



**BURGER DENKLEMİNİN
B-SPLİNE FONKSİYONLAR YARDIMIYLA
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**
Ali ŞAHİN
Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Ağustos- 2004

150585
150585

**BURGER DENKLEMİNİN
B-SPLİNE FONKSİYONLAR YARDIMIYLA
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

ALİ ŞAHİN

**Dumlupınar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.**

Danışman : Doç. Dr. İdris DAĞ

150586

Ağustos – 2004

KABUL VE ONAY SAYFASI

Ali ŞAHİN' in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı BURGER DENKLEMİNİN B-SPLİNE FONKSİYONLAR YARDIMIYLA NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir

..09.../08.../2004

Üye : Doç.Dr. İdris DAĞ

Üye : Doç.Dr. Murat ALP

Üye : Yrd.Doç.Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsün Yönetim Kurulu'nun 13.08/2004 gün ve ...13... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Hayri DAVIOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü 4.

BURGER DENKLEMİNİN B-SPLİNE FONKSİYONLAR YARDIMIYLA NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Ali ŞAHİN

Matematik, Yüksek Lisans Tezi, 2004

Tez Danışmanı: Doç. Dr. İdris DAĞ

ÖZET

Bu tez onbir bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde B-spline fonksiyonların bazı özellikleri verildi. Kuadratik, kübik ve kuintik B-spline fonksiyonlar ifade edildi. Ayrıca Burger denklemi, başlangıç ve sınır koşulları ile birlikte tanıtıldı ve denklemin önceden bulunmuş nümerik çözümlerinden kısaca bahsedildi.

Konuma göre parçalanmış Burger denkleminin kuadratik B-spline kolokeyşin metoduyla çözümü ikinci bölümde verildi. Zamana göre parçalanmış Burger denkleminin kübik B-spline kolokeyşin metoduyla çözümü üçüncü bölümde yapıldı. Konuma göre parçalanmış Burger denklemi kübik B-spline kolokeyşin metoduyla dördüncü bölümde çözüldü. Burger denkleminin kübik B-spline kolokeyşin metoduyla çözümü beşinci bölümde yer aldı. Altıncı bölümde kübik B-spline kolokeyşin metodu kullanılarak Burger denkleminin çözümü incelendi.

Burger denkleminin kuadratik B-spline Galerkin metoduyla çözümü yedinci bölümde çalışıldı. Denklem kübik B-spline Galerkin metoduyla çözümü sekizinci bölümde verildi. Dokuzuncu bölümde, Kuintik B-spline Galerkin metoduyla denklemin çözümü yer aldı. Onuncu bölümde zamana göre parçalanmış Burger denkleminin kuintik B-spline Galerkin metoduyla çözümü incelendi ve son bölümde kullanılan metodların karşılaştırılması yapıldı.

Denklem çözümü için verilen metodlar, iki standart test problemi ile test edildi. Nümerik çözümler analitik çözümlerle karşılaştırıldı. Metodların güvenilirliği için L_2 ve L_∞ hata normları hesaplandı ve Fourier yöntemi ile bazı metodların kararlılık analizleri yapıldı.

Anahtar Kelimeler : B-spline fonksiyonlar, Burger Denklemi, Galerkin metodu, Kolokeyşin metodu, Sonlu elemanlar metodu.

NUMERICAL SOLUTIONS OF THE BURGERS' EQUATION BY USING B-SPLINE FUNCTIONS

Ali ŞAHİN

Mathematics, MSc Thesis, 2004

Thesis Adviser: Assoc. Prof. Dr. İdris DAĞ

SUMMARY

This thesis consists of eleven chapters. In the first chapter, some properties of B-spline functions are given. Quadratic, cubic and quintic B-spline functions are presented. Besides, the Burgers' equation is introduced together with initial and boundary conditions. Some of the previous numerical methods about the equation are mentioned.

The quadratic B-spline collocation solution of the space splitted Burgers' equation is given in the second chapter. Cubic B-spline collocation solution of the time splitted Burgers' equation is set up in the third chapter. The space splitted Burgers' equation is solved by using cubic B-spline collocation method in the fourth chapter. Chapter fifth includes cubic B-spline collocation solution of the Burgers' equation. Solution of the Burgers' equation is obtained by using cubic B-spline collocation method in the sixth chapter.

Quadratic B-spline Galerkin solution of the Burgers' equation is presented in the chapter seven. Cubic B-spline Galerkin solution of the Burgers' equation is examined in the chapter eight. In the ninth chapter, quintic B-spline Galerkin solution of the Burgers' equation is studied. The chapter ten includes quintic B-spline Galerkin solution of the time splitted Burgers' equation. Numerical solutions which are obtained from the methods compared in the last chapter.

The methods which are given to solve the Burgers' equation are tested by using two standard test problems. Numerical solutions are compared with analytical solutions. L_2 and L_∞ error norms are calculated for the reliability of the methods and also Fourier stability analyses are done for the some methods.

Keywords : B-spline functions, Burgers' equation, Collocation method, Galerkin method, Finite element mehtods.

TEŐEKKÜR

Tez alıőmamın her aőamasında yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan sayın hocam **Doç. Dr. İdris DAĞ**'a, iyi ve kötü günlerimde varlığını hep hissettiren sayın hocam **Doç.Dr.Murat ALP**' e, gösterdikleri anlayıő ve yardımlardan ötürü, mesai arkadaşlarım Adem C. ÇEVİKEL, Ali AYTEKİN, Halis BİLGİL, Alper ODABAŐ' a ve eőime teőekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xi
ÇİZELGELER DİZİNİ	xii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xiii
1. GİRİŞ.....	1
1.1. B-spline Fonksiyonlar	1
1.1.1. B-spline fonksiyonları bazı özellikleri	1
1.1.2. Kuadratik B-spline fonksiyonlar	2
1.1.3. Kübik B-spline fonksiyonlar	5
1.1.4. Kuintik B-spline fonksiyonlar	6
1.2. Burger Denklemi	8
1.1. Test Problemleri	10
2. KONUMA GÖRE PARÇALANMIŞ BURGER DENKLEMİNİN KUADRATİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ	12
2.1. Kuadratik B-spline Kolokeyşin Metodu	12
2.2. Başlangıç Durumu	17
2.3. Test Problemleri	20
2.3.1. Birinci test problemi	20
2.3.2. İkinci test problemi	21
3. ZAMANA GÖRE PARÇALANMIŞ BURGER DENKLEMİNİN KÜBİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ	23
3.1. Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu	23
3.2. Başlangıç Durumu	26
3.3. Kararlılık Analizi	27

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
3.4. Test Problemleri	28
3.4.1. Birinci test problemi	28
3.4.2. İkinci test problemi	30
4. KONUMA GÖRE PARÇALANMIŞ BURGER DENKLEMİNİN KÜBİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ	32
4.1. Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu	32
4.2. Başlangıç Durumu	37
4.3. Kararlılık Analizi	40
4.4. Test Problemleri	42
4.4.1. Birinci test problemi	43
4.4.2. İkinci test problemi	43
5. BURGER DENKLEMİNİN KÜBİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ	45
5.1. Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu	45
5.2. Başlangıç Durumu	49
5.3. Kararlılık Analizi	51
5.4. Test Problemleri	52
5.4.1. Birinci test problemi	52
5.4.2. İkinci test problemi	52
6. BURGER DENKLEMİNİN KÜBİK B-SPLİNE FONKSİYONLARI KULLANARAK KOLOKEYŞİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ	54
6.1. Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu	54
6.2. Başlangıç Durumu	56
6.3. Kararlılık Analizi	58
6.4. Test Problemleri	59
6.4.1. Birinci test problemi	59
6.4.2. İkinci test problemi	60

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

7. BURGER DENKLEMİNİN KUADRATİK B-SPLİNE GALERKİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ	61
7.1. Kuadratik B-spline Galerkin Metodu	61
7.2. Başlangıç Durumu	65
7.3. Kararlılık Analizi	66
7.4. Test Problemleri	68
7.4.1. Birinci test problemi	68
7.4.2. İkinci test problemi	68
8. BURGER DENKLEMİNİN KÜBİK B-SPLİNE GALERKİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ	70
8.1. Kübik B-spline Galerkin Metodu	70
8.2. Başlangıç Durumu	74
8.3. Kararlılık Analizi	76
8.4. Test Problemi	77
9. BURGER DENKLEMİNİN KUİNTİK B-SPLİNE GALERKİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ	78
9.1. Kuintik B-spline Galerkin Metodu	78
9.2. Başlangıç Durumu	83
9.3. Test Problemleri	85
9.3.1. Birinci test problemi	85
9.3.2. İkinci test problemi	86
10. ZAMANA GÖRE PARÇALANMIŞ BURGER DENKLEMİNİN KUİNTİK B-SPLİNE GALERKİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ	88
10.1. Kuintik B-spline Galerkin Metodu	88
10.2. Başlangıç Durumu	92
10.3. Kararlılık Analizi	94

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
10.4. Test Problemleri	97
10.4.1. Birinci test problemi	97
10.4.2. İkinci test problemi	98
11. SONUÇLAR	100
KAYNAKLAR DİZİNİ	101



ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1. Kuadratik B-spline şekil fonksiyonları	3
1.2. $\phi(x 0, 1, 2, 3)$ Kuadratik B-spline fonksiyonu.....	4
1.3. Kübik B-spline şekil fonksiyonları.....	5
1.4. Kuintik B-spline şekil fonksiyonları	7
1.5. Kübik B-spline fonksiyonlar.....	7



ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Cizelge</u>	<u>Sayfa</u>
1.1. Kuadratik B-spline fonksiyonu ve türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri.....	4
1.2. Kübik B-spline fonksiyonu ve türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri.....	6
1.3. Kuintik B-spline fonksiyonu ve türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri.....	8
2.1. Birinci test probleminde $\nu = 0.005$ için elde edilen sonuçlar	20
2.2. Birinci test probleminde $\nu = 0.0005$ için elde edilen sonuçlar	21
2.3. İkinci test probleminde elde edilen sonuçlar	22
3.1. Birinci test probleminde $\nu = 0.005$ için elde edilen sonuçlar	29
3.2. Birinci test probleminde $\nu = 0.0005$ için elde edilen sonuçlar	30
3.3. İkinci test probleminde elde edilen sonuçlar	31
4.1. Birinci test probleminde $\nu = 0.005$ için elde edilen sonuçlar	43
4.2. İkinci test probleminde elde edilen sonuçlar	44
5.1. Birinci test probleminde bulunan hata normları	52
5.2. İkinci test probleminde elde edilen sonuçlar	53
6.1. Birinci test probleminde elde edilen sonuçlar	59
6.2. İkinci test probleminde elde edilen sonuçlar	60
7.1. Birinci test probleminde bulunan hata normları	68
7.2. İkinci test probleminde elde edilen sonuçlar	69
8.1. Test probleminde bulunan hata normları	77
9.1. Birinci test probleminde elde edilen sonuçlar	86
9.2. İkinci test probleminde elde edilen sonuçlar	87
10.1. Birinci test probleminde elde edilen sonuçlar	98
10.2. İkinci test probleminde elde edilen sonuçlar	99

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
δ	Zamana bağılı elaman parametresi
σ	Zamana bağılı elaman parametresi
\circ	Zamana göre türev.



1 GİRİŞ

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak temel kavramlar kısaca tanıtılacaktır. İlk olarak B-spline fonksiyonların tanımı ve bazı önemli özellikleri verilecek daha sonra nümerik çözümlerde kullanılacak kuadratik, kübik ve kuintik B-spline fonksiyonlar ifade edilecektir. Son olarak Burger denklemini tanıtılacaktır.

1.1 B-spline Fonksiyonlar

Günümüz dünyasında yaşanan büyük gelişmelerden sonra, bilgisayar çizimlerinde eğrileri tanımlayabilmek için çok yönlü yaklaşımlar sunan B-spline fonksiyonlar, geometrik modelleme, bilgisayar çizimleri ve daha başka birçok alanda önemli bir konuma gelmiştir.

Çok sayıdaki veri noktalarına bir tek eğri ile yaklaşmak büyük kolaylıklar sağlasa da bazı hallerde bu durum büyük hatalara neden olabilir. Ayrıca bu amaçla kullanılan Newton ve Lagrange Enterpolasyon polinomlarının derecesi nokta sayısı arttıkça artacağından, bu tür polinomlarla yapılacak işlemler zorlaşır. Bu durumda, *düğüm* olarak adlandırılan noktalarda birbirlerine bağlı, polinom eğri parçalarından oluşan B-spline fonksiyonlar yardımıyla yapılan yaklaşımlar bir alternatif olarak karşımıza çıkar.

B-spline fonksiyonlarla diferensiyel problemlerine yapılan yaklaşım metodlarından iki tanesi Galerkin ve Kolokeyşin metodlarıdır. Galerkin metodu, B-spline yaklaşım metodlarının içinde en çok kullanılan methodur. Kolokeyşin metodu ise sadece düğüm noktalarında hesaplama yaptığı için Galerkin metoduna göre hesaplama zamanındaki azalma nedeniyle daha ekonomik bir alternatifi temsil eder.

1.1.1 B-spline fonksiyonların bazı özellikleri

d , negatif olmayan bir tamsayı ve $x = (x_m)$, en az $d + 2$ uzunluğunda, azalmayan, bir reel sayı dizisi olsun. $x = (x_m)$ dizisine *düğüm vektörü* yada *düğüm dizisi* denir. Bu durumda x düğümlerine sahip, d . Dereceden, m . B-spline fonksiyonu $\phi_{m,d}$ nin bazı özellikleri aşağıdaki şekilde verilebilir.

1. m . B-spline fonksiyonu $\phi_{m,d}$, sadece $x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+d+1}$ düğümlerine bağlıdır.
2. (a) Eğer x , $[x_m, x_{m+d+1})$ aralığının dışında ise $\phi_{m,d}(x) = 0$ dir. Eğer $x_m = x_{m+d+1}$ ise $\forall x$ için $\phi_{m,d} = 0$ olduğuna dikkat edilmelidir.

(b) Eğer $x, [x_\mu, x_{\mu+1})$ aralığında bulunuyorsa ve $m < \mu - d$ ya da $m > \mu$ ise $\phi_{m,d}(x) = 0$ dır.

3. Eğer $x \in (x_m, x_{m+d+1})$ ise $\phi_{m,d}(x) > 0$ dır. Burada, $[x_m, x_{m+d+1}]$ kapalı aralığı $\phi_{m,d}$ nin desteği olarak adlandırılır.

4. Her bir $\phi_{m,d}^k(x)$, d . dereceden bir polinom olmak üzere $\phi_{m,d}$ B-spline fonksiyonu,

$$\phi_{m,d}(x) = \sum_{k=m}^{m+d} \phi_{m,d}^k(x) \phi_{k,0}(x)$$

şeklinde yazılabilir.

5. Eğer $z = x_{m+1} = \dots = x_{m+d} < x_{m+d+1}$ ise $\phi_{m,d}(z) = 1$ ve $i \neq m$ için $\phi_{i,d}(z) = 0$ dır.

6. Eğer z sayısı, x_m, \dots, x_{m+d+1} arasında t defa görünüyorsa $\phi_{m,d}$ nin $0, 1, \dots, d-t$ inci mertebeden türevlerinin hepsi z noktasında süreklidir.

7. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\phi(x+y | x_m + y, \dots, x_{m+d+1} + y) = \phi(x | x_m, \dots, x_{m+d+1})$$

eşitliği sağlanır.

8 Herhangibir $[x_m, x_{m+1})$ aralığında d . dereceden B-spline fonksiyonlardan en fazla $d+1$ tanesi sıfırdan farklıdır ve sıfırdan farklı bu $d+1$ B-spline fonksiyonun toplamı 1 dir.

9. Eğer düğümlerin sayısı $t+1$, B-spline fonksiyonların derecesi d ve derecesi d olan B-spline fonksiyonların sayısı da $n+1$ ise $t = n + d + 1$ dir.

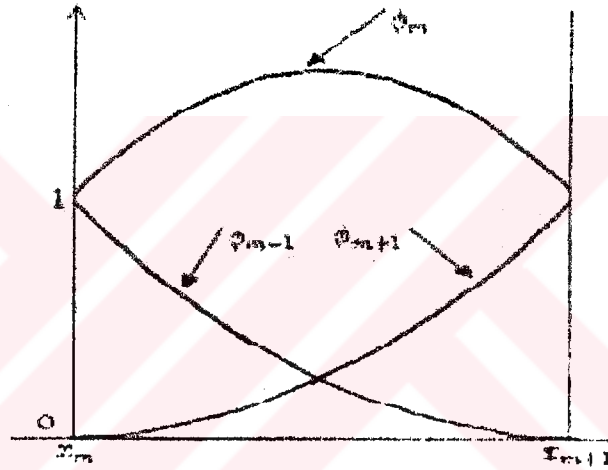
Bazı düşük dereceden B-spline fonksiyonları tanıtalım.

1.1.2 Kuadratik B-spline fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığını, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ noktalarında eşit uzunluklu alt aralıklara bölelim. Bu alt aralıklar üzerinde oluşturulan kuadratik B-spline fonksiyonları, $m = -1, 0, \dots, N$ ve $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere,

$$\phi_{m,2}(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2 + 3(x_m - x)^2, & x \in [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2, & x \in [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^2, & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{D.D.} \end{cases}$$

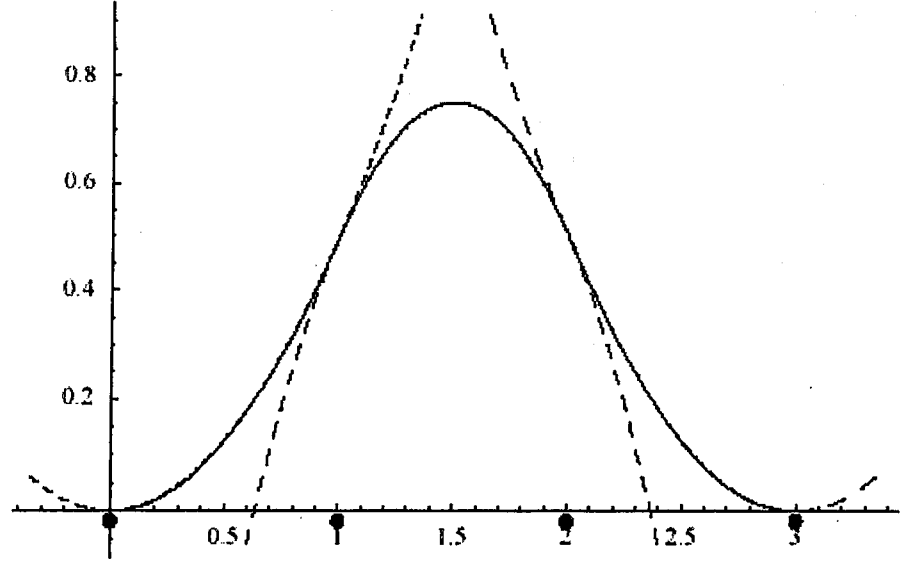
şeklinde tanımlanır. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığındaki kuadratik B-spline şekil fonksiyonları Şekil 1.1 ile verilmiştir.



Şekil 1.1

$\phi_m(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonlarından oluşan $X_N = L\{\phi_{-1}, \phi_0, \dots, \phi_N, \phi_{N+1}\}$ kümesi, $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonların bir tabanıdır [21].

Şekil 1.2 de $\phi(x|0,1,2,3)$ Kuadratik B-spline fonksiyonu, kendisini oluşturan polinom parçaları ile birlikte görülmektedir. Şekilde üç polinomun $\phi(x|0,1,2,3)$ Kuadratik B-spline fonksiyonunu oluştururken, fonksiyonun birinci mertebeden türevinin sürekli olabilmesi için birbirlerine nasıl güzel bağlandıklarına dikkat edilmelidir.



Şekil 1.2

Kuadratik B-spline fonksiyonu $\phi_{m,2}(x)$ ve onun türevi, $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır. Düğüm noktalarının eşit aralıklı olması durumunda $\phi_{m,2}(x)$ Kuadratik B-spline fonksiyonunun ve onun türevi $\phi'_{m,2}(x)$ nin, $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığında, düğüm noktalarındaki değerleri Çizelge 1.1 ile verilmektedir. Burada h iki düğüm noktası arasındaki uzaklıktır.

Çizelge 1.1

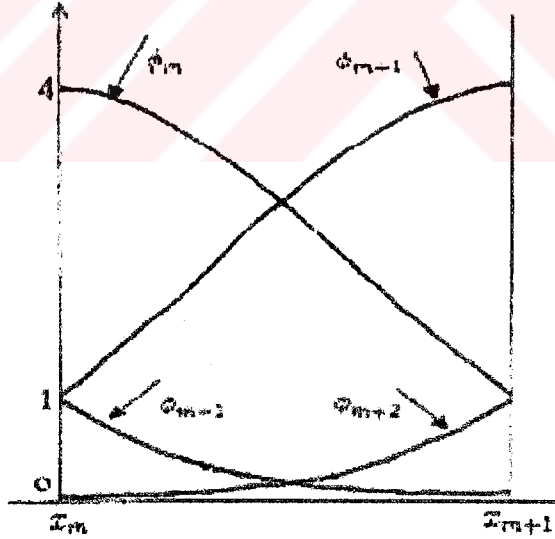
x	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
$\phi_{m,2}(x)$	0	1	1	0
$\phi'_{m,2}(x)$	0	$\frac{2}{h}$	$-\frac{2}{h}$	0

1.1.3 Kübik B-spline fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığını, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ noktalarında eşit uzunluklu alt aralıklara bölelim. Bu alt aralıklar üzerinde oluşturulan kübik B-spline fonksiyonları, $m = -1, 0, \dots, N+1$ ve $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere,

$$\phi_{m,3}(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3, & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3, & x \in [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3, & x \in [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3, & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0, & \text{D.D.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığındaki kübik B-spline şekil fonksiyonları Şekil 1.3 ile verilmiştir.



Şekil 1.3

$\phi_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonlarından oluşan $X_N = L\{\phi_{-1}, \phi_0, \dots, \phi_N, \phi_{N+1}\}$ kümesi, $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonların bir tabanıdır [21].

Kübik B-spline fonksiyonu $\phi_{m,3}(x)$ ve onun türevleri, $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır. Düğüm noktalarının eşit aralıklı olması durumunda $\phi_{m,3}(x)$ kübik B-spline fonksiyonunun, onun birinci türevi $\phi'_{m,3}(x)$ nin ve onun ikinci türevi $\phi''_{m,3}(x)$ nin $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığında, düğüm noktalarındaki değerleri Çizelge 1.2 ile verilmektedir. Burada h iki düğüm noktası arasındaki uzaklıktır.

Çizelge 1.2

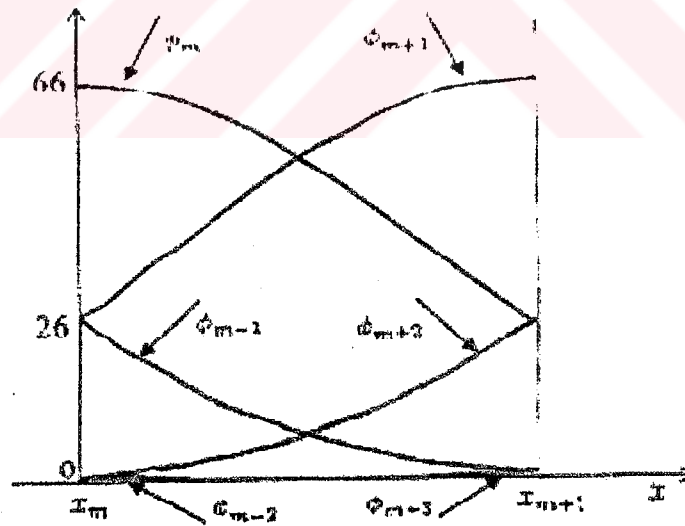
x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
$\phi_{m,3}(x)$	0	1	4	1	0
$\phi'_{m,3}(x)$	0	$\frac{3}{h}$	0	$-\frac{3}{h}$	0
$\phi''_{m,3}(x)$	0	$\frac{6}{h^2}$	$-\frac{12}{h^2}$	$\frac{6}{h^2}$	0

1.1.4 Kuintik B-spline fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığını, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ noktalarında eşit uzunluklu alt aralıklara bölelim. Bu alt aralıklar üzerinde oluşturulan kuintik B-spline fonksiyonları, $m = -2, -1, \dots, N+2$ ve $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere,

$$\phi_{m,5}(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x-x_{m-3})^5, & x \in [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x-x_{m-3})^5 - 6(x-x_{m-2})^5, & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x-x_{m-3})^5 - 6(x-x_{m-2})^5 + 15(x-x_{m-1})^5, & x \in [x_{m-1}, x_m] \\ (x-x_{m-3})^5 - 6(x-x_{m-2})^5 + 15(x-x_{m-1})^5 - 20(x-x_{m-1})^5, & x \in [x_m, x_{m+1}] \\ (x-x_{m-3})^5 - 6(x-x_{m-2})^5 + 15(x-x_{m-1})^5 - 20(x-x_{m-1})^5 + 15(x-x_{m+1})^5, & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x-x_{m-3})^5 - 6(x-x_{m-2})^5 + 15(x-x_{m-1})^5 - 20(x-x_{m-1})^5 + 15(x-x_{m+1})^5 - 6(x-x_{m+2})^5, & x \in [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0, & \text{D.D.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığındaki kuintik B-spline şekil fonksiyonları Şekil 1.4 ile verilmiştir.



