \qquad (\ \mu\text{ - homomorfizm })$$

$$= \nu(n)\nu(l)\nu(n^{-1})$$

$$= n\nu(l)n^{-1}$$

$$CM2)\quad {}^{\nu l}l' = {}^{l}l'$$

$$= ll'l^{-1}$$

$CM1)$ ve $CM2)$ şartları sağlandığından ν çaprazlanmış modüldür.

Aynı şekilde λ ve λ' dönüşümleri de çaprazlanmış modüldür. Şimdi ise $\lambda\mu$ bileşeninin çaprazlanmış modül olduğunu gösterelim.

$$CM1)\quad \lambda\mu({}^{m}l) = \lambda\mu(mlm^{-1}) \qquad (\ \mu\text{ - homomorfizm })$$

$$= \lambda(\mu(m)\mu(l)\mu(m^{-1}))$$

$$= \lambda(m\mu(l)m^{-1}) \qquad (\ \lambda\text{ - homomorfizm })$$

$$= \lambda(m)\lambda\mu(l)\lambda(m^{-1})$$

$$= m\lambda\mu(l)m^{-1}$$

$$CM2)\quad {}^{\lambda\mu l}l' = {}^{\lambda l}l'$$

$$= {}^{l}l'$$

$$= ll'l^{-1}$$

$CM1)$ ve $CM2)$ şartları sağlandığından $\lambda\mu$ bileşeni çaprazlanmış modüldür.

Aynı şekilde $\lambda'\nu$ bileşeni de çaprazlanmış modüldür.

$CS2)$ sağlandığını gösterelim.

$h: M \times N \to L$ ve $g: N \times M \to L$ fonksiyonları, $\mu: L \to M$, $\nu: L \to N$ dönüşümleri için M, L ve N üzerinde bir etki, N de L ve M üzerinde bir etki olduğunu söylememiz mümkündür. Bu yüzden μ ve ν dönüşümleri P yi korurlar.

$CS3)$ sağlandığını gösterelim.

$$g(nn',m) = {}^{n}g(n',m)g(n,m)$$

$$\begin{aligned} g(nn',m) &= h(m,nn')^{-1} \\ &= \left(h(m,n)\,{}^{n}h(m,n')\right)^{-1} \\ &= {}^{n}h(m,n')^{-1}h(m,n)^{-1} \\ &= {}^{n}g(n',m)g(n,m) \end{aligned}$$

$$g(n,mm') = g(n,m)^{m}g(n,m')$$

$$\begin{aligned} g(n,mm') &= h(mm',n)^{-1} \\ &= \left({}^{m}h(m',n)h(m,n)\right)^{-1} \\ &= h(m,n)^{-1}\,{}^{m}h(m',n)^{-1} \\ &= g(n,m)^{m}g(n,m') \end{aligned}$$

$CS4$) sağlandığını gösterelim.

$$
\begin{aligned}
{}^{p}g(n,m) &= g({}^{p}n,{}^{p}m) \\
{}^{p}g(n,m) &= {}^{p}h(m,n)^{-1} \\
&= h({}^{p}m,{}^{p}n)^{-1} \\
&= g({}^{p}n,{}^{p}m)
\end{aligned}
$$

$CS5$) sağlandığını gösterelim.

$$
\begin{aligned}
\nu g(n,m) &= n^{m}n^{-1} \\
\nu g(n,m) &= \nu h(m,n)^{-1} \\
&= \left({}^{m}nn^{-1}\right)^{-1} \\
&= n^{m}n^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu g(n,m) &= {}^{n}mm^{-1} \\
\mu g(n,m) &= \mu h(m,n)^{-1} \\
&= \left(m^{n}m^{-1}\right)^{-1} \\
&= {}^{n}mm^{-1}
\end{aligned}
$$

$CS6$) sağlandığını gösterelim.

$$
\begin{aligned}
g(\nu l, m) &= l^{m} l^{-1} \\
g(\nu l, m) &= h(m, \nu l)^{-1} \\
&= \left({}^{m} l l^{-1}\right)^{-1} \\
&= l^{m} l^{-1} \\
g(n, \mu l) &= {}^{n} l l^{-1} \\
g(n, \mu l) &= h(\mu l, n)^{-1} \\
&= \left(l^{n} l^{-1}\right)^{-1} \\
&= {}^{n} l l^{-1}
\end{aligned}
$$

Böylelikle verilen diyagram çaprazlanmış karedir.

1984 yılında G.Ellis tarafından (Ellis,G.,1984) verilen bir teoremle Simplisel Cebir Kategorisi olan $SimpCeb$, Çaprazlanmış Kare kategorisi olan Csr^2'ye denk olduğu ispatlanmıştır.

$$M_2 : SimpCeb \to Crs^2$$

Ayrıntılı bilgi için (Arvasi,Z.,1994) referansından yararlanabilirsiniz.

