SİNGÜLER OPERATÖRLER VE ONLARIN
FOURİER SERİLERİ
TEORİSİNDE UYGULAMALARI

Erhan SORKUN

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2002

SİNGÜLER OPERATÖRLER VE
ONLARIN FOURİER SERİSİ TEORİSİNDE UYGULAMALARI

Erhan SORKUN

DUMLUPINAR ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Ferhad H(G). NASİBOV

Haziran-2002

KABUL VE ONAY SAYFASI

Erhan SORKUN'un YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı " SİNGÜLER OPERATÖRLER VE ONLARIN FOURİER SERİLERİ TEORİSİNDE UYGULAMALARI " başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

20./.06.2002

Üye : Prof. Dr. Ferhad NASİBOV

Üye : Prof. Dr. Rafail GASIMOV

Üye : Doç. Dr. İdris DAĞ

Üye : Yrd. Doç. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

Üye : Yrd. Doç. Dr. Murat ALP

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 25./.06./2002 gün ve .....09......... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. İ. Göktay EDİZ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

SİNGÜLER OPERATÖRLER VE
ONLARIN FOURİER SERİSİ TEORİSİNDE UYGULAMALARI

Erhan SORKUN
Matematik bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2002
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ferhad H(G). NASİBOV

ÖZET

Fonksiyonların yaklaşım teorisi, Reel Değişkenli Fonksiyonlar Teorisinin XX. Yüzyılda ortaya çıkmış ve gelişmiş olan bir dalıdır.

Burada da çok çeşitli konular bulunmaktadır ve bu konuların her biriside günümüzde çok gelişmiş durumdadırlar.

Bu konular arasında da en önemli yerlerden birisini fonksiyonların herhangi basit ifadelerle yaklaşımı almaktadır.

Bu çalışmada Fonksiyonların Singüler operatörler ile yaklaşımı konusu ele alınmıştır. Öncelikle Singüler integral kavramı tanımlanmış, genel özellikleri verilmiş ve onların Fourier serilerinde yakınsaklık problemlerine uygulaması gösterilmiştir.

Ayrıca çalışmada, Fourier serilerinin tek bir olması konusuna da değinilmiştir.

Son olarak da Lineer operatörler ile yaklaşım üzerine P. P. Korovkin teoremleri ve bununla bağlantısı olan bazı teoremler(R. H. Mamedov, V. K. Dzyadik) ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lineer Operatör, Singüler İntegral, Yaklaşım.

SINGULAR OPERATORS AND THEIR APPLICATIONS IN THE THEORY OF FOURIER SERIES

Erhan SORKUN
Department of Mathematıcs, M. Sc. Thesis, 2002
Thesis Supervisor: Prof. Dr. Ferhad H(G). NASİBOV

SUMMARY

The theory of Approximation of the functions, is an advanced branch of the theory of Real Variable Functions emerged in 20^{th} Century. Here, there are numerous matters and each of these matters are in a state of developed condition.

One of the most significant points among these matters is the approximation of the functions with any simple statement.

In this study, approximation of functions singular operators is dealt with.

The term of singular integral is defined, its general characteristics are applied and its application on approximation problems in Fourier Series is demostrated.

In the study, it is also mendiated that Fourier Series are the only.

Finally, Linear Operators and P. P. Korovkin approximation, and in relation to it a few theorems (R. H. Mamedov, V. K. Dzyadik,etc.) are deallt with.

Keywords: Linear Operator, Singular Integral, Approximation.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlarken bana sadece bir danışman olarak değil bütün sorun ve sıkıntılarımda her zaman anlayışlı ve güler yüzlü olarak yaklaşan, ihtiyacım olduğunda daima yanımda bulduğum, bir bilim adamı olarak örnek alınabilecek saygıdeğer hocam ve tez danışmanım **Prof. Dr. Ferhad H(G). NASİBOV** beye, her zaman yardımlarını ve desteğini bizden esirgemeyen Bölüm Başkanımız **Yrd. Doç. Dr. Murat ALP** beye, teşekkürlerimi sunarım.

Erhan SORKUN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
C[a,b]	[a,b] aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı
AC[a,b]	[a,b] aralığında tanımlı mutlak sürekli fonksiyonlar uzayı
mE	E kümesinin ölçüsü
$W_n(f;x)$	K. Weierstrass singüler integrali
P_n	n. dereceden cebirsel polinom
t_n	n. dereceden trigonometrik polinom
$\sigma_n(f;x)$	2π peryotlu f(x) fonksiyonunun Fejer Toplamı
$F^{(1)}(x)$	1. mertebe Schwarz türevi
$F^{('')}(x)$	2. mertebe Schwarz türevi
K(x)	Fejer tipli çekirdek
$L_n(f;x)$	Lineer operatör
$\{L_n\}$	Lineer pozitif operatörler dizisi
$L^p[a,b]$	p. Kuvveti [a,b] üzerinde Lebesgue integrallenebilir ölçülebilir fonksiyonlar uzayı
$B_n(f;x)$	[0,1] aralığında sürekli f(x) fonksiyonunun Bernstein polinomu

GİRİŞ

Fonksiyonların bir formülle ifade edilmesi – gösterimi gerekliliği çok eski zamanlardan günümüze kadar pek çok durumda gündeme gelmiş ve günümüzde de gelmektedir.

Böyle problemler, her şeyden önce fonksiyon cetvel veya grafik şeklinde verilmiş olduğu zaman ortaya çıkıyor.

Fakat bu tür problem, yalnızca hiçbir formülün olmadığı durumda ortaya çıkar anlamına da gelmez, böyle düşünmek de çok yanlış olur.

Kapalı şekilde verilmiş fonksiyonları, kullanılması zor, fakat mevcut olan formülleri, elemanter fonksiyonlarla sonlu şekilde ifade olunamayan integralleri, çözümünün varlığı ve tek bir olduğunu söylemek imkanı sağlayan diferansiyel veya integral denklemlerin çözümlerinin açık şekilde bulunması veya bulunamaması vs. problemler bu düşünceyi kanıtlayan önemli sebeplerdir.

Örneğin,

$f(x)=|x|$ fonksiyonunun polinomlarla ifade edilmesi,

$$\int_0^t \frac{\sin x}{x} dx\,,\quad \int_0^t \sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 x}\, dx (0<\varepsilon<1)\,,\quad \int_0^t \sin x^2 dx$$

vb. gibi fonksiyonların elemanter fonksiyonlarla sonlu şekilde ifade olunamadığı, $\cos(x-y)+2^x-3^y+\ln(x^2+y^2+3)=5$ denkleminin çözümünün net olarak bulunamadığı vs. herkes tarafından bilinmektedir.

Dolayısıyla, pratik hesaplamalarda ortaya çıkan bu tür fonksiyonlarla işlem yapmak mümkün olmadığından veya zor olduğundan, onları daha basit fonksiyonlarla ifade etmek kesinlikle gerekmektedir.

Böyle basit fonksiyonlar olarak ilk zamanlarda cebirsel veya trigonometrik polinomlar kullanılmaktaydı ve K. Weierstrass' ın teoremleri de bu problemi çözen ilk teoremlerdendir.

Fakat daha sonraları böyle polinomların bütün mümkün olabilen benzer problemlerin çözümü için yararlı olmadığı belirlendi.

İlk kez S. N. Bernsteyn böyle problemler ile ilgilenmeye başlamış ve sonlu dereceli tam fonksiyonların böyle bir araç olarak kullanılabileceğini göstermiştir. kısa bir zaman sonra ağırlık fonksiyonlarını içeren yaklaşım problemleri, rasyonel kesirlerde approksime problemleri, lineer operatörlerle yaklaşım, singüler integraller ile yaklaşım problemleri vs. ortaya çıkmış oldu. Böylece, uzun seneler boyunca yapılan çalışmalar sonucunda Fonksiyonlar teorisinin bir dalı olarak "Fonksiyonların yaklaşım teorisi" oluşmaya ve gelişmeye başladı.

Bu çalışmada Singüler İntegraller ve onların Fourier Serilerinin yakınsaklık problemlerinin araştırılmasına uygulanması konusu ele alınmıştır.

Çalışmada Singüler integrallerin tanımı, onların genel özellikleri ve yanı sıra, İ. P. Natanson, P. İ . Romanovsky, D. K. Faddeyev'in temel oluşturan teoremleri, onların trigonometrik serilerin yakınsaklık problemlerine uygulamaları (Fejer Operatörü, Dirichlet Operatörü, Fejer tipli operatörler) verilmiştir.

Bu çalışmada, verilmiş 2π- periyotlu fonksiyonların trigonometrik seriye açılımı ile ilgili tek bir olma problemi de ele alınmıştır.(B. Riemann, Valle-Poussin, G. Kantor, vb. teoremleri.)

Çalışmada daha sonra lineer operatörlerle yaklaşım problemi de genel şekilde ele alınmıştır.

Ayrıca belirtelim ki, son zamanlarda P. P. Korovkin'in "üç fonksiyon hakkında teoremler"i çok etkili olmuş ve uygun teorilerde çok önemli gelişmelere varmaya imkan sağlamıştır.

Bu konu Azerbaycan'da da çok geniş bir şekilde araştırılmış bir konudur. Azerbaycan Matematikçilerinin bu konuya ilişkin çok önemli çalışmaları mevcuttur. Bu konuya ait çalışmalar yapan bilim adamlarından Prof. Dr. İbrahimov İ.İ. onun öğrencileri ve de devamcıları olan Prof. Dr. Mamedov R. H., Prof. Dr. Hacıyev A. C., Doç. Dr. Cafarov A. S. ve onların öğrencilerini gösterebiliriz.

Bunu dikkate alarak, çalışmamızda bu bilim adamlarının neticeleri hakkında az da olsa bilgi vermek istedik ve bazı teoremleri de çalışma içerisinde verdik.

1. TEMEL BİLGİLER

1.1 Mutlak Sürekli Fonksiyonlar

1.1.1 Tanım: [a,b] aralığınsda reel değerli f(x) fonksiyonu verilmiş olsun. $\forall\varepsilon>0$' a göre öyle $\delta>0$ sayısı olsa ki,

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$$

şartını sağlayan ve arakesitleri boş olan her $\{(a_k, b_k)\}_1^n$ intervaller sistemi için

$$\left|\sum_{k=1}^{n}[f(b_k) - f(a_k)]\right| < \varepsilon$$

şartı sağlansın, o zaman f(x) fonksiyonu [a,b] aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon olarak adlandırılır.

Bu tanımdan görülür ki her mutlak sürekli fonksiyon süreklidir (n=1 almak yeterlidir). Fakat bunun tersi doğru değildir.

Eğer [a,b] da sürekli fonksiyonlar uzayını C[a,b], mutlak sürekli fonksiyonlar uzayını da $AC[a,b] \equiv AC$ ile gösterirsek, $C[a,b] \supset AC[a,b]$ olduğu görülür ve $C[a,b] \setminus AC[a,b] \neq \Lambda$.

Örneğin $f_0(x) = \begin{cases} x.\cos\dfrac{\pi}{2x} & ,0 < x \leq 1 \\ 0 & ,\ x = 0 \end{cases}$

fonksiyonu süreklidir, fakat mutlak sürekli değildir. Bu aşağıda ki teoremden görülmektedir.

1.1.2 Teorem: Mutlak sürekli fonksiyon sonlu salınımlıdır.

$f_1(x) \in C[a,b]$ her hangi bir fonksiyon olsun.

Eğer $f_1(x) \in AC[a,b]$ olsaydı, aynı zaman da sonlu salınımlı olurdu ki bu da doğru değildir. $f_0(x) \in C[a,b]$ dir, fakat sonlu salınımlı değildir. Mutlak sürekli fonksiyonların birkaç önemli özelliğini daha verelim.

1.1.3 Teorem : [a,b] de mutlak sürekli olan iki fonksiyonun toplamı, farkı, çarpımı ve paydası sıfırdan farklı olduğunda bölümü de o parçada mutlak süreklidir:

$$f(x), \varphi(x) \in AC[a,b] \Rightarrow f(x)+\varphi(x), f(x)-\varphi(x), f(x).\varphi(x), \varphi(x) \neq 0 \text{ olduğunda}$$

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \in AC[a,b] \text{ dir.}$$

1.1.4 Teorem. $f(x) \in AC[a,b]$ ise [a,b] nin sanki her bir noktasında sonlu $f'(x)$ türevi vardır ve bu türev integrallenebilir fonksiyondur.

1.1.5 Teorem: Eğer f(x) $\in AC[a,b]$ için $f'(x)=0$ (h.h.) ise, o zaman f(x)=sabit

1.1.6 Sonuç: $f(x), \varphi(x) \in AC[a,b]$ için $f'(x) \sim \varphi'(x)$ ise, o zaman $f(x)-\varphi(x)=$sabit

1.2. Lebesgue Belirsiz İntegrali ve Lebesgue Noktası

Öncelikle bize gereken bazı kavramları tanımlayalım.

1.2.1 Tanım: f(t), [a,b] aralığında tanımlanmış ve integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Bu

$$F(x) = c + \int_a^x f(t)dt \qquad (\alpha)$$

fonksiyonuna f(t) nun (Lebesgue anlamında) belirsiz integrali denir.

Burada c- isteğe bağlı bir sabittir. Buradan da görülür ki, bir tane f(t) fonksiyonunun sonsuz sayıda belirsiz integralleri vardır ve bunlar biri birilerinden c- sabit toplamı ile farklılaşırlar.

Bu şekilde tanımlanan f(x) fonksiyonunun bazı gerekli ve önemli özellikleri vardır ve onlardan:

1.2.2 Teorem: (α) formülü ile tanımlanan F(x) fonksiyonu mutlak süreklidir.

1.2.3 Sonuç: F(x) fonksiyonu hemen hemen her yerde türevlenebilirdir ve onun türevi f(x) integrallenebilir bir fonksiyondur.

1.2.4 Teorem: $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = (F(x))' = f(x)$ eşitliği doğrudur.

1.2.5 Teorem: Mutlak sürekli fonksiyon kendi türevinin belirsiz integralidir:

Yani

$$F(x) = c + \int_a^x F'(t)dt$$

dir.

İspat: F(x)- mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman F(x)' in h.h.h. yerde türevi vardır ve bu $F'(x)$ türevi integrallenebilir bir fonksiyondur.

$$\phi(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt \qquad (\beta)$$

diyelim. Bu fonksiyonda mutlak süreklidir(Teorem1) ve onun türevi integrantına eşittir: $\phi'(x) = F'(x)$. Öyle ise $\phi(x) - F(x) = \text{sabit}$. Diğer taraftan, $\phi(a) = F(a) + 0$ dır. Ve buna göre de $\phi(a) - F(a) = 0$. bu ise $\phi(x) - F(x) = 0$, $\phi(x) = F(x)$ olması demektir. Yani, (β) formülünün sol tarafında yazılan $\phi(x)$ fonksiyonu F(x)' in ta kendisidir. Dolayısıyla

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt \qquad \bigstar$$

dir.

1.2.6 Tanım: x noktasında $f(x) \neq \pm\infty$ ve

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt = 0$$

şartı sağlandığında x, f(t) fonksiyonunun bir Lebesgue noktasıdır denir.

1.2.7 Teorem: Eğer x, f(t) nin bir Lebesgue noktası ise, o zaman bu x noktasında $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ belirsiz integralinin türevi vardır ve f(x) dir: $F'(x) = f(x)$.

İspat.

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt,$$

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right| \leq \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}|f(t)-f(x)|dt$$

olduğundan, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\Delta F(x)}{h}=f(x)\,,F'(x)=f(x)$ ★

1.2.8 Not: Bu teoremin tersi genellikle dersek, doğru değildir.

1.3 Approksimativ Süreklilik

Herhangi bir ölçülebilir E kümesini göz önüne alalım. x_0 her hangi bir nokta ve h>0 olsun.

$$E(x_0,h)=E\cap[x_0-h,x_0+h]\equiv E\bullet[x_0-h,x_0+h]$$

dersek, bu da ölçülebilir bir küme olur. $\frac{mE(x_0,h)}{2h}$ oranına E kümesinin $[x_0-h,x_0+h]$ aralığında "orta yoğunluğu" denir.

