NONLİNEER MATEMATİK PROGRAMLAMA MODELLERİNDEN KUADRATİK PROGRAMLAMA VE SİVAS ULAŞ SÜT FABRİKASINDA BİR UYGULAMA

Cavit YEŞİLYURT

CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin İşletme Anabilim Dalı Sayısal Yöntemler Bilim Dalı İçin Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Fatih NURAY

SİVAS-1996

Sosyal Bilimler Enstitüsü Müdürlüğü'ne

İş bu çalışma, jürimiz tarafından İşletme Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Fatih NURAY

Üye : Yrd. Doç. Dr. Arif DANE

Üye : Yrd. Doç. Dr. Aslan GÜLCÜ

Onay

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

....../...../1996

..................(imza).........

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

"Nonlineer Matematik Programlama Modellerinden Kuadratik Programlama ve Sivas Ulaş Süt Fabrikasında Bir Uygulama" adlı tezimi büyük bir gayret ve titizlilik içerisinde yöneten değerli hocam Doç.Dr. Fatih NURAY' a en içten teşekkürlerimi arzederim.

Ayrıca çalışmalarım esnasında kendilerinden azami derecede istifade ettiğim sayısal yöntemler anabilimdalı hocalarından Yrd.Doç.Dr. Aslan GÜLCÜ ve Yrd.Doç.Dr. Uğur YAVUZ' a, fakültemiz bilgisayar uzmanlarından M.Ali ALAN, Ercan GÜZELCE ve Fatih ÖZARSLAN 'a, fakülte sekreterimiz Zafer KARTAL' a ve işletme bölüm başkanımız Doç.Dr. Mahmut KARTAL' a teşekkürlerimi arzederim.

Yine İ.Ü. İşletme Fakültesi öğretim üyelerinden başta Prof.Dr. Yılmaz TULUNAY olmak üzere diğer sayısal yöntemler hocalarına vermiş oldukları bilgilerden dolayı, daha önceleri bu konuda yapmış oldukları çalışmalarından istifade ettiğim İ.Ü. öğretim üyelerinden Yrd.Doç.Dr. Erhan ÖZDEMİR ve Uludağ Üniversitesi'nden Basri BAHTİYAR'a teşekkürü bir borç bilirim.

Cavit YEŞİLYURT

ÖZET

"Nonlineer Matematik Programlama Modellerinden Kuadratik Programlama ve Sivas Ulaş Süt Fabrikasında Bir Uygulama" adlı çalışmamız işletmelerde matematik modellerle optimum karın nasıl elde edileceğini kuramsal ve uygulamalı olarak ele almaktadır.

Çalışmamız iki bölümden oluşmaktadır. Kuramsal çalışma olarak verdiğimiz birinci bölümde doğrusal olmayan programlamanın kuramsal yapısı, doğrusal programlamayla olan benzerlik ve farklılıkları ve bu model için gerekli olan temel kavramlar kısaca açıklanmıştır. Doğrusal olmayan programlama problemlerinin çözümünde çok önemli bir yeri olan Karush-Kuhn-Tucker şartları incelenmiş ve kılasik hesaplama yöntemiyle bir örnek problem çözümü verilmiştir.

Birinci bölümün sonunda esas konumuzu teşkil eden ve nonlineer programlamanın özel bir sınıfı olan Kuadratik programlama modeli, klasik hesaplama yöntemi ve simpleks yöntemi anlatılmış ve simplek yöntemle bir örnek problem çözümü verilmiştir.

İkinci bölümde ise kuadratik programlama modelinin Sivas'taki süt ve süt ürünleri üreten ve pazarlayan bir fabrikaya uygulaması verilmiştir. Bu bölümde işletmeyi tanıtıcı bilgiler, model için verilerin elde edilmesi, modelin kurulması ve bu modelin bilgisayar çözümü verilmiştir.

Modelin bilgisayar çözümünden elde edilen sonuçlar yorumlanmış ve optimum kar için gerekli olan üretim bileşimi verilmiştir.

Çalışmanın genelinden elde edilen sonuçların yorumlanması ve mal ve hizmet üreticileri için önerilerle çalışma tamamlanmıştır.

ABSTRACT

In this study named "Quadratic Programming from Nonlinear Mathematical Programming models and an aplication to the Ulaş Milk Factory in Sivas" we interested in getting optimal profit in firms by matematical models.

This study consist of two chapters. In the first chapter the therotical structure of nonlinear programming, its similarity to and difference from the linear programming and some basic definitions have been given briefly. Karush-Kuhn-Tucker conditions which are very important in the solution of nonlinear programming problems have been investigated and an example problem was solved by the classical method.

At the end of the first chapter,The Quadratic Programming model as a special class of nonlinear programming, classic calculation and simplex method have been explained and an example was solved by the simplex method.

In the second chapter, quadratic programming was applicated to a factory in Sivas which produces and sells milk and milk products. Also, introductory informations about factory were given, data for the model was handled, the model was constructed and solved by computer.

The result obtained from computer solution were interpreted and the required product combination for optimum profit was given.

The study was completed with the interpretation of the results and some advices to the producer of goods and service.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ 1

BİRİNCİ BÖLÜM 4

I.DOĞRUSAL OLMAYAN PROGRAMLAMA MODELİ 4
I.1.DOĞRUSAL OLMAYAN PROGRAMLAMA MODELİNİN GELİŞİMİ 4
I.2.DOĞRUSAL OLMAYAN PROGRAMLAMA MODELİNİN KURAMSAL YAPISI VE TEMEL KAVRAMLAR 7
I.2.1. Doğrusal Olmayan Programlama Modelinin Genel Yapısı 7
I.2.2.Doğrusal Olmayan Kısıtlayıcılar 9
I.2.3.Doğrusal Olmayan Amaç Fonksiyonu 11
I.2.4. Konkavlık ve Konvekslik 13
I.2.5.Kuadratik Formlar 15
I.2.6. Konkav ve Konveks Setler 18
I.2.7. Ekstremumlar 18
I.2.8. Lagrange Çarpanı Modeli ve Karush-Kuhn-Tucker Şartları 19
I.2.9.Doğrusal Olmayan Programlama Modelinin UygulamaGüçlükleri 25
I.2.10.Nonlineer Maksimizasyon Problemi 27

I.3. KUADRATİK PROGRAMLAMA MODELİ 36
I.3.1. Kuadratik Programlama Modelinin Genel Yapısı 36
I.3.2. Kuadratik Programlamanın Matematik Yapısı 37
I.3.3. Kuadratik Programlama Modelinin Çözüm Yöntemleri 41
I.3.3.1. Klasik Hesaplama Yöntemi 41
I.3.3.2. Simpleks Yöntemi 42
I.3.4. Kuadratik Programlama Problemleri 44

İKİNCİ BÖLÜM 49

II. KUADRATİK PROGRAMLAMA MODELİNİN ULAŞ SÜT FABRİKASINA UYGULAMASI 49
II.1.İŞLETMEYİ TANITICI BİLGİLER 49
II.2.MODEL İÇİN VERİLERİN ELDE EDİLMESİ 53
II.2.1.Maliyet Fonksiyonlarının Tahmini 53

II.2.2.Hammadde Kısıtlayıcısı İçin Teknoloji Katsayılarının Belirlenmesi 60
II.2.3.Kapasite Kısıtlayıcısı İçin Teknoloji Katsayılarının Belirlenmesi 61
II.2.4.Birim İşgücü Zamanlarının Belirlenmesi 61
II.2.5.Ürünlerin Talep Tahmini 62
II.3.MODELİN KURULMASI 64
II.3.1.Amaç Fonksiyonunun Belirlenmesi 64
II.3.2.Kısıtlayıcı Denklemlerin Belirlenmesi 65
II.3.2.1.Hammadde Kısıtlayıcısının Belirlenmesi 65
II.3.2.2. İşgücü Kısıtlayıcısının Belirlenmesi 66
II.3.2.3. Kapasite Kısıtlayıcısının Belirlenmesi 66
II.3.2.4. Talep Kısıtlayıcısının Belirlenmesi 66
II.4.MODELİN ÇÖZÜMÜ VE SONUÇLARIN YORUMLANMASI 68
II.4.1.Modelin Bilgisayar Çözümü 68
II.4.2.Elde Edilen Sonuçların Yorumlanması 72

SONUÇ VE ÖNERİLER 73

GİRİŞ

İktisat bilimi kısaca sınırlı kaynakların yönetimi olarak bilinir. İşletmelerin çabuk ve isabetli karar alabilmeleri için büyük ölçüde sistematik yaklaşıma ihtiyaç vardır. Bu nedenle her türlü işletme faaliyetinin planlanması bir zorunluluktur[1].

Son yıllarda,işletmecilik sorunlarının çözümünde kantitatif yöntemlerin yaygın kullanımına ve bu yöntemlerin hızlı gelişimine tanık olunmuştur. O kadar ki, bu yöntemleri kullanan yöneticiler "modern yönetici" olarak anılmaktadırlar. Soyut verilere dayanarak ampirik yollarla verilen kararların geçerliliği her zaman tartışmaya açıktır. Bunun yanında somut verileri kullanarak, sorunların matematik modellerini oluşturup bunlara kantitatif yöntemlerle çözüm aramanın etkinliği kesindir[2].

Ülke ekonomilerinin temelini firmalar oluşturur. Az gelişmiş ülkeler ise ekonomik gelişmeyi sağlayacak üretim faktörü yönünden sınırlı kaynağa sahiptirler. Bu sebeple sınırlı kaynakların en etkin bir şekilde kullanımı bu ülkeler için hayati önem taşımaktadır.

Nicel tekniklere dayanan modellerle, işletme yöneticileri temel amaçları olan minimum maliyetle maksimum üretimi sağlamak veya karlarını en üst düzeye çıkarmada başarılı olabilirler. Ancak üretim ve pazarlamada hemen hemen dünyanın her tarafında var olan serbest rekabet, yöneticileri meselenin bir başka boyutu olan talep durumunuda gözönünde bulundurmaya itmiştir. Ayrıca mal ve hizmet üretiminde kalite de bir başka argüman olarak her zaman geçerliliğini korumuştur.

Karmaşık işletme problemleri karşısında doğru ve yerinde kararları alabilmek için çeşitli seçeneklerin bilinmesi, üretilen mal ve hizmetlerin maliyeti ve getirisinin önceden saptanması, firmaların faaliyetlerinin sistemli bir şekilde sürekliliğinin, hatta gelişmesinin vazgeçilmez unsurlarıdır. Bu unsurların isabetli olabilmeleri ise ancak bilimsel verilerle mümkün olabilir.

---

[1] Yılmaz,1995:1
[2] Tulunay, 1987: IX

Bilimsel karar alma süreci modellere dayanır. Karar almada kullanılabilecek çok çeşitli modeller ve nicel teknikler geliştirilmiştir. Bunlar, Doğrusal Programlama, Ulaştırma Modelleri, Leontief Modeli, Şebeke Analizi, Stok Modelleri, Oyun Kuramı, Bekleme Hattı Modelleri, Dinamik Programlama, Tamsayılı Programlama, Markov Analizi, Doğrusal Olmayan Programlama v.b. dir.

Kısaca "Matematik Programlama" olarak adlandırılabilecek bu modellere ilişkin çok sayıda kuramsal çalışma yapılmıştır. Uygulama yönünden ise çalışmalar bu denli çok değildir. Özellikle enflasyonist ve rekabete açık ortamlarda gerçek hayat problemlerinin doğrusal olmayan yapılar içereceği kaçınılmaz olmasına karşın doğrusal olmayan programlamanın kuramsal çalışmasının diğer modellere nazaran daha az olması, uygulama çalışmalarının ise yok denecek kadar az olması düşündürücüdür. Kanaatimizce bu modelin diğerlerinden daha çok matematik bilgisi içermesi ve özellikle ülkemizdeki matematikçilerin de bu konuya gereken ilgiyi duymaması bu alandaki çalışmaların yetersiz kalmasına sebep olmuştur. Doğrusal olmayan (nonlineer) programlama çalışmamızda her şeyi değil ama az da olsa bir boşluğu doldurabildiysek mutlu olacağız.

İster "Kantitatif Analizler" isterse "Yöneylem Araştırması" adı altında olsun uygulanmakta veya geliştirilmekte olan ve matematik model kullanan bütün yöntemler, esasında "işletme sorunlarının matematik olarak programlanması ve çözümü" den başka birşey değildir. Ancak gerek matematik modellerin kurulması sırasında ve gerekse bu modellere çözüm aranırken, yönetim bilimleri, finansman, maliyet muhasebesi, üretim teknolojisi, davranış bilimleri, pazarlama, v.s. sıkça başvurulan ve ilişki kurulan dallardır. Kaldı ki, özellikle büyük ölçekli problemler sözkonusu olduğunda, çeşitli dallardaki uzmanların bir araya gelerek sorunun matematik modelini kurmaları ve bu modelin çözümü boyunca işbirliği yapmaları mutlaka gerekli olmaktadır[3].

Çalışmamızda sıkça geçen "optimum" (en iyi) kavramını da "verilen şartlar altında en iyi sonucun elde edilmesi işi"olarak tanımlamak mümkündür.

---

[3] Tulunay, 1987: IX

Optimumu araştıran yöntemler matematik programlama teknikleri olarak bilinir ve genellikle ayrılmaz bir parçası olduğu yöneylem araştıması içerisinde müteala edilir. Yöneylem araştırması ise matematiğin, karar vermeye yönelik bir branşıdır[4].

Çalışmamız iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde doğrusal olmayan (nonlineer) programlama kuramsal olarak kısaca tanıtılmış ve gerçek hayat problemleri için gerekliliği üzerinde durulmuştur. Ayrıca doğrusal olmayan programlama modelinin özel bir sınıfı olan Kuadratik Programlama Modeli genişçe incelenmiş ve iki değişkenli bir örnek problem çözümü verilmiştir.

İkinci bölümde ise kuadratik programlama modelinin Sivas'taki süt ve süt ürünleri üreten bir fabrikaya uygulaması verilmiştir. Çalışmamız, kuadratik programlama konusunda uygulamalı bir çalışma olduğundan bu sahadaki boşluğu biraz olsun azaltacağı kanaatindeyiz.

Uygulamanın yer aldığı ikinci bölümde ise işletmenin kuadratik programlama modelinin kurulmasında, amaç fonksiyonu ve kısıtlayıcıların elde edilmesine geniş ölçüde yer verilmiştir.

Böylece çalışmamız, ülkemizde kuadratik programlama modelinin, bir üretim planlaması için ne kadar gerekli olduğu ve nasıl uygulanabileceği konusunda kapsamlı bir çalışma olmuştur.

[4] Bal, 1995: 1

BİRİNCİ BÖLÜM

I.DOĞRUSAL OLMAYAN PROGRAMLAMA MODELİ

I.1.DOĞRUSAL OLMAYAN PROGRAMLAMA MODELİNİN GELİŞİMİ

Doğrusal programlama modeli, karar vermeye yönelik bir çok alanda yoğun olarak kullanılmakla birlikte bazı sorunları da beraberinde getirmektedir.Doğrusal programlama yöntemi, işletmenin girdileri ile çıktıları arasında doğrusal bir ilişkinin varolduğu varsayımına dayanır. Dolayısıyla, amaç fonksiyonu ve kısıtlayıcı şartlar doğrusal olarak tanımlanırlar.[1]

Pratikte karşılaşılan problemlerin birçoğunda, gerek amaç denklemi ve gerekse sınırlayıcı şartlar doğrusal değildir. Bazı durumlarda doğrusal olmayan bu ifadeler yerine, yaklaşık doğrusal ifadeler kullanılabilir yada bir eğriği yaklaşık olarak karekterize eden doğrulardan yararlanılabilir. Ancak bu yaklaşımların her zaman kullanılabilmesi mümkün değildir[2].

Gerçek hayattaki problemlerin çoğu doğrusal olmayan yapıları içerdiklerinden doğrusallık varsayımı bir bakıma araştırmacıları sınırlamaktadır. Maliyet fonksiyonları, talep ilişkileri, fiyat ve üretim fonksiyonu, doğrusal olmayan özellik taşıyabildikleri gibi bu fonksiyonlar içindeki bazı değişkenler doğrusal olmamaktadır.Bu durumda problemlerin çözümü için doğrusal programlama modeli uygulamak sağlıklı olmaz[3]. Bu durum araştırmacıları yeni modeller bulmaya yöneltmiş ve doğrusal olmayan yapıları da ihtiva edebilecek bir matematik model oluşturmaya yönelik çabalar artmıştır.