Ayrıca 1987 yılında R.Brown ve J.L.Loday tarafından verilen teoremle Cat^2-grup kategorisinin çaprazlanmış kare kategorisine denk olduğu gösterilmiştir.(Brown,R. and Loday,J.L.,1987)

Teorem 4.1 : Cat^2-grup kategorisi , çaprazlanmış kare kategorisine denktir.

İspat: Burada Cat^2-gruplar kategorisi ile çaprazlanmış kare kategorisinin denkliğini Loday'in Cat^1-gruplar kategorisinin çaprazlanmış modüller kategorisine denkliğinin gösterimini esas alarak ispatlayacağız.

$\Rightarrow$) (G,K,K') Cat^2-grubu için $L = Kers \cap Kers'$, $M = K \cap Kers'$, $N = K' \cap Kers$ ve $P = K \cap K'$ alabiliriz. Sonra λ (sırasıyla λ', μ, ν) b 'nin (sırasıyla b', b, b') kısıtlaması olsun. Bu bize değişmeli (komütatif) kareyi verir. Burada G , P 'nin konjugasyon etkisi ile verilmiştir ve

$$h(m,n) = mnm^{-1}n^{-1}$$

ifadesi G 'nin elemanları içersinde hesaplanmıştır. Bu durum L için de aynıdır.

$\Leftarrow$) Diğer taraftan , bir çaprazlanmış kare verildiğinde aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi ,

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\nu"'] & M \arrow[d, "\lambda"] \\ N \arrow[r, "\lambda'"'] & P \end{tikzcd}$$

$G = (L \propto N) \propto (M \propto P)$, $K = M \propto P$, $K' = N \propto P$ şeklinde yazılabilir. Burada s bir projeksiyondur ve

$$b(l,n,m,p) = \left(\lambda(l)^n m, \nu(n)p\right)$$

olarak bulunur.

Ayrıca , G yapısının sağlanması için $L \propto N$ üzerinde $M \propto P$ etkisi içinde h fonksiyonu dikkate alınacaktır.

4.2. Cebirler İçin Çaprazlanmış Kare

Cebirdeki çaprazlanmış kare , komütatif cebirlerin bir komütatif diyagramıdır.

$$\Upsilon = \begin{tikzcd} L \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\nu"'] & M \arrow[d, "\lambda"] \\ N \arrow[r, "\lambda'"'] & P \end{tikzcd}$$

Bununla birlikte P ise L,M ve N üzerinde bir etkidir. Böylece L ve M üzerinde λ' yardımıyla N komütatif etkisi ve L ve N üzerinde λ yardımıyla M etkisi tanımlanmıştır. $h: N \times M \to L$ fonksiyonu verilmiştir. (G. Ellis , 1984) Bu h fonksiyonu bütün $m,m' \in M$, $n,n' \in N$, $p \in P$, $l \in L$, $k \in K$ için ,

CS1) μ,ν,λ,λ' dönüşümlerinin herbiri ve $\lambda\mu = \lambda'\nu$ bileşenleri çaprazlanmış modüldür.

CS2) μ,ν dönüşümleri P etkisini korur.

CS3) $kh(n,m) = h(kn,m) = h(n,km)$

CS4) $h(n+n',m) = h(n,m)+h(n',m)$

CS5) $h(n,m+m') = h(n,m)+h(n,m')$

CS6) $p.h(n,m) = h(p.n,m) = h(n,p.m)$

CS7) $\mu h(n,m) = n.m$

CS8) $\nu h(n,m) = -m.n$

CS9) $h(n,\mu l) = n.l$

CS10) $h(\nu l,m) = -m.l$

sağlanır.

4.3 Çaprazlanmış Kare Morfizmi

$\phi:(L,N,M,P)\to(L',N',M',P')$ şeklindeki bir çaprazlanmış kare morfizmi aşağıdaki homomorfizmlerden oluşur.

$$\phi_L : L \to L'$$
$$\phi_N : N \to N'$$
$$\phi_M : M \to M'$$
$$\phi_P : P \to P'$$

Örneğin burada homomorfizmlerin kübü aşağıdaki gibi komütatiftir.

$$\phi_L h(n,m) = h(\phi_{N^n},\phi_{M^m}) \qquad\qquad n\in N, m\in M$$

ve herbir ϕ_L, ϕ_N, ϕ_M homomorfizmleri ϕ_P' nin bir bileşkesidir. Biz çaprazlanmış kare kategorisini Csr^2 ile göstereceğiz.

