ÇAPRAZLANMIŞ KÖŞE

Erdal ULUALAN

Dumlupınar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Murat ALP

Haziran-2000

Erdal ULUALAN'IN YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "ÇAPRAZLANMIŞ KÖŞE " başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

03./07./2000

Üye: Doç. Dr. Zekeriya ARVASİ

Üye: Doç. Dr. Elçin AĞACANOV

Üye: Yrd. Doç. Dr. Murat ALP

Fen Bilimleri Enstitüsünün Yönetim Kurulu'nun 06/07/2000 gün ve 06/29. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Ramazan KÖSE

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ÇAPRAZLANMIŞ KÖŞE

Erdal ULUALAN
Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2000
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Murat ALP

ÖZET

Beş bölümden oluşan bu tez;

1. Giriş
2. Temel Bilgiler
3. Çaprazlanmış Modüller , Cat^1-Gruplar
4. Çaprazlanmış Kare
5. Çaprazlanmış Köşe

konu başlıklarını içermektedir.

Bölüm 1 de teze kısa bir giriş yapılmıştır. Bölüm 2 tez içersinde kullanılan temel bilgileri içermektedir. Bölüm 3 de Çaprazlanmış Modüller, Çaprazlanmış Modül Morfizmi ve örnekleri, Cat^1-grup ve Cat^1-gruplar kategorisi ile Çaprazlanmış Modül kategorisinin denkliği gösterilmiştir. Çaprazlanmış Kare ve örnekleri Bölüm 4'de sunulmuş olup, Çaprazlanmış Kare Çaprazlanmış Köşe arasındaki ilişkiye Bölüm 5'de değinilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çaprazlanmış Modül, Cat^1-grup, Çaprazlanmış Kare, Çaprazlanmış Köşe, Etki, Morfizm.

CROSSED CORNER

Erdal ULUALAN
Department of Mathematics, MSc. Thesis, 2000
Supervisor: Associative Prof. Dr. Murat ALP

SUMMARY

This thesis is based on crossed corner of groups. It consists of 5 chapters. A short introduction was presented Chapter 1 and Chapter 2 included basic mathematical theory.

Chapter 3 reviues the basic concepts of crossed modules, and Cat^1-grups. A Crossed Square and examples of Crossed Square is given in Chapter 4. The relation between Crossed Corner and Crossed Square was shown in Chapter 5.

Key Words: Crossed Modules, Cat^1-groups, Crossed Square, Crossed Corner, Action, Morphizm.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmam esnasında destek ve yardımlarını esirgemeyen ,Matematik Bölüm Başkanı ve aynı zamanda danışman hocam olan **Yrd. Doç. Dr. Murat ALP'a** ve Arş. Gör. Ahmet BEKİR'e teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Kütahya – 2000 **Erdal ULUALAN**

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\propto$	Yarı-Direkt Çarpım
XMod	Çaprazlanmış Modüller Kategorisi
S	Çaprazlanmış Modül'ün tanım grubu
R	Çaprazlanmış Modül'ün değer grubu
X	Bir Çaprazlanmış Modül
∂	Çaprazlanmış Modül homomorfizmi
CAT	Cat^1-gruplar kategorisi
S	Cat^1-grubun tanım grubu
R	Cat^1-grubun değer grubu
t, h, e	Cat^1-grubun bitiş,başlangıç ve gömme homomorfizmleri
$\ker t, \ker h$	Bitiş ve başlangıç homomorfizmlerinin çekirdeği
E	Bir Cat^1-grup
CM	Çaprazlanmış Modül olma şartı
CS	Çaprazlanmış Kare olma şartı
CC	Çaprazlanmış Köşe olma şartı
X	Çaprazlanmış Kare
$\langle \alpha, \beta \rangle$	Cat^1-grup ve Çaprazlanmış Modül morfizm çifti

1.GİRİŞ

Bu teze başlamamızın en önemli nedeni ALP (Alp, 1998) tarafından verilen Çaprazlanmış Köşe'nin tanımı uygulamaları ve Çaprazlanmış Kare ile olan ilişkilerini vermektir. Bunun için ilk olarak Peiffer elemanları, özellikleri, Yarı-direkt çarpım ve Yarı-Direkt Çarpımın bir grup olduğu gösterilmiştir. Daha sonra Çaprazlanmış Modüller Çaprazlanmış modül örnekleri ve Çaprazlanmış Modül morfizminden bahsedilmiştir. Bu çalışmada Çaprazlanmış Modüller kategorisi **XMod** olarak gösterilmiştir. Burada Çaprazlanmış Modüller iki boyutlu gruplar olarak düşünülebilir ve Çaprazlanmış Modüller ile grup teorisinde yeni yeni sonuçlar elde edilebilir. İlk olarak Whitehead (Whitehead, 1949) tarafından 1949 yılında tanımlanan Çaprazlanmış Modül'ün tanımı aşağıdaki gibidir.

S ve R iki grup olsun. $\partial : S \to R$ bir grup homomorfizmi ve R, S üzerinde bir etki olmak üzere, eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa $(X = \partial : S \to R)$ sembolüne bir Çaprazlanmış Modül adı verilir.

$CM1)$ Her $s \in S, r \in R$ için $\partial({}^{r}s) = r\partial s r^{-1}$

$CM2)$ Her $s, s' \in S$ için ${}^{\partial s'}s = s' s s'^{-1}$

Burada R'nin S üzerindeki etkisi;

$$R \times S \to S$$
$$(r,s) \mapsto {}^{r}s$$

şeklinde tanımlı bir fonksiyondur.

Çaprazlanmış Modüller kategorisine denk Cat^1-gruplar kategorisi $(E = e,t,h : G \to R)$ notasyonu ile gösterilmiş olup $t,h : G \to R$ birer homomorfizm çifti ve $e : R \to G$ bir homomorfizm olmak üzere;

$CAT1)$ $teh = h$ ve $het = t$

$CAT2)$ $[\ker t, \ker h] = \{1_G\}$

şeklinde tanımlanır. Burada $\ker t$ ve $\ker h$ t ve h homomorfizmlerinin çekirdeği ve $[\ker t, \ker h]$ ise $\ker t, \ker h$ 'in komütatörüdür. Bu tanımda ilk şartı sağlayan Cat^1-gruba pre Cat^1-grup denir. Daha sonraki bölümlerde bir pre Cat^1-grubun Çaprazlanmış Köşe'ye denk olduğu gösterilmiştir. Cat^1-gruplar ilk olarak 1982 yılında Loday tarafından (Loday, 1982) tanımlanmıştır ve 1-Cat grup olarak adlandırılmıştır. Loday ve Brown (Brown and Loday, 1987) 1-Cat grup için Cat^1-grup notasyonunu kullanmışlardır. Bizde bu çalışmada Cat^1-grup notasyonunu kullandık ve bir Cat^1-grup kategorisini **CAT** ile gösterdik.

Bunlardan sonra Çaprazlanmış Kare tanımı ve örnekleri verilmiştir. Burada Çaprazlanmış Kare'nin Cat^2-gruplar kategorisine ve Cat^1-gruplar kategorisinin de Çaprazlanmış Modüllere denk olması düşünülerek Çaprazlanmış Köşe'nin pre-Cat^1-gruba denk olduğu ispatlanmıştır. Bunun için,

R ve S bir P grubu üzerinde sol etkiyle birlikte iki grup olmak üzere her bir etkinin kendi üzerindeki etkisi

$$^{r}r_1 = rr_1r^{-1}$$

$$^{s}s_1 = ss_1s^{-1}$$

ve

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\nu"'] & R \\ S & \end{tikzcd}$$

diyagramı ile birlikte $h: R\times S \to P$ fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlar. Burada μ ve ν bir Çaprazlanmış Modül çiftidir.

$CC1)$ $h(rr',s)={}^{r}h(r',s)h(r,s)$

$CC2)$ $h(r,ss') = h(r,s)^{s}\, h(r,s')$

$CC3)$ $h(\mu p,s) = p\,{}^{s}p^{-1}$

$CC4)$ $h(r,\nu p)={}^{r}pp^{-1}$

$CC5)$ ${}^{({}^{r}s)}p={}^{rsr^{-1}}p$

$CC6)$ ${}^{({}^{s}r)}p={}^{srs^{-1}}p$

Burada $s\in S, r\in R, p\in P$ dir ve R nin S üzerinde ve S nin R üzerindeki etkisi

$$^{s}r = (\mu h(r,s))^{-1}r$$

$$^{r}s = (\nu h(r,s))s$$

şeklinde tanımlıdır. Bu tanım verildikten sonra yukarıdaki etkilerin iyi tanımlı olduğu gösterilmiş ve Çaprazlanmış Köşe Morfizmi ile Çaprazlanmış Köşe örneklerine geçilmiştir. Ayrıca yukarıdaki tanımdaki CC1) ve CC2) şartlarından yararlanılarak birkaç özellik ispat edilmiştir. Son olarak Çaprazlanmış Kare ile Çaprazlanmış Köşe arasındaki ilişkiden bahsedilmiş ve bir Çaprazlanmış Karenin Çaprazlanmış Köşeye denk olduğu gösterilmiştir.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde birimlere dönüşen özellikler tez içerisinde sıkça kullanılacak olan Peiffer elemanları, Yarı-direkt çarpımdan bahsedeceğiz.