Doğrusal olmayan (=Nonlineer) optimizasyon çalışmaları, çok fazla geriye gitmeden Lagrange ve Cauchy ile başlamıştır denilebilir. Daha sonra R.Courant'ın çalışmaları bu amaca yönelik araştırmaları hızlandırmıştır.En sonunda Fritz John, H.W.Tucker'in teorik altyapıyı kurmaları ile başlı başına bir disiplin haline

---

[1] Öztürk 1984 :18
[2] Tulunay 1987:533
[3] Bahtiyar 1989:1

gelmiştir.1960'lı yılların ortalarına kadar geçen dönemde ise duyarlılık çalışmaları yapılmış ve dualite (=ikilik) kuramı geliştirilmiştir.

Doğrusal olmayan programlamaya duyulan güven ve ilginin 1960'lardan sonra artması ve simpleks yöntemin doğrusal olmayan problemlere de uygulanması önemli bir gelişme olmakla birlikte bu modelde birtakım matematik kabullerin olması bir açmaz olarak hala mevcudiyetini korumaktadır.Ayrıca bütün nonlineer programlama problemlerini çözebilecek etkili bir yöntemin olmaması bir başka boşluğıun göstergesidir.

Doğrusal programlama modeli yapısal olarak kabaca, doğrusal bir amaç fonksiyonu ve doğrusal olan yada doğrusallık varsayımına dayanan kısıtlayıcı şartlardan oluşmaktadır.Ayrıca negatif üretim yada negatif maliyet anlamlı olmayacağından pozitiflik (negatif olmama) şartı da mevcut olacaktır.

Doğrusal programlama modelini terimlerle aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

Amaç fonksiyonu $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

Kısıtlayıcılar ; $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_i$ $i=1,2,...,m$

Pozitif Kısıtllama ; $x_j \geq 0$ $j=1,2,..., n$

Kısıtlayıcıları açık biçimde

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2$

...

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m$

şeklinde yazılabilir. Burada;

x_j: Karar değişkenlerini (Üretim yada maliyet miktarı gibi)

c_j: Birim kar veya maliyet katsayısını

b_i : Kaynak kapasitesini

a_{ij} : Teknoloji katsayılarını göstermektedir.

Yukarıda tanımlanan doğrusal programlama modelinde değişkenlerin ve parametrelerin birinci dereceden olduğu görülmektedir. Bu durum doğrusal programlamanın karekteristik bir özelliğidir. Halbuki gerçek hayata ilişkin problemlerde amaç fonksiyonu nadiren doğrusal olup genelde doğrusal değildir. Mesala değişik üretim düzeylerinde birim maliyetler farklı farklı değerler alabilirler.Böyle durumlarda c_j ler sabit olmayıp fonksiyonel bir özellik gösterirler. Bu da modeli,doğrusal olmayan bir yapıya götürür.

Genel olarak bir matematik programlama problemi, amaç fonksiyonunu maksimum yada minimum yapmak üzere aşagıdaki gibi tarif edilir.

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ amaç fonksiyonunu

$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_i$; $i=1,2,...,m$

kısıtlayıcıları ve

$x_j \geq 0$; $j=1,2,...,n$

pozitif kısıtlayıcıları altında enbüyükleme (=maksimum yapma) yada enküçükleme (minimum yapma) işidir.

Görüldüğü gibi doğrusal programlama modeli, genel matematik programlama modelinin özel bir sınıfı olup sıklıkla karşılaşılan durum ise doğrusal olmayan programlama problemleridir.

I.2.DOĞRUSAL OLMAYAN PROGRAMLAMA MODELİNİN KURAMSAL YAPISI VE TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda doğrusal olmayan programlama modelinin genel yapısı, doğrusal olmayan programlama modelini oluşturan kısıtlayıcı şartlar, konkavlık ve konvekslik, ekstremumlar,Karush-Kuhn-Tucker Şartları, doğrusal olmayan amaç fonksiyonu, doğrusal olmayan programlama modelinin özellikleri ve uygulama güçlükleri verilecektir.

I.2.1. Doğrusal Olmayan Programlama Modelinin Genel Yapısı

Doğrusal programlama problemlerindeki temel varsayım, burada kullanılan bütün fonksiyonların lineer ifadeler olmasını gerektirmektedir. Ancak bunu pratikte gerçeklemek her zaman mümkün olmamaktadır. Bu sebeple doğrusal olmayan programlama problemlerine ilgi duyulmaktadır. Böylesi bir problemde, genel olarak, amaç denklemi;

$Z_{max/min} = f(x_1, x_2, ..., x_n)$

kısıtlayıcı şartlar;

$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_i$ (i=1,2,...,m)

pozitiflik şartı ise;

$x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$

şeklinde verilmektedir.[4]

Burada $Z=f(X)$ amaç fonksiyonu doğrusal değildir. Kısıtlayıcılar ise lineer yada nonlineer olabilir. Amaç fonksiyonunun ikinci dereceden (kuadratik) ve kısıtlayıcıların da lineer olduğu kuadratik programlama modeli bir sonraki bölümde verilecektir.

---

[4] Tulunay 1987:553

Nonlineer (=Doğrusal olmayan) kısıtlayıcılar ihtiva eden maksimizasyon ve minimizasyon problemlerinin çözümünde Lagrange çarpan yöntemi geliştirilmiştir.Bu yöntemin ilk aşamasında bir Lagrange Fonksiyonu nun oluşturulması gerekmektedir. Bu fonksiyon;

$$L(x_1, x_2, ..., x_n\ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [g_i(x_1, x_2, ..., x_n) - b_i]$$

şeklindedir.Buradaki $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ değerleri Lagrange çarpanları olarak adlandırılır. Ayrıca doğrusal olmayan amaç fonksiyonlu problemlerin çözümünde kullanılan Lagrange çarpanı, kısıtlayıcı şartların eşitsizlikler ihtiva etmesi durumunda da uygulanabilmesi için Kuhn-Tucker şartlarını sağlaması gerekir.

Eşitsizlik kısıtları altında bir amaç fonksiyonunu, Lagrange çarpanı yöntemi ile aşağıdaki şekilde ifade etmek mümkündür.

$L(X,S,\lambda) = f(X) - \lambda g(X) + S$

Burada ;

$S = [s_1, s_2, ..., s_n]$ aylak (slack) değişkenlerdir. Aylak değişkenler, eşitsizlik kısıtlayıcılarını eşitlik haline getirmek için kullanılır ve kullanılmayan kapasiteyi gösterir.

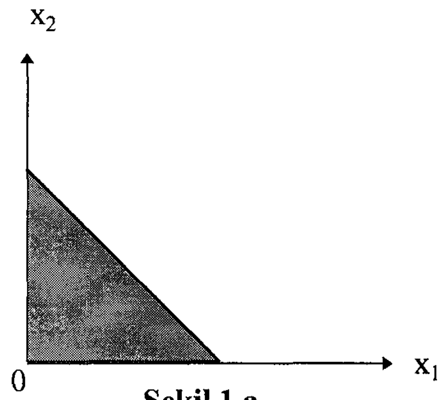
Lagrange çarpanı yöntemi ve buna bağlı olarak tanımlanan Kuhn-Tucker şartları, doğrusal olmayan programlama yöntemlerinin analitik çözümlerine ulaşmada faydalı olacaktır.Ayrıca Lagrange çarpanının ekonomik bir anlamı da vardır. Bu anlam gölge fiyatları tanımlamasıdır[5].Gölge fiyatları girdi ve kısıtlayıcı şartların gerçek fiyatları olduğu gibi ek girdi kullanımının amaç fonksiyonuna olan katkısını da göstermektedir.

[5] Öztürk 1978 : 83

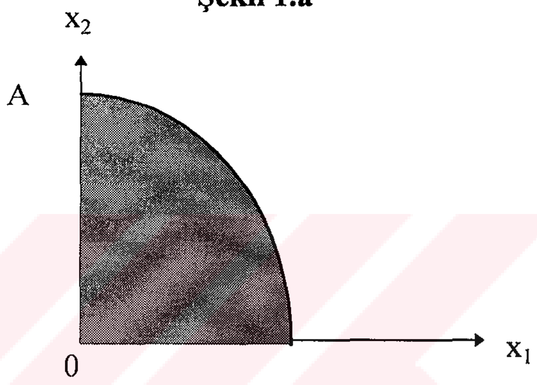
I.2.2.Doğrusal Olmayan Kısıtlayıcılar

Doğrusal programlamada bir konveks (dışbükey) küme, sınırlı sayıdaki doğrusal kısıtlayıcıların kesişme noktalarından meydana gelir ve sınırlı sayıda uç (extreme) nokta ihtiva eder. Halbuki kısıtlayıcılardan en az biri doğrusal değilse sonsuz sayıda uç nokta olabileceği gibi uygun çözüm alanı da konveks olmayabilir.

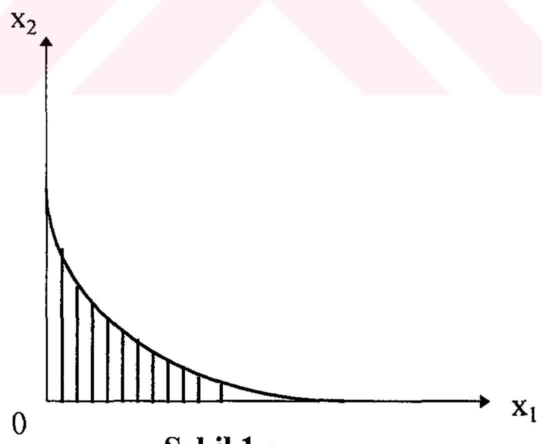
Sadece bir kısıtlayıcı ve pozitiflik şartı olan çeşitli matematik programlama problemleri şekil 1 de verilmiştir. Şekilde uygun çözüm alanları taranmıştır.Şekil 1 a da amaç fonksiyonu doğrusal olup optimum çözüm, uygun çözüm alanının köşe noktalarında yer alır. Şekil 1 b de uygun çözüm alanı konveks bir küme olup sonsuz sayıda uç noktası vardır.Şekil 1 c de uygun çözüm alanı konkav bir kümedir ve simpleks yöntem burada da uygulanamaz.(Konkavlık ve Konvekslik daha sonra verilecektir.)



Şekil 1.a



Şekil 1.b



Şekil 1.c

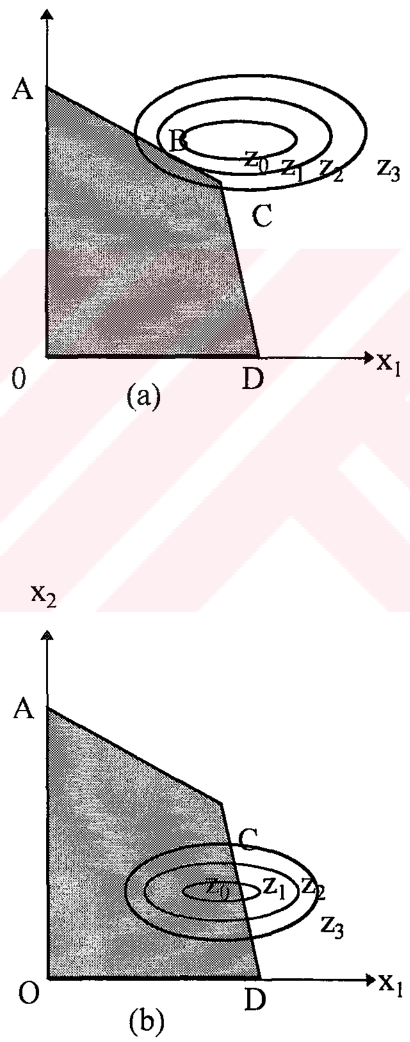
I.2.3.Doğrusal Olmayan Amaç Fonksiyonu

Burada kısıtlayıcıları doğrusal ve amaç fonksiyonu doğrusal olmayan bir programlama problemini düşünelim.

Şekil 2' deki grafikler eşkarlılık çizgilerini temsil eder. Z_0 bu fonksiyon için en yüksek kar noktasıdır.Burada $Z_0>Z_1>Z_2>Z_3$ dir. Şekil 2.a' da, en yüksek kar noktası Z_0 uygun çözüm alanında kalmaktadır. Optimum çözüm, bu sınırlandırılmış problemin eşkarlılık çizgisinin AC kısıtlayıcısına teğet olduğu B noktasında yer almaktadır. Görüldüğü gibi optimum çözüm, dışbükey bir kümenin uç noktasında bulunmaktadır. Şimdi Z_0 yine en yüksek kar noktasını göstermek üzere ve $Z_0>Z_1>Z_2>Z_3$ şartı aynı kalmak şartıyla doğrusal olmayan amaç fonksiyonu şekil 2.b deki gibi kaydığını düşünelim.Böyle bir problem için optimum çözüm,uygun çözüm alanının içinde bir noktada yer alır ve x_1 ile x_2 değişkenleri Z_0 a karşılık gelir.

Burada doğrusal programlamanın özelliği olan bütün çözümlerin dışbükey bir kümenin uç noktalarında yer alması şartının ihlal edilmiş olduğu görülmektedir. Bununla beraber kısıtlayıcıları doğrusal ve amaç fonksiyonu doğrusal olmayan matematiksel programlama problemleri için simpleks yöntemin uygulanmasını mümkün kılan dönüşümlerin geliştirildiğini belirtmek gerekir.[6]

[6] Bahtiyar 1989:10



Şekil :2.

I.2.4. Konkavlık ve Konvekslik

$y=f(x)$ x_1 ve x_2 gibi iki değeri için

$f[\lambda x_2+(1-\lambda)x_1] \leq \lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1)$

şartını $0<\lambda<1$ aralığında gerçekliyorsa bu fonksiyon bir konveks fonksiyondur.[7]

$f[\lambda x_2+(1-\lambda)x_1]<\lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1)$ şartını $0<\lambda<1$ aralığında sağlıyorsa $f(x)$ fonksiyonuna "tam konveks" fonksiyon denir.

Aynı şekilde "≤" yerine "≥" konursa $f(x)$ konkav, "<" yerine ">" konursa $f(x)$ fonksiyonu "tam"konkavdır denir.

Bir başka ifade ile ;

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \geq 0 \text{ ise } (x' \text{in bütün değerleri için})$$

$f(x)$ fonksiyonu konveks,

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0 \text{ ise } (x' \text{in bütün değerlri için})$$

$f(x)$ fonksiyonu tam konveks ve

yukarıdaki eşitsizliklerde "≥" yerine "≤" gelirse $f(x)$ fonksiyonu konkav, ">" yerine "<" gelirse $f(x)$ fonksiyonu tam konkavdır.

İki boyutlu uzayda $f(x_1,x_2)$ fonksiyonunun konveks olabilmesi için ;

1) $$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{dx_2^2} - \left[\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1 . dx_2}\right]^2 \geq 0$$

2) $$\frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} \geq 0$$

---

[7] Lasdon,68

3) $\dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} \geq 0$

şartlarını bütün (x_1,x_2) noktalarında sağlaması gerekir.

Eğer 2. ve 3. şartta "≥" yerine "≤" getirilirse $f(x_1,x_2)$ fonksiyonu konkav olacaktır.Ayrıca 1 şartına Δ denilecek olursa $\Delta<0$ için [$(x_1,x_2)=(x_1^*,x_2^*)$ noktasında] bir eyer noktası bulunur.

Çok değişkenli bir $f\,(x_1,x_2,...,x_n)$ fonksiyonu, yanlızca onun (nxn)- boyutlu "Hessien Matrisi" bütün mümkün $(x_1,x_2,...,x_n)$ setleri için pozitif yarı-tanımlı ise konvekstir.

n-değişkenli bir $f(x_1,x_2,...,x_n)$ fonksiyonunda ikinci mertebeden kismi türevler hesap edilerek ;

$$H=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \cdot \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \cdot \partial x_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \cdot \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \cdot \partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

matrisi oluşturulabilir ki buna "Hessien Matrisi" denir. Bu matrisin asal minörleri de

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \cdot \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \cdot \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \cdot \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \cdot \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \cdot \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \cdot \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{bmatrix}, \ldots\ldots\ldots, \Delta_n \quad \text{dir.}$$

a) $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots$ ise fonksiyon konveks,

b) $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0$ ...ise fonksiyon konkavdır.[8]

Şayet $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ fonksiyonu konveks ise, $g(x_1,x_2,\ldots,x_n) = -f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ fonksiyonu konkav olacaktır. (Bunun tersi de doğrudur)

Ayrıca konveks fonksiyonların toplamı da konvekstir. Mesela;

$f_1(x_1,x_2) = x_1^4 + 2x_1^2 - 5x_1$ ve $f_2(x_1,x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ konveks ifadelerdir.