1.3.1 Tanım: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{mE(x_0,h)}{2h}$, E kümesinin x_0 noktasında yoğunluğu olarak adlandırılır ve $D_{x_0}E$ şeklinde gösterilir:

$$\lim_{h\to 0}\frac{mE(x_0,h)}{2h}=D_{x_0}E\,.$$

$D_{x_0}E=1$ olduğunda x_0 E kümesinin yoğunluk noktası $D_{x_0}E=0$ olduğunda ise seyrekleşme noktası olarak adlanır.

Ayrıca belirtelim ki, bu tanımda $x_0\in E$ olması mecburi değildir. Ve, her kümenin de her noktada yoğunluğa sahip olması söz konusu değildir.

1.3.2 Örnek: E=[-2,2] olsun. $x_0\in(-2,2)$ olmak üzere herhangi bir nokta olsun.
h>0, $[x_0-h,x_0+h]\subset(-2,2)$ olsun. O zaman
$E(x_0,h)=[-2,2]\bullet[x_0-h,x_0+h]\equiv[x_0-h,x_0+h]$, $mE(x_0,h)=2h$ olduğundan

$$D_{x_0}E = \lim_{h\to 0}\frac{mE(x_0,h)}{2h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h}{2h} = 1$$

olur ve E=(-2,2) kümesinin her noktası onun bir yoğunluk noktasıdır.

1.3.3 Not: Tanımı uygun şekilde değiştirirsek, noktada tek taraflı yoğunluk kavramını vermiş oluruz ve bu nedenle de, -2 ve 2 noktalarının da uygun olarak sağ ve sol tarafa yoğunluk noktaları olduğunu görürüz.

1.3.4 Teorem: Ölçülebilir E kümesinin her noktası yoğunluk noktasıdır.

Şimdi bu kavramla sıkı ilişkide olan yeni bir kavramı tanımlayalım.

1.3.5 Tanım: [a,b] aralığında tanımlı f(x) fonksiyonu ve $x_0 \in [a,b]$ verilmiş olsun.

Eğer öyle $E \subset [a,b]$ kümesi olsa ki, x_0 onun yoğunluk noktası olsun ve f(x) fonksiyonu da E kümesi üzere x_0 da sürekli olsun, o zaman f(x), x_0 noktasında approksimativ sürekli bir fonksiyondur denir.

Bu tanımdan görülür ki, her süreklilik noktası, aynı zamanda approksimativ süreklilik noktasıdır. Fakat ölçülebilir fonksiyonun hiç süreklilik noktası olmaya da bilir. Örneğin Dirichlet fonksiyonu böyle bir fonksiyondur.

Bunun yanında aşağıdaki önemli teorem bulunmaktadır.

1.3.6 Teorem (A.Denjoy): f(x), [a,b] aralığında verilmiş ölçülebilir ve sanki her yerde sonlu bir fonksiyon olduğunda, o fonksiyon [a,b] parçasının sanki her yerinde approksimativ süreklidir.

2.SİNGÜLER İNTEGRALLER VE ONLARIN GENEL ÖZELLİKLERİ

2.1 Singüler İntegral Kavramı

Reel değişkenli fonksiyonlar teorisinin bazı analiz problemlerine uygulamaları vardır. Bu uygulamalar arasında trigonometrik seriler teorisinde uygulamaların önemli yeri vardır. Böyle uygulamalarda ise birkaç tane genel teorem kullanılmaktadır ve bu teoremlerin ispatında kullanılan düşünce ve metotlar arasında "singüler integral" kavramının da ayrıca yeri vardır Bundan dolayı öncelikle singüler integral kavramını tanımlayalım[İ. P. Natanson].

2.1.1 Tanım: Π_2=[$a \le t \le b$; $a<x<b$] karesinde tanımlanmış $\phi_n(t,x)$ (n=0,1,2,3, . . .) fonksiyonları her $a \le \alpha < x < \beta \le b$ için

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \phi_n(t,x)\, dt = 1 \qquad (1)$$

şartını sağladığında bu $\phi_n(t,x)$ fonksiyonu çekirdek fonksiyon olarak adlandırılır. Buradan $\phi_n(t,x)$ nin her sabit x için t' nin integrallenebilir bir fonksiyonu olduğu görülür.

2.1.2 Tanım: $\phi_n(t,x)$ herhangi bir çekirdek olduğunda

$$f_n(x) = \int_a^b \phi_n(t,x)\, f(t)\, dt \qquad (2)$$

biçiminde olan integrallere **singüler integral** denir.

Singüler integraller teorisinin çeşitli uygulamaları vardır. Esas problem $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ile f(t) fonksiyonunun t=x noktasındaki değeri arasında ne gibi bir ilişkinin olabileceğini araştırmaktır.

Açıktır ki tek bir x noktasında f(t) nin değerinin değişmesi $f_n(x)$ in değerlerine etki etmez. Buna göre de fonksiyonun f(x) değerinin x noktasına çok yakın olan başka noktalarda değerleri ile herhangi bir ilişkisinin mevcut olması gerekmektedir. Bu şekilde bir ilişkiye örnek olarak, x noktasında f(t)'nin sürekli olması halinde, approksimativ sürekli olması, x noktasının d noktası veya Lebesgue noktası olması gerekliliği çıkartılabilir.

2.1.3 Örnek:

$$\phi_n(t,x) = \frac{n}{\pi}.\frac{1}{1+n^2(t-x)^2} \qquad (n = 1,2,\ldots) \qquad (3)$$

fonksiyonunun bir çekirdek olduğunu ve t=x noktasında f(t) nin sürekli olduğu durumda

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{f(t)\ dt}{1+n^2(t-x)^2} = f(x) \qquad (4)$$

şartının sağlandığını gösterelim.(0<x<1)

n(t-x)=z değişimi yapılırsa, dt=$\frac{dz}{n}$ olur ve sonuçta,

$$\int_0^1 \phi_n(t,x)dt = \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{1+n^2(t-x)^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-nx}^{n(1-x)} \frac{dz}{1+z^2}$$

olur ve $n \to \infty$ da

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \phi_n(t,x)dt = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-nx}^{n(1-x)} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{1+z^2} = 1$$

olduğu görülür.

Yani, $\phi_n(t,x)$ fonksiyonu (1) şartını sağlar, yani, çekirdektir.

Şimdi (4) bağıntısının sağlandığını gösterelim. $r_n(x) = f_n(x) - f(x)$ olsun.

$$r_n(x) = f_n(x) - f(x) = \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{f(t)-f(x)}{1+n^2(t-x)^2}dt$$

dir.

Öteki yandan, f(t) fonksiyonu t=x noktasında sürekli olduğunda, $\forall\varepsilon > 0$ için öyle $\delta > 0$ bulunur ki $|t-x| < \delta$ olduğunda $|f(t)-f(x)| < \varepsilon$ olur. $0 < x - \delta < x + \delta < 1$ olduğunu kabul edersek,

$$r_n = \frac{n}{\pi}\int_0^{x-\delta} \frac{f(t)-f(x)}{1+n^2(t-x)^2}dt + \frac{n}{\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{f(t)-f(x)}{1+n^2(t-x)^2}dt + \frac{n}{\pi}\int_{x+\delta}^{1} \frac{f(t)-f(x)}{1+n^2(t-x)^2}dt = A_n + B_n + C_n \quad ,$$

$$r_n(x) = A_n + B_n + C_n$$

biçiminde yazabiliyoruz. B_n, t=x noktasında f(t) nin sürekli olma şartından dolayı aşağıdaki gibi değerlendirilebilir:

$$|B_n| \le \frac{n}{\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta}\frac{|f(t)-f(x)|}{1+n^2(t-x)^2}dt < \varepsilon.\frac{n}{\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta}\frac{dt}{1+n^2(t-x)^2} < \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \varepsilon$$

A_n ve C_n integrallerinde ise $|t-x| \ge \delta$ olduğundan dolayı,

$$|A_n| \le \frac{n}{\pi(1+\delta^2.n^2)}.\int_0^{x-\delta}|f(t)-f(x)|dt < \frac{A(\delta)}{n}, \qquad |C_n| < \frac{C(\delta)}{n}$$

olur ve bu nedenle de

$$|r_n| = |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon + \frac{A(\delta)+C(\delta)}{n} < 2.\varepsilon \quad (n \ge n_0(\varepsilon))$$

dir.

Bununla da (4) bağıntısı ispatlanmış olur.★

Bu ispat yapılırken t=x noktasında f(t) nun sürekli olması şartı kullanıldı. Böylece n yeteri kadar büyük olduğunda f(t) ve f(x) birbirlerinden hiç farklaşmaz gibidirler ve bundan dolayı da,

$$\int_0^1 \phi_n(t,x)f(t)dt \approx f(x)$$

olur. Burada ortaya çıkarılan bu düşünce daha sonra daha geniş olarak vereceğimiz araştırmaların ana fikrini oluşturan bir düşüncedir.

2.1.4 Teorem (A. Lebesgue):

[a,b] aralığında ölçülebilir fonksiyonların $\{\varphi_n(t)\}_1^\infty$ dizisi verilmiş olsun Öyle K sabiti varsa ki, $\forall$ n ve $\forall$ t için

$$|\varphi_n(t)| < K \qquad (5)$$

ve $\forall c\ (a \le c \le b)$ için

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^c \varphi_n(t)dt = 0 \qquad (6)$$

olsun, o zaman [a,b] aralığında integrallebilir her bir f(t) fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt = 0 \qquad (7)$$

dir.

İspat: $[\alpha,\beta]$, $[a,b]$ içerisinde yerleşen herhangi bir parça olsun. $[a,\beta] = [a,\alpha]+[\alpha,\beta]$ olduğundan

$$\int_{\alpha}^{\beta}\varphi_n(t)dt=\int_{a}^{\beta}\varphi_n(t)dt-\int_{a}^{\alpha}\varphi_n(t)dt$$

yazılır ve bir kez $c=\beta$, bir kez de $c=\alpha$ dersek, (6) şartından çıkarılır ki, sağ taraftaki integrallerin her ikisinin $n\to\infty$ da limiti sıfırdır. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi_n(t)dt=0 \tag{8}$$

olur.

1. Şimdi f(t) sürekli bir fonksiyon olsun. $\forall\varepsilon>0$ verildiğinde [a,b] aralığını $x_0=a<x_1<x_2...<x_m=b$ noktaları ile o kadar küçük parçalara ayıralım ki, onların her biri için $|f(t)-f(x_k)|<\varepsilon$ $(t\in[x_k,x_{k+1}])$ olsun.

Bundan dolayı aşağıdakileri yazabiliyoruz.

$$\int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt=\sum_{k=0}^{m-1}\int_{x_k}^{x_{k-1}}[f(t)-f(x_k)]\varphi_n(t)dt+\sum_{k=0}^{m-1}f(x_k).\int_{x_k}^{x_{k+1}}\varphi_n(t)dt \tag{9}$$

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}[f(t)-f(x_k)]\varphi_n(t)dt\right|\le K.\varepsilon.(x_{k+1}-x_k)$$

buradan
$$\left|\sum_{k=0}^{m-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}[f(t)-f(x_k)]\varphi_n(t)dt\right|\le K.\varepsilon.(b-a) \tag{10}$$

olur. Öteki yandan, (8) eşitliği gereğince öyle $n_o(\varepsilon)$ bulunabilir ki,$n\ge n_o$ olduğunda

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+}}\varphi_n(t)dt\right|<\frac{\varepsilon}{m.M},\qquad \left|\sum_{k=0}^{m-1}f(x_k)\int_{x_k}^{x_{k+1}}\varphi_n(t)dt\right|\le\frac{\varepsilon.m.M}{m.M}=\varepsilon \qquad (\ |f(x)|\le M\ )$$

olur ve sonuçta

$$\left|\int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt\right|\le\varepsilon[K(b-a)+1]$$

elde edilmiş olur ki, buda sürekli fonksiyonlar için ispatı tamamlar.

2. Şimdi f(t) fonksiyonu ölçülebilir sınırlı fonksiyon olduğu durumda (7) eşitliğinin sağlandığını gösterelim

Gerçekten $|f(t)|\le M$ olsun. O zaman N.N.Luzin teoremi gereğince, öyle bir g(t) sürekli fonksiyonu bulunur ki, $mE(f\ne g)<\varepsilon$ ve $|g(t)|\le M$ olur. O zaman (İ.P. Natanson, s.301)

$$\int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt = \int_a^b [f(t)-g(t)]\varphi_n(t)dt + \int_a^b g(t)\varphi_n(t)dt$$

olur.

Fakat,

$$\left|\int_a^b [f(t)-g(t)]\varphi_n(t)dt\right| = \left|\int_{E(f\neq g)} [f(t)-g(t)]\varphi_n(t)dt\right| < 2.K.M.\varepsilon,$$

dir, teorem'e göre ise (g(t) sürekli olduğundan)

$$\left|\int_a^b g(t)\varphi_n(t)dt\right| < \varepsilon \quad (n \geq n_o)$$

olur, sonuçta

$$\left|\int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt\right| < 2.K.M.\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon(2.K.M+1) \quad (n \geq n_o)$$

elde edilir. Yani, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt = 0$ dir. ★

3. Teoremin her integrallenebilir fonksiyon için doğru olduğunu gösterelim.

$\varepsilon > 0$ olsun. İntegral mutlak sürekli olduğundan dolayı (İ. P. Natanson, s.168) öyle $\delta > 0$ bulunur ki $me < \delta$ şartını sağlayan her ölçülebilir $e \subset [a,b]$ kümesi için, $\int_e |f(t)|dt < \varepsilon$ olur.f(t) integrallenebilir bir fonksiyon olduğundan, sanki her yerde sonludur. O zaman ölçülebilir fonksiyonların yapı teoremlerine göre (İ. P. Natanson,, s.113) öyle ölçülebilir sınırlı g(x) fonksiyonu bulunur ki, $mE(f \neq g) < \varepsilon$ olur. $E(f \neq g)$ kümesinde g(t)=0 kabul ediyoruz. O zaman:

$$\int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt = \int_a^b [f(t)-g(t)]\varphi_n(t)dt + \int_a^b g(t)\varphi_n(t)dt\,.$$

olur.

Fakat,

$$\left|\int_a^b [f(t)-g(t)]\varphi_n(t)dt\right| = \left|\int_{E(f\neq g)} f(t)\varphi_n(t)dt\right| < K.\varepsilon,$$

Öteki yandan da, yeteri kadar büyük n için $\left|\int_a^b g(t)\varphi_n(t)dt\right| < \varepsilon$ olacağından,

$$\left|\int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt\right| < (K+1)\varepsilon$$

olur ve ispat tamamlanır. ★

2.1.5 Örnek: 1) $\varphi_n(t) = \cos nt$ olursa, $\int_a^c \varphi_n(t)dt = \frac{\mathrm{Sin}(nc) - \mathrm{Sin}(na)}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$

2) $\varphi_n(t) = \mathrm{Sin}nt$ olursa, $\int_a^c \mathrm{Sin}(nt)dt = \frac{\mathrm{Cos}(na) - \mathrm{Cos}(nc)}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$

ifadelerini kullanarak (ve Teorem ' i kullanarak) aşağıdaki teoremi ispatlayabiliriz.

2.1.6 Teorem (Riemann-Lebesgue): [a,b] aralığında integrallenebilir her bir f(t) fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\mathrm{Cos}nt\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\mathrm{Sin}nt\,dt = 0$$

olur.

