AYRIK SİSTEMLER İÇİN KONTROL TEORİ

Burcum ÖZDEMİR

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2002

AYRIK SİSTEMLER İÇİN KONTROL TEORİ

Burcum ÖZDEMİR

Dumlupınar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Prof. Dr. Ömer AKIN

Haziran-2002

KABUL VE ONAY SAYFASI

Burcum ÖZDEMİR'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı AYRIK SİSTEMLER İÇİN KONTROL TEORİ başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

25/06/2002

Üye : Prof. Dr. Ömer AKIN (Danışman)

Üye : Prof. Dr. Fehad NASİBOV

Üye : Yrd. Doç. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsün Yönetim Kurulu'nun 25/06/2002 gün ve 09 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. İ. Göktay EDİZ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

AYRIK SİSTEMLER İÇİN KONTROL TEORİ

Burcum ÖZDEMİR
Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2002
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ömer AKIN

ÖZET

Bu tezin amacı uygulamalı matematiğin ve mühendisliğin çeşitli dallarında kullanılan kontrol teoriyi özellikle matematikçilere tanıtmaktır. Bu nedenle kontol teori ile ilgili tüm temel bilgileri detaylı biçimde ortaya koymaktadır. Tezde Lineer cebir, sonlu fark denklem sistemleri ve diferensiyel denklem sistemleri ile ilgili bilgiler temel olarak kullanılmıştır. Kontrol teori ile ilgili araştırmaları takip edebilmek ve yeni araştırmalar yapabilmek için gerekli olan temel bilgileri vermek ve araştırmayı yönlendirmek tezin amaçları arasındadır.

Yukarıda belirtilen amaçlar doğrultusunda hazırlanan bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezde kullanılacak temel kavramlar ve özellikleri üzerinde durulmuştur. İkinci bölümde sürekli sistemler için kontroledilebilirlik, erişilebilirlik, dualite ve aralarındaki ilişkiler üzerinde durulmuştur. Tezin esas kısmı olan üçüncü bölümde ayrık sistemler için kontrol teori detaylı olarak incelenmiş, teoremler (ispatları ile birlikte) ve örnekler verilmiştir. Tezin dördüncü ve son bölümü kontrol teorinin MATLAB yazılımı yardımı ile bilgisayar uygulamalarına ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Ayrık Sistemler, Kontrol, Kontroledilebilirlik, Kontrol Sistemler.

CONTROL THEORY FOR THE DISCRETE SYSTEMS

Burcum ÖZDEMİR
Department of Mathematics, M.Sc. Thesis, 2002
Thesis Supervisor: Prof. Dr. Ömer AKIN

SUMMARY

The aim of this thesis is to introduce control theory, speacialy to mathematicians, which has been used in applied mathematics and some branches of engineering. Therefore all fundamental knowledge related to control theory in details will be presented here. In this work, notions related to linear algebra, systems of finite differences and systems of differential equations are used as the basis of this study. One of the aims of this thesis to give fundamental knowledge to understand articles and do works related to control theory.

Under the aims mentioned above, this thesis consists of four parts. In the first part, we take attention to basic notions and properties used in the thesis. In the second part, the controllability, reachability, duality and some relations among them for the continious systems are examined. In the third part, which is the main part of the thesis, we examined the control theory for the discrete systems, give theorems (with proofs) and some examples. In the fourth and the last part, we give some applications of the discrete control theory by using the software of MATLAB.

Keywords: Control, Controllability, Control Systems, Discrete Systems.

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren, tezin hazırlanması sırasında çalışmalarımı sabırla yönlendiren ve yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam, sayın

Prof. Dr. Ömer AKIN'a,

Bu günlere gelmemde büyük payı olan üniversitemizin rektörü Sayın.Prof.Dr.İ.Hakkı DÜĞER'e, Bölüm başkanımız sayın Yrd. Doç. Dr. Murat ALP'e, gerek bilgisi ve gerek yardımları ile her zaman yanımda olan değerli hocam sayın Prof. Dr. Ferhat NASİBOV'a, bana herzaman destek olan Arş. Grv. Mine TURAN ve Arş. Grv. A. Funda YALINIZ'a, tezin yazımında bana yardımcı olan ve desteklerini esirgemeyen sevgili Esra ve Semra'ya Bilgisayar ile ilgili uygulamalarda bilgisinden yararlandığım Arş. Grv. Kadir VARDAR'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Ayrıca tüm yaşamım boyunca yanımda olan beni herzaman destekleyen aileme en içten sevgilerimle ...

Burcum ÖZDEMİR

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
R^n	$n \times 1$ tipindeki vektörlerin oluşturduğu uzay.
$R^{n \times n}$	$n \times n$ tipindeki vektörlerin oluşturduğu uzay.
$R^{n \times m}$	$n \times m$ tipindeki vektörlerin oluşturduğu uzay.
$\pounds$	Laplace dönüşümü.
$\pounds^{-1}$	Ters Laplace dönüşümü.
$x(t)$	Durum vektörü.
$u(t)$	Girdi (kontrol) vektörü.
W	Kontrol edilebilirlik matrisi.
R_r	Erişilebilir alt uzay.
R_c	Kontrol edilebilir alt uzay.
W_r	Erişilebilirlik Gramianı.
W_c	Kontrol edilebilirlik Gramianı.
$\Re(W)$	W'nin değer kümesi.
A^T	A matrisinin transpozu.
x_1	Ulaşılması istenen durum.
x_0	Başlangıç durumu.

GİRİŞ

Otomatik kontrol sistemleri günümüzde ileri toplumların günlük yaşantısına girmiş ve hemen hemen her alanda kullanılmaktadır. Evlerde kullanılan otomatik çamaşır makinası, otomatik bulaşık makinası, termostatlı fırınlar, ütüler, endüstriyel ve araştırma alanında kullanılan robotlar, mikro işlemciler, bilgisayarlar, uzay taşıtları vb. kontrol sistemleri üretimi ve üretim kalitesini sürekli olarak arttırmakta olup hayatımıza etki etmektedirler. Kontrol sistemleri herhangi bir endüstri toplumunun tamamlayıcı bir parçası olup, artan dünya nüfusunun ihtiyaç malzemelerini üretmek için gereklidir. Bu ihtiyacın sağlıklı bir biçimde karşılanabilmesi kontrol sistemlerinin işlevlerini uygun bir biçimde yapmasına bağlıdır.

Kontrol sistemlerindeki incelemeler geniş anlamda uygulamalı matematiğin kullanım alanına girer. Kontrol sistemleri üzerinde yapılan çalışmaların temel amaçlarından biri analitik araçlar geliştirerek, tasarımcının bilgisayar benzetişimi ve uzun sıkıcı deneylere gerek duymaksızın öngörülebilir ve güvenilebilir tasarımlar yapabilmesini sağlamaktadır.

Sistemlerin kontrolü bilimler arası bir konudur ve tüm mühendislik alanlarına girer. Çok yönlü otomatik kontrol konusu bugün en ümit verici alanlardan birisi olarak sayılmakta ve sınırsız büyüyen bir potansiyel olarak ortaya çıkmaktadır. Kontrol döngüsü içinde bilgisayarların kullanımı bu konuyu daha da geniş kapsamlı hale getirmiştir. Kontrol sistemleri kısaca enerji, malzeme veya diğer kaynakların akışını düzenleyen aygıtlar olarak tanımlanır. Bunların düzenlenmesi, karmaşıklığı ve görünüşü kullanım amaçları ve işlevlerine göre değişir. Kontrol sistemleri kontrol edilen niceliklerini sabit tutar veya bu değerlerin önceden belirlenmiş biçimde değişimini sağlar.

Kontrol sistemlerinin tarihsel gelişimine göz atıldığında, ilginç kontrol sistemlerinin oluşturulduğu görülür. M.Ö. 430 yılında Taretumlu Achytas hayvan taklidi yapan oyuncak biçimi aygıtlar yaptı (otomatik güvercin). İskenderiyeli Ktesbios'un (Herin) M.Ö.285-247 de yaptığı su saati zamanı ölçmeye ve su kemerlerindeki su düzeyini sabit tutmaya çalışan sistemlerdi. Bizde 1205'li yıllarda yaşamış olan Cizreli Eb-ül-iz adında bir Türk bilgininin Diyarbakır'da otomatik makinalar yaptığı bilinmektedir (Yukarıdaki örneklerde geribesleme ilkesi kullanılmıştır).

Hollandalı C. Drebeelin (1572-1633) ve Fransız D. Papin (1647-1712) de geri besleme ilkesine dayalı kontrol sistemleri üzerinde çalışmalar yapmıştır. 1950'li yıllara kadar Endüstriyel alanda da bir çok çalışma yapılmıştır.

1950'li yılların sonlarında sayısal bilgisayarların geliştirilmesi, çok daha karmaşık otomatik kontrol sistemlerinin kurulmasına yol açtı. Bu doğrultuda oluşturulan sonuçlar eski "klasik kontrol" 'den ayırt edilebilmeleri amacıyla "modern kontrol" olarak adlandırıldı. Modern kontrol kavramı "durum uzayı" yaklaşımına dayanır ve 1960'larda yapılan tüm teorikl gelişmelerde bu yaklaşım kullanılmıştır.

Son yıllarda kontrol sistemlerinde kullanılan donanım açısından, ilk önce büyük ölçekli makinalar daha sonra minibilgisayarlar ve nihayet mikrobilgisayarlar olarak sayısal bilgisayarların çok yaygın olarak faydalandığı gözlenmiştir. 1980 ler ve daha sonraki yıllarda, mikrobilgisayarlar kontrol organları olarak diğer aygıtların yerini almaya devam etmiştir.

1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ilerleyen bölümlerde sıkça kullanacağımız bazı temel tanım ve sembolleri tanıtacağız.

1.1.Tanım (Durum Uzayı):, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Koordinat eksenlerini içeren n-boyutlu uzay **durum uzayı** (state space) olarak adlandırılır. Durum uzayında her durum bir nokta ile temsil edilebilir (Ogata,1987).

1.2.Tanım (Lineer Diferensiyel Denklem): n- mertebeden bir diferensiyel denklem;

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t) \tag{1.1}$$

şeklinde yazılır ve $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ katsayıları $y(t)$'nin bir fonksiyonu olmadığı sürece **lineer diferensiyel denklem** olarak adlandırılır (Kuo,1999).

1.3.Tanım (Durum Denklemleri) : (1.1) için;

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dfrac{dy(t)}{dt} \\ \vdots \\ x_n(t) = \dfrac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \end{cases} \tag{1.2}$$

dönüşümleri yapılırsa ,

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t) \\ \vdots \\ \dfrac{d\ x_n(t)}{dt} = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - \ldots - a_{n-2} x_{n-1}(t) - a_{n-1} x_n(t) + f(t) \end{cases} \tag{1.3}$$

sistemi elde edilir. (1.3) sistemindeki denklemlere (1.1)'in **durum denklemleri** denir (Kuo,1999).

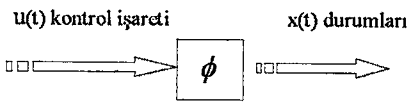
1.4.Tanım (Durum Değişkeni) : (1.3) sistemindeki $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ değişkenlerine **durum değişkenleri** denir (Kuo,1999).

1.5.Tanım (Girdi): Kontrol sisteminde belli bir cevap almak üzere bir dış enerji kaynağından sisteme uygulanan uyarıya **girdi** (input) denir (Yüksel,2001).

1.6.Tanım (Çıktı): Kontrol sisteminde sağlanan gerçek cevaba **çıktı** (output) denir (Yüksel,2001).

1.7.Tanım (Kontrol edilebilirlik): Bir sistemde, sistemin her bir durum değişkeni, eğer kısıtlandırılmamış $u(t)$ kontrol değişkeni ile, sonlu bir zamanda belirli hedefe ulaştırılabiliyor ise sisteme **tamamıyla kontrol edilebilir** denir.