$f(x_1,x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_1,x_2) = x_1^4 + 3x_1^2 - 5x_1 + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2$ toplam fonksiyonu da konvekstir ve ;

$$g(x_1,x_2) = -f(x_1,x_2) = -x_1^4 - 3x_1^2 + 5x_1 - 2x_1 \cdot x_2 - x_2^2$$

fonksiyonu ise konkav bir fonksiyondur.

I.2.5.Kuadratik Formlar

Eğer,

$X = (x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$

ve

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

[8] Hallaç 1991:492

nxn tipinde bir matris ise

$$Q(X)=X^T.A.X=\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i \cdot x_j$$

ile belirlenen Q(X) fonksiyonu bir "kuadratik form" belirler.Bu kuadratik formu açık olarak ;

$$Q(X)=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

şeklinde, veya çarpma işlemi yapılarak ;

$$Q(X)= \begin{array}{l} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n \\ +a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n \\ +\ldots \\ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 \end{array}$$

şeklinde yazılabilir.

Bu kuadratik form ;

1) Şayet Q(X)>0 ise ($\forall x \neq 0$ için),pozitif tanımlıdır.

2) Şayet Q(X)≥0 ise (bütün x'ler için) ve Q(X)=0 yapan bir $X \neq 0$ bar ise, pozitif yarı-tanımlıdır.

3)Şayet -Q(X) pozitif tanımlı ise Q(X) negatif tanımlıdır.

4) Şayet -Q(X) pozitif yarı-tanımlı ise, Q(X) negatif yarı-tanımlıdır.

5) Şayet Q(X) yukarıdaki durumlardan hiçbirine uymuyorsa tanımlı olmayandır.

Yukarıda sıralanan bu durumların gerçeklenebilmesi için gerek ve yeter şartlar ise şöyle izah edilebilir.

a) A matrisinin k'ıncı asal minörü ;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

olarak gösterilebilir. Buna göre A matrisinin asal minörlerine ait determinant değerlerinin hepsi pozitif ise (yani $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0,\ldots,\Delta_n>0$ ise), Q(X) fonksiyonu pozitif tanımlıdır. Bu durumda A matrisi de pozitif tanımlı olacaktır.

Benzer şekilde şayet $Q(X)$ pozitif yarı-tanımlı ise (bu halde $\Delta_1 \geq 0, \Delta_2 \geq 0, \ldots, \Delta_n \geq 0$ olacaktır) A matrisi de pozitif yarı-tanımlı olacaktır.

b) Şayet A matrisinin asal minörlerinin işareti $(-1)^k$ (k=1,2,...,n için) olarak değişiyorsa Q(X) negatif tanımlıdır. (Bu halde $\Delta_1<0$, $\Delta_2>0$, $\Delta_3<0$, $\Delta_4>0,\ldots$, $\Delta_{60}>0,\ldots$olacaktır.) Bu durumda A matrisi de negatif tanımlıdır.

c) Şayet A matrisinin asal minörlerine ait determinant değerleri "0" veya$(-1)^k$ (k=1,2,...,n) işaretine sahip ise, Q(X) fonksiyonu negatif yarı-tanımlı olacaktır. Yani $\Delta_1\leq 0,\Delta_2\geq 0,\ldots,\Delta_{25}\leq 0,\ldots$ olacaktır.

A matrisi bir (H) Hessien matrisi gösteriyorsa ve bu matris pozitif tanımlı ise, (H) Hessien matrisinin elde edildiği $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ fonksiyonu tam konvekstir.

H matrisinin pozitif yarı-tanımlı olması durumunda $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ fonksiyonu konvekstir.H matrisinin negatif tanımlı olması durumunda $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ fonksiyonu tam konkav olur.

Son olarak H matrisinin negatif yarı-tanımlı olması durumunda ise $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ fonksiyonu konkav olacaktır.[9]

---

[9] Tulunay 1987:541

I.2.6. Konkav ve Konveks Setler

Fonksiyonlardaki konvekslik ve konkavlık ile setlerdeki konvekslik ve konkavlık arasında sıkı bir ilişki vardır. Şöyleki;

Şayet $f(x_1,x_2,...,x_n)$ konveks bir fonksiyon ise, belirli bir aralıkta, bu eğri üzerinde bulunan noktalar bir konveks set oluştururlar.[10]

Benzer şekilde, konkav bir eğrinin altında, belirli bir aralıkta bulunan noktalar da yine konveks bir set oluştururlar.Ayrıca çeşitli konveks setlere ait noktaların oluşturduğu set te yine konveks bir settir.Buna bağlı olarak, belirli bir aralıkta, konveks bir eğrinin üzerinde ve konkav bir eğrinin altında bulunan noktalar da konveks bir set oluşturur. Yani konveks bir setin üst sınırını konkav bir fonksiyon, alt sınırını konveks bir fonksiyon belirler.

I.2.7. Ekstremumlar

Konvekslik ve konkavlıktaki açıklamalara göre, eğer $f(x)$ fonksiyonu x^* komşuluğunda tam konveks ise bu x^* değeri için bir minimum nokta sözkonusu olacaktır. Bu nokta yerel yada mutlak minimum olabilir.

Benzer şekilde, $f(x)$ fonksiyonu bir x^* komşuluğunda tam konkav ise, bu x^* değeri mutlak yada yerel maksimum olacaktır. O halde;

maksimum için : $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} < 0$ ($x=x^*$ da)

minimum için : $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0$ ($x=x^*$ da) olur.

$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 0$ olması durumunda ise belirsizlik vardır ve daha yüksek mertebeden türevlere ihtiyaç olacaktır.

---

[10] Tulunay 1987:542

I.2.8. Lagrange Çarpanı Modeli ve Karush-Kuhn-Tucker Şartları

Non-Lineer maksimizasyon problemi genel olarak aşağıdaki gibi düşünülmüştür.

maksimum $y=f(x_1, x_2, ..., x_n)$ amaç fonksiyonu

$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_i$ $(i=1,2,...,m)$ kısıtlayıcıları ve

$x_j \geq 0$ $(j=1,2,...,n)$ pozitif kısıtlama şeklindedir.[11]

Maksimizasyon problemi n tane karar değişkenli bir lineer yada nonlineer amaç fonksiyonu, m tane $gi \leq bi$ şeklindeki kısıtlayıcılar ve $x_j \geq 0$ gibi pozitif kısıtlayıcılardan oluşmaktadır.

Bu temel yapıdaki bütün problemleri çözecek genel bir algoritma mevcut değildir. Bununla birlikte pek çok özel maksatlı algoritmalar ve her bir işlemler için non-lineer programlamanın özel durumları geliştirilmiştir.Lagrange fonksiyonunun eşitsizlikleri de içerecek biçimde geliştirilmesi Karush-Kuhn-Tucker şartlarının tanımlanması ile mümkün olabilmiştir.

Karush-Kuhn-Tucker şartları bir non-lineer programlama probleminin çözümü için aday olan verileri bulmayı sağlar.Bu şartlar çözümün hesap metodlarına bağlıdır.

Bir değişkenli $y=f(x)$ şeklindeki fonksiyonu düşünülsün. y yi maksimum yapan x için $\frac{dy}{dx}=0$ olmalıdır. $f(x)$ diferensiyellenebilir olduğu sürece bu x maksimum için bir adaydır.

Benzer şekilde

$y=f(x_1,x_2,...,x_n)$ de maksimum için adaylar $j=1,2,...,n$ ye kadar $\frac{\partial y}{\partial x_j}=0$ kısmi türevlerinin hesaplanması ile bulunur. Şayet $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ konkav bir

[11] Sang M.Lee, Laurence J.Moore, Bernard W. Taylor, Management Science, Third Edition

fonksiyon ise bu x_j noktası maksimumu verir. Genel olarak y yi maksimum yapan x_j değerleri x_j^* ile belirtilmiştir.

Pozitiflik şartı $x_j \geq 0$ ($j=1,2,...,n$) olduğu zaman bir yada birden çok x_j ler 0' a eşit olmak zorundadırlar.

Herbir durum için $\frac{\partial y}{\partial x_j}$ negatif değerleri almaya zorlanır.Böylece özet olarak $f(x_1,x_2,...,x_n)$ konkav bir fonksiyon olduğu zaman maksimum $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$

$\frac{\partial y}{\partial x_j} = 0$, şayet $x_j^* > 0$ ise yada

$\frac{\partial y}{\partial x_j} \leq 0$, şayet $x_j^* = 0$ olarak bulunur.

Karush-Kuhn-Tucker tarafından ortaya konulan bu klasik şartların varyasyonlarına geçmeden önce Lagrange çarpanını gözden geçirelim.Lagrange çarpım fonksiyonu aşağıdaki biçimdedir.

Amaç fonksiyonu:

$y=f(x_1,x_2,...,x_n)$

Kısıtlayıcılar:

$g_i(x_1,x_2,...,x_n) \leq b_i$ $(i=1,2,...,m)$

Pozitif kısıtlama:

$x_j \geq 0$, $(j=1,2,...,n)$

olmak üzere bunun L ile gösterilen Lagrange ifadesi de aşağıdaki gibi olur.

$$L=f(x_1,x_2,...,x_n)-\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[g_i(x_1,x_2,...,x_n) - b_i \right]$$

Kısaca belirtmek gerekirse ;

Verilen f ve g_i , x_j (j=1,2,...,n) nin n tane karar değişkenli fonksiyonlar olmak üzere Lagrange çarpım fonksiyonu :

$$L = f - \sum_{i=}^{m} \lambda_i (g_i - b_i)$$

Bu durumda

m: Kısıtlayıcıların sayısı

λ_i: Lagrange çarpanıdır. (i=1,2,...,m)

Karush-Kuhn-Tucker şartları nonlineer bir problemin bir Lagrange çarpanı olarak açık biçimde ifade edilmesini ve x_j (j=1,2,...,n) ve λ_i (i=1,2,...,m) ye göre türevlerine sahip olmasını kabul eder. Örneğin, iki karar değişkenli ve iki kısıtlayıcılı genel bir problem ;

Amaç fonksiyonu

$y=f(x_1,x_2)$

Kısıtlayıcıları

$g_1(x_1,x_2) \leq b_1$

$g_2(x_1,x_2) \leq b_2$

ve pozitif kısıtlaması da

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ olup bunun Lagrange ifadesi

$L=f(x_1,x_2) - \lambda_1 (g_1(x_1,x_2) - b_1) - \lambda_2 (g_2(x_1,x_2) - b_2)$

şeklindedir.

Lagrange ifadesinin çözümüne klasik yaklaşım, aşağıdaki denklemlerin birlikte çözülmesini gerektirir.

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=0 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2}=0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1}=0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2}=0$$

Önceki ifadede verilen Karush-Kuhn-Tucker şartları, optimal çözüm için adaylar elde etmeyi aşağıdaki biçimde sağlamalıdır.

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}=\frac{\partial f}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \qquad (j=1,2,...,n)$$

ise

$$x_j^*\left(\frac{\partial L}{\partial x_j}\right)=0 \text{ , } (j=1,2,...,n) \qquad (1a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}\leq 0 \text{ , } \qquad (j=1,2,...,n) \qquad (1b)$$

$$\lambda_i\left[g_i\left(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*\right)-b_i\right]=0, \qquad (i=1,2,...,m) \qquad (2a)$$

$$g_i\left(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*\right)-b_i\leq 0 \qquad (i=1,2,...,m) \qquad (2b)$$

bütün $x_j^*\geq 0,\lambda_i\geq 0$ (3)

dır.

Yukarıdaki şartlar aşağıdaki biçimde yeniden izah edilmiştir.

Eğer $x_j^*>0$, ise $\frac{\partial L}{\partial x_j}=0$ $(j=1,2,\ldots,n)$ (1a)

Eğer $x_j^*=0$, ise $\frac{\partial L}{\partial x_j}\leq 0$ $(j=1,2,\ldots,n)$ (1b)

Eğer $\lambda_i>0$, ise $g_i(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)-b_i=$ $(i=1,2,\ldots,m)$ (2a)

Eğer $\lambda_i=0$, ise $g_i(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)-b_i\leq 0$ $(i=1,2,\ldots,m)$ (2b)

Bütün $x_j^*\geq 0$, $\lambda_i\geq 0$ (3)

Burada dikkat etmek gerekir ki $\frac{\partial L}{\partial x_j}$ için gereklilikler yukarıda verilen $\frac{\partial y}{\partial x_j}$ için de temelde aynıdır. Ayrıca dikkat etmek gerekir ki Lagrange fonksiyonu $g_i \leq b_i$ den $\lambda_i(g_i - b_i)$ ye formule edildiğinde eşitsizlik geçici olarak eşitlik olarak kabul edilebilir. Şayet λ_i nin çözüm değeri pozitif ise $(\lambda_i > 0)$ bu gösterir ki çözüm I sınırlayıcıları tarafından sınırlanır ve böylece eşitlik kabul edilebilir. Şayet $\lambda_i = 0$ ise $(g_i - b_i)$ terimi sıfırdan küçük yada sıfıra eşit alınmalıdır $(g_i \leq b_i)$.Böylece Karush-Kuhn-Tucker şartları $[(2a)$ ve $(2b)]$ herbir i kısıtlayıcısı tarafından ayrılmıştır.

Bağlayıcı sınırlama (sınır nokta optimizasyon) $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ için $\lambda_i > 0$ olduğunda $g_i - b_i = 0$ (yani $g_i = b_i$) olur. Bağlayıcı olmayan kısıtlama (iç nokta optimizasyon) ise $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ için $\lambda_i = 0$ olduðunda $g_i - b_i \leq 0$ (yani $g_i \leq b_i$) olur.

λ_i nin ekonomik yorumu lineer programlamanın dual değişkenlerine benzerdir ve bu λ_i , Lagrange çarpanları olarak ifade edilebilir. Bu da $\frac{\partial f^*}{\partial b_i} = \lambda_i$. olarak gösterilebilir.[12]

Karush-Kuhn-Tucker şartlarının sağlanması aynı zamanda optimal çözüm için sadece kabul edilebilir adayları sağlar. Adaylar genel optimal çözümü gerçekleştirmekten ziyade bu durumda değerlendirilmiş olmalıdır.

Bu durum, $\frac{dy}{dx} = 0$ çözümü bir adayı sağlamak üzere tek karar değişken durumuna benzerdir.Bu halde $\frac{dy}{dx} = 0$ x^* i sağlaması durumunda *y=f(x)* in konkav olduğu bilinmeksizin genel optimal çözümü göstermek için bölgenin sınırı

---

[12] Sang M. Lee, Laurence J.Moore, Bernard W.Taylor s:812

hesaba katılmış olması gerekir. Bu düşünce bizi Karush-Kuhn-Tucker şartlarının aşağıdaki genişlemesine götürür.

Şayet $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ konkav bir fonksiyon ve $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i=1,2,...,m için konveks ise Lagrangian fonksiyonu kullanılarak elde edilen sonuçlar bir optimal çözümü sağlıyorsa bu durumda Karush-Kuhn-Tucker şartları sağlanacaktır. Örneğin amaç fonksiyonu bir kuadratik koni fonksiyonu olarak biliniyorsa bütün kısıtlayıcılara göre (verilen bir konveks mümkün çözüm yüzeyi) şartların sağlanması optimal çözümü verecektir. Mevcut olan bu tabii sonuç Kuhn ve Tucker tarafından geliştirilmiştir. (bkz.Konvekslik ve Konkavkık)

Özet olarak, Karush-Kuhn-Tucker şartları gereklidir fakat genelde yeterli değildirler. Buna da ilaveten bu şartlar optimallik için sadece bir test sağlar ve çözümün bulunması için bir muamele değildir.

I.2.9.Doğrusal Olmayan Programlama Modelinin UygulamaGüçlükleri.

Genel olarak doğrusal olmayan programlama modellerinin, hem modelin oluşturulması hem de çözümünde lineer programlamaya kıyasla çeşitli güçlükleri vardır. Bunlardan önemli olan birkaç tanesini şu şekilde sıralayabiliriz.

1) Doğrusal olmayan programlama modelinin oluştırılması aşamasında, amaç fonksiyonuna ait parametrelerin belirlenmesinde doğrusal programlamaya göre daha fazla çaba ve dikkatin gösterilmesi gerekir. Çünkü doğrusal olmayan programlama modelinde amaç fonksiyonu fonksiyonel özellik göterir ve bu özellik işletme amacına göre araştırmacı tarafından tam olarak belirlenmelidir.