Şekil 1.4

$\phi_m(x)$ kuintik B-spline fonksiyonlarından oluşan $X_N = L\{\phi_{-2}, \phi_{-1}, \dots, \phi_{N+1}, \phi_{N+2}\}$ kümesi, $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonların bir tabanıdır [21].

Kuintik B-spline fonksiyonu $\phi_{m,5}(x)$ ve onun türevleri, $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığının dışında sıfırdır. Dügüm noktalarının eşit aralıklı olması durumunda $\phi_{m,5}(x)$ Kuintik B-spline fonksiyonunun ve onun dördüncü mertebeye kadarki türevleri $\phi'_{m,5}(x), \phi''_{m,5}(x), \phi'''_{m,5}(x), \phi^{(4)}_{m,5}(x)$ nin $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığında, dügüm noktalarındaki değerleri Çizelge 1.3 ile verilmektedir. Burada h iki dügüm noktası arasındaki uzaklıktır.

Çizelge 1.3

x	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}
$\phi_{m,5}(x)$	0	1	26	66	26	1	0
$\phi'_{m,5}(x)$	0	$\frac{5}{h}$	$\frac{50}{h}$	0	$-\frac{50}{h}$	$-\frac{5}{h}$	0
$\phi''_{m,5}(x)$	0	$\frac{20}{h^2}$	$\frac{40}{h^2}$	$-\frac{120}{h^2}$	$\frac{40}{h^2}$	$\frac{20}{h^2}$	0
$\phi'''_{m,5}(x)$	0	$\frac{60}{h^3}$	$-\frac{120}{h^3}$	0	$\frac{120}{h^3}$	$-\frac{60}{h^3}$	0
$\phi^{(4)}_{m,5}(x)$	0	$\frac{120}{h^4}$	$-\frac{480}{h^4}$	$\frac{720}{h^4}$	$-\frac{480}{h^4}$	$\frac{120}{h^4}$	0

1.2 Burger Denklemi

ν , bir reel sabit olmak üzere;

$$U_t + UU_x - \nu U_{xx} = 0 \quad (1.1)$$

denklemi Burger denklemi olarak bilinir ve ilk olarak Bateman [3] tarafından çalışılmıştır. Burger [6], özellikle turbulansın modeli olması gibi, bu denklemi içeren geniş çapta çalışmalar yapmıştır. Bundan dolayı denklem Burger denklemi olarak adlandırılmıştır.

Burger denklemi için başlangıç ve sınır koşulları sırasıyla

$$U(x,0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (1.2)$$

$$U(a,t) = \alpha, \quad U(b,t) = \beta, \quad t \in [0, T] \quad (1.3)$$

olarak seçilir.

Burger denklemi, ısı iletimi, gaz dinamiği, esneklik, sayılar teorisi, şok dalga teorisi ve turbulans problemlerinin modellenmesinde kullanılır.

Burger denklemi, non-lineer konvektif UU_x terimi ve νU_{xx} viskozite teriminden dolayı Navier-Stokes denklemine benzer özellikler gösterir. Bu nedenle Navier-Stokes denkleminin nümerik çözümlerine geçmeden önce daha basit bir model olan Burger denklemini çalışmak uygun bir başlangıçtır. Bu yüzden Burger denklemi, Navier-Stokes denkleminin nümerik çözüm metodlarının kararlılık ve doğruluğunun test edilmesinde bir model olarak kullanılır.

Hopf [13] ve Cole [7], keyfi başlangıç koşulları için Burger denklemini analitik ve birbirinden bağımsız olarak çözmüşlerdir. Birçok durumda bu çözümler, ν viskozite sabitinin küçük değerleri için çok yavaş yakınsayabilen sonsuz serileri içerir.

Bugüne kadar birçok bilim adamı Burger denkleminin nümerik çözümlerini bulabilmek için çeşitli nümerik çözüm metodları kullandılar. Çok küçük viskozite değerlerinde denklemin nümerik çözümlerinde zorlukların ortaya çıktığı görüldü. Rubin ve Khosla [22], kübik spline fonksiyonları olarak kolokeyşin metoduyla Burger denkleminin nümerik çözümünü araştırmışlardır. Jain ve Holla [15], kübik spline fonksiyonlar yardımıyla sonlu farklar metoduyla bir ve iki boyutlu Burger denkleminin nümerik çözümü üzerinde çalışmışlardır. Jain ve Lohar [16], bir ve iki boyutlu Burger denklemini ikiye parçaladıktan sonra kübik spline kullanarak sonlu farklar metoduyla nümerik çözümler üzerinde durmuşlardır. Varoğlu ve Finn [23], ağırlıklı rezidü metodu ile Burger denkleminin sayısal çözümünü vermişlerdir. Christie, Griffiths, Mitchell ve Sanz-Serna [6], kuadratik şekil fonksiyonları olarak Burger denkleminin Petrov-Galerkin metoduyla nümerik çözümünü elde etmişlerdir. Caldwell, Wanless ve Cook [5], Galerkin sonlu elemanlar metoduyla Burger denkleminin nümerik çözümünü vermişlerdir. Herbst, Schoombie ve Mitchell [12], lineer ve kübik şekil fonksiyonları kullanarak Burger denkleminin Petrov-Galerkin metoduyla nümerik çözümü üzerine çalışmışlardır. Fletcher [11], bir ve iki boyutlu Burger denkleminin beş ve yedi noktalı sonlu farklar metoduyla, lineer, kuadratik ve kübik şekil fonksiyonlarını kullanarak da sonlu elemanlar metoduyla sayısal çözümü üzerine çalışmış ve bulduğu sonuçları birbirleriyle kıyaslamıştır. Evans ve Abdullah [10], sonlu farklar metodunun bir uygulaması olan explicit grup metodu yardımıyla Burger denklemini nümerik olarak çözmüşler ve metodun kararlılığını incelemişlerdir. Nguyen ve Reynen [20], lineer şekil fonksiyonları ile en küçük kareler metoduyla Burger denklemini

çözmüşlerdir. A.H.A Ali, L.R.T Gardner ve G.A. Gardner [1], kuadratik B-Spline kullanarak Galerkin metoduyla Burger denkleminin nümerik çözümünü araştırmışlar, metodun kararlılığını incelemişlerdir. A.H.A Ali, L.R.T Gardner ve G.A. Gardner [2], kübik spline olarak Kolokeyşin metoduyla Burger denkleminin nümerik çözümünü araştırmışlardır. Kakuda ve Tosaka [18], genelleştirilmiş sınır elemanları yaklaşımıyla Burger denkleminin nümerik çözümü üzerinde çalışmışlardır. Iskandar ve Mohsen [14], Burger denklemini ikiye parçalayarak sonlu farklar metoduyla nümerik çözüm üzerinde durmuşlardır. Jain, Shankar ve Singh [17], Burger denklemini üçe parçaladıktan sonra kübik spline ile sonlu farklar metodunu kullanmış, nümerik çözüm bulmuş ve yerel kesme hatasını hesaplayarak metodlarının kararlılığını incelemişlerdir. Kutluay, Bahadır ve Özdeş [19], sonlu farklar metodunun bir uygulaması olan explicit ve tam explicit metodlarıyla Burger denkleminin nümerik çözümünü elde etmişlerdir.

Bu tezde, Burger denkleminin B-spline çözüm metodları bir araya getirilecektir. Tezin 2. bölümünde konuma göre parçalanmış Burger denkleminin kuadratik B-spline kolokeyşin çözümü, 3. bölümünde zamana göre parçalanmış Burger denkleminin kübik B-spline kolokeyşin çözümü ve 4. bölümünde de konuma göre parçalanmış Burger denkleminin kübik B-spline kolokeyşin çözümü yapıldıktan sonra çeşitli makaleler incelenecektir. Bu bağlamda 5. bölümde A.H.A Ali, L.R.T Gardner ve G.A Gardner tarafından hazırlanan "A collocation Method for Burgers' Equation Using Cubic Splines" başlıklı çalışma incelenecektir. 6. bölümde İ.Dağ, D.Irk ve B.Saka' nın yayınladığı "A Numerical Solution of the Burgers' Equation Using Cubic B-splines" isimli çalışma yer alacaktır. 7. bölümde A.H.A Ali, L.R.T Gardner ve G.A Gardner' ın "A Method of Line Solutions for Burgers' Equation" başlıklı makalesi çalışılacaktır. 8. bölümde S.I. Zaki tarafından hazırlanan "Solitary Waves of the Korteweg-de Vries-Burgers' Equation" başlıklı çalışma incelenecektir. 9. ve 10. bölümlerde ise İ.Dağ, B.Saka ve A.Boz' un yayınladığı "A Quintic B-spline Galerkin Methods for Numerical Solutions of the Burgers' Equation" isimli çalışma yer alacaktır.

1.3 Test problemleri

Lineer olmayan Burger denkleminin nümerik çözümü aşağıda verilen başlangıç ve sınır koşulları altında araştırılmıştır.

1. Burger denkleminin H.Nguyen & J.Reynen tarafından verilen analitik çözümü

$$t_0 = \exp\left(\frac{1}{8v}\right) \text{ olmak üzere;}$$

$$U(x,t) = \frac{\frac{x}{t}}{1 + \sqrt{\frac{1}{t_0}} \exp\left(\frac{x^2}{4vt}\right)}, \quad t \geq 1 \quad (1.4)$$

şeklindedir.

Bu test probleminde $[a, b]$ tanım aralığı olmak üzere;

$$U(x,1) = \frac{x}{1 + \sqrt{\frac{1}{t_0}} \exp\left(\frac{x^2}{4v}\right)}, \quad a \leq x \leq b \quad (1.5)$$

başlangıç şartı ve

$$U(a,t) = U(b,t) = 0, \quad t \geq 1 \quad (1.6)$$

sınır şartı kullanılacaktır. [20]

2. Bu test probleminde, $[a, b]$ tanım aralığında $\eta = \frac{\alpha(x - \mu t - \gamma)}{v}$ olmak üzere;

$$U(x,t) = \frac{[\alpha + \mu + (\alpha - \mu) \exp(\eta)]}{1 + \exp(\eta)}, \quad a \leq x \leq b, t \geq 0 \quad (1.7)$$

analitik çözümü ve denklemde $t = 0$ olarak $\eta = \frac{\alpha(x - \beta)}{v}$ iken

$$U(x,0) = \frac{[\alpha + \mu + (\alpha - \mu) \exp(\eta)]}{1 + \exp(\eta)} \quad (1.8)$$

başlangıç şartıyla beraber $\alpha = 0.4$, $\mu = 0.6$ ve $\gamma = 0.125$ alınarak elde edilen

$$U(a,t) = 1, U(b,t) = 0.2, t \geq 0 \quad (1.9)$$

sınır şartları kullanılacaktır. [6]

2 KONUMA GÖRE PARÇALANMIŞ BURGER DENKLEMİNİN KUADRATİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, konuma göre parçalanmış Burger denkleminin kuadratik B-spline kolokeyşin metoduyla nümerik çözümleri verilecektir.

2.1 Kuadratik B-spline Kolokeyşin Metodu

Bu kısımda (1.1) ile verilen Burger denkleminin $V(x,t) = -U_x(x,t)$ dönüşümü uygulanarak denklemin kuadratik B-spline kolokeyşin metoduyla nümerik çözümleri verilecektir. Bu dönüşüm ile Burger denklemi, bilinmeyen fonksiyonları U, V , bunların konuma göre türevleri U_x, V_x ve U nun zamana göre türevi U_t olan denklem sistemi halini alır.

$V(x,t) = -U_x(x,t)$ dönüşümü altında (1.1) ile verilen Burger denklemi, (1.2) ile verilen başlangıç koşulu ve (1.3) ile verilen sınır koşulları sırasıyla

$$\begin{aligned} U_t - UV + vW_x &= 0 \\ V + U_x &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$U(x,0) = f(x), \quad V(x,0) = -f'(x), \quad a \leq x \leq b \quad (2.2)$$

$$U(a,t) = \alpha, \quad U(b,t) = \beta, \quad V(a,t) = V(b,t) = 0, \quad t \in (0, T] \quad (2.3)$$

olarak yeniden yazılabilir.

$[a, b]$ aralığını, x_m düğüm noktaları yardımıyla

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

şeklinde eşit uzunluklu alt aralıklara bölelim. $m = -1, 0, \dots, N$ olmak üzere $\phi_m(x)$ fonksiyonları, düğüm noktalarında tanımlı, kuadratik B-Spline fonksiyonlar olsun. (2.1) denklemindeki $U(x,t)$ ve $V(x,t)$ analitik fonksiyonlarının yaklaşık çözümlerinin, $U_N(x,t)$ ve $V_N(x,t)$ olduğunu varsayalım. Bu yaklaşık çözümler kuadratik B-spline fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
U_N(x,t) &= \sum_{m=-1}^N \delta_m(t) \phi_m(x) \\
&= \delta_{-1}(t) \phi_{-1}(x) + \delta_0(t) \phi_0(x) + \cdots + \delta_N(t) \phi_N(x), \\
V_N(x,t) &= \sum_{m=-1}^N \sigma_m(t) \phi_m(x) \\
&= \sigma_{-1}(t) \phi_{-1}(x) + \sigma_0(t) \phi_0(x) + \cdots + \sigma_N(t) \phi_N(x)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Buradaki δ_m ve σ_m değerleri, (2.1) denkleminin kuadratik B-spline kolokeyşin formundan, (2.3) sınır koşulları kullanılarak elde edilecek zamana bağlı parametrelerdir.

Kuadratik B-spline fonksiyonlar ardışık 3 aralığı örttüğünden $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı 3 ardışık B-spline fonksiyonu tarafından örtülür. (Şekil 1.1) Böylece U ve V yaklaşık çözümleri $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında ardışık kuadratik B-spline fonksiyonları cinsinden

$$\begin{aligned}
U_m &= \sum_{j=m-1}^{m+1} \delta_j \phi_j \\
V_m &= \sum_{j=m-1}^{m+1} \sigma_j \phi_j
\end{aligned} \tag{2.5}$$

şeklinde yazılabilir. (2.4) denklemleri ve Çizelge 1.1 kullanılarak, U_m, V_m fonksiyonlarının ve bu fonksiyonların birinci mertebeden türevlerinin, $m = 0, 1, \dots, N$ olmak üzere, x_m düğüm noktalarındaki değerleri, eleman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned}
U_m &= U(x_m) = \delta_{m-1} + \delta_m \\
U'_m &= U'(x_m) = \frac{2}{h} (\delta_m - \delta_{m-1}) \\
V_m &= V(x_m) = \sigma_{m-1} + \sigma_m \\
V'_m &= V'(x_m) = \frac{2}{h} (\sigma_m - \sigma_{m-1})
\end{aligned} \tag{2.6}$$

olarak bulunabilir.

o, zamana bağlı türev ve $d = \delta_{m-1} + \delta_m$ olmak üzere, (2.6) eşitlikleri (2.1) denklem sisteminde yerlerine yazılırsa, $2N + 2$ denklemden oluşan

$$\begin{aligned}
(\delta_{m-1}^{\circ} + \delta_m^{\circ}) - d(\sigma_{m-1} + \sigma_m) + v \frac{2}{h}(\sigma_m - \sigma_{m-1}) &= 0 \\
(\sigma_{m-1} + \sigma_m) + \frac{2}{h}(\delta_m - \delta_{m-1}) &= 0
\end{aligned} \tag{2.7}$$

diferensiyel denklem sistemi elde edilir.

δ_m ve σ_m eleman parametrelerinin iki ardışık zaman aralığı n ve $n+1$ deki değerleri, lineer interpolasyonla

$$\delta_m = \frac{\delta_m^{n+1} + \delta_m^n}{2}, \quad \sigma_m = \frac{\sigma_m^{n+1} + \sigma_m^n}{2} \tag{2.8}$$

ve bunların zamana göre türevleri, Crank-Nicholson formülü yardımıyla

$$\delta_m^{\circ} = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t}, \quad \sigma_m^{\circ} = \frac{\sigma_m^{n+1} - \sigma_m^n}{\Delta t} \tag{2.9}$$

olarak bulunur. Bu eşitlikler (2.7) denklem sisteminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta t}(\delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n + \delta_m^{n+1} - \delta_m^n) - \frac{d}{2}(\sigma_{m-1}^{n+1} + \sigma_{m-1}^n + \sigma_m^{n+1} + \sigma_m^n) + \\
\frac{2v}{2h}(\sigma_m^{n+1} + \sigma_m^n - \sigma_{m-1}^{n+1} - \sigma_{m-1}^n) &= 0 \\
\frac{1}{2}(\sigma_{m-1}^{n+1} + \sigma_{m-1}^n + \sigma_m^{n+1} + \sigma_m^n) + \frac{2}{2h}(\delta_m^{n+1} + \delta_m^n - \delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n) &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu sistemde gerekli düzenlemeler yapılarak $2N+2$ denklemden oluşan $2N+4$ bilinmeyenli

$$\begin{aligned}
2h\delta_{m-1}^{n+1} - \beta_{m1}\sigma_{m-1}^{n+1} + 2h\delta_m^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_m^{n+1} &= 2h\delta_{m-1}^n + \beta_{m1}\sigma_{m-1}^n + 2h\delta_m^n - \beta_{m2}\sigma_m^n, \\
-2\delta_{m-1}^{n+1} + h\sigma_{m-1}^{n+1} + 2\delta_m^{n+1} + h\sigma_m^{n+1} &= 2\delta_{m-1}^n - h\sigma_{m-1}^n - 2\delta_m^n - h\sigma_m^n
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$m = 0, 1, \dots, N$

denklem sistemi bulunur. Burada $\beta_{m1} = hd\Delta t + 2v\Delta t$, $\beta_{m2} = -hd\Delta t + 2v\Delta t$ ve $d = \delta_{m-1} + \delta_m$ dir.

Bu denklem sisteminin çözülebilmesi için iki bilinmeyen yok edilerek denklem sayısı ile bilinmeyen sayısının eşitlenmesi gerekir. Bu yüzden δ_{-1} ve σ_N parametreleri, $U_0 = \delta_{-1} + \delta_0$ ve $V_N = \sigma_{N-1} + \sigma_N$ sınır koşulları kullanılarak elimine edilecektir. Böylece $(2N+2) \times (2N+2)$ boyutlu, 5 sütun elemanlı köşegen denklem sistemi elde edilir.

(2.3) sınır koşulları, eleman parametrelerini kullanarak

$$\begin{aligned}\delta_{-1} + \delta_0 &= \alpha \\ \sigma_{N-1} + \sigma_N &= 0\end{aligned}\quad (2.11)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan sınır parametrelerinin değerleri

$$\begin{aligned}\delta_{-1} &= \alpha - \delta_0 \\ \sigma_N &= -\sigma_{N-1}\end{aligned}\quad (2.12)$$

olarak yazılabilir. Bu değerler (2.10) denklem sisteminde yerine yazıldığında istenilen eliminasyon işlemi yapılmış olur:

$$\begin{aligned}F_1 &= 2h\delta_{-1}^n + \beta_{m1}\sigma_{-1}^n + 2h\delta_0^n - \beta_{m2}\sigma_0^n \\ F_2 &= 2\delta_{-1}^n - h\sigma_{-1}^n - 2\delta_0^n - h\sigma_0^n \\ F_{2N+1} &= 2h\delta_{N-1}^n + \beta_{m1}\sigma_{N-1}^n + 2h\delta_N^n - \beta_{m2}\sigma_N^n \\ F_{2N+2} &= 2\delta_{N-1}^n - h\sigma_{N-1}^n - 2\delta_N^n - h\sigma_N^n\end{aligned}$$

olmak üzere (2.10) denklem sisteminden $m = 0$ için,

$$\begin{aligned}2h\delta_{-1}^{n+1} - \beta_{m1}\sigma_{-1}^{n+1} + 2h\delta_0^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_0^{n+1} &= F_1 \\ -2\delta_{-1}^{n+1} + h\sigma_{-1}^{n+1} + 2\delta_0^{n+1} + h\sigma_0^{n+1} &= F_2\end{aligned}\quad (2.13)$$

ve $m = N$ için,

$$\begin{aligned}2h\delta_{N-1}^{n+1} - \beta_{m1}\sigma_{N-1}^{n+1} + 2h\delta_N^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_N^{n+1} &= F_{2N+1} \\ -2\delta_{N-1}^{n+1} + h\sigma_{N-1}^{n+1} + 2\delta_N^{n+1} + h\sigma_N^{n+1} &= F_{2N+2}\end{aligned}\quad (2.14)$$

eşitlikleri bulunur. (2.12) eleman parametreleri (2.13) ve (2.14) denklemlerinde yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa (2.13) denklemi,

$$\begin{aligned}
U_N(x, 0) &= \sum_{m=-1}^N \delta_m^0 \phi_m(x) \\
&= \delta_{-1}^0 \phi_{-1}(x) + \delta_0^0 \phi_0(x) + \dots + \delta_N^0 \phi_N(x), \\
V_N(x, 0) &= \sum_{m=-1}^N \sigma_m^0 \phi_m(x) \\
&= \sigma_{-1}^0 \phi_{-1}(x) + \sigma_0^0 \phi_0(x) + \dots + \sigma_N^0 \phi_N(x)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradaki δ_m^0 ve σ_m^0 parametreleri belirlenecek olan parametrelerdir. Başlangıç koşullarının düğüm noktalarındaki

$$U_N(x_m, 0) = U(x_m, 0) \text{ ve } V_N(x_m, 0) = V(x_m, 0), \quad m = 0, 1, \dots, N$$

değerleri kullanılarak, δ parametresi için,

$$\begin{aligned}
U(x_0, 0) &= \delta_{-1} + \delta_0 \\
U(x_1, 0) &= \delta_0 + \delta_1 \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
U(x_N, 0) &= \delta_{N-1} + \delta_N
\end{aligned} \tag{2.17}$$

ve benzer şekilde σ parametresi için de,

$$\begin{aligned}
V(x_0, 0) &= \sigma_{-1} + \sigma_0 \\
V(x_1, 0) &= \sigma_0 + \sigma_1 \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
V(x_N, 0) &= \sigma_{N-1} + \sigma_N
\end{aligned} \tag{2.18}$$

şeklinde $N+1$ denklemden oluşan $N+2$ bilinmeyenli denklem sistemleri elde edilir. Bu denklem sistemlerinin çözülebilmesi için birer tane bilinmeyenlerinin elimine edilmesi gerekir. Eliminasyon işlemin için $U'_N(a, 0)$ ve $V'_N(a, 0)$ sınır koşulları kullanılarak δ_{-1} ile σ_{-1} parametreleri yok edilebilir. Böylece $N+1$ bilinmeyenli $N+1$ denklem sistemleri elde edilir ki, bu sistemlerin çözümleri yerine koyma ile kolayca bulunabilir.

$$U'_N(a, 0) = 0 \text{ ve } V'_N(a, 0) = 0 \text{ sınır koşullarından}$$

$$\frac{2}{h}(\delta_0 - \delta_{-1}) = 0$$

$$\frac{2}{h}(\sigma_0 - \sigma_{-1}) = 0$$

yazılabilir. Buradan da $\delta_{-1} = \delta_0$, $\sigma_{-1} = \sigma_0$ olduğu bulunur. Elde edilen bu sınır parametreleri (2.17) ve (2.18) denklem sistemlerinde yerlerine yazılırsa,

$$U(x_0, 0) = 2\delta_0$$

$$U(x_1, 0) = \delta_0 + \delta_1$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$U(x_N, 0) = \delta_{N-1} + \delta_N$$

ve

$$V(x_0, 0) = -U'(x_0, 0) = 2\sigma_0$$

$$V(x_1, 0) = -U'(x_1, 0) = \sigma_0 + \sigma_1$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$V(x_N, 0) = -U'(x_N, 0) = \sigma_{N-1} + \sigma_N$$

bulunur. Buradan eleman parametreleri

$$\delta_0 = \frac{U(x_0, 0)}{2}$$

$$\delta_1 = U(x_1, 0) - \delta_0$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\delta_N = U(x_N, 0) - \delta_{N-1}$$

ve

$$\sigma_0 = \frac{-U'(x_0, 0)}{2}$$

$$\sigma_1 = -U'(x_1, 0) - \sigma_0$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\sigma_N = -U'(x_N, 0) - \sigma_{N-1}$$

olarak elde edilmiş olur.

2.3 Test Problemleri

Bu kısımda, iki test problemi ile Burger denkleminin nümerik sonuçları sunulacak ve metodun doğruluğu

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N \left| (U_j - (U_N)_j) \right|^2}, \quad L_\infty = \|U - U_N\|_\infty = \max_j \left| U_j - (U_N)_j \right| \quad (2.19)$$

şeklinde verilen L_2 ve L_∞ hata normları ile ölçülecektir.

2.3.1 Birinci test problemi

Birinci test probleminde, Burger denkleminin (1.4) ile verilen analitik çözümüyle beraber, $[0,1]$ tanım aralığında, (1.5) başlangıç ve (1.6) sınır şartı kullanılarak denklemin nümerik sonuçları elde edildi. Nümerik çözümler için $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$ ve $\nu = 0.005$ alınarak program $t = 3.25$ anına kadar çalıştırıldı. Elde edilen sonuçlar Çizelge 2.1 ile verildi.