2.1. Yarı-Direkt Çarpım

R ve S iki grup olsun.

$$\begin{aligned} h : R \times S &\to S \\ (r,s) &\mapsto {}^{r}s \end{aligned}$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlayalım.

$$(r,s)(r',s') = (r\,{}^{s}s', ss')$$

ile verilen $R \propto S$ Yarı-direkt çarpımı bir gruptur. Gerçekten de;

$$(r,s)(1,1) = (r,s) = (1,1)(r,s)$$

yine

$$\begin{aligned} (r,s)(r,s)^{-1} &= (r,s)({}^{s^{-1}}r^{-1}, s^{-1}) \\ &= \left(r\,{}^{s}\left({}^{s^{-1}}r^{-1}\right), ss^{-1} \right) \\ &= \left(r\,{}^{s}\left(s^{-1}r^{-1}s\right), 1\right) \\ &= \left(rss^{-1}r^{-1}ss^{-1}, 1\right) \\ &= (1,1) \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi de asosyatiflik özelliğinin sağlanıp sağlanmadığını kontrol edelim.

$$[(m,n)(p,q)](r,s) \quad = \quad (m,n)[(p,q)(r,s)]$$

$$\left(m^n p, nq\right)(r,s) \quad = \quad (m,n)\left(p^q r, qs\right)$$

$$\left(m^n p^{nq} r, nqs\right) \quad = \quad \left(m^n p^{nq} r, nqs\right)$$

olur. O halde yarı-direkt çarpım bir gruptur.

Bir G grubunu $P = (X,R)$ şeklindeki formunu göz önüne alalım. Bu durumda bir tam diziye

$$1 \to K \to E \to G \to 1$$

şeklinde sahip olup burada E ,X kümesi tarafından üretilen bir serbest gruptur. $R \subset E, K = K(R)$, R cümlesinin E' deki normal E grubunun K üzerindeki etkisi

$$^{m}k = mkm^{-1}, \qquad k \in K, m \in E \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanır.

K 'nin elemanları R cümlesinin

$$k = {}^{m_1}\left({}^{\lambda_1}r_1\right){}^{m_2}\left({}^{\lambda_2}r_2\right)\ldots{}^{m_n}\left({}^{\lambda_n}r_n\right) \quad ,k \in K$$

formundaki tüm sonuçları içerir. Burada $r_i \in R, \lambda_i = \pm 1, m_i \in E$ dir.

Örnek: $r,s \in R$ için

$$r\ s\ r^{-1} s^{-1} = 1$$

ve

$$r^{-1} s^{-1} r\ {}^{r^{-1}}s = 1$$

şeklinde birimler vardır. Gerçekten de;

(1.1) kullanılarak

$$r^{-1} s^{-1} r\ {}^{r^{-1}}s = r^{-1} s^{-1} r\ r^{-1}\ s (r^{-1})^{-1} = r^{-1} s^{-1} s r^{-1} = r^{-1} (r^{-1})^{-1} = 1$$

olduğu gösterilir.

2.2. Peiffer Elemanları ve Özellikleri

R, S ' de sol işlem $(r,s) \rightarrow {}^{r}s, s \in S$ ile birlikte bir serbest işlem olsun. Bu durumda ${}^{r}s$ şeklinde yazılan $Y = R \times S$ cümlesi S üzerinde serbesttir. $\partial : S \rightarrow R, \partial({}^{r}s) = rsr^{-1}$ şeklinde tanımlanan bir homomorfizm olsun. ∂ bir homomorfizm ise S kendi kendini

$$\partial({}^{r}s) = r(\partial s)r^{-1}, \qquad r \in R, s \in S$$

şeklinde etkiler. Bu çalışmada Peiffer elemanları

$$\langle r,s \rangle = r^{-1}s^{-1}rs^{\partial r} \qquad r,s \in Y$$

şeklinde tanımlanan elemanlardır.

Şimdi Peiffer elemanları ile ilgili birkaç önerme verelim.

Önerme: $\langle r,sp \rangle = \langle r,p \rangle (p^{\partial r})^{-1} \langle r,s \rangle p^{\partial r}$ olur.

İspat:

$$\begin{aligned} \langle r,sp \rangle = & \quad r^{-1}(sp)^{-1}r(sp)^{\partial r} \\ = & \quad r^{-1}p^{-1}rp^{\partial r}(p^{\partial r})^{-1}r^{-1}s^{-1}rs^{\partial r}p^{\partial r} \\ = & \quad \langle r,p \rangle (p^{\partial r})^{-1} \langle r,s \rangle p^{\partial r} \end{aligned}$$

bulunur.

Önerme: $\langle r\ s \rangle^{-} = s^{\partial r}\ {}^{-1} \langle r\ s^{-1} \rangle s^{\partial r}$

olur.

İspat:

$$\begin{aligned} \langle r,s \rangle^{-1} = & \quad \left(r^{-1}s^{-1}rs^{\partial r}\right)^{-1} \\ = & \quad (s^{\partial r})^{-1}r^{-1}sr \end{aligned}$$

$$= \quad (s^{\partial r})^{-1} r^{-1} s r (s^{\partial r})^{-1} (s^{\partial r})$$

$$= \quad \left(s^{\partial r}\right)^{-1} \left\langle r, s^{-1} \right\rangle s^{\partial r}$$

olur.

3. ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Çaprazlanmış Modül kavramı ilk olarak (Whitehead, 1949) tarafından verilmiş olup bu Çaprazlanmış Modüller kategorisinin denk kategorileri araştırılmaya başlanmış olup bu kategoriye denk olan Cat^1-gruplar kategorisi (Loday,1982) tarafından ispatlanmıştır. Bu denk kategoriler üzerine çeşitli çalışmalar yapılmış olup yapılan çalışmaların bilgisayar uygulamaları ve denk kategorilerin bilgisayar programı yardımıyla gösterilmesi de ilk olarak (Alp, 1997) tarafından verilmiştir.

Bilgisayar uygulamaları ile yeni boyut kazanan bu denk kategorilerden elde edilen sonuçlar (Alp and Wensley, 1999) ışığı altında yeni yeni çalışmalar yapılmıştır. Bu nedenle bu denk kategorilerin kapsamlı bir açıklamasına ve bu kategorilerin denkliklerine bu bölümde yer verilecektir. Bu nedenle bu bölümde bilgisayar uygulamalarında kullanılan notasyon ve kısaltmalar kullanılacaktır. Bilgisayar uygulamalarında kullanılan program GAP (Group,Algorithm and programming) (Schönert,1985) olup kullanılan notasyon ve uygulamalar geniş bir şekilde (Alp and Wensley, 1996) da yer almaktadır. Program hakkında daha geniş bilgi GAP[*] da bulunabilir. Tezin bundan sonraki bölümlerinde kolaylık sağlaması açısından Çaprazlanmış Modüller kategorisi **XMod** ile gösterilecektir.

S ve R iki grup olsunlar. Eğer R, S üzerinde bir etki ise s üzerindeki r nin etkisini ${}^{r}s$ şeklinde tanımlarız. Eğer $R \subset S$ ise bu durumda R kendi kendisini etkiler denir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$ {}^{r_2}r_1 = r_2 r_1 r_2^{-1}, \qquad r_1, r_2 \in R $$

Tanım: S ve R, bir grup homomorfizmi $\partial : S \to R$ ile birlikte iki grup olsunlar. Eğer R, S üzerinde bir etki ise, bu durumda $R \to Aut(S)$ şeklinde bir homomorfizm vardır. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa $(X = \partial : S \to R)$'e bir çaprazlanmış modül adı verilir.

$$ CM1)\ \ \partial({}^{r}s) = r\partial s r^{-1}, \qquad \forall s \in S, r \in R $$

$$ CM2)\ \ {}^{\partial s'}s = s' s s'^{-1}, \qquad \forall s, s' \in S $$

---

[*] http//aldebaran.math.rwth-oahen.de

http//www-history.msc.st-andac.uk.

Genellikle ∂ homomorfizmi çaprazlanmış modülün boundary dönüşümü olarak adlandırılır. Sadece CM1) sağlanıyor ise $(X = \partial : S \to R)$ 'e pre-Çaprazlanmış Modül denir. Şimdi çaprazlanmış modüller için birkaç örnek verelim.

3.1. Çaprazlanmış Modül Örnekleri

1.Örnek : S, R grubunun normal alt grubu olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathrm{Inn} \quad : \quad & S \to R \\ & s \mapsto s \end{aligned}$$

içine homomorfizmini ve

$$\begin{aligned} & R \times S \to S \\ & (r,s) \mapsto {}^{r}s = rsr^{-1} \end{aligned}$$

etkisini tanımlayalım. Bu durumda Inn homomorfizmi ${}^{r}s = rsr^{-1}$ şeklindeki R nin S üzerinde tanımlanan etkisi ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Gerçekten de;

$$\begin{aligned} \text{CM1)} \quad \partial({}^{r}s) &= \partial(rsr^{-1}) \\ &= \partial(r)\partial(s)\partial(r^{-1}) \\ &= r\partial(s)r^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{CM2)} \quad {}^{\partial s'}s &= {}^{s'}s \\ &= s'ss'^{-1} \end{aligned}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.

2.Örnek : S, bir ZR-modül olmak üzere

$$\partial = 1 \quad : \quad S \to R$$
$$s \mapsto 1_R$$

aşikar homomorfizmini ve

$$R \times S \to S$$
$$(r,s) \mapsto {}^r s = sr$$

etkisini tanımladığımızda $\partial = 1 : S \to R$ homomorfizmi ${}^r s = sr$ etkisi ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Gerçekten de;

$$\begin{aligned} \text{CM1)} \quad \partial({}^r s) &= \partial(sr) \\ &= 1 \\ &= r1r^{-1} \\ &= r\partial(s)r^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{CM2)} \quad {}^{\partial s}s' &= {}^1(s') \\ &= ss^{-1}s' \\ &= ss's^{-1} \quad (R \text{ abelyan grup}) \end{aligned}$$

çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.