Durum değişkenlerinden herhangi birinin, $u(t)$ kontrol değişkenine bağımlı olmaması halinde, bu özel durum değişkeni belirli bir kontrol gücüyle sonlu zamanda istenen bir duruma getirilemez. Bu nedenle böyle bir özel durum **kontrol edilemez** ve böyle bir kontrol edilemez durum bulunduğu sürece tüm sistem de **tamamıyla kontrol edilemez**, ya da kısaca **kontrol edilemez** denir (Kuo,1999). .



Lineer, otonom sistemde kontrol edilebilirlik kavramı

Şekil 1.1

1.8.Tanım (Kontrol edilebilirlik matrisi): $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ ile tanımlı sistemin $n \times nm$ boyutlu;

$$W = \left[B, AB, \cdots, A^{n-1}B\right]$$

matrisine **kontrol edilebilirlik matrisi** denir. Burada $A \in R^{n\times n}$ ve $B \in R^{n\times m}$ 'dir (Elaydi,1996).

1.9.Tanım (Gözlemlenebilirlik): x(t) durum vektörünün her bir bileşeni ya da sistemin herbir durumu $t_0 \leq t \leq t_1$ aralığında, u(t) ve y(t) kontrol ve çıkış vektörleri yardımı ile belirlenebiliyorsa sisteme **gözlemlenebilir sistem** denir (Sarıoğlu,1999).

1.10.Tanım (Yapılandırılabilirlik): x(t) durum vektörünün her bir bileşeni ya da sistemin herbir durumu $t_1 \leq t \leq t_0$ aralığında, u(t) ve y(t) kontrol ve çıkış vektörleri yardımı ile belirlenebiliyorsa sisteme **yapılandırılabilir sistem** denir (Sarıoğlu,1999).

1.11.Tanım (Sürekli Otonom Sistem) : $A \in R^{n\times n}$ ve $B \in R^{n\times m}$ olmak üzere;

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.4}$$

durum denklem sisteminde A ve B zamandan bağımsız ise sisteme lineer **sürekli otonom sistem** (continious time, time-invariant system) denir (Panos,1997). Burada sırasıyla;

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}_{(n\times 1)} \tag{1.5}$$

ve

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}_{(m\times 1)} \tag{1.6}$$

durum ve girdi vektörleridir.

1.12.Tanım (Durum Geçiş Matrisi): Lineer, otonom (1.4) sistemi verildiğinde, belirli bir $x(t_0)$ başlangıç durumu için $t \geq t_0$ olmak üzere;

$$\frac{dx(t)}{dt} = \phi(t)x(t) \tag{1.7}$$

lineer homogen sistemi sağlayan $\phi(t)$ matrisine **durum geçiş matrisi** denir (Panos,1997).

Durum geçiş matrisi $\phi(t)$;

1. $\phi(0) = I$ (birim matris) (1.8)

2. $\phi^{-1}(t) = \phi(-t)$ (1.9)

3. $\phi(t_2 - t_1)\phi(t_1 - t_0) = \phi(t_2 - t_0)$, $\forall t_0, t_1, t_2$ için (1.10)

4. $[\phi(t)]^k = \phi(kt)$, $k =$pozitif tamsayılar için (1.11)

özelliklerine sahiptir. Durum geçiş matrisinin 3. özelliği durum geçiş işlemini çok sayıda ardışık geçişe ayırmaya imkan verdiği için önemlidir (Kuo,1999).

1.13.Tanım (Sürekli Otonom Sistemler İçin Durum Geçiş Denklemi): Lineer, homogen olmayan (1.4) durum denklem sisteminin çözümüne, sürekli otonom sistemler için **durum geçiş denklemi** denir (Kuo,1999).

Lineer, otonom;

$$\frac{\mathrm{dx(t)}}{\mathrm{dt}} = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.12}$$

sistemi herhangi bir alışılagelmiş diferensiyel denklem çözme yöntemi ya da Laplace dönüşüm yöntemi kullanılarak çözülebilir. Laplace dönüşümü ile çözüm aşağıda verilmiştir.

Eğer (1.12)'de her iki tarafın Laplace dönüşümü alınırsa;

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \tag{1.13}$$

elde edilir. Burada $x(0)$ ile $t = 0$ anındaki başlangıç durum vektörü anlaşılır. (1.13) denkleminden $X(s)$;

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} BU(s) \tag{1.14}$$

bulunur. (1.12) denklemine ait durum geçiş denklemi, (1.14) denkleminde her iki tarafın ters Laplace dönüşümü alınarak elde edilir:

$$\begin{aligned} x(t) &= £^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]x(0) + £^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]BU(s) \\ &= \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau, \qquad t \geq 0 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Elde edilen (1.15) durum geçiş denklemi sadece başlangıç zamanı $t = 0$ olarak tanımlandığında geçerlidir. Başlangıç zamanının t_0 ve buna ait başlangıç durumunun $x(t_0)$ ile ifade edildiğini, $t \geq 0$ için sisteme $u(t)$ girişinin uygulandığını varsayalım. Önce $t \geq t_0$ alınır ve (1.9)'da verilen $\phi(t)$ özelliğinden yararlanarak, (1.15) denklemi $x(0)$ a göre düzenlenirse,

$$x(0) = \phi(-t_0)x(t_0) - \phi(-t_0)\int_0^{t_0} \phi(t_0 - \tau)Bu(\tau)d\tau \tag{1.16}$$

elde edilir. (1.16) denklemi (1.14)'e uygulanırsa;

$$x(t) = \phi(t)\phi(-t_0)x(t_0) - \phi(t)\phi(-t_0)\int_0^{t_0} \phi(t_0 - \tau)Bu(\tau)d\tau + \int_0^{t} \phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau \tag{1.17}$$

bulunur. Nihayet (1.10) özelliğinden yararlanılır ve (1.17) deki son iki integral birleştirilirse;

$$x(t) = \phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau, \quad t \geq t_0 \tag{1.18}$$

elde edilir . $t_0 = 0$ için (1.18) eşitliği (1.15) e dönüşür (Kuo,1999).

Sürekli otonom sistemler için durum geçiş denklemi; (1.15) denkleminde $t=T$ için T pozitif ve sonlu olmak üzere;

$$x_1 = e^{AT}x_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{1.19}$$

dir (Panos,1997). Burada x_1 ulaşılması istenen durum, x_0 ise başlangıç durumdur.

1.14.Tanım : Bir *u(t)* girdisi, $t \in [0, \mathrm{T}]$ olmak üzere, $x(t)$ durumunu $t = 0$ da orijinden sonlu bir T zamanında x_1 e geçirecek şekilde var ise x_1 **durumu erişilebilir** olarak adlandırılır (Panos,1997).

1.15.Tanım: Erişilebilir tüm durumların kümesi olan R_r'ye; $\dot{x} = \mathrm{A}x + \mathrm{B}u$ sisteminin veya *(A,B)* ikilisinin **erişilebilir alt uzayı** denir (Panos,1997).

1.16.Tanım: Eğer her durum erişilebilirse *($R_r=R^n$)*, $\dot{x} = Ax + Bu$ sistemi veya *(A,B)* ikilisi **(tamamıyla durum) erişilebilirdir** denir (Panos,1997).

1.17.Tanım: Bir *u(t)* girdisi, $t \in [0, \mathrm{T}]$ olmak üzere,, $x(t)$ durumunu $t = 0$ da x_0 dan orjine sonlu *T* zamanında geçirecek şekilde varsa, x_0 **durumu kontroledilebilir** olarak adlandırılır (Panos,1997).

1.18.Tanım: Kontroledilebilir tüm durumların kümesi R_c'ye, $\dot{x} = Ax + Bu$ sisteminin veya *(A,B)* ikilisinin **kontroledilebilir alt uzayı** denir (Panos,1997).

1.19.Tanım: Eğer her durum kontroledilebilirse $(R_c = R^n)$ $, \dot{x} = Ax + Bu$ sistemi veya *(A,B)* ikilisi **(tamamıyla durum) kontroledilebilirdir** denir (Panos,1997).

<u>**NOT:**</u>

$R_r = \{t_1 = T$ de erişilebilir tüm x_1 durumlarının kümesi $\}$

$R_c = \{t_0 = 0$ da (orijine) kontroledilebilir tüm x_0 durumlarının kümesi $\}$

1.20.Tanım*:* T pozitif ve sonlu olmak üzere;

$$W_r(0,\mathrm{T}) = \int_0^{\mathrm{T}} e^{(\mathrm{T}-\tau)\mathrm{A}} BB^{\mathrm{T}} e^{(\mathrm{T}-\tau)\mathrm{A}^{\mathrm{T}}} d\tau \qquad (1.20)$$

ile tanımlı $n \times n$ matrisine, $\dot{x} = Ax + Bu$ otonom sisteminin **erişebilirlik Gramianı** denir. W_r simetriktir ve $\forall \mathrm{T} > 0$ için pozitif yarısonludur, yani $W_r = W_r^T$ ve $W_r \geq 0$ dır. Daha önceden de tanımlandığı gibi $n \times mn$ boyutlu (orijinden) kontroledilebilirlik ya da diğer bir ifadeyle erişilebilirlik matrisi;

$$W = [B, AB, \cdots, A^{n-1}B]$$

biçimindedir. Otonom durumunda $W_r(0,\mathrm{T})$ nin değer kümesi $\Re(W_r(0,\mathrm{T}))$ ile gösterilir ve herhangi sonlu *T (>0)* için W kontroledilebilirlik matrisinin değer kümesine eşittir. Böylece bir sistemin erişilebilir alt uzayı R_r, W nin değer kümesi olan $\Re(W)$ ya da bazı sonlu *T>0* $\Re(W_r(0,\mathrm{T}))$ yardımı ile verilir (Panos,1997).

1.21.Tanım*:* *T* pozitif ve sonlu olmak üzere;

$$W_c(0,T) = \int_0^T e^{-A\tau} BB^T e^{-A^T\tau} d\tau \qquad (1.21)$$

ile verilen $n \times n$ matrisine otonom sistemler için **kontroledilebilirlik Gramianı** denir.

$$W_r(0,T) = e^{AT} W_c(0,T) e^{A^T T}$$

dir. Doğruluğu;

$$W_r(0,T) = \phi(T,0) W_c(0,T) \phi^T(T,0)$$

eşitliğinden kolayca görülür (Panos,1997).

1.22.Tanım (Dual Sistem): $A_D = A^T$, $B_D = C^T$, $C_D = B^T$ ve $D_D = D^T$ olmak üzere;

$$\dot{x}_D = A_D x_D + B_D u_D, \quad y_D = C_D x_D + D_D u_D \tag{1.22}$$

sistemine;

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad y = Cx + Du \tag{1.23}$$

sisteminin **duali** denir. Burada $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{p \times n}$ ve $D \in R^{p \times m}$ 'dir (Panos,1997).

1.23.Tanım (Ayrık Otonom Sistem): $A \in R^{n \times n}$ ve $B \in R^{n \times m}$ olmak üzere;

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{1.24}$$

durum denklem sisteminde A ve B zamandan bağımsız ise sisteme lineer **ayrık otonom sistem** (discrete time, time-invariant system) denir (Panos,1997).

1.24.Tanım (Ayrık Zamanlı Sistemler İçin Durum Geçiş Denklemi): Lineer, homogen olmayan (1.24) durum denklem sisteminin çözümüne, ayrık zamanlı otonom sistemler için **durum geçiş denklemi** denir (Kuo,1999).

$K > 0$ olduğunda, (1.24) sistemi için (Chen,1993)'den durum geçiş denklemi;

$$x_1 = \underbrace{A^K x_0}_{\substack{\text{sıfır-girdisi} \\ \text{cevabı}}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{K-1} A^{K-(i+1)} Bu(i)}_{\substack{\text{sıfır-durumunun} \\ \text{cevabı}}} \tag{1.25}$$

veya

$$x_1 = A^K x_0 + W_K U_K \tag{1.26}$$

dir (Panos,1997). Burada;

$$W_K = \left[B, AB, \cdots, A^{K-1}B\right] \tag{1.27}$$

ve

$$U_K = \left[u^T(K-1), u^T(K-2), \cdots, u^T(0)\right]^T \tag{1.28}$$

şeklinde tanımlıdır.