Çizelge 2.1 $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$ ve $\nu = 0.005$

x	t = 1.7		t = 2.5		t = 3.25	
	NÜMERİK	ANALİTİK	NÜMERİK	ANALİTİK	NÜMERİK	ANALİTİK
0.1	0.05882	0.05882	0.04000	0.04000	0.03077	0.03077
0.2	0.11764	0.11765	0.08000	0.08000	0.06154	0.06154
0.3	0.17646	0.17646	0.12000	0.12000	0.09230	0.09231
0.4	0.23517	0.23517	0.15998	0.15998	0.12307	0.12307
0.5	0.29190	0.29190	0.19982	0.19983	0.15380	0.15380
0.6	0.29572	0.29591	0.23811	0.23812	0.18430	0.18430
0.7	0.04207	0.04193	0.25302	0.25310	0.21269	0.21270
0.8	0.00063	0.00065	0.10228	0.10210	0.21838	0.21844
0.9	0.00000	0.00000	0.00553	0.00554	0.10170	0.10126
$L_2 \times 10^3$	0.07215		0.05103		1.24901	
$L_\infty \times 10^3$	0.31153		0.18902		8.98390	

Viskozite sabitinin $\nu = 0.0005$ olarak daha küçük seçilmesi ile elde edilen sonuçlar Çizelge 2.2 ile verildi. Çizelge incelendiğinde viskozite sabitinin küçük seçilmesi ile çözümdeki hatanın arttığı gözlemlendi.

Çizelge 2.2 $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$ ve $\nu = 0.0005$

x	$t = 1.7$		$t = 2.5$		$t = 3.25$	
	NÜMERİK	ANALİTİK	NÜMERİK	ANALİTİK	NÜMERİK	ANALİTİK
0.1	0.05882	0.05882	0.04000	0.04000	0.03077	0.03077
0.2	0.11765	0.11765	0.08000	0.08000	0.06154	0.06154
0.3	0.17646	0.17647	0.11999	0.12000	0.09232	0.09231
0.4	0.23525	0.23529	0.15998	0.16000	0.12309	0.12308
0.5	0.29414	0.29412	0.20002	0.20000	0.15383	0.15385
0.6	0.35303	0.35294	0.24005	0.24000	0.18457	0.18462
0.7	0.00001	0.00000	0.28002	0.28000	0.21536	0.21538
0.8	0.00000	0.00000	0.00719	0.00977	0.24615	0.24615
0.9	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.12021	0.12434
$L_2 \times 10^3$	1.24624		1.43951		1.24624	
$L_\infty \times 10^3$	13.8155		16.7712		13.8155	

2.3.2 İkinci test problemi

İkinci test probleminde, Burger denkleminin (1.7) ile verilen analitik çözümüyle beraber, $[0,1]$ tanım aralığında, (1.8) başlangıç ve (1.9) sınır şartı kullanılarak denklemin nümerik sonuçları elde edildi. Nümerik çözümler için $h = 1/36$, $\Delta t = 0.01$ ve $\nu = 0.01$ alınarak program $t = 1.5$ anına kadar çalıştırıldı. $t = 0.5$ anındaki, Burger denkleminin analitik sonuçları ile elde edilen nümerik sonuçlar Çizelge 2.3 ile verildi.

Çizelge 2.3 $h=1/36$, $\Delta t=0.01$ ve $\nu=0.01$

x	$t=0.5$	
	NÜMERİK	ANALİTİK
0.000	1.000	1.000
0.056	1.000	1.000
0.111	1.000	1.000
0.167	1.000	1.000
0.222	1.000	1.000
0.278	0.997	0.998
0.333	0.977	0.980
0.389	0.838	0.847
0.444	0.472	0.452
0.500	0.237	0.238
0.556	0.202	0.204
0.611	0.200	0.200
0.667	0.200	0.200
0.722	0.200	0.200
0.778	0.200	0.200
0.833	0.200	0.200
0.889	0.200	0.200
0.944	0.200	0.200
1.000	0.200	0.200
$L_2 \times 10^3$	4.48881	
$L_\infty \times 10^3$	19.80734	

3 ZAMANA GÖRE PARÇALANMIŞ BURGER DENKLEMİNİN KÜBİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, zamana göre parçalanmış Burger denkleminin kübik B-spline kolokeyşin metoduyla nümerik çözümleri verilecek ve nümerik metod için Fourier kararlılık analizi yapılacaktır.

3.1 Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu

Bu kısımda, zamana göre

$$\begin{aligned} U_t + 2UU_x &= 0 \\ U_t - 2\nu U_{xx} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

şeklinde parçalanmış Burger denkleminin nümerik çözümleri verilecektir. (3.1) denklemi ikinci mertebeden türev içerdiğinden nümerik çözümler için kübik B-spline fonksiyonlar kullanılacak ve böylece fonksiyonun ikinci mertebeden türevlerinin sürekliliği temin edilecektir.

$[a, b]$ aralığını, x_m düğüm noktaları yardımıyla

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

şeklinde eşit uzunluklu alt aralıklara bölelim. $m = -1, 0, \dots, N+1$ olmak üzere $\phi_m(x)$ fonksiyonları, düğüm noktalarında tanımlı, kübik B-spline fonksiyonlar olsun. (3.1) denklemdeki $U(x, t)$ analitik fonksiyonunun yaklaşık çözümünün, $U_N(x, t)$ olduğunu varsayalım. Bu yaklaşık çözüm kübik B-spline fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} U_N(x, t) &= \sum_{m=-1}^{N+1} \delta_m(t) \phi_m(x) \\ &= \delta_{-1}(t) \phi_{-1}(x) + \delta_0(t) \phi_0(x) + \dots + \delta_{N+1}(t) \phi_{N+1}(x). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Buradaki δ_m değerleri, (3.1) denkleminin kübik B-spline kolokeyşin formundan, (1.3) sınır koşulları kullanılarak elde edilecek, zamana bağlı parametrelerdir.

Kübik B-spline fonksiyonlar ardışık 4 aralığı örttüğünden $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı 4 ardışık B-spline fonksiyonu tarafından örtülür. (Şekil 1.3) Böylece U yaklaşık çözümleri $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında ardışık kübik B-spline fonksiyonları cinsinden

$$U_m = \sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_j \phi_j \quad (3.3)$$

şeklinde yazılabilir. (3.2) denklemini ve Çizelge 1.2 kullanılarak, U_m fonksiyonunun ve bu fonksiyonun birinci ve ikinci mertebeden x e göre türevlerinin, $m = 0, 1, \dots, N$ olmak üzere, x_m düğüm noktalarındaki değerleri, eleman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned} U_m &= U(x_m) = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} \\ U'_m &= U'(x_m) = \frac{3}{h}(\delta_{m+1} - \delta_{m-1}) \\ U''_m &= U''(x_m) = \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

olarak bulunur.

°, zamana bağlı türev ve $d = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}$ olmak üzere, (3.4) eşitlikleri (3.1) denklem sisteminde yerlerine yazılırsa, $2N + 2$ denklemden oluşan

$$\dot{\delta}_{m-1} + 4\dot{\delta}_m + \dot{\delta}_{m+1} + 2d \frac{3}{h}(\delta_{m+1} - \delta_{m-1}) = 0 \quad (3.5)$$

$$\ddot{\delta}_{m-1} + 4\ddot{\delta}_m + \ddot{\delta}_{m+1} - 2v \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) = 0 \quad (3.6)$$

diferensiyel denklem sistemi elde edilir.

δ_m eleman parametrelerinin ve bunların zamana göre türevlerinin iki ardışık zaman aralığı n ve $n+1/2$ deki değerleri (3.5) denklemini için,

$$\delta_m = \frac{\delta_m^n + \delta_m^{n+1/2}}{4}, \quad \dot{\delta}_m = \frac{1}{\Delta t}(\delta_m^{n+1/2} - \delta_m^n) \quad (3.7)$$

olarak ve δ_m eleman parametrelerinin ve bunların zamana göre türevlerinin iki ardışık zaman aralığı $n+1/2$ ve $n+1$ deki değerleri (3.6) denklemi için,

$$\delta_m = \frac{\delta_m^{n+1} + \delta_m^{n+1/2}}{4}, \quad \delta_m^\circ = \frac{1}{\Delta t} (\delta_m^{n+1} - \delta_m^{n+1/2}) \quad (3.8)$$

olarak bulunur. Bu eşitlikler (3.5) ve (3.6) denklem sisteminde sırayla yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} (\delta_{m-1}^{n+1/2} - \delta_{m-1}^n) + \frac{4}{\Delta t} (\delta_m^{n+1/2} - \delta_m^n) + \frac{1}{\Delta t} (\delta_{m+1}^{n+1/2} - \delta_{m+1}^n) + \\ & \frac{6d}{4h} (\delta_{m+1}^n + \delta_{m+1}^{n+1/2} - \delta_{m-1}^n - \delta_{m-1}^{n+1/2}) = 0 \\ & \frac{1}{\Delta t} (\delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^{n+1/2}) + \frac{4}{\Delta t} (\delta_m^{n+1} - \delta_m^{n+1/2}) + \frac{1}{\Delta t} (\delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m+1}^{n+1/2}) - \\ & \frac{12v}{4h^2} (\delta_{m-1}^{n+1} + \delta_{m-1}^{n+1/2} - 2\delta_m^{n+1} - 2\delta_m^{n+1/2} + \delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^{n+1/2}) = 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemde gerekli düzenlemeler yapılırsa her biri $N+1$ denklem ve $N+3$ bilinmeyen içeren

$$\alpha_1 \delta_{m-1}^{n+1/2} + \alpha_2 \delta_m^{n+1/2} + \alpha_3 \delta_{m+1}^{n+1/2} = \alpha_3 \delta_{m-1}^n + \alpha_2 \delta_m^n + \alpha_1 \delta_{m+1}^n \quad (3.9)$$

ve

$$\alpha_4 \delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_5 \delta_m^{n+1} + \alpha_4 \delta_{m+1}^{n+1} = \alpha_6 \delta_{m-1}^{n+1/2} + \alpha_7 \delta_m^{n+1/2} + \alpha_6 \delta_{m+1}^{n+1/2} \quad (3.10)$$

$$m = 0, 1, \dots, N$$

denklem sistemleri elde edilir. Burada

$$\alpha_1 = 2h - 3d\Delta t, \quad \alpha_2 = 8h, \quad \alpha_3 = 2h + 3d\Delta t,$$

$$\alpha_4 = h^2 - 3v\Delta t, \quad \alpha_5 = 4h^2 + 6v\Delta t, \quad \alpha_6 = h^2 + 3v\Delta t, \quad \alpha_7 = 4h^2 - 6v\Delta t$$

dir.

$N+1$ denklemden oluşan $N+3$ bilinmeyenli (3.9) denklem sisteminin çözülebilmesi için 2 tane bilinmeyen yok edilerek sistemdeki denklem sayısı ile bilinmeyen sayısı eşitlenmelidir. Bu yüzden δ_{-1} ve δ_{N+1} parametreleri, $U(a,t) = U_0$ ve $U(b,t) = U_N$ sınırları

koşulları kullanılarak yok edilecektir. Böylece $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu, 3 sütun elemanlı köşegen denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir. $m = -1, 0, \dots, N+1$ olmak üzere buradan bulunan $\delta_m^{n+1/2}$ parametreleri aynı sınır koşulları kullanılarak (3.10) denklem sisteminin çözümünde kullanılır ve böylece δ_m^{n+1} çözüm parametreleri bulunmuş olur.

3.2 Başlangıç Durumu

δ_m^{n+1} çözüm parametrelerinin bulunabilmesi için öncelikle δ_m^0 başlangıç parametrelerinin bulunması gerekir. Bunun için aşağıdaki başlangıç ve sınır koşulları kullanılabilir:

$$\begin{aligned} (U')_N(x_0, 0) &= \frac{3}{h}(\delta_1 - \delta_{-1}) = U'(x_0, 0) = 0 \\ U_N(x_m, 0) &= \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} = U(x_m, 0), \quad m = 0, \dots, N \\ (U')_N(x_N, 0) &= \frac{3}{h}(\delta_{N+1} - \delta_{N-1}) = U'(x_N, 0) = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

(3.11) ile verilen sistem kullanılarak δ_m^0 başlangıç parametreleri bulunduktan sonra geriye kalan δ_m^n parametreleri (3.9) ve (3.10) cebirsel denklem sistemlerinden hesaplanabilir.

Her zaman adımında δ^{n+1} e geçmeden önce (2.16) ile verilen iterasyon, doğrusal olmayan cebirsel denklem sisteminin çözümünün iyileştirilmesi için iki ya da üç kez uygulanmalıdır.

Başlangıç koşullarının düğüm noktalarındaki değerleri kullanılarak, δ parametresi için,

$$\begin{aligned} U(x_0, 0) &= \delta_{-1} + 4\delta_0 + \delta_1 \\ U(x_1, 0) &= \delta_0 + 4\delta_1 + \delta_2 \\ &\vdots \\ U(x_N, 0) &= \delta_{N-1} + 4\delta_N + \delta_{N+1} \end{aligned} \quad (3.12)$$

şeklinde $N+1$ denklemden oluşan $N+3$ bilinmeyenli denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülebilmesi için (3.11) ile verilen koşullar kullanılarak δ_{-1} ile δ_{N+1}

parametreleri yok edilebilir. Böylece $N+1$ bilinmeyenli $N+1$ denklem sistemi elde edilir ki, bu sistemin çözümü, Thomas algoritması ile bulunabilir.

$$\begin{aligned}\frac{3}{h}(\delta_1 - \delta_{-1}) &= 0 \\ \frac{3}{h}(\delta_{N+1} - \delta_{N-1}) &= 0\end{aligned}$$

eşitliklerinden elde edilen $\delta_{-1} = \delta_1$ ve $\delta_{N-1} = \delta_{N+1}$ değerleri (3.12) denklem sisteminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}U(x_0, 0) &= 4\delta_0 + 2\delta_1 \\ U(x_1, 0) &= \delta_0 + 4\delta_1 + \delta_2 \\ &\vdots \\ U(x_N, 0) &= 2\delta_{N-1} + 4\delta_N\end{aligned}\tag{3.13}$$

bilinmeyen sayısı ile denklem sayısı eşit olan sistem elde edilir.

(3.13) denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & 2 & 4 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_0^0 \\ \delta_1^0 \\ \delta_2^0 \\ \vdots \\ \delta_{N-1}^0 \\ \delta_N^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(x_0) \\ U(x_1) \\ U(x_2) \\ \vdots \\ U(x_{N-1}) \\ U(x_N) \end{bmatrix}$$

şeklinde matris formunda yazılabilir. Thomas algoritması ile bu sistem çözülerek bir sonraki zaman adımına geçilir.

3.3 Kararlılık Analizi

Nümerik metodun kararlılığının araştırılması Von Neuman teorisine dayanır. Bu teoriye göre, k mod sayısı ve h eleman büyüklüğü olmak üzere

$$\delta_m^n = \hat{\delta}^n e^{imkh}\tag{3.14}$$

ile verilen Fourier modu, nümerik metodun lineer hale getirilmesi için belirlenir.

Nümerik metodun kararlılığı için (3.9) ve (3.10) denklemleri kullanılarak metodun kararlılığı araştırılmalıdır. $n+1/2$ ve $n+1$ zaman adımlarında (3.10) ile verilen tekrarlı bağıntı dikkate alınır, (3.14) eşitliği bu bağıntıda kullanılır ve böylece elde edilen denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} a &= 4h \cos(kh) + 8h, \\ b &= 6d\Delta t \sin(kh) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$(a+ib)\hat{\delta}^{n+1} = (a-ib)\hat{\delta}^n$$

eşitliği bulunur.

g , büyüme çarpanı olmak üzere $\hat{\delta}^{n+1} = g \hat{\delta}^n$ olduğundan

$$g = \frac{a-ib}{a+ib}$$

elde edilir.

g 'nin modülü alınırsa $|g|=1$ bulunur. Buna göre $|g| \leq 1$ koşulu sağlanacağından nümerik metod koşulsuz kararlıdır.

(3.9) denklemi için de kararlılık analizi benzer şekilde yapılabilir.

3.4 Test Problemleri

Bu kısımda, iki test problemi ile Burger denkleminin nümerik sonuçları sunulacak ve metodun doğruluğu (2.19) ile verilen L_2 ve L_∞ hata normları ile ölçülecektir.

3.4.1 Birinci test problemi

Birinci test probleminde, Burger denkleminin (1.4) ile verilen analitik çözümüyle beraber, $[0,1]$ tanım aralığında, (1.5) başlangıç ve (1.6) sınır şartları kullanılarak denklemin

nümerik sonuçları elde edildi. Nümerik çözümler için $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$ ve $\nu = 0.005$ alınarak program $t = 3.25$ anına kadar çalıştırıldı. Elde edilen sonuçlar Çizelge 3.1 ile verildi.

Çizelge 3.1 $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$ ve $\nu = 0.005$

x	$t = 1.7$		$t = 2.5$		$t = 3.25$	
	NÜMERİK	ANALİTİK	NÜMERİK	ANALİTİK	NÜMERİK	ANALİTİK
0.1	0.05882	0.05882	0.04000	0.04000	0.03077	0.03077
0.2	0.11764	0.11765	0.08000	0.08000	0.06154	0.06154
0.3	0.17646	0.17646	0.12000	0.12000	0.09230	0.09231
0.4	0.23517	0.23517	0.15998	0.15998	0.12307	0.12307
0.5	0.29192	0.29190	0.19983	0.19983	0.15380	0.15380
0.6	0.29492	0.29591	0.23812	0.23812	0.18430	0.18430
0.7	0.04299	0.04193	0.25275	0.25310	0.21269	0.21270
0.8	0.00066	0.00065	0.10269	0.10210	0.21817	0.21844
0.9	0.00000	0.00000	0.00568	0.00554	0.10124	0.10126
$L_2 \times 10^3$	2.46642		2.11187		1.92482	
$L_\infty \times 10^3$	27.5770		25.1517		21.0489	

Viskozite sabitinin $\nu = 0.0005$ olarak daha küçük seçilmesi ile elde edilen sonuçlar Çizelge 3.2 ile verildi. Elde edilen sonuçlara bakıldığında vizkozite sabitinin küçülmesi ile hatanın arttığı gözlemlendi.

Çizelge 3.2 $h=0.005$, $\Delta t=0.01$ ve $\nu=0.0005$

x	$t=1.7$		$t=2.5$		$t=3.25$	
	NÜMERİK	ANALİTİK	NÜMERİK	ANALİTİK	NÜMERİK	ANALİTİK
0.1	0.05882	0.05882	0.04000	0.04000	0.03077	0.03077
0.2	0.11765	0.11765	0.08000	0.08000	0.06154	0.06154
0.3	0.17647	0.17647	0.12000	0.12000	0.09231	0.09231
0.4	0.23529	0.23529	0.16000	0.16000	0.12308	0.12308
0.5	0.29412	0.29412	0.20000	0.20000	0.15385	0.15385
0.6	0.35294	0.35294	0.24000	0.24000	0.18461	0.18462
0.7	0.00000	0.00000	0.28000	0.28000	0.21538	0.21538
0.8	0.00000	0.00000	0.00845	0.00977	0.24615	0.24615
0.9	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.11037	0.12434
$I_2 \times 10^3$	2.46642		2.11186		1.92482	
$L_\infty \times 10^3$	27.5770		25.1517		21.0489	

3.4.2 İkinci test problemi

İkinci test probleminde, Burger denkleminin (1.7) ile verilen analitik çözümüyle beraber, $[0,1]$ tanım aralığında, (1.8) başlangıç ve (1.9) sınır şartı kullanılarak denklemin nümerik sonuçları elde edildi. Nümerik çözümler için $h=1/36$, $\Delta t=0.01$ ve $\nu=0.01$ alınarak program $t=1.5$ anına kadar çalıştırıldı. $t=0.5$ anındaki, Burger denkleminin analitik sonuçları ile elde edilen nümerik sonuçlar Çizelge 3.3 ile verildi.

Çizelge 3.3 $h=1/36$, $\Delta t=0.01$ ve $\nu=0.01$

x	$t=0.5$	
	NÜMERİK	ANALİTİK
0.000	1.000	1.000
0.056	1.000	1.000
0.111	1.000	1.000
0.167	1.000	1.000
0.222	1.000	1.000
0.278	1.000	0.998
0.333	0.983	0.980
0.389	0.825	0.847
0.444	0.465	0.452
0.500	0.244	0.238
0.556	0.204	0.204
0.611	0.200	0.200
0.667	0.200	0.200
0.722	0.200	0.200
0.778	0.200	0.200
0.833	0.200	0.200
0.889	0.200	0.200
0.944	0.200	0.200
1.000	0.200	0.200
$L_2 \times 10^3$	5.86664	
$L_\infty \times 10^3$	22.23450	

4 KONUMA GÖRE PARÇALANMIŞ BURGER DENKLEMİNİN KÜBİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, konuma göre parçalanmış Burger denkleminin kübik B-spline kolokeyşin metoduyla nümerik çözümleri verilecek ve nümerik metod için Fourier kararlılık analizi yapılacaktır.

4.1 Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu

Bu kısımda (1.1) ile verilen Burger denkleminin $V(x,t) = -U_x(x,t)$ dönüşümü uygulanarak denklemin kübik B-Spline kolokeyşin metoduyla nümerik çözümleri verilecektir. Bu dönüşüm ile Burger denkleminin bilinmeyen fonksiyonlar U, V , bunların konuma göre türevleri U_x, V_x ve U nun zamana göre türevi U_t olan denklem sistemi halini alır.

$V(x,t) = -U_x(x,t)$ dönüşümü altında (1.1) ile verilen Burger denkleminin, (1.2) ile verilen başlangıç koşulu ve (1.3) ile verilen sınır koşulları sırasıyla;

$$\begin{aligned} U_t - UV + vV_x &= 0 \\ V + U_x &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$U(x,0) = f(x), \quad V(x,0) = -f'(x), \quad a \leq x \leq b \quad (4.2)$$

$$U(a,t) = \alpha_1, \quad U(b,t) = \alpha_2, \quad V(a,t) = V(b,t) = 0, \quad t \in (0, T] \quad (4.3)$$

olarak yeniden yazılabilir.

$[a, b]$ aralığını, x_m düğüm noktaları yardımıyla

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

şeklinde eşit uzunluklu alt aralıklara bölelim. $m = -1, 0, \dots, N, N+1$ olmak üzere $\phi_m(x)$ fonksiyonları, düğüm noktalarında tanımlı, kübik B-spline fonksiyonlar olsun. (4.1) denklemindeki $U(x,t)$ ve $V(x,t)$ analitik fonksiyonlarının yaklaşık çözümlerinin, $U_N(x,t)$ ve $V_N(x,t)$ olduğunu varsayalım. Bu yaklaşık çözümler kübik B-spline fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
U_N(x,t) &= \sum_{m=-1}^{N+1} \delta_m(t) \phi_m(x) \\
&= \delta_{-1}(t) \phi_{-1}(x) + \delta_0(t) \phi_0(x) + \dots + \delta_{N+1}(t) \phi_{N+1}(x), \\
V_N(x,t) &= \sum_{m=-1}^{N+1} \sigma_m(t) \phi_m(x) \\
&= \sigma_{-1}(t) \phi_{-1}(x) + \sigma_0(t) \phi_0(x) + \dots + \sigma_{N+1}(t) \phi_{N+1}(x)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Buradaki δ_m ve σ_m değerleri, (4.1) denkleminin kübik B-spline kolokeyşin formundan, (4.3) sınır koşulları kullanılarak elde edilecek zamana bağlı parametrelerdir.

Kübik B-spline fonksiyonlar ardışık 4 aralığı örttüğünden $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı 4 ardışık B-spline fonksiyonu tarafından örtülür. (Şekil 1.3) Böylece U ve V yaklaşık çözümleri $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında ardışık kübik B-spline fonksiyonları cinsinden

$$\begin{aligned}
U_m &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_j \phi_j \\
V_m &= \sum_{j=m-1}^{m+2} \sigma_j \phi_j
\end{aligned} \tag{4.5}$$

şeklinde yazılabilir. (4.4) denklemi ve Çizelge 1.3 kullanılarak, U_m, V_m fonksiyonlarının, bu fonksiyonların birinci ve ikinci mertebeden türevlerinin, $m=0,1,\dots,N$ olmak üzere, x_m düğüm noktalarındaki değerleri, eleman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned}
U_m &= U(x_m) = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} \\
U'_m &= U'(x_m) = \frac{3}{h}(\delta_{m+1} - \delta_{m-1}) \\
U''_m &= U''(x_m) = \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \\
V_m &= V(x_m) = \sigma_{m-1} + 4\sigma_m + \sigma_{m+1} \\
V'_m &= V'(x_m) = \frac{3}{h}(\sigma_{m+1} - \sigma_{m-1}) \\
V''_m &= V''(x_m) = \frac{6}{h^2}(\sigma_{m-1} - 2\sigma_m + \sigma_{m+1})
\end{aligned} \tag{4.6}$$

olarak bulunabilir.

o, zamana bağlı türev ve $d = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}$ olmak üzere, (4.6) eşitlikleri (4.1) denklem sisteminde yerlerine yazılırsa, $2N + 2$ denklemden oluşan

$$\begin{aligned} (\delta_{m-1}^{\circ} + 4\delta_m^{\circ} + \delta_{m+1}^{\circ}) - d(\sigma_{m-1} + 4\sigma_m + \sigma_{m+1}) + v\frac{3}{h}(\sigma_{m+1} - \sigma_{m-1}) &= 0 \\ (\sigma_{m-1} + 4\sigma_m + \sigma_{m+1}) + \frac{3}{h}(\delta_{m+1} - \delta_{m-1}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

diferensiyel denklem sistemi elde edilir.

