KAPALI EĞRİ ÜZERİNDE TANIMLI FONKSİYONLARA YAKLAŞIM YÖNTEMLERİ

Melek DEMİRHAN

Dumlupınar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Ana Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Nizami MUSTAFAYEV

Haziran - 2002

KABUL VE ONAY SAYFASI

Melek DEMİRHAN'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı Kapalı Eğri Üzerinde Tanımlı Fonksiyonlara Yaklaşım Yöntemleri başlıklı çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

15/07/2002
(Sınav Tarihi)

Üye :Prof. Dr. Rizvali MUSTAFAYEV
Üye :Doç. Dr. Sadulla JAFAROV
Üye :Yrd. Doç. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ
Üye :Yrd. Doç. Dr. Nizami MUSTAFAYEV
Üye :Yrd. Doç. Dr. Murat ALP

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 24/07/2002 gün ve 11 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. İ. Göktay EDİZ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

KAPALI EĞRİ ÜZERİNDE TANIMLI FONKSİYONLARA YAKLAŞIM YÖNTEMLERİ

Melek DEMİRHAN
Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2002
Tez Danışmanı: Yrd.Doç.Dr. Nizami MUSTAFAYEV

ÖZET

Bu tezde, kapalı eğri üzerinde tanımlı Hölder sınıfından olan fonksiyonların iki analitik (kapalı γ eğrisi içinde ve dışında analitik iki) fonksiyonunun farkı şeklinde yazılabilmesine dayanarak, kapalı eğri üzerinde tanımlı fonksiyonların yaklaşımı üzerine araştırmalar yapılmıştır.

Birinci bölümde gereken temel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde basit irtibatlı bölgede analitik ve kapanışında sürekli fonksiyonlara polinomlarla en iyi yaklaşım incelenir ve yaklaşım hızı gösterilir.

Tezin üçüncü bölümünde kapalı eğri üzerinde tanımlı fonksiyonlara n. dereceli rasyonel polinomlarla en iyi yaklaşım öğrenilir. Bunun yanı sıra yoğunluk fonksiyonu Hölder koşulunu sağlayan Cauchy çekirdekli singüler integral için de n. dereceli rasyonel polinomlarla en iyi yaklaşım incelenir.

Anahtar Kelimeler: Cauchy Tipli İntegraller, En İyi Yaklaşım, Polinom, Rasyonel Polinom.

THE APPROACH METHODS TO THE DEFINED FUNCTIONS ON THE CLOSED CURVE

Melek DEMİRHAN
Mathematics Department, Higher Licence Thesis, 2002
The Thesis Advisor: Assoc.Prof. Dr. Nizami MUSTAFAYEV

SUMMARY

In this thesis, the approximation of the functions which are defined on a closed γ curve is investigated, that can be written depending on the ability of the difference of two analytic functions (that functions are analytic inside and outside of the γ) which belong to Hölder class on the γ.

The necessary basic information has been given in the first part.

In the second chapter, the best approximation is examined to the functions which are analytic in a simply connected domain and continuous on its closure with polynamials and the speed of approximation is shown.

In the third chapter of the thesis the best approximation is given to the functions which are defined an a closed curve with the nth. degree rational polynomials. Besides this, for the density function in the singular integral with Cauchy kernel which satisfies the Hölder Condition the best approximation is examined with the nth degree rational polynamials.

Key Words: Cauchy Type İntegrals, The Best Approximation, The Polynamial, The Rational Polynomial.

TEŞEKKÜR

Bana karşı her zaman sabırlı ve hoşgörülü davranarak tezin hazırlanmasında büyük emeği geçen danışman hocam; Yard. Doç. Dr. Nizami MUSTAFAYEV'e, ihtiyacım olduğunda daima yanımda olduğunu bildiğim aileme, verdikleri her türlü destek için teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

GİRİŞ

Bu tezde S.Y.Alper' in "Kompleks Değişkenli Fonksiyonlara Kapalı Bölgede En iyi Yaklaşım" (Alper, 1955) makalesi esas alınıp, kapalı eğri üzerinde tanımlı Hölder sınıfından olan fonksiyonların iki analitik (kapalı γ eğrisi içinde ve dışında analitik iki) fonksiyonun farkı şeklinde yazılabilmesine dayanarak, kapalı eğri üzerinde tanımlı fonksiyonların yaklaşımı üzerine araştırmalar yapılmıştır.

Birinci bölümde gereken temel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde basit irtibatlı bölgede analitik ve kapanışında sürekli fonksiyonlara polinomlarla en iyi yaklaşım incelenir ve yaklaşım hızı gösterilir. Burada, kullanılan polinomlar ele alınan fonksiyon ve bölge için Faber serilerinden farklı yöntemlerle elde edilen polinomlardır.

Konuda ele alınan bölgelerin sınırı düzgün eğrilerdir. u=f(z) fonksiyonu kapalı Jordan eğrisi ile sınırlı bir D bölgesinde analitik $\left(f \in A(D)\right)$ ve kapanışında sürekli $\left(f \in C(\overline{D})\right)$ bir fonksiyon olsun. İleride, yeri geldiğinde bu deyimi kısaca $f \in A(D) \cap C(\overline{D})$ gibi ifade edeceğiz.

$g_n(f,\overline{D})$ ile f(z) fonksiyonunun $\overline{D}$ 'de n. dereceli polinomlarla en iyi yaklaşımını, yani

$$g_n(f,\overline{D}) = \inf_{P_n} \sup_{z \in D} \left|f(z) - P_n(z)\right|$$

göstereceğiz.

u=f(z) fonksiyonu D' de analitik ve $\overline{D}$ ' da α $(0 < \alpha \le 1)$ üssü ile Hölder koşulunu sağlayan, k. $(k \in N)$ mertebeden $f^{(k)}(z)$ sürekli türevlere sahip olduğu durumda, D' nin sınırı analitik eğri ise $g_n(f,\overline{D})$ için (Sewell, 1942)

$$g_n(f.\overline{D}) \le \frac{A_1}{n^{k+\alpha}} \qquad (0.1)$$

dir, burada A_1 n'ye bağımlı olmayan sabittir, değerlendirmesi bilinir.

D bölgesinin sınırı, teğeti sürekli yön değiştiren düzgün eğri olduğu durumda S.N.Mergelyan tarafından (Mergelyan, 1951)

$$g_n(f.\overline{D}) \leq \frac{B(\varepsilon)}{n^{k+\alpha-\varepsilon}} \qquad (0.2)$$

değerlendirmesi bulunmuştur. Burada, $B(\varepsilon)$ sadece ε'a bağımlı olup n'ye bağımlı olmayan sabittir. Ayrıca, bu değerlendirme sınırlı bölgeler için iyileştirilemez.

Tezde, ikinci bölümde sınırı düzgün eğri olan bölgede ilave şartlar dahilinde $g_n(f,\overline{D})$ büyüklüğünün üsten değerlendirmesi verilir. Ayrıca, f(z) fonksiyonunun onun Faber polinomuna göre seriye açılımı yardımı ile elde edilen polinomlarla yaklaşımı incelenmektedir.

Tezin üçüncü bölümünde kapalı eğri üzerinde tanımlı fonksiyonlara n. dereceli rasyonel polinomlarla en iyi yaklaşım öğrenilir. Bunun yanı sıra yoğunluk fonksiyonu Hölder koşulunu sağlayan Cauchy çekirdekli singüler integral için de n. dereceli rasyonel polinomlarla en iyi yaklaşım incelenir.

$\mathbb{C}$ kompleks düzlem, γ kompleks düzlemde orijini içinde bulunduran kapalı Lyapunov eğrisi olsun. $H_\alpha^{(k)}(\gamma)$ ile γ üzerinde tanımlı k. mertebeden türevi $H_\alpha(\gamma)$ sınıfından olan fonksiyonları gösterelim. $g_n(f,\gamma)$ ile γ üzerinde tanımlı f fonksiyonuna n. dereceli rasyonel fonksiyonlarla en iyi yaklaşımı, yani

$$g_n(f,\gamma) = \inf_{P_n \in \Re_n} \sup_{t \in \gamma} \left| f(t) - P_n(t) \right| \qquad (0.3)$$

gösterelim. Burada,

$$\Re_n = \left\{ \alpha_k \in \mathbb{C} : \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k t^k \right\}$$

n. dereceli bütün mümkün olan rasyonel polinomlar kümesidir.

Biliyoruz ki, (Gakhov, 1977) eğer, $f \in H_\alpha^{(k)}(\gamma)$, $0 < \alpha < 1$ ise,

$$Sf(t) = \frac{1}{\pi i} \int_\gamma \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau, t \in \gamma \qquad (0.4)$$

Cauchy Singüler İntegrali için de $Sf \in H_\alpha^{(k)}(\gamma)$, $0 < \alpha < 1$ olur.

(0.4) Singüler İntegralini içeren singüler integral denklemin yaklaşık çözümünün denklemin kesin çözümüne yaklaşım hızı $g_n(f,\gamma)$ büyüklüğü ile ve bu büyüklük de kendiliğinden singüler integral denklemin katsayılarının, denklemdeki singüler integralin çekirdeği ve singüler integralin en iyi yaklaşımı ile belirlendiğinden (0.3) büyüklüğünün incelenmesi büyük önem taşır. Böylece, singüler integral denklemlerin yaklaşık çözümünün yaklaşım hızını bilmek için bilinen $g_n(f,\gamma)$ değerlendirmesine göre $g_n(Sf,\gamma)$ büyüklüğünü değerlendirmeyi başarmak gerekir.

Bilindiği gibi, (Gakhov, 1977) eğer, $f \in H_\alpha^{(k)}(\gamma)$, $0 < \alpha < 1$ ise

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau, \quad z \notin \gamma$$

Cauchy Tipli İntegralinin

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}f(t) + \frac{1}{2}Sf(t), \ t \in \gamma$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}f(t) + \frac{1}{2}Sf(t), \ t \in \gamma$$

sınır değerleri de $H_\alpha^{(k)}(\gamma)$ sınıfındandır. Bu durumda (Alper, 1955), $g_n(\Phi^+,\gamma)$ ve $g_n(\Phi^-,\gamma)$ büyüklüklerinin sıfıra yaklaşımı $n^{-\alpha-k}$ tipindendir. Buradan (Gakhov, 1977)

$$f(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t), \ t \in \gamma$$

$$Sf(t) = \Phi^+(t) + \Phi^-(t), \ t \in \gamma$$

olduğundan, $g_n(f,\gamma)$ ve $g_n(Sf,\gamma)$ büyüklükleri de $n^{-\alpha-k}$ hızla sıfıra yaklaşır. Ayrıca, eğer γ merkezi orijinde olan birim çemberse,

$$g_n(f,\gamma) = O(n^{-1-k}) \Leftrightarrow g_n(Sf,\gamma) = O(n^{-1-k}) \qquad (0.5)$$

olduğu bilinir (Zygmund, 1945).

Üçüncü bölümde γ Lyapunov eğrisi olduğu durumda da (0.5) önermesinin doğru olduğu gösterilir.

1. BÖLÜM

TEMEL BİLGİLER

1.1. Kompleks Düzlemde Eğri

Matematiğin kavramlarından olan eğri (curve) ve yay (arc) sözcükleri için kesin bir terim birliği sağlanmış değildir. Bazen yay ve eğri kelimeleri eş anlamda kullanıldığı gibi bazen de farklı bir kavram gibi kullanılmaktadır. Biz, günlük konuşmada kullanılan eğri sözcüğünü benimseyecek ve diğerlerini buna bağlı olarak tanımlayacağız. Burada düzlemdeki eğrilerden bahsedilecektir.

Tanım 1.1.1. (TURGUT, 1998)

a) $[a.b] \subset R$ olmak üzere sürekli bir $\gamma : [a, b] \rightarrow C$ fonksiyonuna C düzleminde bir eğri denir. Burada $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir.

b) Bir γ eğrisi verildiğinde $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise, γ 'ya kapalı eğri denir.

c) Bir γ eğrisi verildiğinde γ' türevi var ve sürekli ise γ diferansiyellenebilir bir eğridir denir.

d) γ diferansiyellenebilir bir eğri olsun. Eğer, $\gamma'(t) \neq 0$ ise γ 'ya düzgün (regüler) eğri denir.

e) [a,b] aralığının sonlu tane noktası hariç γ eğrisi diferansiyellenebiliyorsa ve bu söz konusu noktalarda γ ' nın sağdan ve soldan türevleri var ve bunlar γ' türevinin bu noktalardaki sağ ve sol limitlerine eşitse γ parçalı diferansiyellenebilir eğridir denir.

f) γ parçalı diferansiyellenebilir eğri olsun. Eğer, her $t \in [a, b]$ için $\gamma'(t) \neq 0$ ise, γ parçalı düzgün eğridir, denir.

g) Bir γ eğrisi sadece $t_1=t_2$ için $\gamma(t_1)= \gamma(t_2)$ oluyorsa γ 'ya basit eğri denir. Bazen basit eğrilere Jordan eğrisi de denir. γ basit bir eğri ve $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise kapalı basit eğri (kapalı Jordan eğrisi) denir.

Uyarı: (1) Burada $\mathbb{C}$ düzlemindeki eğriler söz konusu olduğundan çok kez

$$z(t) = \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

biçiminde yazacağız. Bazen bir γ eğrisi

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}, \quad a \leq t \leq b$$

parametrik gösterimi ile de verilebilir.

(2) Bir γ eğrisi verildiğinde

$$z'(t_0) = y'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$$

var ve $z'(t_0) \neq 0$ ise, eğri $z_0 = z(t_0)$ noktasında bir teğete sahiptir. Teğet z_0 noktasından geçer ve pozitif eksenle $\theta = \arg z'(t_0)$ açısı yapar. Böylece görülüyor ki, düzgün eğriler her noktada, diferansiyellenebilir eğriler ise türevin sıfırdan farklı olduğu noktalarda, teğete sahiptirler. $z_1(t)$ ve $z_2(t)$, t_0' da teğete sahip iseler, teğetler arasındaki açı

$$\arg z_2'(t_0) - \arg z_1'(t_0)$$

dır.

(3) Tanımdan görülüyor ki, basit eğri kendisini kesmeyen eğridir. Yani bu durumda γ bire-bir sürekli fonksiyondur.

Tanım 1.1.2: Eğer, $\gamma = \gamma(t)$ fonksiyonu sınırlı ise bunun belirttiği γ eğrisine doğrultulabilir eğri denir.

Uyarı: Bir eğri sadece bir nokta kümesi değildir. Bu noktaların birbirini takip edişleri de önemlidir. Bir

$$\gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t), 0 \leq t \leq 1$$

eğrisini ele alalım. Bunun uç noktaları $z_0 = (0)$ ve $z_1 = z(1)$ olsun. Eğer, eğri üzerindeki noktalar z_0'dan başlamak üzere t'nin artışına karşılık geliş sırasına göre taranırsa, γ pozitif yönde dönülmüş olur. Eğer, γ kapalı eğri ise bu eğri üzere hareket zamanı γ eğrisinin sınırladığı sınırlı bölge solda (sağda) kalırsa γ eğrisi pozitif (negatif) yönlüdür denir.

1.2. Analitik Fonksiyonlar

Tanım 1.2.1: (TURGUT, 1998) Bir $\varphi: C \to C$ kompleks fonksiyonu $z_0 \in C$ noktasının bir $S_r \quad (z_0) = \{z \in C: |z - z_0| < r\}$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyelellenebiliyorsa, $\varphi(z)$ z_0 noktasında analitiktir (holomorftur) denir.

Eğer, $\varphi: C \to C$ fonksiyonu bir $D \subset C$ kümesinin bütün noktalarında analitikse, φ A üzerinde analitiktir diyecek ve bunu $\varphi \in A(D)$ şeklinde belirteceğiz.

Kompleks düzlemin her bir noktasında analitik fonksiyona tam fonksiyon denir.

Tanım 1.2.2: (SİDOROV., FEDARYUK., ŞABUNİN, 1989) Bir $\varphi: C \to C$ fonksiyonu $z_0 \in C$ noktasının belli bir $S_r \quad (z_0)$ komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer, $\varphi(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının herhangi bir $S_\delta \ (z_0)$, $\delta \le r$ komşuluğunda düzgün yakınsak bir

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.(z - z_0)^n$$

serisi şeklinde gösterilebilirse, $\varphi(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitik fonksiyon denir.

Tanım 1.2.1 ile Tanım 1.2.2' nin denk olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 1.2.3: $\varphi: D \to C$ fonksiyonu $z_0 \in D$ noktasında analitik olması için onun z_0' da diferansiyellenebilir olması gereklidir.

Uyarı 1: Bir $\varphi: C \to C$ fonksiyonunun $z_0 \in C$ noktasında analitik olması için onun z_0' da diferansiyellenebilir olması yeterli değildir.

Tanım 1.2.4: Bir $\varphi: C \to C$ fonksiyonu $z_0 - \infty$ noktasının komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer, $\varphi(z)$ fonksiyonu $z_0 = \infty$ 'un herhangi bir komşuluğunda yakınsak

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.z^{-n}$$

serisi şeklinde gösterilebiliyorsa, $\varphi(z)$ fonksiyonu $z_0 = \infty$ noktasında analitiktir denir.

Önerme 1.2.5: $\varphi: C \to C$ fonksiyonunun $z_0 = \infty$ noktasında analitik olması için gerekli ve yeterli koşul $\Phi(\xi) = \varphi(1/\xi)$ fonksiyonunun $\xi_0 = 0$ noktasında analitik olmasıdır.

Bir kompleks fonksiyonun analitikliği için yeterli koşullar olan aşağıdaki iki teoremi verelim.

Teorem 1.2.6 (Morera Teoremi): $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kompleks fonksiyonu basit irtibatlı bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı ve D üzerinde sürekli olsun. Eğer, φ(z) fonksiyonunun D bölgesinin içinde kalan her kapalı eğri üzerinde integrali sıfırsa, φ(z) D üzerinde analitiktir.

Teorem 1.2.7 (Weierstrass Teoremi): $\varphi_n(z),\ n \in N$ fonksiyonları bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik ve $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)$ serisi D' ye ait olan her kapalı bölgede düzgün yakınsaksa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) = \varphi(z)$$

fonksiyonu D üzerinde analitiktir.

Analitik fonksiyonların bazı özelliklerini verelim.

1.Bir noktada analitik fonksiyon bu noktanın komşuluğunda her bir noktada analitiktir. Yani, bir fonksiyonun analitik olduğu noktaların kümesi açık bir kümedir.

2.Eğer, f(z), φ(z) fonksiyonları $D \subset \mathbb{C}$ kümesi üzerinde analitikse

a. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *için* $\alpha.f(z) + \beta.\varphi(z)$,

b. $f(z).\varphi(z)$ *ve*

c. φ(z) ≠ 0 olmak üzere $f(z)/\varphi(z)$

fonksiyonları da D üzerinde analitiktir.

3. $P_n(z) = \alpha_n.z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0$

Polinomu bir tam fonksiyondur.

4.İki analitik fonksiyonun bileşkesi de analitiktir.

5.Analitik fonksiyon istenilen mertebeden diferansiyellenebilir.

6.Basit irtibatlı bölgede analitik fonksiyonun ilkel fonksiyonu ve türevi de analitiktir.

7.Bir $D = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r \}$ dairesinde φ(z) fonksiyonu bütün D' de yakınsak

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^n(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

Taylor serisinin toplamı şeklinde gösterilebilir.

8. Bir $z_0 \neq \infty$ noktasının analitik $\varphi(z)$ fonksiyonunun m. dereceden sıfırı olması için gerekli ve yeterli koşul h(z) fonksiyonu $(h(z) \neq 0)$ $z = z_0$ noktasında analitik olmak üzere

$$\varphi(z) = (z - z_0)^m . h(z)$$

şeklinde yazılabilmesidir.

9. Eğer z_0 noktası analitik bir $\varphi(z)$ fonksiyonunun m. dereceden sıfırı ise z_0

$$\Phi(z) = [\varphi(z)]^p \quad (p \in N)$$

fonksiyonunun m.p. dereceden sıfırıdır.

10. $\varphi(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik ve $\varphi(z_0) = 0$ ise, z_0 'ın öyle komşuluğu vardır ki, bu komşulukta $\varphi(z_0) = 0$ yada z_0 'ın öyle komşuluğu vardır ki, $\varphi(z)$ 'nin bu komşulukta z_0 dışında sıfırı yoktur.