Özel halde, f(t)- 2π periyotlu ve integrallenebilir bir fonksiyon ise, o zaman onun a_n, b_n Fourier katsayıları

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{Cos}nt\,dt = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{Sin}nt\,dt = 0$$

şartlarını sağlar.

2.1.7 Not: $f^2(t)$ integrallenebilir bir fonksiyon olduğunda, bu önerme $\sum_n (a_n^2 + b_n^2)$ serisinin yakınsak olması sonucu olarak ortaya çıkar.

2.1.8 Not: (7) bağıntısı her integrallenebilir f(t) fonksiyonu için sağlandığında $\{\varphi_n(t)\}$ zayıf anlamda sıfıra yakınsar denir ve $\varphi_n(t) \to 0\,(z, y)$ gibi gösterilir.

2.2 Fonksiyonun Verilmiş Noktada Singüler İntegral ile Gösterimi

Her defasında belirtmesek bile, $\phi_n(t,x)$ nin her bir n ve x için sınırlı olduğunu düşüneceğiz. Böylece $\psi_n(x) \geq 0$ fonksiyonu bulunursa ki,

$|\phi_n(t,x)| \leq \psi_n(x) \qquad (n = 0,1,2,3,...)$ olur. Bu durumda

$$f_n(x) = \int_a^b \phi_n(t,x) f(t) dt \qquad (1)$$

integrali her integrallenebilir f(t) için vardır.

2.2.1 Teorem (A.Lebesgue): Eğer;

1-) (a,b) aralığından alınmış her x (a<x<b) ve her $\delta > 0$ için $[a, x-\delta]$ ve $[x+\delta, b]$ parçalarının her birinde $\phi_n(t,x) \to 0$(z.y.) ise ve

2-) n-e bağlı olmayan öyle bir H(x) fonksiyonu varsa ki,

$$\int_a^b |\phi_n(t,x)| dt < H(x) \qquad (2)$$

olsun, o zaman x noktasında sürekli olan her bir integrallenebilir f(t) fonksiyonu için,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad (3)$$

dır.

İspat: $\phi_n(t,x)$ çekirdek olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n(t,x) dt = 1$$

dir.

Teoremin ispatını tamamlamak için,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f(t) - f(x)] \phi_n(t,x) dt = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

Bu amaçla $\varepsilon > 0$ sayısını alalım ve öyle $\delta > 0$ bulalım ki, $|t-x| < \delta$ olduğunda

$$|f(t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3H(x)} \qquad (4)$$

olsun.

O zaman $\forall$ n:

$$\left| \int_{x-\delta}^{x+\delta} [f(t) - f(x)]\phi_n(t, x)dt \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (5)$$

dir.

Öteki yandan da,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a}^{x-\delta} [f(t) - f(x)]\phi_n(t, x)dt = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{x+\delta}^{b} [f(t) - f(x)]\phi_n(t, x)dt = 0$$

olduğu görülür.

Demek ki, $n>n_o$ için bu integrallerin her biri (modülü) $<\frac{\varepsilon}{3}$ olur.

Dolayısı ile

$$\left| \int_{a}^{b} [f(t) - f(x)]\phi_n(t, x)dt \right| < \varepsilon \qquad (n \geq n_o)$$

olur ki, bu da ispatı tamamlar. ★

Bu teorem t=x noktasında sürekli olan fonksiyonu bu noktada singüler integral limiti şeklinde gösterme imkanı sağlar, Fakat integrallenebilir fonksiyonun hiçbir süreklilik noktası olmayabilir. (Örneğin, Dirichlet fonksiyonu). Bundan dolayı da Teorem kendi önemini düşürmüş oluyor.

Daha büyük merak uyandıran, integrallenebilir fonksiyonun başka türlü noktalarda (Lebesgue noktasında, kendi belirsiz integralinin türevi olduğu noktalarda (böyle noktalara fonksiyonun d noktaları denir) vb.) böyle gösterimin mümkün olmasıdır, zira bu türlü noktalar fonksiyonun tanım aralığını hemen hemen dolduran noktalardır. Böyle noktalar olarak approksimativ süreklilik noktaları da olabilir. Fakat, singüler integraller teorisi için bu türlü noktalar böyle merak uyandırmaz. Nitekim, 1931 yılında I. P. Natanson göstermiştir ki her integrallenebilir fonksiyonu bütün approksimativ süreklilik noktalarında tasvir edebilecek böyle singüler integraller yoktur.(I.P. Natanson, s.304) Buna göre de yalnızca Lebesgue noktaları veya d noktaları söz konusu olacaktır.

2.2.2 Lemma (I. P. Natanson): [a,b] aralığında

$$M = \sup_{0<h<b-a}\left\{\frac{1}{h}\left|\int_a^{a+h} f(t)dt\right|\right\} < +\infty \qquad (6)$$

şartını sağlayan f(t) integrallenebilir fonksiyonu verilmiş olsun. O zaman, [a,b] aralığında verilmiş ve integrallenebilir olan her bir azalan $g(t) \geq 0$ fonksiyonu için

$$\int_a^b f(t)g(t)dt \qquad (7)$$

integrali vardır (t=a oluğunda has integral olabilir) ve

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq M.\int_a^b g(t)dt \qquad (8)$$

eşitsizliği doğrudur.

Bu eşitsizlikte M sabitini azaltamayız, zira f(t)=1 olduğunda (8) eşitsizliği eşitliğe dönüşür.

İspat: Lemma da $g(a)=+\infty$ hali mümkün olan bir haldir. $g(a)<+\infty$ durumunda g(t) sınırlı olur ve (7) integrali adi anlamda Lebesgue integrali oluyor. Ayrıca belirtelim ki, genelliği bozmadan g(b)=0 kabul ediyoruz. Aksi taktirde,

$$g^*(t) = \begin{cases} g(t)\ , & a \leq t < b \\ 0\ , & t = b \end{cases}$$

fonksiyonunu göz önüne alır ve sonuçta $g^*(t)$ yerine g(t) yazardık, zira bir noktada (t=b) değerin değişmesi integrallerin değerini değiştirmez. Demek: g(b)=0. $a < \alpha < b$ olsun. $[\alpha, b]$ aralığında g(t) sınırlıdır. (t=a noktasında tehlike olabilirdi!) ve integral

$$\int_\alpha^b f(t)g(t)dt \qquad (9)$$

vardır. Şimdi

$$F(t) = \int_a^t f(u)du \qquad (10)$$

diyelim. O zaman (9) integralini şöyle de yazabiliriz:

$$\int_\alpha^b f(t)g(t)dt = \int_\alpha^b g(t)dF(t)$$

ve kısmi integrasyon uygularsak, buradan

$$\int_{\alpha}^{b} f(t)g(t)dt = -F(\alpha)g(\alpha) + F(b)g(b) + \int_{\alpha}^{b} F(t)d[-g(t)] = -F(\alpha)g(\alpha) + \int_{\alpha}^{b} F(t)d[-g(t)]$$

elde edilir.

Diğer taraftan, (6) şartından,

$$|F(t)| \le M.(t-a) \qquad (11)$$

olduğu görülür.

Gerçekten (10) formülünden $\frac{F(t)}{t-a} = \frac{1}{t-a}\int_a^t f(u)du$ yazabiliyoruz ki, buradan da (6) şartına göre

$$\frac{|F(t)|}{t-a} \le \sup_t \left\{ \frac{1}{t-a} \left| \int_a^t f(u)du \right| \right\} = M$$

olur.

Öteki yandan, g(t) azalandır. Oysa,

$$\int_a^{\alpha} g(t)dt \ge g(\alpha)(\alpha - a) \qquad (12)$$

(11) de t= α dersek $|F(\alpha) \le M.(\alpha - a)|$ olduğundan dolayı,

$$|F(\alpha)g(\alpha)| \le M(\alpha - a)|g(\alpha)| = Mg(\alpha)(\alpha - a) \le M.\int_a^{\alpha} g(t)\,dt$$

g(t) azalan olduğundan (-g(t)) artan olur. O zaman (11) den alırız ki,

$$\left| \int_{\alpha}^{b} F(t)d[-g(t)] \right| \le M.\int_{\alpha}^{b} (t-a)\ d(-g(t))$$

olur.

Şimdi, sağ tarafta olan integrali kısmi integrasyon yaparak,

$$\int_{\alpha}^{b}(t-a)d(-g(t)) = g(\alpha)(\alpha - a) + \int_{\alpha}^{b} g(t)\,dt$$

biçiminde yazabiliyoruz. Buradan ve (12)'den de

$$\left|\int_{\alpha}^{b}(t-a)d(-g(t))\right| \leq \int_{a}^{\alpha} g(t)dt + \int_{\alpha}^{b} g(t)dt = \int_{a}^{b} g(t)dt$$

bulunur.

Böylece,

$$\left|\int_{\alpha}^{b} f(t)g(t)dt\right| \leq M\left\{\int_{a}^{\alpha} g(t)dt + \int_{a}^{b} g(t)dt\right\} \qquad (13)$$

olur. (13)'ü biz g(b)=0 durumunda ispatladık. Fakat, yukarıda da söyledik ki bu önemli değildir ve (13) $g(b) \neq 0$ olsa da doğrudur. Burada $b = \beta$ $(\alpha < \beta < b)$ alabiliyoruz. Sonuçta ise

$$\lim \int_{\alpha}^{\beta} f(t)g(t)\,dt = 0 \quad (\alpha \to a, \beta \to b) \qquad (14)$$

eşitliğine ulaşmış oluruz. Bununla da (7) integralinin varlığı ispatlandı. En sonda (13) eşitsizliğinde $\alpha \to a$ limit alırsak, (8) eşitsizliği ispatlanmış olur. ★

2.2.3 Teorem (P. İ. Romanovskiy): $\phi_n(t,x)$ çekirdeği:

1-) $\phi_n(t,x) \geq 0$ ve

2-) Her sabit n ve x için t- nin fonksiyonu olarak [a,x] aralığında artan, [x,b] aralığında azalan olursa, o zaman x noktasında kendi belirsiz integralinin türevi olan her bir integrallenebilir f(t) fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a}^{b} [f(t) - f(x)]\phi_n(t,x)dt = 0 \qquad (15)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $\phi_n(t,x)$ çekirdek olduğundan dolayı

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a}^{b} [f(t) - f(x)]\phi_n(t,x)dt = 0 \qquad (16)$$

olduğunu ispatlamak yeterli olur. Bunun için ise bu ifadede olan integrali [a,x]ve [x,b] olmak üzere iki parça halinde integrallere ayıralım ve onlardan ikincisi üzerinde duralım.

f(t) kendi belirsiz integralinin türevi olduğu için, $\forall\varepsilon > 0$ a göre öyle $\delta > 0$ buluruz ki, $0<h\leq\delta$ olduğunda

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}[f(t)-f(x)]dt\right|<\varepsilon$$

şartı sağlanır.

Lemma gereğince

$$\left|\int_{x}^{x+\delta}[f(t)-f(x)]\phi_n(t,x)dt\right|\leq\varepsilon\int_{x}^{x+\delta}\phi_n(t,x)dt\leq\varepsilon.\int_{a}^{b}\phi_n(t,x)dt$$

dir.

Diğer bir taraftan $\phi_n(t,x)$ çekirdektir. Buna göre de,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{b}\phi_n(t,x)dt=1$$

olur.

Limitler teorisinden bilindiği gibi sonlu limiti olan ifade sınırlıdır. Demek ki öyle K(x) bulunabilir ki,

$$\int_{a}^{b}\phi_n(t,x)dt<K(x)$$

olur. Böylece,

$$\left|\int_{x}^{x+\delta}[f(t)-f(x)]\phi_n(t,x)dt\right|\leq\varepsilon.K(x)\qquad(17)$$

elde edilir.

Öteki yandan, $x+\delta\leq t\leq b$ olursa o zaman,

$$\phi_n(t,x)\leq\phi_n(x+\delta,x)\leq\frac{1}{\delta}\int_{x}^{x+\delta}\phi_n(t,x)dt<\frac{K(x)}{\delta}\qquad(18)$$

olur.

Demek ki, $\varphi_n(t) = \phi_n(t,x)$ fonksiyonları $[x+\delta, b]$ aralığında düzgün sınırlıdır. ve 2.1.4 Lebesgue teoreminin (5) şartını sağlarlar. O teoremde bulunan (6) şartı da sağlanır çünkü $\phi_n(t,x)$ çekirdektir. O zaman $\phi_n(t,x)$ fonksiyonları $[x+\delta, b]$ aralığında zayıf anlamda sıfıra yakınsar ve yeteri kadar büyük n ler için

$$\left|\int_{x+\delta}^{b}[f(t)-f(x)]\phi_n(t,x)dt\right| < \varepsilon$$

elde edilir.

Böyle n ler için ((17)'ye göre)

$$\left|\int_{x}^{b}[f(t)-f(x)]\phi_n(t,x)dt\right| < \varepsilon.[K(x)+1]$$

olur, yani;

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x}^{b}[f(t)-f(x)]\phi_n(t,x)dt = 0. \qquad (19)$$

[x,b] parçası üzerinde ispat tamamlandı [a,x] içinde benzer şekilde ispatlanır. ★

2.2.4 Örnek:

$$W_n(f,x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}.\int_a^b e^{-n^2(t-x)^2} f(t)dt$$

formülü ile tanımlanan ve K. Weierstrass singüler integrali olarak adlandırılan integrali göz önüne alalım.

$$\phi_n(t,x) = W_n(t,x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}.\exp\left\{-n^2(t-x)^2\right\}$$

fonksiyonu çekirdektir, zira $\alpha < x < \beta$ olduğunda,

$$\int_\alpha^\beta W_n(t,x)dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.\int_{n(\alpha-x)}^{n(\beta-x)} e^{-z^2}dz \to \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz = 1$$

$W_n(t,x) > 0$ ve $a \le t \le x$ olduğunda artan $x \le t \le b$ olduğunda ise azalandır. Demek ki $\forall f(t) \in L$ için kendisi belirsiz integralinin türevi olduğu her x noktasında $\lim_{n\to\infty} W_n(f,x) = f(x)$ ★

2.2.5 Tanım: Her bir x için $\psi(t,x)$ fonksiyonu [a,x] aralığında artan, [x,b] aralığında azalan bir fonksiyon ise ve

$$|\phi(t,x)| \le \psi(t,x) \qquad (20)$$

şartı da sağlanırsa o zaman $\psi(t,x)$, $\phi(t,x)$ fonksiyonu için "konveks bir üst sınır" adını alır.

2.2.6 Teorem (D. K. Faddeyev): $\phi_n(t,x)$ çekirdeği her n için $\psi_n(t,x)$ konveks bir üst sınıra sahipse ve

$$\int_a^b \psi_n(t,x)dt < K(x) < +\infty \qquad (21)$$

ise (K(x), yalnızca x-e bağlıdır), o zaman t=x Lebesgue noktası olan her bir $f(t) \in L$ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\phi_n(t,x)dt = f(x) \qquad (22)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Romanovskiy teoreminde olduğu gibi burada da (19) eşitliğinin doğruluğunu ispatlamak yeterlidir. $\forall \varepsilon > 0$ için $\delta > 0$ varki, $0 < h \le \delta$ olduğunda

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt < \varepsilon$$

olur.

Lemmayı uygularsak,

$$\left|\int_x^{x+\delta} \{f(t) - f(x)\}\phi_n(t,x)\,dt\right| \le \int_x^{x+\delta} |f(t) - f(x)|.\psi_n(t,x)dt \le \varepsilon. \int_x^{x+\delta} .\psi_n(t,x)dt < \varepsilon.K(x)$$

elde ederiz.

Diğer taraftan $[x+\delta, b]$ aralığında $\varphi_n(t) = \phi_n(t,x)$ dizisi zayıf anlamda sıfıra yakınsar, çünkü $t \in [x+\delta, b]$ için

$$|\phi_n(t,x)| \le \psi_n(t,x) \le \psi_n(x+\delta, x) \le \frac{1}{\delta}.\int_x^{x+\delta} \psi_n(t,x)dt < \frac{K(x)}{\delta} \qquad (18)$$

dir.

