LİE CEBİRLERİNİN ÇAPRAZLANMIŞ MODULLERİ

Ali AYTEKİN

Dumlupınar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman : Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

Temmuz – 2005

KABUL VE ONAY SAYFASI

Ali AYTEKİN' in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı LİE CEBİRLERİNİN ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİ başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir

21./07./2005

Üye : Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

Üye : Doç. Dr. Murat ALP

Üye : Yrd. Doç. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsün Yönetim Kurulu'nun 09./08./05 gün ve 12 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. M. Sabri ÖZYURT

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

LİE CEBİRLERİNİN ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİ

Ali AYTEKİN

Matematik, Yüksek Lisans Tezi, 2005

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

ÖZET

Lie Cebirlerinin Çaprazlanmış Modülleri üzerine hazırlanan bu tez üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, çaprazlanmış modül kavramının temel özelliklerine yer verilmiştir.

İkinci bölümde, lie cebirlerinde bir çaprazlanmış modülün aktörü ve çaprazlanmış modüllerin merkezi tanımlanarak, örnekler verilmiştir. Daha sonra, abelyan çaprazlanmış modüller ve komutatör alt çaprazlanmış modüller incelenmiştir.

Son bölümde ise çözülebilir, nilpotent ve yarı-basit çaprazlanmış modüller verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Abelyan çaprazlanmış modüller, Çaprazlanmış modüller, Çözülebilir çaprazlanmış modüller, Derivasyonlar, Lie cebirleri, Nilpotent çaprazlanmış modülleri, Yarı basit çaprazlanmış modüller,

CROSSED MODULES OF LİE ALGEBRAS

Ali AYTEKİN

Mathematics, MSc Thesis, 2005

Thesis Adviser: Prof. Dr. Mahmut KOÇAK

SUMMARY

This thesis based on Crossed Modules of Lie Algebras consist of three chapters. In the first chapter, we recall the elementary properties of crossed modules.

In the second chapter, an actor of crossed module of lie algebras is defined in terms of centre of a crossed module. We also examine abelian crossed module and commutator crossed submodule.

Soluble crossed modules, nilpotent crossed module and semi-simple crossed module are stated in the last chapter.

Keywords: Abelian crossed modules, Crossed modules, Derivations, Nilpotent crossed modules, Lie algebras, Semi-simple crossed modules, Soluble crossed modules

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamın her aşamasında yardımlarını esirgemeyip her zaman bana destek olan sayın hocam Prof. Dr. Mahmut KOÇAK'a, çalışmalarım boyunca hiçbir zaman desteklerini esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Murat ALP'e, iyi ve kötü günlerimde her zaman yanımda olan dostlarım Arş. Gör. Dr. T. Sait KUZPINARI, Arş. Gör. Dr. Ahmet BEKİR, Arş. Gör. Dr. Enver USLU, Arş. Gör. Alper ODABAŞ, Arş. Gör. Ali ŞAHİN, Arş. Gör. Adem ÇEVİKEL, Arş. Gör. Halis BİLGİL'e, hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve değerli eşime teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
1. LİE CEBİRLERİN ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİ	1
1.1. Lie Cebirleri	1
1.2. Çaprazlanmış Modül Kavramı	2
1.3. Çaprazlanmış Alt Modüller	5
1.4. Çaprazlanmış İdeal	6
1.5. Bölüm Çaprazlanmış Modül	6
1.6. Çaprazlanmış Modüllerin Direkt Çarpımı	7
1.7. Çaprazlanmış Modüllerin Çekirdeği Ve Görüntüsü	7
1.8. İzomorfizma Teoremleri	11
1.9. Derivasyonlar	13
2. LİE CEBİRLERİ İÇİN AKTÖR ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER	15
2.1. Bir Çaprazlanmış Modülün Aktörü	15
2.2. Aktör Çaprazlanmış Modül Örnekleri	25
2.3. Çaprazlanmış Modül Merkezi	26
2.4. Abelyan Çaprazlanmış Modüller Ve Komutator Alt Çaprazlanmış Modüller	31
3. ÇÖZÜLEBİLİR,NİLPOTENT VE YARI BASİT ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER	36
KAYNAKLAR DİZİNİ	60

1 LİE CEBİRLERİN ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİ

1.1 Lie Cebirleri

Tanım: A birimli ve değişmeli halka ve M de bir A-modül olsun. Eğer her $x, y, z \in M$ için

i-) $[x,x]=0$

ii-) $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$

özelliklerini sağlayan bir $[,]: M \times M \to M$ iki lineer (bilineer) fonksiyonu varsa M ye A üzerinde bir Lie cebiri denir. $[,]$ fonksiyonuna Lie braketi yada çarpımı ve (ii) deki özelliğe jakobi özdeşiği denir. İki lineerlik özelliği ve (i) gereğince

$$0=[x+y,x+y]=[x,y]+[y,x]$$

olduğundan

iii-) $[x,y]=-[y,x]$

iv-) $[x,[y,z]]=[[x,y],z]+[y,[x,z]]$

olduğu gösterilir[13].

Örnek: M, A üzerinde bir cebir olsun. $[,]: M \times M \to M$ fonksiyonu $[x,y]=xy-yx$ şeklinde tanımlansın. $[,]$ fonksiyonunun iki lineer olduğunun gösterilmesi zor değildir.

i-) $[x,x]=xx-xx$
$\quad =0$

ii-)
$$\begin{aligned}[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]] &= [x,yz-zy]+[y,zx-xz]+[z,xy-yx] \\ &= x(yz-zy)-(yz-zy)x+y(zx-xz) \\ &\quad -(zx-xz)y+z(xy-yx)-(xy-yx)z \\ &= 0\end{aligned}$$

dır. Böylece M, $[,]$ ile birlikte bir Lie cebiridir[13].

Tanım: M bir Lie cebiri olsun. Her $x, y \in M$ için $[x,y]=0$ oluyorsa M ye abelyan Lie cebiri denir[13].

Tanım: M_1 ve M_2, A üzerinde iki Lie cebiri ve $\partial: M_1 \to M_2$ bir A-modül homomorfizmi olsun. Her $x, y \in M_1$ için $\partial([x,y])=[\partial(x),\partial(y)]$ ise ∂ ye bir Lie cebir homomorfizmi denir. Eğer ∂ bir Lie cebir homomorfizmi ve birebir örtense ∂ ye bir Lie cebir izomorfizmi denir. Bu durumda M_1 ve M_2 ye izomorfiktirler denir[2].

Tanım: L bir Lie cebiri ve $K \subseteq L$ olsun. Her $x,y \in K$ için $[x,y] \in K$ ve K, L nin alt modülü ise K ya L nin bir Lie alt cebiri denir. K, L nin Lie alt cebiri ve her $x \in K, y \in L$ için $[x,y] \in K$ oluyorsa K ya L nin ideali denir[2].

1.2 Çaprazlanmış Modül Kavramı

Çaprazlanmış modüller, modüller ve ideallerin genelleştirilmesidir. Ayrıca herhangi bir halka (cebir) bir çaprazlanmış modüldür. Böylece çaprazlanmış modüller, halka (cebir) kavramının genelleştirilmesi olarak görülebilir. Şimdi, $\mathbf{k}$ sıfırdan farklı birimi olan değişmeli halka olmak üzere, T.Porter tarafından [12] de verilen $\mathbf{k}$-cebirler üzerinde çaprazlanmış modül yapısı ile iki çaprazlanmış modül arasındaki morfizm kavramlarını hatırlatarak bazı örneklere yer verelim.

Tanım: M ve G iki Lie $\mathbf{k}$-cebirler olmak üzere M üzerinde G nin Lie etkisi aşağıdaki aksiyomları sağlayan

$$\begin{array}{ccc} G \times M & \to & M \\ (g,m) & \mapsto & g \cdot m \end{array}$$

dönüşümüdür[11]. Her $k \in \mathbf{k}, m, m' \in M, g, g' \in G$ için

i. $k(g \cdot m) = (kg) \cdot m = g \cdot (km)$

ii. $g \cdot (m + m') = g \cdot m + g \cdot m'$

iii. $(g + g') \cdot m = g \cdot m + g' \cdot m$

iv. $[g,g'] \cdot m = g(g' \cdot m) - g'(g \cdot m)$

v. $g \cdot [m,m'] = [g \cdot m, m'] + [m, g \cdot m']$

Tanım: G ve M iki Lie $\mathbf{k}$-cebir olsun.

$$\mu : M \to G$$

bir G-cebir morfizmi ve

$$\begin{array}{ccc} G \times M & \to & M \\ (g,m) & \mapsto & g \cdot m \end{array}$$

G nin M üzerine Lie etkisi ile birlikte, her $m, m' \in M$ ve $g \in G$ için

ÇM1) $\mu(g \cdot m) = [g, \mu(m)]$

ÇM2) $\mu(m) \cdot m' = [m, m']$

şartları sağlanıyor ise (M,G,μ) üçlüsüne Lie çaprazlanmış (crossed) G-modül denir. Sadece (ÇM1) aksiyomunu sağlayan (M,G,μ) üçlüsüne Lie ön çaprazlanmış (crossed) G-modül denir. (ÇM2) özelliğine de Peiffer özdeşiği denir[11].