1.25.Tanım: Bir $u(k)$, $k \in [0, K]$ girdisi $x(k)$ durumunu k=0 da orijinden sonlu bir K zamanında x_1 e geçiriyorsa, x_1 **durumu erişilebilirdir** denir (Panos,1997).

1.26.Tanım: Erişilebilir tüm durumların kümesi R_r 'ye; $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ sisteminin veya *(A,B)* ikilisinin **erişilebilir alt uzayı** denir (Panos,1997).

1.27.Tanım: , Eğer her durum erişilebilirse ($R_r = R^n$ ise), $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ sistemi veya *(A,B)* ikilisi, **(tamamıyla durum) erişilebilirdir** denir.

1.28.Tanım: Bir $u(k)$ $k \in [0, K]$ girdisi; $x(k)$ durumunu k=0 da x_0 dan orijine sonlu K zamanda geçirecek şekilde varsa , x_0 **durumu kontroledilebilirdir** denir (Panos,1997).

1.29.Tanım: Kontroledilebilir tüm durumların kümesi olan R_c'ye; $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ sisteminin veya (A,B) ikilisinin **kontroledilebilir alt uzayı** denir (Panos,1997).

1.30.Tanım : Her durum kontroledilebilirse ($R_c = R^n$ ise), $\dot{x} = Ax(k) + Bu(k)$ sistemi veya *(A,B)* ikilisi **(tamamıyla durum) kontroledilebilirdir** denir (Panos,1997).

1.31.Tanım: (1.24) ile verilen sistem için;

$$W_r(0,K) = \sum_{i=0}^{K-1} A^{K-(i+1)} BB^T \left(A^T\right)^{K-(i+1)} \qquad (1.29)$$

$n \times n$ matrisine **Erişilebilirlik Gramianı** denir (Panos,1997).

$$W_r(0,K) = \sum_{i=0}^{K-1} A^i BB^T \left(A^T\right)^i = W_K W_K^T$$

eşitliğinden (1.29)'un doğruluğu görülebilir.

1.32.Tanım: (1.24) ile verilen sistem için;

$$W_c(0,K) = \sum_{i=0}^{K-1} A^{-(i+1)} BB^T \left(A^T\right)^{-(i+1)} \qquad (1.30)$$

$n \times n$ matrisine **Kontroledilebilirlik Gramianı** denir (Panos,1997).

$W_c(0,K)$ nın yalnızca A singüler olmadığında iyi tanımlı olduğuna dikkat edilmelidir. Erişilebilirlik ve kontroledilebilirlik Gramianları arasında;

$$W_r(0,K) = A^K W_c(0,K)\left(A^T\right)^K \qquad (1.31)$$

bağıntısı vardır.

A matrisi singüler olmadığında durumu, $k=0$ da x_0 dan $x_1=0$ a n adımda geçirecek girdi (3.14) ün kullanımıyla belirlenebilir. Geçişi yapacak girdiyi belirlemek için $U_n=\left[u^T(n-1),\cdots,u^T(0)\right]^T$ ifadesinin değerini bulmak gerekir. Bunun için de;

$$\left[A^{-n}W\right]U_n=\left[A^{-n}B,\cdots,A^{-1}B\right]U_n=x_0 \tag{1.32}$$

denklemini çözmek gerekir. x_0 ın kontroledilebilir olması için gerek ve yeter şartın $-A^n x\in\Re(W)$ veya $x_0\in\Re(A^{-n}W)$ olmasına dikkat edilmelidir. Bu, A'nın singüler olmadığı durum için sözkonusudur.

Kontroledilebilirlik durumunda (ve A nın singüler olmaması zannı ile) W nin yerine, $A^{-n}W$ matrisi ile ilgilenilir. Bu durumda, bir sistemin kontroledilebilir olması için gerek ve yeter şartın $rank\left(A^{-n}W\right)=rankW=n$ eşitliklerine dönüştüğüne dikkat edilmelidir (Panos,1997).

1.33.Tanım (Açık-Çevrimli Sistem): Kontrol sistemlerinde, kontrol eylemi sistem çıkışından bağımsız ise, kontrol sistemine **açık-çevrimli kontrol sistemi** denir (Yüksel, 2001).

1.34.Tanım (Kapalı-Çevrimli Sistem): Kontrol etkisinin sistem çıkışına bağlı olduğu sisteme **kapalı-çevrimli kontrol sistemi** denir (Yüksel, 2001).

Açık-çevrimli sistem ile kapalı-çevrimli sistemi birbirinden ayıran en önemli unsur geri besleme etkisidir.

1.35.Tanım (Geribeslemeli Sistem): Sistem çıkışı geribeslenerek girişe uygulandığında bu tür sistemlere **geri beslemeli sistemler** denir (Yüksel, 2001).

1.36.Tanım (Benzerlik dönüşümü): $x(t)$, $(n\times1)$ boyutlu durum vektörü, $u(t)$ ve $y(t)$ skalar giriş ve çıkış değişkenleri olmak üzere,

$$\frac{\mathrm{dx(t)}}{\mathrm{dt}} = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.33}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{1.34}$$

dinamik sistemleri verilmiş olsun. Durum uzayında analiz ve tasarım yapıldığında denklemleri özel bir şekle dönüştürmek genellikle kolaylık sağlar.

(1.33) ve (1.34) ile verilen bir sistemin, P tekil olmayan $(n \times n)$ boyutlu bir matris olmak üzere,

$$x(t) = P\bar{x}(t) \tag{1.35}$$

dönüşümü ile, aynı boyutta başka bir denklem takımına dönüştürüldüğünü ve

$$\bar{x}(t) = P^{-1}x(t) \tag{1.36}$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda (1.33) ve (1.34),

$$\frac{\mathrm{d\bar{x}(t)}}{\mathrm{dt}} = \overline{A}\bar{x}(t) + \overline{B}u(t) \tag{1.37}$$

$$\bar{y}(t) = \overline{C}\bar{x}(t) \tag{1.38}$$

olarak elde edilir. Eğer, (1.36) denkleminin t ye göre türevi alınır,

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}(t)}{dt} &= P^{-1}\frac{dx(t)}{dt} = P^{-1}Ax(t) + P^{-1}Bu(t) \\ &= P^{-1}AP\bar{x}(t) + P^{-1}Bu(t) \end{aligned} \tag{1.39}$$

(1.37) ile karşılaştırılırsa,

$$\overline{A} = P^{-1}AP \tag{1.40}$$

$$\overline{B} = P^{-1}B \tag{1.41}$$

olduğu görülür. Eğer (1.35) den yararlanılırsa (1.38) denklemi;

$$\overline{y}(t) = CPx(t) \tag{1.42}$$

şeklinde yazılabilir. (1.42) denklemi (1.34) ile karşılaştırılırsa;

$$\overline{C} = CP \tag{1.43}$$

elde edilir. Yukarıda açıklanan (1.35) dönüşümüne **benzerlik dönüşümü** denir. Dönüşümden sonra karakteristik denklem, özvektörler ve özdeğerler gibi sistemin özellikleri aynen korunur (Kuo,1999).

1.37. Tanım (Kontrol Edilebilir Kanonik Biçim):

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.44}$$

dinamik denklem sistemi (durum denklem sistemi) verilmiş olsun. $n \times n$ boyutlu A matrisine ilişkin karakteristik denklem;

$$|A - \lambda I| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 \tag{1.45}$$

şeklindedir. (1.44)'ün (1.35) dönüşümünden yararlanarak; (1.37) ve (1.38) biçimine dönüştürmek için dönüşüm matrisi;

$$P = WM \tag{1.46}$$

alınmalıdır. Burada;

$$W = \left[B, AB, \cdots, A^{n-1}B\right] \tag{1.47}$$

ve

$$M=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.48}$$

şeklinde olup sırasıyla $n \times mn$ ve $n \times n$ boyutludur. Bu durumda

$$\overline{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{1.49}$$

$$\overline{B}=P^{-1}B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.50}$$

olarak elde edilir. (1.49) ve (1.50) eşitlikleri ile verilen $\overline{A}$ ve $\overline{B}$ matrislerinin tanımladığı (1.44) durum denklemlerine **kontrol edilebilir kanonik biçimi** denir. Kontrol edilebilir kanonik biçimin verilebilmesi P^{-1} matrisinin varlığına bağlıdır. Zira M matrisinin determinantı sıfırdan farklı ve $(-1)^{n-1}$ e eşit olduğunda tersi hep mevcuttur. (1.47) ifadesi ile verilen $n \times mn$ boyutlu W matrisi ilerde kontrol edilebilirlik matrisi olarak tanımlanacaktır (Kuo,1999).

<u>UYARI</u>: A ve B yi kontrol edilebilir kanonik biçime dönüştürmek için W matrisi tekil olmamalıdır.

1.38.Tanım (Köşegen Kanonik Biçim): (1.4) ile tanımlı sistemi ele alalım. A matrisinin özdeğerleri farklı olduğu sürece; tekil olmayan bir;

$$x(t)=T\overline{x}(t) \tag{1.51}$$

dönüşümü vardır ve bu dönüşüm;

$$\overline{A} = T^{-1}AT\,, \qquad \overline{B} = T^{-1}B\,, \qquad \overline{C} = CT \tag{1.52}$$

olmak üzere denklem sistemini (1.37) ve (1.38) dinamik sistemlere dönüştürür. A matrisinin farklı n özdeğeri $\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_n$ olmak üzere , $\overline{A}$ matrisi;

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}_{(n\times n)} \tag{1.53}$$

şeklinde köşegendir. (1.52) denkleminden elde edilen $\overline{B}, \overline{C}$ matrisleri belirli bir yapıda değildir. (1.53) ile verilen $\overline{A}$ 'nın tanımladığı (1.33) durum denklem sistemine **köşegen kanonik biçim** denir (Kuo,1999).

Aşağıda, köşegen kanonik biçime dönüşüm matrisi T 'nin sütunları A ya ilişkin özvektörlerden,

$$T = [p_1 \quad p_2 \quad \ldots \quad p_n] \tag{1.54}$$

şeklinde oluşturulabileceği gösterilecektir. Buna göre λ_i özdeğerlerine ilişkin özvektör, $i = 1,2,\cdots,n$ olmak üzere p_i ile ifade edilirse $(\lambda_i I - A)p_i = 0$ eşitliğinden,

$$\lambda_i p_i = Ap_i\,, \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{1.55}$$

yazılabilir. Eğer bir $n \times n$ matris oluşturulursa;

$$\begin{aligned} [\lambda_1 p_1 \quad \lambda_2 p_2 \quad \ldots \quad \lambda_n p_n] &= [A\,p_1 \quad A\,p_2 \quad \ldots \quad A\,p_n] \\ &= A[p_1 \quad p_2 \quad \ldots \quad p_n] \end{aligned} \tag{1.56}$$

elde edilir. (1.56) denklemi;

$$[p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_n]\overline{A} = A[p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_n] \tag{1.57}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\overline{A}$ matrisi (1.49)'da tanımlandığı gibidir.
Buna göre;

$$T = [p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_n] \tag{1.58}$$

olarak tanımlanırsa, (1.57) denklemi;

$$\overline{A} = T^{-1}AT \tag{1.59}$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer A matrisi kontrol edilebilir kanonik biçimde ve A matrisinin özdeğerleri farklı ise, A'nın özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ olmak üzere, köşegen kanonik biçime dönüştürme matrisi;

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \tag{1.60}$$

dir. (1.60)'da T 'nin i. Sütunu i. p_i özvektörüne eşittir (Kuo,1999).

2.SÜREKLİ, OTONOM SİSTEMLERDE KONTROL TEORİ

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2.1}$$

Burada $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$ dir. Bu halde durum geçiş matrisi;

$$\phi(t,\tau) = \phi(t-\tau,0) = \exp[(t-\tau)A] = e^{A(t-\tau)} \tag{2.2}$$

eşitliği ile verilir. Otonom durumda $t_1 - t_0 = T$ dir.($t_1 = T$, $t_0 = 0$ ve T pozitif sonlu bir sayıdır.)

(2.1) sisteminin durum geçiş denklemi;

$$x_1 = e^{AT}x_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{2.3}$$

dir.