3.Örnek : R, bir grup ve

$$E = \{f_r : R \to R; f_r(r') = rr'r^{-1}\}$$

kümesi R nin iç otomorfizmlerinin grubu olmak üzere,

$$\partial \quad : \quad \begin{array}{l} R \to E \\ r \mapsto f_r \end{array}$$

homomorfizmi

$$\begin{array}{l} E \times R \to R \\ (f_r, r) \mapsto {}^{r}(f_{r'}) = rr'r^{-1} \end{array}$$

etki fonksiyonuyla birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Gerçekten;

$$\begin{aligned} \text{CM1)} \quad \partial({}^{r}f_{r'}) &= \partial(rr'r^{-1}) \\ &= \partial(r)\partial(r')\partial(r^{-1}) \\ &= f_r\partial(r')f_r^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{CM2)} \quad {}^{\partial r}r' &= {}^{r}f_{r'} \\ &= rr'r^{-1} \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

4.Örnek :

$$1 \to E \to S \xrightarrow{\partial} R \to 1$$

grupların bir merkezsel genişlemesi olmak üzere

$$\partial \quad : \quad \begin{array}{l} S \to R \\ s \mapsto \partial(s) \end{array}$$

grup homomorfizmi,

$$e \quad : \quad \begin{aligned} & R \to S \\ & r \mapsto e(r) \end{aligned}$$

yardımıyla tanımlanan

$$\begin{aligned} R \times S \ & \to S \\ (r,s) \ & \mapsto {}^{r}s = e(r)se(r)^{-1} \end{aligned}$$

etki fonksiyonuyla birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur. Çünkü;

$$\begin{aligned} \text{CM1)} \quad \partial({}^{r}s) &= \partial(e(r)se(r)^{-1}) \\ &= \partial(e(r)se(r^{-1})) \\ &= \partial(e(r))\,\partial s\,\partial(e(r^{-1})) \\ &= r\,\partial s\,r^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{CM2)} \quad {}^{\partial s}s' &= e(\partial s)s'(e(\partial s))^{-1} \\ &= e(\partial s)s'(e(\partial s)^{-1}) \\ &= e(\partial s)s'(e(\partial s^{-1})) \\ &= ss's^{-1} \end{aligned}$$

şeklinde çaprazlanmış modül aksiyomları sağlanır.

3.2. Çaprazlanmış Modül Morfizmi

Tanım: $X=(\partial:S\to R)$ ve $X^{'}=(\partial^{'}:S^{'}\to R^{'})$ iki çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda çaprazlanmış modül morfizmi $\langle\alpha,\beta\rangle = X\to X'$ şeklinde bir homomorfizm çiftidir. Burada $\alpha:S\to S',\beta:R\to R'$ dir. Bu homomorfizmler aşağıdaki özellikleri sağlarlar.

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\partial"'] & S' \arrow[d, "\partial'"] \\
R \arrow[r, "\beta"'] & R'
\end{tikzcd}$$

Burada;

1) $\partial'\alpha(s)=\beta\partial(s) \quad ,\forall s\in S$

2) $\alpha({}^{r}s)={}^{\beta(r)}\alpha(s)$

dir. Gerçekten de;

$$s\in S, s'\in S', r'\in R'$$

için

$$\alpha(s)=s', \partial(s')=r'$$

$$s\in S, r\in R, r'\in R'$$

için

$$\partial(s)=r, \beta(r)=r'$$

olmak üzere

$$\partial\alpha(s) = \partial(s') = r' = \beta(r) = \beta\partial(s)$$

olur.

$$\alpha({}^{r}s) = r\alpha s r^{-1} \qquad \text{CM1) den}$$

$$= r s' r^{-1}$$

$$= {}^{\beta r} s' \qquad \text{CM2) den}$$

$$= {}^{\beta r}\alpha(s) \qquad \alpha(s) = s' \text{ den}$$

eşitlik sağlanır.

X bir çaprazlanmış modül olmak üzere X' den X'e tanımlı bütün morfizmlerin cümlesine X'in endomorfizlerinin cümlesi denir ve $End(X)$ ile gösterilir. Eğer α ve β birlikte grup homomorfizmi ise $\langle \alpha, \beta \rangle$ çiftine bir izomorfizm denir.

3.3. Cat^1-Gruplar

Çaprazlanmış Modüller kategorisi **XMod**'e denk olduğunu vurguladığımız Cat^1-gruplar kategorisi **CAT** ile gösterilecektir. Cat^1-grup tanımı ilk olarak (Loday, 1982) tarafından verilmiş olup 1 kategoriden grup anlamında 1-Cat grup notasyonu kullanılmıştır. Bu çalışmada 1-Cat grup bir S grubu ile bir alt grup olan R ve aşağıdaki şartları sağlayan

$$t, h : S \to R$$

homomorfizmleri ile

$i)$ $\quad t_{/R} = h_{/R} = idR$

$ii)$ $\quad [\ker t, \ker h] = 1$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu şekilde tanımlanan 1- Cat gruplar kategorisi ile Çaprazlanmış Modüller kategorisinin denkliği (Loday, 1982) de gösterilmiştir. 1987 yılında Brown ve Loday(Brown and Loday, 1987) 1-Cat grup notasyonunu Cat^1-grup olarak tanımlamış ve (i) şartını sağlayan Cat^1-grubu da pre-Cat^1-grup olarak adlandırmışlardır. Bilgisayar hesaplamaları için 1997 yılında Alp (Alp, 1997) Cat^1-grup tanımını yeniden düzenleyerek bilgisayara uygulanabilir duruma getirmesinin yanı sıra Cat^1-gruplar kategorisini **CAT** olarak göstermiştir.

Bu çalışmada Alp'in notasyonu olan **CAT** ve düzenlenen tanımı kullanarak **XMod** kategorisi ile **CAT** kategorisinin denkliğini düzenlenmiş haliyle vereceğiz.

Tanım: S bir grup ve $R \subset S$ bir alt grup olmak üzere

$$h(r,s) = r\partial s,\ t(r,s) = r,\ e(r) = (r,1)$$

şeklinde tanımlanan $t,h: R \times S \to R$ homomorfizmleri aşağıdaki şartları sağlarsa $E = (e;t,h: S \to R)$ şeklinde gösterilen E' ye bir Cat^1-Grup denir.

$CAT1)$ $teh = h$ ve $het = t$

$CAT2)$ $[\ker t, \ker h] = \{1_E\}$

Burada $t^2 = t$, $tet = t$ ve $h^2 = h$, $heh = h$ dir. Genellikle h ve t yi E'nin başlangıç ve bitiş dönüşümü olarak adlandıracağız ve

$$S \underset{h}{\overset{t}{\rightrightarrows}} R$$

şeklinde göstereceğiz.

3.4. Cat^1-Grup Morfizmi

$E = (e;t,h: S \to R)$ ve $E' = (e';t',h': S' \to R')$ iki Cat^1-grup olsun. Bu durumda E den E' ne tanımlanan Cat^1 -grup morfizmi $\langle \alpha, \beta \rangle = E \to E'$ homomorfizmlerinden oluşan bir

$\langle \alpha, \beta \rangle$ çiftidir ki bu $\alpha : S \to S'$ ve $\beta : R \to R'$ şeklindeki homomorfizmler aşağıdaki özellikleri sağlarlar.

$$h'\alpha = \beta h$$

$$t'\alpha = \beta t$$

$$e'\beta = \alpha e$$

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, shift right, "t"'] \arrow[d, shift left, "h"] & S' \arrow[d, shift right, "t'"'] \arrow[d, shift left, "h'"] \\
R \arrow[r, "\beta"'] \arrow[u, bend left=60, "e"] & R' \arrow[u, bend right=60, "e'"']
\end{tikzcd}$$

Gerçekten de; $s \in S, s' \in S', r \in R, r' \in R'$ olmak üzere

$\sigma(s) = s'$, $h'(s') = r'$

ve

$s \in S, r \in R, r' \in R'$ olmak üzere

$h(s) = r$, $\beta(r) = r'$

$h'\alpha(s) = h'(s') = r' = \beta(r) = \beta h(s)$

$t'\alpha(s) = t'(s') = r' = \beta(r) = \beta t(s)$

olur. Yine $r \in R, r' \in R', s' \in S'$ olmak üzere

$$\beta(r) = r', e'(r') = s'$$

ve $r \in R, s \in S, s' \in S'$ olmak üzere

$$e(r) = s, \alpha(s) = s'$$

$$e'\beta(r) = e'(r') = s' = \alpha(s) = \alpha e(r)$$

dir.

Şimdi **CAT** ile **XMod** arasındaki denkliği gösterelim.

Teorem: Aşağıdaki verilen önermeler birbirine denktir.

1) $X = (\partial : S \to R)$ bir çaprazlanmış modül

2) $E = (e; t, h : N \to R)$ bir Cat^1-grup

İspat: $(1 \Rightarrow 2)$ Kabul edelim ki $\partial : S \to R$ bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda Çaprazlanmış Modül tanımı gereği Çaprazlanmış Modül aksiyomları olan $CM1)$ ve $CM2)$ aksiyomları sağlanır. Buna göre Cat^1-grup aksiyomları olan $CAT1)$ ve $CAT2)$ aksiyomlarını sağlatmalıyız. Bunun için $N = R \propto S$ grubu için başlangıç dönüşümü;

$$h(r,s) = r\partial s$$

bitiş dönüşümü;

$$t(r,s) = r$$

ve gömme dönüşümünü;

$$e(r) = (r,1)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} teh(r,s) &= te(r(\partial s)) \\ &= t(r(\partial s),1) \\ &= r(\partial s) \\ &= h(r,s) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} het(r,s) &= he(r) \\ &= h(r,1) \\ &= r\partial 1 \\ &= r \\ &= t(r,s) \end{aligned}$$

olup Cat^1-grup aksiyomlarından $CAT1)$ aksiyomu sağlanır. Benzer şekilde $CAT2)$ aksiyomunun sağlandığını gösterelim.