Böylece, Romanovskiy teoreminin ispatında olduğu gibi (18) şartı yeniden ispatlandı. Romanovskiy teoreminin (18) den sonraki ispatını tekrarlayarak, burada da teoremin ispatını bitirmiş oluruz. ★

2.2.7 Not: D. K. Faddeyev, 2.2.6 Teorem'inin şartlarının hem de gerekli olduğunu göstermiştir:

t=x noktası Lebesgue noktası olan her $f(t) \in L$ fonksiyonu için (22) eşitliğinin sağlanması için (21) şartını sağlayan $\psi_n(t, x)$ konveks bir üst sınırının var olması gerekli ve yeterlidir. [Faddeyev D. K.]

3. SİNGÜLER İNTEGRALLERİN TRİGONOMETRİK SERİLER TEORİSİNDE UYGULAMALARI

3.1 Dirichlet Operatörü ve Onun Yakınsaklık Problemindeki Yeri

2π periyotlu f(x) fonksiyonunu göz önüne alalım. $f(x) \in L^*(0,2\pi) \equiv L_1^*$ olduğunda, onun Fourier katsayıları

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \tag{1}$$

formülleri ile hesaplanabilir. Bu katsayıları kullanarak f(x) in trigonometrik fonksiyonlar cinsinden bir seri açılımı yazılabilir.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \tag{2}$$

Her seride olduğu gibi, bu serinin de yakınsaklık probleminin ayrıca incelenmesi gerekir.

Yakınsaklık problemi $\{S_n(x)\}$ kısmi toplamlar dizisinin yakınsaklığı ile belirlenir:

$$S_n(x) = S_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \tag{3}$$

$\{S_n(x)\}$ dizisi yakınsak olduğunda (2) serisi yakınsaktır denir. Fakat burada söz konusu

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f;x) = f(x) \tag{4}$$

eşitliğinin sağlanıp sağlanmaması probleminin araştırılmasıdır.

Böylece, esas inceleme objesi olarak $S_n(f;x)$ kısmi toplamı ortaya çıkmış oluyor.

Burada birinci olarak yapılacak iş $S_n(f;x)$ için limiti incelenebilecek uygun bir formülün bulunması işidir. Bunun için S_n ifadesinde a_0, a_k, b_k katsayılarının (1) formülleri ile bulunan ifadeleri kullanılır. Sonuçta, aşağıdaki işlemleri yapmış oluyoruz.

$$\begin{aligned} S_n(f;x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=1}^{n} \left[\cos kx.\cos kt + \sin kx.\sin kt\right] dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(x-t)\right] dt \end{aligned} \tag{5}$$

Şimdi integral altında olan

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos ku$$

toplamını hesaplayalım – daha basit bir hale dönüştürelim. Bellidir ki,

$$\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)u - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)u = 2\sin\frac{u}{2}.\cos ku \qquad (k = 1,2,3,\dots,n)$$

$$\sin\frac{u}{2} = \sin\frac{u}{2}$$

bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak, sonuçta

$$\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u = 2\sin\frac{u}{2}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos ku\right]$$

eşitliğine ulaşıyoruz ki buradan da

$$D_n(u) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}$$

elde edilir. bu ifadeyi de (5) de dikkate alırsak,

$$S_n(f;x) = \frac{1}{\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt = \frac{1}{\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}dt$$

olur. Dolayısıyla,

$$S_n(f;x) = \frac{1}{\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}dt \qquad (6)$$

formülü ispatlanmış olur.

Bu formüle Dirichlet formülü denir. Görüldüğü gibi, aslında burada $f(t) \to S_n(f;x)$ şeklinde bir operatör söz konusudur ve buna da Dirichlet operatörü denir.

Eğer $f(t) \equiv 1$ olursa, $a_0=2$, $a_n=b_n=0$ $(n \geq 1)$ olur ve bu nedenle de $S_n=1$ oluyor. Bunu da (6) formülünde dikkate alırsak, sonuçta:

$$\frac{1}{\pi}.\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}dt=1 \qquad \text{veya} \qquad \frac{1}{\pi}.\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt=1 \tag{7}$$

formülüne ulaşmış oluruz.

Bu ise gösteriyor ki $D_n(x,t)=D_n(x-t)=\phi_n(x,t)$ bir çekirdektir ve $f_n(x)\equiv S_n(f;x)$ dir.

Şimdi karşımıza çıkan problem

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f;x)=f(x) \tag{8}$$

eşitliğinin sağlanıp sağlanmadığını incelemek problemidir.

(6) eşitliği ile tanımlanan integral de aslında bir singüler integraldir. Bu integralin $n\to\infty$ da f(x) e yakınsak olması için

$$S_n(f;x)-f(x)=\frac{1}{\pi}.\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)-f(x)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}dt \tag{9}$$

farkının sıfıra yakınlaşması gerekiyor.

Sağ tarafta önce t-x=u, t=u+x, dt=du dönüşümü yapılırsa,

$$S_n(f;x)-f(x)=\frac{1}{\pi}.\int_{-\pi}^{\pi}[f(u+x)-f(x)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du$$

elde edilir. Burada da $\frac{u}{2}=t$ dersek, du =2 dt olur ve sonuçta

$$S_n(f;x)-f(x)=\frac{1}{\pi}.\int_{-\pi/2}^{\pi/2}[f(x+2t)-f(x)]\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt \tag{10}$$

elde edilir.

Elemanter dönüşümler yaparak, bunu da

$$S_n(f;x)-f(x)=\frac{1}{\pi}.\int_{0}^{\pi/2}[f(x+2t)-2f(x)+f(x-2t)]\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt \tag{11}$$

şekline dönüştürebiliyoruz.

Bu formülden görüldüğü gibi, sağ taraf yalnızca

$$d_n(t) = \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$$

ifadesi n-e bağlıdır ve açıkça görülür ki, $|f(x)| \le M$ olduğunda $|S_n(f;x)| \le M.\lambda_n$ olur bu ise

$$S_n(f;x) - f(x) \to 0$$

'de

$$\lambda_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right|dt$$

sabitinin rolünün ne derece de önemli olduğunu göstermektedir. Bu sabite Lebesgue sabiti denir.

Öncelikle bu sabiti değerlendirelim.

$$\left[0,\frac{\pi}{2}\right] = \left[0,\frac{\pi}{2(2n+1)}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2(2n+1)},\frac{\pi}{2}\right]$$

olsun. O zaman,

$$\lambda_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2(2n+1)}} + \int_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\frac{\pi}{2}}\right] = I_1 + I_2$$

olmak üzere iki integrale ayırabilir ve bunları da ayrıca değerlendirebiliriz.

I_1 de $|\sin(2n+1)t| \le (2n+1)\sin t$ ifadesi kullanılırsa,

$$I_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2(2n+1)}}\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right|dt \le \frac{2n+1}{\pi}.2\int_0^{\frac{\pi}{2(2n+1)}}dt = \frac{2n+1}{\pi}.\frac{2\pi}{2(2n+1)} = \frac{1}{2}.2 = 1$$

I_2 de $|\sin(2n+1)t| \le 1$, $\sin t \ge \frac{2}{\pi}t$ ifadesi kullanılırsa,

$$I_2=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\pi/2}\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right|dt\le\frac{\pi}{2}.\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\pi/2}\frac{dt}{t}=\ln t\,\Big|_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\pi/2}=\left[\ln\frac{\pi}{2}-\ln\frac{\pi}{2(2n+1)}\right]=\ln(2n+1);$$

$2+\frac{1}{n}<e\ (n\ge 2)$ den 2n+1< n.e ve ln(2n+1)<ln (n.e)=1+ln n olur ve sonuçta $I_2<1+\ln n$ olur.

Buna göre de $\lambda_n<1+\ln n$ olur ve buradan görülür ki, λ_n sınırlı değildir ve $\lambda_n\to\infty\,(n\to\infty)$

Şimdi, t=x noktasında f(x) sürekli olsun. O zaman $\varepsilon>0$ için $\delta>0$ vardır ki, $|x+2t-x|=|2t|=2.|t|<2.\delta$ olduğunda $|f(x+2t)-f(x)|<\varepsilon$ olur. buna göre de (10) dan

$$|S_n(f;x)-f(x)|\le\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\delta}^{\delta}|f(x+2t)-f(x)|.\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right|dt+\int_{|t|>\delta}|f(x+2t)-f(x)|.\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right|dt\right]\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}\left[\varepsilon.\int_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right|dt+2M.\int_{|t|>\delta}\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right|dt\right]\le\frac{1}{\pi}(\varepsilon+2M).\lambda_n$$

olur.

Böylece $\forall\, f(x)\in C_{2\pi}^{*}$ fonksiyonu için,

$$|S_n(f;x)-f(x)|\le\frac{\varepsilon+2M}{\pi}.\lambda_n<c(1+\ln n)$$

elde edilir ki, buradan da (8) eşitliği çıkarılamaz.

Şu ana kadar söylediklerimiz kanıtlar ki, $\forall\, f(x)\in C_{2\pi}^{*}$ için $S_n(f;x)\to f(x)$ bağıntısının doğru olduğunu söyleyemeyiz. Yani, t=x noktasında f(x)'in yalnızca sürekli olması Fourier serisinin onu üreten f(x)'e yakınsayacağını söylemek imkanı vermez. Buna göre de, f(x) ek birkaç şartı sağlamalıdır ki bu problem düzgün bir şekilde çözülebilsin. Bununla ilgili birçok çalışmalar vardır ve biz bunlardan yalnızca şu teoremi verelim.

3.1.1 Teorem(Lebesgue): 2π periyotlu f(x) fonksiyonunun, derecesi $\le n$ olan trigonometrik polinomlarla en iyi yaklaşımı $E_n^{*}(f)$

$$E_n^{*}(f)=\inf_{t_n}\|f-t_n\|,\qquad t_n=a_0+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$$

olursa, o zaman her x noktasında

$$|S_n(f;x) - f(x)| \le (3 + \ln n).E_n^*(f) \qquad (12)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.1.2 Sonuç: Eğer bir f(x) fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty}[\ln n.E_n^*(f)] = 0 \qquad (13)$$

şartı sağlanıyorsa, o zaman onun Fourier serisi f(x)'e düzgün yakınsar.

3.1.3 Sonuç: $\forall f(x) \in C_{2\pi}^*$ için

$$|S_n(f;x) - f(x)| \le K.(3 + \ln n).\omega\left(f;\frac{\pi}{n}\right) \qquad (14)$$

eşitsizliği sağlanır, burada

$$\omega(f;\delta) = \sup_{|h|\le\delta}\|f(x+h) - f(x)\| = \sup_{|h|\le\delta}\left\{\max_{(x)}|S_n(f;x) - f(x)|\right\}$$

şeklinde tanımlanır ve f(x)'in süreklilik modülü olarak adlandırılır.
Buradan da görülür ki, (13) şartı yerine

$$\lim_{n\to\infty}\left[\ln n.\omega(f;\frac{1}{n})\right] = 0 \qquad (15)$$

şartı kullanılabiliyor ki, bu da pratik açıdan daha önemlidir.

3.2 Fejer Operatörü ve Onun Verdiği Yakınsaklık

Bir önceki bölümde gördük ki, her sürekli f(x) için Fourier kısmi toplamlar dizisi o seriyi üreten fonksiyona yakınsamaz. Bu problemle ilişkili olarak Fejer yeni bir operatör oluşturmuş ve bu operatörün söz konusu olan problemi çözebildiğini göstermiştir.

"Fejer toplamı" denilen toplam

$$\sigma_n(x) = \sigma_n(f;x) = \frac{1}{n}[S_0(f;x) + S_1(f;x) + \ldots + S_{n-1}(f;x)] \qquad (1)$$

şeklinde tanımlanır.

3.1 deki (6) formülünü kullanarak, $\sigma_n(x)$ için

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \sin(k+\frac{1}{2})(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}} dt$$

formülünü elde ederiz. Diğer taraftan da,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)u = \frac{\sin^2 nu}{\sin u} \qquad (*)$$

doğrudur.

Şimdi (*) formülünü dikkate alırsak,

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{\operatorname{Sin}\frac{n}{2}(t-x)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(t-x)} \right]^2 dt \qquad (2)$$

formülüne ulaşmış oluruz.

(2) integraline Fejer singüler integrali denilir.

1. $f(x) \equiv 1$ olduğunda $\sigma_n(1;x) \equiv \sigma_n(x) = 1$. Gerçekten, f(x)=1 fonksiyonunun Fourier serisi f(x)= 1+0+0+. . . + olduğundan $\forall$ k için $S_k(x) \equiv 1$ ve bu da $\sigma_n(x) = 1$ olması demektir.
2. $f(x) \geq 0$ olduğunda $\sigma_n(x) \geq 0$.
3. $|f(x)| \leq M$ olduğunda $|\sigma_n(f;x)| = |\sigma_n(x)| \leq M$.

3.2.1 Teorem (Fejer): Her bir sürekli ve 2 π periyotlu f(x)($\forall f(x) \in C^*_{2\pi}$) için

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f;x) = f(x) \quad \text{(d.y.)} \qquad (3)$$

dir.

İspat: Önce $\sigma_n(x)$ ifadesini gereken şekle dönüştürelim:

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2n\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x+t)\left[\frac{\operatorname{Sin}\frac{nt}{2}}{\operatorname{Sin}\frac{t}{2}}\right]^2 dt+\int_{0}^{\pi} f(x+t)\left[\frac{\operatorname{Sin}\frac{nt}{2}}{\operatorname{Sin}\frac{t}{2}}\right]^2 dt\right)$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\left(\int_{0}^{\pi} f(x-t)\left[\frac{\operatorname{Sin}\frac{nt}{2}}{\operatorname{Sin}\frac{t}{2}}\right]^2 dt+\int_{0}^{\pi} f(x+t)\left[\frac{\operatorname{Sin}\frac{nt}{2}}{\operatorname{Sin}\frac{t}{2}}\right]^2 dt\right)$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\left[\frac{\operatorname{Sin}\frac{nt}{2}}{\operatorname{Sin}\frac{t}{2}}\right]^2 dt\left(\begin{matrix} t=2u \\ dt=2du\end{matrix}\right)$$

$$=\frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi/2}[f(x+2t)+f(x-2t)]\left[\frac{\operatorname{Sinnt}}{\operatorname{Sint}}\right]^2 dt$$

Yani,

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi/2}[f(x+2t)+f(x-2t)]\left[\frac{\operatorname{Sin} nt}{\operatorname{Sin} t}\right]^2 dt \tag{4}$$

dir.

Diğer taraftan:

$$1=\frac{2}{n\pi}\int_{0}^{\pi/2}\left(\frac{\operatorname{Sin} nt}{\operatorname{Sin} t}\right)^2 dt$$

olur. Bu ifadeyi f(x)'e çarpalım:

$$f(x)=\frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi/2} 2f(x).\left(\frac{\operatorname{Sin} nt}{\operatorname{Sin} t}\right)^2 dt \tag{5}$$

(4) ve (5) den

$$\sigma_n(x)-f(x)=\frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi/2}[f(x+2t)-2f(x)+f(x-2t)]\left[\frac{\operatorname{Sin} nt}{\operatorname{Sin} t}\right]^2 dt \tag{6}$$

olur.