1.3. Süreklilik Modülü. Hölder Koşulunu Sağlayan Fonksiyonlar Sınıfı

1.3.1. Süreklilik Modülü ve Özellikleri

$\varphi(t)$, $(\varphi : X \to Y,\ X \subset R(X \subset \mathbb{C}),\ Y \subset R(Y \subset \mathbb{C})\ t \in X$ reel veya kompleks bir fonksiyon olsun. Matematik Analizden bilindiği gibi $\varphi(t)$ fonksiyonu X üzerinde sürekliliği dediğimizde $t_1, t_2 \in X$ için $|t_1 - t_2|$'nin çok küçük değerine $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|$ farkının çok küçük değerinin karşılık gelmesi düşünülür. Yani, bir fonksiyon sürekli ise değişken artımı ve fonksiyon artımı aynı zamanda sıfıra gider.

Fakat, bir fonksiyonun sürekliliği incelenirken fonksiyon artımının değişken artımına rağmen hangi dereceden küçüklüğü söz konusu değildir. Bu küçüklük derecesi herhangi olabilir. Ancak, fonksiyonların bir çok özellikleri, örneğin, fonksiyonların seriye açılımı, bu serilerin yakınsaklık hızı ve başka bir çok özellikleri fonksiyonların süreklilik modülü denilen kavramın küçüklük derecesine sıkı bağlıdır.

Tanım 1.3.1: $\varphi : X \to Y$ fonksiyonu verilsin.

$$\omega(\varphi;\delta) = \sup\{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| : t_1, t_2 \in X, |t_1 - t_2| < \delta\},$$

$$\delta \in (0,\ell], \ell = \max\{|t_1 - t_2| : t_1, t_2 \in X\} = \operatorname{diam} X$$

şeklinde tanımlanan $\omega(\varphi;\delta)$, $\delta \in (0,\ell]$ fonksiyonuna $\varphi(t)$, $t \in X$ fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

Tanım 1.3.2: $\varphi : X \to Y$ reel veya kompleks fonksiyonu verilsin. $\varphi(t)$ fonksiyonu X üzerinde düzgün süreklidir demek ki, $\forall \varepsilon > 0\, için\ \exists \delta > 0$ öyle ki, $|t_1 - t_2| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan $\forall t_1, t_2 \in X$ için

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \varepsilon$$

dur.

Bir fonksiyonun süreklilik modülünün bazı özelliklerini verelim.

1. $\omega(\varphi;\delta)$ fonksiyonu tanımlı olduğu aralıkta azalmayan bir fonksiyondur.

2. $\varphi : X \to Y$ reel veya kompleks fonksiyonu verilsin. $\varphi(t)$ fonksiyonunun X üzerinde düzgün sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\lim_{\delta \to 0_+} \omega(\varphi;\delta) = 0$$

olmasıdır.

3. Her $\delta_1, \delta_2 > 0$ için

$$\omega(\varphi,\delta_1 + \delta_2) \le \omega(\varphi;\delta_1) + \omega(\varphi;\delta_2)$$

dir.

Bu özellikten aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç: Her $n \in N$ için

$$\omega(\varphi, n.\delta) \le n.\omega(\varphi;\delta)$$

dır.

4. Eğer $\varphi(t)$ X üzerinde düzgün sürekli ise $\omega(\varphi,\delta)$, $\delta \in (0,\ell)$ sürekli fonksiyondur.

Tanım 1.3.3: $[0,+\infty)$ aralığında sürekli, azalmayan $\forall\delta_1,\delta_2 \in (0,\ell]$ için

$$\omega(\delta_1 + \delta_2) \le \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$$

ve $\omega(0) = 0$ koşullarını sağlayan $\omega : [0,+\infty) \to R$ fonksiyonuna süreklilik modülü denir.

Bir fonksiyonun süreklilik modülünün yukarıda verilen özelliklerinden de görülür ki, düzgün sürekli bir fonksiyonun süreklilik modülü söylenen tanım anlamında da süreklilik modülüdür. Ayrıca, her bir süreklilik modülü bir düzgün sürekli fonksiyonun süreklilik modülüdür. Bununla ilgili aşağıdaki özelliği verebiliriz.

5. Eğer $\omega(\delta)$, $\delta \in [0,+\infty)$ bir süreklilik modülü ise

$$\omega(\omega;\delta) = \omega(\delta)$$

dır. Yani her süreklilik modülü kendi kendisinin süreklilik modülüdür.

6. Eğer, X sınırlı ve $\ell = diamX$ *ise* $\delta > \ell$ için

$$\omega(\omega;\delta) = \omega(\varphi;\ell)$$

dir.

Tanım 1.3.4: $\varphi : X \subset \Re \to Y$ fonksiyonu verilsin ve $t_0 \in X$ bir yığılma noktası olsun. Eğer,

$$\varphi(t_0+) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} \varphi(t) = \varphi(t_0)$$

ise $\varphi(t)$ fonksiyonu t_0' da sağdan süreklidir denir.

Bir fonksiyonun süreklilik modülü olması için yeterli koşul 7. ve 8. özelliklerle ifade edilir.

7. Eğer, $[0,+\infty)$ aralığında tanılı bir $\omega(\delta)$ fonksiyonu azalmayan, sıfırda sağdan sürekli, $\omega(0) = 0$ ve $\omega(\delta)/\delta$ artamayansa $\omega(\delta)$ süreklilik modülüdür.

Tanım 1.3.5.: $X \subset RxR$ olsun. Eğer, X kümesinin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası X kümesinin içinde kalıyorsa, X'e bir konveks küme denir.

Tanım 1.3.6: $\varphi : X \to Y$ verilsin ve X konveks bir küme olsun. Eğer, her $t_1, t_2 \in X$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için

$$\varphi[\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2] \leqslant \lambda\varphi(t_1) + (1-\lambda)\varphi(t_2)$$

$$(\varphi[\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2] \geqslant \lambda\varphi(t_1) + (1-\lambda)\varphi(t_2))$$

oluyorsa, $\varphi(t)$ fonksiyonu X üzerinde konvekstir (konkavdır) denir.

8. Eğer, $[0,+\infty)$ aralığında $\omega(\delta)$ fonksiyonu konkav, azalmayan, sıfırda sağdan sürekli ve $\omega(0) = 0$ ise $\omega(\delta)$ süreklilik modülüdür.

9. $\omega(\delta) = c.t^{\alpha}, c>, 0<\alpha \leqslant 1$ fonksiyonu konkav süreklilik modülüdür.

1.3.2. Hölder koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı

Tanım 1.3.7: $\varphi : X \to Y$ reel veya kompleks fonksiyon olsun. Eğer, herhangi $t_1, t_2 \in X$ ve $K > 0, \alpha > 0$ için

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq K|t_1 - t_2|^{\alpha}$$

oluyorsa $\varphi(t)$ fonksiyonu X üzerinde K sabiti ve α üstü ile Hölder koşulunu sağlar diyecek ve bunu $\varphi \in K\,H_\alpha(X)$ şeklinde belirteceğiz.

Uyarı : Süreklilik modülünün tanımından ve Tanım 1.3.7.'den görülür ki, eğer, $\varphi \in K\,H_\alpha(X)$ ise $\omega(\varphi:\delta) \le K.\delta^\alpha$' dır.

Uyarı 2: C(X), X üzerinde sürekli fonksiyonlar kümesi olsun.

$$KH_\alpha(X) \subset \mathcal{C}(X)$$

olduğu açıktır.

Tanım 1.3.8: $\varphi : X \to Y$ n.$(n \in N)$ mertebeden türevlenebilir olsun. Eğer, herhangi $t_1, t_2 \in X$ ve $K > 0, \alpha > 0$ için

$$\left|\varphi^{(n)}(t_1) - \varphi^{(n)}(t_2)\right| \le K.\left|t_1 - t_2\right|^\alpha$$

oluyorsa $\varphi(t)$ fonksiyonu X üzerinde $KH_\alpha^{(n)}(X)$ sınıfındandır diyeceğiz.

Uyarı 3: $C^{(n)}(X), n.(n \in N)$ mertebeden türevi X üzerinde sürekli fonksiyonlar sınıfı olsun.

$$KH_\alpha^{(n)}(X) \subset C^{(n)}(X)$$

olduğu açıktır.

Not 1: $\omega(\delta)$ bir süreklilik modülü olsun. $H_\omega(X)$ ile X' de sürekli ve süreklilik modülü

$$\omega(\varphi, \delta) \le \omega(\delta)$$

koşulunu sağlayan $\varphi(t)$ $t \in X$ fonksiyonları kümesini göstereceğiz.

Not 2: $H_\alpha(X)$ ile α $0 < \alpha \le 1$ üstü ve herhangi K sabiti ile bir Hölder koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfını göstereceğiz. Yani,

$$H_\alpha(X) = \bigcup_{K>0} KH_\alpha(X)$$

dir.

Uyarı 4: $\alpha > 1$ ise $H_\alpha(X)$ sınıfı X' de sabit fonksiyonlar kümesidir.

Hölder sınıfından olan fonksiyonların bazı özelliklerini verelim.

1. $\omega(\delta)$ bir süreklilik modülü, $\varphi(t)$ X' de sınırlı fonksiyon olsun. Eğer, $\delta \in [0,\delta_0]$, $\delta_0 > 0$ için

$$\omega(\varphi,\delta) \leq \omega(\delta)$$

ise $\varphi \in H_{K\omega}(X)$ olacak şekilde bir K>0 sayısı vardır.

2. Eğer, X kapalı ve sınırlı ise $0 < \beta < \alpha \leq 1$ için

$$H_\alpha(X) \subset H_\beta(X)$$

dir.

3. Eğer

$\varphi : X \rightarrow Y$ ve $f : X \rightarrow Y$ ve $\varphi \in H_{\alpha_1}(X)$, $f \in H_{\alpha_2}(X)$, $0 < \alpha_1$, $\alpha_2 \leq 1$ *ise* $\varphi + f$, $\varphi.f$, φ/f, ($f \neq 0$ için)

fonksiyonları $H_\alpha(X)$ sınıfındandır, burada $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ dir.

4. t=t(s), $s \in M$ fonksiyonu $H_\alpha(M)$, $0 < \alpha \leq 1$ ve $\varphi(t)$ fonksiyonu da t=t(s) fonksiyonunun değer kümesi üzerinde H_β, $0 < \beta \leq 1$ sınıfındansa, $\Phi(s) = \varphi[t(s)]$, $t \in M$ fonksiyonu M üzerinde $H_{\alpha.\beta}(M)$ sınıfındandır.

5. t=t(s) $s \in M$ (M-kapalı kümedir) fonksiyonu $H_\alpha(M)$, $0 < \alpha \leq 1$ sınıfından $\varphi(t)$ fonksiyonu da sürekli türevlenebilirse $\Phi(s) = \varphi(t(s))$ fonksiyonu M üzerinde $H_\alpha(M)$, $0 < \alpha \leq 1$ sınıfındandır.

6. t ve t_0 noktaları bir $\gamma \subset \mathbb{C}$ eğrisi üzerinde sırasıyla değişken ve kaydolunmuş noktalarsa,

$$\varphi(t) = |t - t_0|^\alpha, \ 0 < \alpha \leq 1$$

fonksiyonu γ üzerinde $H_\alpha(\gamma)$ sınıfındandır.

7. $\varphi \in H_{\alpha}(\gamma),\ 0<\alpha\leq 1;\ t,\gamma$ üzerinde değişken ve $t_0 \in \gamma$ kaydolunmuş noktalar olsun. Bu taktirde, $0<\beta<\alpha\leq 1$ olmak üzere

$$\Phi(t)=\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{|t-t_0|^{\beta}}$$

fonksiyonu γ eğrisi üzerinde $H_{\alpha-\beta}(\gamma)$ sınıfındandır.

1.4. Cauchy İntegral Teoremi. Cauchy İntegral Formülü ve Cauchy İntegrali

1.4.1. Cauchy İntegral Teoremi

Analitik fonksiyonların önemli ve geniş uygulamalı özelliklerinden biri Cauchy İntegral Teoremi ve Cauchy İntegral Formülü ile ifade edilen özelliğidir. Biz bu kesimde Cauchy İntegral Teoremi, Cauchy İntegral Formülü ve onlardan çıkan bazı sonuçlara değineceğiz.

Teorem 1.4.1. (Sürekli Diferansiyellenebilir Fonksiyonlar İçin Cauchy Teoremi): $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ kompleks fonksiyonu basit irtibatlı bir $D\subset\mathbb{C}$ bölgesinde diferansiyellenebilir ve türevi D üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde $\varphi(z)$ fonksiyonunun D bölgesinden olan her bir kapalı γ eğrisi üzere integrali sıfırdır.

Teorem 1.4.2. (Cauchy İntegral Teoreminin Genel Hali): $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ kompleks fonksiyonu sınırlı basit irtibatlı bir $D\subset\mathbb{C}$ bölgesinde analitik olsun. Bu taktirde γ_1 ve γ_2 D bölgesinde başlangıç ve sonları aynı olan doğrultulabilir eğrilerse,

$$\int_{\gamma_1}\varphi(z)dz=\int_{\gamma_2}\varphi(z)dz$$

dir.

Sonuç 1: $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ kompleks fonksiyonu basit irtibatlı bir $D\subset\mathbb{C}$ bölgesinde analitik ve γ, D' de kapalı bir eğri ise

$$\int_{\gamma}\varphi(z)dz=0$$

dır.

Sonuç 2: $D\subset\mathbb{C}$ basit irtibatlı bir bölge ve ∂D, D' nin sınırı olsun. Eğer; $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ fonksiyonu $\overline{D}=D\cup\partial D$ üzerinde analitikse, yani $\varphi\in A(\overline{D})$ ise

$$\int_{\partial D}\varphi(z)dz=0$$

dır.

Uyarı 1: $D=\{z\in\mathbb{C}:0<|z|\le 2\}$, $\varphi:D\to\mathbb{C}$, $\varphi(z)=\dfrac{1}{z}$ olsun. $\varphi\in A(\overline{D})$, $\overline{D}=D\cup\partial D$,

$$\partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$$

fakat

$$\int_{\partial D} \varphi(z)dz = \int_{|z|=2} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{2ie^{is}}{2e^{is}} ds = 2\pi i \neq 0$$

dır.

Bu örnekten de görüldüğü gibi Cauchy İntegral Teoreminde D bölgesinin basit irtibatlı olması gereklidir. Ele alınan örnekte

$$\int_{\partial D} \varphi(z)dz \neq 0$$

olmasının nedeni $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\}$ bölgesinin basit irtibatlı olmayışıdır.

Sonuç 3. Eğer, $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu basit irtibatlı bir bölge üzerinde analitikse,

$$\int_a^b \varphi(z)\mathrm{dz}$$

integrali a'yı b ile bu bölge içinde birleştiren yoldan bağımsızdır.

1.4.2. Cauchy İntegral Formülü

Teorem 1.4.3 (Cauchy İntegral Formülü): $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu basit irtibatlı $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik ve γ, D içinde pozitif yönlü basit kapalı eğri olsun. Bu taktirde γ'nın sınırladığı bölgeden olan herhangi z noktası için

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

formülü geçerlidir.

Sonuç 4: $D \subset \mathbb{C}$ basit irtibatlı sınırlı, sınırı ∂D düzgün kapalı eğri olan bölge ve $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu D üzerinde analitik ve $\overline{\mathrm{D}} = \mathrm{D} \cup \partial\mathrm{D}$' de sürekli ise, $\forall \mathrm{z} \in \mathrm{D}$ için

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

olur.

Uyarı 2: Analitik bir fonksiyonun analitiklik bölgesi içindeki değeri bölgenin sınırındaki değeri ile ifade edilebilir.

Sonuç 5: Sonuç 4' ün bütün şartları sağlansın. Bu taktirde

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{\varphi(t)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases}\varphi(z), & z \in D \text{ ise,}\\ 0, & z \notin \overline{D} \text{ ise,}\end{cases}$$

olur.

Sonuç 6 (Ortalama Değer Teoremi):

$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu

$$K = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

dairesinde analitik ve

$$\overline{K} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le r\}$$

kapalı dairesinde sürekli ise

$$\varphi(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(z_0 + re^{is})ds$$

dir.

Sonuç 7 (Cauchy Türev Formülü):

$D \subset \mathbb{C}$ basit ve sınırı ∂D düzgün kapalı eğri olan bölge ve $\varphi \in A(D) \cap C(\overline{D})$ ise $\forall z \in D$ için

$$\varphi^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{\varphi(\tau)}{(\tau - z)^{n+1}}d\tau$$

olur.

Tanım 1.4.4 (Cauchy İntegrali): $\gamma, \mathbb{C}$ kompleks düzlemde herhangi kapalı eğri olsun. (Şekil 1.4.1) $\varphi \in A(\overline{\gamma}^{+})$, $\overline{\gamma}^{+} = \gamma \cup \gamma^{+}$ fonksiyonu için

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau$$

integraline Cauchy İntegrali denir.

Şekil 1.4.1

Tanım 1.4.5: $\gamma, \mathbb{C}$ kompleks düzlemde düzgün kapalı veya açık bir eğri, $\varphi(\tau), \tau \in \gamma$ γ üzerinde tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde, Cauchy İntegraline benzer olarak

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau$$

integraline Cauchy Tipli İntegral, $\varphi(\tau)$ fonksiyonuna bu integralin yoğunluğu $\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\tau - z}$ veya $\frac{1}{\tau - z}$ fonksiyonuna da bu integralin çekirdeği (Cauchy Çekirdeği) diyeceğiz.

Tanımından da görüldüğü gibi Cauchy Tipli İntegral γ dışında bütün kompleks düzlemde ($\gamma^{+} \cup \gamma^{-}$' de) analitik fonksiyondur.

γ kapalı düzgün eğri ise $\Phi(z)$ Cauchy tipli İntegrali iki analitik fonksiyon gibi düşünülebilir. Bunlardan birisi γ^+ bölgesinde analitik

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau, \quad z \in \gamma^+,$$

diğeri de γ^- bölgesinde analitik

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau, \quad z \in \gamma^-,$$

fonksiyonlarıdır.

Bundan sonra hep γ' yı kapalı düzgün eğri ve $\varphi \in C(\gamma)$ için

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi^+(z), & z \in \gamma^+ \text{ ise,} \\ \Phi^-(z), & z \in \gamma^- \text{ ise,} \end{cases}$$

kabul edeceğiz.

Önerme 1.4.6: γ kapalı düzgün eğri, $\varphi \in C(\gamma)$ ise

$$\Phi^-(\infty) = 0$$

dır.

Cauchy Tipli İntegralin tanımından görüldüğü gibi eğer, γ kapalı düzgün eğri ve $\varphi \in A(\gamma^+) \cap C(\overline{\gamma}^+)$ ise

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} \varphi(z), & z \in \gamma^+ \text{ ise,} \\ 0\ , & z \in \gamma^- \text{ ise} \end{cases} \tag{1.4.1}$$

olur.

Benzer şekilde eğer, $\varphi \in A(\gamma^-) \cap C(\overline{\gamma}^-)$ ise

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} \varphi(\infty)\ , & z \in \gamma^+ \text{ ise,} \\ -\varphi(z) + \varphi(\infty), & z \in \gamma^- \text{ ise} \end{cases} \tag{1.4.2}$$

olur.

Örnek: $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ ve $\varphi(\tau) = \dfrac{4}{\tau^2 - 4\tau}$ olmak üzere

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau$$

Cauchy Tipli İntegralini bulunuz.

Çözüm:

$$\varphi(\tau) = \frac{4}{\tau^2 - 4\tau} = \frac{1}{\tau - 4} - \frac{1}{\tau}$$

ve

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{1}{\tau - 4}\frac{d\tau}{\tau - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{\tau - z}$$

ve $\dfrac{1}{\tau - 4}$ fonksiyonu $\gamma^+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$'de $\dfrac{1}{\tau}$ fonksiyonu da $\gamma^- = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$' de analitik ve sonsuzlukta değeri sıfır olduğundan (1.4.1) ve (1.4.2) formüllerinden

$$\Phi(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z - 4}, & z \in \gamma^+ \text{ ise,} \\ \dfrac{1}{z}, & z \in \gamma^- \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

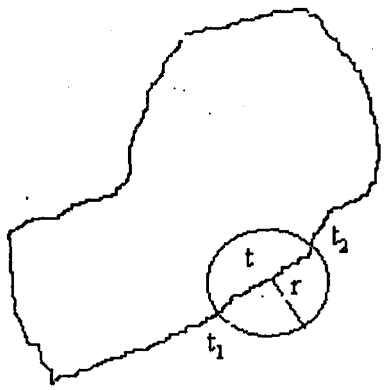
Şimdi γ kapalı düzgün eğri ve $\varphi \in C(\gamma)$ olsun.

$$\frac{1}{\pi . i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau, \quad t \in \gamma$$

integralini ele alalım. Merkezi $t \in \gamma$ noktasında (Şekil. 1.4.2) yarıçapı r ve γ eğrisini $t_1, t_2 \in \gamma$ noktalarında kesen bir çember çizelim. r yarıçapını çok küçük almakla bu çemberin eğri ile t_1 ve t_2 noktalarından başka noktalarda kesişmeyeceğini kabul edebiliriz.