Örnek: R bir Lie cebiri ve I, R nin bir ideali olsun.

$$\partial : I \to R$$
$$i \mapsto i$$

içine dönüşümünü ele alalım. R nin I üzerine etkisi

$$R \times I \to I$$
$$(r,i) \mapsto [r,i]$$

şeklinde Lie çarpım işlemi olarak verilsin. Bu durumda çaprazlanmış modül aksiyomlarının sağlandığını gösterelim.

ÇM1) $\partial(r,i) = \partial[r,i]$
$= [r,i]$
$= [r,\partial i]$

ÇM2) $\partial r_{r'} = r_{r'}$
$= [r,r']$

olduğundan dolayı (I,R,∂) bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Örnek: M, herhangi bir G-bimodül olsun.

$$M \times M \to M$$
$$(m_1,m_2) \mapsto [m_1,m_2] = 0$$

çarpımı tanımlanırsa, M bir Lie G-cebir yapısı oluşturur. Bu durumda

$$0 : M \to R$$
$$x \mapsto 0(x) = 0$$

şeklinde verilen sıfır morfizminin

$$G \times M \to M$$
$$(g,m) \mapsto g \cdot m = gm$$

etkisi ile birlikte bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturduğunu gösterelim.

ÇM1) $0(r,m) = 0[r,m]$
$= 0$
$= [r,0m]$

ÇM2) $\partial m_{m'} = 0m'$
$= 0$
$= [m,m']$

olduğundan $(M,G,0)$ bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

Örnek: M bir Lie G-cebir ve

$$\pi_2 : M \to G$$

ikinci izdüşüm fonksiyonu bir Lie G -cebir morfizmidir. G nin $G \propto M$ üzerine Lie etkisi

$g' \in G$ ve $(g',m) \in G \propto M$ için

$$g'(m,g) = (g'm,[g',g])$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(G \propto M, G, \pi_2)$ bir ön çaprazlanmış modüldür. Genellikle $(G \propto M, G, \pi_2)$ bir çaprazlanmış modül değildir.
Şimdi iki çaprazlanmış modül yapısı arasındaki morfizm kavramını tanımlayalım.

Tanım: (M,G,μ) ve (M',G',μ') iki Lie çaprazlanmış modül olsun.

$$f(g \cdot m) = \phi(g) \cdot f(m)$$

ve

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mu"'] & M' \arrow[d, "\mu'"] \\ G \arrow[r, "\phi"'] & G' \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli, yani

$$\mu' f(m) = \phi\mu(m)$$

olacak şekilde $f : M \to M'$, $\phi : G \to G'$ Lie **k** -cebir morfizmleri varsa

$$(f,\phi):(M,G,\mu) \to (M',G',\mu')$$

morfizmine çaprazlanmış modüller arasındaki morfizm denir. Eğer f ve ϕ örtense (f,ϕ) ye örten, f ve ϕ bire bir ise (f,ϕ) ye bire bir denir. f,ϕ izomorfizma ise yani f ve ϕ bire bir örtense

$$(f,\phi):(M,G,\mu) \to (M',G',\mu')$$

morfizmine izomorfizm denir. Bu durumda

$$(f,\phi)^{-1} = (f^{-1},\phi^{-1}):(M',G',\mu') \to (M,G,\mu)$$

bir çaprazlanmış modül morfizmidir ve $(f,\phi)^{-1}(f,\phi) = (Id,Id) = (f,\phi)(f,\phi)^{-1}$ dir.
Böylece, çaprazlanmış modüllerin bir kategorisi oluşturulur ve bu kategori $LXMod(k)$ ile gösterilir.
Özel olarak, $G = G'$ ve ϕ birim dönüşüm ise, f bir Lie G -cebir morfizmi olduğundan

$$f(g \cdot m) = gf(m)$$

dir ve diyagram değişmeli olduğundan, yani

$$\mu' f(m) = \mu(m)$$

sağlandığından, f bir çaprazlanmış Lie G -modül morfizmidir. G üzerinde iki çaprazlanmış modülün bileşkesi bir çaprazlanmış Lie G -modül morfizmi olduğundan $LXMod(k)$ nin bir alt kategorisi elde edilir ve bu kategori $LXMod(k)/G$ ile gösterilir[2].

Örnek: $(f,I):(M,G,\mu)\to(M',G',\mu)$ bir çaprazlanmış modül homomorfizmi ise (M,M',f) bir çaprazlanmış modüldür. Burada M' nün M ye etkisi μ' yardımıyladır. Yani $m'\in M'$ ve $m\in M$ için

$$m'm=\mu'(m')m$$

dir.

$(Id_M,Id_G):(M,G,\mu)\to(M,G,\mu)$ birim homomorfizmi kısaca (I,I) ile gösterilir. Böylece lie çaprazlanmış modüllerin kategorisi oluşturulabilir[2].

1.3 Çaprazlanmış Alt Modüller

Genel olarak, bir matematiksel yapının alt yapıları, ilgili alandaki çalışmalarda önemli yer tutar. Bir grubun (normal) alt grubu, bir cebirin alt cebri, ideali, bir topolojik uzayın alt uzayı gibi. Benzer olarak, bir çaprazlanmış modülün, alt çaprazlanmış modülü, ideali ve bölüm çaprazlanmış modülü gibi kavramlar da çaprazlanmış modüllerle ilgili çalışmalarda önem kazanır. N.M. Shammu, [14] tezinde $LXMod(k)/G$ kategorisinde bu kavramlara yer vermiştir.

Tanım: (M,G,μ) bir çaprazlanmış modül olsun. M',M nin ve G', G nin bir alt Lie cebiri olmak üzere

$$\mu':\mu|_{M'}:M'\to G'$$

μ nin M' ye kısıtlanmışı ve G' nün M' ne etkisi G nin M üzerine etkisinin kısıtlanışı olmak üzere (M',G',μ') çaprazlanmış modülüne, (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülü denir ve $(M',G',\mu')\leq(M,G,\mu)$ şeklinde gösterilir[2].

Örnek: A, G Lie cebrinin bir alt Lie cebiri olsun. Bu durumda $(A,A,Id_A),(0,A,i),(G,G,Id_G)$ ve $(0,G,i)$ birer çaprazlanmış modüldür. Üstelik, (A,A,Id_A), (G,G,Id_G) nin bir alt çaprazlanmış modülü ve $(0,A,i)$ de $(0,G,i)$ nin alt çaprazlanmış modülüdür[2].

Örnek: I,G Lie cebrinin herhangi bir ideali olmak üzere $(I,G,i),(G,G,Id)$ çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülünü oluşturur[2].

Örnek: A ve B, G nin ideali, $B\subseteq A$ olmak üzere, $(B,A,i),(A,G,i)$ çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülünü oluşturur[2].

Örnek: A,G-modül, B, A içinde R-alt modül olmak üzere $(B,G,0)$, $(A,G,0)$ çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülünü oluşturur[2].

1.4 Çaprazlanmış İdeal

Tanım: (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün (M',G',μ') alt çaprazlanmış modülü olmak üzere

i. G',G cebirinin bir idealidir, yani $G' \trianglelefteq G$

ii. Her $g \in G$ ve $m' \in M'$ için $g \cdot m' \in M'$

iii. Her $g' \in G'$ ve $m \in M$ için $g' \cdot m \in M'$

şartlarını sağlıyorsa (M',G',μ') alt çaprazlanmış modülüne, (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün ideali denir ve $(M',G',\mu') \trianglelefteq (M,G,\mu)$ şeklinde gösterilir. Eğer $(M',G',\mu') \trianglelefteq (M,G,\mu)$ ise her $m \in M$ ve $m' \in M$ için

$$[m,m'] = \mu(m) \cdot m' \in M'$$

olduğundan M', M nin bir idealidir[2].

Örnek: I,G Lie cebrinin bir ideali olmak üzere $(I,I,Id),(G,G,Id)$ nin ve $(0,I,i)$ de $(0,G,i)$ nin birer çaprazlanmış idealidir[2].

Önerme: $(M',G',\mu') \leq (M'',G'',\mu'') \leq (M,G,\mu)$ şeklindeki alt çaprazlanmış modüller için, $(M',G',\mu'),(M,G,\mu)$ nin ideali ise $(M',G',\mu'),(M'',G'',\mu'')$ nin idealidir[2].