Sağ taraftaki integrali $[0,\delta]$ ve $\left[\delta,\frac{\pi}{2}\right]$ parçaları üzerinde iki integrale ayıralım:

$I=\sigma_n(x)-f(x)=I_1+I_2$ diyelim:

$$I_1=\frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\delta}\ ,\qquad I_2=\frac{1}{n\pi}\int_{\delta}^{\delta/2}$$

f(x) sürekli olduğundan $\forall\varepsilon>0$ için öyle $\delta>0$ bulunabilir ki, $|x'-x''|<2\delta$ olduğunda, $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon/2$ olur. I= I_1+I_2 de kullanılan $\delta>0$ burada bulunan δ olarak seçilmiştir. O zaman

$$|[f(x+2t)-2f(x)+f(x-2t)]|<\varepsilon$$

olur. Buna göre de

$$|I_1|=\left|\frac{1}{n\pi}\int_0^{\delta}[f(x+2t)-2f(x)+f(x-2t)]\left[\frac{\text{Sin } nt}{\text{Sin } t}\right]^2 dt\right|<\frac{\varepsilon}{n\pi}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{\text{Sin } nt}{\text{Sin } t}\right]^2 dt=\frac{\varepsilon}{n\pi}.\frac{n\pi}{2}=\frac{\varepsilon}{2}$$

I_2'de

$$|[f(x+2t)-2f(x)+f(x-2t)]|\le 4.M \qquad (\ M=\text{Max}|f(t)|\ )$$

dir.

Diğer taraftan, $\delta<t<\frac{\pi}{2}$ olduğunda $|\sin t|\ge\sin\delta$, $|\sin nt|\le 1$ olduğundan

$$|I_2|\le\frac{4.M}{n\pi}.\int_{\delta}^{\pi/2}\left[\frac{\text{Sin } nt}{\text{Sin } t}\right]^2 dt\le\frac{4.M}{n\pi\sin^2\delta}.\frac{\pi}{2}=\frac{2.M}{\sin^2\delta}.\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$$

olur.

Yani, $n>\frac{4.M}{\varepsilon.\sin^2\delta}$ gibi seçilirse, $|I_2|<\frac{\varepsilon}{2}$ oluyor.

Hepsini toparlarsak, $n>\frac{4.M}{\varepsilon.\sin^2\delta}$ için $|\sigma_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ olur ve buradan da $\left[\left|\frac{4.M}{\varepsilon.\sin^2\delta}\right|\right]+1=n_0(\varepsilon)$ sayısının yalnızca ε'a bağlı seçilebileceği görülür. Bu ise yakınsaklığın düzgün olması demektir. ★

3.2.2 Not: İspat edilen bu teorem K. Weierstrass teoreminin başka bir ispatıdır.

Fakat, singüler integraller için 2. bölümde verilmiş olan teoremlerin bir sonucu olarak çıkarılması da mümkündür.

$\sigma_n(x)$ integralinin D. K. Faddeyev teoreminin bütün şartlarını sağladığını gösterelim. Her şeyden önce f(t)=1 diyelim. O zaman $a_0=2$, $a_n=b_n=0(n \geq 1)$ olur ve $S_n(f;x)=1(n=0,1,2,...)$ olduğundan $\sigma_n(x)=1$ oluyor. Buna göre de (2) formülünden görülür ki,

$$\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\operatorname{Sin}\frac{n}{2}(t-x)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(t-x)}\right]^2 dt = 1 \qquad (7)$$

dir.

Bunu dikkate alırsak (2) den, $|f(x)| \leq M$ olduğunda $|\sigma_n(f;x)| \leq M$ olacağı görülmektedir.

Şimdi herhangi bir, $x \in (-\pi, \pi)$ noktası alalım ve $-\pi \leq \alpha < x < \beta \leq \pi$ olsun. $\forall t \in [-\pi, \alpha]$ için,

$$\frac{1}{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}(t-x)} \leq \max\left\{\frac{1}{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}(\alpha-x)}, \frac{1}{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}(-\pi-x)}\right\} \equiv A(x,\alpha)$$

Dolayısı ile,

$$\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\alpha} f(t)\left[\frac{\operatorname{Sin}\frac{n}{2}(t-x)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(t-x)}\right]^2 dt < \frac{A(x,\alpha)}{n}$$

burada $A(x,\alpha)$ ifadesi n- ye bağlı değildir.

Son eşitsizlikten görülür ki,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\alpha}\left[\frac{\operatorname{Sin}\frac{n}{2}(t-x)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(t-x)}\right]^2 dt = 0$$

olur.

Benzer şekilde,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n\pi}\int_{\beta}^{\pi}\left[\frac{\operatorname{Sin}\frac{n}{2}(t-x)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(t-x)}\right]^2 dt = 0$$

olduğu da ispatlanır.

Öteki yandan (7) formülünü,

$$\frac{1}{2n\pi}\left(\int_{-\pi}^{\alpha}+\int_{\alpha}^{\beta}+\int_{\beta}^{\pi}\right)\left[\frac{\operatorname{Sin}\frac{n}{2}(t-x)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(t-x)}\right]^2 dt=1$$

şeklinde yazarsak,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{\operatorname{Sin}\frac{n}{2}(t-x)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(t-x)}\right]^2 dt=1$$

olduğu ispatlanmış olur.

Bütün bunlar da gösteriyor ki,

$$\frac{1}{2n\pi}\left[\frac{\operatorname{Sin}\frac{n}{2}(t-x)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(t-x)}\right]^2=\phi_n(t,x)$$

bir çekirdektir.

Şimdi bu $\phi_n(t,x)$ için konveks bir üst sınır oluşturalım. Bunun için $\forall u\in R$ olduğunda $|\operatorname{Sin} u|\le|u|$ olduğundan, $\frac{1}{\sin^2 u}\ge\frac{1}{u^2}$ ve $\sin^2 u\le 1$ olduğundan $\frac{1}{\sin^2 u}\ge 1$ yazarız ve buradan da iki eşitsizliği taraf tarafa toplarsak,

$$\frac{1}{\sin^2 u}\ge\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)=\frac{u^2+1}{2u^2},\qquad \sin^2 u\le\frac{2u^2}{1+u^2}$$

eşitsizliğine ulaşmış oluruz. Şimdi $u=\frac{n(t-x)}{2}$ dersek son eşitsizlikten,

$$\operatorname{Sin}^2\frac{n(t-x)}{2}\le\frac{2n^2(t-x)^2}{n^2(t-x)^2+4}\tag{8}$$

alıyoruz.

Öteki taraftan, $|u|\le\frac{\pi}{2}$ olduğunda $|\operatorname{Sin} u|\ge\frac{2}{\pi}|u|$, yani,

$$\operatorname{Sin}^2\frac{t-x}{2}\ge\frac{1}{\pi^2}(t-x)^2\tag{9}$$

(8) ve (9) dan dolayı,

$$\frac{1}{2n\pi}\left[\frac{\mathrm{Sin}\frac{n}{2}(t-x)}{\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(t-x)}\right]^2 \le \frac{1}{2n\pi}\cdot\frac{2n^2(t-x)^2}{n^2(t-x)^2+4}\cdot\frac{\pi^2}{(t-x)^2}=\frac{n\pi}{n^2(t-x)^2+4}$$

olur. (9) eşitsizliğinde $\left|\frac{t-x}{2}\right| \le \frac{\pi}{2}$ olması gerekmektedir. Fakat $\left|\frac{t-x}{2}\right| > \frac{\pi}{2}$ olabilir. Bu aslında sonuca etki etmez. Gerçekten, $a=\max\{-\pi, x-\pi\}$, $b=\min\{\pi, x+\pi\}$ diyelim. O zaman,

$$\sigma_n-\sigma_n^*=\sigma_n-\frac{1}{2n\pi}\cdot\int_a^b\left[\frac{\mathrm{Sin}\frac{n}{2}(t-x)}{\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(t-x)}\right]^2 dt \to 0(n\to\infty)$$

oluyor. Örneğin, $-\pi \le t \le a$ olduğu durumda $\left|\mathrm{Sin}\frac{t-x}{2}\right| \ge \left|\mathrm{Sin}\frac{-\pi-x}{2}\right|$ olur.

Bu nedenle de bütün işlemleri σ_n^* içinde yapabiliyoruz.

Dolayısı ile,

$$\psi(t,x)=\frac{n\pi}{n^2(t-x)^2+4}$$

ifadesi, $\phi_n(t,x)$ için konveks bir üst sınırdır.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(t,x)dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{n\pi\, dt}{n^2(t-x)^2+4}<\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi\, dt}{t^2+4}=\frac{\pi^2}{2}$$

Yani, D. K. Faddeyev'in teoreminde olan K(x)=$\frac{\pi^2}{2}<\infty$ oluyor ve o teoremin bütün şartları sağlanmış oluyor, sonuç olarak,

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(f;x)=f(x)\ \text{(h.h.h.)}$$

eşitliği sağlanmış oluyor.

Dolayısıyla, D. K. Faddeyev'in teoreminin sonucu olarak aşağıdaki teoreme ulaşmış oluyoruz.

3.2.3 Teorem (L. Fejer – A. Lebesgue): $\forall f(x)\in L_1^*(-\pi,\pi)$ için hemen hemen her x noktasında

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x) \qquad (10)$$

dır.

Bu eşitlik her Lebesgue noktasında , özel halde f(t)' nin $[-\pi, \pi]$ içinde yerleşen her süreklilik noktasında sağlanır. Gerçekten $f \in L$ fonksiyonu için sanki her $x \in [-\pi, \pi]$ noktası Lebesgue noktasıdır. Her süreklilik noktası da Lebesgue noktasıdır.

3.2.4 Not: $f(x) \in L_2^*(-\pi, \pi) \equiv L_2^*$ olduğunda Parseval formülünü kullanarak ispatlayabiliyoruz ki Fourier katsayılarının tümü sıfır ise, f(x)~0 olması demektir. Şimdi f(x)'in L_2^*den alınması koşulu kaldırılabilir ve aşağıdaki teorem bu durumda gerçeklenir.

3.2.5 Teorem: Eğer integrallenebilir bir f(x) fonksiyonunun bütün Fourier katsayıları sıfır ise, o zaman bu f(x) sıfıra denktir.

Gerçekten, bu durumda $a_0=a_n=b_n=0$ olduğunda $S_n = \sigma_n = 0$ olur ve hemen hemen her yerde $f(x)= \lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) =0$, yani f(x)~0 olur. ★

4.TRİGONOMETRİK SERİLERDE TEK OLMA PROBLEMİ

4.1 Schwarz Anlamında Türev Ve Fourier Serilerinde Tek Olma Problemi

1. Biz bu bölüme kadar herhangi bir fonksiyonun trigonometrik seriye açılımı, bunun mümkün olup olmaması, yakınsaklık problemlerine değinmiştik. Şimdi trigonometrik seriye açılımın tek değerli olması (veya olmaması) problemini, böyle açılımın tek olması problemini göz önüne alacağız. Bunun için ise fonksiyonlar teorisinde özel önem taşıyan bilgilere ihtiyacımız vardır. Bu bilgileri kısaca verelim.

4.1.1 Tanım: x noktasının herhangi bir komşuluğunda tanımlanmış F(x) fonksiyonu için

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h}$$

limiti varsa, bu limite F(x)'in x noktasında Schwarz Türevi denir ve $F^{(1)}(x)$ gibi gösterilir. Belirtelim ki, x noktasında adi anlamda $F'(x)$ türevi varsa, o zaman $F^{(1)}(x)$ Schwarz türevi de vardır. Gerçekten

$$\frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h}=\frac{1}{2}\left[\frac{F(x+h)-F(x)}{h}+\frac{F(x-h)-F(x)}{-h}\right]$$

eşitliğinde limit alırsak ($h\to 0$), $F^{(1)}(x)=\frac{1}{2}\left[F'(x)+F'(x)\right]=F'(x)$ olur.

Fakat,bunun tersi doğru değildir. $F^{(1)}(x)$ türevinin var olması $F'(x)$ türevinin varolmasını gerektirmez.

4.1.2 Örnek: F(x) = | x | fonksiyonu için x=0 noktasında $F'(0)$ türevinin olmadığı bellidir. $F^{(1)}(0)$'in var olduğu ve $F^{(1)}(0)=0$ olduğunu gösterelim.

Gerçekten,

$$\frac{F(0+h)-F(0-h)}{2h}=\frac{|0+h|-|0-h|}{2h}=\frac{h-h}{2h}=0\Rightarrow F^{(1)}(0)=\lim_{h\to 0}\frac{F(0+h)-F(0-h)}{2h}=0$$

dir.★

4.1.3 Örnek: $f(x)=x.\mathrm{Sin}\frac{1}{x}$ fonksiyonu için $f'(0)$ türevi yoktur. Fakat $f^{(1)}(0)$ Schwarz türevi vardır. Gerçekten,

$$\frac{1}{2h}[f(0+h)-f(0-h)]=\frac{1}{2h}\left[(0+h)\mathrm{Sin}\frac{1}{0+h}-(0-h)\mathrm{Sin}\frac{1}{0-h}\right]$$

$$=\frac{1}{2h}\left[h.\mathrm{Sin}\frac{1}{h}-h.\mathrm{Sin}\frac{1}{h}\right]=\frac{1}{2}\left[\mathrm{Sin}\frac{1}{h}-\mathrm{Sin}\frac{1}{h}\right]=0,$$

olur. Yani,

$$f^{(1)}(0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}[f(0+h)-f(0-h)]=0$$

dir.★

Örneklerden de, görüldüğü gibi, Schwarz türevi kavramı adi türev kavramının genelleşmesidir: $f^{(1)}(x)$ türevi olan fonksiyonlar sınıfı $f'(x)$ türevi olan fonksiyonlar sınıfını bir alt küme olarak kapsamaktadır.

4.1.4 Tanım: x noktasının herhangi komşuluğunda tanımlı f(x) fonksiyonu için

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

limiti varsa ona f(x)' in ikinci mertebe Schwarz türevi denir ve $f^{('')}(x)$ gibi gösterilir. Gösterelim ki, adi anlamda $f''(x)$ türevi olan fonksiyonun $f^{('')}(x)$ türevi de vardır ve $f^{('')}(x)=f''(x)$ dir. Gerçekten, $f''(x)$ türevinin var olması $f'(x)$ türevinin varolmasını gerektirmektedir. $f(x+h)+f(x-h)=\varphi(h)$ diyelim.

O zaman,

$$f(x+h)-2f(x)+f(x-h)=\varphi(h)-\varphi(0)$$

olur. Burada, iki fonksiyon oranı için Cauchy teoremini uygularsak,

$$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=\frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h^2}=\frac{\varphi'(c)}{2.h.c}\qquad \left(0<c<h\Rightarrow 0<\frac{c}{h}<1;\ \theta=\frac{c}{h};\ c=\theta.h\right)$$

olduğundan,

$$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=\frac{\varphi'(\theta.h)}{2.h.\theta}$$

dir.

Böylece $\dfrac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=\dfrac{f'(x+\theta.h)-f'(x-\theta.h)}{2.h.\theta}$ ve buradan $h\to 0$ da

$f^{('')}(x)=f''(x)$.★

$f(x)=\int_0^x t.\mathrm{Sin}\frac{1}{t}dt$ fonksiyonunun $f''(x)$ türevi yoktur. Fakat $f'(x)=x.\mathrm{Sin}\frac{1}{x}$ olduğundan, bu fonksiyonunda Schwarz türevinin olduğunu yukarıda görmüştük. Yani, $f''(x)$ yoktur, $f^{(*)}(x)$ ise x=0 noktasında vardır.

4.1.5 Teorem(G. A. Schwarz): [a,b] aralığında tanımlı ve sürekli f(x) fonksiyonu için $\forall x\in(a,b)$: $f^{(*)}(x)=0$ şartı sağlanırsa, o zaman f(x) lineer bir fonksiyondur.

Gerçekten ispatlanabilir ki, teoremin şartlarını sağlayan f(x) fonksiyonu

$$f(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a)$$

şeklinde gösterilebilir.

2. Şimdi $f^{(*)}(x)$ Schwarz türevi belli olduğunda f(x) ilkel fonksiyonunun bulunması problemini göz önüne alalım.