γ eğrisinin çemberle kesilen kısmını ℓ ile gösterelim.

$$\frac{1}{\pi . i} \int_{\gamma - \ell} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}$$



Şekil 1.4.2

İntegraline bakalım.

Tanım 1.4.7: Eğer, sonlu

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma - \ell} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

limiti varsa, bu limitin değerine

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in \gamma$$

integralinin Cauchy esas değeri (principal value) diyeceğiz ve

$$p.v. \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma - \ell} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

veya

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma - \ell} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

şeklinde göstereceğiz.

$$S\varphi(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \qquad t \in \gamma$$

integraline de singüler integral diyeceğiz.

Teorem 1.4.8 (Gakhov, 1977): Eğer, $\varphi \in H_\alpha(\gamma)$, $0<\alpha<1$ *ise*, $S\varphi(t)$ singüler integrali mevcuttur ve $S\varphi(t) \in H_\alpha(\gamma)$ olup, düzgün γ eğrisi için

$$S\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau - t}d\tau + \frac{\varphi(t)}{\pi i}\left[\ell n\frac{b-t}{\alpha - t} + \pi i\right]$$

γ açık eğri ise,

$$S\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau - t}d\tau + \varphi(t)$$

γ kapalı eğri ise.

Ayrıca, (Gakhov, 1977) $H_\alpha(\gamma)$, $0<\alpha\le 1$ kümesi

$$\|\varphi\|_\alpha = \|\varphi\|_\infty + \sup\left\{\frac{|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|}{|t_1-t_2|^\alpha},\ t_1,t_2 \in \gamma\right\}$$

$$\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(t)| : t \in \gamma\}$$

normu ile bir Banach uzayıdır ve

$$S\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau, \quad t \in \gamma$$

singüler integrali (operatörü) $H_\alpha(\gamma)$ ' dan $H_\alpha(\gamma)$ ' ya sınırlı lineer operatördür.

1.5. Konform Dönüşümler

Bir w=f(z) fonksiyonunun bir z_0 noktasında sürekli olmasının geometrik anlamı oldukça açıktır. Çünkü w_0=f(z_0) denirse, f' nin sürekliliği gereği, z_0' ın yeterince küçük bir komşuluğunun tüm noktaların resimleri w_0' ın belli bir ε komşuluğuna düşer. Üstelik, süreklilik bağlantılığı da koruduğundan, bu söz konusu komşuluğun resmi w_0 noktasını bulunduran bağlantılı bir küme olur. ancak tüm bunlar, bize w_0' ın bir komşuluğunun tamamen örtülüp örtülmediğini veya bir defadan fazla örtülüp örtülmediğini belirtmez. Ortaya çıkan bu soruların cevabını, ancak f' nin analitik ve bire-bir olması koşulu ile verebiliriz

Teorem 1.5.1: w=f(z) fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ ise, z_0' nin belli bir komşuluğu, w_0' ın belli bir komşuluğunu tam bir defa örter.

w=f(z) fonksiyonu z_0'nın komşuluğunda bire-bir olacağından teoremin ispatı açıktır.

Önerme 1.5.2: Eğer $f : A \to \mathbb{C}$ fonksiyonu analitik ve bütün $z \in A$ noktaları için $f'(z_0) \neq 0$ ise f, A' daki açık kümeleri açık kümelere resmeder.

İspat: U, A içinde bulunan açık bir küme olsun ve f(U) içinde bir w_0=f(z_0) noktası alalım. Varsayalım gereği $f'(z_0) \neq 0$ olduğundan z_0' ın öyle bir açık V ve w_0' ın da W açık komşuluğu vardır ki, $f : V \to W$ fonksiyonu öncelikle süreklidir ve f^{-1}analitiktir. f^{-1} analitik olduğuna göre öncelikle süreklidir. Bu nedenle de, $U \cap V$ açık olduğundan, $(f^{-1})^{-1}$ $(U \cap V)$ kümesi de açıktır ve üstelik f, V' den W' ye bire-bir üzerine olduğundan $w_0 \in (f^{-1})^{-1}(U \cap V) = f(U) \cap W \subset f(U)$ olur. yani f(U) açık bir kümedir.

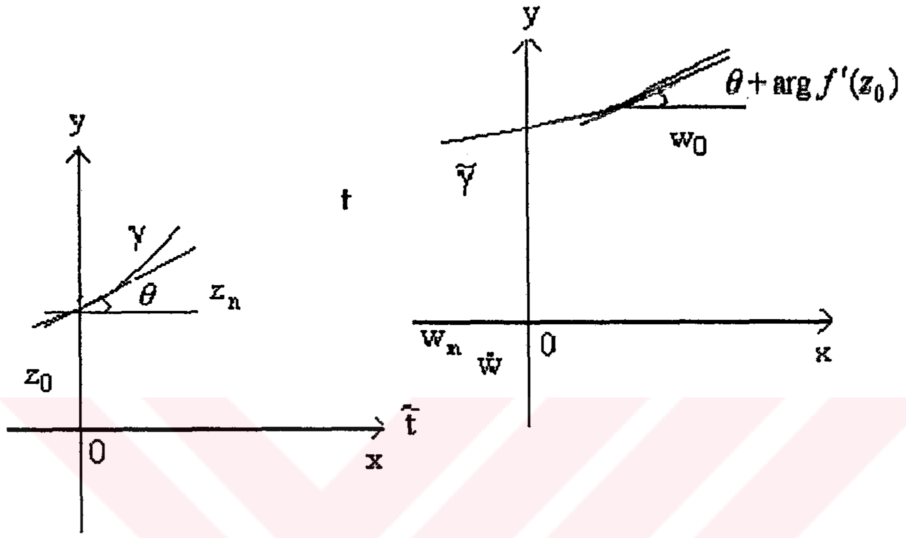
Teorem 1.5.3: w=f(z) fonksiyonu bir B bölgesinde bire-bir ve analitik ise B' nin f altındaki resmi f(B)' yi bir defa örter ve f(B) bir bölgedir.

İspat: B' nin f altındaki resminin f(B)'yi tam bir defa örttüğü, f' nin birebirliğinden açıktır. f(B)' nin açık ve bağlantılı olduğu ise önerme 1.5.2. ve f' nin sürekliliğinden görülür.

Önerme 1.5.4: w=f(z) fonksiyonu z_0' de analitik, $f'(z_0) \neq 0$ olsun. z_0' dan geçen bir γ düzgün eğrisinin z_0'daki teğeti x-ekseni ile θ açısı yapıyorsa, $\tilde{\gamma}$ resim eğrisinin de w_0' da teğeti vardır ve teğetinin u-ekseni ile yaptığı açı

$$\phi = \theta + \arg f'(z_0) \text{' dır.}$$

İspat: γ üzerinde $w_n \neq w_0$ ve fakat $w_n \to w_0$ olacak şekilde bir (w_n) noktalar dizisi alalım. $w_n = f(z_n)$ denirse γ' da $z_n \neq z_0$ fakat, $z_n \to z_0$ olacak biçimde z_n noktalar dizisi vardır. O halde



Şekil 1.5.1

olur. buradan da θ $\quad \theta + \arg f'(z_0)$

$$\arg(w_0 - w_0) = \arg(z_0 - z_0) + \arg \frac{F(z_0) - f(z_0)}{z_0 - z_0} (\operatorname{mod} 2\pi)$$

bulunur.

Dikkat edilirse $n \to \infty$ için $\arg(z_0 - z_0)$, t'nin x-ekseniyle yaptığı açıdır. Yani,

$$\theta = \lim_{n \to \infty} \arg(z_n - z_0)$$

dir. Böylece

$$\lim_{n \to \infty} \arg(w_0 - w_0) = \theta + \arg f'(z_0)(\operatorname{mod} 2\pi)$$

bulunur. Bu son ifade bizi $\tilde{t}$'nıı $\tilde{\gamma}$'ya w_0' da bir teğet olduğunu ve bunun u-ekseni ile yaptığı açının da

$$\phi = \theta + \arg f'(z_0)(\bmod 2\pi)$$

olduğunu gösterir.

Önerme 1.5.5: f fonksiyonu z_0' da analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ olsun. z_0' dan geçen ve aralarında α açısı oluşturan γ_1 ve γ_2 düzgün eğrilerin f altındaki γ_1 ve γ_2 resimleri de, w_0' da α açısı oluştururlar.

İspat: Önerme 1.5.4 gereği $\phi_1 = \theta_1 + \arg f'(z_0)$ ve $\phi_2 = \theta_2 + \arg f'(z_0)$ olacağından

$$\phi_2 - \phi_1 = \theta_2 - \theta_1 = \alpha$$

bulunur.

Tanım 1.5.6: $B, \mathbb{C}$' de bir bölge olmak üzere $f : B \to \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer, bir $z_0 \in B$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrileri de w_0' da aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorlarsa f fonksiyonuna z_0' da bir konform dönüşümdür denir. Eğer, her $z_0 \in B$ noktasında f konform ise f,B' de konformdur denir.

Önerme 1.5.7: f, bir z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ ise f, z_0' da bir konform dönüşümdür.

İspat: Önerme 1.5.5 ve Tanım 1.5.6' dan görülüyor.

Uyarı: Eğer, $f'(z_0) = 0$ ise dönüşümün konform olamayacağını aşağıdaki önermeden görebiliriz.

Önerme 1.5.8: w=f(z) fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik ve bu noktada f(z)-f(z_0)' ın k $(k \geq 2)$. mertebeden sıfırı varsa, z_0' dan geçen ve aralarında α açısı yapan iki düzgün eğrinin resimleri w_0'da $k\alpha$ açısı yaparlar. Dolayısıyla da z_0'ın bir komşuluğu w_0'ın bir komşuluğunu k defa örter.

İspat: $f(z) = f(z_0) + a_k(z-z_0)^k + a_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \ldots, k \geq 2, a_k \neq 0$ yazılabileceği açıktır. Buradan

$$w - w_0 = f(z) - f(z_0) = (z-z_0)^k g(z)$$

yazabiliriz. g(z) fonksiyonu z_0' da analitik ve g(z_0)$\neq 0$' dır. Böylece,

$$\arg(w - w_0) = \arg(f(z) - f(z_0)) = k.\arg(z - z_0) + \arg g(z)$$

elde edilir. Şimdi $z \to z_0$ için iki yanın limiti alınır ve de ϕ ile θ Önerme 1.5.4' deki anlamda simgeler olarak düşünülürse,

$$\phi = k\theta + \arg g(z_0)$$

bulunur. Ancak, $\arg g(z_0)$, θ' dan bağımsız olduğundan Önerme 1.5.5 gereği

$$\phi_2 - \phi_1 = k(\theta_2 - \theta_1) = k\alpha$$

sonucuna varılır.

Örnek: $w = f(z) = z^3$ fonksiyonu altında $D_z = D_z(0,1)$ diskinin resmi, $D_w = D_w(0,1)$ diskini üç defa örter.

Uyarı 1.5.9: Açıyı büyüklük ve yön bakımından koruyan dönüşümlere bazen direkt konform dönüşümler de denir. Açının büyüklüğünü koruyan, fakat yönünü değiştiren dönüşümlere de ters (indirekt) konform dönüşümler denir. Dikkat edilirse $\phi_2 - \phi_1 = \theta_2 - \theta_1$ ise, açının yönü korunmuştur. Eğer, $\phi_2 - \phi_1 = \theta_1 - \theta_2$ ise açının yönü değişmiştir. Örneğin f(z)=z dönüşümü herhangi bir noktada direkt konform, fakat $h(z) = \bar{z}$ ise ters konform dönüşüm yapar.

1.6. Faber Polinomları

$D \subset \mathbb{C}$ kompleks düzlemde tümleyeni basit irtibatlı bölge olan kapalı bir bölge olsun. $z = \psi(w)$ fonksiyonu $|w| > g$ bölgesini $D^c = \mathbb{C} \setminus D$ bölgesine bire-bir ve konform dönüştüren fonksiyon olsun. $\psi(\infty) = \infty$ ise, sonsuzluk civarında

$$z = \psi(w) = w + \beta_0 + \beta_1 w^{-1} + \ldots = w + M\left(\frac{1}{w}\right)$$

şeklinde yazılabilir (Simirnof and Lebedyev, 1964). Burada, $M\left(\frac{1}{w}\right)$ Maclaurin serisi $|t| < \frac{1}{g}$ için yakınsaktır. $w = \Phi(z)$, $z = \psi(w)$ fonksiyonunun ters fonksiyonu olsun. $z = \infty$ noktası civarında

$$\Phi(z) = z + \alpha_0 + \alpha_0 + \alpha_1 . z^{-1} + \alpha_2 . z^{-2} + \ldots$$

olacaktır.

Cauchy integralindeki

$$\frac{d\xi}{\xi - z}$$

ifadesini ele alalım. ξ kompleks düzlemde integralleme değişkenidir. $\xi = \psi(t)$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{\psi'(t)dt}{\psi(t) - z}$$

buluruz. Buradan, $K(z,t) = \dfrac{t.\psi'(t)dt}{\psi(t) - z}$ olmak üzere

$$\frac{d\xi}{\xi - z} = K(z,t)\frac{dt}{t}$$

buluruz, burada t ilerideki hesaplamaların kolaylığı için yazılmıştır.

Görüldüğü gibi, K(z,t) t kompleks değişkeninin fonksiyonu olarak $|t| > g$ için tanımlanmıştır.

$$K(z,t)=\frac{t.\left[1-\frac{1}{t^2}M'\left(\frac{1}{t}\right)\right]}{-z+\left[t+M\left(\frac{1}{t}\right)\right]}=\frac{1-\frac{1}{t^2}M'\left(\frac{1}{t}\right)}{1-\frac{z}{t}+\frac{1}{t}M\left(\frac{1}{t}\right)} \qquad (1.6.1)$$

ve

$$K(z,t)=\frac{t.\psi'(t)}{\psi(t)-z}$$

ifadesinden K(z,t)' nin herbir z için $t=\infty$' da analitik, $K(z,\infty)=1$ ve $\psi(t)=z$ şartını sağlayan t' ler için ayrık aykırılık vardır. Buna göre $z\in\overline{D}$ ise K(z,t) fonksiyonunun ayrık aykırılık noktası yoktur ve $|t|>g$ için K(z,t) analitiktir. Eğer, $z\in D^c$ ise $\psi(t)$ bire bir örten olduğundan, $|t|>g$ için $\psi(\tau)=z$ $(\tau=\Phi(z))$ koşulunu sağlayan tek bir $t=\tau$ noktası vardır, Buna göre, $r=|t|>g$ için $|t|>r$' de K(z,t), $z\in L_r$ analitiktir, burada L_r $|w|=r$ $r>g$ çemberinin $z=\psi(w)$ fonksiyonu altında görüntüsüdür. $\psi(\tau)=z$ koşulunu sağlayan $\tau=t$ noktası K(z,t) fonksiyonu için birinci mertebeden ayrık aykırılık noktasıdır. Keyfi büyük $|t|$ için (1,6,1)'den

$$K(z,t)=\left[1-\frac{1}{t^2}M'\left(\frac{1}{t}\right)\right]\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{z}{t}-\frac{1}{t}M\left(\frac{1}{t}\right)\right]^k$$

veya

$$K(z,t)=\frac{t.\psi'(t)}{\psi(t)-z}=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(z)\frac{1}{t^k} \qquad (1.6.2)$$

buluruz. Burada $P_k(z)$ z^k derecesinin katsayısı bir olan k. dereceli bir polinomdur. (1.6.2) serisi her bir $z\in\overline{D}$ için $|t|>g$ bölgesinde yakınsaktır.

(1.6.2)' deki $P_k(z)$, $k=0,1,\ldots$ polinomlarına $\overline{D}$ bölgesine göre Faber polinomları,

$$\frac{t.\psi'(t)}{\psi(t)-z}$$

fonksiyonuna da Faber polinomlarını üreten fonksiyon denir.

(1.6.2)' den

$$P_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r_1}\frac{t\psi'(t)}{\psi(t)-z}t^{k-1}dt,\ z\in\overline{D}_r,\ \ g\leq r<r_1<\infty$$

bulunur. Burada, $\overline{D}_r$ sınırı L_r olan sınırlı bölgedir. Sonuncu integralde $t=\Phi(\xi)$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$P_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_r}\frac{[\Phi(\xi)]^k}{\xi-z}d\xi,\ z\in\overline{D}_r,\ \ g\leq r<r_1<\infty$$

bulunur. İntegrant fonksiyonun D^c' de ($z=\infty$ dışında), hiçbir ayrık aykırılık noktası bulunmadığından sonuncu integralde L_{r_1} yerine merkezi orijinde ve yarıçapı çok büyük olan bir C_R çemberi alınabilir. $\xi=\infty$ noktası civarında

$$[\Phi(\xi)]^k=\xi^k+C_1^{(k)}.\xi^{k-1}+...+C_k^{(k)}+\frac{\alpha_1^{(k)}}{\xi}+\frac{\alpha_2^{(k)}}{\xi}+...(1.6.3)$$

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi}+\frac{z}{\xi^2}+...+\frac{z^k}{\xi^{k+1}}+...$$

açılımlarından yararlanırsak,

$$P_k(z)=z^k+C_1^{(k)}.z^{k-1}+...+C_k^{(k)}$$

buluruz.

Böylece (1.6.3)' den görüldüğü gibi) $P_k(z)$ Faber Polinomları $[\Phi(z)]^k$ fonksiyonunun $z=\infty$ noktası civarında Laurent serisine açılımındaki düzgün kısmidir. Dolayısıyla,

$$P_k(z)=[\Phi(z)]^k+\omega_k(z)\qquad\qquad(1.6.4)$$

burada $\omega_k(z)$, D^c' de analitik ve $\omega_k(\infty)=0$ şartını sağlayan fonksiyondur.

($\omega_k(z)=\ [\frac{\alpha_1^{(k)}}{\xi}+\frac{\alpha_2^{(k)}}{\xi^2}+...]$)

(1.6.4) eşitliği $P_k(z)$ Faber polinomlarının tanımı gibi de kabul edilebilir.

2. BÖLÜM

ANALİTİK FONKSİYONLARA POLİNOMLAR YARDIMIYLA DÜZGÜN YAKLAŞIMLAR

2.1. Harmonik Fonksiyonların Sınır Değeri Üzerine

Dairede analitik fonksiyonlar için bilinen aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem (Zygmund, 1968, Natanson, 1954) (İ.İ. Privalov): Eğer,

$$f(z) = u(r,\theta) + i.v(r,\theta)$$

fonksiyonu $|z| < 1$ dairesinde analitik, $u(\tau,\theta)$ fonksiyonu da $|z| \leq 1$ kapalı dairesinde süreklidir ve $|z| = 1$ üzerinde aynı $\alpha, 0 < \alpha < 1$, üssü ile Hölder koşulunu sağlıyorsa, $v(r,\theta)$ fonksiyonu da $|z| \leq 1$ kapalı dairesinde süreklidir ve $|z| = 1$ üzerinde aynı α üssü ile Hölder koşulunu sağlar.

$u(r,\theta)$ harmonik fonksiyonunun daha az şartı sağlaması ile yukarıdaki teoremin benzeri ifade ve ispat edilir.

Teorem 2.1.1. Eğer,

$$f(z) = u(r,\theta) + i.v(r,\theta)$$

fonksiyonu $|z| < 1$ dairesinde analitik, $u(r,\theta)$ fonksiyonu $|z| < 1$ dairesinde analitik, $u(r,\theta)$ $|z| \leq 1$ kapalı dairesinde sürekli ve $u(r,\theta)$ fonksiyonunun sınır değeri olan $u(\theta)$ fonksiyonunun $\omega(u,t)$ süreklilik modülü

$$\int_0^c \frac{\omega(u,t)}{t} |\ell nt| dt < \infty \qquad (2.1.1)$$

şartını sağlarsa, $v(r,\theta)$ fonksiyonu $|z| \leq 1$ kapalı dairesinde süreklidir ve $v(r,\theta)$ fonksiyonunun sınır değeri olan $v(\theta)$ fonksiyonunun $\omega(u,h)$ süreklilik modülü

$$\int_{0}^{c}\frac{\omega(u,t)}{t}dt < \infty \qquad (2.1.2)$$

şartını sağlar.

İspat: Bilindiği gibi (Natanson, 1954) $v(\theta)$ sınır değeri, $u(\theta)$ sınır değeri yardımı ile

$$v(\theta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{u(\theta+t)-u(\theta)}{\tan t/2}dt \qquad (2.1.3)$$

şeklinde ifade edilir.