İspat: i). $g \in G, g' \in G', g'' \in G'', m \in M$ ve $m' \in M'$ için, $(M',G',\mu') \trianglelefteq (M,G,\mu)$ olduğundan $G' \trianglelefteq G$ olur ve $G' \leq G'' \leq G$ olduğundan $[g',g''] \in G'$ olup, $G' \trianglelefteq G''$ bulunur.

ii). $(M',G',\mu') \trianglelefteq (M,G,\mu)$ olduğundan $g \cdot m' \in M'$ olur ve $G'' \leq G$ olduğundan $g'' \cdot m' \in M'$ sağlanır.

iii). $g' \cdot m \in M'$ ve $M' \leq M'' \leq M$ olduğundan $g' \cdot m'' \in M'$ olur.

Böylece $(M',G',\mu') \trianglelefteq (M'',G'',\mu'')$ elde edilir[2].

1.5 Bölüm Çaprazlanmış Modül

Tanım: (M',G',μ'), (M,G,μ) nin bir ideali olsun. Bu durumda G, M/M' üzerine etki eder. G' nün M/M' üzerine etkisi ise

$$G' \times M/M' \to M/M'$$
$$(g',(m+M')) \mapsto g' \cdot (m+M')$$

olmak üzere

$$g' \cdot (m+M') = g' \cdot m + M'$$

ve $g'm \in M'$ olduğundan sıfırdır. Dolayısıyla, G/G' bölüm Lie cebiri M/M' üzerine

$$G/G' \times M/M' \to M/M'$$
$$((g+G'),(m+M')) \mapsto g \cdot m + M'$$

şeklinde etki eder ve bu etki bir Lie etkisidir.

$$\bar{\mu}: M/M' \to G/G'$$
$$(m+M') \mapsto \mu(m)+G'$$

bölüm dönüşümü bir Lie cebir homomorfizmidir. Böylece bu dönüşüm ve etki fonksiyonuna göre,

$$(M/M', G/G', \bar{\mu}) = \frac{(M,G,\mu)}{(M',G',\mu')}$$

Lie çaprazlanmış modül yapısı oluşturur ve buna bölüm çaprazlanmış modül denir[2].

Örnek: G', G nin ideali olmak üzere,

$$\frac{(0,G,i)}{(0,G',i)} = (0, G/G', i)$$

ve

$$\frac{(G,G,Id)}{(G',G',Id)} = (G/G', G/G', Id)$$

şeklinde bölüm çaprazlanmış modülleri elde edilir[2].

1.6 Çaprazlanmış Modüllerin Direkt Çarpımı

Tanım: $(S,H,\mu),(M,G,\mu')$ çaprazlanmış modüller, $S\times M$ ve $H\times G$ Lie cebirlerin direkt çarpımı olmak üzere

$$\begin{array}{rccc} \mu\times\mu' : & S\times M & \to & H\times G \\ & (s,m) & \mapsto & (\mu(s),\mu'(m)) \end{array}$$

dönüşümü ve

$$\begin{array}{ccc} (H\times G)\times(S\times M) & \to & S\times M \\ ((h,g),(s,m)) & \mapsto & (h,g)\cdot(s,m)=(h\cdot s, g\cdot m) \end{array}$$

şeklinde verilen çaprazlanmış modüllerin indirgenen Lie etkileriyle birlikte, $(S\times M, H\times G, \mu\times\mu')$ çaprazlanmış modülünü oluşturur. Bu modüle (S,H,μ) ve (M,G,μ') çaprazlanmış modüllerinin direkt çarpımı denir ve $(S,H,\mu)\times(M,G,\mu')$ ile gösterilir[2].

1.7 Çaprazlanmış Modüllerin Çekirdeği Ve Görüntüsü

Tanım: $(f,\phi):(M,G,\mu)\to(M',G',\mu')$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere,

$$\mu: Ker\ f \to Ker\ \phi$$

çaprazlanmış modülüne (f,ϕ) morfizminin çekirdeği denir ve Ker (f,ϕ) ile gösterilir[2].

Yardımcı Teorem: Ker $(f,\phi) = ($Ker f, Ker $\phi, \mu)$ çaprazlanmış modülü, (M,G,μ) nin bir idealidir[2].

İspat: $g\in G, g_1 \in$ Ker ϕ için,

$$\phi([g,g_1])=[\phi(g),\phi(g_1)]=[\phi(g),0]=0$$

olduğundan $[g,g_1]\in$ Ker ϕ olur. Böylece Ker ϕ, G nin idealidir. Ayrıca, $g\in G, m_1\in$ Ker f için,

$$f(g\cdot m_1)=\phi(g)\cdot f(m_1)=\phi(g)\cdot 0=0$$

olduğundan $g\cdot m_1\in$ Ker f olur. $g_1\in$ Ker $\phi, m\in M$ için

$$f(g_1\cdot m)=\phi(g_1)\cdot f(m)=0\cdot f(m)=0$$

olduğundan $g_1\cdot m\in$ Ker f elde edilir[2].

Tanım: $(f,\phi):(M,G,\mu)\to(M',G',\mu')$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere,

$$\mu' : Imf \to Im\,\phi$$

çaprazlanmış modülüne (f,ϕ) morfizminin görüntüsü denir ve Im (f,ϕ) ile gösterilir[2].

Yardımcı Teorem: $(f,\phi):(M,G,\mu)\to(M',G',\mu')$ bir morfizm olsun. Bu durumda $\mathrm{Im}(f,\phi),(M',G',\mu')$ nin bir alt çaprazlanmış modülüdür[2].

İspat: i). $g'\in G'$, $Imf\subset M'$, $\mathrm{Im}\,\phi\subset G'$ ve M' üzerine G'-etkisi,

$$\phi(g)\cdot f(m)=f(g\cdot m)\in Imf$$

şeklinde, Imf üzerine $\mathrm{Im}\,\phi$-etkisine indirgendiğinden $\mathrm{Im}(f,\phi),(M',G',\mu')$ nin bir alt çaprazlanmış modülü olur[2].

Yardımcı Teorem: $(f,\phi):(M,G,\mu)\to(M^*,G^*,\mu^*)$ örten olsun. Bu durumda (M',G',μ'), (M,G,μ) nin bir ideali ise $(f,\phi)(M',G',\mu')=(f(M'),\phi(G'),\mu^*)$ da (M^*,G^*,μ^*) nin bir idealidir[2].

İspat: i). $g^*\in G^*, g'\in G'$ olsun. Bu durumda $g^*=\phi(g)$ olacak şekilde bir $g\in G$ vardır. Böylece

$$[g^*,\phi(g')]=[\phi(g^*),\phi(g')]=\phi[g,g']\in\phi(G)$$

dir.

ii). $g^*\in G^*, g\in G$ ve $m'\in M'$ olsun. Bu durumda $g^*=\phi(g)$ olacak şekilde bir $g\in G$ vardır. Böylece

$$g^*f(m')]=\phi(g)f(m')=f(gm')\in f(M')$$

dür.

iii). $g'\in G', m^*\in M^*$ olsun. Bu durumda $m^*=f(m)$ olacak şekilde bir $m\in M$ vardır. Böylece

$$\phi(g').m^*=\phi(g')f(m)=f(g'.m)=f(M')$$

dür[2].

Tanım: (M',G',μ') ve (M'',G'',μ''), (M,G,μ) nin alt çaprazlanmış modülü olmak üzere,

$$\mu|_{M'\cap M''} : M'\cap M''\to G'\cap G''$$

şeklinde indirgenen alt çaprazlanmış modüle (M',G',μ') ile (M'',G'',μ'') nin arakesiti denir ve $(M',G',\mu')\ \cap\ (M'',G'',\mu'')$ ile gösterilir[2].

Yardımcı Teorem: (M',G',μ') ve (M'',G'',μ''), (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün ideali ise $(M',G',\mu')\cap(M'',G'',\mu'')$ arakesit çaprazlanmış alt modülü de (M,G,μ) nin idealidir[2].

İspat: $G'\cap G''$ nin G nin ideali olduğu açıktır. $g\in G$ ve $m_1\in M'\cap M''$ için, $m_1\in M'$ ve $(M',G',\mu')\trianglelefteq(M,G,\mu)$ olduğundan $g\cdot m_1\in M'$ olur. $m_1\in M''$ ve $(M'',G'',\mu'')\trianglelefteq(M,G,\mu)$ olduğundan $g\cdot m_1\in M''$ olur. Böylece,

$$g\cdot m_1\in M'\cap M''$$

elde edilir. Ayrıca, $m\in M$ ve $g_1\in G'\cap G''$ için, $g_1\in G'$ ve $(M',G',\mu')\trianglelefteq(M,G,\mu)$ olduğundan $g_1\cdot m\in M'$ olur. $g_1\in G''$ ve $(M'',G'',\mu'')\trianglelefteq(M,G,\mu)$ olduğundan $g_1\cdot m\in M''$ olur. Böylece,

$$g_1\cdot m\in M'\cap M''$$

elde edilir[2].