δ_m ve σ_m eleman parametrelerinin zaman aralığı n ve $n+1$ deki değerleri için (2.8) ve (2.9) ile verilen eşitlikler (4.7) denklem sisteminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}(\delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n + 4\delta_m^{n+1} - 4\delta_m^n + \delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m+1}^n) - \frac{d}{2}(\sigma_{m-1}^{n+1} + \sigma_{m-1}^n + 4\sigma_m^{n+1} + 4\sigma_m^n + \sigma_{m+1}^{n+1} + \sigma_{m+1}^n) + \\ \frac{3v}{2h}(\sigma_{m+1}^{n+1} + \sigma_{m+1}^n - \sigma_{m-1}^{n+1} - \sigma_{m-1}^n) &= 0 \\ \frac{1}{2}(\sigma_{m-1}^{n+1} + \sigma_{m-1}^n + 4\sigma_m^{n+1} + 4\sigma_m^n + \sigma_{m+1}^{n+1} + \sigma_{m+1}^n) + \frac{3}{2h}(\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^n - \delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sistemde gerekli düzenlemeler yapılarak $2N + 2$ denklemden oluşan $2N + 6$ bilinmeyenli

$$\begin{aligned} 2h\delta_{m-1}^{n+1} - \beta_{m1}\sigma_{m-1}^{n+1} + 8h\delta_m^{n+1} - \beta_{m3}\sigma_m^{n+1} + 2h\delta_{m+1}^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_{m+1}^{n+1} = \\ 2h\delta_{m-1}^n + \beta_{m1}\sigma_{m-1}^n + 8h\delta_m^n - \beta_{m3}\sigma_m^n + 2h\delta_{m+1}^n - \beta_{m2}\sigma_{m+1}^n, \\ -3\delta_{m-1}^{n+1} + h\sigma_{m-1}^{n+1} + 0\delta_m^{n+1} + 4h\sigma_m^{n+1} + 3\delta_{m+1}^{n+1} + h\sigma_{m+1}^{n+1} = \\ 3\delta_{m-1}^n - h\sigma_{m-1}^n + 0\delta_m^n - 4h\sigma_m^n - 3\delta_{m+1}^n - h\sigma_{m+1}^n \end{aligned} \quad (4.8)$$

$m = 0, 1, \dots, N$

denklem sistemi bulunur. Burada $\beta_{m1} = hd\Delta t + 3v\Delta t$, $\beta_{m2} = 3v\Delta t - hd\Delta t$ ve $\beta_{m3} = 4hd\Delta t$ dir.

Bu denklem sisteminin çözülebilmesi için dört bilinmeyenin yok edilerek denklem sayısı ile bilinmeyen sayısının eşitlenmesi gerekir. Bu yüzden $\delta_{-1}, \sigma_{-1}, \delta_{N+1}$ ve σ_{N+1}

parametreleri, U_0^n, U_N^n, V_0' ve V_N' sınır koşulları kullanılarak elimine edilecektir. Böylece $(2N+2) \times (2N+2)$ boyutlu, 7 sütun elemanlı köşegen denklem sistemi elde edilir.

(4.3) sınır koşulları, eleman parametrelerini kullanarak

$$\begin{aligned}\delta_{-1} - 2\delta_0 + \delta_1 &= 0 \\ \delta_{N-1} - 2\delta_N + \delta_{N+1} &= 0 \\ \sigma_1 - \sigma_{-1} &= 0 \\ \sigma_{N+1} - \sigma_{N-1} &= 0\end{aligned}\quad (4.9)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan sınır parametrelerinin değerleri

$$\begin{aligned}\delta_{-1} &= 2\delta_0 - \delta_1, \\ \sigma_{-1} &= \sigma_1, \\ \delta_{N+1} &= -\delta_{N-1} + 2\delta_N, \\ \sigma_{N+1} &= \sigma_{N-1}\end{aligned}\quad (4.10)$$

olarak yazılabilir. Bu değerlerin (4.8) denklem sisteminde yerine yazılması ile istenilen eliminasyon işlemi yapılmış olur:

$$\begin{aligned}F_1 &= 2h\delta_{-1}^n + \beta_{m1}\sigma_{-1}^n + 8h\delta_0^n + \beta_{m3}\sigma_0^n + 2h\delta_1^n - \beta_{m2}\sigma_1^n \\ F_2 &= 3\delta_{-1}^n - h\sigma_{-1}^n + 0\delta_0^n - 4h\sigma_0^n - 3\delta_1^n - h\sigma_1^n \\ F_{2N+1} &= 2h\delta_{N-1}^n + \beta_{m1}\sigma_{N-1}^n + 8h\delta_N^n - \beta_{m3}\sigma_N^n + 2h\delta_{N+1}^n - \beta_{m2}\sigma_{N+1}^n \\ F_{2N+2} &= 3\delta_{N-1}^n - h\sigma_{N-1}^n + 0\delta_N^n - 4h\sigma_N^n - 3\delta_{N+1}^n - h\sigma_{N+1}^n\end{aligned}$$

olmak üzere (4.8) denklem sisteminden $m = 0$ için,

$$\begin{aligned}2h\delta_{-1}^{n+1} - \beta_{m1}\sigma_{-1}^{n+1} + 8h\delta_0^{n+1} - \beta_{m3}\sigma_0^{n+1} + 2h\delta_1^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_1^{n+1} &= F_1 \\ -3\delta_{-1}^{n+1} + h\sigma_{-1}^{n+1} + 0\delta_0^{n+1} + 4h\sigma_0^{n+1} + 3\delta_1^{n+1} + h\sigma_1^{n+1} &= F_2\end{aligned}\quad (4.11)$$

ve $m = N$ için,

$$\begin{aligned}2h\delta_{N-1}^{n+1} - \beta_{m1}\sigma_{N-1}^{n+1} + 8h\delta_N^{n+1} - \beta_{m3}\sigma_N^{n+1} + 2h\delta_{N+1}^{n+1} + \beta_{m2}\sigma_{N+1}^{n+1} &= F_{2N+1} \\ -3\delta_{N-1}^{n+1} + h\sigma_{N-1}^{n+1} + 0\delta_N^{n+1} + 4h\sigma_N^{n+1} + 3\delta_{N+1}^{n+1} + h\sigma_{N+1}^{n+1} &= F_{2N+2}\end{aligned}\quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}
U_N(x, 0) &= \sum_{m=-1}^{N+1} \delta_m^0 \phi_m(x) \\
&= \delta_{-1}^0 \phi_{-1}(x) + \delta_0^0 \phi_0(x) + \cdots + \delta_{N+1}^0 \phi_{N+1}(x), \\
V_N(x, 0) &= \sum_{m=-1}^{N+1} \sigma_m^0 \phi_m(x) \\
&= \sigma_{-1}^0 \phi_{-1}(x) + \sigma_0^0 \phi_0(x) + \cdots + \sigma_{N+1}^0 \phi_{N+1}(x)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradaki δ_m^0 ve σ_m^0 parametreleri belirlenecek olan parametrelerdir. Başlangıç koşullarının düğüm noktalarındaki

$$U_N(x_m, 0) = U(x_m, 0) \text{ ve } V_N(x_m, 0) = V(x_m, 0), \quad m = 0, 1, \dots, N.$$

değerleri kullanılarak, δ parametresi için,

$$\begin{aligned}
U(x_0, 0) &= \delta_{-1} + 4\delta_0 + \delta_1 \\
U(x_1, 0) &= \delta_0 + 4\delta_1 + \delta_2 \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
U(x_N, 0) &= \delta_{N-1} + 4\delta_N + \delta_{N+1}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

ve benzer şekilde σ parametresi için de,

$$\begin{aligned}
V(x_0, 0) &= \sigma_{-1} + 4\sigma_0 + \sigma_1 \\
V(x_1, 0) &= \sigma_0 + 4\sigma_1 + \sigma_2 \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
V(x_N, 0) &= \sigma_{N-1} + 4\sigma_N + \sigma_{N+1}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

şeklinde $N+1$ denklemden oluşan $N+3$ bilinmeyenli denklem sistemleri elde edilir. Bu denklem sistemlerinin çözülebilmesi için ikişer tane bilinmeyenlerinin elimine edilmesi gerekir. Eliminasyon işleminin için $U_N''(a, 0) = U_N''(b, 0) = 0$ ve $V_N''(a, 0) = V_N''(b, 0) = 0$ sınır koşulları kullanılarak $\delta_{-1}, \sigma_{-1}, \delta_{N+1}$ ve σ_{N+1} parametreleri yok edilebilir. Böylece $N+1$ bilinmeyenli $N+1$ denklem sistemleri elde edilir ki, bu sistemlerin çözümleri Thomas algoritması ile kolayca bulunabilir.

$$U_N''(a, 0) = U_N''(b, 0) = 0 \text{ ve } V_N''(a, 0) = V_N''(b, 0) = 0 \text{ sınır koşullarından}$$

$$\begin{aligned}\frac{6}{h^2}(\delta_{-1} - 2\delta_0 + \delta_1) &= 0, \\ \frac{6}{h^2}(\sigma_{-1} - 2\sigma_0 + \sigma_1) &= 0, \\ \frac{6}{h^2}(\delta_{N-1} - 2\delta_N + \delta_{N+1}) &= 0, \\ \frac{6}{h^2}(\sigma_{N-1} - 2\sigma_N + \sigma_{N+1}) &= 0\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da

$$\begin{aligned}\delta_{-1} &= 2\delta_0 - \delta_1, \\ \sigma_{-1} &= 2\sigma_0 - \sigma_1, \\ \delta_{N+1} &= -\delta_{N-1} + 2\delta_N, \\ \sigma_{N+1} &= -\sigma_{N-1} + 2\sigma_N\end{aligned}$$

olduğu söylenebilir. Elde edilen bu sınır parametreleri (4.14) ve (4.15) denklem sistemlerinde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}U(x_0, 0) &= 6\delta_0 + 0\delta_1 \\ U(x_1, 0) &= \delta_0 + 4\delta_1 + \delta_2 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ U(x_N, 0) &= 0\delta_{N-1} + 6\delta_N\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}V(x_0, 0) &= -U'(x_0, 0) = 6\sigma_0 + 0\sigma_1 \\ V(x_1, 0) &= -U'(x_1, 0) = \sigma_0 + 4\sigma_1 + \sigma_2 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ V(x_N, 0) &= -U'(x_N, 0) = 0\sigma_{N-1} + 6\sigma_N\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} (4h \cos(kh) + 8h) \hat{\delta}^{n+1} + ((\beta_{m_2} - \beta_{m_1}) \cos(kh) - \beta_{m_3} + i((\beta_{m_1} + \beta_{m_2}) \sin(kh))) \hat{\sigma}^{n+1} = \\ (4h \cos(kh) + 8h) \hat{\delta}^n + ((\beta_{m_1} - \beta_{m_2}) \cos(kh) - \beta_{m_3} - i((\beta_{m_1} + \beta_{m_2}) \sin(kh))) \hat{\sigma}^n \end{aligned} \quad (4.17)$$

ve

$$i6 \sin(kh) \hat{\delta}^{n+1} + (2h \cos(kh) + 4h) \hat{\sigma}^{n+1} = -i6 \sin(kh) \hat{\delta}^n - (2h \cos(kh) + 4h) \hat{\sigma}^n \quad (4.18)$$

denklemleri bulunur.

$$a = 2h \cos(kh) + 4h$$

$$b = (\beta_{m_2} - \beta_{m_1}) \cos(kh) - \beta_{m_3} + i((\beta_{m_1} + \beta_{m_2}) \sin(kh))$$

$$m = (\beta_{m_1} - \beta_{m_2}) \cos(kh) - \beta_{m_3} - i((\beta_{m_1} + \beta_{m_2}) \sin(kh))$$

$$n = i6 \sin(kh)$$

olmak üzere (4.17) ve (4.18) denklemleri

$$\begin{aligned} 2a \hat{\delta}^{n+1} + b \hat{\sigma}^{n+1} &= 2a \hat{\delta}^n + m \hat{\sigma}^n \\ n \hat{\delta}^{n+1} + a \hat{\sigma}^{n+1} &= -n \hat{\delta}^n - a \hat{\sigma}^n \end{aligned} \quad (4.19)$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

$$g \text{ büyüme çarpanı olmak üzere } \hat{\delta}^{n+1} = g \hat{\delta}^n, \hat{\sigma}^{n+1} = g \hat{\sigma}^n \text{ olduğundan} \quad (4.19)$$

denklemlerinden

$$\begin{aligned} 2a(g-1) \hat{\delta}^n + (bg-m) \hat{\sigma}^n &= 0 \\ n(g+1) \hat{\delta}^n + a(g+1) \hat{\sigma}^n &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

sistemi elde edilir.

Bu sisteminin aşikar olmayan çözümünün olabilmesi için katsayılar determinantı sıfır olmalıdır. Bu durumda g için ikinci dereceden

$$2a^2(g^2 - 1) - n(g+1)(bg - m) = 0$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin kökleri $z_1 = 2a^2 - mn$ ve $z_2 = 2a^2 - nb$ olmak üzere

$$g = -1 \text{ ve } g = \frac{z_1}{z_2}$$

şeklindedir.

Nümerik metodun kararlılığı için $|g| \leq 1$ olması gerektiğinden

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| \leq 1$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için ise $|z_1|^2 - |z_2|^2 \leq 0$ olduğu gösterilebilir.

$$|z_1|^2 - |z_2|^2 = -1152h^2 \sin^2(kh) \Delta t (v \cos^2(kh) + 4v \cos(kh) + 4v + d^2 \Delta t \cos(kh))$$

ve

$$-1152h^2 \sin^2(kh) \Delta t \leq 0$$

olacağından $(v \cos^2(kh) + 4v \cos(kh) + 4v + d^2 \Delta t \cos(kh)) \geq 0$ olmalıdır. Bu eşitsizlik v ye göre çözümlürse

$$v \geq \frac{-d^2 \Delta t \cos(kh)}{(\cos(kh) + 2)^2}$$

bulunur. $\frac{-\cos(kh)}{(\cos(kh) + 2)^2}$ ifadesi en büyük 1 değerini alacağından metodun kararlılığı için

$$v \geq d^2 \Delta t$$

koşulu elde edilir. Böylece nümerik metodun koşullu kararlı olduğu söylenebilir.

4.4 Test Problemleri

Bu kısımda, iki test problemi ile Burger denkleminin nümerik sonuçları sunulacak ve metodun doğruluğu (2.19) ile verilen L_2 ve L_∞ hata normları ile ölçülecektir.

4.4.1 Birinci test problemi

Birinci test probleminde, Burger denkleminin (1.4) ile verilen analitik çözümüyle beraber, $[0,1]$ tanım aralığında, (1.5) başlangıç ve (1.6) sınır şartı kullanılarak denklemin nümerik sonuçları elde edildi. Nümerik çözümler için $h=0.005$, $\Delta t=0.01$ ve $\nu=0.005$ alınarak program $t=3.25$ anına kadar çalıştırıldı. Elde edilen sonuçlar Çizelge 4.1 ile verildi.

Çizelge 4.1 $h=0.005$, $\Delta t=0.01$ ve $\nu=0.005$

x	t=1.7		t=2.5		t=3.25	
	NÜMERİK	ANALİTİK	NÜMERİK	ANALİTİK	NÜMERİK	ANALİTİK
0.1	0.05882	0.05882	0.04000	0.04000	0.03077	0.03077
0.2	0.11764	0.11765	0.08000	0.08000	0.06154	0.06154
0.3	0.17646	0.17646	0.12000	0.12000	0.09230	0.09231
0.4	0.23517	0.23517	0.15998	0.15998	0.12307	0.12307
0.5	0.29191	0.29190	0.19982	0.19983	0.15380	0.15380
0.6	0.29594	0.29591	0.23812	0.23812	0.18430	0.18430
0.7	0.04191	0.04193	0.25312	0.25310	0.21270	0.21270
0.8	0.00065	0.00065	0.10208	0.10210	0.21844	0.21844
0.9	0.00000	0.00000	0.00554	0.00554	0.10091	0.10126
$L_2 \times 10^3$	0.01077		0.01800		1.28504	
$L_\infty \times 10^3$	0.04054		0.13987		9.25009	

4.4.2 İkinci test problemi

İkinci test probleminde, Burger denkleminin (1.7) ile verilen analitik çözümüyle beraber, $[0,1]$ tanım aralığında, (1.8) başlangıç ve (1.9) sınır şartı kullanılarak denklemin nümerik sonuçları elde edildi. Nümerik çözümler için $h=1/36$, $\Delta t=0.01$ ve $\nu=0.01$ alınarak program $t=1.5$ anına kadar çalıştırıldı. $t=0.5$ anındaki, Burger denkleminin analitik sonuçları ile elde edilen nümerik sonuçlar Çizelge 4.2 ile verildi.

Çizelge 4.2 $h=1/36$, $\Delta t=0.01$ ve $\nu=0.01$

x	$t=0.5$	
	NÜMERİK	ANALİTİK
0.000	1.000	1.000
0.056	1.000	1.000
0.111	1.000	1.000
0.167	1.000	1.000
0.222	0.994	1.000
0.278	0.993	0.998
0.333	0.977	0.980
0.389	0.846	0.847
0.444	0.446	0.452
0.500	0.238	0.238
0.556	0.204	0.204
0.611	0.200	0.200
0.667	0.200	0.200
0.722	0.200	0.200
0.778	0.200	0.200
0.833	0.200	0.200
0.889	0.200	0.200
0.944	0.200	0.200
1.000	0.200	0.200

5 BURGER DENKLEMİNİN KÜBİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde Burger denkleminin kübik B-spline kolokeyşin metoduyla nümerik çözümleri verilecek ve nümerik metod için Fourier kararlılık analizi yapılacaktır. [1]

5.1 Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu

Bu kısımda (1.1) ile verilen Burger denkleminin (1.3) sınır koşulları altında kübik B-spline kolokeyşin metoduyla nümerik çözümleri verilecektir.

$[a, b]$ aralığını, x_m düğüm noktaları yardımıyla

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

şeklinde eşit uzunluklu alt aralıklara bölelim. $m = -1, 0, \dots, N+1$ olmak üzere $\phi_m(x)$ fonksiyonları, düğüm noktalarında tanımlı, kübik B-spline fonksiyonlar olsun. Burger denklemindeki $U(x, t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümünün $U_N(x, t)$ olduğunu varsayalım. $\{\phi_{-1}, \phi_0, \dots, \phi_{N+1}\}$ kümesi $[a, b]$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir taban olduğundan bu yaklaşık çözüm kübik B-spline fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} U_N(x, t) &= \sum_{m=-1}^{N+1} \delta_m(t) \phi_m(x) \\ &= \delta_{-1}(t) \phi_{-1}(x) + \delta_0(t) \phi_0(x) + \dots + \delta_{N+1}(t) \phi_{N+1}(x). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Buradaki δ_m değerleri (1.1) denkleminin kübik B-spline kolokeyşin formundan ve (1.3) sınır koşullarından elde edilecek zamana bağlı parametrelerdir.

Kübik B-spline fonksiyonlar ardışık 4 aralığı örttüğünden $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı 4 ardışık B-spline fonksiyonu tarafından örtülür. (Şekil 1.3) Böylece U yaklaşık çözümü $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında ardışık kübik B-spline fonksiyonları cinsinden

$$U_m = \sum_{j=m-1}^{m+2} \delta_j \phi_j \quad (5.2)$$

şeklinde yazılabilir. (5.1) denklemi ve Çizelge 1.2 kullanılarak, U_m fonksiyonlarının, bu fonksiyonların birinci ve ikinci mertebeden türevlerinin, $m = 0, 1, \dots, N$ olmak üzere, x_m düğüm noktalarındaki değerleri, eleman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned} U_m &= U(x_m) = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} \\ U'_m &= U'(x_m) = \frac{3}{h}(\delta_{m+1} - \delta_{m-1}) \\ U''_m &= U''(x_m) = \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \end{aligned} \quad (5.3)$$

olarak bulunabilir.

o, zamana bağlı türev ve $d = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1}$ olmak üzere, (5.3) eşitlikleri (1.1) denkleminde yerlerine yazılırsa, $N + 1$ denklemden oluşan

$$\begin{aligned} \delta_{m-1}^{\circ} + 4\delta_m^{\circ} + \delta_{m+1}^{\circ} + \frac{3}{h}(\delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1})(\delta_{m+1} - \delta_{m-1}) - \frac{6v}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) &= 0 \\ m = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (5.4)$$

diferensiyel denklem sistemi elde edilir.

δ_m eleman parametrelerinin zaman aralığı n ve $n + 1$ deki değerleri için (2.8) ve (2.9) ile verilen eşitlikler (5.4) denklem sisteminde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}(\delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n + 4\delta_m^{n+1} - 4\delta_m^n + \delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m+1}^n) + \frac{3d}{2h}(\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^n - \delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n) - \\ \frac{3v}{h^2}(\delta_{m-1}^{n+1} + \delta_{m-1}^n - 2\delta_m^{n+1} - 2\delta_m^n + \delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^n) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sistemde gerekli düzenlemeler yapılarak $N + 1$ denklemden oluşan $N + 3$ bilinmeyenli

$$\begin{aligned} \alpha_1 \delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_m^{n+1} + \alpha_3 \delta_{m+1}^{n+1} = \alpha_4 \delta_{m-1}^n + \alpha_5 \delta_m^n + \alpha_6 \delta_{m+1}^n, \\ m = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (5.5)$$

denklem sistemi bulunur [1]. Burada

$$\alpha_1 = 1 - \frac{3d\Delta t}{2h} - \frac{3v\Delta t}{h^2}, \quad \alpha_2 = 4 + \frac{6v\Delta t}{h^2}, \quad \alpha_3 = 1 + \frac{3d\Delta t}{2h} - \frac{3v\Delta t}{h^2},$$

$$\alpha_4 = 1 + \frac{3d\Delta t}{2h} + \frac{3v\Delta t}{h^2}, \quad \alpha_5 = 4 - \frac{6v\Delta t}{h^2}, \quad \alpha_6 = 1 - \frac{3d\Delta t}{2h} + \frac{3v\Delta t}{h^2}$$

dir.

Bu denklem sisteminin çözülebilmesi için iki bilinmeyen yok edilerek denklem sayısı ile bilinmeyen sayısının eşitlenmesi gerekir. Bu yüzden δ_{-1} ve δ_{N+1} parametreleri $U_0 = \alpha$, $U_N = \beta$ sınır koşulları kullanılarak elimine edilecektir. Böylece $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu, 3 sütun elemanlı köşegen denklem sistemi elde edilir.

Sınır koşulları eleman parametreleri kullanılarak

$$U_0 = \delta_{-1} + 4\delta_0 + \delta_1 = \alpha$$

$$U_N = \delta_{N-1} + 4\delta_N + \delta_{N+1} = \beta$$

şeklinde yazılabilir. Buradan sınır parametrelerinin değerleri

$$\delta_{-1} = \alpha - 4\delta_0 - \delta_1$$

$$\delta_{N+1} = \beta - \delta_{N-1} - 4\delta_N \quad (5.6)$$

olarak yazılabilir. Bu değerler (5.5) denklem sisteminde yerine yazıldığında istenilen eliminasyon işlemi yapılmış olur:

$$F_1 = \alpha_4 \delta_{-1}^n + \alpha_5 \delta_0^n + \alpha_6 \delta_1^n$$

$$F_{N+1} = \alpha_4 \delta_{N-1}^n + \alpha_5 \delta_N^n + \alpha_6 \delta_{N+1}^n$$

olmak üzere (5.5) denklem sisteminden $m = 0$ için,

$$\alpha_1 \delta_{-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_0^{n+1} + \alpha_3 \delta_1^{n+1} = F_1 \quad (5.7)$$

ve $m = N$ için,

$$\alpha_1 \delta_{N-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_N^{n+1} + \alpha_3 \delta_{N+1}^{n+1} = F_{N+1} \quad (5.8)$$

şeklinde $N+1$ denklemden oluşan $N+3$ bilinmeyenli denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemlerinin çözülebilmesi için iki tane bilinmeyen elimine edilmesi gerekir. Eliminasyon işleminin için $U'_N(a,0) = U'_N(b,0) = 0$ sınır koşulları kullanılarak δ_{-1} ve δ_{N+1} parametreleri yok edilebilir. Böylece $N+1$ bilinmeyenli $N+1$ denklem sistemi elde edilir ki, bu sistemin çözümü Thomas algoritması ile kolayca bulunabilir.

$U'_N(a,0) = U'_N(b,0) = 0$ sınır koşullarından

$$\begin{aligned}\frac{3}{h}(\delta_1 - \delta_{-1}) &= 0, \\ \frac{3}{h}(\delta_{N+1} - \delta_{N-1}) &= 0\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da

$$\begin{aligned}\delta_{-1} &= \delta_1, \\ \delta_{N+1} &= \delta_{N-1}\end{aligned}$$

olduğu söylenebilir. Elde edilen bu sınır parametreleri (5.10) denklem sisteminde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}U(x_0,0) &= \delta_0 + 2\delta_1 \\ U(x_1,0) &= \delta_0 + 4\delta_1 + \delta_2 \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\ U(x_N,0) &= 2\delta_{N-1} + 4\delta_N\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\delta^0 = [\delta_0^0, \delta_1^0, \dots, \delta_N^0]^T,$$

$$b = [U(x_0), U(x_1), \dots, U(x_N)]^T,$$

olmak üzere δ eleman parametresi için matris formunda

$$A\delta^0 = b$$

denklem sistemi elde edilmiş olur. Elde edilen bu denklem sistemi $(N+1) \times (N+1)$ tipinde, 3 sütun elemanlı, köşegen denklem sistemidir. Bu sistem Thomas algoritması kullanılarak çözümlerse başlangıç için δ^0 eleman parametreleri bulunmuş olur. Bulunan bu değerler (5.9) denklem sisteminde kullanılarak iterasyona geçilir.