$t(r,s) = r$ olduğundan $(1,s) \in \ker t$ olur. Diğer yandan $h(r,s) = r\partial s$ olup $r\partial s = 1$ ise $r = (\partial s)^{-1}$ olduğu için $((\partial s)^{-1}, s) \in \ker h$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned} \lfloor (1,s),((\partial s)^{-1},s) \rfloor &= (1,s)^{-1}\left((\partial s)^{-1},s\right)^{-1}(1,s)((\partial s)^{-1},s) \\ &= (1,s^{-1})((\partial s),{}^{\partial s}(s^{-1}))(1,s)((\partial s)^{-1},s) \end{aligned}$$

$$= \quad (\partial s, {}^{\partial s^{-1}}s\ {}^{\partial s}(s^{-1}))\left((\partial s)^{-1}, {}^{(\partial s)^{-1}}ss\right)$$

$$= \quad \left(\partial s, ss^{-1}s^{-1}ss^{-1}s^{-1}\right)\left((\partial s)^{-1}, s^{-1}sss\right)$$

$$= \quad \left(\partial s, s^{-2}\right)\left((\partial s)^{-1}, s^{2}\right)$$

$$= \quad \left((\partial s)(\partial s)^{-1}, {}^{(\partial s)^{-1}}(s^{-2})s^{2}\right)$$

$$= \quad \left(1, s^{-1}s^{-2}ss^{2}\right)$$

$$= \quad (1,1)$$

olup, $1=(1,1)\in[\ker t,\ker h]\Rightarrow\{1\}\subseteq[\ker t,\ker h]$ olur. Benzer şekilde $[\ker t,\ker h]\subseteq\{1\}$ olup;

$$[\ker t,\ker h]=\{1\}$$

bulunur.

$(2\Rightarrow 1)$ Kabul edelim ki $E=(e;t,h:N\to R)$ bir Cat^1-grup olsun. Göstermemiz gereken $\partial:S\to R$'nin bir çaprazlanmış modül olduğudur. Bunun için $CM1)$ ve $CM2)$ aksiyomlarının sağlandığını göstermeliyiz. O halde kabul edelim ki $a\in\ker t$ ve $b\in\ker h$ olsun. Bu durumda $a=(1,s)$ ve $b=\left(\partial r, r^{-1}\right)$ $\forall r\in S$ için

$$[a,b]=ab=ba$$

olduğundan

$$ab \quad = \quad (1,s)\left((\partial r), r^{-1}\right)$$

$$= \quad \left((\partial r)\ , r^{-1}\,{}^{\partial r}s\right)$$

$$= \quad \left((\partial r)\ , r^{-1}rsr^{-1}\right)$$

$$= \left((\partial r)\ , sr^{-1}\right)$$

$$ba = \left((\partial r)\ , r^{-1}\right)(1, s)$$

$$= \left((\partial r)\ , sr^{-1}\right)$$

olup;

$$r^{-1\,\partial r}s = sr^{-1}$$

$$^{\partial r}s = rsr^{-1}$$

bulunur. Dolayısıyla $CM2)$ aksiyomu sağlanır.

4. ÇAPRAZLANMIŞ KARE

Bu bölümde Çaprazlanmış Kare ve örnekleri sunulacak olup, bu örnekler ışığı altında ileride daha detaylı olarak Çaprazlanmış Kare ile Çaprazlanmış Köşe arasında bağıntı kurmaya çalışacağız.

Çaprazlanmış Kare 2 boyutlu Çaprazlanmış Modül olarak düşünülerek gruplar üzerindeki tanımı ilk olarak D.Guin-Walery ve J.L.Loday tarafından 1981 yılında (Walery and Loday, 1981) de tanımlandı. Daha sonra bunun değişmeli cebirler üzerindeki uygulamaları G. Ellis tarafından (Ellis, 1993) de gösterildi.

$$X = \left(\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\nu"'] & R \arrow[d, "\lambda"] \\ S \arrow[r, "\lambda'"'] & E \end{tikzcd} \right)$$

değişimli diyagramı verilsin. R, P ve S'nin üzerinde bir etki ve S de P ve R nin üzerinde bir etki olmak üzere

$h : R \times S \to P$ fonksiyonu her $p \in P, r \in R, s \in S$ ve $e \in E$ için

$CS1)$ $\mu, \nu, \lambda, \lambda'$ dönüşümlerinin her biri ve $\lambda'\nu$ bileşeni çaprazlanmış modül

$CS2)$ μ, ν dönüşümleri E etkilerini korur ve

$$h(r, ss') = h(r,s)\,{}^{s}h(r,s')$$

$CS3)$ $$h(rr', s) = {}^{r}h(r', s)h(r,s)$$

$CS4)$ $${}^{e}h(r,s) = h({}^{e}r, {}^{e}s)$$

$CS5)$ $$\nu h(r,s) = {}^{r}s s^{-1}$$

$$\mu h(r,s) = r^s r^{-1}$$

$$CS6) \quad h(r,\nu p) = {}^r p p^{-1}$$

$$h(\mu p,s) = p^s p^{-1}$$

özelliklerini sağlıyor ise X 'e bir Çaprazlanmış Kare denir.

Şimdi çaprazlanmış karelere birkaç örnek verelim.

4.1. Çaprazlanmış Kare Örnekleri

Bu bölümde Çaprazlanmış Kare'ye temel teşkil edecek örnekler seçilmiş olup bu örnekler sunulmuştur.

1.Örnek: R ve S , E grubunun normal alt grupları olmak üzere aşağıdaki diyagram verilsin.

$$X = \left(\begin{tikzcd} R\cap S \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\nu"'] & S \arrow[d, "\lambda"] \\ R \arrow[r, "\lambda'"'] & E \end{tikzcd} \right)$$

Bununla birlikte R, S, $R\cap S$ ise E nin etkileri ve $R\cap S$ konjuge etkisiyle ve

$$\begin{aligned} h: R\times S &\to R\cap S = P \\ (r,s) &\mapsto [r,s] \end{aligned}$$

fonksiyonu ile birlikte X bir çaprazlanmış karedir.

2.Örnek:

$$X = \left(\begin{tikzcd} R\cap S \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\nu"'] & S \arrow[d, "\lambda"] \\ R \arrow[r, "\lambda'"] & E \end{tikzcd} \right)$$

diyagramının R, S, $R\cap S$ ise E nin etkileri ve $R\cap S$ konjuge etkisiyle ve

$$h: R\times S \to R\cap S = P$$
$$(r,s) \mapsto [r,s]$$

fonksiyonu ile birlikte bir Çaprazlanmış Kare oluşturduğunu biliyoruz. Buna göre;

$$g: S\times R \to P$$
$$g(s,r) = h(r,s)^{-1}$$

fonksiyonu ile birlikte X bir Çaprazlanmış Karedir.

3.Örnek:

$$X = \left(\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\chi"'] & \mathrm{Inn}\,R \arrow[d, "i"] \\ \mathrm{Inn}\,R \arrow[r, "i"] & \mathrm{Aut}\,R \end{tikzcd} \right)$$

Burada χ^r iç otomorfizmi $r \in R$ ile tanımlanır. Ayrıca i dönüşümü iç otomorfizm alt grupların bir sonucudur. Bununla birlikte standart etkilerde bulunur. Buna göre;

$$h: \mathrm{Inn}\,R \times \mathrm{Inn}R \to R$$
$$(\chi^r, \chi^{r'}) \mapsto [r,r']$$

fonksiyonu ile birlikte yukarıdaki yapı bir Çaprazlanmış Karedir.

5. ÇAPRAZLANMIŞ KÖŞE

Çaprazlanmış Köşe kavramı ilk olarak Alp tarafından 1998 yılında tanımlandı. Alp (Alp, 1998) de Çaprazlanmış Köşe tanımını vererek bu tanımın ışığı altında bazı özellikleri ispatladı. Bu ispatlar sonucunda Alp (Alp, 1998) Çaprazlanmış Köşe örneklerini de bularak bu örnekleri (Alp, 1998) ,(Alp, 1999) de yayınladı. Bu çalışma sonunda, Alp Çaprazlanmış Köşe ile Cat^1-gruplar arasında ilişki kurmaya çalışarak Çaprazlanmış Köşe'nin pre-Cat^1-gruba denk olduğunu gösterdi.

Burada bu çalışmaların tarihi gelişmelerine göre yapılan çalışmalar incelenecek olup bu çalışmaların ışığı altında elde edilecek bir yarı-direkt çarpım grubundan diğer bir yarı-direkt çarpım grubuna ($C_1 = (P \propto S) \propto R$), ($C_2 = (P \propto R) \propto S$)) bir $\eta : C_1 \to C_2$ homomorfizmi tanımlanacaktır. Daha sonra da Cat^2-grup kategorisine denk olan Çaprazlanmış Kare ile Çaprazlanmış Köşe arasındaki bağıntılar incelenecektir. Bu bağıntılar Alp tarafından (Alp, 1998) de verilmiştir.