Örnek: G' ve G'', G nin iki Lie alt cebiri olsun. Bu durumda

$$(0,G',i)\cap(0,G'',i)=(0,G'\cap G'',i)$$

ve

$$(G',G',Id)\cap(G'',G'',Id)=(G'\cap G'',G'\cap G'',Id)$$

dir[2].

Tanım: (M',G',μ') ve (M'',G'',μ''), (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün ideali olsun. $M'+M''$, M de ideallerin toplamı ve $G'+G''$, G de ideallerin toplamı olmak üzere

$$\mu|_{M'+M''}:M'+M''\to G'+G''$$

dönüşümü ve G nin M üzerine etkisinden kaynaklanan $G'+G''$ nin $M'+M''$ üzerine etkisi ile birlikte oluşturulan çaprazlanmış modüle (M',G',μ') ile (M'',G'',μ'') çaprazlanmış modüllerinin toplamı denir ve $(M',G',\mu')+(M'',G'',\mu'')$ ile gösterilir[2].

Örnek: G' ve G'', G nin iki ideali olsun. Bu durumda

$$(0,G',i)+(0,G'',i)=(0,G'+G'',i)$$

ve

$$(G',G',Id)+(G'',G'',Id)=(G'+G'',G'+G'',Id)$$

dir[2].

Teorem: (S,H,∂) ve (R,K,∂) çaprazlanmış modülleri (T,G,∂) çaprazlanmış modülünün idealleri olsun. Eğer

i. $(S,H,\partial)+(R,K,\partial)\cong(T,G,\partial)$

ii. $(S,H,\partial)\ \cap\ (R,K,\partial)=0$

ise $(T,G,\partial) \cong (S,H,\partial) \times (R,K,\partial)$ dir[2].

İspat: $t \in T$, $g \in G$ olsun. Bu durumda

$t = s + r$ ve $g = h + k$ olacak şekilde tek bir $s \in S$, $r \in R$, $h \in H$, $k \in K$ vardır. Bu durumda

$$\alpha(s+r) = (s,r) \text{ ve } \beta(h+k) = (h,k)$$

şeklinde tanımlı $\alpha : T \to S + R$ ve $\beta : G \to H + K$ fonksiyonları birer Lie cebir izomorfizmleridir. Bu durumda

$(\alpha,\beta):(T,G,\partial) \to (S,H,\partial) \times (R,K,\partial)$ bir çaprazlanmış Lie cebir izomorfizmidir. Böylece $(T,G,\partial) \cong (S,H,\partial) \times (R,K,\partial)$ dır[2].

Tanım: (T,G,∂) çaprazlanmış modülü yukarıdaki teoremin şartlarını sağlıyorsa bu (T,G,∂) çaprazlanmış modülüne (S,H,∂) ile (R,K,∂) ideallerinin iç çarpımı denir[2].

Tanım: (M,G,μ) çaprazlanmış modul olmak üzere G yardımıyla M nin sabit elemanlarının oluşturmuş olduğu küme

$$M^G = \{m \in M \mid \text{her } g \in G \text{ için } g \cdot m\}$$

şeklinde tanımlanır ve M^G, M ve G nin idealidir. Aynı zamanda M^G, $Z(M)$ (M nin merkezi) nin idealidir[2].

Tanım: G bir lie **k** -cebir ve $d : G \to M$, **k** -lineer dönüşümler olsun. Her $g, g' \in G$ için,

$$d[g,g'] = gd(g') - g'd(g)$$

özelliği sağlanıyorsa d ye bir derivasyon denir. G den M ye bütün derivasyonların kümesi $Der(G)$ ile gösterilir[2].

Tanım: M içinde G nin dengeleyecisi (stabilizer) $\eta : G \to Der(M)$ olmak üzere

$$st_G(M) = \{g \in G \mid \text{her } m \in M \text{ için } g \cdot m = 0\} = Ker\eta$$

olarak tanımlanır[2].

Tanım: (M,G,μ) çaprazlanmış modül olmak üzere

i.) Eğer G nin M üzerine faithful etkisi varsa, yani $st_G(M) = 0$ ise (M,G,μ) ye bağlı (faithful) çaprazlanmış modül denir[2].

ii.) μ birebir yani $Ker\mu = 0$ ise (M,G,μ) ye asferikal çaprazlanmış modül denir. μ örten yani $Coker\mu = 0$ ise (M,G,μ) ye basit bağlantılı çaprazlanmış modül denir[2].

1.8 İzomorfizma Teoremleri

Cebir teoriye benzer olarak, izomorfizm teoremleri çaprazlanmış modüller için de geçerlidir. Dolayısıyla bu teoremleri ispatsız olarak ifade edeceğiz.

Teorem: (I. izomorfizm) $(f,\phi):(M,G,\mu)\longrightarrow(M',G',\mu')$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere,

$$\frac{(M,G,\mu)}{\mathrm{Ker}\,(f,\phi)}\cong Im(f,\phi)$$

izomorfizmi geçerlidir[4].

Teorem: (II. izomorfizm) (M'',G'',μ''), (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülü ve $(M',G',\mu'),(M,G,\mu)$ nin ideali ise

$$\frac{(M',G',\mu')+(M'',G'',\mu'')}{(M',G',\mu')}\cong\frac{(M'',G'',\mu'')}{(M',G',\mu')\cap(M'',G'',\mu'')}$$

izomorfizmi geçerlidir[4].

Teorem: (III. izomorfizm) (M',G',μ') ve (M'',G'',μ''), (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün ideali ve $(M'',G'',\mu'')\subset(M',G',\mu')$ ise

$$\frac{(M,G,\mu)/(M'',G'',\mu'')}{(M',G',\mu')/(M'',G'',\mu'')}\cong\frac{(M,G,\mu)}{(M',G',\mu')}$$

izomorfizmi geçerlidir[4].

Tanım: (A,G,α) ön çaprazlanmış modül (precrossed module) olsun. Bu durumda A nın Peiffer elemanları yada çaprazlanmış komutatörleri $a,a'\in A$ için

$$[a,a']_c=[a,a']-\alpha(a)\cdot a'$$

şeklinde tanımlanır. A nın Peiffer elemanları A nın bir altcebirini üretir. Bu alt cebir $[A,A]_c$ ile gösterilir ve $[A,A]_c$ ye A nın Peiffer altcebiri denir[2].

Teorem: (A,G,α) ön çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur[2].

a) A nın Peiffer altcebiri $[A,A]_c$, sabittir. Yani $[A,A]_c$ G etkisi altında kapalıdır.

b) A nın Peiffer altcebiri $[A,A]_c$, A nın bir idealidir.

c) $(A/[A,A]_c,G,\alpha^c)$ üçlüsü çaprazlanmış modüldür ve şu evrensel özelliği sağlar:

(M,H,μ) bir çaprazlanmış modül ve $(f,\phi):(A,G,\alpha)\to(M,H,\mu)$ bir morfizm ise aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde tek bir

$$(f^c,\phi):(A/[A,A]_c,G,\alpha^c)\to(M,H,\mu)$$

vardır.

$$\begin{tikzcd}
(A,G,\mu) \arrow[r, "{(\pi,1)}"] \arrow[dr, "{(f,\phi)}"'] & (A/[A,A]_C, G, \alpha^C) \arrow[d, "{(f^C,\phi)}"] \\
 & (M,H,\mu)
\end{tikzcd}$$

İspat:

a) $g, g' \in G$, $a, a' \in A$ için

$[g,g']\cdot a = g\cdot(g'\cdot a) - g'\cdot(g\cdot a)$

olup buradan da

$$\begin{aligned}
g\cdot[a,a']_c &= g\cdot([a,a'] - \alpha(a)\cdot a') \\
&= g\cdot[a,a'] - g\cdot(\alpha(a)\cdot a') \\
&= [g\cdot a,a'] + [a,g\cdot a'] - g\cdot(\alpha(a)\cdot a') \\
&= [g\cdot a,a'] + [a,g\cdot a'] - [g,\alpha(a)]a' - \alpha(a)\cdot(g\cdot a') \\
&= [g\cdot a,a'] + [a,g\cdot a'] - \alpha(g\cdot a)\cdot a' - \alpha(a)\cdot(g\cdot a') \\
&= [g\cdot a,a'] - \alpha(g\cdot a)\cdot a' + [a,g\cdot a'] - \alpha(a)\cdot(g\cdot a') \\
&= [g\cdot a,a']_c + [a,g\cdot a']_c
\end{aligned}$$

elde edilir.

b) $[a,[a',a'']_c] \in [A,A]_c$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned}
[[a',a''],a]_c &= [[a',a''],a] - \alpha[a',a'']\cdot a \\
&= [[a',a''],a] - [\alpha(a'),\alpha(a'')]\cdot a \\
&= -[a,[a',a'']] - \alpha(a')\cdot(\alpha(a'')\cdot a) + \alpha(a'')\cdot(\alpha(a')\cdot a) \\
&= -[a,[a',a'']] - \alpha(a')\cdot[a'',a] + \alpha(a')\cdot[a'',a]_c + \alpha(a'')\cdot(\alpha(a')\cdot a) \\
&= -[a,[a',a'']] - [\alpha(a')\cdot a'',a] - [a'',\alpha(a')\cdot a] + \alpha(a')\cdot[a'',a]_c + \alpha(a'')\cdot(\alpha(a')\cdot a) \\
&= -[a,[a',a'']_c] - [a'',\alpha(a')\cdot a]_c + \alpha(a')\cdot[a'',a]_c
\end{aligned}$$

ve böylece

$$[a,[a',a'']_c] = -[[a',a''],a]_c - [a'',\alpha(a')\cdot a]_c + \alpha(a')\cdot[a'',a]_c \in [A,A]_c$$

elde edilmiş olur.

c) G nin A üzerine etkisi (a.) şıkkından dolayı G nin $A/[A,A]_c$ üzerine etkisi vardır.