2) Doğrusal olmayan kısıtlayıcıların olması halinde, bu kısıtlayıcılar ile amaç fonksiyonunu bir arada düşünerek bir model kurma ihtiyacı vardır. Halbuki lineer programlamada model, yanlızca doğrusal sınır şartları üzerine kurulur çıkan sonuçlar doğrusal amaç fonksiyonunda kullanılırdı.

3) Doğrusal olmayan programlama modelinde veri ihtiyacı hem çok fazla hem de çok çeşitli olmak zorundadır. Halbuki lineer programlamada-duruma göre- bir çeşit mamulle bile çalışılabilir.

4) Doğrusal olmayan programlama modelinin çözümünde, işlemlerin yapılması ve yorumlanması ileri düzeyde matematik bilgisi gerektirir

5) Yüksek dereceli nonlineer programlama modellerini çözecek genel bir çözüm tekniğinin olmaması ve bu tür modellerin herbirinin kendine özgü özel yaklaşımlar gerektirmesi araştırmacı için çok önemli bir güçlüktür.

6) Optimum çözüm noktasını bulmak için, doğrusal programlamada olduğu gibi, mümkün çözüm alanının değişik noktalarının amaç fonksiyonunda denenmesi imkanının olmaması da ayrı bir güçlüktür.

Bunların dışında daha birçok zorlukların sayılması mümkündür. Ancak daha önceleri de belirtildiği üzere gerçek hayat problemleri daha çok nonlineer olduğundan bu modele duyulan ihtiyaç açıkça ortadadır. Matematik programlama üzerine çalışan, bilim adamlarının bu konuya ya hiç yer vermemesi ya da kısaca geçiştirmesi bu saha için bir kayıp olmakla birlikte ülkemizde bu konuyla ilgili çalışmaların az da olsa mevcut olması sevindiricidir.

I.2.10.Nonlineer Maksimizasyon Problemi

Daha önce de belirtildiği gibi nonlineer programlama problemlerini kesin olarak çözecek bir metot mevcut değildir. Ancak klasik hesaplama yöntemi, simpleks yöntem gibi çeşitli metotlar geliştirilmiştir. Tezin asıl konusu olan kuadratik programlama problemlerinde, çeşitli avantajları da düşünülerek simpleks metot kullanılacaktır. Burada, hem anlatılan nonlineer programlamaya bir örnek olması hem de simpleks metotla mukayese etmeye imkan sağlaması amacıyla klasik hesaplamayla bir örnek problem çözümü verilecektir.

Aşağıdaki nonlineer maksimizasyon problemini düşünelim.

Amaç fonksiyonu

$$max\ y = 8x_1^2 + 2x_2^2$$

Kısıtlayıcılar

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 9$$

Pozitif kısıtlama is

$$x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0$$

olarak verilmiş olsun. Bunun Lagrangian ifadesi

$$L = 8x_1^2 + 2x_2^2 - \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 9)$$

elde edilir. Buna göre Karush-Kuhn-Tucker şartları aşağıdaki biçimde düzenlenebilir.

a) $x_1^* > 0$ için

b) $x_2^* > 0$ için

c) $\lambda > 0$ için

d) $x_1^* = 0$ için

e) $x_2^* = 0$ için ve

f) $\lambda = 0$ için

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 16x_1 - 2\lambda x_1 = 0 \;,\; x_1^* > 0 \quad \text{için} \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 4x_2 - 2\lambda x_2 = 0 \;,\; x_2^* > 0 \quad \text{için} \qquad \text{(b)}$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0 \;,\; \lambda > 0 \quad \text{için} \qquad \text{(c)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 16x_1 - 2\lambda x_1 \le 0 \,,\; x_1^* = 0 \quad \text{iç in} \qquad \text{(d)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 4x_2 - 2\lambda x_2 \le 0 \,,\; x_2^* = 0 \quad \text{iç in} \qquad \text{(e)}$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 9 \le 0 \,,\; \lambda = 0 \quad \text{iç in} \qquad \text{(f)}$$

Karush-Kuhn-Tucker şartlarının bu muhakemesi x_j ve λ_i nin çözüm değerleri, $x_j > 0$ veya $x_j = 0$ ve $\lambda_i > 0$ veya $\lambda_i = 0$ ile ayrılmıştır. Böylece genel olarak bir nonlineer programlama probleminin n karar değişkenli ve m kısıtlayıcılı herhangi bir Lagrangian formülü çözümün 2^{m+n} mümkün konbinasyonu olarak elde edilir. (Yani n karar değişkeni x_j hem sıfır hemde sıfır olmayan ve m Lagrange çarpanı λ_i hem sıfır hemde sıfır olmayandır). Böylece verilen problemin çözüm değeri için 2^3=8 tane x_1 ,x_2 ve λ konbinasyonu dikkate alınmalıdır.

Bu durum aşağıdaki gibi özetlenmiştir

Durum	x_1	x_2	λ	Karush-Kuhn-Tucker şartlarını sağlamalı
1	=0	=0	=0	(d), (e), (f)
2	=0	=0	>0	(d), (e), (c)
3	=0	>0	=0	(d), (f), (f)
4	>0	=0	=0	(a), (e), (f)
5	=0	>0	>0	(d), (b), (c)
6	>0	=0	>0	(a), (e), (c)
7	>0	>0	=0	(a), (b), (f)
8	>0	>0	>0	(a), (b), (c)

Optimal çözüm için aday gibi olan sıralı çözüm durumları için Karush-Kuhn-Tucker şartları tablonun sağ kolonuna notedilen şıkları sağlamalıdır. Şartlar uygun çözüm değerleri yerine konularak tesdedilmiştir.

1. Durum x_1=0 , x_2=0 , λ=0

Şartlar	Test	Sonuç
(d)	$0 \leq 0$	Tamam
(e)	$0 \leq 0$	Tamam
(f)	$-9 \leq 0$	Tamam

Hiçbir gerekli şart için bu durum ihlal edilmedi. Böylece teorik olarak bu optimal çözüm için bir adaydır. Binaenaleyh bu, maksimizasyon problem için mantıklı bir seçim değildir.

Bu durum, bir çözüm için bütün mümkün kombinasyonların testi anlatılarak takdim edilmiştir.

2. Durum x_1=0 , x_2=0 $\lambda > 0$

Şartlar	Test	Sonuç
(d)	$0 \leq 0$	Tamam
(e)	$0 \leq 0$	Tamam
(c)	-9=0	Doğru değil (bozulma var)

(c) şartı ihlal edilmiştir, $x_1^2 + x_2^2 - 9$ yada $(0)^2 + (0)^2 - 9$ açıkça sıfıra eşit değildir.Önceden sunulan Lagrange çarpanı hatırlayalım ki λ bir pozitif değer aldığı zaman çözüm sınırlayıcılar tarafından tahdit altına alınmıştır. Bu durum için x_1 ve x_2 sıfır olduğundan sınırlayıcılar bağlayıcı değildir.

Tekrar bu durum, bütün mümkün durumların testini tanımlamak için verilmiş olsun. Normalde bu konbinasyon formal bir test yapmaksızın dikkatli bir bakmayla çıkarılmıştır.

3.Durum x_1=0, $x_2 > 0$, λ=0

Dikkat ediniz ki λ=0 olduğunda $x_2 > 0$ için x_1=0 ile bir iç çözüm ifade eder. x_2 için bir iç çözüm işaret eder ki çözüm sınırlayıcılar tarafından hudutlanmamıştır. (d), (b) ve (f) şartları testedilmelidir. x_1=0 için (d) şartı başlıyor. $16x_1 - 2\lambda x_2 = 0$ ki bu $16x_1 - 2\lambda x_2 \leq 0$ gerekliliğini sağlamalıdır. Şart (b) için;

$$4x_2 - 2\lambda x_2 = 0 \Rightarrow x_2(4 - 2\lambda) = 0$$

$x_2 > 0$ olduğundan $4 - 2\lambda = 0$ olmalıdır.Buradan $\lambda = 2$ bulunur. Bu da λ nın sıfır olması tahminini bozar.

(f) şartı için, $x_1^2 + x_2^2 - 9 \leq 0$ yada $x_2^2 - 9 \leq 0$ veya $x_2^2 \leq 9$. $\lambda > 0$ olduğundan bir sınır çözüm alınır, böylece x_2 nin çözüm değeri 3 tür.

Aşağıda 3. durumun bir özeti verilmiştir.

Şartlar	Test	Sonuç
(d)	$0 \leq 0$	Tamam
(b)	$\lambda = 2$	$x_2 > 0$ iç in$4x_2 - 2\lambda x_2 = 0$ da bozulma
(f)	$(3)^2$-$9 \leq 0$	Tamam

4. Durum $\quad x_1 > 0,\ x_2 = 0,\ \lambda = 0$

3. durumda olduğu gibi, $x_1 > 0,\ x_2 = 0,\ \lambda = 0$ olmasıyla bir iç sonuç anlamına gelir. Benzer sonuçları (a) şartı için de bulabiliriz.

$16x_1 - 2\lambda x_1 = 0 \Rightarrow x_1(16 - 2\lambda) = 0$

$x_1 > 0$ için $16 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 8$ manasına gelir ki, bu da $\lambda = 0$ tahminini bozar.

Şartlar	Test	Sonuç
(a)	$\lambda = 8$	$16x_1 - 2\lambda x_1 = 0$ da bozulma
(e)	$0 \leq 0$	Tamam
(f)	$(3)^2$-$9 \leq 0$	Tamam

5.Durum $\quad x_1 = 0\ , x_2 > 0, \lambda > 0$

Bu durum, $x_2 > 0$ ile $x_1 = 0$ için ($\lambda > 0$) bir sınır çözümü kabul eder. $x_1 = 0$ ve $x_2 > 0$ için 3. durum testedilecek olursa bu durum için sonucu kolayca gösterebiliriz.

Şartlar	Test	Sonuç
(d)	$0 \le 0$	Tamam
(b)	$\lambda = 2$	$4x_2 - 2\lambda x_2 = 0$ ve $x_2 > 0$ iç in Tamam
(c)	x_2=3	$x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0$ iç in Tamam. $\lambda = 2$ ve
		x_1=0, $x_2^2 = 9 \Rightarrow x_2 = 3$

Böylece 5. durum optimal çözüm için bir adaydır.

6.Dururm $x_1 > 0, \;\; x_2 = 0, \;\; \lambda > 0$

Tekrar 4. durumun testine dönebiliriz. Burada $x_1 > 0$ ve $x_2 = 0$ idi. (a) şartı için $16x_1 - 2\lambda x_1 = 0, x_1 > 0$ ve $\lambda = 8$ dir. (e) şartı için $4x_2 - 2\lambda x_2 \Rightarrow 0 \le 0$ (Tamam). (c) şartı için $x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0 \Rightarrow x_1^2 - 9 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$ olur.

Şartlar	Test	Sonuç
(a)	λ=8	Tamam
(e)	$0 \le 0$	Tamam
(c)	x_1=3	Tamam

6. durum, optimal çözüm için mümkün bir aday elde eder.

7.Durum $x_1 > 0, \;\; x_2 > 0, \;\; \lambda = 0$

7. durum için (a), (b) ve (f) şartlarını uygulayalım. (a) nın testedilmesi ile $16x_1 - 2\lambda x_1 = 0 \;\; \Rightarrow \lambda$=8 elde edilir ki bu λ=0 durumu için bir bozulmadır. (b) şartı ile

$4x_2 - 2\lambda x_2 = 0 \Rightarrow \lambda$=2 elde edilir ki bu da λ=0 şartının bir ihlalidir. (f) şartı için $x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0$, $x_1 > 0, x_2 > 0$ için bir bozulma sözkonusu değildir.

Şartlar	Test	Sonuç
(a)	λ=8	$16x_1 - 2\lambda x_1 = 0$ da bozulma
(b)	λ=2	$4x_2 - 2\lambda x_2 = 0$ da bozulma ($\lambda \neq 8, \lambda \neq 2$)
(f)	$x_1^2 + x_2^2 = 9$	Tamam

8.Durum $\quad x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ \lambda > 0$

Bu durum hem x_1 in hem de x_2 nin sıfır olmadığını, $\lambda > 0$ iken sınırlayıcılar tarafından oluşturulmuş sınırda optimal çözümü kabul eder.Testin elde edilmesi aşağıdadır.

Şartlar	Test	Sonuç
(a)	$\lambda = 8$	Bozulma
(b)	λ=2	Bozulma
(c)	$x_1^2 + x_2^2 = 9$	Tamam

x_1, x_2 ve λ mümkün çözüm değerlerinin sekiz konbinasyonunun testedilmesinden sonuçlanan adaylar aşağıdaki gibi değerler alacak şekilde özetlenebilir.

Durum	x_1, x_2, λ	K.K.Tucker Şarlarının Sonuçları	Çözüm değeri (y)
1	(0 ,0 , 0)	x_1=0, x_2=0, λ=0 için tamam	y=0
2	(0 ,0 ,0)	Bozulma	Kabul edilmedi
3	(0 ,>0 ,0)	Bozulma	Kabul edilmedi
4	(>0 ,0 ,0)	Bozulma	Kabul edilmedi
5	(0 ,>0 ,>0)	x_2=3, λ=2, x_1=0 için tamam	y=2(3)^2=18
6	(>0, 0 ,>0)	x_1=3, λ=8, x_2=0 için tamam	y=8(3)^2=72
7	(>0,>0, 0)	Bozulma	Kabul edilmedi
8	(>0, >0, >0)	Bozulma	Kabul edilmedi

Böylece, problem sağlanan Karush-Kuhn-Tucker şartlarını (1,5 ve 6) kabul eder ve çözüm için verilenler $x_1^* = 3$, $x_2^* = 0$ ve $\lambda = 8$ ile birleşik çözüm $y^* = 72$ dir. λ nın yorumu $\frac{\partial y}{\partial b_i}$ dir: b$_i$ deki artma için y deki değişme oranı (kısıtlayıcılardaki eşitliğin sağ tarafı). Örneğin, geçerli kısıtlayıcı $x_1^2 + x_2^2 \leq 9$ $x_1^2 + x_2^2 \leq 10$'a değiştirilseydi x_1^* için çözüm değeri $\sqrt{10}$, x_2^*=0 olurdu. Bu değerleri orjinal eşitlikte yerine koyalım.

$$y = 8x_1^2 + 2x_2^2 = 8x_1^2 = 8\sqrt{(10)^2} = 80$$

y nin bu değerinin önceki değerden daha büyük olduğuna dikkat edilmelidir. Ekonomik yorum lineer programlamanın dual değerlerine benzerdir.[13]

[13] M.Lee Sang, J.Moore Laurance, W.Taylor Bernard:818

Daha karmaşık problemler için (daha çok karar değişkenli yada daha çok kısıtlayıcılı) Karush-Kuhn-Tucker şartlarından daha önceki örnekte belirtildiği gibi direkt olarak optimal sonuçları elde etmek oldukça zor ve verimsiz olurdu. Bu şartlar, bununla birlikte adaylar için optimal çözüm olarak testedilen muhtemel sonuçlar için gerekli bilgileri sağlar. Yüksek teknolojili bilgisayarlar yardımıyla daha kompleks problemler, kısmi sayılan işlemle incelenebilir.

Eşit düzeydeki önemlilik, Karush-Kuhn-Tucker şartları, nonlineer problem için uzmanlaşılan algoritmaların gelişmesi, teorik olarak anlaşılması gerekliliğini sağlar.

I.3. KUADRATİK PROGRAMLAMA MODELİ

I.3.1. Kuadratik Programlama Modelinin Genel Yapısı.

Kuadratik programlama, amaç fonksiyonu ikinci dereceden (=kuadratik) polinom ve kısıtlayıcı şartları lineer olan bir nonlineer programlama tipidir. Bu tanımdan da anlaşılacağı üzere kuadratit programlama, nonlineer programlamanın özel bir sınıfıdır. Kuadratik programlamayı doğrusal programlamadan ayıran tek şart amaç fonksiyonunun ikinci dereceden (=kuadratik) bir polinom olmasıdır.

Doğrusal kısıt şartları ile ikinci dereceden (kuadratik) amaç fonksiyonlu bir problem, Karush-Kuhn-Tucker şartlarının formülasyonu ile bir lineer programlama problemine indirgenebilir. Karush-Kuhn-Tucker şartlarının bu formülasyonu çözümün simpleks metoduyla yapılmasını mümkün kılar.

Kuadratik programlama probleminin çözümünün simpleks metodu ile yapılması, bu özel durum için, problem formülasyonunda çeşitli modifikasyonlar gerektirir.