5.3 Kararlılık Analizi

Nümerik metodun kararlılığının araştırılması Von Neuman teorisine dayanır. Bu teoriye göre, k mod sayısı ve h eleman büyüklüğü olmak üzere (3.14) ile verilen Fourier modu, nümerik metodun lineer hale getirilmesi için belirlenir.

Burger denkleminde yer alan ve lineer olmayan UU_x terimi Fourier kararlılık metodu ile elde edilemez. Bundan dolayı denklemi lineer hale getirebilmek için denklemin lineer olmayan UU_x teriminde U yerine d yerel sabiti kullanılır. Böylece lineer hale gelen Burger denkleminin n ve $n+1$ zaman adımlarındaki tekrarlı bağıntısı (5.5) ile verildi:

(3.14) ile verilen Fourier modu (5.5) denkleminde yerine yazılıp denklem düzenlenirse

$$a = 1 - \frac{6}{h^2} \nu \Delta t \sin^2(hk/2) + 2 \cos^2(kh/2), \quad b = 9d \Delta t \sin(hk),$$

$$a_1 = 1 + \frac{6}{h^2} \nu \Delta t \sin^2(hk/2) + 2 \cos^2(kh/2), \quad b_1 = 9d \Delta t \sin(hk)$$

olmak üzere

$$(a_1 + ib_1) \hat{\delta}^{n+1} = (a + ib) \hat{\delta}^n$$

eşitliği bulunur [1].

g , büyüme çarpanı olmak üzere $\hat{\delta}^{n+1} = g \hat{\delta}^n$ olduğundan

$$g = \frac{a+ib}{a_1+ib_1}$$

bulunur.

g 'nin modülü alınırsa $|g| \leq 1$ olacağından nümerik metod koşulsuz kararlıdır.

5.4 Test Problemleri

Bu kısımda, iki test problemi ile Burger denkleminin nümerik sonuçları sunulacak ve metodun doğruluğu (2.19) ile verilen L_2 ve L_∞ hata normları ile ölçülecektir.

5.4.1 Birinci test problemi

Birinci test probleminde, Burger denkleminin (1.4) ile verilen analitik çözümüyle beraber, $[0,1]$ tanım aralığında, (1.5) başlangıç ve (1.6) sınır şartı kullanılarak denklemin nümerik sonuçları elde edildi. Viskozite sabiti ν nin $\nu = 0.005$ ve $\nu = 0.0005$ olmasına göre elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının değerleri Çizelge 5.1 ile verildi.

Çizelge 5.1

	$\nu = 0.005$			$\nu = 0.0005$		
	$t = 1.7$	$t = 2.4$	$t = 3.1$	$t = 1.75$	$t = 2.5$	$t = 3.25$
$L_2 \times 10^3$	0.857	0.423	0.235	0.567	0.308	0.239
$L_\infty \times 10^3$	2.576	1.242	0.688	5.880	2.705	2.291

5.4.2 İkinci test problemi

İkinci test probleminde, Burger denkleminin (1.7) ile verilen analitik çözümüyle beraber, $[0,1]$ tanım aralığında, (1.8) başlangıç ve (1.9) sınır şartı kullanılarak denklemin nümerik sonuçları elde edildi. Nümerik çözümler için $h = 1/36$, $\Delta t = 0.025$ ve $\nu = 0.01$ alınarak program $t = 1.3$ anına kadar çalıştırıldı. $t = 0.5$ anındaki, Burger denkleminin analitik sonuçları ile elde edilen nümerik sonuçlar Çizelge 5.2 ile verildi.

Çizelge 5.2 $h=1/36$, $\Delta t=0.025$ ve $\nu=0.01$

x	$t=0.5$	
	NÜMERİK	ANALİTİK
0.000	1.000	1.000
0.056	1.000	1.000
0.111	1.000	1.000
0.167	1.000	1.000
0.222	1.000	1.000
0.278	0.999	0.998
0.333	0.985	0.980
0.389	0.847	0.847
0.444	0.452	0.452
0.500	0.238	0.238
0.556	0.204	0.204
0.611	0.200	0.200
0.667	0.200	0.200
0.722	0.200	0.200
0.778	0.200	0.200
0.833	0.200	0.200
0.889	0.200	0.200
0.944	0.200	0.200
1.000	0.200	0.200
$L_{\infty} \times 10^3$	5	

6 BURGER DENKLEMİNİN KÜBİK B-SPLİNE FONKSİYONLARI KULLANARAK KOLOKEYŞİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde (1.1) ile verilen Burger denkleminin kübik B-spline fonksiyonları yardımıyla (1.2) başlangıç ve (1.3) sınır koşulları altındaki nümerik çözümleri verilecek ve nümerik metod için Fourier kararlılık analizi yapılacaktır [8].

6.1 Kübik B-spline Kolokeyşin Metodu

$[a, b]$ aralığını, x_m düğüm noktaları yardımıyla

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

şeklinde eşit uzunluklu alt aralıklara bölelim. (1.1) ile verilen Burger denkleminin U_N yaklaşık çözümleri, $(f)_m^n = (UU_x)_m^n - v(U_{xx})_m^n$ olmak üzere

$$(U_t)_m^n + (1-\theta)f_m^n + \theta f_m^{n+1} = 0 \quad (6.1)$$

çözümünden elde edilebilir [8].

(6.1) denkleminde zamana göre türev için sonlu fark yaklaşımı uygulanırsa

$$U_m^{n+1} - U_m^n + (1-\theta)\Delta t f_m^n + \theta \Delta t f_m^{n+1} = 0 \quad (6.2)$$

bulunur. (6.2) denklemini lineer hale getirebilmek için

$$(UU_x)_m^{n+1} = U_m^{n+1}(U_x)_m^n + U_m^n(U_x)_m^{n+1} - U_m^n(U_x)_m^n$$

eşitliği kullanılarak (6.2) denkleminde $(UU_x)_m^{n+1}$ yerine eşiti yazılırsa denklem,

$$U_m^{n+1} - U_m^n + (1-\theta)\Delta t \left[U_m^n(U_x)_m^{n-1} + U_m^{n-1}(U_x)_m^n - U_m^{n-1}(U_x)_m^{n-1} - v(U_{xx})_m^n \right] \\ + \theta \Delta t \left[U_m^{n+1}(U_x)_m^n + U_m^n(U_x)_m^{n+1} - U_m^n(U_x)_m^n - v(U_{xx})_m^{n+1} \right] = 0 \quad (6.3)$$

halini alır. Kübik B-spline fonksiyonların (5.3) ile verilen eşitlikleri (6.3) denkleminde yerine yazılıp denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} L_1 &= \delta_{m-1}^n + 4\delta_m^n + \delta_{m+1}^n, & L_2 &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^n - \delta_{m-1}^n), \\ L_3 &= \delta_{m-1}^{n-1} + 4\delta_m^{n-1} + \delta_{m+1}^{n-1}, & L_4 &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^{n-1} - \delta_{m-1}^{n-1}), \\ L_5 &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}^n - 2\delta_m^n + \delta_{m+1}^n), \end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} &\delta_{m-1}^{n+1} \left(1 + \theta \Delta t L_2 - \frac{3\theta \Delta t L_1}{h} - \nu \frac{6\theta \Delta t}{h^2}\right) + \delta_m^{n+1} \left(4 + 4\theta \Delta t L_2 + \nu \frac{12\theta \Delta t}{h^2}\right) \\ &+ \delta_{m+1}^{n+1} \left(1 + \theta \Delta t L_2 + \frac{3\theta \Delta t L_1}{h} - \nu \frac{6\theta \Delta t}{h^2}\right) \\ &= L_1 - (1-\theta)\Delta t [L_1 L_4 + L_3 L_2 - L_3 L_4 - \nu L_5] + \theta \Delta t L_1 L_2 \\ &m = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (6.4)$$

denklem sistemi bulunur [8]. Bu sistemde, bilinmeyenler $d^{n+1} = \{\delta_{-1}^{n+1}, \delta_0^{n+1}, \dots, \delta_{N+1}^{n+1}\}$ olmak üzere, $N+1$ denklem ve $N+3$ bilinmeyen vardır. Sistemin çözülebilmesi için iki tane bilinmeyenin elimine edilerek denklem sayısı ile bilinmeyen sayısının eşitlenmesi gerekir. Bu yüzden δ_{-1} ve δ_{N+1} eleman parametreleri (1.3) sınır koşulları kullanılarak yok edilecektir. Böylece $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu, 3 sütun elemanlı köşegen denklem sistemi elde edilir.

(1.3) sınır koşulları, eleman parametreleri kullanılarak

$$\begin{aligned} U(x_0) &= \delta_{-1}^{n+1} + 4\delta_0^{n+1} + \delta_1^{n+1} = \alpha \\ U(x_N) &= \delta_{N-1}^{n+1} + 4\delta_N^{n+1} + \delta_{N+1}^{n+1} = \beta \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan sınır parametrelerinin değerleri

$$\begin{aligned} \delta_{-1}^{n+1} &= \alpha - 4\delta_0^{n+1} - \delta_1^{n+1} \\ \delta_{N+1}^{n+1} &= \beta - \delta_{N-1}^{n+1} - 4\delta_N^{n+1} \end{aligned} \quad (6.5)$$

olarak elde edilir. Bu değerler (6.4) denklem sisteminde yerine yazıldığında istenilen eliminasyon yapılmış olur.

6.2 Başlangıç Durumu

(6.4) denklem sistemine iterasyon uygulanabilmesi için $d^0 = \{\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_{N+1}^0\}$ başlangıç parametrelerinin hesaplanmasına ihtiyaç vardır. Bunun için (1.2) başlangıç koşulundan (5.3) eşitlikleri yardımıyla başlangıç anında $m = 0, 1, \dots, N$ olmak üzere x_m düğüm noktalarındaki

$$\begin{aligned} U(x_m) &= \delta_{m-1}^0 + 4\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0 \\ U'(x_m) &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^0 - \delta_{m-1}^0) \\ U''(x_m) &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}^0 - 2\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0) \end{aligned}$$

değerleri hesaplanabilir.

İkinci zaman adımındaki $d^1 = \{\delta_{-1}^1, \delta_0^1, \dots, \delta_{N+1}^1\}$ bilinmeyenlerini hesaplamak için (6.4) denklemde $\theta = 1$ alarak kapalı çözüm araştırılırsa (6.4) denklemi

$$L_1 = \delta_{m-1}^0 + 4\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0, \quad L_2 = \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^0 - \delta_{m-1}^0)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} &\delta_{m-1}^1 \left(1 + \Delta t L_2 - \frac{3\Delta t L_1}{h} - \nu \frac{6\Delta t}{h^2}\right) + \delta_m^1 \left(4 + 4\Delta t L_2 + \nu \frac{12\Delta t}{h^2}\right) \\ &+ \delta_{m+1}^1 \left(1 + \Delta t L_2 + \frac{3\Delta t L_1}{h} - \nu \frac{6\Delta t}{h^2}\right) = L_1 + \Delta t L_1 L_2 \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$m = 0, 1, \dots, N$$

denklemine dönüşür [8].

(6.6) denklem sisteminde $N+3$ bilinmeyen ve $N+1$ denklem vardır. Sınır koşulları kullanılarak bulunan (6.5) eşitliklerinin, bu zaman adımında, eliminasyon için kullanılmasıyla iki tane bilinmeyen yok edilmiş olur. Böylece (6.6) denklem sistemi $(N+1) \times (N+1)$ lik, 3 sütun elemanlı, köşegen denklem sistemine dönüşür. Bu sistem Thomas algoritması ile

çözülebilir. Buradan $d^1 = \{\delta_{-1}^1, \delta_0^1, \dots, \delta_{N+1}^1\}$ eleman parametreleri bulunmuş olur. Bulunan bu değerler, $m = 0, 1, \dots, N$ olmak üzere x_m düğüm noktalarındaki

$$\begin{aligned} U(x_m) &= \delta_{m-1}^1 + 4\delta_m^1 + \delta_{m+1}^1 \\ U'(x_m) &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^1 - \delta_{m-1}^1) \\ U''(x_m) &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}^1 - 2\delta_m^1 + \delta_{m+1}^1) \end{aligned}$$

eşitliklerinde kullanılarak $U(x_m), U'(x_m)$ ve $U''(x_m)$ değerleri hesaplanabilir.

Üçüncü zaman adımındaki $d^2 = \{\delta_{-1}^2, \delta_0^2, \dots, \delta_{N+1}^2\}$ bilinmeyenlerini hesaplamak için

(6.4) denkleminde $\theta = \frac{1}{2}$ olarak Crank-Nicolson yaklaşımı kullanılırsa (6.4) denklemi

$$\begin{aligned} L_1 &= \delta_{m-1}^1 + 4\delta_m^1 + \delta_{m+1}^1, & L_2 &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^1 - \delta_{m-1}^1), \\ L_3 &= \delta_{m-1}^0 + 4\delta_m^0 + \delta_{m+1}^0, & L_4 &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^0 - \delta_{m-1}^0), \\ L_5 &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}^1 - 2\delta_m^1 + \delta_{m+1}^1) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} &\delta_{m-1}^2 \left(1 + \frac{\Delta t L_2}{2} - \frac{3\Delta t L_1}{2h} - \nu \frac{3\Delta t}{h^2}\right) + \delta_m^2 \left(4 + 2\Delta t L_2 + \nu \frac{6\Delta t}{h^2}\right) \\ &+ \delta_{m+1}^2 \left(1 + \frac{\Delta t L_2}{2} + \frac{3\Delta t L_1}{2h} - \nu \frac{3\Delta t}{h^2}\right) \\ &= L_1 - \frac{\Delta t}{2} [L_1 L_4 + L_3 L_2 - L_3 L_4 - \nu L_5] + \frac{\Delta t}{2} L_1 L_2 \\ &m = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (6.7)$$

denkleminde dönüşür [8].

(6.7) denklem sisteminde $N+3$ bilinmeyen ve $N+1$ denklem vardır. Sınır koşulları kullanılarak bulunan (6.5) eşitliklerinin, bu zaman adımında, eliminasyon için kullanılmasıyla iki tane bilinmeyen yok edilmiş olur. Böylece (6.6) denklem sistemi

$(N+1) \times (N+1)$ lik, 3 sütun elemanlı, köşegen denklem sistemine dönüşür. Bu sistem Thomas algoritması ile çözülebilir. Buradan $d^2 = \{\delta_{-1}^2, \delta_0^2, \dots, \delta_{N+1}^2\}$ eleman parametreleri bulunmuş olur. Bulunan bu değerler, $m = 0, 1, \dots, N$ olmak üzere x_m düğüm noktalarındaki

$$U(x_m) = \delta_{m-1}^2 + 4\delta_m^2 + \delta_{m+1}^2$$

$$U'(x_m) = \frac{3}{h}(\delta_{m+1}^2 - \delta_{m-1}^2)$$

$$U''(x_m) = \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}^2 - 2\delta_m^2 + \delta_{m+1}^2)$$

eşitliklerinde kullanılarak $U(x_m)$, $U'(x_m)$ ve $U''(x_m)$ değerleri hesaplanabilir.

Üçüncü zaman adımından sonraki tüm zaman adımlarında, $d^{n+1} = \{\delta_{-1}^{n+1}, \delta_0^{n+1}, \dots, \delta_{N+1}^{n+1}\}$ eleman parametrelerinin hesaplanması için önceki iki zaman adımında bulunan δ_m eleman parametreleri kullanılır. Üçüncü zaman adımına kadar yapılan işlemlerin tekrarlanması ile iterasyona devam edilir.

6.3 Kararlılık Analizi

Nümerik metodun kararlılığının araştırılmasında Von Neuman teorisi kullanılır. k mod sayısı ve h eleman büyüklüğü iken, lineer hale getirilmiş (6.7) denklemde (3.14) eşitliği yerine yazılır ve denklem düzenlenirse

$$a = 2 \cos(kh) + 4 - (1-\theta) \frac{12}{h^2} v \Delta t (1 - \cos(kh)), \quad b = (1-\theta) \frac{6}{h} d \Delta t \sin(kh),$$

$$a_1 = 2 \cos(kh) + 4 - \theta \frac{12}{h^2} v \Delta t (1 - \cos(kh)), \quad b_1 = \theta \frac{6}{h} d \Delta t \sin(kh),$$

olmak üzere

$$(a_1 + ib_1) \hat{\delta}^{n+1} = (a - ib) \hat{\delta}^n$$

eşitliği elde edilir [8].

g , büyüme çarpanı olmak üzere $\hat{\delta}^{n+1} = g \hat{\delta}^n$ olduğundan

$$g = \frac{a - ib}{a_1 + ib_1}$$

bulunur.

g ' nin modülü alınırsa $\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ için $|g| \leq 1$ olur. Bu durumda nümerik metod

koşullu kararlıdır.

6.4 Test Problemleri

Bu kısımda, iki test problemi ile Burger denkleminin nümerik sonuçları sunulacaktır.

6.4.1 Birinci test problemi

Birinci test probleminde, Burger denkleminin (1.4) ile verilen analitik çözümüyle beraber, $[0,1]$ tanım aralığında, (1.5) başlangıç ve (1.6) sınır şartı kullanılarak denklemin nümerik sonuçları elde edildi. Nümerik çözümler için $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$ ve $\nu = 0.0005$ alınarak program $t = 3.25$ anına kadar çalıştırıldı. Elde edilen sonuçlar Çizelge 6.1 ile verildi.

Çizelge 6.1 $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$ ve $\nu = 0.0005$

x	$t = 1.7$		$t = 2.5$		$t = 3.25$	
	NÜMERİK	ANALİTİK	NÜMERİK	ANALİTİK	NÜMERİK	ANALİTİK
0.1	0.05883	0.05882	0.04000	0.04000	0.03077	0.03077
0.2	0.11765	0.11765	0.08000	0.08000	0.06154	0.06154
0.3	0.17648	0.17647	0.12001	0.12000	0.09231	0.09231
0.4	0.23531	0.23529	0.16001	0.16000	0.12308	0.12308
0.5	0.29414	0.29412	0.24001	0.20000	0.15385	0.15385
0.6	0.35296	0.35294	0.28001	0.24000	0.18462	0.18462
0.7	0.00000	0.00000	0.28915	0.28000	0.21539	0.21538
0.8	0.00000	0.00000	0.00811	0.00977	0.24616	0.24615
0.9	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.12358	0.12435

6.4.2 İkinci test problemi

İkinci test probleminde, Burger denkleminin (1.7) ile verilen analitik çözümüyle beraber, $[0,1]$ tanım aralığında, (1.8) başlangıç ve (1.9) sınır şartı kullanılarak denklemin nümerik sonuçları elde edildi. Nümerik çözümler için $\nu = 0.01$ alınarak $h = 1/36$ ile $\Delta t = 0.025$ ve $h = 1/18$ ile $\Delta t = 0.001$ durmunda $t = 0.5$ anındaki sonuçlar, Çizelge 6.2 ile verildi.

Çizelge 6.2

x	$t = 0.5$		
	NÜMERİK		ANALİTİK
	$h = 1/36$ $\Delta t = 0.025$	$h = 1/18$ $\Delta t = 0.001$	
0.000	1.000	1.000	1.000
0.056	1.000	1.000	1.000
0.111	1.000	1.000	1.000
0.167	1.000	1.000	1.000
0.222	1.000	1.000	1.000
0.278	0.999	0.996	0.998
0.333	0.986	0.994	0.980
0.389	0.850	0.835	0.847
0.444	0.448	0.461	0.452
0.500	0.236	0.240	0.238
0.556	0.204	0.199	0.204
0.611	0.200	0.199	0.200
0.667	0.200	0.200	0.200
0.722	0.200	0.200	0.200
0.778	0.200	0.200	0.200
0.833	0.200	0.200	0.200
0.889	0.200	0.200	0.200
0.944	0.200	0.200	0.200
1.000	0.200	0.200	0.200

7 BURGER DENKLEMİNİN KUADRATİK B-SPLİNE GALERKİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde Burger denkleminin kuadratik B-spline Galerkin metoduyla nümerik çözümleri verilecek ve nümerik metod için Fourier kararlılık analizi yapılacaktır [2].

7.1 Kuadratik B-spline Galerkin Metodu

Bu kısımda, $[a, b]$ tanım aralığında (1.1) ile verilen Burger denkleminin Galerkin metoduyla nümerik çözümünün yapılabilmesi için sınır koşulları

$$U(a, t) = \alpha, \quad U(b, t) = \beta \quad \text{ya da} \quad U_x(a, t) = U_x(b, t) = 0 \quad t \in [0, T] \quad (7.1)$$

şeklinde seçildi.

$W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (1.1) denklemine Galerkin tekniği uygulanırsa

$$\int_a^b W(U_t + UU_x - \nu U_{xx}) dx = 0 \quad (7.2)$$

denklemini elde edilir.

Kuadratik B-spline fonksiyonların ikinci mertebeden türevleri süreksiz olduğundan U_{xx} fonksiyonu, kuadratik B-spline fonksiyonlar yardımıyla ifade edilemez. Bu yüzden (7.2) denkleminde $\int_a^b WU_{xx} dx$ integraline kısmi integrasyon uygulanır ve (7.1) sınır koşulları kullanılırsa

$$\int_a^b WU_{xx} dx = WU_x \Big|_a^b - \int_a^b W_x U_x dx = - \int_a^b W_x U_x dx \quad (7.3)$$

eşitliği bulunur. Böylece (7.2) denklemini

$$\int_a^b W(U_t + UU_x) dx + \nu \int_a^b W_x U_x dx = 0 \quad (7.4)$$

denkleminde dönüşür.

$[a, b]$ aralığını, x_m düğüm noktaları yardımıyla

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

şeklinde eşit uzunluklu alt aralıklara bölelim. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı, ϕ_{m-1}, ϕ_m ve ϕ_{m+1} kuadratik B-spline fonksiyonları tarafından örtülür (Şekil 1.1). $h = x_{m+1} - x_m$ olsun. $0 \leq \xi \leq 1$ olmak üzere $h\xi = x - x_m$ dönüşümü $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında ϕ_{m-1}, ϕ_m ve ϕ_{m+1} kuadratik B-spline fonksiyonlarına uygulanırsa $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, h]$ aralığına, ϕ_{m-1}, ϕ_m ve ϕ_{m+1} kuadratik B-spline fonksiyonları da

$$\begin{aligned} \phi_{m-1} &= \frac{1}{h^2} (x_{m+1} - x)^2 = \frac{1}{h^2} (x_{m+1} - h\xi - x_m)^2 = \frac{1}{h^2} (h - h\xi)^2 = 1 - 2\xi + \xi^2 \\ \phi_m &= \frac{1}{h^2} [(x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2] = \frac{1}{h^2} [(x_{m+2} - h\xi - x_m)^2 - 3(x_{m+1} - h\xi - x_m)^2] \\ &= \frac{1}{h^2} [(2h - h\xi)^2 - 3(h - h\xi)^2] = 1 + 2\xi - 2\xi^2 \\ \phi_{m+1} &= \frac{1}{h^2} [(x_{m+3} - x)^2 - 3(x_{m+2} - x)^2 + 3(x_{m+1} - x)^2] \\ &= \frac{1}{h^2} [(x_{m+3} - h\xi - x_m)^2 - 3(x_{m+2} - h\xi - x_m)^2 + 3(x_{m+1} - h\xi - x_m)^2] \\ &= \frac{1}{h^2} [(3h - h\xi)^2 - 3(2h - h\xi)^2 + 3(h - h\xi)^2] = \xi^2 \end{aligned}$$

fonksiyonlarına dönüşür. Böylece kuadratik B-spline şekil fonksiyonları ξ ye bağımlı olarak

$$\phi^e = (\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}) = (1 - 2\xi + \xi^2, 1 + 2\xi - 2\xi^2, \xi^2) \quad (7.5)$$

şeklinde bulunmuş olur.

$[x_m, x_{m+1}]$ aralığında Burger denkleminin U_N^e yaklaşık çözümleri

$$U_N^e = U(\xi, t) = \sum_{i=m-1}^{m+1} \delta_i(t) \phi_i(\xi) \quad (7.6)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada δ_i ler, bulunması gereken, zamana bağlı parametrelerdir.

$[x_m, x_{m+1}]$ aralığında (7.4) denklemi

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} [W(U_t + UU_x) + vW_x U_x] dx = 0 \quad (7.7)$$

şeklinde yazılabilir.

(7.7) integral denkleminin itegrant fonksiyonunda ağırlık fonksiyonu W nin yerine ϕ , kuadratik B-spline fonksiyonları, U nun yerine de (7.6) ile verilen eşiti yazılırsa, δ , zamana bağlı türevi göstermek üzere integrant fonksiyonu

$$\sum_{j=m-1}^{m+1} \left[\int_0^h \phi_i \phi_j dx \right] \delta_j + \sum_{j=m-1}^{m+1} \sum_{k=m-1}^{m+1} \left[\int_0^h \phi_i \phi_j' \phi_k dx \right] \delta_k \delta_j + v \sum_{j=m-1}^{m+1} \left[\int_0^h \phi_i' \phi_j' dx \right] \delta_j \quad (7.8)$$

halini alır.