Ayrıca $[A,A]_c$ nın elemanlarının α altındaki görüntüleri

$$\alpha([a,a']) = \alpha([a,a'] - \alpha(a)\cdot a')$$
$$= [\alpha(a),\alpha(a')] - \alpha(a)\cdot\alpha(a')$$
$$= 0$$

olur. Dolayısıyla

$$\alpha^c : A/[A,A]_c \to G$$

şeklinde bir Lie G -cebir morfizmi vardır. $[A,A]_c$ nin tanımı gereğince $(A/[A,A]_c, G, \alpha^c)$ bir çaprazlanmış modüldür. Ayrıca

$$f([a,a']_c) = f([a,a']) - f(\alpha(a)\cdot a')$$
$$= [f(a), f(a')] - \phi\alpha(a)\cdot f(a')$$
$$= [f(a), f(a')] - \mu f(a)\cdot f(a')$$
$$= [f(a), f(a')] - [f(a), f(a')]$$
$$= 0$$

elde edilir. Böylece f^c tek türlü belirlidir[2].

1.9 Derivasyonlar

Grup teoride bir grubun diğeri üzerine etkisinin otomorfizm grubuyla belirlendiği iyi bilinir. A grubunun B grubu üzerine etkisi $A \longrightarrow Aut(B)$ homomorfizmi ile verilir. A grubu ile B grubunun herhangi bir genişlemesi ile bir $A \longrightarrow Out(B)$ homomorfizması ilgilidir. Cebir teoride ise bir cebirin diğeri üzerine etkisi aşağıda söz edeceğimiz çarpım cebri ile verilir. Cebirsel genişlemede ise P_B dış (outer) çarpım yer alır. Çarpım cebri kavramı, S.Mac Lane tarafından [9] da tanımlanmıştır. R.Lavendhomme ve Th. Lucas ise [8] çalışmalarında bu kavram ile çaprazlanmış modül yapısı arasındaki ilişkiden söz etmişlerdir.

Tanım: (M,G,μ) ve (N,G,υ) çaprazlanmış iki Lie modül ve $\alpha : M \to N$ bir $\mathbf{k}$ -lineer dönüşüm olsun. Her $m,m' \in M$ için

$$\alpha[m,m'] = \mu(m).\alpha(m') - \mu(m').\alpha(m)$$

ise α ya M den N ye bir derivasyon denir. Bütün derivasyonların kümesi $Der_G(M,N)$ şeklinde gösterilir.

$g \in G$, $\alpha \in Der_G(M,N)$ ve $ad_g : M \to G$ fonksiyonu $ad_g(m) = [g,\mu(m)]$ şeklinde tanımlanmak üzere $v(\alpha(m)) = ad_g(m)$ yani $v\alpha = ad_g$ ise (α, g) ikilisine $Der_G(M,N)$ nin konjugate elemanı denir[2].

Tanım: Her $g,g' \in G$ için,

$$\begin{aligned} \mu :\ & G \to && Der(G) \\ & r \mapsto && \mu(r) = \mu_r \end{aligned}$$

olmak üzere, $\mu(g)g' = gg'$ şeklinde tanımlı $\mu(g) = \mu_g : G \longrightarrow G$ dönüşümüne iç (inner) derivasyon denir[2].

Yardımcı teorem: $Der_G(M,N)$ nin konjugate elemanlarının kümesi bir Lie **k** -cebiridir [5].

Tanım: G nin $Der_G(M,N)$ üzerine etkisi $g \in G$, $(\alpha,h) \in Der_G(M,N)$ ve her $m \in M$ için

$$\beta(m) = g.\alpha(m) - \alpha(g.m)$$

olmak üzere

$$g.(\alpha,h) = (\beta,[g,h])$$

şeklinde tanımlanır[2].

Yardımcı Teorem: Yukarıda tanımlanan G nin $Der_G(M,N)$ üzerine etkisi bir Lie etkisidir [5].

Yardımcı Teorem: $\eta(\alpha,g) = g$ şeklinde tanımlanan $\eta : Der_G(M,N) \to G$ fonksiyonu bir Lie cebir homomorfizmidir ve $\eta(g.(\alpha,h)) = [g,\eta(\alpha,h)]$ dır [5].

Yukarıdaki yardımcı teoremler gereğince aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem: (M,G,μ) bir Lie ön çaprazlanmış modül ve (N,G,υ) çaprazlanmış bir Lie modülü olsun. Bu durumda $Der_G(M,N)$ nin konjugati bir ön çaprazlanmış G -modüldür[2].

2 LİE CEBİRLERİ İÇİN AKTÖR ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Bu bölümde, çarpım cebri ile yakından ilgili olan, Lie cebirleri için aktör çaprazlanmış modül kavramını tanımlayacağız. Bu kavram yardımıyla, Lie cebirleri teorisinde önemli yeri olan, bir çaprazlanmış modülün merkezi, çaprazlanmış modüller arasındaki etki gibi temel kavramları tanımlayacağız. Benzer kavram gruplar için Norrie tarafından [11] da tanımlanmıştır. Norrie bu çalışmasında, aktör çaprazlanmış modül kavramının grupların otomorfizmalar grubu ile benzerliğini göstermiş ve bu yapıyla çaprazlanmış modül etkilerini tanımlayarak, çaprazlanmış modüllerin yarı-direkt çarpımlarını oluşturmuştur.

2.1 Bir Çaprazlanmış Modülün Aktörü

Önceden verdiğimiz derivasyon tanımını kısaca hatırlayalım.

Tanım: G bir lie $\mathbf{k}$ -cebir ve $d: G \to M$, $\mathbf{k}$ -lineer dönüşüm olsun. Her $g, g' \in G$ için,

$$d[g,g'] = gd(g') - g'd(g)$$

özelliği sağlanıyorsa d ye bir derivasyon denir. G den M ye bütün derivasyonların kümesi $Der(G)$ ile gösterilir.

(M,G,μ) çaprazlanmış modül ve $f: M \to M, g: G \to G$ birer fonksiyon olmak üzere $(f,\phi):(M,G,\mu) \to (M,G,\mu)$ verilsin.

i. $f \in Der(M), \phi \in Der(G)$

ii. $\phi\mu = \mu f$

iii. Her $g \in G$ ve her $m \in M$ icin $f(g.m) = g.f(m) + \phi(g).m$

özellikleri sağlanıyorsa (f,ϕ) ye (M,G,μ) nin bir derivasyonu denir. (M,G,μ) nin bütün derivasyonlarının kümesi $Der(M,G,\mu)$ ile gösterilir[2].

Önerme: $Der(M,G,\mu)$ kümesi $(f,\phi),(f_1,\phi_1),(f_2,\phi_2) \in Der(M,G,\mu)$ ve $k \in \mathbf{k}$ için

+) $(f_1,\phi_1)+(f_2,\phi_2) = (f_1+f_2, \phi_1+\phi_2)$

·) $k(f,\phi) = (kf, k\phi)$

∘) $[(f_1,\phi_1),(f_2,\phi_2)] = ([f_1,f_2],[\phi_1,\phi_2])$

şeklinde tanımlanan işlemlerle birlikte bir Lie $\mathbf{k}$ -cebir yapısı oluşturur[2].