2.1.Lemma: $\forall T > 0$ için; $\Re(W_r(0,\mathrm{T})) = \Re(W)$ dır.

ispat: (Bkz. Panos, 1997)

2.1.Lemma , eğer $x(0) = 0$ ise $\dot{x} = \mathrm{A}x + \mathrm{B}u$ otonom sisteminin tüm durumlarının kümesinin sonlu zamanda erişilebilir olduğunu ifade eder. Tüm durumların erişilebilir alt uzayı olan R_r; $\Re(W)$ veya T>0 herhangi sonlu zaman olmak üzere $\Re(W_r(0,\mathrm{T}))$ yardımı ile verilir.

2.1.Örnek: $\dot{x} = Ax + Bu$ sistemi için;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere;

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{ve} \qquad e^{At}B = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$

alalım. Erişilebilirlik Gramianı;

$$W_r(0,T) = \int_0^T \begin{bmatrix} T-\tau \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T-\tau & 1 \end{bmatrix} d\tau = \int_0^T \begin{bmatrix} (T-\tau)^2 & T-\tau \\ T-\tau & 1 \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}T^3 & \frac{1}{2}T^2 \\ \frac{1}{2}T^2 & T \end{bmatrix}$$

dır. $\forall T > 0$ için;

$$\det W_r(0,T) = \frac{1}{12}T^4 \neq 0$$

olduğundan $rank\, W_r(0,T) = 2$ ve *(A,B)* çifti erişilebilirdir

$$W = [B, \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \Re(W_r(0,T)) = \Re(W) = R^2$$

dir ve 2.1.Lemma da sağlanmış olur. Eğer $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ yerine $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ alırsak o zaman

$W = [B, \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dır ve *(A,B)* erişilebilir değildir. Bu durumda;

$$e^{At}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dir ve erişilebilirlik matrisi;

$$W_r(0,T) = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. $\forall T>0$ için $\Re(W)=\Re(W_r(0,\mathrm{T}))$ dır.

2.1.Teorem: $\dot{x}=Ax+Bu$ sistemini ele alalım ve *x(0)=0* olsun. Bir u girdisinin durumu sonlu zamanda x_1 e geçirmesi için gerek ve yeter şart

$$x_1 \in \Re(W)$$

ya da buna denk olarak bazı sonlu T için;

$$x_1 \in \Re(W_r(0,\mathrm{T}))$$

olmasıdır. Böylece erişebilir alt uzay R_r için; $R_r=\Re(W)=\Re(W_r(0,T))$ eşitlikleri yazılabilir.. Sonlu T zamanında bu geçişi yapacak uygun bir u girdisi;

$$u(t)=B^T e^{A^T(T-t)}\eta_1 \qquad (2.4)$$

eşitliği ile verilir. Burada $\eta_1; t\in(0,T)$ olmak üzere $W_r(0,T)\eta_1=x_1$, olacak şekildedir.

(2.4) eşitliğinde T sonlu olmakla beraber, istenildiği kadar küçük seçilebilir. Bu seçim doğrultusunda geçiş çok kısa bir zamanda yapılabilir.

İspat: (Bkz. Panos, 1997)

2.1.Sonuç: $\dot{x}=Ax+Bu$ sisteminin veya *(A,B)* çiftinin (tamamiyle durum) erişilebilir olması için gerek ve yeter şart;

$$rankW=n \qquad (2.5)$$

veya buna denk olarak bazı sonlu T için;

$$rank\ (W_r(0,T))=n \qquad (2.6)$$

olmasıdır.

2.2.Teorem: Bir u girdisinin, $\dot{x} = Ax + Bu$ sisteminin durumunu x_0 dan sonlu T zamanında x_1 e geçirmesi için gerek ve yeter şart $t \in [0.T]$ için;

$$x_1 - e^{AT} x_0 \in \Re(W) \tag{2.7}$$

veya buna denk olarak;

$$x_1 - e^{AT} x_0 \in \Re(W_r(0,\mathrm{T})) \tag{2.8}$$

olmasıdır. Bu girdi $t \in [0,T]$ olmak üzere;

$$u(t) = B^T e^{A^T(T-t)} . \eta_1 \tag{2.9}$$

eşitliği ile verilir. Burada η_1;

$$W_r(0.T)\eta_1 = x_1 - e^{AT} x_0 \tag{2.10}$$

nin bir çözümüdür.

2.2.Sonuç: $\dot{x} = Ax + Bu$ sistemini ele alalım. Bu sistem (tamamiyle durum) erişilebilir olsun. O zaman bir u girdisi herhangi x_0 durumunu, başka bir x_1 durumuna sonlu T zamanında geçirecek şekilde vardır. Böyle bir girdi, $t \in [0.T]$ için;

$$u(t) = B^T e^{A^T(T-t)} W_r^{-1}(0,T)[x_1 - e^{AT} x_0] \tag{2.11}$$

eşitliği ile verilir.

İspat: 2.1.Sonucundan; bazı T için $rankW_r(0,T)=n$ veya $\Re(W_r(0,T))=R^n$ nin tam durum uzayı olması sistemin erişilebilir olması anlamına gelir. Bu ise 2.2.Teoremden $x_1-e^{AT}x_0\in\Re(W_r(0,\mathrm{T}))$ vektörünün olması demektir. Buradan (2.4)'deki girdinin geçişi yapacak bir girdi olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi sürekli, otonom sistemler için erişebilirlik ve kontroledilebilirlik arasında bağıntı kurabiliriz.

Bir $u(t)$, $t\in[0.T]$ girdisi

$$-e^{AT}x_0=\int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau)d\tau=L(u,0,T)$$

olacak şekilde varsa x_0 kontroledilebilirdir. Bundan başka $e^{AT}x_0\in\Re(W_r(0,\mathrm{T}))$ olduğunda veya bazı sonlu T zamanı için $\Re(L(u,0,T))=\Re(W_r(0,T))$ ifadesinden;

$$e^{AT}x_0\in\Re(W) \tag{2.12}$$

olduğunda x_0 kontroledilebilirdir.

$$x_1\in\Re(W) \tag{2.13}$$

olduğunda x_1 durumunun erişebilir olduğunu unutmayalım.

2.2.Lemma: Eğer $x\in\Re(W)$ ise o zaman $Ax\in\Re(W)$ dir. Zira erişilebilir alt uzay $R_r=\Re(W)$, bir A değişmez alt uzaydır.

İspat: Eğer $x\in\Re(W)$ ise bir α vektörü $[B,AB,\ldots,A^{n-1}B]\alpha=x$ olacak şekilde vardır. Bu durumda $Ax=[AB,\ A^2B,\ \ldots\ ,A^nB]\alpha$ dır. (Akın, 2002) den A^n matrisi $A^{n-1},\ldots,A,\mathrm{I}$ nın bir lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir. Bu ise bazı uygun β vektörü için $Ax = W\beta$ olması anlamına gelir. Bu yüzden $Ax \in \Re(W)$ dir.

2.3.Teorem: $\dot{x} = Ax + Bu$ sistemini ele alalım.

(i) Bir x durumunun erişebilir olması için gerek ve yeter şart kontroledilebilir olmasıdır.

(ii) $R_c = R_r$ dir.

(iii) (1) sisteminin veya (A,B) çiftinin (tamamıyla durum) erişilebilir olması için gerek ve yeter şart (tamamıyle durum) kontroledilebilir olmasıdır.

İspat: (i) x erişilebilir yani $x \in \Re(W)$ olsun. $e^{AT} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{T^k}{k!}\right)A^k$ eşitliğinin her iki yanını sağdan x ile çarparsak ve 1.2.Lemmadan $Ax, A^2x, \ldots, A^kx \in \Re(W)$ olduğu görülür. Bu yüzden herhangi T için $e^{AT}x \in \Re(W)$ dir. Aynı zamanda. (2.12) gereğince kontroledilebilirdir. Eğer, şimdi x kontroledilebilir ise yani $e^{AT}x \in \Re(W)$ ise o zaman, $e^{AT}x$ ifadesini soldan e^{-AT} ile çarparsak; $e^{-AT}\left(e^{AT}x\right) = x$ ve aynı zamanda $x \in \Re(W)$ de olacaktır. Bu nedenle x aynı zamanda erişilebilirdir. Çünkü $\left(e^{AT}\right)^{-1} = e^{-AT}$ tersi (inversi) vardır. Bu ayrık zaman durumuna kıyastır ve burada durum geçiş matrisi $\phi(k,0)$'ın regüler olması için gerek ve yeter şart A'nın singüler olmamasıdır (Panos ,1997). (ayrık zamanlı sistemlerde zamanın geri çevirilemezliği (nonreversibility).

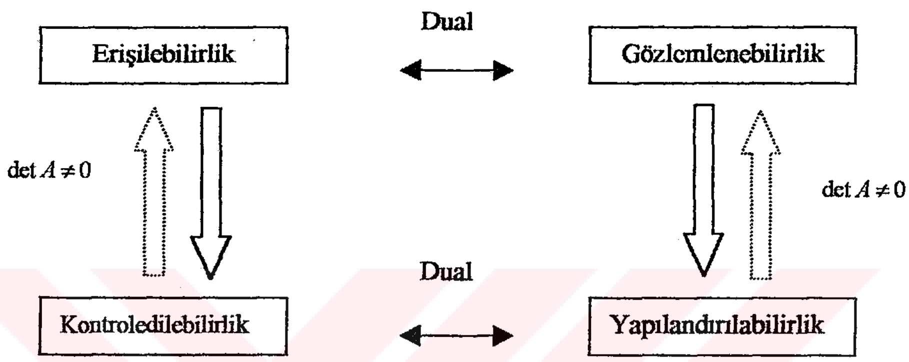
(ii) ve (iii) direkt olarak (i)'den elde edilir.

2.1.Dual Sistemler

2.1.1 Lemma: $\{A, B, C, D\}$ ile tanımlı (1.23) sisteminin erişilebilir (kontrol edilebilir) olması için gerek ve yeter şart $\{A_D, B_D, C_D, D_D\}$ ile tanımlı (1.22) dual sisteminin gözlemlenebilir (yapılandırılabilir) olmasıdır.

İspat:: (Bkz. Panos ,1997)

Daha önce verdiğimiz kontrol edilebilirlik, erişilebilirlik, gözlemlenebilirlik ve yapılandırılabilirlik tanımları doğrultusunda sürekli ve ayrık zamanlı sistemler için aşağıdaki özetlemeyi yapmak mümkündür.



Şekil 2.1: Sürekli zamanlı sistemlerde erişilebilirlik (gözlemlenebilirlik), daima kontrol edilebilirliği (yapılandırılabilirliği) ifade eder. Ayrık zamanlı sistemlerde ise yalnızca det $A \neq 0$ olduğunda erişilebilirlik (gözlemlenebilirlik), kontrol edilebilirliği (yapılandırılabilirliği) ifade eder.

3.AYRIK (DISCRETE) KONTROL TEORİ

Genel olarak ayrık zamanlı sistemler;

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \ , \quad k \geq k_0 \tag{3.1}$$

denklem formuyla tanımlanırlar. Burada $A(k) \in R^{n \times n}$, $B(k) \in R^{n \times m}$ dir ve $u(k) \in R^m$ girdisi $k \geq k_0$ için tanımlanır. $k \geq k_0$ için $x(k)$ durumu;

$$x(k) = \varphi(k,k_0)x(k_0) + \sum_{i=k_0}^{k-1} \varphi(k,i+1)B(i)u(i) \tag{3.2}$$

ile verilir. Burada durum geçiş matrisi $\varphi(k,k_0)$; $\varphi(k_0,k_0) = I$ özelliğine sahip ve $k > k_0$ için $\varphi(k,k_0) = A(k-1)A(k-2)\cdots A(k_0)$ eşitliğiyle verilir.