4.1.6 Tanım: Öyle $\{h_n>0; h_n\to 0\}$ dizisi varsa ki,

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+h_n)-2f(x)+f(x-h_n)}{h_n^2}$$

olsun. O zaman λ sayısına f(x) in x noktasında Schwarz türev sayısı denir.

Kolayca gösterilebilir ki, her bir f(x) in her bir x noktasında Schwarz türev sayıları vardır ve x noktasında $f^{(*)}(x)$ ikinci mertebe Schwarz türevinin olması için bütün λ Schwarz türev sayılarının birbirlerine eşit olması gerekli ve yeterli koşuldur

4.1.7 Teorem (Ş. J. Valle- Poussin): [a,b] aralığında sürekli ve (a,b) aralığında $f^{(*)}(x)$=f(x) türevine sahip bir F(x) fonksiyonu verilirken, f(x) her yerde sonlu ve integrallenebilir olduğunda,

$$F(x)=\int_a^x dt\int_a^t f(u)du+Ax+B=\int_a^x dt\int_a^t F^{(*)}(u)du+Ax+B \qquad (1)$$

formülü doğrudur.

İspat:

$$[f(x)]_n = \varphi_n(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \le n \\ n \quad , & f(x) > n \end{cases}$$

fonksiyonlarını göz önüne alalım.

$$|\varphi_n(x)| \le |f(x)| \qquad (2)$$

olduğundan $|\varphi_n(x)| \in L_1$ dir. Şimdi,

$$\phi_n(x) = \int_a^x dt \int_a^t \varphi_n(u)du \qquad \text{ve} \qquad R_n(x) = F(x) - \phi_n(x)$$

diyelim. $\int_a^t \varphi_n(u)du = \psi_n(t)$ sürekli olduğundan $\forall x \in [a,b]$ için

$$\phi_n'(x) = \int_a^x \varphi_n(u)du$$

olur.

Bu formülünde sağ tarafı, sanki her yerde $\varphi_n(x)$'e eşit olan türeve sahip olduğundan, sanki her x için

$$\phi_n''(x) = \varphi_n(x)$$

dir.

O zaman, bu şartı sağlayan x noktalarında ((2) şartı var!)

$$R_n''(x) = f(x) - \varphi_n(x) \ge 0$$

olur.

Dolayısıyla, $R_n(x)$ in hiç değilse bir tane negatif 2.Schwarz türev sayısının mevcut olduğu noktalar kümesinin ölçüsü sıfırdır.

Diğer taraftan, Cauchy formülü gereğince

$$\frac{\phi_n(x+h) - 2\phi_n(x) + \phi_n(x-h)}{h^2} = \frac{\phi_n'(x+\theta h) - \phi_n'(x-\theta h)}{2.\theta.h} = \frac{1}{2.\theta.h}\int_{x-\theta.h}^{x+\theta.h} \varphi_n(u)du \le n$$

olur ve buna göre de,

$$\frac{R_n(x+h) - 2R_n(x) + R_n(x-h)}{h^2} \ge \frac{F(x+h) - 2F(x) + F(x-h)}{h^2} - n$$

elde edilir.

Buradan da görülür ki, $R_n(x)$'in hiçbir 2. Schwarz türev sayısı $-\infty$'a eşit değildir. O zaman $R_n(x)$ konkav bir fonksiyon olur. Diğer yandan $n \to \infty$ da $\varphi_n(x) \to f(x)$. Bundan ve (2) şartından dolayı B.Levi teoremine göre

$$\int_a^t \varphi_n(u)du \to \int_a^t f(u)du .$$

dir.

Fakat,

$$\left| \int_a^t \varphi_n(u)du \right| \leq \int_a^b |f(u)|du$$

olur.

Bu nedenle de, her bir x için

$$\phi_n(x) = \int_a^x dt \int_a^t \varphi_n(u)du \to \int_a^x dt \int_a^t f(u)du$$

dir.

Demek ki,

$$R(x)=F(x)- \int_a^x dt \int_a^t f(u)du$$

olduğundan bu R(x), Konkav $R_n(x)$ fonksiyonlarının limiti olarak konkavdır. Yani $\forall x_1, x_2$ için

$$R\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[R(x_1)+R(x_2)] \qquad (3)$$

dir.

Eğer F(x) yerinde –F(x) göz önüne alınmış olsaydı, f(x) yerinde –f(x) gelirdi ve bununla da R(x) işaretini değiştirmiş olurdu ve bu nedenle de (3) yerine

$$R\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{R(x_1)+R(x_2)}{2} \qquad (4)$$

olurdu. (3) ve (4)'den ise

$$R\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{1}{2}[R(x_1)+R(x_2)]$$

olacağı elde edilir.

Buradan ise $\forall x \in (a,b)$ ve yeterince küçük h>0 için

$$R(x+h)-2R(x)+R(x-h)=0 \text{ ve demek ki } R^{('')}(x)=0$$

olur. Burada da Schwarz teoremine göre

$$R(x) = Ax + B$$

alınır ki, buradan da

$$F(x) - \int_a^x dt \int_a^t f(u)du = Ax + B$$

$$F(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u)du + Ax + B$$

formülü gerçekleşmiş olur. ★

4.2 Fonksiyonun Trigonometrik Seriye Açılımının Tek Olması

1. Bu bölümde açıklamak istediğimiz problem şudur: Verilmiş olan bir fonksiyon kaç değişik yöntemle trigonometrik seriye açılabilir.(Eğer böyle açılım mümkünse!)

$f(x)$, $R=(-\infty,+\infty)$ ekseni üzerinde tanımlı 2π periyotlu fonksiyon olsun.

4.2.1 Teorem: Eğer R üzerinde tanımlı f(x) fonksiyonu düzgün yakınsak olan bir trigonometrik seriye açılabiliyorsa, o seri f(x)' in Fourier serisidir.

4.2.2 Yorum: R ekseni üzerinde tanımlı ve 2π periyotlu f(x),R de düzgün yakınsak

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \text{Cos}kx + b_k \text{Sin}kx) \qquad (1)$$

serisine açılabilirse, o zaman a_o, a_k, b_k katsayıları f(x)'in Fourier katsayılarıdır.

$$a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{Cos}nxdx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{Sin}nxdx, \qquad (2)$$

Gerçekten, (1) eşitliğini Cosnx,Sinnx fonksiyonlarına çarptığımızda onların düzgün yakınsaklığı bozulmaz ve demek ki, onları terim terim integralleyebiliyoruz ve sonuçta (2) formüllerine ulaşabiliyoruz.★

Böylece, düzgün yakınsak trigonometrik seriler için tekbir olma problemi 4.2.1 Teorem ile çözülmüş olur.

2. Şimdi daha sonra bize gerekli olacak bir önerme verelim:

4.2.3 Lemma (B. Riemann):

$$a_o + a_1 + a_2 + \cdots a_n + \cdots = S \qquad (3)$$

yakınsak seri olduğunda.

$$a_o + a_1\left(\frac{\text{Sinh}}{h}\right)^2 + a_2\left(\frac{\text{Sin2h}}{2h}\right)^2 + \cdots + a_n\left(\frac{\text{Sinnh}}{nh}\right)^2 + \cdots \qquad (4)$$

serisi de her $h \neq 0$ için yakınsaktır ve onun toplamı S(h) fonksiyonu

$$\lim_{h \to 0} S(h) = S \qquad (5)$$

şartını sağlar.

İspat: (3) serisi yakınsak olduğundan $a_n \to 0 \quad (n \to \infty)$ olur ve öyle M>0 sayısı bulunur ki, $\forall n : |a_n| \leq M$ olur. O zaman, (4) serisinin genel terimi

$$\left| a_n\left(\frac{\text{Sinnh}}{nh}\right)^2 \right| \leq \frac{M}{n^2.h^2} \quad (h \neq 0) \qquad (6)$$

şartını sağlar ve onun yakınsak olduğu ispatlanır.

Şimdi,

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k, \qquad r_n(h) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k\left(\frac{\text{Sinkh}}{kh}\right)^2$$

diyelim. $\forall \varepsilon > 0$ için n=n(ε) bulunur ki, $k \geq n$ olduğunda $|r_k| < \varepsilon$ olur. Bu n sayısını sabit olarak tutalım ve sona kadar değiştirmeyelim $a_k = r_k - r_{k+1}$ olduğundan

$$r_n(h) = \sum_{k=n}^{\infty} (r_k - r_{k+1})\left(\frac{\text{Sinkh}}{kh}\right)^2;$$

$$r_n(h) = r_n\left(\frac{\text{Sinnh}}{nh}\right)^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} r_k\left\{\left(\frac{\text{Sinkh}}{kh}\right)^2 - \left(\frac{\text{Sin}(k-1)h}{(k-1)h}\right)^2\right\};$$

olur.

Fakat,

$$\left|\left(\frac{\text{Sinkh}}{kh}\right)^2-\left(\frac{\text{Sin}(k-1)h}{(k-1)h}\right)^2\right|=\left|\int_{(k-1)h}^{kh}\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{Sinx}}{x}\right)^2dx\right|\leq\int_{(k-1)h}^{kh}\left|\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{Sinx}}{x}\right)^2\right|dx$$

dir.

Burada,

$$|r_n(h)|\leq|r_n|+\sum_{k=n+1}^{\infty}|r_k|.\int_{(k-1)h}^{kh}\left|\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{Sinx}}{x}\right)^2\right|dx<\varepsilon\left[1+\int_{nh}^{+\infty}\left|\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{Sinx}}{x}\right)^2\right|\right]<\varepsilon.\left(1+\int_{0}^{+\infty}\left|\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{Sinx}}{x}\right)^2\right|\right)dx$$

ifadesinde

$L=1+\int_0^{+\infty}\left|\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{Sinx}}{x}\right)^2\right|dx$ dersek $|r_n(h)|<\varepsilon.(1+L)$ olur şimdi $L<+\infty$ olduğunu gösterelim.

$\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{Sinx}}{x}\right)^2=2.\frac{\text{Sinx}}{x}.\frac{x.\text{Cosx}-\text{Sinx}}{x^2}$ olduğundan x=0 noktası komşuluğunda bu fonksiyon sınırlıdır.

$\left|\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{Sinx}}{x}\right)^2\right|\leq M$ olsun. $x=\infty$ noktası komşuluğunda ise $\left|\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{Sinx}}{x}\right)^2\right|\leq 2.\frac{x+1}{x^3}$ eşitsizliği kullanılabilir, dolayısıyla

$$L=\int_0^a\left|\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{Sinx}}{x}\right)^2\right|dx+\int_a^{\infty}\left|\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{Sinx}}{x}\right)^2\right|dx\leq M.a+2.\int_a^{\infty}\frac{x+1}{x^3}dx$$
$$=M.a+2\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^2}+2\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^3}=M.a+\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}\equiv M_1<+\infty$$

dir ve $L<\infty$ olduğunu böylede gösterebiliyoruz.

$f(x)=\left(\frac{\text{Sinx}}{x}\right)^2$ tipi $\sigma=2$ olan tam fonksiyondur ve

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\text{Sinx}}{x}\right)^2dx=\pi$$

Yani, f(x) $\in W_{2,1}$. Buradan S. N. Bernşteyn eşitsizliğine göre

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| dx \le 2.\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2.\pi$$

olur.

Dolayısıyla $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{Sinx}}{x}\right)^2\right| dx \le 2.\pi, \qquad L \le 2.\pi$

elde edilir.

Daha sonra,

$$S(h) - S = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \left\{\left(\frac{\text{Sinkh}}{kh}\right)^2 - 1\right\} + r_n(h) - r_n$$

olduğundan,

$$|S(h) - S| \le \sum_{k=1}^{n-1} |a_k| . \left|\left(\frac{\text{Sinkh}}{kh}\right)^2 - 1\right| + (L+2)\varepsilon$$

dir.

Fakat, $\lim\limits_{h \to 0}\left(\frac{\text{Sinkh}}{kh}\right)^2 = 1$ olduğundan $\varepsilon > 0$ a göre $\delta > 0$ vardır ki, $|h| < \delta$ olduğunda

$$\sum_{k=1}^{n-1} |a_k| . \left|\left(\frac{\text{Sinkh}}{kh}\right)^2 - 1\right| < \varepsilon$$

olur. O zaman, böyle h-lar için

$$|S(h) - S| < (L+3)\varepsilon$$

elde edilir ki, buda ispatı tamamlar.★

3. Şimdi $|a_n| < M, \quad |b_n| < M,$ (7)

olmak üzere

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \text{Cosnx} + b_n \text{Sinnx}) \tag{8}$$

trigonometrik serisini göz önüne alalım.

Formal olarak (8) serisini iki kez terim terime integrallersek,

$$\frac{a_o x^2}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n Cosnx + b_n Sinnx}{n^2} \qquad (9)$$

serisini elde etmiş oluruz.

(7) şartlarına göre (9) serisi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^2}$ serisi ile konveks üst sınırlanır ve bundan dolayı da (9) serisi düzgün yakınsar. Bu durumda o serinin toplamı sürekli bir fonksiyon olur ve bu fonksiyona (8) serisi için Riemann fonksiyonu denir.

Söylediklerimizden görülür ki, (7) şartlarını sağlayan her trigonometrik (8) serisi Riemann fonksiyonuna sahiptir. Özel halde Kantor-Lebesgue teoreminin şartları sağlandığında (mE>0 olmak üzere $\forall x \in E$ noktasında $a_n Cosnx + b_n Sinnx \to 0 (n \to \infty)$ olduğunda $a_n \to 0, b_n \to 0$) mE>0 şartını sağlayan bu kümede seri yakınsak olduğunda onun Riemann fonksiyonu vardır. Bunun yanı sıra bir noktada yakınsak olan serinin Riemann fonksiyonu vardır diyemiyoruz. Örneğin,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 Sinnx$$

serisi x=0 noktasında yakınsaktır ve iki kez integralleme sonucu olarak

$$-\sum_{n=1}^{\infty} Sinnx$$

serisi alınır ki, bu da $x \neq k\pi$ olduğunda ıraksaktır.

Gerçekten, $\forall\ x \neq k\pi$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} Sinkx = \frac{Cos\frac{x}{2} - Cos\frac{2n+1}{2}x}{2.Sin\frac{x}{2}}$$

formülünden görülür ki, $n \to \infty$ da bu toplamın limiti yoktur.

4.2.4 Tanım: Eğer herhangi bir x_0 noktasında F(x) Riemann fonksiyonunun $F^{(")}(x_o)$ Schwarz türevi varsa burada bu $F^{(")}(x_o)$-a (8) serisinin x_0 noktasında Riemann anlamında toplamı denir.

4.2.5 Teorem (B. Riemann): Eğer (8) serisi (7) şartlarını sağlarsa ve herhangi x_0 noktasında yakınsarsa, o zaman bu noktada o serinin Riemann anlamında toplamı vardır ve bu onun adi toplamına eşittir. $F^{(\cdot)}(x_o)=S$.

İspat:

$$F(x)=\frac{a_0x^2}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(a_n\mathrm{Cos}nx+b_n\mathrm{Sin}nx\right)$$

ifadesi yardımı ile gereken hesaplamalar yapıldığında

$$\frac{F(x_o+2h)-2F(x_o)+F(x_o-2h)}{4h^2}=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\mathrm{Cos}nx_o+b_n\mathrm{Sin}nx_o)\left(\frac{\mathrm{Sin}nh}{nh}\right)^2 \qquad (10)$$

eşitliğini elde etmiş oluruz.

(4) serisi (1) serisinden nasıl alınmışsa benzer şekilde de (10) serisi $x=x_0$ halinde (8) serisinden alınmıştır. O halde 5.3 Lemma (Riemann) uygulanabilir ve bu lemma gereğince

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_o+2h)-2F(x_o)+F(x_o-2h)}{4h^2}=S$$

oluyor, burada S, (8) serisinin x_0 noktasında toplamıdır. Teorem ispatlandı. ★

Bu teoremden de aşağıdaki teorem çıkartılabilir.