Örnek 4.3.1 : k-cebir R'nin idealleri I_1 ve I_2 olsun. Kalıntıların komütatif diyagramı aşağıdaki gibi verilsin.

$$\begin{tikzcd}
I_1 \cap I_2 \arrow[r, "inc"] \arrow[d, "inc"'] & I_2 \arrow[d, "inc"] \\
I_1 \arrow[r, "inc"'] & R
\end{tikzcd}$$

Bu durumda I_1 , I_2 üzerinde R etkisiyle birlikte ve $I_1 \cap I_2$ çarpımı ile verilen aşağıdaki h fonksiyonu için yukarıdaki diyagramın bir çaprazlanmış kare olduğu kolayca görülebilir.

$$h: I_1 \times I_2 \to I_1 \cap I_2$$
$$(i_1,i_2) \mapsto i_1 i_2$$

Verilen,

$$\mu = inc : I_1 \cap I_2 = N \to I_2$$

$$\nu = inc : I_1 \cap I_2 = N \to I_1$$

$$\lambda = inc : I_2 \to M$$

$$\lambda' = inc : I_1 \to M$$

içine dönüşümlerinin her biri çaprazlanmış modüldür. Çünkü,

$$\mu = inc : I_1 \cap I_2 = N \to I_2$$

dönüşümü için,

$$\begin{aligned} CM1)\quad \mu(n \cdot i) &= \mu(ni) \\ &= ni \\ &= n\mu(i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CM2)\quad \mu(i_1 \cdot i_2) &= i_1 \cdot i_2 \\ &= i_1 i_2 \end{aligned}$$

şartları sağlandığından μ çaprazlanmış modüldür. Benzer olarak,

$$\nu = inc : I_1 \cap I_2 = N \to I_1$$

dönüşümü de çaprazlanmış modüldür.

$$\lambda = inc : I_2 \to M$$

dönüşümü için,

$$
\begin{aligned}
CM1)\ \lambda(i\cdot m) &= \lambda(im)\\
&= im\\
&= \lambda(i)\cdot m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
CM2)\ \lambda(i_1\cdot i_2) &= i_1\cdot i_2\\
&= i_1 i_2
\end{aligned}
$$

şartları sağlandığından λ çaprazlanmış modüldür. Benzer olarak,

$$\lambda' = inc : I_1 \to M$$

dönüşümü de çaprazlanmış modüldür.

Aynı şekilde $\lambda\mu = \lambda'\nu$ dönüşümlerinin de çaprazlanmış modül olduğu gösterilebilir.

$$
\begin{aligned}
CM1)\ \lambda(\mu(n\cdot i)) &= \lambda(\mu(ni))\\
&= \lambda(ni)\\
&= \lambda(n\mu(i)) && (\mu \text{ çaprazlanmış modül})\\
&= n\lambda\mu(i) && (\lambda \text{ çaprazlanmış modül})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
CM2)\ \lambda\mu(i_1\cdot i_2) &= \lambda(i_1\cdot i_2)\\
&= i_1\cdot i_2\\
&= i_1 i_2
\end{aligned}
$$

olur. Böylece $CS1)$ sağlanmış olur.

$CS2)$ sağlandığını gösterelim.

$$\mu : N \to I_2 \quad , \qquad \nu : N \to I_1$$

I_1, N ve I_2 üzerinde bir etki, I_2, N ve I_1 üzerinde bir etki , I_1 ve I_2 M 'nin idealleri olduğundan μ ve ν dönüşümleri M ' yi etkiler.

$CS3)$ sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned} kh(i_1,i_2) &= k(i_1i_2) \\ &= (ki_1)i_2 \\ &= h(ki_1,i_2) \\ kh(i_1,i_2) &= k(i_1i_2) \\ &= (i_1k)i_2 \\ &= i_1(ki_2) \\ &= h(i_1,ki_2) \end{aligned}$$

$CS4)$ sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned} h(i_1+i_1^{'},i_2) &= (i_1+i_1^{'})i_2 \\ &= i_1i_2+i_1^{'}i_2 \\ &= h(i_1,i_2)+h(i_1^{'},i_2) \end{aligned}$$

$CS5)$ sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned} h(i_1,i_2+i_2^{'}) &= i_1(i_2+i_2^{'}) \\ &= i_1i_2+i_1i_2^{'} \\ &= h(i_1,i_2)+h(i_1,i_2^{'}) \end{aligned}$$

$CS6)$ sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned} m\cdot h(i_1,i_2) &= m\cdot(i_1i_2) \\ &= mi_1i_2 \\ &= h(m\cdot i_1,i_2) \\ m\cdot h(i_1,i_2) &= m\cdot(i_1i_2) \\ &= m\cdot -i_2i_1 \\ &= -i_1m\cdot -i_2 \\ &= i_1m\cdot i_2 \\ &= h(i_1,m\cdot i_2) \end{aligned}$$