(2.1.3) formülünden

$$v(\theta+h) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{u(\theta+h+t)-u(\theta+h)}{\tan t/2}dt$$

($t = \tau - h$ değişken değiştirmesi yapılırsa)

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h}\frac{u(\theta+t) \quad u(\theta+h)}{\tan\frac{t-h}{2}}dt,$$

(İntegral fonksiyon 2π periyodlu olduğundan)

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{u(\theta+t)-u(\theta+h)}{\tan\frac{t-h}{2}}dt,$$

yani

$$v(\theta+h) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{u(\theta+t)-u(\theta+h)}{\tan\frac{t-h}{2}}dt \qquad (2.1.4)$$

olur.

Sırası ile

$$I_1 = -\frac{1}{2\pi}\int_{-2h}^{2h}\frac{u(\theta+t)-u(\theta)}{\tan t/2}dt,$$

$$I_2 = -\frac{1}{2\pi}\int_{-2h}^{2h}\frac{u(\theta+t)-u(\theta+h)}{\tan\frac{t-h}{2}}dt, 0<h<\frac{\pi}{2}$$

gösterelim. O halde,

$$|I_1| = \left|-\frac{1}{2\pi}\int_{-2h}^{2h}\frac{u(\theta+t)-u(\theta)}{\tan t/2}dt\right| =$$

$$= \left|-\frac{1}{2\pi}\int_{-2h}^{0}\frac{u(\theta+t)-u(\theta)}{\tan t/2}dt -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2h}\frac{u(\theta+t)-u(\theta)}{\tan t/2}dt\right| \text{(1. integralde } t=-\tau \text{ değişken}$$

değiştirmesi yapılırsa)

$$= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2h}\frac{u(\theta-\tau)-u(\theta)}{\tan\frac{\tau}{2}}d\tau - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2h}\frac{u(\theta+t)+u(\theta)}{\tan\frac{t}{2}}dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2h}\frac{\omega(u,\tau)}{2\tan\frac{\tau}{2}}dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2h}\frac{\omega(u,t)}{2\tan\frac{t}{2}}dt$$

($\tan x \geq x$ olduğundan) $\leqslant \frac{2}{\pi}\int_{0}^{2h}\frac{\omega(u,t)}{t}dt$

olur.

Benzer şekilde,

$$|I_2| = \left| -\frac{1}{2\pi} \int_{-2h}^{2h} \frac{u(\theta+t)-u(\theta+h)}{\tan\frac{t-h}{2}} dt \right|$$

$$= \left| -\frac{1}{2\pi} \int_{-2h}^{0} \frac{u(\theta+t)-u(\theta+h)}{\tan\frac{t-h}{2}} dt - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2h} \frac{u(\theta+t)-u(\theta+h)}{\tan\frac{t-h}{2}} dt \right|$$ (1. integralde $t=-\tau$ değişken

değiştirilirse)

$$= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2h} \frac{u(\theta - t) - (\theta+h)}{\tan\frac{\tau+h}{2}} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2h} \frac{u(\theta - t) - u(\theta+h)}{\tan\frac{t-h}{2}} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2h} \frac{\omega(u, t+h)}{\tan\frac{t+h}{2}} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2h} \frac{\omega(u, |t-h|)}{\left|\tan\frac{t-h}{2}\right|} dt$$

($\tan x \geq x$ olduğundan)

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2h} \frac{\omega(u, t+h)}{t+h} dt + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2h} \frac{\omega(u, |t-h|)}{|t-h|} dt$$

(1. integralde $t=\tau-h$ değişken değiştirmesi yaparsak)

$$= \frac{1}{\pi}\int_{h}^{3h}\frac{\omega(u,t)}{t}dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{h}\frac{\omega(u,h-t)}{h-t}dt + \frac{1}{\pi}\int_{h}^{2h}\frac{\omega(u,t-h)}{t-h}dt$$

(2. integralde $t = h - \tau$ ve 3. integralde $t = h + \tau$ değişken değiştirmeleri yapılırsa)

$$= \frac{1}{\pi}\int_{h}^{3h}\frac{\omega(u,t)}{t}dt + \frac{2}{\pi}\int_{0}^{h}\frac{\omega(u,t)}{t}dt \leqslant \frac{2}{\pi}\int_{0}^{3h}\frac{\omega(u,t)}{t}dt,$$

yani,

$$|I_2| \leqslant \frac{2}{\pi}\int_{0}^{3h}\frac{\omega(u,t)}{t}dt$$

buluruz.

(2.1.2) eşitsizliğini ispatlamak istiyoruz. Bunun için $v(\theta+h)-v(\theta)$ farkını

$$v(\theta+h)-v(\theta) = -\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-2h}+\int_{2h}^{\pi}\right)\frac{u(\theta+t)-u(\theta+h)}{\tan\frac{t-h}{2}}dt +$$

$$+ I_2 + \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-2h}+\int_{2h}^{\pi}\right)\frac{u(\theta+t)-u(\theta)}{\tan t/2}dt - I_1 =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-2h}+\int_{2h}^{\pi}\right)\frac{u(\theta+t)-u(\theta)+u(\theta)-u(\theta+h)}{\tan\frac{t-h}{2}}dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-2h}+\int_{2h}^{\pi}\right)\frac{u(\theta+t)-u(\theta)}{\tan t/2}dt + I_2 - I_1 = \tilde{I} + I_2 - I_1 + I, \qquad (2.1.5)$$

burada

$$\widetilde{I} = -\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-2h} + \int_{2h}^{\pi}\right)[u(\theta+t) - u(\theta)][\cot\frac{t-h}{2} - \cot\frac{t}{2}]dt$$

$$I = \frac{1}{2\pi}[u(\theta+h) - u(\theta)]\left(\int_{-\pi}^{-2h} + \int_{2h}^{\pi}\right)\cot\frac{t-h}{2}dt$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca,

$$I = \frac{1}{2\pi}[u(\theta+h) - u(\theta)]\left(\int_{-\pi}^{-2h}\cot\frac{t-h}{2}dt + \int_{2h}^{\pi}\cot\frac{t-h}{2}dt\right)$$

(1. integralde $t = -\tau$ değişken değiştirmesi yapılırsa)

$$= \frac{1}{2\pi}[u(\theta+h) - u(\theta)]\left(\int_{-\pi}^{-2h}\cot\frac{t+h}{2}dt + \int_{2h}^{\pi}\cot\frac{t-h}{2}dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}[u(\theta+h) - u(\theta)]\int_{2h}^{-2h}\left[\cot\frac{t-h}{2} - \cot\frac{t+h}{2}\right]dt,$$

yani,

$$I = \frac{1}{2\pi}[u(\theta+h) - u(\theta)]\int_{2h}^{\pi}\left[\cot\frac{t-h}{2} - \cot\frac{t+h}{2}\right]dt,$$

olur.

$$\int_0^c \frac{|I_1|}{h}dh \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^c \frac{1}{h}\int_0^{2h}\frac{\omega(u,t)}{t}dt\ dh =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{2c}\frac{\omega(u,t)}{t}\left(\int_{t/2}^{c}\frac{dh}{h}\right)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{2c}\frac{\omega(u,t)}{t}\ell n\frac{2c}{t}dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{2c}\frac{\omega(u,t)}{t}\left|\ell n\frac{t}{2c}\right|dt$$ ($t = 2c.\tau$ değişken değiştirilirse)

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\omega(u,2ct)}{t}|\ell nt|dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2(2c+1)}{\pi}\int_0^c \frac{\omega(u,t)}{t}|\ell nt|dt$$

olduğundan, (2.1.1) eşitsizliğinden

$$\int_0^c \frac{|I_1|}{h}dh < \infty \qquad (2.1.6)$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$\int_0^c \frac{|I|}{h}dh < \infty \qquad (2.1.7)$$

olduğu ispatlanabilir.

$$\int_{2h}^{\pi}\left[\cot\frac{t-h}{2} - \cot\frac{t+h}{2}\right]dt = 2\ell n\left|\sin\frac{t-h}{2}\right|\Bigg|_{2h}^{\pi} - 2\ell n\left|\sin\frac{t+h}{2}\right|\Bigg|_{2h}^{\pi} = 2\ell n\left|\frac{\sin\frac{3h}{2}}{\sinh/2}\right| =$$

$$= 2\ell n\ |2.\cosh + 1|\quad 2\ell n3$$

olduğundan,

$$\int_0^c \frac{|I|}{h}dh \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^c \frac{u|(\theta+h) - u(\theta)|}{h}\ell n3dh \leq$$

$$\leqslant \frac{A_2\ell n3}{2\pi}\int_0^c h^{\alpha-1}dh = \frac{A\ell n3}{2\pi\pi}c^{\alpha} < \infty,$$

olur. Dolayısıyla,

$$\int_0^c \frac{|I|}{h}\,dh < \infty \qquad (2.1.8)$$

olur.

Benzer şekilde,

$$\int_0^c \frac{|\tilde{I}|}{h}\,dh \leqslant A_3 \int_0^c \int_{2h}^{\pi} \frac{\omega(u,t)}{t^2}\,dt\,dh$$

olduğu gösterilebilir.

$t = 2h\theta$ değişken değiştirmesi yapılırsa, sonuncu eşitsizlikten

$$\int_0^c \frac{|\tilde{I}|}{h}\,dh \leqslant A_3 \int_0^c \int_1^{\frac{\pi}{2h}} \frac{\omega(u,2h\theta)}{4h^2\theta^2}\,d\theta\,dh \leqslant$$

$$\leqslant A_3 \int_0^c \int_1^{\frac{\pi}{2h}} \frac{(2\theta+1)\omega(u,h)}{2h\theta^2}\,d\theta\,dh = \frac{A_3}{2}\int_0^c \frac{\omega(u,h)}{h} \int_1^{\frac{\pi}{2h}} \frac{2\theta+1}{\theta^2}\,d\theta$$

bulunur. $\forall\theta > 1$ için

$$\frac{2\theta+1}{\theta^2} < \frac{3}{\theta}$$

olduğundan,

$$\int_0^c \frac{|\tilde{I}|}{h}\,dh \leqslant \frac{3}{2} A_3 \int_1^c \frac{\omega(u,h)}{h}\,\ell n\frac{\pi}{2h}\,dh \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{2} A_3 \int_0^c \frac{\omega(u,h)}{h}\left|\ell n\frac{2h}{\pi}\right| dh$$

($h = \frac{\pi}{2}t$ değişken değiştirmesi yapılırsa)

$$= \frac{3}{2} A_3 \int_0^{\frac{\pi}{2}c} \frac{\omega(u, \frac{\pi}{2} h)}{h} |\ell nh| dh \leqslant \frac{3(\pi+2)}{4} A_3 \int_0^{\frac{\pi}{2}c} \frac{\omega(u,h)}{h} |\ell nh| dh,$$

olur. Dolayısıyla,

$$\int_0^c \frac{|\tilde{I}|}{h} dh \leqslant \frac{3(\pi+2)}{4} A_3 \int_0^{\frac{\pi}{2}c} \frac{\omega(u,h)}{h} |\ell nh| dh$$

buluruz. Buradan (2.1.1) eşitsizliği gereğince

$$\int_0^c \frac{|\tilde{I}|}{h} dh < \infty \qquad (2.1.9)$$

olur.

(2.1.5) eşitliğinden

$$\int_0^c \frac{|v(\theta+h)-v(\theta)|}{h} dh \le \int_0^c \frac{|\tilde{I}|}{h} dh + \int_0^c \frac{|I_2|}{h} dh + \int_0^c \frac{|\tilde{I}_1|}{h} dh + \int_0^c \frac{|I|}{h} dh$$

bulunur.

Buna göre, (2.1.6), (2.1.7), (2.1.8) ve (2.1.9)' dan

$$\int_0^c \frac{|V(\theta+h)-V(\theta)|}{h} dh < \infty$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten (2.1.2) açıktır.

Teorem 2.1.2 D kompleks düzlemde sınırı düzgün kapalı Jordan eğrisi olan bir bölge olsun. Ayrıca, D' nin sınırının teğet doğrularının reel eksenle oluşturduğu $\theta(s)$ açısı $\gamma = \partial D$ eğrisinin s yayının bir fonksiyonu gibi

$$\int_0^c \frac{\omega(\theta,t)}{t}|\ell nt|dt < \infty \qquad (2.1.10)$$

koşulunu sağlayan $\omega(\theta,t)$ süreklilik modülüne sahiptir.

Eğer, $z=\varphi(w)$ fonksiyonu $|w|<1$ dairesinde analitik ve bu daireyi D' ye konform (birebir) dönüştürürse, $\varphi'(w)$ türev fonksiyonu $|w|\le 1$ dairesinde süreklidir ve $|w|=1$ çemberi üzerinde

$$\int_0^c \frac{\omega(\varphi'(e^{i\theta}),t)}{t}dt < \infty \qquad (2.1.11)$$

koşulu sağlanır.

İspat: İspata geçmeden önce şunu belirtelim ki, bu teoremin benzeri Kellog (Goluzin, 1966) tarafından ispatlanmıştır. Fakat, Teorem 2.1.2' de γ'nın sağladığı şartlar Kellog' un verdiği teoremdeki şartlardan daha hafiftir. Öyle ki, Kellog'un teoreminde $\theta(s)$ fonksiyonunun $\alpha, 0<\alpha<1$ üssü ile Hölder sınıfından olması isteniyor.

Şimdi Teorem 2.1.2' nin ispatına geçelim. Teoremin hipotezinden

$$\arg\varphi'(w) = \theta(w) - \arg w - \frac{\pi}{2}, \ |w|=1$$

(Goluzin, 1966) ve ayrıca, $\forall p>0$ *için* $\varphi' \in Hp$ dir.

Buradan, $\theta' < \theta$ için

$$|s-s'| = |\varphi(e^{i\theta}) - \varphi(e^{i\theta'})| = \int_{\theta'}^{\theta}|\varphi'(e^{i\theta})|d\theta \le$$

$$\le \left(\int_{\theta'}^{\theta}|\varphi'(e^{i\theta})|^2 d\theta\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{\theta'}^{\theta}d\theta\right)^{\frac{1}{2}} \le A_4|\theta-\theta'|^{\frac{1}{2}}$$

bulunur.

Böylece,

$$\left|\arg\varphi'(e^{i\theta})-\arg\varphi'(e^{i\theta'})\right|\leq\left|\theta(s)-\theta(s')\right|+$$

$$+\left|\theta-\theta'\right|\leqslant\omega(\left|s-s'\right|)+\left|\theta-\theta'\right|\leqslant\omega(M_1\left|\theta-\theta'\right|)+$$

$$+\left|\theta-\theta'\right|\leqslant(A_4+1)\omega(\left|\theta-\theta\right|^{\frac{1}{2}}+\left|\theta-\theta'\right|$$

sonuncu eşitsizlikten

$$\omega(\varphi'(e^{i\theta}),t)\leqslant A_5\omega(\theta,\sqrt{t})+t$$

bulunur.

O halde,

$$\int_0^c\frac{\omega(\varphi'(e^{i\theta}),t)}{t}\left|\ell nt\right|dt\leqslant A_5\int_0^c\frac{\omega(\theta,\sqrt{t})}{t}\left|\ell nt\right|dt+\int_0^c\left|\ell nt\right|dt. \qquad (2.1.12)$$

olur.

$$\int_0^c\frac{\omega(\theta,\sqrt{t})}{t}\left|\ell nt\right|dt\left\{\begin{array}{l}t=\tau^2\\ dt=2\tau d\tau\end{array}\right. \quad \text{(değişken değiştirmesi yapılırsa)}$$

$$=\int_0^{\sqrt{c}}\frac{\omega(\theta,t)}{t^2}\left|\ell nt^2\right|.2t.dt=$$

$$=4\int_0^{\sqrt{c}}\frac{\omega(\theta,t)}{t}\left|\ell nt\right|dt$$

olduğundan, (2.1.10)' dan

$$A_5 \int_0^c \frac{\omega(\theta,\sqrt{t})}{t} |\ell nt| dt < \infty \qquad (2.1.13)$$

olur.

Öte yandan,

$$\int_0^c |\ell nt| dt = \begin{cases} -\int_0^c \ell nt.dt & ,0 < c \leq 1 \quad ise, \\ -\int_0^1 \ell nt\, dt + \int_1^c \ell nt.dt & ,c > 1 \quad ise, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} t(1-\ell nt)\Big|_0^c, & 0 < c \leq 1 \;\; ise, \\ t(1-\ell nt)\Big|_0^1 + t(\ell nt - 1)\Big|_1^c, & c > 1 \; ise, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathrm{c}.\ell\mathrm{n}\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}} + \ell\mathrm{im}_{t\to 0}\, \mathrm{t}.\ell\mathrm{nt}, & 0 < \mathrm{e} \leq 1 \text{ ise} \\ 1 + \ell\mathrm{im}_{t\to 0}\, \mathrm{t}.\ell\mathrm{nt} + \mathrm{c}.\ell\mathrm{n}\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{e}} + 1, & \mathrm{e} > 1 \text{ ise,} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathrm{c}.\ell\mathrm{n}\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}}, & 0 < \mathrm{e} \leq 1 \text{ ise,} \\ 2 + \mathrm{c}.\ell\mathrm{n}\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{e}}, & \mathrm{e} > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğundan,

$$\int_0^{\mathrm{e}} |\ell\mathrm{nt}| \mathrm{dt} < \infty \qquad (2.1.14)$$

olur.

(2.1.13, (2.1.14) ve (2.1.12)' den

$$\int_0^c \frac{\omega(\varphi'(e^{i\theta}),t)}{t} |\ell nt| dt < \infty \qquad (2.1.15)$$

bulunur.

$$\varphi'(w) = |\varphi'(w)| e^{i \arg \varphi'(w)}$$

ifadesinden

$$\ell n\varphi'(w) = \ell n|\varphi'(w)| + i.\arg \varphi'(w)$$

bulunur. Şimdi

$$F(w) = \arg \varphi'(w) + i.[\ell n\varphi'(w) - \ell n|\varphi'(w)|]$$

fonksiyonunu ele alalım.

F(w) fonksiyonuna Teorem 2.1.1 uygulanırsa, ($\arg \varphi'(w)$ fonksiyonu Teorem 2.1.1' in bütün şartlarını sağlıyor) Teorem 2.1.1 gereği $\ell n\varphi'(w) - \ell n|\varphi'(w)|$, yani $\ell n\varphi'(w)$ fonksiyonu $|w| \leq 1$ dairesinde süreklidir ve $\ell n\varphi'(e^{i\theta})$ fonksiyonunun θ değişkenine göre süreklilik modülü $\omega(\ell n\varphi'(e^{i\theta}, t))$

$$\int_0^c \frac{\omega(\ell n\varphi'(e^{i\theta}, t))}{t} dt < \infty \qquad (2.1.16)$$

şartını sağlar.

$$\varphi'(w) = e^{\ell n\varphi'(w)}$$

yazılabilir.

Buna göre, $\ell n\varphi^1(w)$ $|w| \leq 1$ dairesinde sürekli olduğundan, $\varphi'(w), |w| \leq 1$ dairesinde süreklidir ve $\varphi'(w) \neq 0$ sonucuna varırız.

$\forall r > 0$ ve $|w| < r$ için

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$$

olduğunu biliyoruz.

Buna göre, herhangi $|w| < r$ ve $|w'| < r$ için

$$e^{w} - e^{w'} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{w^{n} - (w')^{n}}{n!}$$

olur.

$$w^{n} - (w')^{n} = (w - w')(w^{n-1}) + w^{n-2}w' +$$

$$+ w^{n-3}(w')^{2} + \ldots + w^{2}(w')^{n-3} + w(w')^{n-2} +$$

$$+ (w')^{n-1} = (w - w')\sum_{i=0}^{n-1} w^{n-1-i}(w')^{i}$$

ve buradan da

$$\left|w^{n} - (w')^{n}\right| \leqslant |w - w'| n.r^{n-1}$$

olduğundan,

$$\left|e^{w} - e^{w'}\right| \leqslant |w - w'| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nr^{n-1}}{n!} = |w - w'|.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n}}{n!}$$

bulunur.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n}}{n!}$$

serisi pozitif terimli serilerin yakınsaklığı için D'Alembert testi gereğince $\left(\frac{r^{n+1}}{(n+1)} : \frac{r^{n}}{n!} = \frac{r}{n+1} \to 0,\ n \to \infty \text{ iken olduðundan}\right)$ yakınsak olduğundan onun toplamını K_r ile gösterirsek

$$\left|e^{w} - e^{w'}\right| \leq K_{r}.|w - w'| \qquad (2.1.17)$$

elde edilir.