İspat: $(f,\phi),(f_1,\phi_1),(f_2,\phi_2) \in Der(M,G,\mu)$ ve $k \in \mathbf{k}$ için

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k} \times Der(M,G,\mu) & \to & Der(M,G,\mu) \\ (k,(f,\phi)) & \mapsto & k \cdot (f,\phi) = k(f,\phi) \end{array}$$

olmak üzere,

i. $$\begin{aligned} k((f_1,\phi_1)+(f_2,\phi_2)) &= k(f_1+f_2, \phi_1+\phi_2) \\ &= (k(f_1+f_2), k(\phi_1+\phi_2)) \\ &= (kf_1+kf_2, k\phi_1+k\phi_2) \\ &= k(f_1,\phi_1)+k(f_2,\phi_2) \end{aligned}$$

ii. $(k_1+k_2)(f,\phi)=((k_1+k_2)f,(k_1+k_2)\phi)$
$$=(k_1f+k_2f,k_1\phi+k_2\phi)$$
$$=(k_1f,k_1\phi)+(k_2f,k_2\phi)$$
$$=k_1(f,\phi)+k_2(f,\phi)$$

iii. $(k_1k_2)(f,\phi)=(k_1k_2f,k_1k_2\phi)$
$$=k_1(k_2f,k_2\phi)$$
$$=k_1(k_2(f,\phi))$$

olduğundan $(Der(M,G,\mu),+,\cdot,(\circ))$ dörtlüsü bir $\mathbf{k}$ -modül yapısı oluşturur. Ayrıca,

iv. $k((f_1,\phi_1)\circ(f_2,\phi_2))=k(f_1f_2,\phi_1\phi_2)$
$$=(k(f_1f_2),k(\phi_1\phi_2))$$
$$=((kf_1)f_2,(k\phi_1)\phi_2)$$
$$=(kf_1,k\phi_1)\circ(f_2,\phi_2)$$
$$=(k(f_1,\phi_1))\circ(f_2,\phi_2)$$

$$(f_1,\phi_1)\circ(k(f_2,\phi_2))=(f_1,\phi_1)\circ(kf_2,k\phi_2)$$
$$=(f_1(kf_2),\phi_1(k\phi_2))$$
$$=\left(k\left(f_1f_2\right),k\left(\phi_1\phi_2\right)\right)$$
$$=k\left(f_1f_2,\phi_1\phi_2\right)$$
$$=k\left((f_1,\phi_1)\circ(f_2,\phi_2)\right)$$

olduğundan $Der(M,G,\mu)$, bir $\mathbf{k}$ -cebirdir[2].

Tanım: $d:G\to M$ bir derivasyon olsun. Bu durumda $g\in G$ ve $m\in M$ için $\sigma_d(g)=\mu d(g)$ ve $\theta_d(m)=d\mu(m)$ şeklinde tanımlı $\sigma_d:G\to G$, $\theta_d:M\to M$ fonksiyonları için $\sigma_d\in Der(G)$ ve $\theta_d\in Der(M)$ dir. Bunlara d ye karşılık gelen derivasyonlar denir. θ_d nin bir derivasyon olduğunu gösterelim.

$$\theta_d[m,m']=d\mu[m,m']$$
$$=d[\mu(m),\mu(m')]$$
$$=\mu(m).d\mu(m')-\mu(m')d\mu(m)$$
$$=[m,\theta_d(m')]-[m',\theta_d(m)]$$
$$=m\theta_d(m')-m'\theta_d(m)$$

dir. Benzer şekilde σ_d nin de bir derivasyon olduğu gösterilir.

Teorem: θ_d ve σ_d derivasyonları aşağıdaki şartları sağlar[2].

a) $\theta_d d=d\sigma_d$

b) $\sigma_d \mu = \mu \theta_d$

c) $(\theta_d, \sigma_d) \in Der(M, G, \mu)$

İspat: (a) ve (b) açıktır.

c) $$\begin{aligned} \theta_d(g \cdot m) &= d\mu(g \cdot m) \\ &= d[g, \mu(m)] \\ &= g \cdot d\mu(m) - \mu(m) \cdot d(g) \\ &= g \cdot d\mu(m) - [m, d(g)] \\ &= g \cdot d\mu(m) + \mu d(g) \cdot m \\ &= g\theta_d(m) + \sigma_d(g) \cdot m \end{aligned}$$

dir.

$Der(G, M)$ üzerinde aşağıdaki şekilde $(+), (\cdot)$ ve $([])$ işlemleri tanımlanır. $i = 1, 2$ için θ_i ve σ_i, d_i derivasyonuna karşılık gelen derivasyonlar olmak üzere

+). $(d_1 + d_2)(g) = d_1(g) + d_2(g)$

·). $(kd)(g) = kd(g)$

[]). $$\begin{aligned} [d_1, d_2](g) &= d_1\sigma_2(g) - d_2\sigma_1(g) \\ &= \theta_1 d_2(g) - \theta_2 d_1(g) \end{aligned}$$

[] operatörünü biraz daha detaylı incelersek

$$\begin{aligned} [d_1, d_2][g, g'] &= d_1\sigma_2[g, g'] - d_2\sigma_1[g, g'] \\ &= d_1[g, \mu d_2(g')] - d_1[g', \mu d_2(g)] - d_2[g, \mu d_1(g')] + d_2[g', \mu d_1(g)] \\ &= g \cdot d_1\mu d_2(g') - g' d_1\mu d_2(g) - g \cdot d_2\mu d_1(g') + g' \cdot d_2\mu d_1(g) \\ &= g \cdot (d_1\sigma_2(g') - d_2\sigma_1(g')) - g' \cdot (d_1\sigma_2(g) - d_2\sigma_1(g)) \\ &= g \cdot [d_1, d_2](g') - g' \cdot [d_1, d_2](g) \end{aligned}$$

dir[2].

Teorem: $i = 1, 2$ için σ_i ve θ_i ler $d_i \in$ Der(G,M) ye karşılık gelen ifadeler olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur[2].

a) Eğer $d = d_1 + d_2$ ise $\sigma_d = \sigma_1 + \sigma_2$ ve $\theta_d = \theta_1 + \theta_2$ dır.

b) Eğer $d = kd_1$ ise $\sigma_d = k\sigma_1$ ve $\theta_d = k\theta_1$ dir.

c) Eğer $d = [d_1, d_2]$ ise $\sigma_d = [\sigma_1, \sigma_2]$ ve $\theta_d = [\theta_1, \theta_2]$ dir.

İspat:

a) $d = d_1 + d_2$ ise

$$\begin{aligned}\sigma_d(g) &= \mu(d_1+d_2)(g)\\ &= \mu(d_1(g)+d_2(g))\\ &= \mu(d_1(g))+\mu(d_2(g))\\ &= \sigma_{d_1}(g)+\sigma_{d_2}(g)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_d(m) &= (d_1+d_2)\mu(m)\\ &= d_1\mu(m)+d_2\mu(m)\\ &= \theta_{d_1}(m)+\theta_{d_2}(m)\end{aligned}$$

b) $d = kd_1$ ise

$$\begin{aligned}\sigma_d(g) &= \sigma_{kd_1}(g)\\ &= \mu(kd_1)(g)\\ &= \mu(k(d_1(g))\\ &= k\mu(d_1(g))\\ &= k\sigma_{d_1}(g)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_d(m) &= kd_1\mu(m)\\ &= k\theta_{d_1}(m)\end{aligned}$$

c) $d = [d_1, d_2]$ ise

$$\begin{aligned}\sigma_d(g) &= \sigma_{[d_1,d_2]}(g)\\ &= \mu[d_1,d_2](g)\\ &= \mu(d_1\mu d_2)(g)\\ &= \mu d_1(\mu d_2(g))\\ &= \sigma_{d_1}(\mu d_2(g))\\ &= \sigma_{d_1}(\sigma_{d_2}(g))\\ &= [\sigma_{d_1},\sigma_{d_2}](g)\end{aligned}$$

ve benzer şekilde $\theta_d = [\theta_1, \theta_2]$ olduğu gösterilebilir[2].

Önerme: (Der(G,M),+,·,[,]) bir lie k-cebiridir[2].

Sonuç: $d \in \mathrm{Der(G,M)}$ için $\tau(d) = \sigma_d$ ve $\phi(d) = \theta_d$ şeklinde tanımlı $\tau : Der(G,M) \to Der(G)$ ve $\phi : Der(G,M) \to Der(M)$ fonksiyonları birer Lie cebir homomorfizmleridir[2].

Teorem: $Der(M,G)$ kümesi

+). $(d_1+d_2)(g) = d_1(g)+d_2(g)$

$\cdot$). $(kd)(g) = kd(g)$

$[,]$). $[d_1, d_2](g) = d_1\sigma_2(g) - d_2\sigma_1(g) = \theta_1 d_2(g) - \theta_2 d_1(g)$

işlemleriyle birlikte bir **k** -cebir yapısı oluşturur[2].