A^e ile C^e 3×3 boyutlu, L^e ise $3 \times 3 \times 3$ boyutlu matrisler ve

$\delta^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1})^T$ olmak üzere (7.8) ifadesi

$$A^e \delta^e + \delta^e L^e \delta^e + v C^e \delta^e \quad (7.9)$$

şeklinde matris formunda yazılabilir [2]. Metod uygulanırken, L matrisinin yerine 3×3 boyutlu,

$$B_{i,j}^e = \sum_{k=m-1}^{m+1} L_{ijk}^e \delta_k$$

şeklinde tanımlanan, birleşik B matrisi kullanılacaktır.

A^e ve C^e matrisleri δ^e eleman parametrelerinden bağımsız, B^e ise δ^e eleman parametrelerine bağımlıdır.

$$\begin{aligned}
A_{i,j}^e &= \int_0^h \phi_i \phi_j d\xi = \frac{h}{30} \begin{bmatrix} 6 & 13 & 1 \\ 13 & 54 & 13 \\ 1 & 13 & 6 \end{bmatrix}, \\
C_{i,j}^e &= \int_0^h \phi_i' \phi_j' d\xi = \frac{2}{3h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \\
B_{i,j}^e &= L_{i,j,k}^e = \int_0^h \phi_i' \phi_j' \phi_k \delta_k d\xi = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} (-10, -19, -1)\delta'' & (8, 12, 0)\delta'' & (2, 7, 1)\delta'' \\ (-19, -54, -7)\delta^e & (12, 0, -12)\delta^e & (7, 54, 19)\delta^e \\ (-1, -7, -2)\delta^e & (0, -12, -8)\delta^e & (1, 19, 10)\delta^e \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{7.10}$$

(7.9) ve (7.10) ifadelerinin birleştirilmesiyle (7.7) denklemi $\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N)^T$ olmak üzere

$$A\delta + B(\delta)\delta + \nu C\delta = 0 \tag{7.11}$$

denklem sistemine dönüşür [2]. Burada $\delta_M = (\delta_{m-2}, \delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2})^T$ olmak üzere $A, B(\delta)$ ve C matrisleri, m . satırı

$$A: \frac{h}{30}(1, 26, 66, 26, 1)$$

$$C: \frac{2}{3h}(-1, -2, 6, -2, -1)$$

$$B(\delta): \frac{h}{30} [(-1, 0, 1, 0, 0)\delta_M, (-7, -31, 31, 7, 0)\delta_M, (-2, -62, 0, 62, 2)\delta_M, \\ (0, -7, -31, 31, 7)\delta_M, (0, 0, -1, 0, 1)\delta_M]$$

olan 5 sütun elemanlı köşegen matrislerdir.

δ_m eleman parametrelerinin iki ardışık zaman aralığı n ve $n+1$ deki değerleri için (2.8) ve (2.9) eşitlikleri kullanılırsa (7.11) denklemi,

$$A \frac{\delta^{n+1} - \delta^n}{\Delta t} + B(\delta^n) \frac{\delta^{n+1} + \delta^n}{2} + \nu C \frac{\delta^{n+1} + \delta^n}{2} = 0$$

denkleminde dönüşür. Bu denklemin düzenlenmesiyle δ için

$$\left(A + \frac{\Delta t}{2} (B(\delta^n) + \nu C) \right) \delta^{n+1} = \left(A - \frac{\Delta t}{2} (B(\delta^n) + \nu C) \right) \delta^n \quad (7.12)$$

tekrarlı bağıntısı elde edilir [2].

(7.12) sisteminin çözülebilmesi için (7.1) sınır koşulları kullanılarak δ_{-1} ve δ_N parametreleri elimine edilmelidir. Böylece, bilinmeyenleri $(\delta_0^{n+1}, \delta_1^{n+1}, \dots, \delta_{N-1}^{n+1})$ parametreleri olan $N \times N$ boyutlu, 5 sütun elemanlı köşegen denklem sistemi elde edilir. Bu sistem Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir. Ardından her zaman adımında δ_{-1} ve δ_N parametreleri hesap edilebilir.

7.2 Başlangıç Durumu

(7.12) denklem sistemine iterasyon uygulanabilmesi için δ_m^0 başlangıç parametrelerinin hesaplanmasına ihtiyaç vardır. Bunun için $U(x, 0)$ başlangıç koşullarından yararlanılacaktır.

$U_N(x, t)$ yaklaşık çözümü, kuadratik B-spline fonksiyonları yardımıyla

$$\begin{aligned} U_N(x, t) &= \sum_{m=-1}^N \delta_m(t) \phi_m(x) \\ &= \delta_{-1}(t) \phi_{-1}(x) + \delta_0(t) \phi_0(x) + \dots + \delta_N(t) \phi_N(x) \end{aligned} \quad (7.13)$$

şeklinde ifade edilebilir. Başlangıç koşulu için (7.13) denkleminde

$$\begin{aligned} U_N(x, 0) &= \sum_{m=-1}^N \delta_m^0 \phi_m(x) \\ &= \delta_{-1}^0 \phi_{-1}(x) + \delta_0^0 \phi_0(x) + \dots + \delta_N^0 \phi_N(x), \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradaki δ_m^0 parametreleri belirlenecek olan parametrelerdir. Başlangıç koşullarının düğüm noktalarındaki

$$U_N(x_m, 0) = U(x_m, 0) \text{ ve } V_N(x_m, 0) = V(x_m, 0), \quad m = 0, 1, \dots, N$$

değerleri kullanılarak, δ parametresi için,

$$\begin{aligned}
U(x_0, 0) &= \delta_{-1} + \delta_0 \\
U(x_1, 0) &= \delta_0 + \delta_1 \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
U(x_N, 0) &= \delta_{N-1} + \delta_N
\end{aligned} \tag{7.14}$$

şeklinde $N+1$ denklemden oluşan $N+2$ bilinmeyenli denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülebilmesi için bir tane bilinmeyenin elimine edilmesi ya da bir tane daha denklemin sisteme eklenmesi gerekir. $U'_N(a, 0) = 0$ veya $U'_N(b, 0) = 0$ sınır koşulunun kullanılmasıyla denklem sayısı ile bilinmeyen sayısı eşitlenebilir. Böylece $N+2$ denklemden oluşan $N+2$ bilinmeyenli denklem sistemi elde edilir ki, bu sistemin çözümü kolayca bulunabilir.

$U'_N(a, 0) = 0$ sınır koşulundan $\frac{2}{h}(\delta_0 - \delta_{-1}) = 0$ yazılabilir. Buradan (7.14) sistemi

$$\begin{aligned}
U'(x_0, 0) &= \frac{2}{h}(\delta_0 - \delta_{-1}) \\
U(x_0, 0) &= \delta_{-1} + \delta_0 \\
U(x_1, 0) &= \delta_0 + \delta_1 \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
U(x_N, 0) &= \delta_{N-1} + \delta_N
\end{aligned}$$

halini alır. Bu sistemin çözülmesi ile $\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N$ değerleri, başlangıç için

$$\begin{aligned}
\delta_{-1} &= \delta_0 = \frac{U(x_0, 0)}{2} \\
\delta_1 &= U(x_1, 0) - \delta_0 \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\delta_N &= U(x_N, 0) - \delta_{N-1}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

7.3 Kararlılık Analizi

Nümerik metodun kararlılığının araştırılmasında Von Neuman teorisi kullanılır.

Lineer olmayan UU_x teriminin yerine yerel sabit alınarak lineer hale getirilmiş Burger denkleminin, (7.12) eşitliğinin kullanılması ile

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{h}{30} - \frac{vd\Delta t}{6} - \frac{v\Delta t}{3h}, & \alpha_2 &= 26\frac{h}{30} - 10\frac{vd\Delta t}{6} - 2\frac{v\Delta t}{3h}, \\ \alpha_3 &= 66\frac{h}{30} + 6\frac{v\Delta t}{3h}, & \alpha_4 &= 26\frac{h}{30} + 10\frac{vd\Delta t}{6} - 2\frac{v\Delta t}{3h}, \\ \alpha_5 &= \frac{h}{30} + \frac{vd\Delta t}{6} - \frac{v\Delta t}{3h}\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\alpha_1\delta_{m-2}^{n+1} + \alpha_2\delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_3\delta_m^{n+1} + \alpha_4\delta_{m+1}^{n+1} + \alpha_5\delta_{m+2}^{n+1} = \\ \alpha_3\delta_{m-2}^n + \alpha_4\delta_{m-1}^n + \alpha_3\delta_m^n + \alpha_2\delta_{m+1}^n + \alpha_1\delta_{m+2}^n\end{aligned}\quad (7.15)$$

şeklinde yazılabilir [2].

(3.14) eşitliği (7.15) eşitliğinde yerine yazılır ve denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned}a &= \frac{h}{30}(33 + \cos(2kh) + 26\cos(kh)), \\ a_1 &= 2\frac{v\Delta t}{3h}(\sin^2(kh) + 2\sin^2(kh/2)), \\ b_1 &= \left(\frac{vd\Delta t}{6} + \frac{v\Delta t}{3h}\right)\sin(2kh) + \left(10\frac{vd\Delta t}{6} - 2\frac{v\Delta t}{3h}\right)\sin(kh)\end{aligned}$$

olmak üzere

$$(a + a_1 + ib)\hat{\delta}^{n+1} = (a - a_1 - ib)\hat{\delta}^n$$

eşitliği elde edilir [2].

g , büyüme çarpanı olmak üzere $\hat{\delta}^{n+1} = g\hat{\delta}^n$ olduğundan

$$g = \frac{a - a_1 - ib}{a + a_1 + ib}$$

bulunur.

g' nin modülü alındığında $|g| \leq 1$ olduğu görülür. Bu durumda nümerik metod koşulsuz kararlıdır.

7.4 Test Problemleri

Bu kısımda, iki test problemi ile Burger denkleminin nümerik çözümü yapılacak ve metodun doğruluğu (2.19) ile verilen L_2 ve L_∞ hata normları ile ölçülecektir.

7.4.1 Birinci test problemi

Birinci test probleminde, Burger denkleminin (1.4) ile verilen analitik çözümüyle beraber, $[0,1]$ tanım aralığında, (1.5) başlangıç ve (1.6) sınır şartı kullanılarak denklemin nümerik sonuçları elde edildi. Nümerik çözümler için $h = 0.02$ ve $\Delta t = 0.1$ alınarak program $t = 3.25$ anına kadar çalıştırıldı. $\nu = 0.005$ ve $\nu = 0.0005$ durumları için bulunan L_2 ve L_∞ hataları Çizelge 7.1 ile verildi.

Çizelge 7.1 $h = 0.02$, $\Delta t = 0.1$

	$\nu = 0.005$			$\nu = 0.0005$		
	$t = 1.7$	$t = 2.4$	$t = 3.1$	$t = 1.75$	$t = 2.5$	$t = 3.25$
$L_2 \times 10^3$	2.281	1.175	0.808	2.023	2.094	0.933
$L_\infty \times 10^3$	7.150	2.921	2.297	14.033	12.615	8.394

Viskozite sabitinin her iki durumunda da bulunan nümerik sonuçlar analitik sonuca oldukça yakındır. Viskozite sabitinin değerinin küçülmesi, oluşan hatayı büyütse de sonuçlar hâla kabul edilebilir yakınlıktadır.

7.4.2 İkinci test problemi

İkinci test probleminde, Burger denkleminin (1.7) ile verilen analitik çözümüyle beraber, $[0,1]$ tanım aralığında, (1.8) başlangıç ve $U_x(0,t) = U_x(1,t) = 0$ sınır şartı kullanılarak denklemin nümerik sonuçları elde edildi. Nümerik çözümler için $h = 1/36$, $\Delta t = 0.025$ ve $\nu = 0.01$ alınarak $t = 0.5$ anında, Burger denkleminin analitik sonuçları ile elde edilen nümerik sonuçlar karşılaştırıldı. Karşılaştırma Çizelge 7.2 ile verildi.

Çizelge 7.2 $h=1/36$, $\Delta t=0.025$ ve $\nu=0.01$

x	$t=0.5$	
	NÜMERİK	ANALİTİK
0.000	1.000	1.000
0.056	1.000	1.000
0.111	1.000	1.000
0.167	1.000	1.000
0.222	1.000	1.000
0.278	0.998	0.998
0.333	0.985	0.980
0.389	0.851	0.847
0.444	0.447	0.452
0.500	0.238	0.238
0.556	0.205	0.204
0.611	0.201	0.200
0.667	0.200	0.200
0.722	0.200	0.200
0.778	0.200	0.200
0.833	0.200	0.200
0.889	0.200	0.200
0.944	0.200	0.200
1.000	0.200	0.200
$L_{\infty} \times 10^3$	50	

8 BURGER DENKLEMİNİN KÜBİK B-SPLİNE GALERKİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde Burger denkleminin kübik B-spline Galerkin metoduyla nümerik çözümleri verilecek ve nümerik metod için Fourier kararlılık analizi yapılacaktır [24].

8.1 Kübik B-spline Galerkin Metodu

Bu kısımda, $[a, b]$ tanım aralığında (1.1) ile verilen Burger denkleminin Galerkin metoduyla nümerik çözümünün yapılabilmesi için sınır koşulları

$$U(a, t) = U(b, t) = 0 \quad \text{ya da} \quad U_x(a, t) = U_x(b, t) = 0 \quad t \in [0, T] \quad (8.1)$$

şeklinde seçildi .

$W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (1.1) denkleminde Galerkin tekniği uygulanırsa

$$\int_a^b W(U_t + UU_x - vU_{xx}) dx = 0 \quad (8.2)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde $\int_a^b WU_{xx} dx$ integraline kısmi integrasyon uygulanır ve (8.1)

sınır koşulları kullanılırsa

$$\int_a^b WU_{xx} dx = WU_x \Big|_a^b - \int_a^b W_x U_x dx = - \int_a^b W_x U_x dx \quad (8.3)$$

eşitliği bulunur. Böylece (8.2) denklemini

$$\int_a^b W(U_t + UU_x) dx + v \int_a^b W_x U_x dx = 0 \quad (8.4)$$

denkleminde dönüşür.

$[a, b]$ aralığını, x_m düğüm noktaları yardımıyla

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

şeklinde eşit uzunluklu alt aralıklara bölelim. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı, $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}$ ve ϕ_{m+2} kübik B-spline fonksiyonları tarafından örtülür (Şekil 1.3). $h = x_{m+1} - x_m$ olsun. $0 \leq \xi \leq h$ olmak üzere $\xi = x - x_m$ dönüşümü $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}$ ve ϕ_{m+2} kübik B-spline fonksiyonlarına uygulanırsa $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, h]$ aralığına, $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}$ ve ϕ_{m+2} kübik B-spline fonksiyonları da

$$\begin{aligned} \phi_{m-1} &= \frac{1}{h^3} (x_{m+1} - x)^3 = \frac{1}{h^3} (x_{m+1} - \xi - x_m)^3 = \frac{1}{h^3} (h - \xi)^3 \\ \phi_m &= \frac{1}{h^3} [h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3] \\ &= \frac{1}{h^3} [h^3 + 3h^2(x_{m+1} - \xi - x_m) + 3h(x_{m+1} - \xi - x_m)^2 - 3(x_{m+1} - \xi - x_m)^3] \\ &= \frac{1}{h^3} [h^3 + 3h^2(h - \xi) + 3h(h - \xi)^2 - 3(h - \xi)^3] \\ \phi_{m+1} &= \frac{1}{h^3} [h^3 + 3h^2(x - x_m) + 3h(x - x_m)^2 - 3(x - x_m)^3] \\ &= \frac{1}{h^3} [h^3 + 3h^2(\xi + x_m - x_m) + 3h(\xi + x_m - x_m)^2 - 3(\xi + x_m - x_m)^3] \\ &= \frac{1}{h^3} [h^3 + 3h^2\xi + 3h\xi^2 - 3\xi^3] \\ \phi_{m+2} &= \frac{1}{h^3} [(x - x_m)^3] = \frac{1}{h^3} [(\xi + x_m - x_m)^3] = \frac{1}{h^3} \xi^3 \end{aligned}$$

fonksiyonlarına dönüşür. Böylece kübik B-spline şekil fonksiyonları ξ ve h ye bağımlı olarak

$$\begin{aligned} \phi^e &= [\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}] \tag{8.5} \\ &= \frac{1}{h^3} [(h - \xi)^3, (h^3 + 3h^2(h - \xi) + 3h(h - \xi)^2 - 3(h - \xi)^3), (h^3 + 3h^2\xi + 3h\xi^2 - 3\xi^3), \xi^3] \end{aligned}$$

şeklinde bulunmuş olur.

$[x_m, x_{m+1}]$ aralığında Burger denkleminin U_N^e yaklaşık çözümleri

$$U_N^e = U(\xi, t) = \sum_{i=m-1}^{m+2} \delta_i(t) \phi_i(\xi) \tag{8.6}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada δ_i ler, bulunması gereken, zamana bağlı parametrelerdir.

$[x_m, x_{m+1}]$ aralığında (8.4) denklemi

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} [W(U_t + UU_x) + vW_x U_x] dx = 0 \quad (8.7)$$

şeklinde yazılabilir.

(8.7) integral denkleminin itegrant fonksiyonunda ağırlık fonksiyonu W nin yerine ϕ_i kübik B-spline fonksiyonları, U nun yerine de (8.6) ile verilen eşiti yazılırsa, \circ , zamana bağlı türevi göstermek üzere itegrant fonksiyonu

$$\sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\int_0^h \phi_i \phi_j dx \right] \delta_j^e + \sum_{j=m-1}^{m+2} \sum_{k=m-1}^{m+2} \left[\int_0^h \phi_i \phi_j \phi_k' dx \right] \delta_j^e \delta_k^e + v \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\int_0^h \phi_i' \phi_j' dx \right] \delta_j^e \quad (8.8)$$

halini alır. Burada $\delta^e = (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2})^T$ dir.

A^e ile C^e 4×4 boyutlu, L^e ise $4 \times 4 \times 4$ boyutlu matrisler olmak üzere (8.8) ifadesi

$$A^e \delta^e + \delta^{eT} L^e \delta^e + v C^e \delta^e \quad (8.9)$$

şeklinde matris formunda yazılabilir. Metod uygulanırken, L matrisinin yerine 4×4 boyutlu,

$$B_{i,j}^e = \sum_{k=m-1}^{m+2} L_{ijk}^e \delta_k^e$$

şeklinde tanımlanan, birleşik B^e matrisi kullanılacaktır.

A^e ve C^e matrisleri δ^e eleman parametrelerinden bağımsız, B^e ise δ^e eleman parametrelerine bağımlıdır.

A^e, L_{ijk}^e ve C^e matrisleri

$$\begin{aligned}
A_{ij}^e &= \int_0^h \phi_i \phi_j dx, \\
L_{ijk}^c &= \int_0^h \phi_i \phi_j \phi_k' dx, \\
C_{ij}^c &= \int_0^h \phi_i' \phi_j' dx,
\end{aligned} \tag{8.10}$$

integrallerinin hesaplanması ile bulunabilir.

(8.9) ve (8.10) ifadelerinin birleştirilmesiyle (8.7) denklemi $\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{N+1})^T$ olmak üzere

$$A\delta + B(\delta)\delta + \nu C\delta = 0 \tag{8.11}$$

denklem sistemine dönüşür.

δ_m eleman parametrelerinin, iki ardışık zaman aralığı n ve $n+1$ deki değerleri için (2.8) ve (2.9) eşitlikleri kullanılırsa (8.11) denklemi,

$$A \frac{\delta^{n+1} - \delta^n}{\Delta t} + B(\delta^n) \frac{\delta^{n+1} + \delta^n}{2} + \nu C \frac{\delta^{n+1} + \delta^n}{2} = 0$$

denkleme dönüşür. Bu denklemin düzenlenmesiyle δ için

$$\left(A + \frac{\Delta t}{2} (B(\delta^n) + \nu C) \right) \delta^{n+1} = \left(A - \frac{\Delta t}{2} (B(\delta^n) + \nu C) \right) \delta^n \tag{8.12}$$

tekrarlı bağıntısı elde edilir [24].

Burada $B(\delta)\delta$ matrisinin δ ya bağımlı olması lineerliği bozmaktadır. Bundan dolayı Burger denkleminde lineer olmayan UU_x ifadesindeki U , bir yerel sabit olarak alınırsa ilgili δ_m parametreleri de sabit sayı olacaktır. Bu sabit sayının c olduğunu kabul edersek (8.11) sisteminde yer alan $A, B(\delta)$ ve C matrisleri, m . satır elemanları

$$A: \frac{h}{140}(1,120,1191,2416,1191,120,1)$$

$$B: \frac{c}{40}(-6,-336,-1470,0,1470,336,6)$$

$$C: \frac{1}{10h}(-3,-72,-45,240,-45,-72,-3)$$

olan 7 sütun elemanlı köşegen matrisler olarak ifade edilebilir [24].

(8.12) sisteminin çözülebilmesi için (8.1) sınır koşulları kullanılarak δ_{-1} ve δ_{N+1} parametreleri elimine edilmelidir. Böylece, bilinmeyenleri ($\delta_0^{n+1}, \delta_1^{n+1}, \dots, \delta_N^{n+1}$) parametreleri olan $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu, 7 sütun elemanlı köşegen denklem sistemi elde edilir. Bu sistem Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir. Ardından her zaman adımında δ_{-1} ve δ_N parametreleri hesap edilebilir.

Lineer olmayan (8.12) denklem sisteminin çözümü, (2.16) iterasyon formülü kullanılarak her zaman adımında iyileştirilebilir:

(8.12) sistemi kullanılarak, Thomas algoritması yardımıyla, δ^{n+1} yaklaşımları bulunur. Yeni zaman adımına geçmeden önce, δ^{n+1} değerlerini iyileştirmek için bu değerlere (2.16) ile verilen iterasyon üç yada dört defa uygulanır. Böylece δ^{n+1} yaklaşımlarının yeni değerleri elde edilmiş olur.

8.2 Başlangıç Durumu

(8.12) denklem sistemine iterasyon uygulanabilmesi için δ_m^0 başlangıç parametrelerinin hesaplanmasına ihtiyaç vardır. Bunun için $U(x, 0)$ başlangıç koşullarından yararlanılacaktır.

$U_N(x, t)$ yaklaşık çözümü, kübik B-spline fonksiyonları yardımıyla

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-1}^{N+1} \delta_m(t) \phi_m(x) \quad (8.13)$$

$$= \delta_{-1}(t) \phi_{-1}(x) + \delta_0(t) \phi_0(x) + \dots + \delta_{N+1}(t) \phi_{N+1}(x)$$

şeklinde ifade edilebilir. Başlangıç koşulu için (8.13) denkleminde

$$\begin{aligned}
U_N(x, 0) &= \sum_{m=-1}^{N+1} \delta_m^0 \phi_m(x) \\
&= \delta_{-1}^0 \phi_{-1}(x) + \delta_0^0 \phi_0(x) + \dots + \delta_{N+1}^0 \phi_{N+1}(x),
\end{aligned}$$

yazılabilir [24]. Buradaki δ_m^0 parametreleri belirlenecek olan parametrelerdir.

Başlangıç koşullarının düğüm noktalarındaki

$$U_N(x_m, 0) = U(x_m, 0) \quad m = 0, 1, \dots, N$$

değerleri kullanılarak, δ parametresi için,

$$\begin{aligned}
U(x_0, 0) &= \delta_{-1} + 4\delta_0 + \delta_1 \\
U(x_1, 0) &= \delta_0 + 4\delta_1 + \delta_2 \\
&\vdots \\
U(x_N, 0) &= \delta_{N-1} + 4\delta_N + \delta_{N+1}
\end{aligned} \tag{8.14}$$

şeklinde $N+1$ denklemden oluşan $N+3$ bilinmeyenli denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülebilmesi için iki tane bilinmeyen elimine edilmesi ya da iki tane daha denklemin sisteme eklenmesi gerekir. (8.1) sınır koşulunun kullanılmasıyla iki tane bilinmeyen elimine edilerek denklem sayısı ile bilinmeyen sayısı eşitlenebilir. Böylece $N+1$ denklemden oluşan $N+1$ bilinmeyenli denklem sistemi elde edilir ki, bu sistemin çözümü kolayca bulunabilir.

$$U_x(a, t) = U_x(b, t) = 0 \quad \text{sınır koşullarından} \quad \frac{3}{h}(\delta_1 - \delta_{-1}) = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{3}{h}(\delta_{N+1} - \delta_{N-1}) = 0$$

yazılabilir [24]. Buradan elde edilen $\delta_{-1} = \delta_1$ ve $\delta_{N+1} = \delta_{N-1}$ eşitlikleri (8.14) sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
U(x_0, 0) &= 4\delta_0 + 2\delta_1 \\
U(x_1, 0) &= \delta_0 + 4\delta_1 + \delta_2 \\
&\vdots \\
U(x_N, 0) &= 2\delta_{N-1} + 4\delta_N
\end{aligned}$$

denklem sistemi bulunur. Böylece

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\delta^0 = [\delta_0^0, \delta_1^0, \dots, \delta_N^0]^T,$$

$$b = [U(x_0), U(x_1), \dots, U(x_N)]^T$$

olmak üzere δ eleman parametresi için matris formunda

$$A\delta^0 = b$$

denklem sistemi elde edilmiş olur. Elde edilen bu denklem sistemi $(N+1) \times (N+1)$ tipinde, 3 sütun elemanlı, köşegen denklem sistemidir. Bu sistem Thomas algoritması kullanılarak çözümlürse başlangıç için δ^0 eleman parametreleri bulunmuş olur. Bulunan bu değerler (8.12) denklem sisteminde kullanılarak iterasyona geçilir.