4.2.6 Teorem (G. Kantor): Eğer trigonometrik seri (8) bütün R ekseni üzerinde yakınsarsa ve her yerde onun toplamı sıfır ise o zaman o serinin bütün katsayıları sıfırdır.

İspat: 4.2.3 Lemma'nın ispatının sonunda hatırlatılan Kantor-Lebesgue Teoremi gereğince a_n ve b_n katsayıları (7) şartını sağlar. Bu nedenle de trigonometrik seri F(x) Riemann fonksiyonuna sahiptir. 4.2.5 Teorem(B. Riemann) gereğince $F^{(\cdot)}(x_o)=0$ (her x noktasında). Bu durumda 4.1.5 Teorem(Schwarz Teoremi) uygulanır ve bu teoreme göre F(x)=Ax+B şeklinde olur. Böylece $\forall x\in R$ için

$$Ax+B=\frac{a_0x^2}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\mathrm{Cos}nx+b_n\mathrm{Sin}nx}{n^2} \qquad (11)$$

Burada, $x=\pi$ ve $x=-\pi$ dersek,

$$A\pi + B = \frac{a_o\pi^2}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n \mathrm{Cos}n\pi}{n^2} = \frac{a_o\pi^2}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}(-1)^n$$

$$A(-\pi) + B = \frac{a_o\pi^2}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}(-1)^n$$

olur. Bu eşitlikleri de taraf tarafa çıkarsak,

$$2.A.\pi = 0, \qquad A = 0$$

olduğu elde edilir. Daha sonra, x=0 ve x=2 π dersek o zaman a_o=0 olduğu görülür.

Sonuçta (11) eşitliği

$$-B = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n \mathrm{Cos}nx + b_n \mathrm{Sin}nx}{n^2} \tag{12}$$

şeklinde yazılabilir.

(12) de olan seri düzgün yakınsaktır. Bu ise sağ taraftaki seri –B toplamının Fourier serisi olması demektir. Yani,

$$\frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(-B).\mathrm{Cos}nx dx = 0$$

dır.

Böylece, ∀ n : a_n=0. benzer şekilde b_n=0 (∀ n) olur. ★

4.2.7 Teorem(G. Kantor): Her yerde yakınsak olan iki trigonometrik serinin toplamları aynı olursa o zaman aynı isimli katsayıları da aynı olurlar.

Yani, eğer

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \mathrm{Cos}nx + b_n \mathrm{Sin}nx) = f(x) \\ &\frac{b_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \mathrm{Cos}nx + d_n \mathrm{Sin}nx) = f(x) \end{aligned} \quad (\forall x \in R) \right\} \tag{13}$$

ise o zaman a_0=b_0, a_n=c_n,b_n=d_n (∀ n)

Gerçekten, (13) eşitliklerini taraf tarafa çıkarsak,

$$\frac{a_o - b_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(a_n - c_n)\mathrm{Cos}nx + (b_n - d_n)\mathrm{Sin}nx\right] = 0$$

olur. Yani, her yerde 0'a yakınsayan bir seri var. Burada o zaman 4.2.6 Teorem gereğince o serinin bütün katsayıları da sıfır olur. a_0-b_0=0 , a_n-c_n=0, b_n-d_n=0. Buradan da a_0=b_0, a_n=c_n, b_n=d_n olur.★

4.2.8 Not: İspatladığımız 4.2.7 Teorem "bir fonksiyonu yalnız bir trigonometrik seriye açabileceğimizi" bize gösterdi.

4. Burada şu soru ortaya çıkıyor: Trigonometrik serinin katsayıları onun toplamı yardımı ile nasıl belirlenebiliyor.

Düzgün yakınsak seriler için bu soruya 4.2.1 Teorem de cevap verildi. Aşağıdaki teorem daha genel durumda bu soruyu cevaplandıran bir teoremdir.

4.2.9 Teorem (P. Dyubua- Reymond- Ş. J. de lya Valle-Poussin): Her yerde yakınsak trigonometrik serinin toplamı (L) integrallenebilir bir fonksiyon olduğunda o seri o fonksiyonun Fourier serisidir.

İspat: f(x), her bir x için

$$f(x)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \mathrm{Cosnx}+b_n \mathrm{Sinnx}\right) \qquad (14)$$

şartını sağlayan sonlu integrallenebilir bir fonksiyon olsun. (14) serisi (7) şartlarını sağladığından onun sürekli F(x) Riemann fonksiyonu vardır. 4.2.5 Teorem(Riemann) gereğince, $F^{(\cdot)}(x)$=f(x). Buradan ise 4.1.7 Teorem gereğince,

$$F(x)=\phi(x)+Ax+B=\int_0^x dt\int_0^t f(u)du+Ax+B$$

olur.

Böylece,

$$\phi(x)=\int_0^x dt\int_0^t f(u)du=\frac{a_o x^2}{4}-Ax-B-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n \mathrm{Cosnx}+b_n \mathrm{Sinnx}}{n^2}$$

dir.

Buradan ise, bazı basit hesaplamalar yapıldıktan sonra,

$$\frac{\phi(x+2h)-2\phi(x)+\phi(x-2h)}{4h^2}=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \text{Cosnx}+b_n \text{Sinnx})\left(\frac{\text{Sinnh}}{nh}\right)^2$$

formülüne ulaşmış oluruz. Sağ taraftaki seri düzgün yakınsaktır ona göre de bu seri sol taraftaki toplamın Fourier serisidir. Bu ise

$$a_n\left(\frac{\text{Sinnh}}{nh}\right)^2=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\phi(x+2h)-2\phi(x)+\phi(x-2h)}{4h^2}\text{Cosnxdx}$$

eşitliğinin sağlanması demek olur ki, bu da $\phi(x+2h)-2\phi(x)+\phi(x-2h)=\varphi(x)$ dersek

$$\frac{4\pi a_n \text{Sin}^2 nh}{n^2}=\int_0^{2\pi}\varphi(x)\text{Cosnxdx} \qquad (15)$$

şeklinde yazılabilir. İki kez kısmi integrasyon uygularsak,

$$\begin{aligned}\alpha(h)=\int_0^{2\pi}\phi(x+2h)\text{Cosnxdx}&=\left[\phi(x+2h)\frac{\text{Sinnx}}{x}\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\phi'(x+2h)\frac{\text{Sinnx}}{n}dx\\&=-\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{x+2h}f(u)du\right)\text{Sinnxdx}\\&=\frac{1}{n^2}.\int_{2h}^{2\pi+2h}f(u)du-\frac{1}{n^2}.\int_0^{2\pi}f(x+2h)\text{Cosnxdx}\end{aligned}$$

formülünü alırız. Burada da periyodik fonksiyon özelliğini kullanırsak, sonuçta

$$\alpha(h)=\frac{1}{n^2}.\int_0^{2\pi}f(x)[1-\text{Cosn}(x-2h)]dx$$

formülünü alırız.

Bunları esas alarak,

$$\int_0^{2\pi}\varphi(x)\text{Cosnxdx}=\alpha(h)-2\alpha(0)+\alpha(-h)=\frac{4\text{Sin}^2 nh}{n^2}.\int_0^{2\pi}f(x)\text{Cosndx}$$

formülüne ulaşıyoruz. Bu formülü de (15) de dikkate alırsak

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{Cos} nx \, dx$$

olduğunu ispatlamış oluyoruz. Benzer şekilde a_0, b_n katsayılarının da Fourier katsayıları olduğu ispatlanır.★

5. LİNEER OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ARACI GİBİ KULLANILMASI

5.1 Fejer Operatörü Ve Onun Approksimativ Özellikleri

Vallee Poussin, Fejer'in $\sigma_n(x)$ toplamı için farklı bir formül göstermiştir. O burada

$$\frac{1}{\sin^2 z}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z+k\pi)^2}$$

açılımını kullanmıştır.

Bunu dikkate alırsak (bkz. Achiezer, s.143-145)

$$F_n(t)=\frac{1}{2.n.\pi}.\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}=\frac{4}{2.n.\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{(t+2k\pi)^2}=\frac{2}{n.\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{(t+2k\pi)^2}$$

olur ve sonuçta;

$$\sigma_n(t)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)F_n(x)\,dx=\frac{2}{n.\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{(x+2k\pi)^2}dx$$

olur. Buradan da x+2k π =y dersek, x=y-2k π, dx=dy olur ve sonuçta

$$\sigma_n(t)=\frac{2}{n.\pi}.\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi}f(t+y-2\pi k)\frac{\sin^2\frac{n(y-2\pi k)}{2}}{y^2}dy$$

olur. Burada da

$$\sin^2\frac{n(y-2\pi k)}{2}=\sin\frac{ny}{2}.\cos\frac{2\pi k}{2}-\cos\frac{ny}{2}.\sin\frac{2\pi k}{2}=\sin\frac{ny}{2}.\cos\pi k=(-1)^k\sin\frac{ny}{2}$$

olduğunu dikkate alırsak,

$$\sigma_n(t)=\frac{2}{n.\pi}.\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi}f(t+y-2\pi k)\frac{\sin^2\frac{ny}{2}}{y^2}dy$$

$$=\frac{2}{n.\pi}.\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi}f(t+y)\frac{\sin^2\frac{ny}{2}}{y^2}dy$$

$$=\frac{2}{n.\pi}.\int_{-\infty}^{\infty}f(t+y)\frac{\sin^2\frac{ny}{2}}{y^2}dy$$

eşitliğine ulaşmış oluruz. Burada da $\frac{ny}{2}=x,\ \ y=\frac{2x}{n},\ \ dy=\frac{2}{n}dx$ dersek,

$$\sigma_n(t) = \frac{2}{n.\pi}\cdot\frac{2}{n}\int_{-\infty}^{\infty} f(t+\frac{2x}{n})\frac{\sin^2 x}{\left(\frac{2x}{n}\right)^2}dx$$

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t+\frac{2x}{n})\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$$

formüllerine ulaşmış oluyoruz.

Böylece

$$\sigma_n(t) = \frac{2}{\pi.n}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{x^2}dx$$

veya

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t+\frac{2x}{n})\frac{\sin^2 x}{x^2}dx \qquad (1)$$

şeklini almış olur.

Bu formüller $f(x) \in C_{2\pi}$ ve $n \in N$ şartları gerçekleştiğinde ispatlanmıştı. Fakat, onların var olması için bunların var olması gerekli değildir.

Gerçekten,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = 1 \qquad (2)$$

doğrudur. Bunu şu şekilde ispatlayabiliriz:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{ixt}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\int_{-1}^{1} e^{ixt}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.e^{ixt}dt$$

olduğundan görülür ki, $\frac{\sin x}{x}$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\wedge} (L_2 \text{ anlamında}) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada Parseval formülünü uygularsak,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \int_{-1}^{1}\left|\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\wedge}\right|^2 dx = \int_{-1}^{1}\frac{\pi}{2}dx = \pi$$

dir. Yani,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = 1$$

olur.

Diğer taraftan

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t+\frac{2x}{n})\frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\frac{2.\sin^2\frac{\lambda}{2}(t-u)}{\lambda(t-u)^2}du \qquad (3)$$

integrali daha geniş şartlar içinde vardır ve bu durumlarda f(t) nin 2π periyotlu olmasına da ihtiyaç yoktur. f(t) nin ölçülebilir ve $\frac{f(t)}{1+t^2}\in L(-\infty,\infty)$ şartını sağlaması tam olarak yeterli olur.($|f(t)|\le M$, $f(t)\in L(-\infty,\infty)$... olabilir).

Bununda yanı sıra λ nın da doğal sayı olmasında bir önem yoktur ve $\lambda>0$ olması tam yeterlidir.

Böylece, (3) integraline Fejer integrali ,

$$\frac{2}{\pi\lambda}.\frac{\sin^2\frac{\lambda}{2}t}{t^2}$$

ifadesine ise Fejer çekirdeği denilir.

Bu operatörün $\lambda\to\infty$ da hangi özelliğe sahip olması gerektiği ayrıca incelenir ve daha genel sonuçlara varılabilir, özel durumda yukarıda sözü edilen Fejer teoremine ($f(x)\in C_{2\pi}$ ve $\lambda = n$ için) dönüşür.

N. Achiezer (3) yerine daha genel şekilde tanımlanan bir operatörü göz önüne almıştır. (Achiezer, N. I.,1956) K(x) çekirdek olmak üzere

$$K_\lambda f(x) = \lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(u)K(\lambda(x-u))du \quad (\lambda>0), \qquad (4)$$

olsun. K(x)' eğer aşağıdaki şartları sağlarsa; ona Fejer tipli çekirdek denir

1) $K_\infty(-x)$=K(x);
2) $\int_{-\infty}^{\infty} K(x)\,dx$ =1;
3) $-1\le x\le 1$ aralığında K(x) sınırlıdır;
4) x^2.K(x) ise bütün (- ∞, ∞) ekseni üzerinde sınırlıdır.

$\frac{f(x)}{1+x^2}\in L(-\infty,\infty)$ şartını sağlayan her f(x) ve $\lambda>0$ için (4) integrali vardır.

5.1.1 Teorem: $\dfrac{f(x)}{1+x^2} \in L(-\infty,\infty)$ ve $f(x,\lambda)=K_\lambda f(x)$ ise Fejer tipli çekirdeği olan operatör olsun. O zaman:

1) Eğer (h>0)

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h\left|\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2}-s\right|dt=0, \qquad (5)$$

olursa, o zaman

$$\lim_{\lambda\to\infty} f(x,\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty} K_\lambda f(x)=s\,; \qquad (6)$$

dir.

2) Eğer f(x) sonlu $\alpha<x<\beta$ intervalinde sürekli olursa, o zaman (α,β) nın her bir kapalı alt intervalinde düzgün yakınsaklık anlamında

$$\lim_{\lambda\to\infty} f(x,\lambda)=f(x) \qquad (7)$$

olur.

İspat: Önce 1)'i ispatlayalım.

K(x)'in 1) ve 2) şartlarına göre $\forall$ s için

$$f(x,\lambda)-s=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}[f(u)-s]K(\lambda(x-u))du=2\lambda\int_0^{\infty}\left\{\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2}-s\right\}K(\lambda t)\,dt$$

Şimdi, $\delta>0$ ve $\lambda>\dfrac{1}{\delta}$ olsun ve

$$f(x,\lambda)-s=2\lambda\int_0^{1/\lambda}\left\{\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2}-s\right\}K(\lambda t)\,dt+2\lambda\int_{1/\lambda}^{\delta}+2\lambda\int_{\delta}^{\infty}=I_1+I_2+I_3$$

diyelim. K(x)'in 3) ve 4) şartları gereğince

$$\sup_{-1\le x\le 1}|K(x)|=A, \qquad \sup_{-\infty<x<\infty}\left|x^2K(x)\right|=B$$

dir.

Daha sonra da $\varphi(t)=\varphi(t;x,s)=\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t\left|\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-s\right|du$ dersek,

$$|I_1| \le 2|\lambda| \int_0^{1/\lambda} \left| \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2} - s \right| K(\lambda t)\, dt$$

$$\le 2A \frac{1}{t} \int_0^t \left| \frac{f(x+u)-f(x-u)}{2} - s \right| du$$

$$= 2A.\varphi(t) = 2A.\varphi(\frac{1}{\lambda}); \tag{8}$$

ve

$$|I_2| \le \frac{2B}{\lambda} \int_{1/\lambda}^{\delta} \left| \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2} - s \right| \frac{dt}{t^2}$$

$$\le \frac{2B}{\lambda} \frac{\varphi(t)}{t} \Big|_{t=1/\lambda}^{\delta} + \frac{4B}{\lambda} \int_{1/\lambda}^{\delta} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \le 6.B. \sup_{\frac{1}{\lambda} \le x \le \delta} |\varphi(t)| \tag{9}$$

$$|I_3| \le \frac{2B}{\lambda} \int_{\delta}^{\infty} \left| \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2} - s \right| \frac{dt}{t^2} \tag{10}$$

olur.