İspat: $d_1, d_2 \in Der(G,M)$ için

$$\begin{aligned}(d_1 \circ d_2)(g_1g_2) &= d_1\mu d_2(g_1g_2)\\ &= d_1\mu(g_1 \cdot d_2(g_2))\\ &= d_1(g_1\mu d_2(g_2))\\ &= g_1 \cdot (d_1\mu d_2(g_2))\\ &= g_1 \cdot (d_1 \circ d_2)(g_2)\end{aligned}$$

olduğundan $(d_1 \circ d_2) \in Der(G,M)$ elde edilir.

$$\begin{aligned}\mathbf{k} \times Der(G,M) &\to Der(G,M)\\ (k,d) &\mapsto kd\end{aligned}$$

olmak üzere,

a) $$\begin{aligned}k(d_1 + d_2)(g) &= k(d_1(g) + d_2(g))\\ &= (kd_1)(g) + (kd_2)(g)\\ &= (kd_1 + kd_2)(g)\end{aligned}$$

b) $(k_1 + k_2)d(g) = k_1 d(g) + k_2 d(g)$

c) $(k_1k_2)d(g) = k_1(k_2 d)(g)$

d) $$\begin{aligned}k[d_1, d_2](g) &= k(d_1\mu d_2)(g)\\ &= kd_1(\mu d_2)(g)\\ &= [(kd_1), d_2](g)\\ &= [d_1, (kd_2)](g)\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır[2].

Sonuç:

$$\begin{aligned}\tau : Der(G,M) &\to Der(G)\\ \mathrm{d} &\mapsto \sigma_d = \mu d\end{aligned} \quad \text{ve} \quad \begin{aligned}\phi : Der(G,M) &\to Der(M)\\ d &\mapsto f_d = d\mu\end{aligned}$$

dönüşümleri cebir homomorfizmleridir[2].

Yardımcı Teorem:

$$\begin{aligned}\mathrm{Der(M,G,}\mu) \times \mathrm{Der(G,M)} &\to \mathrm{Der(G,M)}\\ ((\alpha,\phi),d) &\mapsto (\alpha,\phi)\cdot d = \alpha d - d\phi\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm Der(M,G,μ) nin Der(G,M) üzerine bir Lie etkisidir[2].

İspat: İspat için aşağıdaki şartların sağlandığını göstermek yeterlidir[2].

a) $$\begin{aligned}((\alpha,\phi)\cdot d)[g_1,g_2] &= \alpha(g_1\cdot d(g_2))-\alpha(g_2\cdot d(g_1))-d[g_1,\phi(g_2)]+d[g_2,\phi(g_1)]\\ &= g_1\cdot\alpha d(g_2)-g_2\cdot\alpha d(g_1)-g_1\cdot d\phi(g_2)+g_2\cdot d\phi(g_1)\\ &= g_1\cdot(((\alpha,\phi)\cdot d)(g_2))-g_2\cdot(((\alpha,\phi)\cdot d)(g_1))\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}[(\alpha,\phi),(\alpha',\phi')]\cdot d &= ([\alpha,\alpha'],[\phi,\phi'])\cdot d\\ &= [\alpha,\alpha']d-d[\phi,\phi']\\ &= \alpha\alpha'd-\alpha'\alpha d-d\phi\phi'+d\phi'\phi\\ &= (\alpha,\phi)\cdot(\alpha'd-d\phi')-(\alpha',\phi')(\alpha d-d\phi)\\ &= (\alpha,\phi)\cdot((\alpha',\phi')\cdot d)-(\alpha',\phi')((\alpha,\phi)\cdot d)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\alpha,\phi)\cdot[d_1,d_2] &= (\alpha,\phi)\cdot(d_1\sigma_2-d_2\sigma_1)\\ &= \alpha d_1\sigma_2-\alpha d_2\sigma_1-d_1\sigma_2\phi+d_2\sigma_1\phi\\ &= \alpha d_1\sigma_2+d_2\mu d_1\phi-\alpha d_2\sigma_1-d_1\mu d_2\phi\\ &= [\alpha d_1,d_2]-[d_1\phi,d_2]+[d_1,\alpha d_2]-[d_1,d_2\phi]\\ &= [(\alpha,\phi)\cdot d_1,d_2]+[d_1,(\alpha,\phi)\cdot d_2]\end{aligned}$$

Teorem: $\Delta(d)=(\theta_d,\phi_d)=(d\mu,\mu d)$ şeklinde tanımlı $\Delta: Der(G,M)\to Der(M,G,\mu)$ fonksiyonu bir Lie $\mathbf{k}-$cebir homomorfizmidir. Üstelik $(Der(G,M),Der(M,G,\mu),\Delta)$ üçlüsü bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturur[2].

İspat: İspat için aşağıdaki şartların sağlandığını gösterelim[2].

a) $(\theta_d,\sigma_d)\in$ Der(M,G,μ) olduğunu önceden göstermiştik.

b) $$\begin{aligned}\Delta[d_1,d_2] &= (\mu[d_1,d_2],[d_1,d_2]\mu)\\ &= (\mu d_1\mu d_2-\mu d_2\mu d_1, d_1\mu d_2\mu-d_2\mu d_1\mu)\\ &= ([\mu d_1,\mu d_2],[d_1\mu,d_2\mu])\\ &= [\Delta(d_1),\Delta(d_2)]\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}\Delta((\alpha,\phi)\cdot d) &= ((\alpha d-d\phi)\mu,\mu(\alpha d-d\phi))\\ &= (\alpha d\mu-d\phi\mu,\mu\alpha d-\mu d\phi)\\ &= ([\alpha,d\mu],[\phi,\mu d])\\ &= [(\alpha,\phi),\Delta(d)]\end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned}\Delta(d_1)\cdot d_2 &= (d_1\mu,\mu d_1)\cdot d_2\\ &= d_1\mu d_2-d_2\mu d_1)\\ &= d_1\sigma_2-d_2\sigma_1\\ &= [d_1,d_2]\end{aligned}$$

Tanım: Yukarıdaki teoremde tanımlanan $(Der(G,M), Der(M,G,\mu), \Delta)$ çaprazlanmış modülüne (M,G,μ) nin actor çaprazlanmış modülü denir ve $A(M,G,\mu)$ ile gösterilir.

Şimdi, $A(M,G,\mu)$ çaprazlanmış modülünün bir idealini belirleyerek, bölüm çaprazlanmış modülünü tanımlayalım[2].

Yardımcı Teorem: (M,G,μ) bir çaprazlanmış modül olsun. $m \in M$ ve $g \in G$ için

$\eta_m : G \to M$, $\eta_m(g) = -g \cdot m$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \eta : M &\to Der(G,M) \\ m &\mapsto \eta(m) = \eta_m \end{aligned}$$

dönüşümü bir cebir homomorfizmidir[2].

İspat: $\eta[m,m'] = \eta_{[m,m']} \overset{(*)}{=} [\eta_m, \eta_{m'}] = [\eta(m), \eta(m')]$ dır. Şimdi bunun doğruluğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} [\eta_m, \eta_{m'}](g) &= \eta_m \mu \eta_{m'}(g) - \eta_{m'} \mu \eta_m(g) \\ &= -g \cdot \eta_m \mu(m') + \mu(m') \cdot \eta_m(g) + g \cdot \eta_{m'} \mu(m) - \mu(m) \cdot \eta_{m'}(g) \\ &= g \cdot [m,m'] - [m', g \cdot m] - g \cdot [m,m'] + [m, g \cdot m'] \\ &= [g \cdot m', m] - [g \cdot m, m'] \\ &= -g \cdot [m,m'] \\ &= \eta_{[m,m']}(g) \end{aligned}$$

Burada tanımlanan η nın görüntüsü $\mathrm{Im}(\eta) = E(G,M)$ şeklinde gösterilir[2].

Yardımcı Teorem:

$$\begin{aligned} \alpha_g : M &\to M \\ m &\mapsto \alpha_g(m) = g \cdot m \end{aligned} \quad \text{ve} \quad \begin{aligned} \phi_g : G &\to G \\ g' &\mapsto \phi_g(g') = [g, g'] \end{aligned}$$

olmak üzere

a) $\alpha_g \in Der(M)$ ve $\phi_g \in Der(G)$ dir.

b) $\phi_g \mu(m) = [g, \mu(m)] = \mu(g.m) = \mu \alpha_g(m)$ dir.

c) Her $g, g' \in G$ ve $m \in M$ için

$$g' \alpha_g(m) + \phi_g(g').m = g'(g.m) + [g, g'].m = g(g'.m) = \alpha_g(g'.m)$$

dir. Üstelik,

$$\begin{aligned} \gamma : G &\to Der(M,G,\mu) \\ g &\mapsto (\alpha_g, \phi_g) \end{aligned}$$

dönüşümü bir cebir homomorfizmidir[2].