R ve S, bir P grubu üzerinde sol etkiyle birlikte iki grup olsun. Her bir etki konjuge etkisiyle kendi üzerinde etkisi;

$$ {}^{r}r_1 = r r_1 r^{-1} $$

$$ {}^{s}s_1 = s s_1 s^{-1} $$

şeklinde tanımlıdır. Aşağıdaki diyagramla belirli olan bir Çaprazlanmış Köşe;

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\mu} & R \\ {\scriptstyle \nu}\downarrow & & \\ S & & \end{array}$$

aşağıdaki şartları sağlayan $h : R \times S \to P$ fonksiyonuyla birlikte (P üzerinde R ve S 'nin etkisiyle) μ ve ν birer çaprazlanmış modül çiftidir.

$$ CC1) \quad h(rr', s) = {}^{r}h(r', s)h(r, s) $$

$$CC2)\quad h(r,ss') = h(r,s)^{s}h(r,s')$$

$$CC3)\quad h(\mu p,s) = p^{s}p^{-1}$$

$$CC4)\quad h(r,\nu p) = {}^{r}pp^{-1}$$

$$CC5)\quad {}^{({}^{r}s)}p = {}^{rsr^{-1}}p$$

$$CC6)\quad {}^{({}^{s}r)}p = {}^{srs^{-1}}p$$

Her $s \in S, r \in R, p \in P$ için R nin S üzerindeki, S nin R üzerindeki sol etkisi aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

$${}^{s}r = (\mu h(r,s))^{-1}r$$

$${}^{r}s = (\nu h(r,s))s$$

Tanımlanan bu etkilerin iyi tanımlı olup olmadığını inceleyelim. Buna göre

$${}^{s}r = (\mu h(r,s))^{-1}r$$

$${}^{r}s = (\nu h(r,s))s$$

şeklinde tanımlanan etkiler iyi tanımlıdır. Gerçekten de;

${}^{s}(rr') = {}^{s}r\,{}^{s}r'$ olmalıdır.

$${}^{s}(rr') = (\mu h(rr',s))^{-1}rr'$$

$$= (\mu\, {}^{r}h(r',s)h(r,s))^{-1}rr' \qquad \text{(CC1 den)}$$

$$= \quad \mu h(r,s)^{-1}\, \mu^{r} h(r',s)^{-1}\, rr'$$

$$= \quad {}^{s}rr^{-1}\, r^{s}r'\, r'^{-1}\, r^{-1} rr'$$

$$= \quad {}^{s}r\,{}^{s}r'$$

olur.

${}^{r}(ss') = {}^{r}s\,{}^{r}s'$ olmalıdır.

$$ {}^{r}(ss') \quad = \quad vh(r,ss')ss'$$

$$= \quad v\left(h(r,s)\,{}^{s}h(r,s')\right)ss' \qquad \text{(CC1 den)}$$

$$= \quad vh(r,s)s\,vh(r,s')s^{-1}ss'$$

$$= \quad {}^{r}ss^{-1}s\,{}^{r}s'\,s'^{-1}\,s'$$

$$= \quad {}^{r}s\,{}^{r}s'$$

olur.

${}^{ss'}r = {}^{s}({}^{s'}r)$ olmalıdır.

$$ {}^{ss'}r \quad = \quad \left(\mu h(r,ss')\right)^{-1} r$$

$$= \quad \left(\mu\left(h(r,s)\,{}^{s}h(r,s')\right)\right)^{-1} r$$

$$= \quad \mu\,{}^{s}h(r,s')^{-1}\,\mu h(r,s)^{-1}\, r$$

$$= \quad {}^{s}({}^{s'}rr^{-1})\,{}^{s}rr^{-1}r$$

$$= \quad {}^{s}({}^{s'}r){}^{s}r^{-1}\,{}^{s}r$$

$$= \quad {}^{s}({}^{s'}r)$$

olur.

${}^{rr'}s = {}^{r}({}^{r'}s)$ olmalıdır.

$${}^{rr'}s \quad = \quad (vh(rr',s))s$$

$$= \quad v'h(r',s)vh(r,s)s$$

$$= \quad {}^{r}({}^{r'}ss^{-1}){}^{r}s$$

$$= \quad {}^{r}({}^{r'}s){}^{r}s^{-1}\,{}^{r}s$$

$$= \quad {}^{r}({}^{r'}s)$$

olur.

${}^{1}r = r$ olmalıdır.

$${}^{1}r \quad = \quad (\mu h(r,1))^{-1}r$$

$$= \quad 1r$$

$$= \quad r$$

olur.

${}^{1}s = s$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} {}^{1}s &= (vh(1,s))s \\ &= 1s \\ &= s \end{aligned}$$

olur. Burada $h(r,1) = h(1,s) = 1$ dir. O halde etkiler iyi tanımlıdır.

Şimdi

$$h(rr',s) = {}^{r}h(r',s)h(r,s)$$

ve

$$h(r,ss') = h(r,s)^{s}h(r,s')$$

tanımları için aşağıda verilen bazı özdeşliklerin sağlandığını gösterelim. Öncelikle;

$$h(r,s)^{sr}h(r',s') = {}^{rs}h(r',s')h(r,s)$$

dir. Gerçekten de;

$$\begin{aligned} h(rr',ss') &= h(p,ss') \\ &= h(p,s)^{s}h(p,s') \\ &= h(rr',s)^{s}h(rr',s') \\ &= {}^{r}h(r',s)h(r,s)^{sr}h(r',s')^{s}h(r,s') \end{aligned}$$

olur.

Yine

$$
\begin{aligned}
h(rr',ss') &= h(rr',p)\\
&= {}^{r}h(r',p)h(r,p)\\
&= {}^{r}h(r',ss')h(r,ss')\\
&= {}^{r}h(r',s)\,{}^{rs}h(r',s')h(r,s)\,{}^{s}h(r,s')
\end{aligned}
$$

olur. Bu iki eşitlikten;

$$
{}^{r}h(r',s)h(r,s)\,{}^{sr}h(r',s')\,{}^{s}h(r,s') = {}^{r}h(r',s)\,{}^{rs}h(r',s')h(r,s)\,{}^{s}h(r,s')
$$

olup;

$$
h(r,s)\,{}^{sr}h(r',s') = {}^{rs}h(r',s')h(r,s)
$$

bulunur. Benzer şekilde

$$
{}^{s}h(r,s^{-1}) = h(r,s)^{-1} = {}^{r}h(r^{-1},s)
$$

olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
h(r,{}^{r}s) &= h(r,vh(r,s)s)\\
&= h(r,vh(r,s))\,{}^{vh(r,s)}h(r,s)\\
&= h(r,{}^{r}ss^{-1})\,{}^{{}^{r}ss^{-1}}h(r,s)\\
&= h(r,{}^{r}s)\,{}^{{}^{r}s}h(r,s^{-1})\,{}^{{}^{r}ss^{-1}}h(r,s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1 &= {}^{rs}h(r,s^{-1})^{rss^{-1}}h(r,s) \\
&= {}^{\nu h(r,s)s}h(r,s^{-1})^{\nu h(r,s)}h(r,s) \\
&= h(r,s)^{s}h(r,s^{-1})h(r,s)^{-1}h(r,s) \\
&= h(r,s)^{s}h(r,s^{-1})
\end{aligned}
$$

olup;

$$h(r,s)^{-1} = {}^{s}h(r,s^{-1}) \tag{1}$$

bulunur. Yine,

$$
\begin{aligned}
h({}^{s}r,s) &= h\left(\mu h(r,s)^{-1}r,s\right) \\
&= {}^{\mu h(r,s)^{-1}}h(r,s)h\left(\mu h(r,s)^{-1},s\right) \\
&= h(r,s)^{-1}h(r,s)h(r,s)h({}^{s}rr^{-1},s) \\
&= h(r,s)^{{}^{s}r}h(r^{-1},s)h({}^{s}r,s) \\
1 &= h(r,s)^{\mu h(r,s)r^{-1}}rh(r^{-1},s) \\
&= h(r,s)h(r,s)^{-1}\,{}^{r}h(r^{-1},s)h(r,s)
\end{aligned}
$$

olup;

$$h(r,s)^{-1} = {}^{r}h(r^{-1},s) \tag{2}$$

elde edilir ki (1) ve (2) numaralı eşitliklerden

$${}^{s}h(r,s^{-1}) = h(r,s)^{-1} = {}^{r}h(r^{-1},s)$$

bulunur. Şimdi de

$$h(r,1) = h(1,s) = 1 \text{ dir.}$$

özdeşliğinin varlığını gösterelim. Bunun için

$$\begin{aligned} h(rr^{-1},s) &= {}^{r}h(r^{-1},s)h(r,s) \\ &= h(r,s)^{-1}h(r,s) \\ &= 1 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} h(r,ss^{-1}) &= h(r,s)^{s}h(r,s^{-1}) \\ &= h(r,s)h(r,s)^{-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

olur ki

$$h(r,1) = h(1,s) = 1$$

elde edilir. Bu özdeşliklerden sonra;

$$h({}^{r}r',{}^{r}s) = {}^{r}h(r',s)$$

$$h({}^{s}r,{}^{s}p) = {}^{s}h(r,p)$$

özdeşliklerinin varlığını inceleyebiliriz. Bunun için;