(Özel olarak $r = 1$ alınırsa, $K_1 \leq 2$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Gerçekten de

$$\forall n \geq 2 \text{ için } n! \geq 2^{n-1}$$

olduğundan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

serisinin genel terimi $\left(\frac{1}{n!}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

serisinin genel teriminden $\left(\frac{1}{2^{n-1}}\text{'den}\right)$

büyük değildir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2$$

olduğundan,

$$K_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2$$

olduğu görülür).

$$w = \ell n\varphi'(e^{i\theta}),\ w' = \ell n\varphi'(e^{i\theta'})$$

alınırsa,

$$\varphi'(e^{i\theta}) - \varphi'(e^{i\theta'}) = e^{(\ell n\varphi'(e^{i\theta}))} - e^{(\ell n\varphi'(e^{i\theta'}))}$$

yazılışı ve (2.1.17) eşitsizliğinden

$$\left|\varphi'(e^{i\theta})-\varphi'(e^{i\theta'})\right|\leq K_r\left|\ell n\varphi'(e^{i\theta})-\ell n\varphi'(e^{i\theta'})\right|$$

elde edilir.

Buradan,

$$\left|\varphi'(e^{i\theta})-\varphi'(e^{i\theta'})\right|\leqslant K_r\omega(\ell n\varphi'(e^{i\theta}),t)$$

olur. Dolayısıyla,

$$\omega(\varphi'(e^{i\theta}),t)\leq K_r.\omega\left(\ell n\varphi'(e^{i\theta}),t\right) \qquad (2.1.18)$$

buluruz.

(2.1.18) ve (2.1.16)' dan (2.1.11)'in doğruluğu görülür.

Uyarı: Benzer şekilde gösterilebilir ki, eğer, $z=\varphi(w)$ fonksiyonu $|w|>1$ bölgesini γ'nın dışına konform (birebir) olarak dönüştürürse ve $z=0\in D$ ise, Teorem 2.1.2'nin sonucu değişmez, yani $\varphi'(w)\neq 0$ *ve* $\varphi'(w)$, $|w|\geq 1$ bölgesinde süreklidir ve (2.1.11) eşitsizliği sağlanır.

2.2. Analitik Fonksiyonların Taylor Serisi Üzerine

D kompleks düzlemde tümleyeni $D^c = \mathbb{C} \setminus D = G$, $z = \infty$ noktasını içinde bulunduran basit irtibatlı bir bölge olan sınırlı kapalı bir bölge olsun.

$W = \Phi(z)$, G bölgesini $|w| > r$ bölgesine konform dönüştüren ve

$$\Phi(\infty) = \infty, \ \lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} = 1$$

şartlarını sağlayan bir fonksiyon olsun. ($W = \Phi(z)$ birebir fonksiyon olduğundan onun tersi vardır). $z = \varphi(w)$ ile $W = \Phi(z)$ fonksiyonunun tersini gösterelim. $z = \varphi(w)$ fonksiyonunun $|w| \geq r$ bölgesinde sürekli olduğunu kabul edeceğiz. O halde, D üzerinde sürekli f(z) fonksiyonu için ($f(z) = f[\varphi(w)]$ fonksiyonu $|w| \geq r$ bölgesinde bileşke fonksiyon gibi süreklidir).

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|\tau|=r} \dfrac{f[\varphi(\tau)]}{\tau^{n+1}} d\tau, \\ n = 0, 1, 2, \ldots\ldots \end{cases} \tag{2.2.1}$$

sayılarını tanımlayabiliriz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(z) \tag{2.2.2}$$

serisini ele alalım. Burada, $(\Phi_n(z))$, $n \in N \cup \{0\}$ D bölgesinin Faber polinomları sistemidir. (Faber polinomları ile ilgili Markuşeviç, 1977). Biz bu kesimde verilen fonksiyona (2.2.2) şekilli serilerin n. kısmi toplamlar dizisi ile yaklaşım problemiyle ilgileneceğiz. Bunun için öncelikle bazı gerekli lemmaları verelim.

Lemma 2.2.1 Eğer, f(z), D de ve $\varphi(w)$, $|w| \geq \tau$ bölgesinde sürekli fonksiyonlarsa,

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k . w^k \right| \leq A_6 \operatorname*{maks}_{z\in D} |f(z)| . \ell n n \tag{2.2.3}$$

dir.

Burada, $|w| = r$ ve a_k lar (2.2.1)' den tanımlanan katsayılardır.

İleride, her yerde kabul edeceğiz ki, D bölgesi Teorem 2.1.2' nin şartlarını sağlıyor. Yani, kabul edeceğiz ki, D' nin sınırı düzgün kapalı Jordan eğrisi olup bu eğrinin teğet doğrularının reel eksenle oluşturduğu $\theta(s)$ açısı $\gamma = \partial D$ eğrisinin s yayının bir fonksiyonu gibi

$$\int_0^c \frac{\omega(\theta,t)}{t}|\ell nt|dt < \infty \qquad (2.2.4)$$

şartını sağlasın.

Uyarı: Şunu belirtelim ki, $\theta(s)$ fonksiyonu herhangi pozitif üstle Hölder koşulunu sağlarsa, böyle eğrilere Lyapunov eğrileri denir. Lyapunov eğriler kümesini (L), (2.2.4) şartını sağlayan eğriler kümesini (J) ile gösterelim. Kolaylıkla göstermek olur ki, $(L) \subset (J)$' dir. Yani (J) eğriler kümesi (L) eğriler kümesinden geniştir.

Bunu gösterelim. $\forall \gamma \in (L)$ olsun. Bu demek olur ki, γ eğrisinin $\theta(s)$ fonksiyonu $\forall \alpha > 0$ (genelde $0 < \alpha \leq 1$ düşünülür) üssü ile H_α sınıfındandır. Buna göre, $\omega(\theta,t) \leq At^\alpha$, A, t'ye bağımlı olmayan sabittir. O halde,

$$\int_0^c \frac{\omega(\theta,t)}{t}|\ell nt|dt \leq A.\int_0^c t^{\alpha-1}|\ell nt|dt =$$

$$= \begin{cases} -A.\displaystyle\int_0^c t^{\alpha-1}\ell nt\, dt, & 0 < c \leq 1 \; ise, \\ -A.\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}\ell nt\, dt + A.\int_1^c t^{\alpha-1}\ell nt\, dt, & 1 < c \; ise \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{A}{\alpha}t^\alpha(\alpha - \ell nt)\Big|_0^c, & 0 < c \leq 1 \; ise, \\ \dfrac{A}{\alpha}t^\alpha(\alpha - \ell nt)\Big|_0^1 + \dfrac{A}{\alpha}t^\alpha(\ell nt - \alpha)\Big|_1^c, & 1 < c \; ise, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{A}{\alpha}[c^{\alpha}(\alpha - \ell nc) + \lim\limits_{t\to 0} t^{\alpha}\ell nt], & 0 < c \le 1 \ \textit{ise}, \\ \dfrac{A}{\alpha}[2\alpha + \lim\limits_{t\to 0} t^{\alpha}\ell nt + c^{\alpha}(\ell nc - \alpha)], & 1 < c \ \textit{ise} \end{cases}$$

$$(\lim_{t\to 0} t^{\alpha}.\ell nt = \lim_{t\to 0} \frac{\ell nt}{\frac{1}{t^{\alpha}}} = -\frac{1}{\alpha}\lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t^{\alpha+1}}} = -\frac{1}{\alpha}\lim_{t\to 0} t^{\alpha} = 0 \text{ olduğundan})$$

$$= \begin{cases} \dfrac{Ac^{\alpha}}{\alpha}(\alpha - \ell nc), & 0 < c \le 1 \text{ ise}, \\ \dfrac{A}{\alpha}[2\alpha + c^{\alpha}(\ell nc - \alpha)], & 1 < c \text{ ise} \end{cases}$$

olduğundan,

$$\int_0^c \frac{\omega(\theta,t)}{t}|\ell nt|dt < \infty$$

olur. Dolayısıyla, $(L) \subset (J)$' dir.

Lemma 2.2.2 Eğer, D bölgesi (yani sınırı) (J) şartını sağlar ve $W = \Phi(z),\ z \in G$ fonksiyonunun tersi olan $z = \varphi(w),\ |w| > r$ fonksiyonu $|w| > r$ bölgesini G' ye ($G=D^c$) konform olarak dönüştürürse, herbir w, $|w| = r$ için

$$\int_{|\tau|=r} \left| \frac{1}{\tau - w} - \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau) - \varphi(w)} \right| |d\tau| < A_7, \qquad (2.2.5)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada A_7, w'ye bağımlı olmayan sabittir.

İspat: Öncelikle

$$\frac{1}{\tau - w} - \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau) - \varphi(w)} = \frac{\varphi(\tau) - \varphi(w) - \varphi'(\tau)(\tau - w)}{(\tau - w)^2} : \frac{\varphi(\tau) - \varphi(w)}{\tau - w}$$

şeklinde yazalım.

Birinci kesimin sonunda söylenen uyarı gereğince $\varphi'(w)$ fonksiyonu $|w| = r$ için $\varphi'(w) \neq 0$'dır. Buna göre, herbir $w, |w| = r$ *için* $\exists m > 0,\ \exists M > 0$ vardır ki

$$m \leq |\varphi'(w)| \leq M$$

dolayısıyla, $\exists m_1 > 0$ vardır ki, herbir τ *ve* w, $|\tau| = |w| = r$ için

$$\left|\frac{\varphi(\tau) - \varphi(w)}{\tau - w}\right| \geq m_1 > 0 \qquad (2.2.6)$$

olur.

Burada m, M, m_1, τ ve w bağımlı olmayan sabitlerdir.

Buna göre, (2.2.5) eşitsizliği yerine

$$I = \int_{|\tau|=r} \left|\frac{\varphi(\tau) - \varphi(w) - \varphi'(\tau)(\tau - w)}{(\tau - w)^2}\right| |d\tau| < A_8 \qquad (2.2.7)$$

eşitsizliğini ispatlamak yeterlidir. Sonucu integralde

$$\varphi(\tau) - \varphi(w) - \varphi'(\tau)(\tau - w) = \int_w^\tau [\varphi'(t) - \varphi'(\tau)]dt$$

alınırsa,

$$I = \int_{|\tau|=r} \frac{|d\tau|}{|\tau - w^2|} \left|\int_w^\tau [\varphi'(t) - \varphi'(\tau)]dt\right| \qquad (2.2.8)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, içteki integralde integralleme $|t| = \tau$ çemberi üzerinde w ve τ noktalarını birleştiren kısa yay üzre alınır.

Buna göre (2.2.8)' den

$$I = \int_{|\tau|=r} \left|\frac{|d\tau|}{(\tau - w)^2}\right| \int_w^\tau w(\varphi'(r.e^{i\theta}), |t - \tau|)|dt|$$

($|t-\tau| \le |t-w|$ olduğundan)

$$\le \int_{|\tau|=r} \frac{w(\varphi'(r.e^{i\theta}), |\tau - w|)}{|\tau - w|} |d\tau|$$

$|\tau| = r$ çemberinin uzunluğu $2\pi r$ ve $|\tau - w| \le \pi r$ olduğundan,

$$I \le \int_0^{\pi r} \frac{w(\varphi'(r.e^{i\theta}), t)}{t} dt$$

buluruz.

Buradan, Teorem 2.1.2' nin sonundaki uyarı gereğince,

$$I \le A_3 < \infty$$

olduğu görülür. Böylece (2.2.7), yani (2.2.3) eşitsizliği, yani Lemma 2.2.2' nin ispatı tamamlanır.

Lemma 2.2.3 D bölgesi (J) şartını sağlasın ve w=f(z) fonksiyonu D' de analitik, $\overline{D}$ 'de sürekli, yani $f \in A(D) \cap C(\overline{D})$ olsun.

Bu durumda,

$$F_1(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=r} \frac{f[\varphi(\tau)]}{\tau - w} d\tau, \qquad |w| < r \qquad (2.2.9)$$

ve

$$F_2(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=r} \frac{f[\varphi(\tau)]}{\tau - w} d\tau, \qquad |w| > r \qquad (2.2.10)$$

analitik fonksiyonları sırası ile $|w| \le r$ ve $|w| \ge r$ kapalı bölgelerinde sürekliler ve

$$\begin{aligned} \omega(F_1, t) &< A_9.\omega(f, t) \\ \omega(F_2, t) &< A_{10}.\omega(f, t) \end{aligned} \qquad (2.2.11)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada, $\omega(f,t)$, w=f(z) fonksiyonunun $\overline{D}$ bölgesinde $\omega(F_1,t)$ *ve* $\omega(F_2,t)$ *de* $F_1(w)$ *ve* $F_2(w)$ fonksiyonlarının $|w|=r$ çemberi üzerinde süreklilik modülleri, A_9, A_{10}' de sadece bölgeye bağımlı sabitlerdir.

İspat: Lemma 2.2.3' ün şartlarından

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\tau)}{\tau-z}d\tau,\ z\notin\gamma$$

Cauchy integrali $z\notin\gamma$ için analitik fonksiyondur. Ayrıca, Cauchy İntegral Teoreminden (Gakhov, 1977).

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\tau)}{\tau-z}d\tau=\begin{cases} f(z), & z\in D \ \ ise,\\ 0 & z\in G=D^c\ ise\end{cases}$$

olur.

$$\Phi^+(t)=\lim_{D\ni z\to t}\Phi(z)\ ve$$
$$\Phi^-(t)=\lim_{G\ni z\to t}\Phi(z),\ t\in\gamma$$

(Gakhov, 1977). gösterirsek, Cauchy integrali için Sohkotskiy Formülleri gereği (Gakhov, 1977).

$$\Phi^+(t)=\frac{1}{2}f(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau=f(t)$$

ve

$$\Phi^-(t)=\frac{1}{2}f(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau=0,$$

yani,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau=\frac{1}{2}f(t),\ t\in\gamma \qquad (2.2.12)$$

buluruz. Sonuncu eşitlikteki integral Cauchy singüler integralidir. (Gakhov, 1977).

(2.2.12)' de $\tau = \varphi(\xi)$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\frac{f[\varphi(\xi)]}{\varphi(\xi)-\varphi(\widetilde{w})}\varphi'(\xi)d\xi = \frac{1}{2}f[\varphi(\widetilde{w})] \quad |\widetilde{w}| = r \qquad (2.2.13)$$

elde edilir.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\frac{f[\varphi(\xi)]}{\xi-\widetilde{w}}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\frac{f[\varphi(\xi)]}{\varphi(\xi)-\varphi(\widetilde{w})}\varphi'(\xi)d\xi +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\left[\frac{1}{\xi-\widetilde{w}}-\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)-\varphi(\widetilde{w})}\right]f[\varphi(\xi)]d\xi \qquad (2.2.14)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ikinci integral Lemma 2.2.2. gereğince mutlak yakınsak ve birinci integral de (2.2.13) eşitliği gereğince varolduğundan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\frac{f[\varphi(\xi)]}{\xi-\widetilde{w}}d\xi$$

singüler integrali varolacaktır.

Buna göre, Sohkotskiy formüllerinden (Gakhov, 1977).

$$F_1(\widetilde{w}) = \lim_{\substack{w\to\widetilde{w}\\|w|<r}}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\frac{f[\varphi(\xi)]}{\xi-w}d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\frac{f[\varphi(\xi)]}{\xi-\widetilde{w}}d\xi + \frac{1}{2}f[\varphi(\widetilde{w})], |\widetilde{w}| = r, \qquad (2.2.15)$$

$$F_2(\widetilde{w}) = \lim_{\substack{w\to\widetilde{w}\\|w|>r}}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\frac{f[\varphi(\xi)]}{\xi-w}d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\frac{f[\varphi(\xi)]}{\xi-\widetilde{w}}d\xi - \frac{1}{2}f[\varphi(\widetilde{w})],\ |\widetilde{w}|=r, \qquad (2.2.16)$$

sınır değerleri varolacaktır.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\frac{d\xi}{\xi-\widetilde{w}}=\frac{1}{2},\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{d\tau}{\tau-\widetilde{z}}=\frac{1}{2}$$

(Gakhov, 1977) olduğundan,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\left[\frac{1}{\xi-\widetilde{w}}-\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)-\varphi(\widetilde{w})}\right]d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\frac{d\xi}{\xi-\widetilde{w}}-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\frac{\varphi'(\xi)d\xi}{\varphi(\xi)-\varphi(\widetilde{w})}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\frac{d\xi}{\xi-\widetilde{w}}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{d\tau}{\tau-\widetilde{z}}=0,$$

yani

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\left[\frac{1}{\xi-\widetilde{w}}-\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)-\varphi(\widetilde{w})}\right]d\xi=0 \qquad (2.2.17)$$

olur.

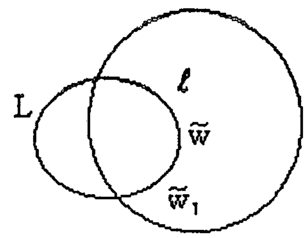
(2.2.16), (2.2.14), (2.2.13) ve (2.2.17)' den

$$F_2(\widetilde{w})=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\left[\frac{1}{\xi-\widetilde{w}}-\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)-\varphi(\widetilde{w})}\right]\{f[\varphi(\xi)]-f[\varphi(\widetilde{w})]\}d\xi \qquad (2.2.18)$$

yazılabilir.

$\widetilde{w}$ *ve* $\widetilde{w}_1$, $|\xi|=r$ çemberi üzerinde iki farklı nokta olsun. Merkezi $\widetilde{w}$' de, yarı çapı $2|\widetilde{w}_1-\widetilde{w}|$ olan bir çember çizelim. Bu çemberin $|\xi|=r$ çemberinden ayırdığı (Şekil 2.2.1) yayı ℓ, $|\xi|=r$ çemberinin geride kalan kısmını da L ile gösterelim.

Buna göre, (2.2.18) integrali birisi ℓ, diğeri de L üzre olmakla iki integralin toplamı şeklinde yazılabilir.



Şekil 2.2.1

Lemma 2.2.2 gereğince

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\ell \left[\frac{1}{\xi-\widetilde{w}}-\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)-\varphi(\widetilde{w})}\right]\{f[\varphi(\xi)]-f[\varphi(\widetilde{w})]\}d\xi\right|<$$

$$< A_{11}\omega(f,|\widetilde{w}-\widetilde{w}_1|)\int_\ell\left|\frac{1}{\xi-\widetilde{w}}-\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)-\varphi(\widetilde{w})}\right||d\xi|< A_{12}\omega(f,|\widetilde{w}-\widetilde{w}_1|) \quad (2.2.19)$$

bulunur.

Benzer şekilde,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\ell \left[\frac{1}{\xi-\widetilde{w}_1}-\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)-\varphi(\widetilde{w}_1)}\right]\{f[\varphi(\xi)]-f[\varphi(\widetilde{w}_1)]\}d\xi\right|< A_{13}\omega(f,|\widetilde{w}-\widetilde{w}_1|) \quad (2.2.20)$$

olur.

$$F_2(\widetilde{w})-F_2(\widetilde{w}_1)$$

farkını

$$F_2(\widetilde{w})-F_2(\widetilde{w}_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_\ell \left[\frac{1}{\xi-\widetilde{w}}-\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)-\varphi(\widetilde{w})}\right]\{f[\varphi(\xi)]-f[\varphi(\widetilde{w})]\}d\xi-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{l}\left[\frac{1}{\xi-\widetilde{w}_1}-\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)-\varphi(\widetilde{w}_1)}\right]\{f[\varphi(\xi)]-f[\varphi(\widetilde{w}_1)]\}d\xi+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\left\{\left[\frac{1}{\xi-\widetilde{w}}-\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)-\varphi(\widetilde{w})}\right]\{f[\varphi(\xi)]-f[\varphi(\widetilde{w})]\}d\xi-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{1}{\xi-\widetilde{w}_1}-\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)-\varphi(\widetilde{w}_1)}\right]\{f[\varphi(\xi)]-f[\varphi(\widetilde{w}_1)]\}\right\}d\xi \qquad (2.2.21)$$

şeklinde yazalım. (2.2.19) ve (2.2.20) gereğince, bu farkın birinci ve ikinci toplamları değerlendirilir. Üçüncü toplamı I_3 ile gösterelim ve onu değerlendirmeye çalışalım.

$$I_3=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\left\{\left[\frac{1}{\xi-\widetilde{w}}-\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)-\varphi(\widetilde{w})}\right]\{f[\varphi(\xi)]-f[\varphi(\widetilde{w})]\}-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{1}{\xi-\widetilde{w}_1}-\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)-\varphi(\widetilde{w}_1)}\right]\{f[\varphi(\xi)]-f[\varphi(\widetilde{w}_1)]\}\right\}d\xi=$$

$$=I_{3,1}+I_{3,2} \qquad (2.2.22)$$

burada

$$I_{3,1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\left[\frac{1}{\xi-\widetilde{w}}-\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)-\varphi(\widetilde{w})}-\frac{1}{\xi-\widetilde{w}_1}+\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)-\varphi(\widetilde{w}_1)}\right]\{f[\varphi(\xi)]-f[\varphi(\widetilde{w})\}d\xi,$$

$$I_{3,2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\left[\frac{1}{\xi-\widetilde{w}_1}-\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)-\varphi(\widetilde{w}_1)}\right]\{f[\varphi(\widetilde{w}_1)-f[\varphi(\widetilde{w})]\}d\xi$$

olsun. $I_{3,1}$ ve $I_{3,2}$ integrallerini değerlendirelim.