Sistemin otonom olması durumda (3.1) denklem sistemini;

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad k \geq k_0 \tag{3.3}$$

formunda alırız. Burada $A \in R^{n \times n}$ ve $B \in R^{n \times m}$ dir. (3.3) ün (3.2) ile verilen $x(k)$ ifadesindeki durum geçiş matrisi ise;

$$\phi(k,k_0) = A^{k-k_0} \qquad , k \geq k_0 \tag{3.4}$$

eşitliği ile veriliyor.

k_0 olduğunda durum x_0 olsun. $k_1 \geq k_0$ olduğu durumu da x_1 kabul edelim. Bir u girdisi;

$$x_1 = \phi(k_1,k_0)x_0 + \sum_{i=k_0}^{k_1-1} \phi(k_1,i+1)B(i)u(i) \tag{3.5}$$

denklemini sağlayacak şekilde olmalıdır.

Ayrık zamanlı sistemler için erişilebilirlik ve kontroledilebilirlik tamamıyla benzer bir biçimde tanımlanmıştır. Daha kolay olduğu düşünülerek integraller yerine sonlu toplamlar kullanılmıştır.

3.1.Ayrık Zamanlı, Otonom Sistemlerde Kontrol Teori

Otonom sistem için durum denklem sistemi;

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

(3.3)'de verildi. Sistemin otonom olması durumunda $k_0 = 0$ ve $k_1 = K$ alarak $k_1 - k_0 = K$ zamanını kullanırız. $\phi(k,k_0) = A^k$ durum geçiş matrisi ile (3.5) i tekrar yazalım. $K > 0$ olduğunda, (Chen, 1993)'den;

$$x_1 = \underbrace{A^K x_0}_{\text{sıfır-girdisinin cevabı}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{K-1} A^{K-(i+1)} Bu(i)}_{\text{sıfır-durumunun cevabı}} \tag{3.6}$$

veya

$$x_1 = A^K x_0 + W_K U_K \tag{3.7}$$

dir. Burada;

$$W_K = \left[B, AB, \cdots, A^{K-1}B\right] \tag{3.8}$$

ve

$$U_K = \left[u^T(K-1), u^T(K-2), \cdots, u^T(0)\right]^T \tag{3.9}$$

şeklinde tanımlıdır.

3.1.1.Teorem: Başlangıç durumu sıfır alarak $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ sistemini düşünelim. Bir u girdisinin sistem durumunu x_1'e geçirmesi için gerek ve yeter şart;

$$x_1 \in \Re(W)$$

olmasıdır. Bu durumda, x_1 erişilebilir ve $R_r = \Re(W)$ dir. Uygun bir $\{u(k)\}$ girdi dizisi; $k = 0,\cdots,n-1$ olmak üzere; n **adımda** bu geçişi yapar. Geçişi yapacak olan bu diziyi $U_n = [u^T(n-1), u^T(n-2),\cdots,u^T(0)]^T$ eşitliği ile belirleyeceğiz. Bu U_n ise;

$$WU_n = x_1 \tag{3.10}$$

denkleminin çözümüdür.

Açıklama: Bundan böyle biz, bir kontrol dizisi olarak U_n e bakacağız. Aslında $\{u(k)\}$ dizisini düşüneceğiz.

İspat: (3.6) dan x_1 in K adımda orijinden erişilebilir olması için gerek ve yeter şart $x_1 = W_K U_K$ ifadesinin bir U_K çözümüne sahip olması veya buna denk olarak $x_1 \in \Re(W_K)$ olmasıdır. Ayrıca tüm girdi dizileri; $x_1 = W_K U_K$ denkleminin bir çözümüdür. Eğer erişilebilir bir x_1 varsa bir sonlu K için $x_1 \in \Re(W_K)$ olacak şekilde almalıyız. x_1 in elemanı olarak aldığımız bu değer kümesi, $W_n = W$ nin değer kümesi dışında artamaz. Zira $K \geq n$ için $\Re(W_K) = \Re(W_n)$ dir. Bu uygulamalı lineer cebirin bir sonucudur (Akın, 2002). Teoreme göre; $\Re(W_K)$ dan alınan herhangi x vektörü, $K \geq n$ için, $B, AB,\cdots,A^{n-1}B$ nin bir lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir. Bu yüzden $x \in \Re(W_n)$ dir. $K < n$ olmak üzere özel bir x_1 için, $x_1 \in \Re(W_K)$ alınabileceği tabiidir. Bu durumda W_K, W_n nin alt kümesi olduğundan $x_1 \in \Re(W_n)$'dir. Bu da x_1'in erişilebilir olması için gerek ve yeter şartın x_1 durumunun $W_n = W$'nin değer kümesinde olması anlamına gelir. Bu da ispatı tamamlar. Böylece (3.10) denklemini sağlayan herhangi U_n istenen durum geçişini verecektir.

Yukarıdaki ispatta gösterildiği gibi $K<n$ olmak üzere verilmiş bir x_1 için $x_1 \in \Re(W_K)$ alabiliriz. Bu durumda geçiş ***n* adımdan daha az adımda** yapılabilir ve uygun girdiler, $W_K U_K = x_1$ denkleminin çözümüyle elde edilebilir.

3.1.1.Lemma: Herhangi $N \geq n$ için $W = [B, AB, A^2B, \ldots, A^{N-1}B]$ matrisinin rankı W kontrol edilebilirlik matrisinin rankına eşittir.

İspat: (Bkz. Elaydi 1999)

3.1.1.Sonuç: (3.3)'de verilen $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ sisteminin veya *(A,B)* çiftinin (tamamıyla durum) erişilebilir olması için gerek ve yeter şart;

$$rankW = n \tag{3.11}$$

olmasıdır.

İspat: (*Yeterlilik):* $rankW = n$ olduğunu farz edelim. R^n'de x_0 ve x_1 iki keyfi vektör olsunlar. (3.3) ile verilen sistemin çözümü;

$$x(K) = A^K x(0) + \sum_{i=0}^{K-1} A^{K-i-1}.BU(i)$$

şeklindedir. Buradan,

$$x(K) - A^K x(0) = \sum_{i=0}^{K-1} A^{K-i-1}.BU(i)$$

eşitliğini yazabiliriz veya bu eşitlik yerine;

$$x(K) - A^K x(0) = WU_K \tag{3.11*}$$

denklemini yazmak da mümkündür. Burada;

$$\bar{U}_K = \begin{pmatrix} u(K-1) \\ u(K-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{pmatrix}$$

dir. $rankW = n$ olduğundan dolayı, $rangeW = R^n$ 'dir. Bundan dolayı eğer $x(0) = x_0$ ve $x(k) = x_1$ alırsak;

$$x_1 - A^K x_0 \in rangeW$$

olur. Bundan dolayı bazı $U \in R^m$ vektörü için;

$$x_1 - A^K x_0 = WU$$

olur. Sonuç olarak (3.3) sistemi (tamamıyla durum) erişilebilirdir.

Gereklilik: (3.3) sisteminin (tamamıyla durum) erişilebilir ve $rankW < n$ olduğunu abul edelim. 3.1.1.Lemmadan;

$$rankW(1) < rankW(2) < \ldots < rankW(r) = rankW(r+1) = \ldots = rankW$$

olacak şekilde bir $r \in Z^+$nın var olduğu sonucuna varabiliriz. Buna ek olarak $k > n$ için;

$$rankW(k) = rankW$$

dir ve

$$W(j+1) = \left(W(j), A^j B\right)$$

olduğundan dolayı herhangi $k > n$ için;

$$
\begin{aligned}
\mathit{range}W(1) \subset \mathit{range}W(2) \subset \ldots \mathit{range}W(r) &= \mathit{range}W(r+1) \\
&= \mathit{range}W \\
&\ \vdots \\
&= \mathit{range}W(k)
\end{aligned}
$$

dir.

$rankW < n$ olduğundan, $rangeW \neq R^n$ dır. Böylece $\xi \notin rangeW$ olacak şekilde bir ξ vektörü vardır. Bu ise, $\forall k \in Z^+$ için $\xi \notin rangeW(k)$ olması anlamına gelir. Eğer (3.11*) formülünde $x(0) = 0$ alırsak ve K terine k yazarsak; $x(k) = W\,U_k$ elde ederiz. Bu nedenle bazı k için $x(k)$'ya eşit ξ vektörü için, ξ; $\forall k \in Z^+$ için $W(k)$ nın değer kümesinde olmalıdır. Fakat $\forall k \in Z^+$ için $\xi \notin rangeW(k)$ olduğundan ξ vektörü herhangi bir zamanda orijinden erişilemeyebilir. Bu ise kabulümüze zıttır. Bu nedenle $rankW=n$'dir (Elaydi, 1996).

3.1.2.Teorem: (3.3) de verilen $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ sisteminin durumunu, K adımının bazı sonlu sayılarında x_0 dan x_1 e geçirecek bir u girdisinin var olması için gerek ve yeter şart;

$$x_1 - A^K x_0 \in \Re(W_K) \tag{3.12}$$

olmasıdır.

Geçişin yapılmasını sağlayacak girdi dizisi;

$$U_K = \left[u^T(k-1), u^T(k-2), \cdots, u^T(0)\right]^T$$

şeklinde olup;

$$W_K U_K = x_1 - A^K x_0 \tag{3.13}$$

denkleminin çözümüyle belirlenir.

İspat: İspatı direkt olarak (3.7)'den elde edilir (Bkz.Panos, 1997).

3.1.2.Sonuç: (4.3) de verilen $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ sistemini alalım. Bu sistem (tamamıyla durum) erişilebilir veya *(A,B)* çifti erişilebilir olsun. O zaman durumu herhangi x_0 dan sonlu bir adım sayısında x_1 e geçirecek bir u girdi dizisi vardır. Bu girdi, (3.14) denklemin çözümüyle belirlenir.

İspat: (3.8)'i düşünelim. *(A,B)* erişilebilir olduğundan, $rankW_n = rankW = n$ ve $\Re(W) = R^n$ dir. O zaman;

$$WU_n = x_1 - A^n x_0 \tag{3.14}$$

denklemi herhangi x_0 ve x_1 için $U_n = \left[u^T(n-1), \ldots, u^T(0)\right]^T$ şeklinde bir çözüme daima sahiptir. Bu girdi dizisi durumu x_0 dan x_1 e n adımda geçirir.

3.1.2.Teoreme göre özel bir x_0 ve x_1 için durum geçişi $K < n$ adımda (3.13) denklemi yardımıyla yapılabilir.

3.1.1.Örnek: $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ sistemini ele alalım. Burada $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ dir. $rankW = rank[B, AB] = rank\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 = n$ olduğundan sistem erişilebilirdir ve herhangi x_0 durumu, başka herhangi x_1 durumuna 2 adımda geçer.

$x_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ve $x_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$ alalım. O zaman (3.14);

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b - a - b_0 \\ a - a_0 - b_0 \end{bmatrix}$$

olduğunu ifade eder. (3.13) denklemine göre, eğer x_0 ve x_1 seçimi öyle yapılmalıdır ki;

$$x_1 - Ax_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - b_0 \\ b - a_0 - b_0 \end{bmatrix}$$

ifadesi, $\Re(W_1) = \Re(B) = span\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ dedir($x_1 - Ax_0 \in \Re(W_K)$). Bu taktirde durum geçişi bir adımda başarılabilir.

Örneğin, $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ve $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ olsun. O zaman $Bu(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(0) = x_1 - Ax_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ olduğundan x_0 dan x_1 e geçiş $1 < 2 = n$ adımda $u(0) = 2$ ile yapılabilir.

3.1.2.Örnek: $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ sistemini ele alalım. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ olduğunu düşünelim. $W = [B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olduğunda durumu herhangi $x(0) = x_0$ dan herhangi $x(n) = x_1$ e (n-adımda) geçirecek bir girdi dizisi vardır. (3.14) ile verilen durum için;

$$U_2 = \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = W^{-1}\left(x_1 - A^2 x_0\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (x_1 - x_0)$$

dir.

Şimdi (3.3) de verilen $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ ayrık-zamanlı otonom sistemleri için erişilebilirlik ve kontroledilebilirlik arasında bağıntı kurabiliriz.