(1a) ve (1b) de verilen Karush-Kuhn-Tucker şartlarını hatırlayalım.

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 , \quad x_j^* > 0 \quad \text{için} \qquad (1a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} \leq 0 , \quad x_j^* = 0 \quad \text{için} \qquad (1b)$$

Bu şartlar basitçe, bütün x_j^* ler için $\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0$ şeklinde ifade edilebilir. Bununla berabe, negatif olmayan gerektirmeyi içermesi için Lagrange çarpanları içerisine ek terimler ilave edilir ve böylece (1a) ve (1b) deki modifikasyona mümkün hale getirilir[13] .

[13] M.Lee Sang, J..Moore Laurance, W.Taylor Bernard:819

I.3.2. Kuadratik Programlamanın Matematik Yapısı

Bir kuadratik programlama problemi;

$$Z_{\max} = \sum_{i=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{jk} \cdot x_j \cdot x_k$$

amaç denklemini,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + S_i = b_i \qquad (i=1,2,...,m)$$

kısıtlayıcı şartlarını ve

$$x_j, S_i \geq 0$$

da pozitiflik şartını göstermek üzere verilebilir.Burada x_{n+i} aylak değişkenleri yerine S_i ler kullanılmıştır. Problem matris notasyonları kullanılarak;

$$Z_{\max} = \mathbf{C_1 X + X^T C_2 X}$$

$$\mathbf{AX \leq b}$$

$$\mathbf{X \geq 0}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada ;

$\mathbf{X}=(x_1,x_2,...,x_n)^{\mathbf{T}}$,

$\mathbf{C}_1=(c_1,c_2,...,c_m)$,

$\mathbf{b}=(b_1,b_2,...,b_m)$,

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & ..... & a_{1n} \\ & .... & \\ & .... & \\ a_{m1} & .... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$C_2=\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots\cdots & c_{1n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ c_{m1} & \cdots\cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

dir.Kuadratik formlardan hatırlanacağı üzere $\mathbf{X}^T\mathbf{C}_2\mathbf{X}$ ifadesi bir kuadratik form göstermektedir ve $\mathbf{C}_2$ simetrik bir matris olarak yazılabilecektir. Ele alınan problem maksimize edilecekse $\mathbf{C}_2$ matrisinin negatif tanımlı, minimize edilecekse pozitif tanımlı olması gerekir.Yani minimizasyon durumunda Z tam konveks, maksimizasyon durumunda ise tam konkav olmalıdır.

Burada problem maksimizasyon formda verilmiştir. $\mathbf{AX}\leq\mathbf{b}$ yerine $\mathbf{AX}\geq\mathbf{b}$ alınarak kolayca minimizasyon durumuna uyarlanabilir[14] .

Karush-Kuhn-Tucker şartlarının formülasyonu iki değişkenli (x_1,x_2) genel problemler için aşağıdaki biçimde açıklanabilir.

Amaç fonksiyonu;

$$\max y=f(x_1,x_2)$$

Kısıtlayıcılar;

$$g(x_1,x_2)\leq b_1$$

Pozitif kısıtlama

$$x_1\geq 0,\quad x_2\geq 0\text{ , ise }-x_1\leq 0\text{ , }x_2\leq 0$$

olmak üzere yeniden aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

---

[14] Tulunay 1987:576

Amaç fonksiyonu

$$\max y = f(x_1, x_2)$$

Kısıtlayıcılar;

$$g_1(x_1, x_2) - b_1 \leq 0$$

$b_1(x_1) \leq 0$; $(b_1(x_1) = -x_1)$ $b_2(x_2) \leq 0$; $(b_2(x_2) = -x_2)$

olmak üzere

Lagrange ifadesi aşağıdaki gibi verilir.

$$L = f(x_1, x_2) - \lambda_1[g_1(x_1, x_2) - b_1] - \mu_1[b_1(x_1)] - \mu_2[b_2(x_2)]$$

Eğer $f = f_1(x_1, x_2)$ ve $g_1 = g_1(x_1, x_2)$ alınırsa,

$b_1(x_1) = -x_1$ ve $b_2(x_2) = -x_2$ olduğundan Lagrange ifadesi aşağıdaki şekilde yazılır.

$$L = f - \lambda_1(g_1 - b_1) + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$$

Burada ;

$\lambda_1 = g_1$ için Lagrange çarpanı (orjinal problem kısıtlayıcısı)

$\mu_1 = b_1$ için Lagrange çarpanı (x_1 için negatif olmama şartı)

$\mu_2 = b_2$ için Lagrange çarpanı (x_2 için negatif olmama şartı) dır.

Böylece Karush-Kuhn-Tucker şartları aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \mu_1 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \mu_2 = 0 \qquad (2)$$

$$g_1 - b_1 \leq 0 \qquad (3)$$

$$\lambda_1(g_1 - b_1)=0 \tag{4}$$

$$\mu_1 x_1 = 0 \tag{5}$$

$$\mu_2 x_2 = 0 \tag{6}$$

$$x_1, x_2, \lambda_1, \mu_1, \mu_2 \geq 0 \tag{7}$$

(3) şartı daha sonra aylak değişken s_1 kullanılarak eşitliğe dönüştürülür ve

$$g_1 - b_1 + s_1 = 0 \tag{3}$$

olur. $g_1 - b_1 = -s_1$ olduğundan bu (4) şartında yerine yazılarak

$\lambda_1(g_1 - b_1) = \lambda_1(-s_1) = \lambda_1 s_1$ olur:

$$\lambda_1 s_1=0 \tag{4}$$

Böylece, genelde n karar değişkenli ve m kısıtlayıcılı kuadratik (=ikinci dereceden) programlama problemi için Karush-Kuhn-Tucker şartları

(1) ve (2) den $\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} + \mu_j = 0$ (j=1,2,...,n) (a)

(3) den $g_i - b_i + s_i = 0$ (i=1,2,...,m) (b)

(4) den $\lambda_1 s_1=0$ (i=1,2,...,m) (c)

(5) ve (6) dan $\mu_j x_j = 0$ (j=1,2,...,n) (d)

(7) den tüm $x_j, \lambda_i, \mu_j, s_i \geq 0$ (e)

ile verilir.

(a) ve (b) şartları lineerdir, halbuki (c) ve (d) şartları lineer değildir. Bununla beraber bu genel problem , eğer (a) ve (b) deki lineer denklemler simpleks tablosunda içerilirse ve herhangi bir i için hem λ_i hemde s_i aynı anda temel değişken değilseler ve hem μ_j hemde x_j herhangi bir j için aynı anda temel değişken değilseler bu genel problem simpleks metodu ile çözülebilir.

Başlangıc temel çözüm formuna son gerektirme, (a) dan elde edilen tüm lineer ifadelere suni değişkenler eklemektir. Bu denklemler daha sonra suni değişken terimlerine göre çözülür.

I.3.3. Kuadratik Programlama Modelinin Çözüm Yöntemleri

Bu kısımda kuadratik programlama modelinde kullanılan klasik hesaplama yöntemi, simpleks yöntem ve Karush-Kuhn-Tucker şartlarına bağlı sımpleks yötemi verilecektir.

I.3.3.1. Klasik Hesaplama Yöntemi

Doğrusal olmayan programlama problemlerinin çözümünde klasik optimizasyon teknikleri kullanılmaz demek fazla abartı olmaz. Ancak doğrusal olmayan programlama problemlerinin çözümünde bazı cebirsel yöntemlerin kullanıldığı da doğrudur. Ne varki bu yöntemler genellikle daha verimli bir işlevin alt grubunu oluşturmaktadırlar.

Klasik hesaplama yönteminin bu tür problemlere uygulamasının birçok zorlukarı olduğunu belirtmekle beraber bu tür problemlere uygulanışı aşağıdaki şekilde verilebilir.

1) Amaç fonksiyonunun bütün sabit noktalarının belirlenmesi. Önce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fonksiyonunun herbir bilinmeyen x_j değeri için kısmi türevleri alınır ve her bir türev sıfıra eşitlenerek çözülür. Bu eşitlikleri sağlayan noktalar tespit edilir.

Yani $$\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_j} = 0 \qquad j=1,2,\ldots,n$$

fonksiyonunun diferansiyellenebilir olması gerekir.Ayrıca yüksek dereceli doğrusal olmayan fonksiyonların türevleri alınırken zorluklarla karşılaşılabilir.

2) Çözümden elde edilen noktaların yerel maksimum, yerel minimum, dönüm noktası (eğer noktası) yada "saddle point" (ikiden fazla değişken için) mi

oldukları belirlenir. Yerel maksimum yada minimum noktalarının belirlenmesinde konkavlık ve konvekslik testinin yapılması gerekecektir. Bu amaca yönelik olmak üzere Hessian matrisi oluşturulur.*

3) Bütün yerel maksimumlar yada minimumlar bulunduktan sonra tüm kısıtlayıcıların sağlanması şartıyla mutlak maksimum yada mutlak minimum bir anlamda optimum çözüm olur.

4) Sınırlandırılmış bir problemde optimum çözüm uygun çözüm alanının dışında da olabilir.

Özellikle çok değişkenli fonksiyonlarda mutlak maksimum yada minimumun bulunması problemi oldukça karmaşık hale getirecektir. Hasılı optimizasyon teoride bu metodu kullanmak pekte optimum (en iyi) karar olmaz.

Şimdi nonlineer programlama dolayısıyla konumuzu teşkil eden kuadratik programlama için şimdiye kadar bulunan çözüm metotları içerisinde eniyisi (optimumu) olan simpleks metot verilecektir.

I.3.3.2. Simpleks Yöntemi

Simplek yötemin kuadratik programlamaya uygulanması, doğrusal programlamaya uygulanmasından pek farklı değildir. Burada izlenen yöntem, temelde Karush-Kuhn-Tucker şartlarına dayanan modeli doğrusallaştırmak ve sonra da simpleks yöntemi uygulamaktır.

Simleks yöntem amaç fonksiyonunu maksimum yada minimum yapacak en iyi çözüme adım adım yaklaşan bir hesaplama metodudur. Bu nedenle, probleme bir uç noktasından başlayarak optimuma daha yakın bir ikincisine oradan bir üçüncüsüne ve bu şekilde devam ederek en iyi çözümü veren noktaya yaklaşmayı sağlar[15].

Kuadratik programlama modelinin sipleks çözümü için izlenen yöntem aşağıdaki gibi verilebilir.

---

* Kısmi türevler yardımıyla Hessian matrisi ve asal minörlerinin oluşturulması kesim I.2.4. Konkavlık ve Konvekslik te verilmiştir.

[15] Esin 1984:103

1) Kuadratik programlama modelinin Lagrange ifadesi yazılımı.

2) Ek kısıtlayıcı şartların oluşturulması. Bu aşamada Lagrange fonksiyonunun karar değişkenlerine ve Lagrange çarpanlarına göre kısmi türevleri bulunur. Bulunan kısmi türevlerden karar değişkenlerine ilişkin olanlar ≤ 0, Lagrange çarpanlarına ilişkin olanlar ≥ 0 şeklinde birer kısıtlayıcı denklem olarak modele eklenir.

3) Modelin asıl kısıtlayıcıları ve bulunan yeni kısıtlayıcılar eşitlik haline getirilir. Bu işlem aylak, artık ve yapay değişkenler yardımıyla gerçekleştirilir.

4) Eşitlik haline dönüştürülen kısıtlayıcılar başlangıç simpleks tablosuna yerleştirilir. Burada dikkat edilecek konu boş değişkenlere (minimize yada maksimize edilecek) fonksiyona bağlı olarak (M) ve (-M) değerleri verilerek tüm diğer değişkenlerin katsayıları sıfır değerini alır. Boş değişkenler çözümden çıkartılana kadar işleme devam edilir. Çözüme giren değişkenler son tablodan okunur ve optimum amaç fonksiyon, esas kuadratik amaç fonksiyonuna çözüm değişkenlerinin konulması ile elde edilir.

I.3.4. Kuadratik Programlama Problemleri

Burada simpleks yöntemin uygulaması yapılarak daha iyi anlaşılması ve kuadratik programlama problemlerinin çözümüne örnek teşkil etmesi bakımından örnek problem çözülecektir.

Ayrıca unutulmaması gerekir ki amaç fonksiyonunun konkav olması ile Karush-Kuhn-Tucker şartları, maksimizasyon problemine optimum bir çözüm sağlar. Amaç fonksiyonu konveks ise aynı şartlar minimizasyon problemine optimum bir çözüm sağlar.

Dolayısıyla denebilir ki Karush-Kuhn-Tucker şartları sağlanmadan optimum bir çözüm bulunamaz.

Örnek 1. Amaç fonksiyonu;

$$Z_{\max} = f(x,y) = 4x + 4y - xy - x^2 - y^2 + 5$$

Kısıtlayıcılar;

$$x + 2y \leq 12$$

Pozitif kısıtlama;

$$x, y \geq 0$$

olan kuadratik programlama probleminin simpleks yöntemle optimum çözümünü bulunuz.

Çözüm: Problem maksimizasyon problemi olduğu için ilk adımda amaç fonksiyonunun konkavlık testinin yapılması gerekir. Amaç fonksiyonu konkav ise Karush-Kuhn-Tucker şartları optimum çözüm elde edileceğini garanti eder. Amaç fonksiyonu konveks ise Karush-Kuhn-Tucker şartları maksimizasyon problemde optimum çözümü garanti edemez.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1$$

Buna göre ;

$\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$ ifadesinden

Δ =(-2).(-2)-(-1)^2 olup Δ =3 ve dolayısıyla $\Delta > 0$ bulunur.

$\Delta > 0$ ve ikinci dereceden kısmi türevler negatif olduğu için amaç fonksiyonu konkavdır. Karush-Kuhn-Tucker şartları optimum çözümü sağlar.

$g(x,y) = x + 2y - 12 \leq 0$ yazılır ve (λ) Lagrange çarpanı aracılığı ile amaç fonksiyonuna katılırsa Lagrangian ifadesi

$$L = f(x,y) - \lambda g(x,y) = 4x + 4y - xy - x^2 - y^2 + 5 - \lambda(x + 2y - 12)$$

olur. Buradan gerekli kısmi türevler alınıp sıfıra eşitlenerek

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4 - y - 2x - \lambda = 0 \Rightarrow 2x + y + \lambda = 4 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 4 - x - 2y - 2\lambda = 0 \Rightarrow x + 2y + 2\lambda = 4 \qquad (2)$$

yeni sınır şartları elde edilir. Karush-Kuhn-Tucker şartlarından elde edilen bu yeni sınır şartlarıyla problemin sınır şartları aşağıdaki biçimi alır.

$$2x + y + \lambda = 4$$

$$x + 2y + 2\lambda = 4$$

$$x + 2y \leq 12$$

Doğrusal olan bu sınır şartlarına (=) hali için (+1) katsayılı boş değişkenlerin amaç fonksiyonundaki katsayıları (-M) ve ($\leq$) hali için (+1) katsayılı fiktif değişkenlerin amaç fonksiyonundaki katsayıları (0) alınarak simpleks tablo hazırlanır. Boş değişkenler çözümden çıkarılana kadar işleme devam edilir.

1. ve 2. eşitliklere sırasıyla A_1 ve A_2 boş değişkenleri, 3. eşitsizliğe S_1 fiktif değişkeni katılarak ilk simpleks tablo aşağıdaki gibi olur.