$I_{3,1}$ integralini

$$I_{3,1}=\frac{\widetilde{w}-\widetilde{w}_1}{2\pi i}\int_L \frac{f[\varphi(\xi)]-f[\varphi(\widetilde{w})]}{\xi-\widetilde{w}}\left\{\frac{1}{\xi-\widetilde{w}_1}-\varphi'(\xi).\frac{\frac{\varphi(\widetilde{w})-\varphi(\widetilde{w}_1)}{\widetilde{w}-\widetilde{w}_1}}{\frac{\varphi(\xi)-\varphi(\widetilde{w})}{\xi-\widetilde{w}}[\varphi(\xi)-\varphi(\widetilde{w}_1)]}\right\}d\xi$$

şeklinde yazalım. Daha sonra küme parantezi içine,

$$\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)-\varphi(\widetilde{w}_1)}$$

ifadesini ekleyip çıkarmakla

$$I_{3,1}=\widetilde{I}_{3,1}+\approx{I}_{3,1}, \qquad (2.2.23)$$

burada

$$\widetilde{I}_{3,1}=\frac{\widetilde{w}-\widetilde{w}_1}{2\pi i}\int_L \frac{f[\varphi(\xi)]-f[\varphi(\widetilde{w})]}{\xi-\widetilde{w}}\left[\frac{1}{\xi-\widetilde{w}_1}-\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)-\varphi(\widetilde{w}_1)}\right]d\xi \qquad (2.2.24)$$

$$\approx{I}_{3,1}=\frac{\widetilde{w}-\widetilde{w}_1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)-\varphi(\widetilde{w}_1)}\,\frac{f[\varphi(\xi)]-f[\varphi(\widetilde{w})]}{\xi-\widetilde{w}}$$

$$\left[1-\frac{\frac{\varphi(\widetilde{w})-\varphi(\widetilde{w}_1)}{\widetilde{w}-\widetilde{w}_1}}{\frac{\varphi(\xi)-\varphi(\widetilde{w})}{\xi-\widetilde{w}}}\right]d\xi \qquad (2.2.25)$$

şeklinde yazalım.

Lemma 2.2.2' nin ispatında kullanılan (2.2.6) ve

$$|\varphi'(\xi)|\le M$$

eşitsizliklerinden kullanarak

$$\left|\approx{I}_{3,1}\right|<A_{14}|\widetilde{w}-\widetilde{w}_1|$$

$$\int_L\left|\frac{f[\varphi(\xi)]-f[\varphi(\widetilde{w})]}{\xi-\widetilde{w}}\right|\left|\frac{q(\xi)-q(\widetilde{w}_1)}{\xi-\widetilde{w}_1}\right|d\xi, \qquad (2.2.26)$$

burada,

$$q(\xi)=\frac{\varphi(\xi)-\varphi(\widetilde{w})}{\xi-\widetilde{w}}$$

yazabiliriz.

$$q(\xi)-q(\widetilde{w}_1)=\frac{\int_{\widetilde{w}}^{\xi}[\varphi'(\xi)-\varphi'(\widetilde{w})]d\xi}{\xi-\widetilde{w}}-\frac{\int_{\widetilde{w}}^{\xi}[\varphi'(\xi)-\varphi'(\widetilde{w})]d\xi}{\widetilde{w}_1-\widetilde{w}}$$

özdeşliğinden $\xi\in L$ için

$$|q(\xi)-q(\widetilde{w}_1)|\le 2\omega(\varphi',|\xi-\widetilde{w}|)$$

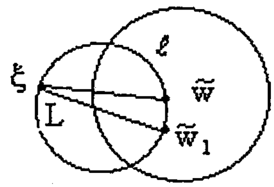
(öte yandan $\xi\neq\widetilde{w},\xi\neq\widetilde{w}_1$, $\widetilde{w}\neq\widetilde{w}_1$ olduğundan (Şekil 2.2.2) $\exists a>0$ reel sayısı varolacaktır ki,

$$|\xi-\widetilde{w}|\le a.|\xi-\widetilde{w}_1|)\le A_{15}\omega(\varphi',|\xi-\widetilde{w}_1|),$$

yani

$$|q(\xi)-q(\widetilde{w}_1)|<A_{16}\omega(\varphi',|\xi-\widetilde{w}_1|) \qquad (2.2.27)$$

buluruz.



Şekil 2.2.2

D bölgesi (J) şartını sağladığından Teorem 2.1.2 gereğince

$$\int_{2|\widetilde{w}_1-\widetilde{w}|}^{\pi r} \frac{\omega(\varphi',t)}{t} dt \le A_{17} < \infty, \qquad (2.2.28)$$

burada A_{17} $\widetilde{w}_1$ *ve* $\widetilde{w}$' e bağımlı olmayan sabittir.

Burada, $t = 2|\widetilde{w}_1 - \widetilde{w}|s$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\int_{1}^{\frac{\pi r}{2|\widetilde{w}_1-\widetilde{w}|}} \frac{\omega(\varphi',2|\widetilde{w}_1 - \widetilde{w}|s)}{s} ds < A_{11} < \infty \qquad (2.2.29)$$

elde edilir.

(2.2.26) ve (2.2.27)' den

$$\left|\widetilde{\widetilde{I}}_{3,1}\right| = A_{12}|\widetilde{w} - \widetilde{w}_1| \int_{2|\widetilde{w}_1-\widetilde{w}|}^{\pi r} \frac{\omega(f,t)}{t} \frac{\omega(\varphi',t)}{t} dt \qquad (2.2.30)$$

buluruz. Buradan, yine de $t = 2|\widetilde{w}_1 - \widetilde{w}|s$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\left|\widetilde{\widetilde{I}}_{3,1}\right| \le \frac{1}{2}.A_{18} \int_{1}^{\frac{\pi r}{2|\widetilde{w}_1-\widetilde{\omega}|}} \frac{\omega(f,2|\widetilde{w}_1 - \widetilde{w}|s)}{s} \frac{\omega(\varphi',2|\widetilde{w}_1 - \widetilde{w}|s)}{s} ds$$

buluruz. Buradan, (2.2.29) gereğince

$$\left|\widetilde{\widetilde{I}}_{3,1}\right| \le A_{19} \int_{1}^{\frac{\pi r}{2|\widetilde{w}_1-\widetilde{w}|}} \frac{\omega(f,2|\widetilde{w}_1 - \widetilde{w}|s)}{s} ds$$

ve

$$\omega(f,2|\widetilde{w} - \widetilde{w}_1|s) = (2s+1)\omega)\omega(|\widetilde{w} - \widetilde{w}_1|)$$

olduğundan dolayı da

$$\left|\tilde{\tilde{I}}_{3,1}\right| \leq A_{19}.\omega(f,|\tilde{w}_1 - \tilde{w}|)\int_1^{\frac{\pi r}{2|\tilde{w}_1-\tilde{w}|}}\left(2+\frac{1}{s}\right)ds =$$

$$= A_{19}\left(\frac{\pi r}{|\tilde{w}_1 - \tilde{w}|} - 2 + \ell n\frac{\pi r}{2|\tilde{w}_1 - \tilde{w}|}\right)\omega(f,|\tilde{w}_1 - \tilde{w}|),$$

dolayısıyla

$$\left|\tilde{\tilde{I}}_{3,1}\right| < A_{20}\omega(f,|\tilde{w}_1 - \tilde{w}|) \qquad (2.2.31)$$

elde ederiz.

$\tilde{I}_{3,1}$ için buna benzer değerlendirme bulunabilir.

Bunun için

$$\frac{1}{\xi - \tilde{w}_1} - \frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi) - \varphi(\tilde{w}_1)} = \frac{\varphi'(\xi) - \varphi'(\tilde{w}_1)}{\xi - \tilde{w}_1}$$

$$\left[\frac{1}{\varphi'(\xi) - \varphi'(\tilde{w}_1)} - \frac{\varphi'(\xi)}{\varphi'(\xi) - \varphi'(\tilde{w}_1)}\cdot\frac{1}{\frac{\varphi(\xi)-\varphi(\tilde{w}_1)}{\xi - \tilde{w}_1}}\right]$$

şeklinde yazıp Lemma 2.2.2' nin ispatındaki (2.2.6) ve

$$m < |\varphi'(\xi)| < M, \ |\xi| = r$$

eşitsizliklerinden yararlanırsak,

$$\left|\frac{1}{\xi - \tilde{w}_1} - \frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi) - (\tilde{w}_1)}\right| < \frac{|\varphi'(\xi) - \varphi'(\tilde{w}_1)|}{|\xi - \tilde{w}_1|}\left[\frac{1}{M-m} + \frac{M}{(M-m)m_1}\right],$$

yani

$$\left|\frac{1}{\xi-\widetilde{w}_1}-\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)-(\widetilde{w}_1)}\right|<A_{21}.\frac{\omega(\varphi',|\xi-\widetilde{w}_1|)}{|\xi-\widetilde{w}_1|}$$

bulunur. Buna göre,

$$\left|\approx{I}_{3,1}\right|<A_{22}|\widetilde{w}-\widetilde{w}_1|\int_L\frac{\omega(f,|\xi-\widetilde{w}|)}{|\xi-\widetilde{w}|}\frac{\omega(\varphi',|\xi-\widetilde{w}_1|)}{|\xi-\widetilde{w}_1|}|d\xi|$$

($|\xi-\widetilde{w}|\sim|\xi-\widetilde{w}_1|$ olduğundan)

$$\leq A_{23}|\widetilde{w}-\widetilde{w}_1|\int_{2|\widetilde{w}-\widetilde{w}_1|}^{\pi r}\frac{\omega(f,t)}{t}\frac{\omega(\varphi',t)}{t}dt$$

($t=2|\widetilde{w}-\widetilde{w}_1|s$ değişken değiştirmesi yapılırsa)

$$=\frac{A_{24}}{2}\int_1^{\frac{\pi r}{2|\widetilde{w}_1-\widetilde{w}|}}\frac{\omega(f,2|\widetilde{w}_1-\widetilde{w}|s)}{s}\frac{\omega(\varphi',2|\widetilde{w}_1-\widetilde{w}|s)}{s}ds$$

bulunur. Buradan, (2.2.29) gereğince $\approx{I}_{3,1}$'e benzer olarak,

$$\left|\widetilde{I}_{3,1}\right|<A_{25}\omega(\varphi',|\widetilde{w}_1-\widetilde{w}|) \qquad (2.2.32)$$

buluruz.

$I_{3,2}$ integrali için $\widetilde{I}_{3,1}$' e benzer olarak,

$$\left|I_{3,2}\right|<A_{26}\omega(\varphi',|\widetilde{w}_1-\widetilde{w}|) \qquad (2.2.33)$$

bulunur.

(2.2.21) ve (2.2.22) eşitlikleri, (2.2.19), (2.2.20) eşitsizlikleri, (2.2.23) eşitliği, (2.2.31), (2.2.32) ve (2.2.33) eşitsizliklerinden

$$|F_2(\widetilde{w}_1)-F_2(\widetilde{w}_1)|<A_{27}\omega(\varphi',|\widetilde{w}_1-\widetilde{w}| \qquad (2.2.34)$$

elde edilir. (2.2.34) eşitsizliğinden Lemma 2.2.3' ün ispatı açıktır.

Lemma 2.2.4 Eğer f(z) fonksiyonu $|z| < r$ dairesinde analitik ve $|z| \le r$ dairesinde sürekli ve f(z)' nin Taylor serisi

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

ise, $F(r.e^{i\theta}) = F(\theta)$ fonksiyonunun

$$\frac{c_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k \cos k\theta + d_k \sin k\theta\right)$$

Fouryer serisi, f(z) fonksiyonunun $|z| = r$ çemberi üzerindeki Taylor serisiyle aynıdır.

İspat: $F(\theta) = f(r.e^{i\theta})$ fonksiyonunun Fouryer serisini

$$\frac{c_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k \cos k\theta + d_k \sin k\theta\right)$$

$$c_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r.e^{i\theta}) \cos k\theta d\theta, \quad k = 0,1,2...$$

$$d_K = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r.e^{i\theta}) \sin k\theta d\theta, \quad k = 1,2,3,...$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan,

$$\cos k\theta = \frac{e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}}{2}, \quad k = 0,1,2,...$$

$$\sin k\theta = \frac{e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}}{2i}, \quad k = 1,2,...$$

olduğundan, $F(\theta)$ fonksiyonunun Fouryer serisi

$$\frac{c_o}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(c_k-i.d_k)e^{ik\theta}+\frac{1}{2}(c_k+i.d_k)e^{-ik\theta}\right] \qquad (2.2.35)$$

olur.

$$\frac{1}{2}(c_k+i.d_k)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(r.e^{ik\theta})(\cos k\theta+i\sin k\theta)d\theta=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(r.e^{ik\theta})e^{ik\theta}d\theta \quad (r.e^{i\theta}=z \text{ değişken değiştirmesi yapılırsa})$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{|z|=r}f(z)\left(\frac{z}{r}\right)^k.\frac{1}{i}\frac{dz}{z}=$$

$$=r^{-k}.\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}f(z)z^{k-1}dz,$$

dolayısıyla,

$$\frac{1}{2}(c_k+id_k)=r^{-k}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}f(z)z^{k-1}dz$$

olur. f(z) fonksiyonu $|z|<r$ dairesinde analitik olduğundan Cauchy İntegral Teoremi gereğince (Başkan, 1998).

$$\frac{1}{2}(c_k+id_k)=0, \quad k=1,2,... \qquad (2.2.36)$$

olur. (2.54) ve (2.53)' den $F(\theta)$ fonksiyonunun Fouryer serisi için

$$\frac{c_o}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}(c_k-i.d_k)e^{ik\theta} \qquad (2.2.37)$$

buluruz.

$$\frac{1}{2}(c_k - id_k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r.e^{i\theta})\ (\cos k\theta - i\sin k\theta)d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r.e^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta(r.e^{i\theta} = z \text{ değişken değiştirmesi yapılırsa})=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r} f(z)\left(\frac{r}{k}\right)^k \frac{1}{i}\frac{dz}{z}$$

$$= r^K.\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{k+1}}dz,$$

yani,

$$\frac{1}{2}(c_k - id_k) = r^k.\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{k+1}}dz \qquad (2.2.38)$$

elde edilir. Öte yandan

$$\frac{c_o}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r.e^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z}dz \qquad (2.2.39)$$

olur. f(z) fonksiyonu $|z| < r$ dairesinde analitik olduğundan, Cauchy Türev Formülü gereği (Başkan, 1998).

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{k+1}}dz = \frac{f^{(k)}(o)}{k!} \quad k = 0,1,2,\ldots (2.2.40)$$

(burada $f^{(o)}(o) = f(o)$ ve $o! = 1$'dir)

yazılabilir.

(2.2.37), (2.2.38), (2.2.39) ve (2.2.40) formüllerinden $F(\theta) = f(r.e^{i\theta})$ fonksiyonunun Fouriyer serisi için

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(o)}{k!} z^k$$

ifadesini buluruz. Bu da f(z) fonksiyonunun $|z| = r$ çemberi üzerinde

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k . z^k ,$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(o)}{k!} \quad k = 0,1,2,...$$

Taylor serisinden başka bir şey değil.

2.3. Analitik Fonksiyonlara Yaklaşım

f(z), $|z| < r$ dairesinde analitik, $|z| \leq r$ kapalı dairesinde sürekli fonksiyon ve

$$T(f,z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

f' nin Taylor serisi olsun,

$g_K^{(n)}, (k = 0,1,2,......,n,\ n = 1,2,............)$ yakınsaklık çarpanı denilen çarpanlar olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{n} g_k^{(n)} . a_k z^k \qquad (2.3.1)$$

şekilli toplamı ele alacağız.

Fouriyer serileri için sözü geçen toplam

$$\frac{c_o}{2} g_0^{(n)} + \sum_{n=1}^{n} (c_k \cos k\theta + d_k \sin k\theta) g_k^{(n)} \qquad (2.3.2)$$

şeklindedir. Burada, c_k ve d_k, $F(\theta) = f(r.e^{i\theta})$ fonksiyonunun Fouriyer katsayılarıdır.

$$g_k^{(n)} = 1 - \frac{k}{n}$$

seçimiyle, (2.3.2) toplam $F(\theta)$ fonksiyonunun orta aritmetik Fouriyer kısmi toplamıdır.

$$g_k^{(n)} = \cos \frac{k\pi}{2n+1}$$

seçimiyle (2.3.2) toplamı Bernstein – Rogozinskiy (Natanson, 1954) toplamı,

$$g_k^{(n)} = \frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!}$$

seçimiyle de Walle – Pouson toplamıdır.

Yakınsaklık çarpanlarının yukarıda ele alınan her bir seçiminde reel değişkenli 2π periyotlu fonksiyonlara trigonometrik polinomlarla yaklaşımlar için belli değerlendirmeler bulunur. Eğer, bu belli değerlendirmeleri $F(\theta) = f(r.e^{i\theta})$ fonksiyonuna uygularsak, Lemma 2.2.4 gereği $|z| \leq r$ kapalı dairesinde f(z) fonksiyonuna (2.3.1) şekilli toplamlarla (polinomlarla) yakınsaklık üzerine benzeri değerlendirmeleri (teoremleri) buluruz. Fakat biz bununla yetinmeyeceğiz. Daha genel durumda (f dairede değil, bir kapalı bölgede analitik olduğu durumda) yakınsaklık problemiyle ilgileneceğiz.

f(z) fonksiyonu kapalı sınırlı D bölgesinde analitik ve $\overline{D}$ ' de sürekli olsun. Bu durumda f(z) fonksiyonuna yaklaşım aracı olarak

$$\sum_{k=0}^{n} g_K^{(n)} a_k \Phi_k(z) \qquad (2.3.3)$$

toplamını ele alacağız. Burada $\Phi_k(z)$ ele alınan fonksiyonun D bölgesine uygun Faber polinomları olup, a_k katsayıları da (2.2.1) formülü ile verilir.

Şimdi f(z) analitik fonksiyonuna (2.3.2) şekilli toplamlarla yaklaşım üzerine aşağıdaki teoremleri verelim.

Teorem 2.3.1 D, (J) koşulunu sağlayan bölge, f(z), D' de analitik ve $\overline{D}$ ' da sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca, f(z), $\overline{D}$ ' da α, $0 < \alpha \leq 1$ üssü ile Hölder koşulunu sağlarsa,

$$g_k^{(n)} = 1 - \frac{k}{n}, \qquad k = 0,1,2,\ldots, n = 1,2,\ldots$$

olmak üzere herbir $z \in \overline{D}$ için

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} g_k^{(n)} a_k \, \Phi_k(z) \right| < \frac{A_{27}}{n^{\alpha}} \qquad (2.3.4)$$

değerlendirmesi doğrudur.

İspat: Gösterildiği gibi (Teorem 2.1.2) D bölgesi (J) koşulunu sağlıyorsa, $\varphi'(w)$ fonksiyonu süreklidir ve $|w| = r$ çemberi üzerinde sıfır değil. Buna göre, $\varphi(w)$ fonksiyonu $|w| = r$ çemberi üzerinde $\alpha = 1$ üssü ile Hölder koşulunu sağlar. Ters fonksiyonun türevi hakkında teoreme göre, $\Phi'(z)$ vardır ve γ üzerinde sıfır değil. Dolayısıyla, $\Phi(z)$ fonksiyonu da γ üzerinde $\alpha = 1$ üssü ile Hölder koşulunu sağlar.