$x_1 = A^K x_0 + \sum_{i=0}^{K-1} A^{K-(i+1)} Bu(i)$ eşitliği ile verilen (3.6)'yı düşünelim. Eğer x_0 durumu sonlu bir K adımda orijine $(x_1 \quad 0)$ yönlendirilebilirse x_0 durumu kontroledilebilirdir. Başka bir ifadeyle x_0 durumunun kontroledilebilir olması için gerek ve yeter şart bazı K için;

$$-A^K x_0 = W_K U_K \tag{3.15}$$

olmasıdır veya bazı K için;

$$A^K x_0 \in \Re(W_K) \tag{3.16}$$

olduğu zaman x_0 durumu kontroledilebilirdir.

$$x_1 \in \Re(W) \tag{3.17}$$

olduğunda x_1 durumunun erişilebilir olduğunu da unutmayalım.

3.1.3.Teorem: (3.3) de verilen $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ sistemini düşünelim.

(i) Eğer x durumu erişilebilirse o zaman kontroledilebilirdir.

(ii) $R_r \subset R_c$ dir.

(iii) Eğer sistem (tamamıyla durum) erişilebilir yada *(A,B)* çifti erişilebilir ise, o zaman sistem aynı zamanda (tamamıyla durum) kontroledilebilirdir ya da *(A,B)* çifti kontroledilebilirdir.

Ayrıca A singüler değilse , o zaman (i) ve (iii) arasında çift yönlü gerektirme vardır ((i) $\Leftrightarrow$ (iii)). Kontroledilebilirlik aynı zamanda erişilebilirliği ifade ettiğinden (ii) bağıntısı için eşitlik sözkonusudur.($R_c = R_r$)

İspat: (i) Eğer x erişilebilir ise o zaman $x \in \Re(W)$ dir. 2.2.Lemmaya göre $\Re(W)$ bir A değişmez alt uzay olduğundan $A^n x \in \Re(W)$ dir. Bu da aynı zamanda (3.16) eşitliğine göre x in kontroledilebilir olması anlamına gelir. x, R_r de bir keyfi vektör olduğundan, (ii) ifadesi de sağlanmış olur. Eğer $\Re(W) = R^n$, tam durum uzayı ise o zaman herhangi x vektörü için $A^n x$, $\Re(W)$ dedir ve bu nedenle x vektörü aynı zamanda kontroledilebilirdir. Böylece erişilebilirlik, kontroledilebilirliği ifade eder. Eğer A singüler değilse o zaman A^{-n} vardır. Eğer x kontroledilebilirse (yani $A^n x \in \Re(W)$ ise), o zaman $x \in \Re(W)$ olup x daima erişilebilirdir. 2.2.Lemmaya göre A^{-n}, A nın terimlerinde bir güç serisi olarak yazılabildiğinden; $A^{-n}(A^n x) = x$ dir ve aynı zamanda $x \in \Re(W)$ demektir.

Durum geçiş matrisinin singüler olmaması için gerek ve yeter şart A matrisinin singüler olmamasıdır. Bu çift yönlü gerektirme ayrık zamanlı sistemlerde **"zamanın geriye çevrilebilirliği (reversibility)"** için şarttır. Ayrık zamanlı sistemlerde $\phi(k, k_0)$ singüler olabildiğinden zamanda geri çevirilebilirlik (reversibility) mevcut olmayabilir. Buna karşılık sürekli-zamanlı sistemlerde $\phi(t, t_0)$ daima regülerdir. Bunun nedeni sürekli ve ayrık zamanlı sistemler arasındaki davranış farklılıklarıdır. Bu farklılıklar neticesinde, ayrık zamanlı sistemlerde kontroledilebilirlik erişilebilirliği ifade etmeyebilir. Buna karşılık, sürekli-zamanlı sistemlerde hem kontroledilebilirlik erişilebilirliği hem de erişilebilirlik kontroledilebilirliği ifade eder.

3.1.2.Lemma: Her $K \geq n$ için $\Re(W) = \Re(W(0, K))$ dır.

İspat: (Bkz.Panos, 1997)

Bir sistem erişilebilir olduğu zaman, $k=0$ da x_0 durumunu $k=K$ da x_1 e geçiren girdi dizisi erişilebilirlik Gramianının terimlerinden belirlenebilir. $K \geq n$ için $rankW = n = rankW_r(0, K)$ alınır ve

$$U_K = W_K^T W_r^{-1}(0, K)(x_1 - A^K x_0) \tag{3.18}$$

bağıntısı, $W_r(0, K) = W_r W_K^T$ olduğundan (3.13) ü sağlar.

A matrisi singüler olmadığında durumu, $k=0$ da x_0 dan $x_1=0$ a n adımda geçirecek girdi (3.14) ün kullanımıyla belirlenebilir. Geçişi yapacak girdiyi belirlemek için $U_n = [u^T(n-1), \cdots, u^T(0)]^T$ ifadesinin değerini bulmak gerekir. Bunun için de;

$$[A^{-n}W]U_n = [A^{-n}B, \cdots, A^{-1}B]U_n = x_0 \tag{3.19}$$

denklemini çözmek gerekir. x_0 ın kontroledilebilir olması için gerek ve yeter şartın $-A^n x \in \Re(W)$ veya $x_0 \in \Re(A^{-n}W)$ olmasına dikkat edilmelidir. Bunun, A'nın singüler olmadığı durumda sözkonusu olduğu tabiidir.

Kontroledilebilirlik durumunda (ve A nın singüler olmaması zannı ile) W nin yerine, $A^{-n}W$ matrisi ile ilgilenilir. Bu durumda, bir sistemin kontroledilebilir olması için gerek ve yeter şartın $rank(A^{-n}W) = rankW = n$ eşitliklerine dönüştüğüne dikkat edilmelidir.

3.1.3.Örnek: $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ sistemini ele alalım. Burada $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dır. $rankW = rank[B, AB] = rank\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 < 2 = n$ olduğundan bu sistem (tamamıyla) erişilebilir (orijinden kontroledilebilir) değildir. Tüm erişilebilir durumlar $\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ formundadır. Burada $\alpha \in R$ olduğundan $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$, $\Re(W) = R_r$ için bir bazdır ve erişilebilir alt uzaydır. Erişilebilirlik Gramianı $K=n=2$ için;

$$W_r(0,2) = BB^T + (AB)(AB)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır. $\Re(W_r(0,2))$ için bir baz, $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ dır ve $\Re(W) = \Re(W_r(0,2))$ dir.

3.1.4.Örnek: $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ sistemini ele alalım. Burada $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dır.

$rankW = rank[B, AB] = rank\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 < 2 = n$ olduğundan sistem (tamamıyla) erişilebilir değildir. Tüm erişilebilir durumlar $\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ formundadır. Burada $\alpha \in R$ olduğundan $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$, $\Re(W) = R_r$ için bir bazdır ve erişilebilir alt uzaydır.

R_c kontroledilebilir alt uzayını belirlemek amacıyla; Cayley-Hamilton Teoremine göre $K=n$ için (3.16) ifadesini düşünelim. A singüler olduğundan $A^{-1}W$, şimdiki (mevcut) durumda kullanılmayabilir.

$$A^2x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \Re(W)$$

olduğundan, herhangi bir x_0 durumu kontroledilebilir bir durum olacaktır. Yani sistem (tamamıyla) kontroledilebilir ve $R_c = R^n$ dir. Bu 3.1.2.Teoremden doğrulanır ve örnekle izah edilir ki kontroledilebilirlik erişilebilirliği ifade etmez.

Dikkat edilirse herhangi x_0 durumunu orijine ($x_1 = 0$) nakledecek kontrol dizisini belirlemek için (3.14) kullanılabildi. Bilhassa;

$$WU_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -A^2x_0$$

dır. bu yüzden $u(0) = \alpha$ ve $u(1) = 0$ dır. burada $\alpha \in R$ herhangi durumu orijine nakledecektir. Bunun doğruluğunu ispatlamak için;

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\alpha = \begin{bmatrix} x_{02} + \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$x(2)=Ax(1)+Bu(1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{02}+\alpha\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}0=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

düşünebiliriz.

3.1.5.Örnek: $x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$ sistemini ele alalım.

Burada $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ dir. Bu durumda (orijinden) kontroledilebilirlik matrisi;

$$W=[B,\quad AB]=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow rankW=2$$

dir. Bu yüzden sistem (veya *(A,B)* ikilisi) erişilebilir ya da orijinden kontroledilebilirdir. Yani sıfır durumundan herhangi x_1 durumuna sonlu adımda, en çok $\{u(0),u(1),\cdots,u(n-1)\}$ ile verilen n-girdi uygulamasıyla erişilebilir.*(n=2)*

Bunu görmek için; $x_1=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ alalım. O zaman (3.14)'den;

$$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u(1)\\u(0)\end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix}u(1)\\u(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b-a\\a\end{bmatrix}$$

dir. Bulduğumuz bu $u(0)=a$ ve $u(1)=b-a$ kontrol girdileri durumu k=0 da orijinden k=2 de $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ durumuna geçirecektir.

Bunun doğruluğunu görmek için bulduğumuz *u(0)* ve *u(1)* kontrol ifadelerini sistemimizde yerine yazalım.

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} a = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$$

ve

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (b-a) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

Sistem erişilebilirliği aynı zamanda herhangi bir x_0 durumundan bir x_1 durumuna en çok *n=2* adımda erişilebileceğini de ifade eder.. Bunu bir örnekle izah etmeye çalışalım. $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ alalım. O zaman (3.14)'den;

$$x_1 - A^2 x_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-2 \\ b-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-a-1 \\ a-2 \end{bmatrix}$$

dir. Bu çözüm; durumu k=0 da $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ durumundan k=2 de $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ durumuna geçirecektir.

Herhangi bir x_0 durumu sonlu sayıda adımda sıfır durumuna geçirilebiliyorsa sistem (veya *(A,B)* çifti) kontroledilebilirdir veya orijine kontroledilebilirdir. (3.14)'den herhangi bir x_0 için $A^n x_0 \in \Re(W)$ olduğu zaman sistemin kontroledilebilir olduğunu görüyoruz. Eğer *rankA=n* ise, *rankW=n* olduğu zaman bir sistem kontroledilebilirdir. Bu durumda aşağıdaki $n \times mn$ matrisi sistemimizin kontroledikebilirliği hakkında bize yardımcı olacaktır.

$$A^{-n}W = \left[A^{-n}B, \cdots, A^{-1}B\right]$$

Sistemin kontroledilebilir olması için gerek ve yeter şartın $rank\left(A^{-n}W\right) = rankW = n$ olmasıdır. Eğer $rankA < n$ ise kontroledilebilirlik erişilebilirliği ifade etmeyecektir.

3.1.6.Örnek: 3.1.5.Örnekteki sistem (orijine) kontroledilebilirdir. Bunu göstermek için (3.14)'de $x_1 = 0$ alarak denklemi tekrar yazalım.

$$-A^2 x_0 = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \left[B, AB\right] \cdot \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

Burada;

$$x_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

dir. Buradan girdi vektör matrisini çekersek;

$$\begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ -a-b \end{bmatrix}$$

elde ederiz. Elde ettiğimiz bu girdiler durumu k=0 da $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ den k=2 de $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ a geçirecektir.

3.2.Geri Besleme ve Etkileri

Sistem çıkışı geribeslenerek girişe uygulandığında bu tür sistemlerin **geri beslemeli sistemler** olarak adlandırıldığını 1.Bölümde ifade etmiştik.

Geri besleme tasarımında kullanılan pek çok davranış kriteri arasında, en önemli koşul sistemin kararlı olmasıdır. Karalılık, bir sistemin giriş komutunu takip edip edemeyeceğini belirleyen bir kavramdır. Kararsız bir sistem genelde kullanılamaz kabul edilir.

Lineer, otonom sürekl bir sistemin girişini $u(k)$, çıkışını $y(k)$ ile ifade edelim. Sıfır başlangıç koşullarında, bir sisteme sınırlı bir $u(k)$ girişi uygulandığında $y(k)$ çıkışı sınırlı ise sistem sınırlı giriş-sınırlı çıkış kararlı ya da basitçe kararlıdır.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{3.20}$$

denklem sistemini gözönüne alalım. Kapalı çevrimli sistem durum değişkenleri sabit katsayılı K kazanç matrisi üzerinde geri beslenerek elde edilir. Buna göre K geri besleme matrisi $(m \times n)$ boyutlu ve sabit katsayılı olmak üzere;

$$u(k) = -Kx(k)$$

dır. Ve bu dönüşüm ile (3.20) açık çevrimli sistemini;

$$x(k+1) = (A - BK)x(k) \tag{3.21}$$

kapalı çevrimli sisteme dönüştürelim. Eğer (3.20) sistemi kontroledilebilirse, (3.21) sistemini de kontroledilebilir kılan bir K matrisi vardır.