8.3 Kararlılık Analizi

Nümerik metodun kararlılığının araştırılmasında Von Neuman teorisi kullanılır. k mod sayısı ve h eleman büyüklüğü iken, lineer hale getirilmiş (8.12) denklemde (3.14) eşitliği yerine yazılır ve denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} a &= 2 \left(\frac{h}{140} - 3 \frac{v\Delta t}{20h} \right) \cos(3kh) + 48 \left(5 \frac{h}{140} - 3 \frac{v\Delta t}{20h} \right) \cos(2kh) + \\ & 2 \left(1191 \frac{h}{140} - 45 \frac{v\Delta t}{20h} \right) \cos(kh) + 2 \left(1208 \frac{h}{140} + 120 \frac{v\Delta t}{20h} \right), \\ b &= 12 \frac{d\Delta t}{80} \sin(3kh) + 672 \frac{d\Delta t}{80} \sin(2kh) + 2940 \frac{d\Delta t}{80} \sin(kh) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$(a + ib) \hat{\delta}^{n+1} = (a - ib) \hat{\delta}^n$$

eşitliği elde edilir [24].

g , büyüme çarpanı olmak üzere $\hat{\delta}^{n+1} = g \hat{\delta}^n$ olduğundan

$$g = \frac{a-ib}{a+ib}$$

bulunur.

g ' nin modülü alınırsa $|g|=1$ olacağından $|g| \leq 1$ koşulu sağlanır. Bu durumda nümerik metod koşulsuz kararlıdır.

8.4 Test Problemi

Test probleminde, Burger denkleminin (1.4) ile verilen analitik çözümüyle beraber, $[0,1]$ tanım aralığında, (1.5) başlangıç ve (1.6) sınır şartı kullanılarak denklemin nümerik sonuçları elde edildi. Nümerik çözümler için $\Delta t = 0.2$ alınıp program $t = 5.0$ anına kadar çalıştırıldı. $h = 0.01$ iken $\nu = 0.5$, $\nu = 0.05$ durumları için ve $h = 0.001$ iken $\nu = 0.005$, $\nu = 0.0005$ durumları için bulunan L_2 ve L_∞ hataları Çizelge 8.1 ile verildi.

Çizelge 8.1

	$\nu = 0.5$		$\nu = 0.05$		$\nu = 0.005$		$\nu = 0.0005$	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
1.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
2.0	0.01369	0.01585	0.01206	0.02419	0.00090	0.00431	0.00117	0.01208
3.0	0.01125	0.00942	0.01035	0.01522	0.00078	0.00228	0.00060	0.00433
4.0	0.00961	0.00676	0.00913	0.01094	0.00070	0.00171	0.00237	0.05097
5.0	0.00846	0.00536	0.00826	0.00084	0.00222	0.01434	0.00553	0.12089

9 BURGER DENKLEMİNİN KUİNTİK B-SPLİNE GALERKİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde Burger denkleminin kuintik B-spline Galerkin metoduyla nümerik çözümleri verilecektir [9].

9.1 Kuintik B-spline Galerkin Metodu

Bu kısımda, $[a, b]$ tanım aralığında (1.1) ile verilen Burger denkleminin Galerkin metoduyla nümerik çözümünün yapılabilmesi için sınır koşulları

$$U(a, t) = \alpha, U(b, t) = \beta \quad \text{ya da} \quad U_x(a, t) = U_x(b, t) = 0 \quad t \in [0, T] \quad (9.1)$$

şeklinde seçildi .

$W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (1.1) denklemine Galerkin tekniği uygulanırsa

$$\int_a^b W(U_t + UU_x - vU_{xx}) dx = 0 \quad (9.2)$$

denklemini elde edilir.

$[a, b]$ aralığını, x_m düğüm noktaları yardımıyla

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

şeklinde eşit uzunluklu alt aralıklara bölümlim. $m = -2, -1, \dots, N + 2$ olmak üzere $\phi_m(x)$ fonksiyonları, düğüm noktalarında tanımlı, kuintik B-spline fonksiyonlar olsun. Burger denklemindeki $U(x, t)$ analitik fonksiyonunun yaklaşık çözümünün $U_N(x, t)$ olduğunu varsayalım. δ_m değerleri bulunması gereken zamana bağlı parametreler olmak üzere bu yaklaşık çözüm kuintik B-spline fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
U_N(x,t) &= \sum_{m=-2}^{N+2} \delta_m(t) \phi_m(x) \\
&= \delta_{-2}(t) \phi_{-2}(x) + \delta_{-1}(t) \phi_{-1}(x) + \dots + \delta_{N+2}(t) \phi_{N+2}(x)
\end{aligned} \tag{9.3}$$

(9.3) denklemini ve Çizelge 1.3 kullanılarak U_m fonksiyonlarının ve bu fonksiyonların dördüncü mertebeye kadarki türevlerinin $m = 0, 1, \dots, N$ olmak üzere x_m düğüm noktalarındaki değerleri, eleman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned}
U_m &= U(x_m) = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\
U'_m &= U'(x_m) = \frac{5}{h}(\delta_{m+2} + 10\delta_{m+1} - 10\delta_{m-1} - \delta_{m-2}), \\
U''_m &= U''(x_m) = \frac{20}{h^2}(\delta_{m+2} + 2\delta_{m+1} - 6\delta_m + 2\delta_{m-1} + \delta_{m-2}), \\
U'''_m &= U'''(x_m) = \frac{60}{h^3}(\delta_{m+2} - 2\delta_{m+1} + 2\delta_{m-1} - \delta_{m-2}), \\
U^{(4)}_m &= U^{(4)}(x_m) = \frac{120}{h^4}(\delta_{m+2} - 4\delta_{m+1} + 6\delta_m - 4\delta_{m-1} + \delta_{m-2}).
\end{aligned} \tag{9.4}$$

olarak bulunabilir.

$[x_m, x_{m+1}]$ aralığı, $\phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$ ve ϕ_{m+3} kuintik B-spline fonksiyonları tarafından örtülür (Şekil 1.4). $h = x_m - x_{m-1}$ olsun. $0 \leq \xi \leq h$ olmak üzere $\xi = x - x_m$ dönüşümü $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında $\phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$ ve ϕ_{m+3} kübik B-spline fonksiyonlarına uygulanırsa $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, h]$ aralığına, $\phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$ ve ϕ_{m+3} kübik B-spline fonksiyonları da

$$\begin{aligned}
\phi_{m-2} &= 1 - 5\frac{\xi}{h} + 10\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 - 10\left(\frac{\xi}{h}\right)^3 + 5\left(\frac{\xi}{h}\right)^4 - \left(\frac{\xi}{h}\right)^5 \\
\phi_{m-1} &= 26 - 50\frac{\xi}{h} + 20\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 + 20\left(\frac{\xi}{h}\right)^3 - 20\left(\frac{\xi}{h}\right)^4 + 5\left(\frac{\xi}{h}\right)^5 \\
\phi_m &= 66 - 60\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 + 30\left(\frac{\xi}{h}\right)^4 - 10\left(\frac{\xi}{h}\right)^5 \\
\phi_{m+1} &= 26 + 50\frac{\xi}{h} + 20\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 - 20\left(\frac{\xi}{h}\right)^3 - 20\left(\frac{\xi}{h}\right)^4 + 10\left(\frac{\xi}{h}\right)^5 \\
\phi_{m+2} &= 1 + 5\frac{\xi}{h} + 10\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 + 10\left(\frac{\xi}{h}\right)^3 + 5\left(\frac{\xi}{h}\right)^4 - 5\left(\frac{\xi}{h}\right)^5 \\
\phi_{m+3} &= \left(\frac{\xi}{h}\right)^5
\end{aligned} \tag{9.5}$$

fonksiyonlarına dönüşür. Böylece kübik B-spline şekil fonksiyonları ξ ve h ye bağımlı olarak bulunmuş olur.

$[x_m, x_{m+1}]$ aralığında Burger denkleminin U_N^e yaklaşık çözümleri

$$U_N^e = U(\xi, t) = \sum_{i=m-2}^{m+3} \delta_i(t) \phi_i(\xi) \tag{9.6}$$

şeklinde ifade edilebilir.

$[x_m, x_{m+1}]$ aralığında (9.2) denklemi

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} W(U_t + UU_x - \nu U_{xx}) dx = 0 \tag{9.5}$$

şeklinde yazılabilir.

(9.5) integral denkleminin itegrant fonksiyonunda ağırlık fonksiyonu W nin yerine ϕ_i kuintik B-spline şekil fonksiyonları, U nun yerine de (9.4) ile verilen eşiti yazılırsa, \ominus , zamana bağılı türevi göstermek üzere integrant fonksiyonu

$$\sum_{j=m-2}^{m+3} \left[\int_0^h \phi_i \phi_j d\xi \right] \delta_j^e + \sum_{j=m-2}^{m+3} \sum_{k=m-2}^{m+3} \left[\int_0^h \phi_i \phi_j \phi_k' d\xi \right] \delta_k^e \delta_j^e - \nu \sum_{j=m-2}^{m+3} \left[\int_0^h \phi_i \phi_j'' d\xi \right] \delta_j^e \quad (9.6)$$

halini alır. Burada $m = 0, 1, \dots, N-1$ ve $\delta^e = (\delta_{m-2}, \delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2}, \delta_{m+3})^T$ dir.

A^e ile C^e 6×6 boyutlu, L^e ise $6 \times 6 \times 6$ boyutlu matrisler olmak üzere (9.6) ifadesi

$$A^e \delta^e + (\delta^e)^T L^e \delta^e - \nu C^e \delta^e \quad (9.7)$$

şeklinde matris formunda yazılabilir. Metod uygulanırken, L matrisinin yerine 6×6 boyutlu,

$$B_{i,j}^e = \sum_{k=m-2}^{m+3} L_{ijk}^e \delta_k^e$$

şeklinde tanımlanan, birleşik B^e matrisi kullanılacaktır.

A^e ve C^e matrisleri δ^e eleman parametrelerinden bağımsız, B^e ise δ^e eleman parametrelerine bağımlıdır. A^e, L_{ijk}^e ve C^e matrisleri

$$\begin{aligned} A_{ij}^e &= \int_0^h \phi_i \phi_j d\xi, \\ L_{ijk}^e &= \int_0^h \phi_i \phi_j \phi_k' d\xi, \\ C_{ij}^e &= \int_0^h \phi_i \phi_j'' d\xi, \end{aligned} \quad (9.8)$$

integrallerinin hesaplanması ile bulunabilir.

(9.7) ve (9.8) ifadelerinin birleştirilmesiyle (9.5) denklemi $\delta = (\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})^T$ olmak üzere

$$A \delta + (B(\delta) - \nu C) \delta = 0 \quad (9.9)$$

denklem sistemine dönüşür.

δ_m eleman parametrelerinin, iki ardışık zaman aralığı n ve $n+1$ deki değerleri için (2.8) ve (2.9) eşitlikleri kullanılırsa (9.9) denklemi,

$$A \frac{\delta^{n+1} - \delta^n}{\Delta t} + B(\delta^n) \frac{\delta^{n+1} + \delta^n}{2} - vC \frac{\delta^{n+1} + \delta^n}{2} = 0$$

denkleme dönüşür. Bu denklemin düzenlenmesiyle δ için lineer olmayan

$$(2A + \Delta t B(\delta^n) - v\Delta t C) \delta^{n+1} = (2A - \Delta t B(\delta^n) + v\Delta t C) \delta^n \quad (9.10)$$

tekrarlı bağıntısı elde edilir [9]. Bu sistemin çözülebilmesi için sistemdeki denklem sayısı ile bilinmeyen sayısının eşitlenmesi gerekir. $\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}$ eleman parametrelerinin elimine edilmesi sistemin çözülebilmesi için yeterlidir. δ_{-2} ve δ_{-1} parametrelerini elimine edebilmek için $U(a,t) = U_{xx}(a,t) = 0$ sınır koşulu, δ_{N+1} ve δ_{N+2} parametrelerini elimine edebilmek için de $U(b,t) = U_{xx}(b,t) = 0$ sınır koşulu kullanılabilir.

(9.4) eşitlikleri kullanılarak $U(a,t) = U_{xx}(a,t) = 0$ koşulundan

$$\begin{aligned} \delta_{-2} + 26\delta_{-1} + 66\delta_0 + 26\delta_1 + \delta_2 &= 0, \\ \frac{20}{h^2}(\delta_2 + 2\delta_1 - 6\delta_0 + 2\delta_{-1} + \delta_{-2}) &= 0 \end{aligned}$$

ve $U(b,t) = U_{xx}(b,t) = 0$ koşulundan

$$\begin{aligned} \delta_{N-2} + 26\delta_{N-1} + 66\delta_N + 26\delta_{N+1} + \delta_{N+2} &= 0, \\ \frac{20}{h^2}(\delta_{N+2} + 2\delta_{N+1} - 6\delta_N + 2\delta_{N-1} + \delta_{N-2}) &= 0 \end{aligned}$$

yazılabilir bu eşitlikler kullanılarak istenilen eliminasyon yapılabilir.

Lineer olmayan (9.10) denklem sisteminin çözümü, (2.16) iterasyon formülü kullanılarak her zaman adımında iyileştirilebilir:

(9.10) sistemi kullanılarak, Thomas algoritması yardımıyla, δ^{n+1} yaklaşımları bulunur. Yeni zaman adımına geçmeden önce, δ^{n+1} değerlerini iyileştirmek için bu değerlere (2.16) ile

verilen iterasyon üç yada dört defa uygulanır. Böylece δ^{n+1} yaklaşımlarının yeni değerleri elde edilmiş olur.

9.2 Başlangıç Durumu

(9.10) denklem sistemine iterasyon uygulanabilmesi için δ_m^0 başlangıç parametrelerinin hesaplanmasına ihtiyaç vardır. Bunun için

$$\begin{aligned}(U_N)_x(a,0) &= 0, & (U_N)_x(b,0) &= 0, \\ (U_N)_{xx}(a,0) &= 0, & (U_N)_{xx}(b,0) &= 0, \\ U_N(x,0) &= U(x_m,0), & m &= 0, \dots, N\end{aligned}$$

başlangıç koşullarından yararlanılacaktır.

(9.4) eşitliği ile verilen $U_N(x,t)$ yaklaşık çözümü, başlangıç koşulu için

$$\begin{aligned}U_N(x,0) &= \sum_{m=-2}^{N+2} \delta_m^0 \phi_m(x) \\ &= \delta_{-2}^0 \phi_{-2}(x) + \delta_{-1}^0 \phi_{-1}(x) + \dots + \delta_{N+2}^0 \phi_{N+2}(x)\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki δ_m^0 parametreleri belirlenecek olan parametrelerdir.

Başlangıç koşullarının düğüm noktalarındaki $U_N(x_m,0) = U(x_m,0) \quad m = 0,1,\dots,N$ değerleri kullanılarak, δ parametresi için,

$$\begin{aligned}U(x_0,0) &= \delta_{-2} + 26\delta_{-1} + 66\delta_0 + 26\delta_1 + \delta_2 \\ U(x_1,0) &= \delta_{-1} + 26\delta_0 + 66\delta_1 + 26\delta_2 + \delta_3 \\ &\vdots \\ U(x_N,0) &= \delta_{N-2} + 26\delta_{N-1} + 66\delta_N + 26\delta_{N+1} + \delta_{N+2}\end{aligned} \tag{9.11}$$

şeklinde $N+1$ denklemden oluşan $N+5$ bilinmeyenli denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülebilmesi için dört tane bilinmeyenin elimine edilmesi gerekir.

$$\begin{aligned}(U_N)_x(a,0) &= 0, \\ (U_N)_{xx}(a,0) &= 0\end{aligned} \tag{9.12}$$

ve

$$\begin{aligned}(U_N)_x(b,0) &= 0, \\ (U_N)_{xx}(b,0) &= 0\end{aligned}\tag{9.13}$$

sınır koşullarının kullanılmasıyla dört tane bilinmeyen elimine edilerek denklem sayısı ile bilinmeyen sayısı eşitlenebilir. Böylece $N+1$ denklemden oluşan $N+1$ bilinmeyenli denklem sistemi elde edilir ki, bu sistem çözülebilirdir.

(9.12) sınır koşullarından $\delta_{-1} = \frac{1}{4}\delta_2 + \frac{3}{2}\delta_1 - \frac{3}{4}\delta_0$ ve $\delta_{-2} = \frac{15}{2}\delta_0 - 5\delta_1 - \frac{3}{2}\delta_2$ olarak yazılabilir. Bunun yanında (9.13) sınır koşullarından $\delta_{N+1} = \frac{1}{4}\delta_{N-2} + \frac{3}{2}\delta_{N-1} - \frac{3}{4}\delta_N$ ve $\delta_{N+2} = \frac{15}{2}\delta_N - 5\delta_{N-1} - \frac{3}{2}\delta_{N-2}$ yazılabilir. Elde edilen bu eşitlikler (9.11) sisteminde yerine yazılırsa

$$U(x_0,0) = 54\delta_0 + 60\delta_1 + 6\delta_2$$

$$U(x_1,0) = \frac{101}{4}\delta_0 + \frac{135}{2}\delta_1 + \frac{105}{4}\delta_2 + \delta_3$$

$$U(x_2,0) = \delta_0 + 26\delta_1 + 66\delta_2 + 26\delta_3 + \delta_4$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$U(x_{N-1},0) = \delta_{N-3} + \frac{105}{4}\delta_{N-2} + \frac{135}{2}\delta_{N-1} + \frac{101}{4}\delta_N$$

$$U(x_N,0) = 6\delta_{N-2} + 60\delta_{N-1} + 54\delta_N$$

denklem sistemi bulunur. Böylece

Çizelge 9.1 $h=0.02$, $\Delta t=0.1$ ve $\nu=0.005$

x	$t=1.7$		$t=2.4$		$t=3.1$	
	NÜMERİK	ANALİTİK	NÜMERİK	ANALİTİK	NÜMERİK	ANALİTİK
0.1	0.058823	0.058823	0.041666	0.041666	0.032258	0.032258
0.2	0.117645	0.117645	0.083332	0.083332	0.064515	0.064515
0.3	0.176458	0.176458	0.124995	0.124995	0.096771	0.096771
0.4	0.235166	0.235168	0.166640	0.166640	0.129021	0.129021
0.5	0.291875	0.291904	0.208111	0.208114	0.161230	0.161231
0.6	0.295812	0.295910	0.247396	0.247417	0.193123	0.193127
0.7	0.041931	0.041929	0.252093	0.252172	0.221847	0.221867
0.8	0.000648	0.000646	0.072996	0.073025	0.215071	0.215135
0.9	0.000005	0.000005	0.003023	0.003023	0.070789	0.070874
$L_2 \times 10^3$	0.029000		0.02581		0.15713	
$L_\infty \times 10^3$	0.11314		0.07877		1.09575	

9.3.2 İkinci test problemi

İkinci test probleminde, Burger denkleminin (1.7) ile verilen analitik çözümüyle beraber, $[0,1]$ tanım aralığında, (1.8) başlangıç ve (1.9) sınır şartları kullanılarak denklemin nümerik sonuçları elde edildi. Nümerik çözümler için $h=1/36$, $\Delta t=0.01$ ve $\nu=0.01$ alınarak $t=0.5$ anında, Burger denkleminin analitik sonuçları ile elde edilen nümerik sonuçların karşılaştırması Çizelge 9.2 ile verildi.

Çizelge 9.2 $h = 1/36$, $\Delta t = 0.01$ ve $\nu = 0.01$

x	$t = 0.5$	
	NÜMERİK	ANALİTİK
0.000	1.000	1.000
0.056	1.001	1.000
0.111	1.001	1.000
0.167	1.001	1.000
0.222	1.000	1.000
0.278	0.998	0.998
0.333	0.980	0.980
0.389	0.849	0.847
0.444	0.455	0.452
0.500	0.238	0.238
0.556	0.204	0.204
0.611	0.200	0.200
0.667	0.200	0.200
0.722	0.200	0.200
0.778	0.200	0.200
0.833	0.200	0.200
0.889	0.200	0.200
0.944	0.200	0.200
1.000	0.200	0.200
$L_2 \times 10^3$	1.00253	
$L_\infty \times 10^3$	4.25544	

10 ZAMAN GÖRE PARÇALANMIŞ BURGER DENKLEMİNİN KUİNTİK B-SPLİNE GALERKİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde zamana göre parçalanmış Burger denkleminin kuintik B-spline Galerkin metoduyla nümerik çözümleri verilecek ve nümerik metod için Fourier kararlılık analizi yapılacaktır [9].

10.1 Kuintik B-spline Galerkin Metodu

Bu kısımda, zamana göre

$$\begin{aligned} U_t + 2UU_x &= 0 \\ U_t - 2\nu U_{xx} &= 0 \end{aligned} \quad (10.1)$$

şeklinde parçalanmış Burger denkleminin nümerik çözümleri verilecektir. Nümerik çözümler için kuintik B-spline fonksiyonlar kullanılacaktır.

$[a, b]$ tanım aralığında (1.1) ile verilen Burger denkleminin Galerkin metoduyla nümerik çözümünün yapılabilmesi için (9.1) ile verilen sınır koşulları kullanılacaktır.

$W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (10.1) denklemlerine Galerkin tekniği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \int_a^b W(U_t + 2UU_x) dx &= 0, \\ \int_a^b W(U_t - 2\nu U_{xx}) dx &= 0 \end{aligned} \quad (10.2)$$

denklemleri elde edilir.

$[a, b]$ aralığını, x_m düğüm noktaları yardımıyla

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

şeklinde eşit uzunluklu alt aralıklara bölelim. $m = -2, -1, \dots, N+2$ olmak üzere $\phi_m(x)$ fonksiyonları, düğüm noktalarında tanımlı, kuintik B-spline fonksiyonlar olsun. (10.1) ile verilen parçalı Burger denklemindeki $U(x,t)$ analitik fonsiyonunun yaklaşık çözümünün $U_N(x,t)$ olduğunu varsayalım. δ_m değerleri bulunması gereken zamana bağlı parametreler olmak üzere bu yaklaşık çözüm kuintik B-spline fonksiyonları cinsinden (9.4) eşitlikleri ile verilir.

$[x_m, x_{m+1}]$ aralığı, $\phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$ ve ϕ_{m+3} kuintik B-spline fonksiyonları tarafından örtülür (Şekil 1.4). $h = x_m - x_{m-1}$ olsun. $0 \leq \xi \leq h$ olmak üzere $\xi = x - x_m$ dönüşümü $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında $\phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$ ve ϕ_{m+3} kübik B-spline fonksiyonlarına uygulanırsa $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı $[0, h]$ aralığına, $\phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$ ve ϕ_{m+3} kübik B-spline fonksiyonları da (9.5) ile verilen fonksiyonlara dönüşür. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında Burger denkleminin U_N^e yaklaşık çözümleri (9.6) eşitliğiyle ifade edilir.

$[x_m, x_{m+1}]$ aralığında (10.2) denklemi

$$\begin{aligned} \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(U_t + 2UU_x) dx &= 0, \\ \int_{x_m}^{x_{m+1}} W(U_t - 2\nu U_{xx}) dx &= 0 \end{aligned} \quad (10.3)$$

şeklinde yazılabilir [9].

(10.3) integral denklemlerinin itegrant fonksiyonlarında ağırlık fonksiyonu W nin yerine (9.5) ile verilen ϕ kuintik B-spline şekil fonksiyonları, U nun yerine de (9.4) ile verilen eşiti yazılırsa, \circ , zamana bağlı türevi göstermek üzere integrant fonksiyonları

$$\begin{aligned} \sum_{j=m-2}^{m+3} \left[\int_0^h \phi_j \phi_j d\xi \right] \delta_j^\circ + 2 \sum_{j=m-2}^{m+3} \sum_{k=m-2}^{m+3} \left[\int_0^h \phi_j \phi_j \phi_k' d\xi \right] \delta_k^\circ \delta_j^\circ, \\ \sum_{j=m-2}^{m+3} \left[\int_0^h \phi_j \phi_j d\xi \right] \delta_j^\circ - 2\nu \sum_{j=m-2}^{m+3} \left[\int_0^h \phi_j \phi_j'' d\xi \right] \delta_j^\circ \end{aligned} \quad (10.4)$$

halini alır. Burada $m=0,1,\dots,N-1$ ve $\delta^e = (\delta_{m-2}, \delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2}, \delta_{m+3})^T$ dir.

A^e ile C^e 6×6 boyutlu, L^e ise $6 \times 6 \times 6$ boyutlu matrisler olmak üzere (10.4) ifadesi

$$\begin{aligned} A^e \delta^e + 2(\delta^e)^T L^e \delta^e \\ A^e \delta^e - 2\nu C^e \delta^e \end{aligned} \quad (10.5)$$

şeklinde matris formunda yazılabilir. Metod uygulanırken, L matrisinin yerine 6×6 boyutlu,

$$B_{i,j}^e = \sum_{k=m-2}^{m+3} L_{ijk}^e \delta_k^e$$

şeklinde tanımlanan, birleşik B^e matrisi kullanılacaktır.