	C_j	0	0	0	0	-M	-M	
		x	y	λ	S_1	A_1	A_2	
-M	A_1	2	1	1	0	1	0	4
-M	A_2	1	$\boxed{2}$	2	0	0	1	4
0	S_1	1	2	0	1	0	0	12
	Z_j	-3M	-3M	-3M	0	-M	-M	-8M
	C_j -Z_j	3M	3M	3M	0	0	0	

Çözüme girecek olan vektör y , çıkacak vektör ise A_2 dir. (pivot 2 dir)

$$y(A_2): \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{0}{2} \quad \frac{0}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{4}{2}$$

$$y: \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 2$$

<u>A_1 :</u>	<u>S_1 :</u>	<u>C_j-Z_j</u>
$2\text{-}1(\frac{1}{2})= \frac{3}{2}$	$1\text{-}2(\frac{1}{2}) = 0$	$3M\text{-}3M(\frac{1}{2})=\frac{3}{2}M$
1-1(1) = 0	2-2(1) = 0	3M-3M(1) =0
1-1(1) =0	0-2(1) = 0	3M-3M(1) =0
0-1(0) =0	1-2(0) = -2	0 - 3M(0) =0
1-1(0) =1	0-2(0) = 0	0 -3M(0) =0
$0\text{-}1(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$	$0\text{-}2(\frac{1}{2}) = -1$	$0 - 3M(\frac{1}{2})= -\frac{3}{2}M$
4-1(2) =2	12-2(2) =8	

	C_j	0	0	0	0	-M	-M		
		x	y	λ	S_1	A_1	A_2		
-M	A_1	$\boxed{\frac{3}{2}}$	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	2	←
-M	y	$\frac{1}{2}$	1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	2	
0	S_1	0	0	-2	1	0	-1	8	
	Z_j	$-\frac{3}{2}M$	0	0	0	-M	$\frac{1}{2}M$	-2M	
	$C_j - Z_j$	$\frac{3}{2}M$	0	0	0	0	$-\frac{3}{2}M$		
		↑							

$\underline{x(A_1)}$: $\quad \frac{3/2}{3/2} \quad \frac{0}{3/2} \quad \frac{0}{3/2} \quad \frac{0}{3/2} \quad \frac{1}{3/2} \quad \frac{-\frac{1}{2}}{3/2} \quad \frac{2}{3/2}$

x : $\quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{2}{3} \quad -\frac{1}{3} \quad \frac{4}{3}$

<u>y :</u>	<u>S_1 :</u>	<u>C_j-Z_j :</u>
$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1)=0$	$0-0(1)=0$	$\frac{3}{2}M-\frac{3}{2}M(1)=0$
$1-\frac{1}{2}(0)=1$	$0-0(0)=0$	$0-\frac{3}{2}M(0)=0$
$1-\frac{1}{2}(0)=1$	$-2-0(0)=-2$	$0-\frac{3}{2}M(0)=0$
$0-\frac{1}{2}(0)=0$	$1-0(0)=1$	$0-\frac{3}{2}M(0)=0$
$0-\frac{1}{2}(\frac{2}{3})=-\frac{1}{3}$	$0-0(\frac{2}{3})=0$	$0-\frac{3}{2}M(\frac{2}{3})=-M$
$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-\frac{1}{3})=\frac{2}{3}$	$-1-0(-\frac{1}{3})=-1$	$-\frac{3}{2}M-\frac{3}{2}M(-\frac{1}{3})=-M$
$2-\frac{1}{2}(\frac{4}{3})=\frac{4}{3}$	$8-0(\frac{4}{3})=8$	

	C_j	0	0	0	0	$-M$	$-M$	
		x	y	λ	S_1	A_1	A_2	
0	x	1	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
0	y	0	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
0	S_1	0	0	-2	1	0	-1	8
	$C_j - Z_j$	0	0	0	0	$-M$	$-\frac{3}{2}M$	

$x=\frac{4}{3}$, $y=\frac{4}{3}$, $S_1=8$ $Z_{max}=\frac{93}{9}$

İKİNCİ BÖLÜM

II. KUADRATİK PROGRAMLAMA MODELİNİN ULAŞ SÜT FABRİKASINA UYGULAMASI

II.1.İŞLETMEYİ TANITICI BİLGİLER

Ulaş süt fabrikası, Ulaş Süt Yoğurt San.Ticaret Limited Şirketine bağlı, süt ve süt ürünleri imalatı ve pazarlaması yapan bir fabrikadır. Fabrika Sivas'taki süt ve süt ürünleri ihtiyacını karşılayan iki kuruluştan biri ve daha büyük olanıdır. Zira fabrika yetkililerinden aldığımız bilgilere göre Ulaş Süt'ün geçmişi 1960 lı yıllara dayanmakta ve önemli bir iddianın sahibi olmaktadır.

Ulaş Süt Fabrikası Ankara yolu üzerinde, Sivas'a 10 km., Çimento fabrikasının karşısında, 26 dönüm arazi üzerine kurulu bir yerde faaliyetlerini sürdürmektedir. Dört adet lojmanı, bir adet yemekhanesi, bir adet misafirhanesi ve idari bina ve imalathane olarak ortak kullanılan büyük bir binası vardır. İmalathane içerisinde dokuz adet soğuk hava deposu da mevcuttur. Arazinin tamamının etrafı duvar ve tel örgüyle çevrili ve bahçe düzenlemesi vardır.

Ulaş süt fabrikası 1996 yılına kadar toptancılar sitesinde 400 m^2 lik bir alanda faaliyet göstermekte idi. 1984 te çiğ süt satışının yasaklanmasıyla pastörize makinesi, separatör, eldeğmeden paketleme makinası, buhar kazanı ve birtakım aletler alınarak daha modern biçimde faaliyet yapmaya başlamıştır. Aynı yıl pazarlamadan da dönüşümlü kapların kaldırılması da pazarlamaya ayrı bir estetik kazandırmıştır.

Ulaş süt fabrikası mayıs 1996 da şu anki bulunduğu yere taşınarak toptancılar sitesindeki yerini depo olarak kullanmaktadır. Burası daha önce SEK süt olarak faaliyet yürütmekteydi. 1995' in sonunda özelleştirme idaresinden Fahsel şirketi satın aldı ve Akan Süt Ürünleri adıyla altı ay kadar faaliyet gösterdi. Gerek SEK'in özelleştirme kapsamına alınması sürecindeki bakımsız kalışı gerekse Fahsel şirketinin bu konudaki deneyimsizliği nedeniyle bu altı aylık süre de başarısızlıkla sonuçlandı. Daha sonra Ulaş Süt Yoğurt San.Tic.Ltd.Şti. mayıs 1996 da Fahsel Şirketini aradan çıkararak özelleştirme idaresinden burayı aldı. Devlete ve şahıslara olan tüm borçlarını ödedi. Şu anda bir yandan bakım ve onarımını tamamlamaya çalışıp bir yandan da üretim ve pazarlama faaliyetlerine devam etmektedir.

Ulaş süt, üretimin esas hammadesini teşkil eden sütün toplama işlemini de kendisi yapmaktadır. Ulaş sütün çiğ süt aldığı yerler şunlardır.

1- Aksaray / Koçaş Devlet Üretme Çiftliği

2- Sivas / Ulaş Devlet Üretme Çiftliği

3- Sivas /Hafik Devlet Üretme Çiftliği

4- Sivas Çınarlı köyü

5- Sivas'ın merkez mahalleleri

Ulaş sütün pazarlama politikası tamamiyle Sivas merkezdeki talebe endekslidir denilebilir. Zaman zaman merkez köylere, zaman zaman da kazalara yağ, peynir ve yoğurt gönderilse de bunlar önemli bir yekün tutmadığından ve bu tür talebin periyodik olmamasından üretim politikasında bu durum dikkate alınmıyor.

Fabrikanın genel olarak pazarlama sahası ise Sivas merkezdeki 350 adet bakkal yada marketler, 25-30 civarında resmi daireler ve ayrıca yaz aylarında olmak üzere dondurmacılardır.

Fabrikanın günlük süt işleme kapasitesi 40 tondur. Ancak halihazırda bu kapasitenin yaklaşık dörtte biri kullanılmaktadır. İş gücü kapasitesi de günlük 800 saat civarında olmasına karşın bunun da şu anki kullanımı 200 saat civarındadır.

Ulaş süt fabrikası Sivas'taki hayvancılığın gelişmesine çok büyük katkılar sağlamaktadır. Gerçi son yıllarda Sivas'ta hayvancılığın gelişmesi için yeterli devlet desteğinin olmaması bir talihsizliktir. Ancak kendi imkanlarıyla süt hayvancılığı yapmakisteyen üreticiler için böyle bir fabrikanın olması en azından moral bir destektir. Kaldıki Sivas'taki hayvancılığın bu günkü kapasitenin dört katına çıkması, burada bulunan diğer bir süt fabrikası olan Tuğba-Akabe fabrikası ile beraber Ulaş süt fabrikasının ancak tam kapasiteye yakın çalışması demektir.

Ayrıca Sivas için ekonomik öneme sahip devlet üretme çiftliklerinin de hayatiyetini sürdürebilmelerinin önemli ölçüde bu fabrikalara bağlı olması gözardı edilemeyecek bir başka gerçektir. Ulaş süt fabrikasının gerek kendi bünyesinde çalıştırdığı işçileri gerekse- dolaylı olarak ta olsa- süt üretimi esnasında çalışan işçileri olması hasebiyle Sivas gibi işsizliğin had safada olduğu bir ilde çok önemli bir misyonu olduğu söylemek mümkündür.

Burada sayamadığımız daha bir çok sebepten dolayı Ulaş süt fabrikasının, özelde Sivas genelde de Türkiye ekonomisine önemli katkıları olduğu açıktır.

Ulaş süt fabrikası özel sektöre ait bir aile şirketi olan Ulaş Süt Yoğurt San.Tic. Ltd. nin tek fabrikasıdır. Fabrika yetkililerinden aldığımız bilgilere göre çok önemli problemleri olmasa da başlıca sorunlarını şu şekilde sıralamışlardır.

1- Sokak sütçülüğü. Sokak sütçülüğü sağlık şartlarına uygun olmadığı halde vergi denetiminden de uzak illegal bir şekilde devam etmesi hem halk sağlığını tehdit etmekte hem de devletin getirdiği tüm kısıtlamalara uyarak büyük yatırımlar yapan fabrikalarla haksız bir rekabet etmektedir. Bu durum ayrıca kayıt dışı ekonomi açısından düşünülecek olursa sokak sütçülüğü önemli bir sorundur.

2-Kalifiye eleman sıkıntısı. Süt işletmeciliği hassas bir iş olduğundan işçilerin vasıflı olması kaçınılmaz bir gerçektir. Sivas'ta bulunan Cumhuriyet Üniversitesi'nin Ziraat Fakültesinin olmaması, hem bu konuda üniversitenin bilimsel verilerinden yararlanmayı hem de vasıflı eleman bulmayı güçleştirmektedir.

3- Yerel ve genel medyanın hem süt ve süt ürünleri tüketiminin gereğine hem de sokak sütçülüğünün zararlarına yeterli ilgi duymaması fabrika sahipleri ve tüketici için de önemli bir sorundur.

4- Kredilerin yetersiz oluşu ve faiz oranlarının da yüksek olması bu tür yatırımcıların cesaretlerini önemli ölçüde yoketmektedir. Son yıllarda Sivas ilinin alması gereken teşvik kredilerinin yüzde beş-altısını bile alamamış olamsı bu konudaki rahatsızlığın boyutlarının ne olduğunu izaha yeter kanaatindeyiz.

Çalışmamızın konusu optimizasyon teori olduğundan, yukarıda anlatmaya çalıştığımız problemler üretimde en iyi kazanımı engelleyen sorunlar olarak sıralanmıştır. Amacımız bu tür işletmelerin sadece kar etmesi değil, karının nasıl optimum (eniyi) olacağıdır.

Şimdi işletmenin üretim süreci kısaca verilecektir.

1- Sütlerin toplanması.

2- Toplanan sütlerin pastörize edilmesi.

3- Pastörize edilen sütlerin talebe göre üretim bölümlerine dağıtılması.

4- Üretilen mamüllerin ambalajlanması, gerekiyorsa soğuk hava depolarına konması ve satışa hazır duruma getirilmesi.

5- Eldeki işlenmiş mamülün pazarlanması ve yeni talebin belirlenmesi.

II.2.MODEL İÇİN VERİLERİN ELDE EDİLMESİ

Matematik programlamada mevcut verilerin nasıl kullanılacağı ve amaca yönelik hangi verilere ihtiyaç duyulacağı çok önem arzetmektadir.

Çalışmamıza konu olan verileri, bizzat fabrika sahipleri ile görüşerek, 1temmuz 1996 ile 15 temmuz 1996 tarihlerinde onbeş günlük maliyet ve hasılat rakamlarını baz alarak oluşturduk. Bunun sütün organik bir madde oluşu ve talebin değişkenliğinden kaynaklanan sakıncaları olduğu gibi üretim ve pazarlamanın maksimum olacağı düşünülen günlere rastlaması bizi bu tarihler arası verilerini almaya yöneltmiştir.

II.2.1.Maliyet Fonksiyonlarının Tahmini

Çalışmamızın temel amacı optimum karı bulacak üretim bileşeninin bulunmasıdır. Bu ise amaç fonksiyonunun katsayılarını oluşturan birim başına düşen karla bulunabilir. Kuadratik programlamada amaç fonksiyonunun katsayıları fiyat ve maliyet olmak üzere iki bileşenden oluşmaktadır. Fiyat, çalışmamıza konu olan tarihlerde sabit olup ürünlerin birim başına fabrika çıkış fiyatıdır. Maliyet ise hem sütün organik madde oluşu hem de üretim sürecinde her ürünün değişik işlemlerden geçmesi sebebiyle fonksiyonel olarak bulunmuştur.

Ayrıca sütlerin beş değişik yerden alınması ve bu alımlarda ihale usulü uygulanıyor olması fabrikayı süt alımı için üç değişik fiyat ödemeye itmiştir. Bu durum sütün alış fiyatının ağırlıklı ortalama ile tespitini zorunlu kılmıştır. Toplam alınan sütün nekadarı hangi fiyattan alındığı belli olduğu için yapılan işlem sonucu sütün ortalama fiyatı 21673 TL/kg olarak bulunmuştur.

Ayrıca yoğurt ve pastörize süt maliyetlerine özgü ambalajlar bu ürünlerin maliyetinde hesaba katılmış ve birim başına maliyetlare eklenmiştir. Buna göre aşağıda, $X_1,...,X_4$ üretilen ürün miktarlarını (kg.olarak) ve $Y_1,...,Y_4$ te maliyetlerini (TL.olarak)göstermektedir..

	X_1	Y_1	X_2	Y_2
01.07.1996	2600	68890298	2834	96363085
02. 07.1996	2560	67966378	2820	95930389
03. 07.1996	2950	77061290	3100	104584300
04. 07.1996	2590	68659318	2700	92221568
05. 07.1996	2700	71221771	2700	92221568
06. 07.1996	2520	67020785	2730	93148773
07. 07.1996	2500	66558825	2800	95312252
08. 07.1996	2700	71221771	2800	95312252
09. 07.1996	2480	66096865	2700	92221568
10. 07.1996	2530	67251765	2720	92839705
11. 07.1996	2930	76577657	3000	101493620
12. 07.1996	2500	66558825	2680	91603431
13. 07.1996	2900	75884717	2900	98402936
14. 07.1996	2570	68197358	2800	95312252
15. 07.1996	2450	65393089	2700	92221568

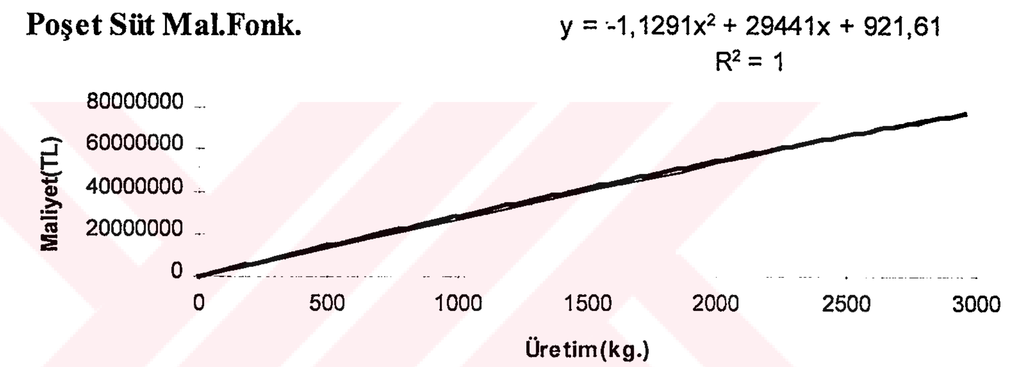
Tablo 1. Poşet Süt ve Yoğurt Üretim(kg) ve Maliyetleri(TL)

	X_3	Y_3	X_4	Y_4
01.07.1996	900	22458017	460	12271106
02. 07.1996	900	22458017	450	12037038
03. 07.1996	1210	29243833	610	15782132
04. 07.1996	700	18088071	440	11802970
05. 07.1996	1060	25960374	460	12271106
06. 07.1996	700	18088071	420	11334833
07. 07.1996	800	20269044	520	13675517
08. 07.1996	900	22458017	540	14143654
09. 07.1996	800	20269044	510	13441448
10. 07.1996	700	18088071	420	11334833
11. 07.1996	1200	29024936	600	15548064
12. 07.1996	650	16985585	410	11100764
13. 07.1996	800	20269044	590	15313996
14. 07.1996	890	22239120	450	12037038
15. 07.1996	1150	27930450	500	13207380

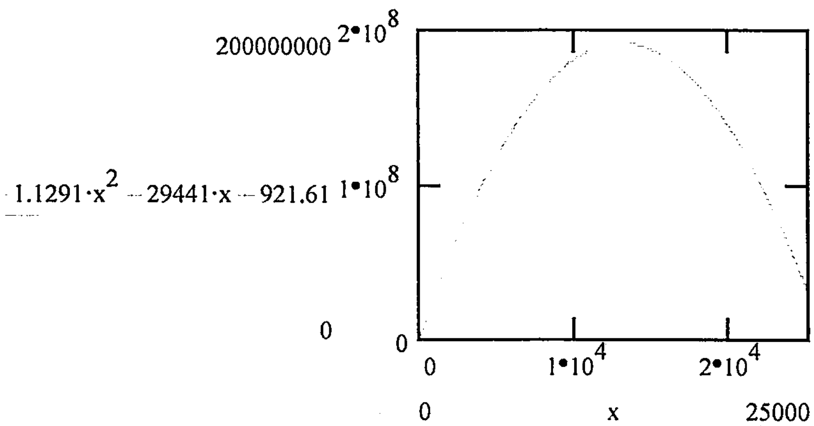
Tablo 2. Açık süt ve Bidon Yoğurt Üretim(kg) ve Maliyetleri(TL)

Tablo1 ve Tablo2 de günlere göre verilen üretim ve maliyetler Tablo3,...,Tablo6 da küçükten büyüğe doğru sıralanmış veriler ve her ürün için toplam maliyet fonksiyonları (grafik ve denklem olarak) verilmiştir. Ancak buradaki x ve y değerleri poşet süt için x_1y_1, yoğurt için x_2y_2, açık sütiçin x_3y_3, bidon yoğurt için x_4y_4 kabul edilecektir. Ayrıca bu fonksiyonların temsil oranları da verilmiştir.