$A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{m\times n}$ ve $u(k)$ skalar kontrol girdisi olmak üzere A ya ilişkin karakteristik polinom bulunur.

$$|A - \lambda I| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + .. + a_n$$

μ_i, kapalı çevrimli (3.21) sisteminin karakteristik polinom katsayılarını göstermek üzere;

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\mu_i)=\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+b_2\lambda^{n-2}+\cdots+b_n$$

olsun. (3.20) ve (3.21) sistemlerinin kontroledilebilirliğini incelemek üzere kontrol edilebilir kanonik biçimden yararlanalım

$$P=WM$$

olacak şekilde P matrisini ($n\times n$) tipinde tanımlayalım.

$$W=\left[B,A,\cdots,A^{n-1}B\right]$$

kontroledilebilirlik matrisi ve M *de;*

$$M=\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğunda;

$$\overline{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{B}=P^{-1}B=(0\quad 0\quad \cdots\quad 0\quad 1)^T$$

dir. (3.21) sisteminde;

$$x(k) = P\overline{x}(k)$$

benzerlik dönüşümü yapıldığında;

$$\overline{x}(k+1) = (\overline{A} - \overline{BK})\overline{x}(k)$$

denklem sistemini elde ederiz. Burada;

$$\overline{K} = KP$$

dir.

$$\overline{K} = [b_n - a_n \quad b_{n-1} - a_{n-1} \quad \dots \quad b_1 - a_1]$$

seçelim. O zaman;

$$\overline{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_n - a_n & b_{n-1} - a_{n-1} & \cdots & b_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

dir.

$$\overline{A} - \overline{BK} = P^{-1}AP - P^{-1}B.KT = P^{-1}(A - BK)P$$

olduğundan $A - BK$ .nın $\quad ,\overline{A} - \overline{BK}$ ya benzer olduğu görülüir.

Şimdi $\left[\overline{A} - \overline{BK}\right]$ matrisinin özdeğerlerine bakalım.

$$|A-BK-\lambda I|=|\overline{A}-\overline{BK}-\lambda I|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ -b_n & -b_{n-1} & \cdots & \lambda-b_1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+\cdots b_k$$

dir. $K=\overline{K}P^{-1}$ olduğundan

$$K=[b_n-a_n \quad b_{n-1}-a_{n-1}\cdots b_1-a_1]P^{-1}$$

eşitliği ile K matrisi bulunmuş olur.

Şimdi sözkonusu K matrisinin bulunmasına ilişkin bir örneği inceleyelim (Elaydi,1996).

3.2.1.Örnek: $x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$ kontrol sistemini gözönüne alalım.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 4 & 2\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

olsun. Kapalı çevrimli sistemin özdeğerleri $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{4}$ olacak şekilde bir K durum geribesleme matrisi bulunabilir.

Şimdi K durum geribesleme matrisini bulalım.

Metod 1: Öncelikle A'ya ait karakteristik denklemi bulalım.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -3\\ 4 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2\underbrace{-3}_{a_1}\lambda\underbrace{+14}_{a_2}$$

$$\Rightarrow a_1=-3 \qquad a_2=14$$

bulunur.

b_1 ve b_2 katsayıları da verilen $1/2$ ve $1/4$ kapalı çevrimli sistem özdeğerleri yardımıyla bulunur.

$$(\lambda-\mu_1)(\lambda-\mu_2)=\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\left(\lambda-\frac{1}{4}\right)=\lambda^2\underbrace{-\frac{3}{4}}_{b_1}\lambda+\underbrace{\frac{1}{8}}_{b_2}$$

$$\Rightarrow b_1=-\frac{3}{4} \qquad b_2=\frac{1}{8}$$

dir. Ve şimdi sistemimize ilişkin kontroledilebilirlik matrisini bulalım.

$$W=[B \quad AB]=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 6\end{bmatrix}$$

$$\det W=6-(-2)=8\neq 0$$

olduğundan sistemimiz (tamamıyla) kontroledilebilir olduğundan *(A-BK, B)* çiftini kontroledilebilir kılan bir K matrisi vardır.

$$M=\begin{bmatrix}a_1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

formundadır. a_1 değerini M matrisinde yerine yazalım.

$$M=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$P=WM=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

$\overline{K}=KP$ olduğundan $K=\overline{K}P^{-1}$ dir. Bu halde P^{-1} matrisini hesaplayalım.

$$T^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$K = (b_2 - a_2, \quad b_1 - a_1)P^{-1}$$

olduğundan;

$$\begin{aligned} K &= (b_2 - a_2, \quad b_1 - a_1)P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -13\frac{7}{8} & 2\frac{1}{4} \end{bmatrix}\left(-\frac{1}{8}\right)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \\ K &= \begin{bmatrix} \frac{165}{64} & \frac{-21}{64} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani sözkonusu kontol sistemi $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ kontrol edilebildiğinden, ,$(A - BK)$ çiftini kontroledilebilir kılan bir bir K matrisi bulabildik.

Metod 2: Bu metodda $K = (k_1 \quad k_2)$ matrisini; kapalı çevrimli sistemin özdeğerlerini hesaplarken yerine yazıyoruz. Buradan elde edilen karakteristik polinomun katsayıları ile örneğimizin ifadesinde verilen $1/2$ ve $1/4$ kapalı çevrimli sistem özdeğerlerinin birbirine eşit olması gerekir. Elde edilen eşitliklerle de K matrisini oluşturabiliyoruz.

$$\begin{aligned} [A - BK - \lambda I] &= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K \\ K \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det[A - BK - \lambda I] &= \begin{vmatrix} 1 - k_1 - \lambda & -3 - k_2 \\ 4 - k_1 & 2 - k_2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - \lambda(3 - k_1 - k_2) + 14 - 5k_1 + 3k_2 \end{aligned}$$

$$(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - \frac{1}{4}) = \lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{8}$$

idi. Bu ifade ile kapalı çevrimli sistemin karakteristik polinomu biribirine denk olduğundan

$$\begin{cases} 3-k_1-k_2=-\dfrac{3}{4} \\ 14-5k_1+3k_2=\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Bu denklem sistemini çözdüğümüzde;

$$k_1=\frac{165}{64},\quad k_2=-\frac{21}{64}$$

bulunur. buradan $K=\begin{bmatrix} \dfrac{165}{64} & -\dfrac{21}{64} \end{bmatrix}$ elde edilir.

Bu problem durum geri beslemesi ile kutup yerleştirme tasarımı (Bkz. Kuo,1999) olarak da bilinir. Tasarımın amacı; K geri besleme matrisini kapalı çevrimli $(A-BK)$ sisteminin özdeğerleri belirli değerler alacak şekilde belirlemektir. Burada 'kutup'ların kapalı çevrimli sistem transfer fonksiyonuna ilişkin $(A-BK)$ özdeğerlerine eşdeğer olduğu görülür.

Durum geribeslemeli tasarımda karakteristik denklem kökleri doğrudan kontrol edildiğinden, sabit yapılı geleneksel kontrole göre çok daha esnek bir yapıdadır. Kontroledilebilir kararsız bir sistem durum geribeslemeli kontrol ile hep kararlı hale getirilebilir. Durum geribeslemeli kontrolün sakıncalı tarafı tüm durumların ölçülüp geribeslenme zorunluluğudur.

Sonuç olarak, (3.20) deklem sisteminin kontrol edilebilir olması halinde, $(A-BK)$ özdeğerlerini istenen yerlere yerleştirilebilmesini sağlayan sabit katsayılı bir K matrisi mevcuttur (Kuo, 1999) (kutup $\equiv$ karakteristik denklem kökleri)

4.MATLAB UYGULAMALARI

MATLAB özünde lineer cebir özellikli çok yönlü bilgisayar paket programıdır. MATLAB ismini MATrix ve LABoratory kelimelerinin ilk üçer harfinden almıştır. MATLAB, bilgisayar orijinli lineer cebir hesaplamaları için çalışılmış profesyonel geliştirme projelerinin parçalarıdır. Bununla birlikte MATLAB'ın kullandığı kod C dilinde yazılmıştır. Pek çık rutinler (program parçası) fonksiyonlar MATLAB dilinde yazılır ve yeni sunulan MATLAB sürümleriyle güncelleştirilebilir. MATLAB Microsoft Windows işletim sistemi ile PC ve Macintosh bilgisayarlarda ve Unix işletim sistemi kullanan sistem bilgisayarlarında kullanılabilir (Akın, 2002).

Aşağıda, MATLAB programını kullanarak, kontrol sistemlerine ilişkin bazı örnekleri inceleyeceğiz

4.1.Örnek: Bu örnekte; verilmiş bir lineer otonom sistem için sistemin kontrol edilebilirliği incelenmiştir. Ekrana >> help ctrb komutu yazıldığına MATLAB bize sistemin kontrol edilebilirliği hakkında aşağıdaki bilgileri verecektir:

```
>> help ctrb

 CTRB  Compute the controllability matrix.

   CO = CTRB(A,B) returns the controllability matrix [B AB A^2B ...].

   CO = CTRB(SYS) returns the controllability matrix of the
   state-space model SYS with realization (A,B,C,D).  This is
   equivalent to CTRB(sys.a,sys.b).

   For ND arrays of state-space models SYS, CO is an array with N+2

   dimensions where CO(:,:,j1,...,jN) contains the controllability
```

matrix of the state-space model SYS(:,:,j1,...,jN).
See also CTRBF, SS.

Bu bilgiler doğrultusunda, sisteme ilişkin A ve B matrislerini girdiğimizde W matrisini kendisi oluşturarak sistemin kontrol edilebilirliği kolayca görülecektir. Şimdi A ve B matrislerini girerek sistemin veya (A;B) ikilisinin kontrol edilebilirliğini inceleyelim.

```
>> A=[0 1;-2 -3]

A =

     0     1
    -2    -3


>> B=[0;1]

B =

     0
     1


>> W = ctrb(A,B)

W =

     0     1
     1    -3


>> rank(A)
```

```
ans =

    2


>> rank(W)

ans =

    2
```

A ve W matrislerinin ranklarının birbirlerine eşit olması nedeni ile sistem tamamıyla kontrol edilebilirdir.

4.2.Örnek Bu örnekte; A, (4×4) ve B, (4×2) boyutlu olduğu durumda sistemin veya (A,B) çiftinin kontrol edilebilirliği incelenmiştir.

```
>> A=[-1 1 0 0
1 -2 1 0
0 1 -1 2
1 0 0 1]

A =

   -1    1    0    0
    1   -2    1    0
    0    1   -1    2
    1    0    0    1

>> B=[0 1;1 0;0 0; 1 0]
```

```
B =

     0     1
     1     0
     0     0
     1     0

>> W=ctrb(A,B)

W =

     0     1     1    -1    -3     2    11    -5
     1     0    -2     1     8    -3   -22    11
     0     0     3     0    -3     3    15    -6
     1     0     1     1     2     0    -1     2

>> rank(A)

ans =

     4

>>  rank(W)

ans =

     4
```

rank A= rank W olduğundan sistem tamamıyla kontrol edilebilirdir.

4.3.Örnek: Otonom sisteme ilişkin A ve B matrisleri sırasıyla, (6×6) ve (6×1) boyutlu olmak üzere sistemin veya (A,B) ikilisinin kontrol edilebilirliğini inceleyelim:

```
>> A=[0 1 0 0 0 0
16 0 -8 0 0 0
0 0 0 1 0 0
-16 0 16 0 0 0
0 0 0 0 0 1
0 0 0 0 0 0
]
A =

     0     1     0     0     0     0
    16     0    -8     0     0     0
     0     0     0     1     0     0
   -16     0    16     0     0     0
     0     0     0     0     0     1
     0     0     0     0     0     0

>> B=[0;-1;0;0;0;1]

B =

     0
    -1
     0
     0
     0
     1

>> W=ctrb(A,B)
W =

     0    -1     0   -16     0  -384
```

```
   -1    0  -16    0 -384    0
    0    0    0   16    0  512
    0    0   16    0  512    0
    0    1    0    0    0    0
    1    0    0    0    0    0

>> rank(A)

ans =

     5

>> rank(W)

ans =

     6
```

rank A=5 ve rank W=6 olduğundan sistem (tamamıyla) kontrol edilebilir değildir.