$$
\begin{aligned}
h({}^{r}r', {}^{r}s) &= h({}^{r}r', vh(r,s)s) \\
&= h(rr'r^{-1}, vh(r,s)s) \\
&= h(rr'r^{-1}, vh(r,s))\, {}^{vh(r,s)}h(rr'r^{-1}, s) \\
&= h(rr'r^{-1}, vh(r,s))h(r,s)h(rr'r^{-1}, s) \\
&\quad h(r,s)^{-1}h(r,s) \\
&= {}^{r}h(r'r^{-1}, vh(r,s))h(r, vh(r,s))h(r,s) \\
&\quad {}^{r}h(r'r^{-1}, s)\ h(r,s)h(r,s)^{-1} \\
&= {}^{r}\left[{}^{r'}h(r^{-1}, vh(r,s))h(r', vh(r,s))\right] \\
&\quad h(r, vh(r,s))h(r,s)\, {}^{r}\left[{}^{r'}h(r^{-1}, s)h(r', s)\right] \\
&= {}^{rr'}h(r^{-1}, vh(r,s))\, {}^{r}h(r', vh(r,s)) \\
&\quad h(r, vh(r,s))h(r,s)\, {}^{rr'}h(r^{-1}, s)\, {}^{r}h(r', s) \\
&= {}^{rr'}\left[{}^{r^{-1}}h(r,s)h(r,s)^{-1}\right] {}^{r}\left[{}^{r'}h(r,s)h(r,s)^{-1}\right] \\
&\quad \left[{}^{r}h(r,s)h(r,s)^{-1}\right] h(r,s)\, {}^{rr'}h(r^{-1}, s) \\
&\quad {}^{r}h(r', s) \\
&= {}^{rr'r^{-1}}h(r,s)\, {}^{rr'}h(r,s)^{-1}\, {}^{rr'}h(r,s)\, {}^{r}h(r,s)^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& {}^{r}h(r,s)^{rr'}h(r^{-1},s)^{r}h(r',s) \\
= \quad & {}^{rr'r^{-1}}h(r,s)^{rr'}h(r^{-1},s)^{r}h(r',s) \\
= \quad & {}^{rr'r^{-1}}h(r,s)^{rr'r^{-1}r}h(r^{-1},s)^{r}h(r',s) \\
= \quad & {}^{rr'r^{-1}}h(r,s)^{rr'r^{-1}}h(r,s)^{-1}\,{}^{r}h(r',s) \\
= \quad & {}^{r}h(r',s)
\end{aligned}
$$

bulunur.

$$
\begin{aligned}
h({}^{s}r,{}^{s}s') \quad = \quad & h(\mu h(r,s)^{-1}r, ss's^{-1}) \\
= \quad & {}^{\mu h(r,s)^{-1}}h(r,ss's^{-1})h(\mu h(r,s)^{-1}, ss's^{-1}) \\
= \quad & h(r,s)^{-1}\left[h(r,ss's^{-1})\right]h(r,s) \\
& \left[h(\mu h(r,s)^{-1}, ss's^{-1})\right] \\
= \quad & h(r,s)^{-1}\left[h(r,s)^{s}h(r,s's^{-1})\right]h(r,s) \\
& \left[h(\mu h(r,s)^{-1},s)^{s}h(\mu h(r,s)^{-1},s's^{-1})\right] \\
= \quad & h(r,s)^{-1}\left[h(r,s)^{s}h(r,s')^{ss'}h(r,s^{-1})\ \right] \\
& h(r,s)\left[h(r,s)^{-1}\,{}^{s}h(r,s)^{s}h(\mu h(r,s)^{-1},s')\right] \\
& h(r,s)\left[{}^{ss'}h(\mu h(r,s)^{-1},s^{-1})\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & h(r,s)^{-1}\, h(r,s)^{s} h(r,s')^{ss'} h(r,s^{-1}) h(r,s) \\
& h(r,s)^{-1\,s} h(r,s)^{s} h(r,s)^{-1\,ss'} h(r,s)^{-1} \\
& {}^{ss'}h(r,s)^{ss's^{-1}}\, h(r,s) \\
= \quad & {}^{s}h(r,s')^{ss's^{-1}s} h(r,s^{-1})^{ss's^{-1}}\, h(r,s) \\
= \quad & {}^{s}h(r,s')^{ss's^{-1}}\, h(r,s)^{-1\,ss's^{-1}}\, h(r,s) \\
= \quad & {}^{s}h(r,s')
\end{aligned}
$$

olup eşitlikler sağlanmış olur.

3.1. Çaprazlanmış Köşe Örnekleri

Burada Çaprazlanmış Köşe için örnekler yer alıp bu örnekler (Alp, 1999) da sunulmuştur. Bu Çaprazlanmış Köşe uygulamaları Çaprazlanmış Köşe tanımının uygulamasını gerçekleştirmesinin yanı sıra; bu örnekler vasıtasıyla Çaprazlanmış Köşe ile Çaprazlanmış Kare arasındaki bağıntının ortaya çıkmasına da yardımcı olacaktır. Bu nedenle örnekler en ince detayına kadar incelenmiş ve koşullar bir bir gösterilmiştir.

1.Örnek:

$$
\begin{tikzcd}
P = R \cap S \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\nu"'] & R \\
S &
\end{tikzcd}
$$

diyagramı

$$
\begin{aligned}
h : R \times S &\to R \cap S \\
(r,s) &\mapsto [r,s]
\end{aligned}
$$

fonksiyonu ve

$$ {}^{s}r = (\mu h(r,s))^{-1} r $$

$$ {}^{r}s = \nu h(r,s)s $$

etkileriyle birlikte bir çaprazlanmış köşedir. Gerçekten de;

$$
\begin{aligned}
CC1)\quad h(rr',s)=[rr',s] &= rr'r{r'}^{-1}s^{-1}r^{-1}rsr^{-1}s^{-1} \\
&= {}^{r}[r',s][r,s] \\
&= {}^{r}h(r',s)h(r,s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
CC2)\quad h(r,ss')=[r,ss'] &= rss'r^{-1}(ss')^{-1} \\
&= rss'r^{-1}{s'}^{-1}s^{-1} \\
&= rsr^{-1}s^{-1}srs'r^{-1}{s'}^{-1}s^{-1} \\
&= \left(rsr^{-1}s^{-1}\right){}^{s}\left(rs'r^{-1}{s'}^{-1}\right) \\
&= [r,s]\,{}^{s}[r,s'] \\
&= h(r,s)\,{}^{s}h(r,s')
\end{aligned}
$$

olur.

$$
\begin{aligned}
CC3)\quad h(\mu p,s)=[\mu p,s] &= (\mu p)s(\mu p)^{-1}s^{-1} \\
&= {}^{(\mu p)}s s^{-1}
\end{aligned}
$$

$$= psp^{-1}s^{-1}$$

$$= p\,{}^{s}p^{-1}$$

$$CC4)\quad h(r,vp)=[r,vp] = r(vp)r^{-1}(vp)^{-1}$$

$$= r\,{}^{vp}r^{-1}$$

$$= rpr^{-1}p^{-1}$$

$$= {}^{r}pp^{-1}$$

$$CC5)\quad {}^{rs}p = {}^{vh(r,s)s}p$$

$$= h(r,s)\,{}^{s}p\,h(r,s)^{-1}$$

$$= [r,s]\,{}^{s}p\,[r,s]^{-1}$$

$$= rsr^{-1}s^{-1}sp\,s^{-1}\left(rsr^{-1}s^{-1}\right)^{-1}$$

$$= rsr^{-1}prs^{-1}r^{-1}$$

$$= rsr^{-1}p\left(rsr^{-1}\right)^{-1}$$

$$= {}^{rsr^{-1}}p$$

olur.

$$CC6)\quad {}^{sr}p = {}^{(\mu h(r,s))^{-1}r}p$$

$$
\begin{aligned}
&= h(r,s)^{-1}\,{}^{r}p\,h(r,s)\\
&= [r,s]^{-1}rpr^{-1}[r,s]\\
&= \left(rsr^{-1}s^{-1}\right)^{-1}rpr^{-1}rsr^{-1}s^{-1}\\
&= srs^{-1}r^{-1}rpr^{-1}rsr^{-1}s^{-1}\\
&= srs^{-1}p\left(srs^{-1}\right)^{-1}\\
&= {}^{srs^{-1}}p
\end{aligned}
$$

olur.

2. Örnek:

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\nu"'] & R \\
S &
\end{tikzcd}
$$

diyagramı $g : S \times R \to P$, $g(s,r) = h(r,s)^{-1}$ fonksiyonu ve

$$
\begin{aligned}
{}^{s}r &= (\nu g(s,r))r\\
{}^{r}s &= (\mu g(s,r))^{-1}s
\end{aligned}
$$

etkileriyle bir Çaprazlanmış Köşedir. Gerçekten de;

$CC1)\quad g(ss',r) \;=\; {}^{s}g(s',r)g(s,r)$ olduğunu gösterelim.

$$g(ss',r)=h(r,ss')^{-1} = \left(h(r,s)^{s}h(r,s')\right)^{-1}$$

$$= {}^{s}h(r,s')^{-1}h(r,s)^{-1}$$

$$= {}^{s}g(s',r)g(s,r)$$

olur.

$CC2)$ $g(s,rr') = g(s,r)^{r}g(s,r')$ olmalıdır.

$$g(s,rr') = h(rr',s)^{-1} = \left({}^{r}h(r',s)h(r,s)\right)^{-1}$$

$$= h(r,s)^{-1}\,{}^{r}h(r',s)^{-1}$$

$$= g(s,r)^{r}g(s,r')$$

olur.

$CC3)$ $g(\nu p,r) = p^{r}p^{-1}$ olmalıdır.

$$g(\nu p,r) = h(r,\nu p) = \left({}^{r}pp^{-1}\right)^{-1}$$

$$= p^{r}p^{-1}$$

olur.

$CC4)$ $g(s,\mu p) = {}^{s}pp^{-1}$ olmalıdır.

$$g(s,\mu p) = h(\mu p,s)^{-1} = \left(p^{s}p^{-1}\right)^{-1}$$

$$= p^{s}p^{-1}$$

olur.

$CC5)\qquad {}^{{}^{r}s}p = {}^{rsr^{-1}}p$ olmalıdır.

$$
\begin{aligned}
{}^{{}^{r}s}p &= {}^{(\mu g(s,r))^{-1} r}p \\
&= g(s,r)^{-1}\,{}^{s}p\,g(s,r) \\
&= h(r,s)\,{}^{s}p\,h(r,s)^{-1} \\
&= {}^{\nu h(r,s)s}p \\
&= {}^{rsr^{-1}}p
\end{aligned}
$$

olur.