(2.2.10) ve (2.2.11) formülleriyle tanımlanan $F_1(w)$ ve F_2 (w) (Lemma 2.2.3) analitik fonksiyonları $w = r$ ' de (Gakhov, 1977).

$$F_1^+(t) = \frac{1}{2} f[\varphi(t)] + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=r} \frac{f[\varphi(\tau)]}{\tau - t} d\tau, \ |t| = r$$

$$F_2^-(t) = \frac{1}{2} f[\varphi(t)] + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=r} \frac{f[\varphi(\tau)]}{\tau - t} d\tau, \ |t| = r \qquad (2.3.5)$$

sınır değerlerine sahiptir ve bu sınır değerleri (Gakhov, 1977), teoremin hipotezi gereği $f \in H_\alpha(\gamma)$ olduğundan, α üssü ile Hölder koşulunu sağlar. Ayrıca, Sohkotskiy formülleri gereği (Gakhov, 1977).

$$f[\varphi(t)] = F_1^+(t) - F_2(t), \quad |t| = r \qquad (2..3.6)$$

olur.

$$F_1[\Phi(z)] = \lambda(z),$$

$$F_2[\Phi(z)] = \mu(z),$$

$$z = \varphi(t)$$

olsun. φ fonksiyonu γ üzerinde $\alpha = 1$ üssü ile F_1 ve F_2 fonksiyonları da $|t| = r$ üzerinde α üssü ile Hölder koşullarını sağladığından $\lambda(z)$ ve $\mu(z)$ fonksiyonları da (bileşke fonksiyon gibi) γ üzerinde α üssü ile Hölder koşulunu sağlar. Lemma 2.2.4 dikkate alınırsa 2π periyotlu reel değişkenli fonksiyonların yaklaşımı için Bernstein (Natanson. 1954) eşitsizliğinden $F_1(t)$ fonksiyonuna Fouryer serisinin Feyer toplamları ile yaklaşımı için,

$$\left|F_1(t) - \sum_{k=0}^{n} g_k^{(n)} a_k t^k\right| < \frac{A_{28}}{n^{\alpha}}, \ |t| = r \qquad (2.3.7)$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Biz ileride Faber polinomları için bilinen (Markuşeviç, 1977, Simirnov, Lebedyev, 1964),

$$\Phi_k(z) = [\Phi(z)]^k + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_g} \frac{[\Phi(\tau)]^k}{\tau - z} d\tau \qquad (2.3.8)$$

eşitliğinden yararlanacağız. Burada, γ_g, $|t| = g > r$ çemberinin $t = \Phi(\tau)$ dönüşümü altında görüntüsü ve $z \notin \gamma_g$' dur. D bölgesinin sınırı γ doğrultulabilir olduğundan integralleme γ üzere alınabilir ve $z \notin \gamma$ herhangi noktadır.

Buna göre, $z \notin \gamma$ için

$$\sum_{k=0}^{n} g_k^{(n)} a_k \Phi_k(z) = \sum_{k=0}^{n} g_k^{(n)} a_k [\Phi(z)]^k + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{1}{\tau - z} \sum_{k=0}^{n} g_k^{(n)} a_k [\Phi(\tau)]^k d\tau \qquad (2.3.9)$$

elde edilir.

$$h_n(z) = \mu(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{1}{\tau - z} \sum_{k=0}^{n} g_k^{(n)} a_k [\Phi(\tau)]^k d\tau \qquad (2.3.10)$$

ifadesini ele alalım.

$h_n(z)$ fonksiyonunun γ' nın dışarısında ($D^c = C \backslash D$' de) analitik ve kapanışında ($\overline{D}^c$' de) sürekli olduğu açıktır.

(2.3.10)' daki integrali aşağıdaki gibi yazalım.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{1}{\tau - z} \sum_{k=0}^{n} g_k^{(n)} a_k [\Phi(\tau)]^k d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{1}{\tau - z} \left\{ \sum_{k=0}^{n} g_k^{(n)} a_k [\Phi(\tau) - \lambda(\tau)]^k \right\} d\tau +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\tau - z}[f(\tau)+\mu(\tau)d\tau.$$

Burada, $f(\tau)=\lambda(\tau)-\mu(\tau)$ eşitsizliğinden yararlanılmıştır.

$z \notin \gamma$ için, Cauchy Teoremi gereği, (Başkan, 1998)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = 0, \quad \frac{-1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mu(\tau)}{\tau - z}d\tau = -\mu(z) \qquad (2.3.11)$$

olduğundan,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\tau - z}\left\{\sum_{k=0}^{n} g_k^{(n)} a_k [\Phi(\tau)]^k - \lambda(\tau)\right\}d\tau = \mu(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\tau - z}\sum_{k=0}^{n} g_k^{(n)} a_k [\Phi(\tau)]^k d\tau,$$

dolayısıyla,

$$h_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\tau - z}\left\{\lambda(\tau) - \sum_{k=0}^{n} g_k^{(n)} a_k [\Phi(\tau)]^k\right\}d\tau \qquad (2.3.12)$$

buluruz.

$h_n(\tilde{z}), \quad \tilde{z} \in \gamma$ sınır değeri için

$$h_n(\tilde{z}) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\tau - \tilde{z}}\left\{\lambda(\tau) - \sum_{k=0}^{n} g_k^{(n)} a_k [\Phi(\tau)]^k\right\}d\tau - \frac{1}{2}\left\{\lambda(\tilde{z}) - \sum_{k=0}^{n} g_k^{(n)} a_k [\Phi(\tilde{z})]^k\right\} \qquad (2.3.13)$$

elde edilir. $|\tilde{w}| = 1$ için

$$\int_{|\tau|=r} \frac{d\tau}{\tau - \tilde{w}} = \pi i$$

(Gakhov, 1977) olduğu dikkate alındığında,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=r} \frac{1}{\tau - \tilde{w}}\{F_1(\tau) - \sum_{k=0}^{n} g_k^{(n)} a_k \tau^k\}d\tau = \frac{1}{2}\{F_1(\tilde{w}) - \sum_{k=0}^{n} g_k^{(n)} a_k \tilde{w}^k\} =$$

$$=\frac{1}{2}\{\lambda(\tilde{z})-\sum_{k=0}^{n}g_k^{(n)}a_k[\Phi(\tilde{z})]^k\},$$

burada $\tilde{z}=\varphi(\tilde{w})$, $\tilde{w}=\Phi(\tilde{z})$, olacağından

$$h_n(\tilde{z})=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=r}\left[\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)-\varphi(\tilde{w})}-\frac{1}{\tau-\tilde{w}}\right]\left\{F_1(\tau)-\sum_{k=0}^{n}g_k^{(n)}a_k\tau^k\right\}d\tau \qquad (2.3.14)$$

elde edilir.

Lemma 2.2.2 gereği (2.3.9) integrali mutlak yakınsak olduğundan (2.3.7)' den

$$|h_n(\tilde{z})|<\frac{A_{29}}{n^{\alpha}} \qquad (2.3.15)$$

buluruz.

$$f(\tilde{z})-\sum_{k=0}^{n}g_k^{(n)}a_k\Phi_k(\tilde{z})=\lambda(\tilde{z})-\mu(\tilde{z})-$$

$$-\sum_{k=0}^{n}g_k^{(n)}a_k[\Phi(\tilde{z})]^k-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{1}{\tau-\tilde{z}}\sum_{k=0}^{n}g_k^{(n)}a_k[\Phi(\tau)]^k\,d\tau=$$

$$=\lambda(\tilde{z})-\sum_{k=0}^{n}g_k^{(n)}a_k[\Phi(\tilde{z})]^k+h_n(\tilde{z})d\tau=$$

olduğundan (2.3.7) ve (2.3.15) eşitsizliklerinden

$$\left|f(\tilde{z})-\sum_{k=0}^{n}g_k^{(n)}a_k\Phi_k(\tilde{z})\right|<\frac{A_{30}}{n^{\alpha}}\,\tilde{z}\in\gamma$$

bulunur.

Modülün maksimumu hakkında teoreme göre, (Başkan, 1998) sonuncu eşitsizlik herbir $z\in\overline{D}$ için sağlanacaktır. Bununla (2.3.4) eşitsizliğinin, yani Teorem 2.3.1' in ispatı tamamdır.

Teorem 2.3.2 D bölgesi (J) koşulunu sağlar ve f(z), D ' de analitik. $\overline{D}$ ' de sürekli fonksiyonsa,

$$g_n(f,\overline{D}) < A_{31}.\omega\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (2.3.16)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $\omega(\delta)$, f(z) fonksiyonunun $\overline{D}$ ' de süreklilik modülüdür. A_{31} sabiti n'ye ve f(z)'ye bağımlı olmayıp, D'ye bağlıdır.

İspat: Lemma 2.3.3'de $F_1(w)$ fonksiyonu için

$$\omega(F_1,\delta) < A_9,\omega(f,\delta)$$

(eşitsizlik 2.2.11) eşitsizliğinin sağlandığını gördük.

$|\tilde{w}| = r$ için

$$q(\theta) = F_1(r.e^{i\theta}) = F_1(\tilde{w})$$

olsun. $q(\theta)$ periyodik fonksiyonun süreklilik modülü için,

$$\omega(q,\delta) < A_{32}\omega(F_1,\delta),$$

dolayısıyla,

$$\omega(q,\delta) < A_{33}\omega(f,\delta) \qquad (2.3.17)$$

olacaktır.

$q(\theta)$ fonksiyonu için

$$|q(\theta) - T_n(\theta)| < 6.\omega\left(q,\frac{1}{n}\right)$$

eşitsizliğini sağlayan 2n-2 dereceli $T_n(\theta)$ trigonometrik polinomu vardır. (Natanson, 1954). Bu polinomu,

$$T_n(\theta) = \sum_{k=0}^{2n-2} g_k^{(n)}.a_k\theta^k$$

şekilde ifade edebiliriz. Burada, a_k' lar $q(\theta)$ fonksiyonunun Fouriyer serisine açılımındaki katsayılar ve

$$g_k^{(n)} = 1 - \frac{k}{n}$$

dir.

Lemma 2.2.4 gereği $F_1(\tilde{w})$'nin Taylor serisi ile $q(\theta)$'nın Fouryer serisi aynı olduğundan,

$$\left| F_1(\tilde{w}) - \sum_{k=0}^{2n-2} g_k^{(n)} a_k \tilde{w}^k \right| < 6.\omega\left(q, \frac{1}{n}\right), |\tilde{w}| = 1 \qquad (2.3.18)$$

olur. Burada,

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=r} \frac{F_1(\tau)}{\tau^{k+1}} d\tau$$

olup, $F_1(\tilde{w})$ fonksiyonunun Taylor serisine açılımının katsayısıdır.

Teorem 2.3.1'in ispatında yararlandığımız $h_n(z)$ fonksiyonu Teorem 2.3.2'nin hipotezleri gereği yine de, γ'nın dışının kapanışında (yani $\overline{D}^c$' de) süreklidir. Ayrıca, $h_n(z)$ fonksiyonunun sınır değeri için de (2.3.13) eşitliği sağlanacaktır. Buna göre, $h_n(\tilde{z})$, $\tilde{z} \in \gamma$ sınır değeri için (2.3.14) eşitliği doğrudur. O halde (2.3.15) eşitsizliğine benzer şekilde,

$$|h_n(\tilde{z})| < A_{34}\omega\left(q, \frac{1}{n}\right) \qquad (2.3.19)$$

elde edilir.

$$f(\tilde{z}) - \sum_{k=0}^{2n-2} g_k^{(n)} a_k \Phi_k(\tilde{z}) = F_1(\tilde{w}) - \sum_{k=0}^{2n-2} g_k^{(n)} a_k \tilde{w}^k + h_n(\tilde{z})$$

eşitliği (2.3.18), (2.3.19) ve (2.3.17) eşitsizliklerinden

$$\left| f(\widetilde{z}) - \sum_{k=0}^{2n-2} g_k^{(n)} a_k \Phi_k(\widetilde{z}) \right| < A_{35}\,\omega\left(f, \frac{1}{n}\right), \widetilde{z} \in \gamma$$

buluruz. Buradan, modülün maksimumu hakkında teoreme göre herbir $z \in \overline{D}$ için

$$\left| f(\widetilde{z}) - \sum_{k=0}^{2n-2} g_k^{(n)} a_k \Phi_k(z) \right| < A_{36}\,\omega\left(f, \frac{1}{n}\right) \tag{2.3.20}$$

olur. Ayrıca, herbir $z \in \overline{D}$ için

$$g_n(f, \overline{D}) \le \left| f(z) - \sum_{k=0}^{2n-2} g_k^{(n)} a_k \Phi_k(z) \right|$$

olduğundan (2.3.20)' den (2.3.16)'nın doğruluğu görülmektedir.

Şimdi f(z) fonksiyonuna Faber polinom üzre seriye açılımının kısmi toplamları ile yaklaşım problemini inceleyelim.

Teorem 2.3.3 Eğer, D bölgesi (J) koşulunu sağlar ve f(z) D' de analitik, $\overline{D}$ ' da sürekli bir fonksiyon ise, herbir $z \in \overline{D}$ ve $\forall n > 1$ için

$$\left| f(\widetilde{z}) - \sum_{k=0}^{2n-2} a_k \Phi_k(z) \right| < A_{37} g_n(f, \overline{D}).\ell n n \tag{2.3.21}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $A_{37} > 0$, n'ye bağlı olmayan sabittir.

İspat: Teoremin hipotezi gereği f(z), $\overline{D}$ ' da sürekli, $\varphi(w)$, $|w| \ge r$ ' de sürekli olduğundan, (Teorem 2.1.2 (Uyarı))

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k w^k \right| \le A_1 \operatorname*{maks}_{z \in D} |f(z)|. \ln n \tag{2.3.22}$$

eşitsizliği sağlanacaktır (Lemma 2.2.1). (2.3.8) gereği $z \in D^c = CID$ için

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k [\Phi(z)]^k + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\tau - z} \sum_{k=0}^{n} a_k [\Phi(\tau)]^k d\tau \qquad (2.3.23)$$

olacaktır (Gakhov, 1977).

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k \tau^k}{\tau - \widetilde{w}} d\tau = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} a_k \widetilde{w}^k, \ \widetilde{w} = \Phi(\widetilde{z}), |\widetilde{w}| = r$$

olduğundan,

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} a_k [\Phi(\widetilde{z})]^k + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\tau - \widetilde{z}} \sum a_k [\Phi(\tau)]^k d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=r} \left[\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau) - \varphi(\widetilde{w})} - \frac{1}{\tau - \widetilde{w}} \right] \sum_{k=0}^{n} a_k \tau^k d\tau \qquad (2.3.24)$$

$\widetilde{w} = \Phi(\widetilde{z})$, $\widetilde{z} \in \gamma$ elde edilir. (2.3.22)' de $D^c \ni z \to \widetilde{z} \in \gamma$ iken limite geçilir, (2.3.23) ve (2.3.24) dikkate alınırsa,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(\widetilde{z}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \widetilde{w}^k + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=r} \left[\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau) - \varphi(\widetilde{w})} - \frac{1}{\tau - \widetilde{w}} \right] \sum_{k=0}^{n} a_k \tau^k d\tau$$

buluruz. (2.2.3) eşitsizliği, Lemma 2.2.2 ve sonuncu formülden her bir $\widetilde{z} \in \gamma$ için

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(\widetilde{z}) < A_{38} \max_{z \in D} |f(z)| \ell nn \qquad (2.3.25)$$

bulunur.

$$S_n(f, z) = S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z)$$

olsun. $P_n(z)$, $\overline{D}$ ' da f(z) fonksiyonuna en iyi yaklaşan n. dereceli polinom olsun.

$$S_n(P_n, z) = P_n(z)$$

$$|f(z)-P_n(z)| \le g_n(f,\overline{D}) \qquad (2.3.26)$$

olduğu açıktır. Her bir $z \in \overline{D}$ için

$$\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z)\right| = \left|[f(z)-P_n(z)] + [P_n(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z)]\right| = |[f(z)-P_n(z)] +$$

$$+[S_n(P_n,z)-S_n(f,z)]| = |[f(z)-P_n(z)] + S_n(P_n - f,z)| \qquad (2.3.27)$$

yazılabilir.

Öte yandan, (2.3.25) eşitsizliği gereğince

$$|S_n(P_n - f,z)| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z)\right| \le A_{39} \operatorname*{maks}_{z\in \overline{D}} |f(z)-P_n(z)|.\ell nn,$$

burada $\Phi_k(z)$ $f(z)-P_n(z)$ fonksiyonunun Faber polinomudur, olduğundan (2.3.27) eşitliği ve (2.3.26) eşitsizliğinden her bir $z \in \overline{D}$ için

$$\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z)\right| < g_n(f,\overline{D}) + A_{31} g_n(f,\overline{D}).\ell nn,$$

dolayısıyla,

$$\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z)\right| < A_{32} g_n(f,\overline{D}).\ell nn$$

buluruz. Bununla Teorem 2.3.3' ün ispatı tamamdır.

Teorem 2.3.2 ve Teorem 2.3.3' den aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

Sonuç 1. Eğer D bölgesi (J) koşulunu sağlar, f(z), D' de analitik ve $\overline{D}$ ' da sürekli ise her bir $z \in \overline{D}$ ve her bir n>1 için,

$$\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z)\right| < A_{33}\omega\left(f,\frac{1}{n}\right).\ell nn \qquad (2.3.28)$$

eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 2. Eğer, D bölgesi (J) koşulunu sağlar, f(z), D' de analitik, $\overline{D}$ ' da sürekli ve

$$\lim_{\delta\to 0^+} \omega(f,\delta).\ell n\delta = 0$$

ise f(z) fonksiyonu $\overline{D}$ ' da düzgün yakınsak

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi_k(z)$$

serisi şeklinde yazılabilir.

3. Bölüm

Kapalı Eğri Üzerinde Tanımlı Fonksiyonlara Yaklaşım

3.1. Gerekli Önermeler

İleride γ ile orijini içine alan kapalı Lyapunov eğrisini göstereceğiz. Eğer, γ eğrisi kompleks düzlemde

$$t = t(s) = \chi(s) + iy(s), \ \ 0 < s < \ell = mes\gamma$$

denklemiyle gösterilirse t(s) fonksiyonunun $t'(s)$ türev fonksiyonu Hölder sınıfındandır ve sıfır değildir (Muskhelisvili, 1992). Ayrıca, t(s) noktasında γ eğrisine çizilen teğetin Ox ekseninin pozitif yönü ile oluşturduğu $\theta(s)$ açı fonksiyonu da aynı üstle Hölder sınıfından olur.

γ üzerinde tanımlı

$$\Delta_2 f^{(p)} = f^{(p)}[t(s+h)] + f^{(p)}[t(s-h)] - 2f^{(p)}[t(s)] = O(h)$$

koşulunu sağlayan f(t) fonksiyonlar kümesini Z(p) ile gösterelim.

Lemma 3.1.1. Eğer $f \in Z(o)$ ise $0 < \alpha < 1$ için $f \in H_\alpha(\gamma)$ ' dır.

İspat: f[t(s)]=F(s) olsun

$$F_h(s) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} F(s+\tau)d\tau$$

(Steklov) fonksiyonunu ele alalım. Kolaylıkla göstermek olur ki,

$$F_h'(s) = \frac{1}{2h}[F(s+h) - F(s-h)] \qquad (3.1.1)$$

dır.

Bu eşitliğin doğruluğu

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{F_h(s+\Delta)-F_h(s)}{\Delta}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\lim_{\Delta\to 0}\frac{F(s+\tau+\Delta)-F_h(s+\tau)}{\Delta}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}F'(s+\tau)d\tau$$

eşitliğinden açıktır.

$$F_h(s)-F(s)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\{f[t(s+\tau)]-f[t(s)]\}d\tau$$

ve $f\in Z(o)$ olduğundan,

$$F_h(s)-F(s)=O(h) \qquad (3.1.2)$$

olacaktır.

$F_h(s)-F(s+\Delta s)$ farkını değerlendirelim.

$$|F_h(s+\Delta s)-F(s)|=|F(s+\Delta s)-F_h(s+\Delta s)+F_h(s+\Delta s)-$$

$$-F_h(s)+F_h(s)-F(s)|\le|F(s+\Delta s)-F_h(s+\Delta s)|+$$

$$+|F_h(s+\Delta s)-F_h(s)|+|F_h(s)-F(s)|$$

yazılabilir. Buna göre, (3.1.1) ve (3.1.2) gereğince

$$F(s)-F(s+\Delta s)=O(h)+O(\Delta s h^{-1}) \qquad (3.1.3)$$

olur. $h=\sqrt{\Delta s}$ alınırsa,

$$F(s)-F(s+\Delta s)=O\left(\sqrt{\Delta s}\right)$$

olur. Bu eşitlikten ve (3.1.1)' den

$$F_h'=O(h^{-1/2})$$

elde edilir. Bu durumda (3.1.3) değerlendirmesi

$$F(s)-F(s+\Delta s)=O(h)+O(\Delta s h^{-1/2})$$

şeklinde olur. $h=(\Delta s)^{1-1/3})$ alınırsa,

$$F(s)-F(S+\Delta S)=O\left((\Delta s)^{1-1/3}\right),$$

olur. Buradan da (3.1.1) gereğince

$$F_h'=O(h^{-1/3})$$

bulunur.

Prosedürü devam ettirirsek (n-1). adımda

$$F(s)-F(s+\Delta s)=O\left((\Delta s)^{1-1/n}\right)$$

buluruz.

$$f(t)-f(t+\Delta t)=F(s)-F(s+\Delta s)$$

ve $\Delta s=O(\Delta t)$ olduğundan,

$$f(t)-f(t+\Delta t)=O(|\Delta t|^{1-1/n})$$

elde edilir. Bu ise $f\in H_{1-1/n}(\gamma)$ demek oluyor.

$w=\Phi(z)$, γ 'nın dışını yani (D^c)'yi $|w|=1$ birim çemberinin dışına (yani, $|w|>1$ ' e) dönüştüren konform dönüşüm olsun. $\Phi(\infty)=\infty$ ve $\Phi'(\infty)>0$ koşulları sağlansın. $\varphi(w)=z$, $\Phi(z)$ fonksiyonunun tersi, yani $|w|>1$ 'i D^c 'ye dönüştüren konform dönüşüm olsun.