Şimdi $\forall \varepsilon > 0$ verilmiş olsun. O zaman, (5) şartına göre öyle $\delta = \delta(\varepsilon)$ bulunabilir ki, $\varphi(t) < \dfrac{\varepsilon}{2A+6B}$ olur. (8) ve (9) da $\delta = \delta(\varepsilon)$ dersek, $|I_1| + |I_2| < \varepsilon$ olur.

Diğer taraftan δ sabit olduğundan, (10) dan $\lim\limits_{\lambda \to \infty} I_3 = 0$ olduğu da görülür ve sonuçta

$$\lim[f(x,\lambda) - s] = 0$$

olur.★

Şimdi de 2) yi ispatlayalım.

f(x)'in herhangi bir (α, β) intervalinde sürekli olduğunu farz edelim ve Δ ile bu intervalin her hangi kapalı alt intervalini gösterelim: $\Delta = \overline{\Delta} \subset (\alpha, \beta)$.

O zaman, öyle $\delta = \delta(\varepsilon)$ gösterebiliriz ki $0 \le x \le \delta$ olduğunda $\forall x \in \Delta$ için

$$\left| \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2A+6B}$$

dir.

Yani, $0 \le x \le \delta$ ve $\forall x \in \Delta$ için s=f(x) $\varphi(t) \le \dfrac{\varepsilon}{2A+6B}$ olur.

Bu δ sayısını değiştirmeden (8) ve (9) dan $|I_1|+|I_2|<\varepsilon$ ifadesi alınır($\forall x \in \Delta$).

Diğer taraftan δ sabit olduğundan (10) dan $\lim\limits_{\lambda\to\infty} I_3 = 0$ olur ve sonuçta $\forall x \in \Delta$ için düzgün olarak

$$\lim_{\lambda\to\infty}|f(x,\lambda)-f(x)|=0$$

dır. Bu şekilde teoremin 2) si ispatlanmış olur. ★

5.1.2 Not: (5) şartı f(x)'in her süreklilik noktasında sağlanır.
Eğer

$$S=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$$

dersek, o zaman (5) şartı her bir birinci türden süreksizlik noktasında da sağlanır.

Lebesgue göstermiştir ki, f(x) her sonlu intervalde integrallenebilir ise ve S=f(x) ise, o zaman (5) şartı hemen hemen her noktada sağlanıyor.

Bu teorem şu şekilde ifade edilebilir.

5.1.3 Teorem(Lebesgue): Eğer $f(x)\in L[a,b]$ ise, o zaman hemen hemen her $x\in(\alpha,\beta)$ için

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}|f(x+t)-f(x)|\,dt=0$$

dir.

5.2 Lineer Operatörler İle Yaklaşım

1. Daha önce söylediklerimizden görüldüğü gibi trigonometrik serilerin yakınsaklık problemi $S_n(f;x),\sigma_n(f;x),V_n(f;x),\ldots$ gibi özel şekilde tanımlanmış ifadelerin yardımı ile çözülebilir. Bu yönde çalışmalar, daha geniş anlamda serilerin integrallenebilirlik problemine dönüşmüş oldu ve burada Çezaro, Abel, K. Weierstrass vb. integrallenebilirlik yöntemleri ortaya çıktı ve daha da gelişti.

Diğer taraftan, $S_n(f;x), \sigma_n(f;x), V_n(f;x),\ldots$ gibi, aynı Çezaro, Abel, K. Weierstrass yöntemlerinde ortaya çıkan ve araştırma konusu olan ifadeler, her şeyden önce birer operatördürler: $f(x) \to S_n(f;x), f(x) \to \sigma_n(f;x)$ vb.

Bu düşüncede daha yeni yaklaşım yöntemlerinin düzenlenmesi, araştırılması problemini ortaya çıkarmış oldu.

Dolayısıyla, her hangi özel bir operatörün değil de, genel şekilde $L_n(f;x) \equiv L_n(f(t);x)$ şeklinde operatörlerin onları üreten f(x)'e yaklaşıp yaklaşmadığını öğrenmek problemi gündeme gelmiş oldu. Bu konu da çok geniş bir konudur. Ayrıca belirtelim ki, singüler operatörler de bu konu kapsamında kalan bir konudur. Bu nedenle, genel şekilde Lineer operatörlerle bağlı olan bazı neticeleri ele alarak, tezimizi bitirelim.

2. $\{L_n\}$ her hangi E uzayında tanımlı lineer operatörler dizisi olsun: $L_n(E_1 \to E_2)$ olsun. $\forall f \in E_1$ için $L_n(f;x) \to L_0(f;x)$ (E_2'de) olduğunda $\{L_n\}$ dizisi L_0 operatörüne yaklaşır denir. Bu aslında eğer E_1, E_2 lineer normlanmış uzaylar ise o zaman $\|L_n(f;x) - L_0(f;x)\|_{E_2} \to 0 \ (n \to \infty)$ olması demektir.

Approksime problemlerinde en çok uygulanan aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

5.2.1 Teorem (Banach-Steynhauz): E Banach uzayının her x noktasında sınırlı olan yani,

$$\forall n: \ \|L_n(x)\| \le M(x)$$

şartını sağlayan lineer sürekli operatörlerin $\{L_n\}$ dizisi için $\{\|L_n\|\}$ dizisi de sınırlıdır.

5.2.2 Teorem: $\{L_n\}$ operatörler dizisinin bir L_0 operatörüne yakınsak olması için aşağıdaki iki şartın sağlanması gerekli ve yeterlidir:

1) $\{\|L_n\|\}$ dizisi sınırlı olsun;
2) Elementlerinin lineer ifadeleri E uzayında her yerde yoğun olan $E_0 \in E$ kümesinin her $x \in E_0$ elemanı için $L_n(f;x) \to L_0(f;x)$ olsun.

Bu teoremin bir çok önemli uygulamaları vardır. Fakat, daha sonra yapılan araştırmalar 5.1.2 Teoreminin 2) şartının daha hafifletilebileceğini göstermiştir. Bu konuda P. P. Korovkin teoremleri vardır.

$\forall f(x) \geq 0$ için $L(f(t);x) \geq 0$ olduğunda L- pozitif operatör olarak isimlendirilir.

$L(f(x) \to P_n(x) \in H_n)$ olduğunda L- polinamal operatör olarak adlanır.

5.2.3 Teorem (P. P. Korovkin): $\{L_n\}$ lineer ve pozitif operatörler dizisi ($n \to \infty$ ' da)

1) $L_n(1;x) \to 1$;
2) $L_n(t;x) \to x$;
3) $L_n(t^2;x) \to x^2$

şartlarını sağlarsa, o zaman $\forall f(x) \in C[a,b]$ için $L_n(f(t);x) \to f(x)$ olur.

İspat: P. P. Korovkin'in bu teoreminin uygulamasına bir örnek verelim.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . b^k . a^{n-k} \tag{1}$$

binom açılımında a=1-x, b=x dersek $(0 \leq x \leq 1)$,

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k . x^k .(1-x)^{n-k} = 1 \tag{2}$$

olur. (1)'de b=x diyelim. O zaman

$$(x+a)^n = (a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k . a^{n-k} . x^k$$

alırız. Bunu x-e göre diferansiyenelliyelim ve daha sonra da x ile çarpalım:

$$n.x.(x+a)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k.C_n^k . a^{n-k} . x^k \tag{3}$$

Bu son eşitliği bir daha x-e göre diferansiyelleyelim ve sonucu x ile çarpalım:

$$n.(n-1)x^2.(x+a)^{n-2} + n.x.(x+a)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k^2 . C_n^k . a^{n-k} . x^k \tag{4}$$

(3) ve (4) formüllerinde de a=1-x alırsak, o zaman aşağıdaki eşitliklere ulaşmış oluruz:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n} C_n^k.x^k(1-x)^{n-k}=1;\\&\sum_{k=0}^{n} k.C_n^k.x^k(1-x)^{n-k}=n.x;\\&\sum_{k=0}^{n} k^2.C_n^k.x^k(1-x)^{n-k}=n.(n-1).x^2+n.x;\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Şimdi, S. N. Bernsteyn polinomunu -operatörünü- yazalım:

$$f(x)\to B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).C_n^k.x^k.(1-x)^{n-k}\qquad(6)$$

(5) formüllerinden görülür ki,

$$B_n(1;x)=1;$$
$$B_n(t;x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}.C_n^k.x^k.(1-x)^{n-k}=x;$$
$$B_n(t^2;x)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2.C_n^k.x^k.(1-x)^{n-k}=\frac{n-1}{n}.x^2+\frac{x}{n}$$

Bu ise,

$$\lim_{n\to\infty} B_n(1;x)=1;$$
$$\lim_{n\to\infty} B_n(t;x)=x;$$
$$\lim_{n\to\infty} B_n(t^2;x)=x^2;$$

eşitliklerinin gerçekleşmesi demektir.

Öteki yandan, (6) formülünden de görülür ki, $f(x)\geq 0$ olduğunda $B_n(f;x)\ \geq 0$ dır. $B_n(f;x)$'in lineer olması ise açıkca görülür. Dolayısıyla $B_n(f;x)$ lineer pozitif operatörü için P. P. Korovkin teoreminin şartları sağlanır zira bu operatörün normu $\|B_n\|=1$ dir. O zaman P. P. Korovkin teoremini uygulayabiliyoruz. Sonuçta $\forall f(x)\in C[0;1]$ için

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f;x)=f(x)\ (d.y)\qquad(7)$$

eşitliği sağlanır ki bu da S. N. Bernsteyn' in şu teoremini ispatlamış olur.

5.2.4 Teorem (S. N. Bernsteyn): [0,1] aralığında sürekli her bir f(x) fonksiyonu için $B_n(f;x)$ S. N. Bernsteyn operatörü [0;1] aralığında f(x)'e düzgün yakınsar; yani (7) eşitliği sağlanır.

5.2.5 Teorem (P. P. Korovkin): Eğer lineer pozitif operatörlerin $\{L_n\}$ dizisi

1) $L_n(1;x)\to 1$;

2) $L_n(\sin t;x) \to \sin x$;

3) $L_n(\cos t;x) \to \cos x$

şartlarını sağlarsa, o zaman her bir $f(x) \in C^*_{2\pi}$ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f(t);x) = f(x) \text{ (d.y.)}$$

şartı da sağlanır,

Bu teoremlerin her birisine "üç fonksiyon hakkında" teorem denilir ve bu bilgileri [4], [5], [10] kitaplarında bulunabilir.

Daha sonraları bu teoremler başka uzaylara da genişletilmiş, çeşitli uygulamaları bulunmuştur. Bunlardan;

5.2.6 Teorem(R. H. Mamedov): Eğer ($C[a,b] \to M[a,b]$) uzayından olan lineer pozitif operatörlerin $\{L_n\}$ dizisi:

1) $L_n(1;x) \to 1$;

2) $L_n(t;x) \to x + \varphi_n^{(1)}(x)$;

3) $L_n(t^2;x) \to x^2 + \varphi_n^{(2)}(x)$

şartlarını sağlarsa, o zaman $\forall f(x) \in C[a;b]$ için

$$| L_n(f(t;x)) - f(x) | = O[\omega(f;\mu_n)] \quad (\forall x \in [a,b])\,(n \to \infty)$$

şartı da sağlanır burada $\omega(f;\mu_n)$ $f(x)$ in süreklilik modülüdür.

$$\mu_n = \sqrt{\left(\varphi_n^{(2)}(x) - 2x\varphi_n^{(1)}(x)\right)} \ .$$

5.2.7 Teorem(R. H. Mamedov): 2π periyotlu fonksiyonların $C^*_{2\pi}$ uzayından sınırlı fonksiyonların $M^*_{2\pi}$ uzayına yansıma veren lineer pozitif operatörlerin $\{L_n\}$ dizisi

1) $L_n(1;x) \to 1$;

2) $L_n(\sin t;x) \to \sin x + \varphi_n^{(1)}(x)$;

3) $L_n(\cos t;x) \to \cos x + \varphi_n^{(2)}(x)$

şartlarını sağlarsa, o zaman her $f(x) \in C^*_{2\pi}$ fonksiyonu için $n \to \infty$ da

$$| L_n((f;x)) - f(x) | = O[\omega(f;\lambda_n)]$$

şartını sağlar, burada

$$\lambda_n = \sqrt{\varphi_n^{(1)}(x).\sin x + \varphi_n^{(2)}(x).\cos x} \quad .$$

P. P. Korovkin teoremini L_p^* $(p \geq 1)$ uzayı için V. K. Dzyadik aşağıdaki biçime dönüştürmüş ve ispatlamıştır.

5.2.8 Teorem: L_p^* $(p \geq 1)$ uzayını L_p^* uzayına yansıtan, Lineer pozitif operatörlerin $\{L_n\}$ dizisinin $\forall f \in L_p^*$ için f(x) fonksiyonuna yakınsayan olması için gerekli ve yeterli şartlar aşağıdakilerdir:

1) $\{L_n\}$ dizisinin normlar dizisi $\{\|L_n\|\}$ sınırlı olsun;

2) L_p^* metriğinde $n \to \infty$ halinde

a) $L_n(1;x) \to 1$;

b) $L_n(\sin t;x) \to \sin x$;

c) $L_n(\cos t;x) \to \cos x$

limit bağıntıları sağlanmış olsun.

KAYNAKLAR DİZİNİ

'Achiezer, N.I., 1947, Lektsii po teorii approksimatsii, Gostekhizdat. Kitabın ingilizce baskıları; "1956, Theory of approximation, Ungar, New York", "1992, Theory of approximation, Dover publications, New York".

Dzyadik, V.K., "Fonksiyonların lineer pozitif operatörler ve singüler integraller ile yaklaşımı hakkında", "Matem. sb.", 170(112):4(1996), 508-517.

Faddeyev, D. K., "Lebesgue noktalarında toplanabilir fonksiyonların singüler integraller ile gösterimi hakkında", Matem. Sbornik, C.1(43), No-3, 1936, s.351-368.

Hacıyev, A.C., Sınırlı olmayan aralıklarda lineer pozitif operatörler dizisinin yakınsaklık problemi ve Korovkin teoremlerine benzer teoremler hakkında", "Dokl. A.N. SSSR", 218:5, (1974), 1001-1004.

İbrahimov, İ.İ., "Tam Fonksiyonlarla Yaklaşım Teorisi", Bakü, Elm. Neşr., s.1-468,1979.

Natanson, I. P., "Reel değişkenli fonksiyonlar teorisi", M.1965.

Korovkin, P.P., "Lineer operators and the theory of approximation", Fizmatgız, 1959:English Translation in preparation by Hindistan PublishingCompany.

Mamedov, R.H.,"Fonksiyonların lineer pozitif operatörler ile yaklaşımı hakkında", "Dokl. A.N. SSSR", 18:4(1959), 674-676.

Mamedov, R.H.,"Fonksiyonların lineer pozitif operatörler ile yaklaşımının süreklilik modülü ile değerlendirilmesi hakkında", "Izv. A.N. Azerb.SSR, ser. Fiz-Matem. i. Tekn. nauk", 4(1961), 3-11.

Nasibov, F.H(G)., "Fonksiyonel Analiz", Bakü, 1992.

Nasibov, F.H(G)., "Tam fonksiyon sınıflarında ekstremal problemler", Bakü, 1998.

Timan, A.F., 1960, Teoriya priblizheniya funstii deistvitel'nogo peremennogo, Moskow. Kitabın ingilizce baskıları; "1963, Theory of approximation of functions of a real variable, Pergamon Press Ltd., Oxford, England.", "1994, Theory of approximation of functions of a real variable,Dover Publications, Inc., New York".

Valle-Poussin, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réele, 1919.