A^e ve C^e matrisleri δ^e eleman parametrelerinden bağımsız, B^e ise δ^e eleman parametrelerine bağımlıdır. A^e, L_{ijk}^e ve C^e matrisleri

$$\begin{aligned} A_{ij}^e &= \int_0^h \phi_i \phi_j d\xi, \\ L_{ijk}^e &= \int_0^h \phi_i \phi_j \phi_k' d\xi, \\ C_{ij}^e &= \int_0^h \phi_i \phi_j'' d\xi, \end{aligned} \quad (10.6)$$

integrallerinin hesaplanması ile bulunabilir.

(10.5) ve (10.6) ifadelerinin birleştirilmesiyle (10.3) denklemini $\delta = (\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_{N+1}, \delta_{N+2})^T$ olmak üzere

$$A \delta + 2B(\delta) \delta = 0 \quad (10.7)$$

$$A \delta - 2\nu C \delta = 0 \quad (10.8)$$

denklem sistemine dönüşür.

δ_m eleman parametrelerinin, iki ardışık zaman aralığı n ve $n+1/2$ deki değerleri için (3.7) eşitlikleri kullanılırsa ve denklem düzenlenirse (10.7) denklemi,

$$(2A + \Delta t B(\delta^n)) \delta^{n+1/2} = (2A - \Delta t B(\delta^n)) \delta^n \quad (10.9)$$

denkleme dönüşür [9].

Benzer şekilde, δ_m eleman parametrelerinin, iki ardışık zaman aralığı $n+1/2$ ve $n+1$ deki değerleri için (3.8) eşitlikleri kullanılırsa ve denklem düzenlenirse (10.8) denklemi,

$$(2A - \nu \Delta t C) \delta^{n+1} = (2A + \nu \Delta t C) \delta^{n+1/2} \quad (10.10)$$

denkleme dönüşür [9].

Her biri $N+1$ denklemden oluşan $N+5$ bilinmeyenli (10.9) ve (10.10) denklem sistemlerinin çözülebilmesi için 4 tane bilinmeyenlerinin yok edilerek sistemdeki denklem sayısı ile bilinmeyen sayılarının eşitlenmesi gerekir. $\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}$ eleman parametrelerinin elimine edilmesi sistemin çözülebilmesi için yeterlidir. δ_{-2} ve δ_{-1} parametrelerini elimine edebilmek için $U(a,t) = U_{xx}(a,t) = 0$ sınır koşulu, δ_{N+1} ve δ_{N+2} parametrelerinin eliminasyonu için de $U_x(b,t) = U_{xx}(b,t) = 0$ sınır koşulu kullanılabilir.

(9.4) eşitlikleri kullanılarak $U(a,t) = U_{xx}(a,t) = 0$ koşulundan

$$\begin{aligned} \delta_{-2} + 26\delta_{-1} + 66\delta_0 + 26\delta_1 + \delta_2 &= 0, \\ \frac{20}{h^2}(\delta_2 + 2\delta_1 - 6\delta_0 + 2\delta_{-1} + \delta_{-2}) &= 0 \end{aligned}$$

ve $U_x(b,t) = U_{xx}(b,t) = 0$ koşulundan

$$\begin{aligned} \frac{5}{h}(\delta_{N+2} + 10\delta_{N+1} - 10\delta_{N-1} - \delta_{N-2}) &= 0, \\ \frac{20}{h^2}(\delta_{N+2} + 2\delta_{N+1} - 6\delta_N + 2\delta_{N-1} + \delta_{N-2}) &= 0 \end{aligned}$$

yazılabilir bu eşitlikler kullanılarak istenilen eliminasyon yapılabilir. Böylece $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu, 11 sütun elemanlı köşegen denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi Thomas algoritması yardımıyla çözülebilir. (10.9) sisteminden bulunan $\delta_m^{n+1/2}$ parametreleri aynı sınır koşulları kullanılarak (10.10) denklem sisteminin çözümünde kullanılarak δ_m^{n+1} çözüm parametreleri bulunmuş olur.

10.2 Başlangıç Durumu

(10.9) ve (10.10) denklem sistemlerine iterasyon uygulanabilmesi için δ_m^0 başlangıç parametrelerinin hesaplanmasına ihtiyaç vardır. Bunun için

$$\begin{aligned} (U_N)_x(a,0) &= 0, & (U_N)_x(b,0) &= 0, \\ (U_N)_{xx}(a,0) &= 0, & (U_N)_{xx}(b,0) &= 0, \\ U_N(x,0) &= U(x_m,0), & m &= 0, \dots, N \end{aligned}$$

başlangıç koşullarından yararlanılacaktır.

(9.4) eşitliği ile verilen $U_N(x,t)$ yaklaşık çözümü, başlangıç koşulu için

$$\begin{aligned} U_N(x,0) &= \sum_{m=-2}^{N+2} \delta_m^0 \phi_m(x) \\ &= \delta_{-2}^0 \phi_{-2}(x) + \delta_{-1}^0 \phi_{-1}(x) + \dots + \delta_{N+2}^0 \phi_{N+2}(x) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki δ_m^0 parametreleri belirlenecek olan parametrelerdir.

Başlangıç koşullarının düğüm noktalarındaki $U_N(x_m,0) = U(x_m,0)$ $m = 0, 1, \dots, N$ değerleri kullanılarak, δ parametresi için,

$$\begin{aligned} U(x_0,0) &= \delta_{-2} + 26\delta_{-1} + 66\delta_0 + 26\delta_1 + \delta_2 \\ U(x_1,0) &= \delta_{-1} + 26\delta_0 + 66\delta_1 + 26\delta_2 + \delta_3 \\ &\vdots \\ U(x_N,0) &= \delta_{N-2} + 26\delta_{N-1} + 66\delta_N + 26\delta_{N+1} + \delta_{N+2} \end{aligned} \quad (10.11)$$

şeklinde $N+1$ denklemden oluşan $N+5$ bilinmeyenli denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözülebilmesi için dört tane bilinmeyenini elimine edilmesi gerekir.

$$\begin{aligned}(U_N)_x(a,0) &= 0, \\ (U_N)_{xx}(a,0) &= 0\end{aligned}\tag{10.12}$$

ve

$$\begin{aligned}(U_N)_x(b,0) &= 0, \\ (U_N)_{xx}(b,0) &= 0\end{aligned}\tag{10.13}$$

sınır koşullarının kullanılmasıyla dört tane bilinmeyen elimine edilerek denklem sayısı ile bilinmeyen sayısı eşitlenebilir. Böylece $N+1$ denklemden oluşan $N+1$ bilinmeyenli denklem sistemi elde edilir ki, bu sistem çözülebilir.

$$(10.12) \text{ sınır koşullarından } \delta_{-1} = \frac{1}{4}\delta_2 + \frac{3}{2}\delta_1 - \frac{3}{4}\delta_0 \text{ ve } \delta_{-2} = \frac{15}{2}\delta_0 - 5\delta_1 - \frac{3}{2}\delta_2$$

olarak yazılabilir. Bunun yanında (10.13) sınır koşullarından $\delta_{N+1} = \frac{1}{4}\delta_{N-2} + \frac{3}{2}\delta_{N-1} - \frac{3}{4}\delta_N$ ve

$\delta_{N+2} = \frac{15}{2}\delta_N - 5\delta_{N-1} - \frac{3}{2}\delta_{N-2}$ yazılabilir. Elde edilen bu eşitlikler (10.11) sisteminde yerine yazılırsa

$$U(x_0,0) = 54\delta_0 + 60\delta_1 + 6\delta_2$$

$$U(x_1,0) = \frac{101}{4}\delta_0 + \frac{135}{2}\delta_1 + \frac{105}{4}\delta_2 + \delta_3$$

$$U(x_2,0) = \delta_0 + 26\delta_1 + 66\delta_2 + 26\delta_3 + \delta_4$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$U(x_{N-1},0) = \delta_{N-3} + \frac{105}{4}\delta_{N-2} + \frac{135}{2}\delta_{N-1} + \frac{101}{4}\delta_N$$

$$U(x_N,0) = 6\delta_{N-2} + 60\delta_{N-1} + 54\delta_N$$

denklem sistemi bulunur. Böylece

$$A_{ij}^e = \frac{h}{2772} \begin{bmatrix} 252 & 9113 & 29558 & 15498 & 1018 & 1 \\ 9113 & 397416 & 1558706 & 1072186 & 121641 & 1018 \\ 29558 & 1558706 & 7464456 & 6602476 & 1072186 & 15498 \\ 15498 & 1072186 & 6602476 & 7464456 & 1558706 & 29558 \\ 1018 & 121641 & 1072186 & 1558706 & 397416 & 9113 \\ 1 & 1018 & 15498 & 29558 & 9113 & 252 \end{bmatrix}$$

ve

$$C_{ij}^e = \frac{1}{126} \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 280 & 1045 & -2300 & 350 & 620 & 5 \\ 11125 & 59980 & -104930 & -12700 & 44645 & 1880 \\ 39280 & 300790 & -400040 & -236380 & 273320 & 23030 \\ 23030 & 273320 & -236380 & -400040 & 300790 & 39280 \\ 1880 & 44645 & -12700 & -104930 & 59980 & 11125 \\ 5 & 620 & 350 & -2300 & 1045 & 280 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda (10.10) denklem sistemindeki A ve C matrisleri, m . satır elemanları

A :

$$\frac{h}{2772} (1, 2036, 152637, 2203488, 9738114, 15724248, 9738114, 2203488, 152637, 2036, 1)$$

$$C: \frac{1}{126} \frac{1}{h} (5, 2500, 68025, 297600, -28350, -679560, -28350, 297600, 68025, 2500, 5)$$

şeklinde tanımlanan 11 sütun elemanlı köşegen matrisler olur. Buradan (10.10) denklem sistemi

$$\alpha_1 = \left(\frac{1}{1386} h - \frac{v\Delta t}{h} \frac{5}{126} \right), \alpha_2 = \left(\frac{1018}{693} h - \frac{v\Delta t}{h} \frac{1250}{63} \right), \alpha_3 = \left(\frac{50879}{462} h - \frac{v\Delta t}{h} \frac{22675}{42} \right),$$

$$\alpha_4 = \left(\frac{17488}{11} h - \frac{v\Delta t}{h} \frac{49600}{21} \right), \alpha_5 = \left(\frac{1623019}{231} h + \frac{v\Delta t}{h} 225 \right),$$

$$\alpha_6 = \left(\frac{2620708}{231} h + \frac{v\Delta t}{h} \frac{16180}{3} \right), \beta_1 = \left(\frac{1}{1386} h + \frac{v\Delta t}{h} \frac{5}{126} \right), \beta_2 = \left(\frac{1018}{693} h + \frac{v\Delta t}{h} \frac{1250}{63} \right),$$

$$\beta_3 = \left(\frac{50879}{462} h + \frac{v\Delta t}{h} \frac{22675}{42} \right), \beta_4 = \left(\frac{17488}{11} h + \frac{v\Delta t}{h} \frac{49600}{21} \right), \beta_5 = \left(\frac{1623019}{231} h - \frac{v\Delta t}{h} 225 \right),$$

$$\beta_6 = \left(\frac{2620708}{231} h - \frac{v\Delta t}{h} \frac{16180}{3} \right)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \alpha_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \alpha_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_4 \delta_m^{n+1} + \alpha_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \alpha_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \alpha_5 \delta_{m+3}^{n+1} + \alpha_4 \delta_{m+4}^{n+1} + \alpha_3 \delta_{m+5}^{n+1} + \alpha_2 \delta_{m+6}^{n+1} + \\ & \alpha_1 \delta_{m+7}^{n+1} = \beta_1 \delta_{m-3}^{n+1} + \beta_2 \delta_{m-2}^{n+1} + \beta_3 \delta_{m-1}^{n+1} + \beta_4 \delta_m^{n+1} + \beta_5 \delta_{m+1}^{n+1} + \beta_6 \delta_{m+2}^{n+1} + \beta_5 \delta_{m+3}^{n+1} + \beta_4 \delta_{m+4}^{n+1} + \beta_3 \delta_{m+5}^{n+1} + \\ & \beta_2 \delta_{m+6}^{n+1} + \beta_1 \delta_{m+7}^{n+1} \end{aligned}$$

tekrarlı bağıntısı ile ifade edilebilir. (3.14) eşitliği bu bağıntıda kullanılır ve böylece elde edilen denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_1 e^{-3khi} + \alpha_2 e^{-2khi} + \alpha_3 e^{-khi} + \alpha_4 + \alpha_5 e^{khi} + \alpha_6 e^{2khi} + \alpha_5 e^{3khi} + \alpha_4 e^{4khi} + \alpha_3 e^{5khi} + \right) \hat{\delta}^{n+1} \\ & \left(\alpha_2 e^{6khi} + \alpha_1 e^{7khi} \right) \\ & = \left(\beta_1 e^{-3khi} + \beta_2 e^{-2khi} + \beta_3 e^{-khi} + \beta_4 + \beta_5 e^{khi} + \beta_6 e^{2khi} + \beta_5 e^{3khi} + \beta_4 e^{4khi} + \beta_3 e^{5khi} + \right) \hat{\delta}^{n+1/2} \\ & \left(\beta_2 e^{6khi} + \beta_1 e^{7khi} \right) \end{aligned}$$

denklemini bulunur. Bu denklemde $e^{ikh} = \cos(kh) + i \sin(kh)$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} z_1 &= \left(\begin{aligned} & (\alpha_3 + \alpha_5) \cos(kh) + (\alpha_2 + \alpha_6) \cos(2kh) + (\alpha_1 + \alpha_5) \cos(3kh) + \alpha_4 + \alpha_4 \cos(4kh) \\ & \alpha_3 \cos(5kh) + \alpha_2 \cos(6kh) + \alpha_1 \cos(7kh) \end{aligned} \right) + \\ & i \left(\begin{aligned} & (\alpha_5 - \alpha_3) \sin(kh) + (\alpha_6 - \alpha_2) \sin(2kh) + (\alpha_5 - \alpha_1) \sin(3kh) + \alpha_4 \sin(4kh) \\ & \alpha_3 \sin(5kh) + \alpha_2 \sin(6kh) + \alpha_1 \sin(7kh) \end{aligned} \right) \\ z_2 &= \left(\begin{aligned} & (\beta_3 + \beta_5) \cos(kh) + (\beta_2 + \beta_6) \cos(2kh) + (\beta_1 + \beta_5) \cos(3kh) + \beta_4 + \beta_4 \cos(4kh) \\ & \beta_3 \cos(5kh) + \beta_2 \cos(6kh) + \beta_1 \cos(7kh) \end{aligned} \right) + \\ & i \left(\begin{aligned} & (\beta_5 - \beta_3) \sin(kh) + (\beta_6 - \beta_2) \sin(2kh) + (\beta_5 - \beta_1) \sin(3kh) + \beta_4 \sin(4kh) \\ & \beta_3 \sin(5kh) + \beta_2 \sin(6kh) + \beta_1 \sin(7kh) \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

olmak üzere $(z_2) \hat{\delta}^{n+1} = (z_1) \hat{\delta}^{n+1/2}$ eşitliği bulunur.

g , büyüme çarpanı olmak üzere $\hat{\delta}^{n+1} = g \hat{\delta}^{n+1/2}$ olduğundan $g = \frac{z_1}{z_2}$ yazılabilir.

Nümerik metodun kararlılığı için $|g| \leq 1$ olmalıdır. $|g| \leq 1$ olması için de $|z_1|^2 - |z_2|^2 \leq 0$ olmalıdır. $|z_1|^2 - |z_2|^2$ ifadesi hesaplanırsa

$$|z_1|^2 - |z_2|^2 = \left(\frac{5120}{43659} \nu \Delta t (\cos(kh) - 1) \right) \cdot \left(\begin{array}{l} \cos^5(kh) + 1018 \cos^4(kh) + 38158 \cos^3(kh) \\ 274418 \cos^2(kh) + 580013 \cos(kh) + 353792 \end{array} \right) \cdot (\cos^4(kh) + 251 \cos^3(kh) + 3651 \cos^2(kh) + 10841 \cos(kh) + 7936) \quad (10.14)$$

bulunur. Burada, $\cos(kh) \geq 0$ durumunda $|z_1|^2 - |z_2|^2 \leq 0$ olduğu açıktır. $\cos(kh) < 0$ iken $\cos(kh)$ ifadesi $[-1, 0)$ aralığında değer alır. Bu ise (10.14) ifadesindeki ikinci ve üçüncü çarpanların her zaman pozitif olmasını gerektirir. Birinci çarpan her zaman negatif olduğundan $|z_1|^2 - |z_2|^2 \leq 0$ bulunur.

Böylece $|g| \leq 1$ koşulu sağlanır. (10.9) denkleminin için de benzer işlemler yapılır. Böylece nümerik metod koşulsuz kararlıdır.

10.4 Test Problemleri

Bu kısımda, iki test problemi ile Burger denkleminin nümerik çözümü yapılacak ve metodun doğruluğu (2.19) ile verilen L_2 ve L_∞ hata normları ile ölçülecektir.

10.4.1 Birinci test problemi

Birinci test probleminde, Burger denkleminin (1.4) ile verilen analitik çözümüyle beraber, $[0, 1]$ tanım aralığında, (1.5) başlangıç ve (1.6) sınır şartı kullanılarak denklemin nümerik sonuçları elde edildi. Nümerik çözümler için $h = 0.02$, $\Delta t = 0.1$ ve $\nu = 0.005$ alınarak program $t = 3.1$ anına kadar çalıştırıldı. Elde edilen nümerik sonuçlar ile analitik sonuçların karşılaştırılması Çizelge 10.1 ile verildi.

Çizelge 10.1 $h=0.02$, $\Delta t=0.1$ ve $\nu=0.005$

x	$t=1.7$		$t=2.4$		$t=3.1$	
	NÜMERİK	ANALİTİK	NÜMERİK	ANALİTİK	NÜMERİK	ANALİTİK
0.1	0.058822	0.058823	0.041666	0.041666	0.032258	0.032258
0.2	0.117644	0.117645	0.083331	0.083332	0.064515	0.064515
0.3	0.176458	0.176458	0.124995	0.124995	0.096771	0.096771
0.4	0.235170	0.235168	0.166639	0.166640	0.129021	0.129021
0.5	0.291907	0.291904	0.208115	0.208114	0.161231	0.161231
0.6	0.294973	0.295910	0.247402	0.247417	0.193127	0.193127
0.7	0.042949	0.041929	0.251668	0.252172	0.221836	0.221867
0.8	0.000669	0.000646	0.073817	0.073025	0.214756	0.215135
0.9	0.000005	0.000005	0.003115	0.003023	0.071390	0.070874
$L_2 \times 10^3$	0.35001		0.24430		0.19296	
$L_\infty \times 10^3$	1.21155		0.80766		0.94251	

10.4.2 İkinci test problemi

İkinci test probleminde, Burger denkleminin (1.7) ile verilen analitik çözümüyle beraber, $[0,1]$ tanım aralığında, (1.8) başlangıç ve (1.9) sınır şartları kullanılarak denklemin nümerik sonuçları elde edildi. Nümerik çözümler için $h=1/36$, $\Delta t=0.01$ ve $\nu=0.01$ alınarak $t=0.5$ anında, Burger denkleminin analitik sonuçları ile elde edilen nümerik sonuçların karşılaştırması Çizelge 10.2 ile verildi.

Çizelge 10.2 $h=1/36$, $\Delta t=0.01$ ve $\nu=0.01$

x	$t = 0.5$	
	NÜMERİK	ANALİTİK
0.000	1.000	1.000
0.056	1.001	1.000
0.111	1.001	1.000
0.167	1.001	1.000
0.222	1.001	1.000
0.278	0.999	0.998
0.333	0.981	0.980
0.389	0.844	0.847
0.444	0.459	0.452
0.500	0.241	0.238
0.556	0.205	0.204
0.611	0.201	0.200
0.667	0.200	0.200
0.722	0.200	0.200
0.778	0.200	0.200
0.833	0.200	0.200
0.889	0.200	0.200
0.944	0.200	0.200
1.000	0.200	0.200
$L_2 \times 10^3$	1.82661	
$L_\infty \times 10^3$	6.70792	

11 SONUÇLAR

Bu çalışmada, Burger denkleminin, konuma göre parçalanmış Burger denkleminin ve zamana göre parçalanmış Burger denkleminin B-spline kolokeyşin ve Galerkin nümerik çözümleri incelenmiştir. Denklemin B-spline kolokeyşin ve Galerkin metodlarıyla çözümleri bir araya getirilmiştir. Nümerik çözümler için 2 standart test problemi çalışılmıştır. Yapılan çalışmada yer alan metodların sonuçları kıyaslandığında kuintik B-spline Galerkin metoduyla elde edilen sonuçların diğerlerine göre daha iyi olduğu sonucuna varılmıştır. Bununla birlikte viskozite sabitinin küçük seçilmesi durumunda çözümlerde hatanın arttığı gözlenmiştir.



KAYNAKLAR DİZİNİ

- [1] Ali, A.H.A., Gardner, L.R.T. and Gardner, G.A., 1990, A Collocation Method for Burgers' Equation Using Cubic Splines, UCNW Maths Pre-Print, 90.29.
- [2] Ali, A.H.A., Gardner, L.R.T. and Gardner, G.A., 1991, A Method of Line Solutions for Burgers' Equation, Proceedings of the Asian Pasific Conference on Computational Mechanics, 11-13 December, Hong Kong.
- [3] Bateman, H., 1915, Some Recent Researches on the Motion of Fluids, Monthly Weather Rec., 43, 163-170.
- [4] Burger, J.M., 1948, A Mathematical Model Illustrating The Theory of Turbulence, Adv. in App. Mech. I, 171-199.
- [5] Caldwell, J., Wanless, P. and Cook, A.E., 1981, A Finite Element Approach to Burgers' Equation, App. Math. Modelling, 5, 189-193.
- [6] Christie, I., Griffiths, D.F., Mitchell, A.R. and Sanz-Serna, J.M., 1981, Product Approximation for Non-linear Problems in the Finite Element Method, IMA, J. Num. Anal., 1, 253-266.
- [7] Cole, J.D., 1951, On a Quasi-linear Parabol in Aerodynamics, Quarterly of Applied Math., 9, 225-236.
- [8] Dağ, İ., Irk, D. and Saka, B., 2004, A Numerical Solution of the Burgers' Equation Using Cubic B-splines, Applied Mathematics and Computation, (in press).
- [9] Dağ, İ., Saka, B. and Boz, A., 2004, Quintik B-spline Galerkin Methods for Numerical Solutions of the Burgers' Equation, Proceeding International Conference 2004-Dynamical Systems and Applications, July 5-10, Antalya.
- [10] Evans, D.J. and Abdullah, A.R., 1984, The Group Explicit Method for the Solution of Burgers' Equation, Computing, 32, 239-253.
- [11] Fletcher, C.A.J., 1983, A Comparison of Finite Element and Finite Difference Solutions of the One- and Two Dimensional Burgers' Equations, Jour. Comp. Physics, 51, 159-188.
- [12] Herbst, B.M., Schoombie, S.W. and Mitchell, A.R., 1982, A Moving Petrov-Galerkin Method for Transport Equations, Int. J. Num. Meth. Eng., 18, 1321-1336.
- [13] Hopf, E., 1950, The Partial Differential Equation $U_t + UU_x = \mu U_{xx}$, Comm. Pure App. Math., 3, 201-230.
- [14] Iskandar, L. and Mohsen, A., 1992, Some Numerical Experiments on the Splitting of Burgers' Equation, Num. Meth. Par. Diff. Eq., 8, 267-276.
- [15] Jain, P.C. and Holla, D.N., 1978, Numerical Solutions of Coupled Burgers' Equation, Int. J. Non-linear Mechanics, 13, 213-222.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- [16] Jain, P.C. and Lohar, B.L. , 1979, Cubic Spline Technique for Coupled Non-linear Parabolic Equations, *Comp. & Maths. with Appl.*, 5, 179-185.
- [17] Jain, P.C., Shankar, R. and Singh, T.V., 1995, Numerical Technique for Solving Convective-Reaction-Diffusion Equation, *Math. Comput. Modelling*, 22, 9, 113-125.
- [18] Kakuda, K. and Tosaka, N., 1990, The Generalized Boundary Element Approach to Burgers' Equation, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 29, 245-261.
- [19] Kutluay, S., Bahadır, A.R. and Özdeş, A., 1999, Numerical Solution of One Dimensional Burgers' Equation: Explicit and Exact-Explicit Finite Difference Methods, *J. Comp. App. Maths.*, 103, 251-261.
- [20] Nguyen, H. and Reynen, J., 1987, A Space-Time Finite Element Approach to Burgers' Equation in "Numerical Methods for Nonlinear Problems", Eds. E Hinton et al.: Pineridge Press., 3.
- [21] Prenter, P.M., 1975, *Splines and Variational Methods*, Wiley, New York.
- [22] Rubin, S.G. and Khosla, P.K., 1976, Higher-order Numerical Solutions Using Cubic Splines, *AIAA Journal*, 14, 7, 851-858.
- [23] Varoğlu, E. and Finn, W.D.L., 1980, Space-Time Finite Elements Incorporating Characteristics for the Burgers' Equation, *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, 16, 171-184.
- [24] Zaki, S.I., 2000, Solitary Waves of the Korteweg-de Vries-Burgers' Equation, *Computer Physics Communications*, 126, 207-218.