$CC6)\qquad {}^{{}^{s}r}p = {}^{srs^{-1}}p$ olmalıdır.

$$
\begin{aligned}
{}^{{}^{s}r}p &= {}^{\nu g(s,r) r}p \\
&= g(s,r)\,{}^{r}p\,g(s,r)^{-1} \\
&= h(r,s)^{-1}\,{}^{r}p\,h(r,s) \\
&= {}^{\mu h(r,s)^{-1} r}p \\
&= {}^{srs^{-1}}p
\end{aligned}
$$

bulunur.

3.2. Çaprazlanmış Köşe Morfizmi

Çaprazlanmış Köşe morfizmi aşağıdaki diyagramdaki gibi bir homomorfizmler ailesidir.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "\lambda"] \arrow[dd, "\nu"'] & & R \arrow[dr, "\omega"] & \\
& P' \arrow[rr, "\mu'"] \arrow[dd, "\nu'"] & & R' \\
S \arrow[dr, "\eta"'] & & & \\
& S' & &
\end{tikzcd}$$

Burada

$$\eta\nu = \nu'\lambda$$

ve

$$\mu'\lambda = \omega\mu$$

dir. Gerçekten de;

$$p \in P, p' \in P', s \in S, s' \in S', r \in R, r' \in R'$$

olmak üzere

$$\eta\nu(p) = \eta(s) = s' = \nu'(p') = \nu'\lambda(p)$$

ve

$$\mu'\lambda(p) = \mu'(p') = r' = \omega(r) = \omega\mu(p)$$

olup eşitlik sağlanır.

3.3. Çaprazlanmış Köşe ve Cat^1-Gruplar

Bu bölümde; **XMod** un **CAT** ve Çaprazlanmış Kare kategorisinin de Cat^2-gruplar kategorisine denk olması düşünülerek oluşturulmuş olan Çaprazlanmış Köşe kategorisinin Cat^1-gruplar kategorisinde neye denk olduğunu bulabilmek için yapılan çalışmalar yer almaktadır. Bunun için burada Çaprazlanmış Köşe'nin tanımlanan iyi tanımlı etkileri ile pre Cat^1-gruba denk olduğu ispatlanmıştır. Bu ispatta yarı-direkt çarpım ve Çaprazlanmış Köşe tanımından elde edilen R,S,P grup ve özdeşlikler kullanılmıştır.

Kabul edelim ki $h: R\times S \to P$ bir dönüşüm olsun. $P \propto R$ yarı-direkt çarpım üzerinde S 'nin etkisi

$$^{s}(p,r) = \left({}^{s}ph(r,s)^{-1},r\right)$$

$$^{r}(p,s) = \left({}^{r}ph(s,r)^{-1},s\right)$$

şeklinde tanımlansın.

Teorem: Yukarıda tanımlanan etkilerin iyi tanımlı olması için gerek ve yeter şart

$$^{rs}ph(r,s) = h(r,s)^{sr}p$$

olmasıdır.

İspat:

i)
$$\begin{aligned}
^{s}((p,r)(p',r')) &= {}^{s}\left(p\,{}^{r}p',rr'\right) \\
&= \left({}^{s}p\,{}^{sr}p'h(rr',s)^{-1},rr'\right) \\
&= \left({}^{s}p\,{}^{sr}p'\left({}^{r}h(r',s)h(r,s)\right)^{-1},rr'\right) \\
{}^{s}(p,r)\,{}^{s}(p',r') &= \left({}^{s}ph(r,s)^{-1},r\right)\left({}^{s}p'h(r',s)^{-1},r'\right)
\end{aligned}$$

$$= \left({}^{s}p\,h(r,s)^{-1}\,{}^{rs}p'\,{}^{r}h(r',s)\,,rr'\right)$$

$$= \left({}^{s}p\;{}^{sr}p'h(r,s)^{-1}\,{}^{r}h(r',s)^{-1},rr'\right)$$

olup;

$${}^{s}\big((p,r)(p',r')\big) = {}^{s}(p,r)^{s}(p',r')$$

bulunur.

$$ii) \quad {}^{s'}({}^{s}(p,r)) = {}^{s'}\left({}^{s}ph(r,s)^{-1},r\right)$$

$$= {}^{s'}\left({}^{s}ph(r,s)^{-1}h(r,s')^{-1},r\right)$$

$$= \left({}^{ss'}p^{s'}h(r,s)^{-1}h(r,s')^{-1},r\right)$$

ve

$${}^{s's}(p,r) = \left({}^{s's}ph(r,s's),r\right)$$

$$= \left({}^{s's}p(h(r,s')^{s'}h(r,s))^{-1},r\right)$$

$$= \left({}^{s's}p^{s'}h(r,s)^{-1}h(r,s')^{-1},r\right)$$

bulunur.

$$iii) \quad {}^{1}(p,r) = \left({}^{1}ph(r,1)^{-1},r\right)$$

$$= (p,r)$$

olur. O halde etki iyi tanımlıdır.

Şimdi kabul edelim ki etki iyi tanımlı olsun. Bu durumda;

$$\left({}^{s}p\,{}^{sr}p'\,h(r,s)^{-1}\,{}^{r}h(r',s)^{-1}, rr'\right) = \left({}^{s}ph(r,s)^{-1}\,{}^{rs}p'\,{}^{r}h(r',s)^{-1}, rr'\right)$$

$${}^{sr}p'\,h(r,s)^{-1} = h(r,s)^{-1}\,{}^{rs}p'$$

$$h(r,s)\,{}^{sr}p'\,h(r,s)^{-1} = {}^{rs}p'$$

$$h(r,s)\,{}^{sr}p' = {}^{rs}p'\,h(r,s)$$

olur. Dolayısıyla ;

$${}^{rs}ph(r,s) = h(r,s)\,{}^{sr}p$$

sağlanır.

Teorem: Sırası ile verilen;

$$h(p,r,s) = s$$

$$t(p,r,s) = \mu(p)rs$$

$$e(s) = (1,1,s)$$

$e;h,t:(P\propto R)\propto S \to S$ dönüşümlerinin bir pre Cat^1-grup olması için gerekli ve yeterli koşulun S nin R üzerindeki etkisinin konjuge olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki h,t yukarıdaki gibi olsun. S'den $(P\propto R)$'ye embedding dönüşümünü

$$e(s) = (1,1,s)$$

olmak üzere pre Cat^1-grup olma koşulunu kontrol etmeliyiz. Buna göre;

$$\begin{aligned}
teh(p,r,s) &= te(s) \\
&= t(1,1,s) \\
&= s \\
&= h(p,r,s) \\
het(p,r,s) &= he(\mu(p)rs) \\
&= h(1,1,\mu(p)rs) \\
&= (\mu(p)rs) \\
&= t(p,r,s) \\
tet(p,r,s) &= te(\mu(p)rs) \\
&= t(1,1,\mu(p)rs) \\
&= t(p,r,s) \\
heh(p,r,s) &= he(s) \\
&= h(1,1,s) \\
&= s \\
&= h(p,r,s)
\end{aligned}$$

olur.

Şimdi h,t nin homomorfizm olduğunu kontrol etmeliyiz.

$$(p,r,s)(p',r',s') \quad = \quad \left(p^{r}sp'^{r}h(r,s)^{-1},rr',ss'\right)$$

etkisiyle kabul edelim ki S nin R üzerindeki etkisi konjuge olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
t\left((p,r,s)(p',r',s')\right) &= \mu\left(p^{r}sp'^{r}h(r',s)^{-1}rr'ss'\right) \\
&= \mu(p)\mu({}^{rs}p')\mu({}^{r}h(r',s)^{-1}rr'ss') \\
&= \quad (p)rs \quad (p')s\ {}^{1}r\ {}^{1}r \quad (h(r',s)\ {}^{1})r^{-1}rr'ss' \\
&= \mu(p)rs\mu(p')s^{-1}\mu\left(h(r',s)^{-1}\right)r'ss' \\
&= \mu(p)rs\mu(p')s^{-1}\,{}^{s}r'ss' \\
&= \mu(p)rs\mu(p')r's' \\
&= t(p,r,s)t(p',r',s')
\end{aligned}$$

olur. Eğer t bir homomorfizm ise S nin R üzerindeki etkisinin konjuge olduğunu göstermek kolaydır.

Daha önce

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d] & R \\
S &
\end{tikzcd}$$

grupların bir diyagramı ile verilen $g: S \times R \to P$, $g(s,r) = h(r,s)^{-1}$ fonksiyonu ile birlikte bir Çaprazlanmış Köşe olduğu Örnek 2 de gösterilmişti. Aynı zamanda bu tanımlama ile yeni bir pre Cat ^{1}-grup oluşturabiliriz.

Bunun için

$$h,t:(P \propto S)\propto R \to R$$

$$h(p,s,r) = r$$

$$t(p,s,r) = \mu(p)sr$$

şeklinde tanımlandığında bir pre Cat^1-grup oluşturur. Gerçekten de embedding dönüşümünü

$$e(r) = (1,1,r)$$

şeklinde alırsak;

$$\begin{aligned} teh(p,s,r) &= te(r) \\ &= t(1,1,r) \\ &= r \\ het(p,s,r) &= he(\mu(p)sr) \\ &= h(1,1,\mu(p)sr) \\ &= \mu(p)sr \\ &= t(p,s,r) \\ tet(p,s,r) &= te(\mu(p)sr) \\ &= t(1,1,\mu(p)sr) \\ &= t(p,s,r) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
heh(p,s,r) &= he(r) \\
&= h(1,1,r) \\
&= r \\
&= h(p,s,r)
\end{aligned}
$$

olur.