∞ ' un komşuluğunda $\Phi(z)$ fonksiyonu (Markuşeviç, 1950).

$$\Phi(z)=\alpha_0 z+\beta_0+\beta_1 z^{-1}+\beta_2 z^{-2}+\ldots\ldots$$

şeklinde yazılabilir.

Buna göre,

$$\Phi^k(z) = \alpha_0{}^k z^k + \alpha_1 z^{k-1} + ... + \alpha_k + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + ...$$

olur.

$$\Phi_k(z) = \alpha_0{}^k z^k + \alpha_1 z^{k-1} + ... + \alpha_k$$

polinomu γ eğrisi için k. dereceli Faber polinomudur.

$$\Phi^k(z) - \Phi_k(z) = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + ...$$

fonksiyonu γ dışında analitik ve sonsuzlukta sıfırdır $\left[\Phi^k(\infty) - \Phi_k(\infty) = 0\right]$. O halde, Cauchy Teoremi gereği (Başkan, 1998).

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\Phi^k(t) - \Phi_k(t)}{t - z} dt = \Phi_k(z) - \Phi^k(z), \quad z \in D^C \qquad (3.1.4)$$

olur.Cauchy İntegral Formülü gereği (Başkan, 1998).

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\Phi_k(t)}{t - z} dt = 0, \quad z \in D^C \text{ ise}$$

olduğundan (3.1.4)' den

$$\Phi_k(z) = \Phi^k(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\Phi^k(t)}{t - z} dt, \quad z \in D^C \text{ ise} \qquad (3.1.5)$$

buluruz.

Lemma 3.1.2 Eğer *γ üzerinde $f \in Z(o)$* ise $|w| = 1$ çemberi üzerinde $f[\varphi(w)] \in Z(o)$' dır.

İspat: $w = e^{i\theta}$, $w(\theta) = f[\varphi(w)]$,

$$\Delta_2\omega(\theta) = f(t+\Delta_t) + f(t+\Delta_2 t) - 2f(t),$$

$$\Delta_1 t = \Psi(\theta + h) - \Psi(\theta),$$

$$\Delta_2 t = \Psi(\theta - h) - \Psi(\theta),$$

$$\Psi_1(\theta) = \varphi(w) = \varphi(e^{i\theta}),$$

olsun.

$$\Delta_1 t = h\int_0^1 \Psi'(\theta + h\tau)d\tau,$$

$$\Delta_2 t = -h\int_0^1 \Psi'(\theta - h\tau)d\tau$$

gösterimleri ve $\Psi'(\theta) \in H_\alpha(\gamma_0)$ $(\Psi'(\theta) = \varphi'(w)ie^{i\theta}$ ve $\varphi'(w)$ $|w| = 1$' de sürekli, sıfırdan farklı (bkz. 2.1' in sonu, uyarı) ve buna göre de $\gamma_0 = \{W : |w| = 1\}$ de α üstü ile Hölder sınıfından olduğundan, $\Psi'(\theta) \in H_\alpha(\gamma_0)$ olur) gereğince

$$\Delta_1 t = \Psi'(\theta)h + O(h^{1+\alpha}),$$

$$\Delta_2 t = -\Psi'(\theta)h + O(h^{1+\alpha})$$

bulunur.

$s=s(t)$ $t=t(s)$ fonksiyonunun ters fonksiyonu olsun. O halde, benzer şekilde,

$$\Delta_1 s = s'(t).\Delta_1 t + O(|\Delta_1 t|^{1+\alpha}),$$

$$\Delta_2 s = -s'(t).\Delta_2 t + O(|\Delta_2 t|^{1+\alpha})$$

olur. $\Delta_1(t)$, $\Delta_2(t)$' nin ifadelerinden ve son iki eşitlikten

$$\Delta_1 s = c.h + O(h^{1+\alpha}),$$

$$\Delta_2 s = -c.h + O(h^{1+\alpha})$$

$$c = \left|\frac{dt}{d0}\right|$$

bulunur.

Şimdi, Lemma 3.1.1 gereğince,

$$|\Delta_2\omega(o)| = |F(s+\Delta_1 s) + F(s+\Delta_2 s) - 2F(s)| \leq$$

$$\leq |F(s+c.h) + F(s-c.h) - 2F(s)| +$$

$$+ |F(s)+c.h) - F(s+\Delta_1 s)| + |F(s-c.h) - F(s+\Delta_2 s)| =$$

$$= O(h)$$

olur. Burada, F(s)=f[t(s)]' dir. Bununla Lemma 3.1.2' nin ispatı tamamdır.

Not: Lemma 3.1.2'nin ispatına benzer olarak gösterilebilir ki, γ_0 üzerinde $f(w) \in Z(o)$ ise γ *üzerinde* $f[\Phi(t)] \in Z(o)$, $w = \Phi(t)$ ' dir.

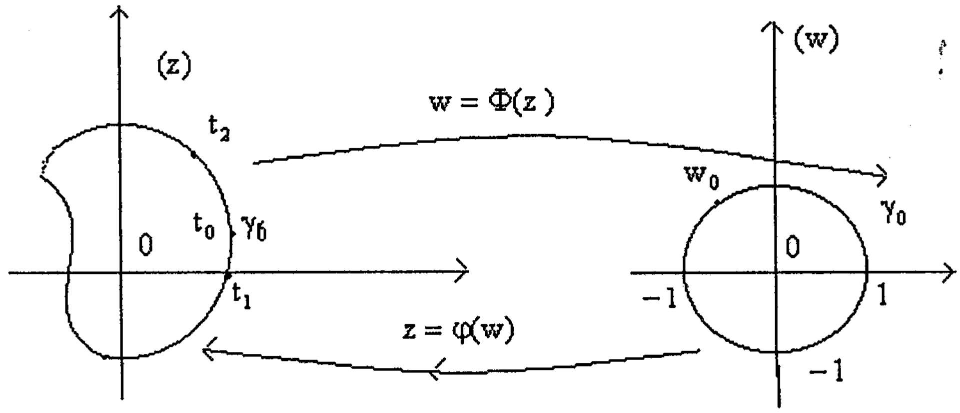
Lemma 3.1.3: γ eğrisinin merkezi $t_0 \in \gamma$ noktasında, γ üzre uzunluğu 2σ olan yayını γ_σ ile, kalan kısmını da $\gamma - \gamma_\sigma$ ile gösterelim. γ_0'ın $w = \Phi(t)$ dönüşümü zamanı γ_σ ve $\gamma - \gamma_\sigma$' ya karşılık gelen kısımlarını sırasıyla γ_0^σ ve $\gamma_0 - \gamma_0^\sigma$ ile gösterelim. t_1 ve t_2 ,γ_σ yayının uç noktaları olsun. Bu taktirde $t + \Delta t \neq t_2$ ve $\Delta t = O(\sigma)$, yani $\lim\limits_{\sigma\to 0}\frac{\Delta t}{\sigma} = 0$ ise

$$\min_{w\in\gamma_0-\gamma_0^\sigma}|w - w_0| > c.\sigma, \quad w_0 = \Phi(t_0)$$

$$\left|\ell n\frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0} - \ell n\frac{t_1 - t_0 - \Delta t}{t_2 - t_0 - \Delta t}\right| = O(|\Delta t|)$$

olur.

İspat:



Şekil 3.1.1

$$|t-t_0| = |\varphi(w)-\varphi(w_0)| \le |w-w_0|.\underset{\tau\in\gamma_0}{maks}|\varphi'(\tau)| = M.|w-w_0|,$$

$$M = \underset{\tau\in\gamma_0}{\text{maks}}|\varphi'(\tau)|$$

olduğundan,

$$|w-w_0| \ge \frac{t-t_0}{M}$$

olur. Ayrıca, $t \in \gamma-\gamma_\sigma$ için $|t-t_0| > c.\sigma$ olduğundan, $\forall w \in \gamma_0-\gamma_0^\sigma$ için,

$$|w-w_0| > c.\sigma,$$

olur. Dolayısıyla,

$$\min_{w\in\gamma_0-\gamma_0^\sigma}|w-w_0| > c.\sigma,$$

olduğu elde edilir.

Lemmadaki ikinci değerlendirme t_0'ın $|\Delta t|$ komşuluğunda $\ell n\dfrac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0}$ fonksiyonunun bire – bir ve türevinin de

$$c_1 \frac{\sigma + o(\sigma)}{\sigma - o(\sigma)} < c_2$$

den küçük olmasından görülür.

3.2. Cauchy Singüler İntegralinin Sınır Değeri Üzerine

Teorem 3.2.1 Eğer, γ üzerinde $f \in Z(p), p \in N$ ise γ üzerinde $sf \in Z(p)$' dir.

Burada,

$$sf(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)}{t - t_0}dt, \quad t_0 \in \gamma$$

dır.

İspat: Herbir $p \in N$ için

$$(sf)^{(p)}(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{f^{(p)}(t)}{t - t_0}dt, \quad t_0 \in \gamma$$

olduğundan (Gakhov, 1977), teoremi p=0 için ispatlamak yeter.

$$I_1 = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_0} \frac{f[\varphi(w)]}{w - w_0}dw,$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_0^\sigma} \{f[\varphi(w)] - f[\varphi(w_0)]\}\left[\frac{\varphi'(w)}{\varphi(w) - \varphi(w_0)} - \frac{1}{w - w_0}\right]dw,$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma - \gamma_\sigma} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}dt,$$

$$I_4 = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_0 - \gamma_0^\sigma} \frac{f[\varphi(w_0)] - f[\varphi(w)]}{w - w_0} dw$$

olmak üzere

$$sf = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

şeklinde yazalım.

A.Zygmund teoremine (Zygmund, 1945) ve Lemma 3.1.2' ye göre $\Delta_2 I_1 = O(h)$, yani $I_1 \in Z(o)$ olur. I_2' yi değerlendirelim.

Kolaylıkla gösterilebilir ki,

$$K(w, w_0) = \frac{\varphi'(w)}{\varphi(w) - \varphi(w_0} - \frac{1}{w - w_0} =$$

$$= \frac{1}{\varphi(w) - \varphi' w_0)} \cdot \int_0^1 \{\varphi'(w) - \varphi'[w_0 + (w - w_0)\tau\} d\tau$$

dir. Ayrıca,

$$\varphi'(w) \in H_\alpha(\gamma_0),$$

$$|\varphi(w) - \varphi(w_0| \geq \left|\frac{t - t_0}{s - s_0}\right| |w - w_0| \min_{\tau \in \gamma_0} |\varphi'(\tau)|$$

olduğundan,

$$K(w, w_0) = 0 \left(|w - w_0|^{\alpha - 1}\right)$$

olur.

Lemma 3.1.1 gereğince, $\forall \varepsilon > 0$ için $(0 < \varepsilon < 1)$

$$f[\varphi(w)] - f[\varphi(w)] = 0 \left(|w - w_0|^{1-\varepsilon}\right)$$

olduğundan,

$$I_2 = 0\left(\int_{\gamma_0^\sigma} |w-w_0|^{\alpha-\varepsilon}|dw|\right) = 0\left(\sigma^{1+\alpha-\varepsilon}\right)$$

olur. $\sigma = 0\left(h^{1-\alpha/4}\right)$ *ve* $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{2}$ alınırsa,

$$I_2 = 0(h)$$

elde edilir. Buna göre,

$$\Delta_2 I_2 = 0(h)$$

olur.

$\Delta_2 I_3$'ü değerlendirmek için

$$\Delta_2 I_3 = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma-\gamma_\sigma}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0-\Delta_1 t}dt + \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma-\gamma_\sigma}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0-\Delta_2 t}dt -$$

$$-2.\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma-\gamma_\sigma}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}dt + \left\{f(t_0)\frac{1}{\pi i}\Delta_2\left(\ell n\frac{t_1-t_0}{t_2-t_0}\right) - \Delta_2\left[f(t_0)\frac{1}{\pi i}\ell n\frac{t_1-t_0}{t_2-t_0}\right]\right\}$$

şeklinde yazalım.

Lemma 3.1.3 dikkate alınırsa

$$f(t_0)\frac{1}{\pi i}\Delta_2\left(\ell n\frac{t_1-t_0}{t_2-t_0}\right) - \Delta_2\left[f(t_0)\frac{1}{\pi i}\ell n\frac{t_1-t_0}{t_2-t_0}\right] = 0(h)$$

olduğunu görebiliriz.

Öte yandan,

$$\frac{1}{t-t_0-\Delta_1 t} + \frac{1}{t-t_0-\Delta_2 t} - \frac{2}{t-t_0} = \frac{\Delta_1 t + \Delta_2 t}{(t-t_0)(t-t_0-\Delta_1 t)} +$$

$$+\frac{\Delta_2 t(\Delta_1 t-\Delta_2 t)}{(t-t_0)(t-t_0-\Delta_1 t)(t-t_0-\Delta_2 t)}$$

olduğundan,

$$\Delta_2 I_3=\frac{\Delta_1 t+\Delta_2 t}{\pi i}\int_{\gamma_0-\gamma_0^\sigma}\frac{f(t)-f(t_0)}{(t-t_0)(t-t_0-\Delta_1 t)}dt+$$

$$+\frac{\Delta_2 t(\Delta_1 t-\Delta_2 t)}{\pi i}\int_{\gamma_0-\gamma_0^\sigma}\frac{f(t)-f(t_0)}{(t-t_0)(t-t_0-\Delta_1 t)(t-t_0-\Delta_2 t)}dt+$$

$$+0(h)=G_1+G_2+0(h)$$

elde edilir.

Fakat,

$$\Delta_1 t+\Delta_2 t=t(s_0+h)+t(s_0-h)-2t(s_0)=0(h^{1+\alpha}),$$

$$\Delta_2 t(\Delta_1 t-\Delta_2 t)=0(h^2),$$

$$t-t_0-\Delta_1 t=0(t-t_0)=0(s-s_0)$$

dır.

Buna göre,

$$G_1=0(h^{1+\alpha})\int_{h^{1-\alpha/4}}^{0(1)}s^{-1-\varepsilon}ds=0(h),$$

$$G_2=0(h^2)\int_{h^{1-\alpha/4}}^{0(1)}s^{-2-\alpha}ds=0(h),$$

olur. Dolayısıyla,

$$\Delta_2 I_3=0(h)$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$\Delta_2 I_4 = 0(h)$$

olduğu gösterilebilir.

Bulunan değerlendirmeleri bir araya alırsak, $\Delta_2 sf = 0(h)$, yani $sf \in Z(o)$ olduğu anlaşılır.

3.3. Kapalı Eğri Üzerinde Tanımlı Fonksiyonlara Yaklaşım

Teorem 3.3.1: Eğer, w=f(z), γ (kapalı Lyapunov eğrisidir) üzerinde tanımlı ve $f \in Z(o)$ ise

$$g_n(f,\gamma) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

dir.

İspat:

$$\chi(\tau) = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_0}\frac{\Phi^+[\varphi(w)]}{w-\tau}dw,$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(t)}{t-z}dt,\ z \notin \gamma$$

fonksiyonunu ele alalım.

Teorem 3.2.1 gereği Φ^+ ve

$$\chi^+(w_0) = \frac{1}{2}\Phi^+[\varphi(w_0)] + \frac{1}{2}\chi(w_0)$$

fonksiyonları γ_0 üzerinde Z(o) sınıfındandırlar. O halde, Zygmund teoremi gereği

$$\chi^+(w_0) - P_n(w_0) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olacak şekilde n. dereceden bir

$$P_n(w_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k w_0^k$$

polinomu varolacaktır.

Gösterelim ki, $\{\Phi_k(t_0)\}$, $t_0 \in \gamma$ γ için Faber polinomu olmak üzere

$$P_n(t_0)=\sum_{k=0}^{n}a_k\phi_k(t_0)$$

polinomu

$$\Phi^+(t_0)-P_n(t_0)=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

eşitliğini sağlar.

$$\Phi_k(z)=\Phi^k(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\Phi^k(t)}{t-z}dt$$

$$=\Phi^k(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}w^kK(w,\tau)dw,$$

$$K(w,\tau)=\frac{\varphi'(w)}{\varphi(w)-\varphi(\tau)}-\frac{1}{w-\tau}$$

$$=\frac{1}{\varphi(w)-\varphi(\tau)}\int_0^1\{\varphi'(w)-\varphi'[\tau+(w-\tau)u]\}du,$$

$z=\varphi(\tau)\in D^C$ ise ve ayrıca,

$$K(w,\tau)=O\left(|w-\tau|^{\alpha-1}\right)$$

olduğundan,

$$\Phi_k(t_0)=w_0^k+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}w^kK(w,w_0)dw$$

bulunur.

Sohkotskiy Formüllerinden (Gokhov, 1977)

$$\Phi^+(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_\gamma\frac{\Phi^+(t)}{t-t_0}dt,$$

$$\int_{\gamma}\frac{\chi-\lfloor\phi(t)\rfloor}{t-t_0}dt-\int_{\gamma_0}\frac{\chi-(w)}{w-w_0}dw=0$$

olduğundan,

$$\Phi^+(t_0)=\chi^+(t_0)-\chi^-(t_0)$$

$$=\chi^+(t_0)+\frac{1}{2}\Phi^+(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{\Phi^+(w)}{w-w_0}dw$$

$$=\chi^+(w_0)+\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\Phi^+(w)K(w,w_0)dw$$

$$=\chi^+(w_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\varphi^+(w)K(w,w_0)dw$$

elde edilir.

$\Phi^+(t_0)$ *ve* $\Phi_k(t_0)$' ın ifadelerinden

$$\Phi^+(t_0)-\sum_{k=0}^{n}a_k\Phi_k(t_0)=\chi^+(w_0)-\sum_{k=0}^{n}a_k w_0^k+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\left[\chi^+(w)-\sum_{k=0}^{n}a_k w^k\right]K(w,w_0)dw$$

bulunur.

$$\int_{\gamma_0}K(w,w_0)dw=0(1),$$

$$\chi^+(w)-\sum_{k=0}^{n}a_k w^k=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olduğundan,

$$\Phi^{+}(t_0)-\sum_{k=0}^{n}a_k\Phi_k(t_0)=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

elde ederiz.

Benzer şekilde, değişken değiştirme ile, $\Phi^{-}(t_0)$ için

$$\Phi^{-}(t_0)-P_n\left(\frac{1}{t_0}\right)=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

eşitliğinin sağlanacağını göstermek olur.

$$f(t_0)=\Phi^{+}(t_0)-\Phi^{-}(t_0)$$

olduğundan, son iki eşitlikten

$$f(t_0)-R_n(t_0)=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

olacak şekilde n. dereceden

$$R_n(t_0)=\sum_{k=-n}^{n}b_k t_0^k$$

rasyonel polinomu varolacaktır.

Bulunan $R_n(t_0)$ rasyonel polinomu için

$$g_n(f,\gamma)\leq\left|f(t_0)-R_n(t_0)\right|$$

olduğundan teoremin ispatı tamamlanır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Alper, C.Y., 1955, O ravnomernılı priblijeniyalı funktsiy kompleksnogo peremennogo v zamknutoy oblasti, İAN SSSR, Ser.Mat., t.19, N:6, s.423-444.

Başkan, T., 1998, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Bursa.

Gakhov, F.D., 1977, Boundary problems, Nauka, Moscow.

Goluzin, G.M., 1966, Geometrical theory of functions of a complex variable Nauka, Moscow.

Markushevich, A.I., 1977, Theory of functions of a complex variable, 3 Vols, İnone, Chelsea, Publ, Co, NY.

Mergelyan, S.N., 1951, Nekotorıye voprosı konstruktivnoy teorii funktsiy, Trudı Matem. İn-ta im. V.A. Steklova Ak.nauk SSSR, T.37, M.

Muskhelishvili, N.İ.; 1992, Singular integral equations, Dover Publ, NY.

Natanson, I.P., 1954, Costructive theory of functions, Nauka, Moscow.

Sewell, W.E., 1942, Degrece of approximation by polynomials in the complex domain, Princ. Üniv. Press, London.

Sidorov, Y.B., Fedaryuk, M.B. and Şabunin, M.İ., 1989, Lekçii po teorii funkçiy kompleksnovo peremennovo, Moskova "Nauka".

Smirnov, I., Lebedyev, N.A., 1964, Konstruktivnaya Teoriya Funktsiy Kompleksnogo Peremennogo, İzdatelstvo "NAUKA", Moskova, Leningrad.

Zygmund, A., 1945, Smotthy Funktions, Duke Math. Journ., 12.

Zygmund, A., 1968, Trigonometriceskiye ryadı, M.L. Trigonometric series Vol, I, II, Cambridge Üniv, Press, London – New York.