4.4.Örnek: Bu örnekte; (1.4) ve (1.24) sistemleri için, durum kontrol edilebilirlik, durum gözlemlenebilirlik, kontrol edilebilirlik ve gözlemlenebilirlik Gramianları incelenmiştir.

```
>> A=[-1 0 0 0;0 -2 0 0; 0 0 -3 0; 0 0 0 -4]

A =

    -1    0    0    0
     0   -2    0    0
     0    0   -3    0
     0    0    0   -4

>> B=[1;1;0;0]

B =
```

```
     1
     1
     0
     0

>> C=[1 0 1 0]

C =

     1     0     1     0

>> D=0

D =

     0
```

ile tanımlı sistemin kontrol edilebilirliğini ve gözlemlenebilirliğini öğrenmek üzere ekrana >> help gram komutunu girelim. Bu taktirde MATLAB bize şu bilgiyi verecektir;

```
>> help gram

 GRAM  Controllability and observability gramians.

   Wc = GRAM(SYS,'c') computes the controllability gramian of
   the state-space model SYS.

   Wo = GRAM(SYS,'o') computes its observability gramian.

   In both cases, the state-space model SYS should be stable.
   The gramians are computed by solving the Lyapunov equations:

    *  A*Wc + Wc*A' + BB' = 0  and   A'*Wo + Wo*A + C'C = 0
       for continuous-time systems
            dx/dt = A x + B u  ,   y = C x + D u

    *  A*Wc*A' - Wc + BB' = 0  and   A'*Wo*A - Wo + C'C = 0
       for discrete-time systems
          x[n+1] = A x[n] + B u[n] ,  y[n] = C x[n] + D u[n].

   For ND arrays of LTI models SYS, Wc and Wo are arrays with N+2
   dimensions such that
     Wc(:,:,j1,...,jN) = GRAM(SYS(:,:,j1,...,jN),'c') .
     Wo(:,:,j1,...,jN) = GRAM(SYS(:,:,j1,...,jN),'o') .
```

See also SS, BALREAL, CTRB, OBSV.

Overloaded methods
help lti/gram.m

MATLAB'de Gramianları tanımladıktan sonra >> help obsv komutu girilerek sistemin gözlemlenebilirliği hakkında bilgi alabiliriz.

```
>> help obsv

 OBSV  Compute the observability matrix.

   OB = OBSV(A,C) returns the observability matrix [C; CA; CA^2 ...]

   CO = OBSV(SYS) returns the observability matrix of the
   state-space model SYS with realization (A,B,C,D).  This is
   equivalent to OBSV(sys.a,sys.c).

   For ND arrays of state-space models SYS, OB is an array with N+2
   dimensions where OB(:,:,j1,...,jN) contains the observability
   matrix of the state-space model SYS(:,:,j1,...,jN).

   See also OBSVF, SS.

 Overloaded methods
   help lti/obsv.m
```

Bu yardımları aldıktan sonra artık sistemimizin kontrol ediliebilirliği ve gözlemlenebilirliğini inceleyelim;

```
>> W=ctrb(A,B)

W =

     1    -1     1    -1
     1    -2     4    -8
     0     0     0     0
     0     0     0     0

>> rank(W)

ans =

     2
```

kontrol ediliebilirlik matrisinin rankına baktıktan sonra >> help ss komutu yardımıyla MATLAB'de sistemin durum değeişkenlerinin u kontrol girdisiyle etkileşimini ekranda görebiliriz;

```
>> help ss

 --- help for zpk/ss.m ---

 SS  Create state-space model or convert LTI model to state space.

   Creation:
     SYS = SS(A,B,C,D) creates a continuous-time state-space (SS) model
     SYS with matrices A,B,C,D.  The output SYS is a SS object.  You
     can set D=0 to mean the zero matrix of appropriate dimensions.

     SYS = SS(A,B,C,D,Ts) creates a discrete-time SS model with sample
     time Ts (set Ts=-1 if the sample time is undetermined).

     SYS = SS creates an empty SS object.
     SYS = SS(D) specifies a static gain matrix D.

     In all syntax above, the input list can be followed by pairs
        'PropertyName1', PropertyValue1, ...
     that set the various properties of SS models (type LTIPROPS for
     details).  To make SYS inherit all its LTI properties from an
     existing LTI model REFSYS, use the syntax SYS = SS(A,B,C,D,REFSYS).

   Arrays of state-space models:
     You can create arrays of state-space models by using ND arrays for
     A,B,C,D above.  The first two dimensions of A,B,C,D determine the
     number of states, inputs, and outputs, while the remaining
     dimensions specify the array sizes.  For example, if A,B,C,D are
     4D arrays and their last two dimensions have lengths 2 and 5, then
        SYS = SS(A,B,C,D)
     creates the 2-by-5 array of SS models
        SYS(:,:,k,m) = SS(A(:,:,k,m),...,D(:,:,k,m)),  k=1:2,  m=1:5.
     All models in the resulting SS array share the same number of
     outputs, inputs, and states.

     SYS = SS(ZEROS([NY NU S1...Sk])) pre-allocates space for an SS array
     with NY outputs, NU inputs, and array sizes [S1...Sk].

   Conversion:
     SYS = SS(SYS) converts an arbitrary LTI model SYS to state space,
     i.e., computes a state-space realization of SYS.
```

SYS = SS(SYS,'min') computes a minimal realization of SYS.

See also LTIMODELS, DSS, RSS, DRSS, SSDATA, LTIPROPS, TF, ZPK, FRD.

There is more than one ss available. See also
help tf/ss.m
help ss/ss.m
help frd/ss.m
help par/ss.m
help dfilt/ss.m
help cas/ss.m
help idmodel/ss.m
help idfrd/ss.m

şimdi sistemimizin A,B,C,D kaysayı matrislerinin yardımıyla sistemin durum değeişkenlerinin *u* kontrol girdisiyle etkileşimini görelim;

```
>> sys=ss(A,B,C,D)

a =
           x1    x2    x3    x4
     x1    -1     0     0     0
     x2     0    -2     0     0
     x3     0     0    -3     0
     x4     0     0     0    -4


b =
           u1
     x1     1
     x2     1
     x3     0
     x4     0


c =
           x1    x2    x3    x4
     y1     1     0     1     0


d =
           u1
     y1     0
```

ve sisteminin gözlemlenebilirliğini inceleyelim;

```
>> O=obsv(A,C)

O =

     1     0     1     0
    -1     0    -3     0
     1     0     9     0
    -1     0   -27     0

>> rank(O)

ans =

     2
```

kotrol edilebilirlik Gramianını inceleyelim;

```
>> Wc=gram(sys,'c')

Wc =

    0.5000    0.3333         0         0
    0.3333    0.2500         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0

>> rank(Wc)

ans =

     2
```

Gözlemlenebilirlik Gramianını inceleyelim;

```
>> Wo=gram(sys,'o')

Wo =

    0.5000         0    0.2500         0
         0         0         0         0
    0.2500         0    0.1667         0
         0         0         0         0

>> rank(Wo)

ans =
```

2

Yukarıdaki bilgiler doğrultusunda şu sonuca varılır;

x_1: kontrol edilebilir ve gözlenebilir,

x_2: kontrol edilebilir ancak gözlenemez,

x_3: kontrol edilemez ancak gözlenebilir,

x_4: kontrol edilemez ve gözlenemez.

4.5.Örnek: $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ sistemini düşünelim. Sistemin orijine kontrol edilebilirliğini göstermek üzere $x_1 = 0$ ve $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ alalım. Erişilmesi istenen durum için;

$$x_1 - A^n x_0 = W_n U_n \tag{4.1}$$

denklemini daha önce vermiştik. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, x_1 ve x_0 matrislerini (4.1) denkleminde yerine yazarak sistemimizin orijine kontrol edilebilirliğini inceleyelim:

```
>> A

A =

   0   1
   1   1

>> B

B =
```

```
     0
     1

>> A^2

ans =

     1     1
     1     2

>> x0=[1 ;3]

x0 =

     1
     3

>> x1=0

x1 =

     0

>> -(A^2)*x0

ans =

    -4
    -7

>> W=ctrb(A,B)

W =
```

```
    0   1
    1   1

>> U=inv(W)*(-(A^2)*x0)

U =

   -3
   -4
```

olarak elde edilir. Bu matris bize durum geçişini yapan U girdi matrisini gösterir. Doğruluğunu görmek üzere bulunan U matrisini (4.1) denkleminde yerine yazalım:

```
>> x1=(A^2)*x0 + W*U

x1 =

    0
    0
```

elde edildiğinden sistem orijine kontrol edilebilirdir.

4.6.Örnek: $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ sistemini düşünelim. Burada $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ olarak verilmiş olsun. Kontrol edilebilirlik matrisi;

$$W = [B, \quad AB] \Rightarrow rank \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 = n$$

olduğundan sistem erişilebilirdir ve herhangi x_0 durumu, başka herhangi x_1 durumuna adımda geçer. Geçişin $n=2$ adımdan daha az adımda yapılabileceğini göstermek üzere $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ alalım.

```
>> A

A =

    0    1
    1    1
>> B

B =

    0
    1


>> W=ctrb(A,B)

W =

    0    1
    1    1
>> x1=[1 ;3]

x1 =

    1
    3
```

```
>> x0=[0 ;1]

x0 =

     0
     1


>> (x1-(A*x0))

ans =

     0
     2
```

olduğundan x_0 dan x_1 durumuna geçiş *1<2=n* adımda *u(0)=2* girdi uygulaması ile yapılabilir.

4.7.Örnek: (1.24) ile verilimiş bir sistem için A ve B matrisleri aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun. Sistemi kontrol edilebilir kanonik biçime dönüştürmek için gerekli P matrisinin nasıl hesaplandığını MATLAB'de görelim.

```
>> A=[0 2 0;1 2 0;-1 0 1]

A =

     0     2     0
     1     2     0
    -1     0     1
>> B= [0;1;1]

B =

     0
     1
     1

>> eig(A)
```

```
ans =

    1.0000
    2.7321
   -0.7321


>> W=ctrb(A,B)

W =

     0     2     4
     1     2     6
     1     1    -1

>> M= [1 2.7321 1;2.7321 1 0;1 0 0]

M =

    1.0000    2.7321    1.0000
    2.7321    1.0000         0
    1.0000         0         0


>> P=W*M

P =

    9.4642    2.0000         0
   12.4642    4.7321    1.0000
    2.7321    3.7321    1.0000
```

Böylece kontro edilebilir kanonik biçime dönüştürme matrisi elde edilmiş olur.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Chen, C, T., 1993, " Analog and Digital Control System Design: Transfer Function, State-space and Algebraic Methods " Publishing Co.

Elaydi, Saber N., 1996, " An Introduction to Difference Equations", Springer-Verlag New Yorg, Inc.

Kolman, B., Hill, D.R., 2002, , "Uygulamalı Lineer Cebir" (Çev. Ö. Akın), Palme Yayıncılık.

Kuo, Benjamin C., 1999, " Otomatik Kontrol Sistemleri" (Çev. A. Bir), Literatür yayıncılık.

Ogata, K., 1987, " Discrete Control Systems". Englewood Cliffs, NJ.: Prentice-Hall, Inc.

Panos. Antsaklis, Antony N. Michel, 1997 " Linear Systems" Mc. Graw. Hill.

Sarıoğlu, Kemal., 1999, "Otomatik Kontrol II", Birsen Yayınevi.

Westphal, L.C., 1995, " Sourcebook of Control Systems Engineering, Technical Communications", (Publishing) Ltd.

Yüksel, İ., 2001, " Otomatik Kontrol", Uludağ Üniversitesi Güçlendirme Vakfı.