Teorem:

$$C_1 = (P \propto S) \propto R$$

$$C_2 = (P \propto R) \propto S$$

olsun. C_1 ve C_2 grup olduklarından bu iki grup arasında

$$
\begin{aligned}
&\eta : C_2 \to C_1 \\
&(p,r,s) \mapsto (ph(r,s),s,r)
\end{aligned}
$$

şeklinde bir homomorfizm tanımlayabiliriz.

İspat: $\eta((p,r,s)(p',r',s')) = \eta(p,r,s)\eta(p',r',s')$ eşitliğinin doğruluğunu göstermeliyiz. Buna göre;

$$
\begin{aligned}
\eta((p,r,s)(p',r',s')) &= \eta\left((p,r)^{s}(p',r'),ss'\right) \\
&= \eta\left((p,r)({}^{s}ph(r',s)^{-1},r'),ss')\right) \\
&= \eta\left(p^{rs}p'^{r}h(r',s)^{-1},rr',ss'\right)
\end{aligned}
$$

$$= \left(p^{rs}p'^{r}h(r',s)^{-1}h(rr',ss'),ss',rr'\right)$$

$$= \left(p^{rs}p'^{rs}h(r',s')h(r,s)^{s}h(r,s'),ss',rr'\right)$$

$$\eta(p,r,s)\eta(p',r',s') = (ph(r,s),s,r)(p'h(r',s'),s',r')$$

$$= \left((ph(r,s),s)^{r}(p'h(r',s'),s'),rr'\right)$$

$$= \left((ph(r,s),s)^{r}p'^{r}h(r',s')h'(s',r)^{-1},s',rr')\right)$$

$$= \left(ph(r,s)^{sr}p'^{sr}h(r',s')^{s}h'(s',r)^{-1},ss',rr'\right)$$

$$= \left(p^{rs}p'h(r,s)^{sr}h(r',s')^{s}h'(s',r)^{-1},ss',rr')\right)$$

$$= \left(p^{rs}p'^{rs}h(r',s')h(r,s)^{s}h'(s',r)^{-1},ss',rr'\right)$$

$$= \left(p^{rs}p'^{rs}h(r',s)h(r,s)^{s}h(r,s'),ss',rr'\right)$$

olur. Dolayısıyla η bir homomorfizmdir.

3.4. Çaprazlanmış Köşe ve Çaprazlanmış Kare Arasındaki İlişki

Burada Çaprazlanmış Köşe ve Çaprazlanmış Kare arasındaki bağıntıları vereceğiz. Bu bağıntı Alp tarafından (Alp, 1999) da verildi. Bunun için aşağıda verilen orijinal teoremi ispatlayacağız.

Bir Çaprazlanmış Kare'nin $h: R\times S \to P$ fonksiyonu ile aşağıdaki şartları sağladığını biliyoruz.

$CS1)$ μ,ν,λ,λ' dönüşümlerinin her biri ve $\lambda'\nu$ bileşeni çaprazlanmış modül

$CS2)$ μ,ν dönüşümleri E etkilerini korur ve

$$h(r,ss') = h(r,s)\,{}^{s}h(r,s')$$

$$CS3)\quad h(rr',s) = {}^{r}h(r',s)h(r,s)$$

$$CS4)\quad {}^{e}h(r,s) = h({}^{e}r,{}^{e}s)$$

$$CS5)\quad vh(r,s) = {}^{r}ss^{-1}$$

$$\mu h(r,s) = r\,{}^{s}r^{-1}$$

$$CS6)\quad h(r,vp) = {}^{r}pp^{-1}$$

$$h(\mu p,s) = p\,{}^{s}p^{-1}$$

Aynı zamanda da bir Çaprazlanmış Köşe'nin

$${}^{s}r = (\mu h(r,s))^{-1}r$$

$${}^{r}s = (vh(r,s))s$$

şeklindeki etkileriyle aşağıdaki diyagramla belirli olan

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "v"'] & R \\ S & \end{tikzcd}$$

ve aşağıdaki şartları sağlayan $h: R\times S \to P$ fonksiyonuyla birlikte (P üzerinde R ve S'nin etkisiyle) bir çaprazlanmış modül çifti olduğunu biliyoruz. Burada μ ve ν birer çaprazlanmış modüldür.

$$
\begin{array}{llcl}
CC1) & h(rr',s) & = & {}^{r}h(r',s)h(r,s) \\
CC2) & h(r,ss') & = & h(r,s)^{s}h(r,s') \\
CC3) & h(\mu p,s) & = & p^{s}p^{-1} \\
CC4) & h(r,\nu p) & = & {}^{r}pp^{-1} \\
CC5) & {}^{({}^{r}s)}p & = & {}^{rsr^{-1}}p \\
CC6) & {}^{({}^{s}r)}p & = & {}^{srs^{-1}}p
\end{array}
$$

Buna göre Çaprazlanmış Köşe ve Çaprazlanmış Kare arasındaki ilişkiyi aşağıdaki teoremle verebiliriz.

Teorem: Kabul edelim ki R,S ve P birer grup ve $h: R\times S \to P$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

1.Bir Çaprazlanmış Köşe $CC1-CC6$ şartlarıyla birlikte;

2. $CS1)$ ve $CS6)$ şartları denktirler.

İspat: Çaprazlanmış Kare'nin $CS3$ ve $CS6$ koşulları Çaprazlanmış Köşe'nin $CC1, CC2, CC3,$ ve $CC4$ koşulları tarafından ispatlanır. Çaprazlanmış Köşede tanımladığımız

$$
\begin{aligned}
{}^{s}r &= (\mu h(r,s))^{-1}r \\
{}^{r}s &= (\nu h(r,s))s
\end{aligned}
$$

etkileri ile Çaprazlanmış Kare'nin $CC5$ özelliği sağlanmış olur. Aynı zamanda

$$
\begin{aligned}
h({}^{r}r',{}^{r}s) &= {}^{r}h(r',s) \\
h({}^{s}r,{}^{s}k) &= {}^{s}h(r,k)
\end{aligned}
$$

özellikleri Çaprazlanmış Kare'nin $CC4$ özelliğini sağlar. Çaprazlanmış Kare'nin $CC1$ özelliği μ ve ν dönüşümlerinin Çaprazlanmış Modül olmasından dolayı açıktır. Ayrıca $E=1$ durumunda Çaprazlanmış Köşe olmasından dolayı E nin etkisi μ ve ν tarafından korunur. Dolayısıyla Çaprazlanmış Köşe'nin $CC2$ aksiyomu sağlanır. Yine Çaprazlanmış Kare tanımından Çaprazlanmış Köşe'nin $CC1, CC2, CC3,$ ve $CC4$ özelliklerinin sağlandığı açıktır.

$$
h(r,s)\,{}^{sr}h(r',s') = {}^{rs}h(r',s')h(r,s)
$$

özelliğinden

$$
\nu h(r,s)s = rsr^{-1}
$$

yazabiliriz. Dolayısıyla Çaprazlanmış Köşe'nin $CC5$ ve $CC6$ aksiyomları sağlanmış olur. Böylece Çaprazlanmış Köşe ile Çaprazlanmış Kare arasındaki denklik ispatlanmış olur.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Alp,M.,1997, GAP, Crossed Modüles, Cat[1]-grups to the Compunational Group theory, PhD. Thesis Universty of Wales Bangor,1420 pp

Alp,M., 1999, Characterization of Crossed Corner,Volume 15 No:2, *Algebras,Groups and Geometries*. 173-182

Alp,M., 1999, No:2 Application of Crossed Corner, *Algebras,Groups and Geometries*. 337-344

Alp,M., 1998, Application of Crossed Corner, *2. Uluslararası Kızılırmak Fen Bilimleri Kongresi*, Kırıkkale. 176-180

Alp,M., 1998, Special cases of Cat[1]-groups, Communation(A.Ü.F.F.)

Alp,M.,and Wensley,C.D.,1996, Xmod, Crossed Modules and Cat[1]-groups in GAP,version 1.3. Manual for the XMod share package.

Alp,M.,and Wensley,C.D.,1999, Enumaration of Cat[1]-groups of lower order groups, *International Journal of Algebra and Computation.* (to appear)

Alp,M.,1998, Crossed Corner, *Algebras,Groups and Geometries.*

Brown,R.,and Loday,J.L., 1987, Van Kampen Theorems for diagram of spaces *Topology* 26,311-335

Brown,R.,and Wensley,C.D.,1995, On finite induced crossed modules and the homotopy 2-type of mapping cones, *Theory and Application of Categories*, 54-71

Ellis,G.J.,1993, Crossed Squares and Combinatorial Homotopy. *Math.Z.*214,93-110

Ellis,G.J.,1988, Crossed Modules, *IMS Bulletin* 21,29-37

Ellis,G.J.,and Steiner,R., 1987, Higher Dimensional Crossed Modules and the Homotopy Groups of (n+1)-ads *J.P.A.A.* 46,117-136

Loday,J.L., 1982, Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups *J.P.P.A.* ,24,199-202

Pak,S.,1999, Applications of Crossed Modules to GAP, M.Sc. Thesis. D.P.Ü 1-100.

Schönert,M.,Eet Al. 1985, GAP,Groups,Algorithm and Programming, Lethistuhl D für Mathematic, Rheinisch Westfalisch Tecnischel Hoch-schule, Aachen, Germany third edition.

Walery,D.G., and Loday,J.L., 1981, Obsructions Excision en Ktheorie Algebique. *Springer Lecture Notes in Math.* 854, 179-216

Whitehead,J.H.C., 1949, Combinatorial homotopy II, *Bull, A.M.S.* 55,453-496

Whitehead,J.H.C., 1948, On operators in relative homotopy group, *Ann of Math*,49, 610-640