Üretim	Maliyet
0	0
2450	65393089
2480	66096865
2500	66558825
2500	66558825
2520	67020785
2530	67251765
2560	67966378
2570	68197358
2590	68659318
2600	68890298
2700	71221771
2700	71221771
2900	75884717
2930	76577657
2950	77061290

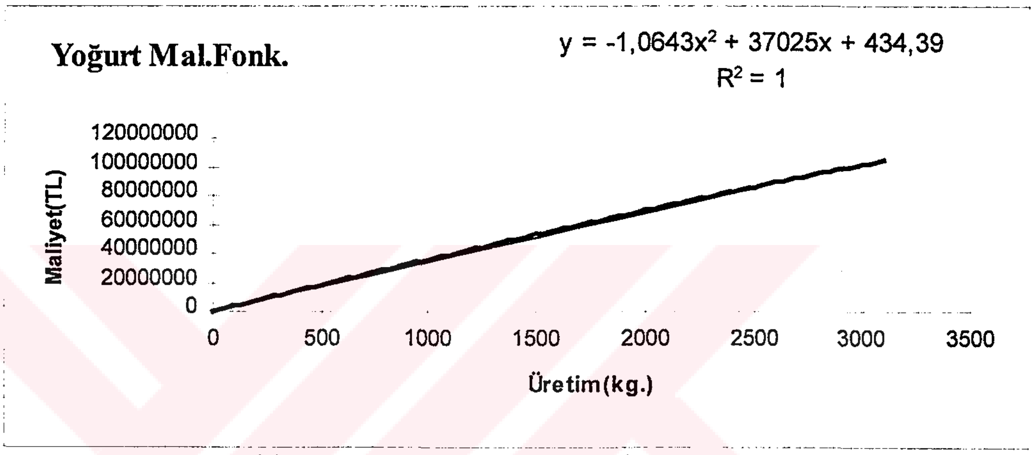


Tablo3. Poşet Süt Maliyet Fonksiyonu

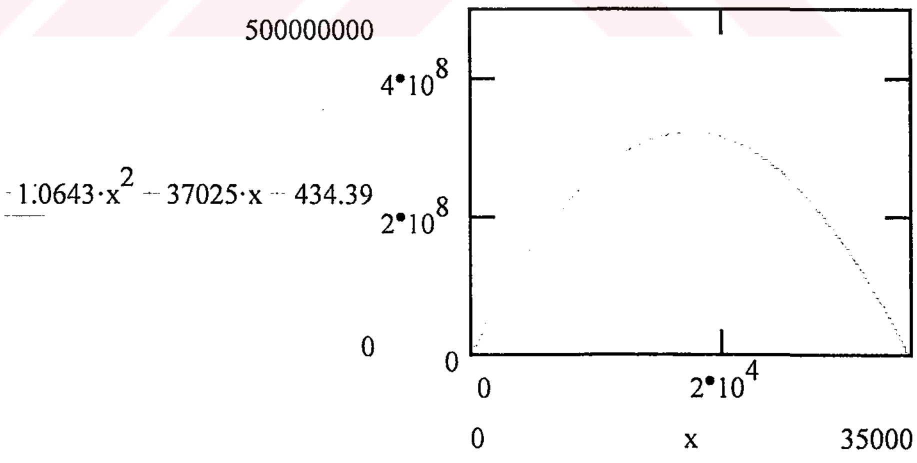


Fonksiyonun tanım aralığının genişletilmiş hali.

Üretim	Maliyet
0	0
2680	91603431
2700	92221568
2700	92221568
2700	92221568
2700	92221568
2720	92839705
2730	93148773
2800	95312252
2800	95312252
2800	95312252
2820	95930389
2834	96363085
2900	98402936
3000	101493620
3100	104584300

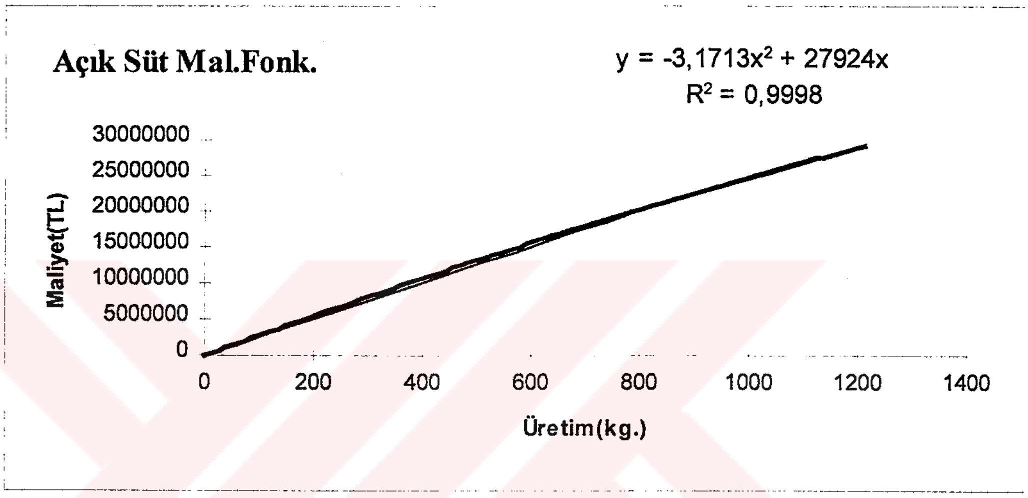


Tablo 4. Yoğurt Maliyet Fonksiyonu

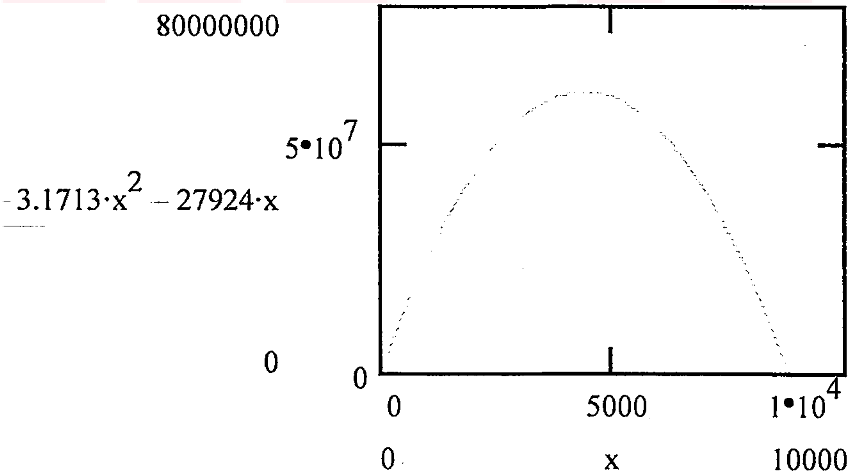


Fonksiyonun tanım aralığının genişletilmiş hali.

Üretim	Maliyet
0	0
650	16985585
700	18088071
700	18088071
700	18088071
800	20269044
800	20269044
800	20269044
890	22239120
900	22458017
900	22458017
900	22458017
1060	25960374
1150	27930450
1200	29024936
1210	29243833

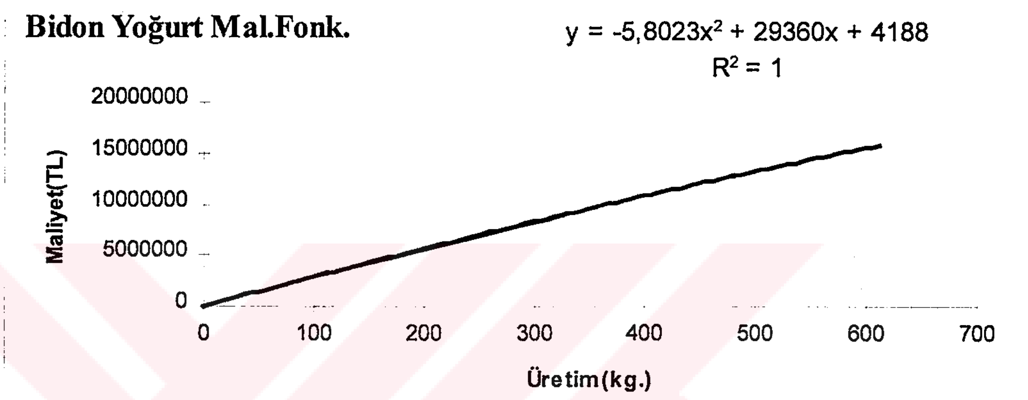


Tablo 5.Açık süt maliyet fonksiyonu

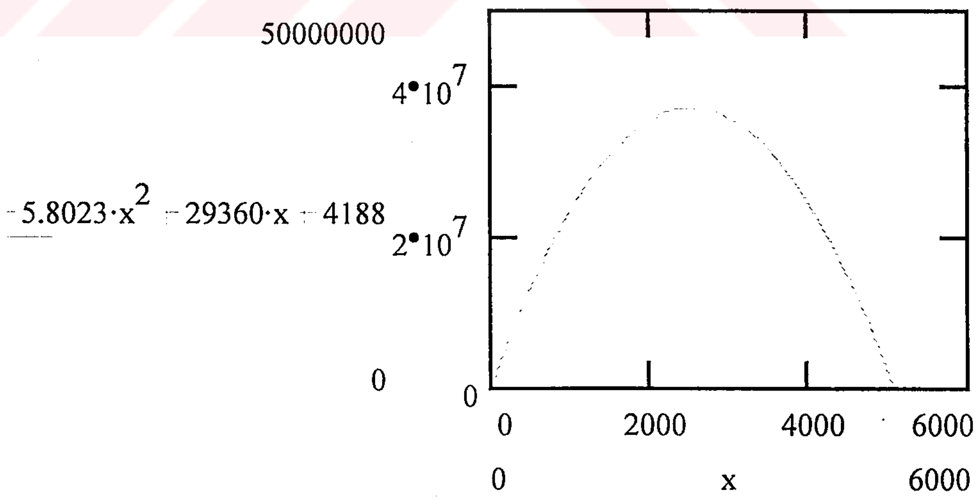


Fonksiyonun tanım aralığının genişletilmiş hali.

Üretim	Maliyet
0	0
410	11100764
420	11334833
420	11334833
440	11802970
450	12037038
450	12037038
460	12271106
460	12271106
500	13207380
510	13441448
520	13675517
540	14143654
590	15313996
600	15548064
610	15782132



Tablo 6. Bidon yoğurt maliyet fonksiyonu



Fonksiyonun tanım aralığının genişletilmiş hali.

Böylece dört ayrı ürün için toplam maliyet fonksiyonları bulunmuştur. Ortalama maliyet fonksiyonunu tespit etmek içinse her ürün için ayrı ayrı toplam maliyet fonksiyonlarının her iki tarafını toplam üretim miktarlarına bölerek bulabiliriz.

Buna göre ortalama maliyet fonksiyonları aşağıdaki gibidir.

$C_1 = -1.1291x_1 + 29441 + 921.61/x_1$

$C_2 = -1.0643x_2 + 37025 + 434.39/x_2$

$C_3 = -3.1713x_3 + 27924$

$C_4 = -5.8186x_4 + 29376$

II.2.2.Hammadde Kısıtlayıcısı İçin Teknoloji Katsayılarının Belirlenmesi

Sütün organik bir madde oluşundan kaynaklanan değişken yapısı, üretilen mamülün çeşidine göre değişik teknoloji katsayılarını içermektedir. Ancak bu çalışma için veriler, yani süt hammaddesi 1-15 Temmuz tarihleri arası alındığından ve gelen çeşitli sütlerin bir kapta toplanıyor olmasından bu değişkenlik dikkate alınmamıştır.

Ürün çeşidine göre teknoloji katsayıları aşağıdaki gibidir.

X_1 : Pastörize.ç (poşet) süt için : $a_{11} = 1.01$ kg

X_2 : Yoğurt için : $a_{13} = 1.08$ kg

X_3 : Pastörize (açık) süt için : $a_{12} = 1.01$ kg

X_4 : Bidon Yoğurt için : $a_{14} = 1.08$ kg

Fabrikanın günlük kurulu süt işleme kapasitesi 40000kg. dır. Ancak çeşitli nedenlerle bu kapasite 11000 kg/gün olrak işlem görmektedir. Yani $b_1 = 11000$ dir.

II.2.3.Kapasite Kısıtlayıcısı İçin Teknoloji Katsayılarının Belirlenmesi

Fabrikanın kurulu kapasitesi günlük 40000 kg. Süt işlemeye müsaittir. Burada da hammadde için kullanılan teknoloji katsayıları kullanılacaktır. Ancak b_2 =40000 dir.

II.2.4.Birim İşgücü Zamanlarının Belirlenmesi

Sütün işleme süreci bir kapta toplanarak başlayıp daha sonra yapılacak mamül miktarına göre değişik bölümlere gönderiliyor olması ve bazı mamüllerin birbirine hammadde yerine geçen yan mamül bırakması gibi sebeplerle birim şgücü zamanının belirlenmesinde oransal üretim miktarları gözönüne alınacaktır.

Yapılan çalışma sonucu fabrikanın günlük 200 saatlik işgücünün oransal dökümü aşağıdaki gibi olduğu yaklaşık olarak saptanmıştır.

$200 \cdot \frac{33}{100} = 66 \cdot 60 = 3960$ dk/gün poşet süt için

$200 \cdot \frac{35}{100} = 70 \cdot 60 = 4200$ dk/gün yoğurt için

$200 \cdot \frac{11}{100} = 22 \cdot 60 = 1320$ dk/gün açık süt için

$200 \cdot \frac{6}{100} = 12 \cdot 60 = 720$ dk/gün bidon yoğurt için

$200 \cdot \frac{13}{100} = 26 \cdot 60 = 1560$ dk/gün peynir için

$200 \cdot \frac{2}{100} = 4 \cdot 60 = 240$ dk/gün tere yağı için

Toplam = 12000 dk/gün.

Ancak peynir ve tereyağı üretimi sürekli olmaması ve bunlardan tereyağının bir yan ürün olan kıremadan yapılması, peynirin ise gelen sütün pastörize süt ve yoğurt yapımı için uygun olmamasıması gibi durumlarda üretiliyor olaması sebebiyle çalışmamızda bu iki ürün kuadratik model oluşturulmasında dikkate alınmayacaktır.

Günlük ortalama üretim miktarlarının ürün çeşidine göre dağılımı ise şöyledir.

Poşet süt : 2632 kg/gün

Yoğurt : 2799 kg/gün

Açık süt : 890 kg/gün

Bidon Yoğurt : 492 kg/gün

Buna göre zaman kısıtlayıcısı için teknoloji katsayıları ;

a_{21} = 3960/2632= 1.5 dk/kg

a_{22}= 1320/890 = 1.49 dk/kg

a_{23}= 4200/2799= 1.5 dk/kg

a_{24}= 720/492= 1.49 dk/kg

Çalışmamıza konu olan bu dört ürün için günlük 180 saatlik bir işgücü ayrılmış olup b_3=10800 dk. dır.