$CS7)$ sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned}
\mu h(i_1,i_2) &= \mu(i_1 i_2) \\
&= \mu(i_1)\mu(i_2) && (\mu \text{ homomorfizm}) \\
&= i_1 \cdot i_2
\end{aligned}$$

$CS8)$ sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned}
\nu h(i_1,i_2) &= \nu(i_1 i_2) \\
&= \nu(i_1)\nu(i_2) \\
&= i_1 i_2 \\
&= -i_2 \cdot i_1
\end{aligned}$$

$CS9)$ sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned}
h(i_1, \mu n) &= i_1 \mu(n) \\
&= i_1 \cdot n
\end{aligned}$$

$CS10)$ sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned}
h(\nu n, i_2) &= \nu(n) i_2 \\
&= n \cdot i_2 \\
&= -i_2 \cdot n
\end{aligned}$$

Örnek 4.3.2 : E 'yi I_1 ve I_2 idealleri olan simplisel bir cebir olarak alalım.

$$\mathrm{Y} = \begin{tikzcd} I_1 \cap I_2 \arrow[r] \arrow[d] & I_2 \arrow[d] \\ I_1 \arrow[r] & E \end{tikzcd}$$

şeklinde verilen Y yapısı aşağıdaki gibi çaprazlanmış kareye indirgenir.

$$\begin{tikzcd}
\pi_0(I_1 \cap I_2) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_0(I_2) \arrow[d] \\
\pi_0(I_1) \arrow[r] & \pi_0(E)
\end{tikzcd}$$

Gerçektende, h fonksiyonu

$$h : \pi_0(I_1) \times \pi_0(I_2) \to \pi_0(I_1 \cap I_2)$$

ve aşağıdaki şekilde bütün $[a] \in \pi_0(I_1)$, $[b] \in \pi_0(I_2)$ için ,

$$h([a],[b]) = [a][b] = [ab]$$

verilsin.

Bu tanımlamalara göre yukarıdaki Y diyagramı bir çaprazlanmış karedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Alp,M.,1997, GAP, Crossed Modüles, Cat^1-grups to the Compunational Group theory, PhD. Thesis University of Wales Bangor,1420 pp.

Alp,M.,and Wensley,C.D.,1996, Xmod, Crossed Modüles and Cat^1-groups in GAP,version 1.3. Manual for the XMod share package.

Alp,M.,and Wensley,C.D.,1999, Enumaration of Cat^1-groups of lower order groups, International Journal of Algebra and Computation.

Alp,M., 1998, Special cases of Cat^1-groups, Communation(A.Ü.F.F.)

Arvasi,Z.,1994, Applications in Commutative Algebra of the Moore Complex of a Simplicial Algebra. Ph.D Thesis U.C.N.W.

Arvasi,Z.,1997, 2-Crossed modules and Crossed Squares, T.A.C.

Brown,R. and Loday,J.L.,1987, Van Kampen Theorems for diagram of spaces topology 26,311-335.

Ege,Ü.,1998, Crossed Modules, M.Sc. Thesis. O.G.Ü 1-60.

Ellis,G.J.,1993, Crossed Squares and Combinatorial Homotopy. Math.Z.214,93-110.

Ellis,G.J.,1993, On Five Well-Known Commutator İdentities J.Australian Mathematical Society. 54 , 1-19

Ellis,G.J.,1988, Crossed Modules, IMS Bulletin 21,29-37.

Ellis,G.J.,1988, Higher Dimensional Crossed Modules of Algebras J.P.A.A. 52, 277-282.

Ellis,G.J. and Steiner,R.,1987, Higher Dimensional Crossed Modules and the Homotopy Groups of (n+1)-ads J.P.A.A. 46,117-136.

Ellis,G.J.,1984, Crossed Modules and Their Higher Dimensional Analogues. Ph.D. Thesis , U.C.N.W.

Loday,J.L.,1982, Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups J. App.Algebra,24,199-202.

Pak,S.,1999, Applications of Crossed Modules to GAP, M.Sc. Thesis. D.P.Ü 1-100.

Porter,T., 1986, Homology of Commutativs Algebras and an Invariant of Simis and Vasconceles. J. Algebra 99, 458-465.

Schönert,M. and Eet Al.,1993, GAP,Groups,Algorithm and Programming, Lethistuhl D für Mathematic, Rheinisch Westfalisch Tecnischel Hoch-schule, Aachen, Germany third edition.

Walery,D.G. and Loday,J.L.,1981, Obsructions Excision en Ktheorie Algebique. Springer Lecture Notes in Math. 854, 179-216.

Whitehead,J.H.C.,1949, Combinatorial homotopy II, Bull, A.M.S. 55,453-496.

Whitehead,J.H.C.,1948, On operators in relative homotopy group,Ann of Math,49, 610-640.