II.2.5.Ürünlerin Talep Tahmini

Fabrikanın dağıtımda görevli elemanları ürünü verdikleri yerden bir sonraki talebi almaktadırlar. Çalışmamıza esas teşkil eden 1-15 temmuz 1996 tarihleri arası her ürün için ortalama talep durumu aşağıdaki gibidir.

Poşet süt için :b_4 = 3000 kg/gün

Yoğurt için :b_5 = 3150 kg/gün

Açık süt için :b_6 = 1250 kg/gün

Bidon Yoğurt için :b_7 = 650 kg/gün

II.3.MODELİN KURULMASI

Buraya kadar elde edilen veriler işletmenin kuadratik programlama modelinin kurulmasına yönelik çalışmalar idi. Şimdi amaç fonksiyonu ve kısıtlayıcılardan oluşan matematik model kurulacaktır.

II.3.1.Amaç Fonksiyonunun Belirlenmesi

İşletmenin amacı karını maksimum yapacak üretim bileşiminin bulunmasıdır. Sözkonusu amaca yönelik kuadratik programlama modeli genel olarak ;

Maksimum $Z= Z_{max}= \Phi_1 x_1 + \Phi_2 x_2 + \Phi_3 x_3 + \Phi_4 x_4$ dır.

Burada $\Phi_1,... \Phi_4$ modelin kar katsayıları olmak üzere $\Phi_i = P_i - C_i$ $(i=1,...,4)$ olarak tanımlanmıştır. C_i ler daha önce tespit edilen ortalama maliyet fonksiyonlarıdır. P_i 'ler ise ürünlerin sözkonusu dönemdeki fabrika satış fiyatları olmak üzere aşagıdaki gibidir.

Poşet süt için :P_1 = 34000 TL/kg.

yoğurt için :P_3 =37000 TL/kg

Açık süt için :P_2 = 28000 TL/kg.

Bidon yoğurt için :P_4 =32000 TL/kg.

Buna göre kar katsayıları aşağıdaki gibi olur.

$\Phi_1 = 34000-(-1.1291x_1+29441+921.61/x_1)$

$\Phi_2 = 37000-(-1.0643x_2+37025+434.39/x_2)$

$\Phi_3 = 28000(-3.1713x_3+27924)$

$\Phi_4 = 32000(-5.8186x_4+29376)$

Bu veriler yeniden düzenlenerek kar katsayıları;

$\Phi_1 = 1.1291x_1 + 4559 - 921.61/x_1$

$\Phi_2 = 1.0643x_2 - 25 - 434.39/x_2$

$\Phi_3 = 3.1713x_3 + 76$

$\Phi_4 = 5.8186x_4 + 2624$

olarak bulunur.

Bu kar katsayıları amaç fonksiyonunda yerine yazılırsa amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$Z_{max} = 1.1291x_1^2 + 4559x_1 - 921.61 + 1.0643x_2^2 - 25x_2 - 434.39 + 3.1713x_3^2 + 76x_3 + 5.8186x_4^2 + 2624x_4$

Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa amaç fonksiyonunun son şekli aşağıdaki gibi verilebilir.

$Z_{max} = 1.1291x_1^2 + 4559x_1 + 1.0643x_2^2 - 25x_2 + 3.1713x_3^2 + 76x_3 + 5.8186x_4^2 + 2624x_4 - 1356$

II.3.2.Kısıtlayıcı Denklemlerin Belirlenmesi

Bu kısımda elde edilen teknoloji katsayıları çeşitli kapasiteler gözönüne alınarak kısıtlayıcı denklemler bulunacaktır.

II.3.2.1.Hammadde Kısıtlayıcısının Belirlenmesi

Fabrikanın günlük süt alım kapasitesi 12000 kg/gün dür. Çalışmamıza konu olan dört mamül için bu rakamın 11000 kg/gün dür. Buna göre hammadde kısıtlayıcısı şu şekilde verilebilir.

$1.01x_1 + 1.08x_2 + 1.01x_3 + 1.08x_4 \leq 11000$

II.3.2.2. İşgücü Kısıtlayıcısının Belirlenmesi

Fabrikanın mevcut üretimi için günlük 200 saat = 12000 dk. işgücü satınalabilmektedir. Çalışmamıza konu olan dört kalem ürün için 10800 dk.olarak kullanmaktadır. Buna göre işgücü kısıtlayıcısı

$1.5x_1+1.49x_2+1.5x_3+1.49x_4 \leq 10800$

II.3.2.3. Kapasite Kısıtlayıcısının Belirlenmesi

Fabrikanın günlük süt işleme kapasitesi 40000 kg. dır. Üretilen mamüllerin birim başına harcanan süt miktarı da gözönüne alınarak kapasite kısıtlayıcısı aşağıdaki gibi olur.

$1.01x_1+1.08x_2+1.01x_3+1.01x_4 \leq 40000$

II.3.2.4. Talep Kısıtlayıcısının Belirlenmesi

Daha önce belirtilen talep durumuna göre talep kısıtlayıcıları ise şöyledir.

$X_1 \leq 3000$

$X_2 \leq 3150$

$X_3 \leq 1250$

$X_4 \leq 650$

Böylece model için gerekli olan amaç fonksiyonu ve kısıtlayıcılar bulunmuş oldu . Buna göre işletmenin kuadratik programlama modeli aşağıdaki gibi verilebilir.

Amaç fonksiyonu;

$Z_{max} = 1.1291\,x_1^2 +4559x_1+1.0643\,x_2^2 -25x_2+3.1713\,x_3^2 +76x_3+5.8186\,x_4^2 +2624x_4 -$ 1356

Kısıtlayıcılar;

$1.01x_1+1.01x_2+1.08x_3+1.08x_4 \leq 11000$ (1) Hammadde

$1.5x_1+1.5x_2+1.49x_3+1.49x_4 \leq 10800$ (2) İşgücü

$1.01x_1+1.08x_2+1.01x_3+1.01x_4 \leq 40000$ (3) Kapasite

$X_1 \leq 3000$ (4) Talep

$X_2 \leq 3150$ (5) Talep

$X_3 \leq 1250$ (6) Talep

$X_4 \leq 650$ (7) Talep

Pozitif kısıtlama;

$X_1,\ldots, X_4 \geq 0$

II.4.MODELİN ÇÖZÜMÜ VE SONUÇLARIN YORUMLANMASI

Bu kısımda kuadratik programlama modelinde oluşturulan problemin bilgisayar çözümü yapılacak ve elde edilen sonuçların yorumlanması verilecektir.

II.4.1.Modelin Bilgisayar Çözümü

Buraya kadar elde edilen amaç fonksiyonu ve kısıtlayıcılar, bilgisayarda **QS(Quantitative decision support systems)** programının Kuadratik programlama **(Quadratic programming)** problemleri için hazırlanmış kısmına yüklenmiş ve çözümü yapılmıştır. Veriler serbest formatta (Free Format Model) verilmiş, son simpleks tablo (Final Solution) ve kısıtlayıcıların analizi aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

```
Free Format Model for ULAş MAX.PROBLEM

>> Max  4559X1-25X2+76X3+2624X4+1.1291X1**2+1.0643X2**2+3.1713X3**2+5.8186X4**2
>>Subject to
>> (1) 1.01X1+1.08X2+1.01X3+1.08X4 <= 11000
>> (2) 1.5X1+1.49X2+1.5X3+1.49X4 <= 10800
>> (3) 1.01X1+1.08X2+1.01X3+1.08X4 <= 40000
>> (4) 1X1 <= 3000
>> (5) 1X2 <= 3150
>> (6) 1X3 <= 1250
>> (7) 1X4 <= 650
```

Final Solution for ULAŞ MAX.PROBLEM Page : 1

Variable No.	Variable Names	Solution	Opportunity Cost	Variable No.	Variable Names	Solution	Opportunity Cost
1	X1	+3000.0000	0	3	X3	+976.04822	0
2	X2	+2936.1582	0	4	X4	+309.43066	0

Maximized OBJ = 3.74053E+07 Iteration = 12 Elapsed CPU second = .3300781

The matrix of the quadratic form is: Indefinite

Analysis of Constraints for ULAŞ MAX.PROBLEM						Page : 2
Constr.	Status	RHS	Shadow Price	Slack or Surplus	Minimum RHS	Maximum RHS
1	Loose	≤+11000.000	0	+3478.9539	+7521.0459	+ Infinity
2	Tight	≤+10800.000	0	0	+6961.0317	+11285.276
3	Loose	≤+40000.000	0	+3478.9539	+7521.0449	+ Infinity
4	Tight	≤+3000.0000	0	0	+2676.4827	+5559.3125
5	Loose	≤+3150.0000	0	+3478.9539	+2936.1584	+ Infinity
6	Loose	≤+1250.0000	0	+3478.9539	+976.04828	+ Infinity
7	Loose	≤+650.00000	0	+3478.9539	+309.43063	+ Infinity

II.4.2.Elde Edilen Sonuçların Yorumlanması

Bu bölümde fabrika için oluşturulan modelin bilgisayar çözümünden elde edilen sonuçlar işletme yöneticilerine karar vermelerinde yol göstermesi bakımından yorumlanacaktır.

Elde edilen sonuçlar işletmenin 1 Temmuz 1996 - 15 Temmuz 1996 tarihleri arasında uygulaması gereken optimal üretim planı: Poşet süt için : 3000 kg/gün, yoğurt için : 2936.15 kg/gün, açık süt için : 976.04 kg/gün, bidon yoğurt için : 309.43 kg/gün şeklindedir. Bu veriler amaç fonksiyonunda yerine yazılırsa optimum çözüm yani günlük en iyi kar -amaç fonksiyonundaki sabit ilave edilerek- 37403944 TL. olarak bulunur.

Modelin çözümünden elde edilen ürün bileşimi ile fabrikanın üretim planı arasında genelde bir uyumun olduğu gözükmektedir. Tek tek ürün çeşidine bakıldığında ürün bileşimi, poşet süt için kısıtlayıcı sınırı olan 3000 kg./gün ün tamamı diğer ürünlerde de talep kısıtlayıcılarına yakın rakamlar görülmektedir.

Sütün organik bir madde olması ve hammadde alış fiyatlarının dönemsel olarak değişmesi de düşünülecek olursa birim maliyetlerin -dolayısıyla kar katsayılarının- yıl boyu aynı olmayacağı açıktır. Bu sebeple üretim planının yıllık verilere dayanılarak yapılması daha yerinde olacaktır.

Kısıtlayıcıların tespitinde de görüldüğü gibi fabrikanın üretimini önemli ölçüde etkileyen faktörler talep ve hammadde kısıtlayıcılarıdır. Talep ve hammadde kısıtlayıcılarının sınırlarının genişletilmesi ve fabrikanın üretim planının bilimsel verilere dayandırılması ile karın daha da iyi olacağı kanaatindeyiz.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Dünyanın hemen hemen her yanına hakim olan rekabetçi piyasadan pay kapma yarışı toplumların siyasi ve iktisadi geleceklerini yakından ilgilendirmektedir.

Kuşkusuz sosyal ve siyasal gelişmenin temelinde iktisadi gelişme başlica etkenlerden biri hatta en önemlisidir. İktisadi gelişmenin temelinde ise mal ve hizmet üretiminin, arz-talep ilişkilerinin sistemli bir şekilde takibiyle en rantabıl olması yatmaktadır. Bu durum, işletme yöneticilerini çeşitli argümanları bir arada düşünerek karar vermeye zorlamaktadır.

İşletme yöneticilerinin genel kararlara varabilmeleri ve vardıkları bu kararların en iyi karar olaması gerekliliği, karar vermeye yönelik model çalışmalarının önemini gün geçtikçe daha da artırmaktadır. Genel olarak matematik programlama olarak bilinen bu modellerin çokluğu yöneticilerin önünün açılması açısından bir kazanım olmakla birlikte hangi modelin kendisi için daha uygun olacağının tespiti de ayrı bir çalışma gerektirmektedir.

Çalışmamız lineer olmayan matematik programlamanın üretim planlamasında nasıl kullanılacağını teorik ve uygulamalı olarak ele almıştır. Matematik programlama için her şeyi vermek kuşkusuz çalışmamızın boyutlarına sığmayacak kadar çoktur. Ancak çalışmamızın esasınını oluşturan kuadratik programlama modelinin genel yapısına, özelliklerine, çözüm tekniklerine, amaç fonksiyonu ve kısıtlayıcılarının oluşturuluş biçimine geniş ölçüde yer verilmiştir.

Kuadratik programlamayı lineer programlamadan ayıran en önemli özelliğin amaç fonksiyonundaki kar katsayılarının sabitsayılar olmaktan ziyade fonksiyonel yapılar içermesi olduğu çalışmamızda izah edilmiştir. Bunun sebebi, işletmelerin ürettikleri mal ve hizmetlerin satış fiyatlarının sabit rakamlar olsa bile bu ürün ve hizmetlerin üretilmesi esnasında değişik hammadde ve işgücü kullanılıyor olması, değişik üretim süreclerinde geçiyor olaması gibi sebeplerle maliyetlerinin fonksiyonel olmasıdır.

Kuadratik programlama modelinin çözümünden elde ettiğimiz sonuçlar işletmenin girdi ve çıktıları arasında yol gösterici ve faydalı bilgiler olmuştur. İşletme, düzenlediğimiz model yardımıyla kaynaklarını daha verimli kullanarak karını daha da iyileştirebilir. Ancak burada şunu hemen belirtmek gerekir ki modelde yer alan hammadde ve talep kısıtlayıcıları işletmeyi sınırlayan en önemli faktörlerdir. Bunların çeşitli çalışmalarla genişletilmesi işletmeyi daha da rahatlatacaktır.

Çalişmamızda ele aldığımız kuadratik programlama modeli karar vermeye yönelik modellerden sadece biridir. Bu amaca yönelik daha pek çok model mevcuttur. Amacımız bu modellerden biri olan kuadratik programlamanın kuramsal olarak tanıtılması ve bir işletmeye nasıl uygulanabileceğini göstermekti. Çalışmamız bir bütün olarak incelendiğinde bu hedefe önemli ölçüde ulaşıldığı görülecektir.

Sonuç olarak doğrusal olmayan matematik programlama modellerinden kuadratik programlama modeli, süt ve süt ürünlerinin üretim planlamasında karar vermeye yönelik etkili bir araç olduğu ve işletme yöneticilerinin kararlarında optimum verime ulaşmaları için önemli bir işleve sahip olduğu söylenebilir.

KAYNAKÇA

BAHTİYAR Basri, Doğrusal Olmayan programlama Modellerinden Quadratik Programlamanın Süt ve Süt Ürünlerinin Üretim Planlamasında Uygulanması,(yayınlanmamış Y.Lisans Tezi),Bursa,1989

BAL Hasan,Optimizasyon Teknikleri, Gazi Üniversitesi,Ankara,1995

ESİN Alptekin, Yöneylem Araştırmasında Yararlanılan Karar Yöntemleri, Gazi Üniversitesi, Ankara,1984

HALAÇ Osman, Kantitatif Kararverme Teknikleri, Evrim Dağıtım, İstanbul,1991

LASDON Leon S., Optimization Theory for Large Systems,Macmillan P.Co.İnc.New York.

ÖZTÜRK Ahmet,Yöneylem Araştırması, Uludağ Üniversitesi Basımevi,Bursa,1984

SANG M.Lee, Laurence J.Moore, Bernard W. Taylor, Management Science, Third Edition, Boston

TULUNAY Yılmaz, Matematik Programlama ve İşletme Uygulamaları,Bayrak Matbaacılık,İstanbul,1987

YILMAZ Zekai,Sayısal Yöntemler,Uludağ Üniversitesi Basımevi,Bursa,1995

YARDIMCI KAYNAKLAR

KARA İmdat, Yönetlem Araştırması, Anadolu Üni.Yayınları, Eskişehir, 1986

KARAYALÇIN İlhami, Yöneylem "Harekat" Araştırması Operation Research Kantitatif ve Karar verme Yöntemleri, Menteş Kitabevi, İstanbul,1993

KOBU Bülent, İşletme Matematiği II,İ.Ü.Yayınları,İstanbul,1971

KUNZI Hans Paul,and Krelle,Nonlineer Programming, Blaisdell P.Co. Massachusetts

ÖZDEMİR Erhan, Nonlineer Programlama Çözüm Yöntemleri ve Portföy Sistemi Problemine Uygulaması (Yayınlanmamış Doktora Tezi), İstanbul,1983