İspat: İspat için

$$
\begin{aligned}
\gamma[g_1,g_2] &= (\alpha_{[g_1,g_2]},\phi_{[g_1,g_2]}) \\
&= ([\alpha_{g_1},\alpha_{g_2}],[\phi_{g_1},\phi_{g_2}]) \\
&= [(\alpha_{g_1},\phi_{g_1}),(\alpha_{g_2},\phi_{g_2})] \\
&= [\gamma(g_1),\gamma(g_2)]
\end{aligned}
$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$
\begin{aligned}
\alpha_{[g_1,g_2]}(g) &= g_1\cdot(g_2\cdot m)-g_2\cdot(g_1\cdot m) \\
&= \alpha_{g_1}(\alpha_{g_2}(m))-\alpha_{g_2}(\alpha_{g_1}(m)) \\
&= [\alpha_{g_1},\alpha_{g_2}](m)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_{[g_1,g_2]}(g) &= [[g_1,g_2],g] \\
&= [g_1[g_2,g]]-[g_2,[g_1,g]] \\
&= \phi_{g_1}(\phi_{g_2}(g))-\phi_{g_2}(\phi_{g_1}(g)) \\
&= [\phi_{g_1},\phi_{g_2}](g)
\end{aligned}
$$

dir.

Burada tanımlanan γ dönüşümünün görüntüsü $\mathrm{Im}(\gamma)=\overline{G}$ ile gösterilir[2].

Yardımcı Teorem : $Der(M,G,\mu)$ nin $Der(G,M)$ üzerine Lie etkisi,

$$(\alpha,\phi)\cdot\eta_m=\eta_{\alpha(m)}$$

şeklinde $E(G,M)$ üzerinde bir etkiye indirgenir[2].

İspat: $(\alpha,\phi)\in Der(M,G,\mu)$, $\eta_m\in E(G,M)$ için

$$
\begin{aligned}
(\alpha,\phi)\cdot\eta_m(g) &= \alpha\eta_m(g) \\
&= \alpha(g\cdot m) \\
&= d\mu(g\cdot m) \\
&= d(g\mu(m)) \\
&= g\cdot d\mu(m) \\
&= g\cdot\alpha(m) \\
&= \eta_{\alpha(m)}(g)
\end{aligned}
$$

olur[2].

Yardımcı Teorem: $E(G,M)$,$Der(G,M)$ nin ideali ve $\overline{G}$ de $Der(M,G,\mu)$ nin bir idealidir[2].

İspat: $d\in Der(G,M)$, $\eta_m\in E(G,M)$ ve her $g\in G$ için

$$\begin{aligned}[d,\eta_m](g) &= d\mu\eta_m(g) - \eta_m\mu d(g)\\ &= d\mu(-g\cdot m) - \eta_m\mu d(g)\\ &= -d[g,\mu(m)] + \mu d(g)\cdot m\\ &= -g\cdot d\mu(m) + \mu(m)\cdot d(g) + [d(g),m]\\ &= \eta_{d\mu(m)}(g) \in E(G,M)\end{aligned}$$

olup $E(G,M)$, Der(G,M) nin bir idealidir.

Diğer taraftan $(\alpha,\phi)\in Der(M,G,\mu)$, $(\alpha_g,\phi_g)\in\overline{G}$ olarak

$$[(\alpha,\phi),(\alpha_g,\phi_g)] = ([\alpha,\alpha_g],[\phi,\phi_g]) \overset{(*)}{=} (\alpha_{\phi(g)},\phi_{\phi(g)})\in\overline{G}$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}[\alpha,\alpha_g](m) &= \alpha(g\cdot m) - g\cdot\alpha(m)\\ &= \phi(g)\cdot m\\ &= \alpha_{\phi(g)}(m)\end{aligned}$$

benzer şekilde $[\phi,\phi_g]=\phi_{\phi(g)}$ olduğu gösterilebilir. Yani $\overline{G}$, $Der(M,G,\mu)$ nün bir idealidir[2].

Teorem: $(\eta,\gamma):(M,G,\mu)\to A(M,G,\mu)$ dönüşümü bir çaprazlanmış modül homomorfizmidir[2].

İspat: $\forall m\in M$; $g,g'\in G$ için

i. $$\begin{aligned}\Delta\eta(m) &= (\eta_m\mu,\mu\eta_m)\\ &= (\alpha_{\mu(m)},\phi_{\mu(m)})\\ &= \gamma\mu(m)\end{aligned}$$

ii. $$\begin{aligned}\gamma(g)\cdot\eta(m)(g') &= ((\alpha_g,\phi_g)\cdot\eta_m)(g')\\ &= \alpha_g(-g'\cdot m) - \eta_m[g,g']\\ &= -g'\cdot(g\cdot m)\\ &= \eta_{g\cdot m}(g')\\ &= \eta(g\cdot m)(g')\end{aligned}$$

elde edilir[2].

Önerme: $\mathrm{Im}(\eta,\gamma) = (E(G,M),\overline{G},\Delta) \trianglelefteq (Der(G,M),Der(M,G,\mu),\Delta)$ dir[2].

İspat: $\mathrm{Im}(\eta,\gamma)$ nın $(Der(G,M),Der(M,G,\mu),\Delta)$ nın çaprazlanmış alt modül olduğu açıktır. $\Delta: E(G,M)\to\overline{G}$ dönüşümü $\Delta: Der(G,M)\to Der(M,G,\mu)$ dönüşümünün kısıtlanmışı olup

$$\Delta(\eta_m) = (\eta_m \mu, \mu\eta_m) = (\alpha_{\mu(m)}, \phi_{\mu(m)}) = \gamma(\mu(m))$$

dir[2].

Tanım: $(E(G,M),\overline{G},\Delta)$ çaprazlanmış modülüne, iç çaprazlanmış modül denir ve $I(M,G,\mu)$ ile gösterilir[2].

Tanım: $A(M,G,\mu)/I(M,G,\mu)$ bölüm çaprazlanmış modülüne (M,G,μ) nin dış aktörü denir ve $O(M,G,\mu)$ ile gösterilir[2].

Eğer

$$0 \longrightarrow (M',G',\mu') \xrightarrow{(i,j)} (M,G,\mu) \xrightarrow{(\xi,\theta)} (M'',G'',\mu'') \longrightarrow 0$$

bir kısa tam çaprazlanmış modül serisi ise, yani (i,j) birebir, (ξ,θ) örten homomorfizm ve $\operatorname{Im}(i,j) = \operatorname{Ker}(\xi,\theta)$ ise aşağıdaki değişmeli diyagramı veren bir

$$(\varepsilon,\theta) : (M,G,\mu) \longrightarrow A(M',G',\mu')$$

morfizmi vardır.

$$\begin{tikzcd}
(0,0,0) \arrow[r] & (M',G',\mu') \arrow[r] \arrow[d] & (M,G,\mu) \arrow[r] \arrow[d, "(\varepsilon,\theta)"] & (M'',G'',\mu'') \arrow[r] \arrow[d] & (0,0,0) \\
(0,0,0) \arrow[r] & I(M',G',\mu') \arrow[r] & A(M',G',\mu') \arrow[r] & O(M',G',\mu') \arrow[r] & (0,0,0)
\end{tikzcd}$$

Burada, $g,g' \in G, m,m' \in M$ için,

$$\varepsilon : M \longrightarrow Der(G',M') \qquad \varepsilon(m)(g') = -g' \cdot m$$

$$\theta : G \longrightarrow Der(G',M',\mu') \qquad \theta(g) = (\alpha_g,\phi_g)$$

ve

$$\alpha_g : M' \longrightarrow M' \qquad \alpha_g(m') = g \cdot m'$$

$$\phi_g : G' \longrightarrow G' \qquad \phi_g(g') = [g,g']$$

olmak üzere

$$\theta : G \longrightarrow Der(M',G',\mu') \qquad f(g) = (\alpha_g,\phi_g)$$

şeklinde tanımlıdır.

$$\varepsilon[m_1,m_2] = \varepsilon_{[m_1,m_2]} \overset{(*)}{=} [\varepsilon_{m_1},\varepsilon_{m_2}] = [\varepsilon(m_1),\varepsilon(m_2)]$$

(*) eşitliği
$$\begin{aligned}\varepsilon_{[m_1,m_2]}(g') &= -g'\cdot[m_1,m_2]\\ &= -[g'\cdot m_1,m_2]-[m_1,g'\cdot m_2]\\ &= \mu'(g'\cdot m_2)\cdot m_1-\mu'(g'\cdot m_1)\cdot m_2\\ &= \varepsilon_{m_1}\mu'(-g'\cdot m_2)-\varepsilon_{m_2}\mu'(-g'\cdot m_1)\\ &= \varepsilon_{m_1}\mu'\varepsilon_{m_2}(g')-\varepsilon_{m_2}\mu'\varepsilon_{m_1}(g')\\ &= (\varepsilon_{m_1}\sigma_{\varepsilon_{m_2}}-\varepsilon_{m_2}\sigma_{\varepsilon_{m_1}})(g')\\ &= [\varepsilon_{m_1},\varepsilon_{m_2}](g')\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\theta[g_1,g_2] &= (\alpha_{[g_1,g_2]},\phi_{[g_1,g_2]})\\ &= ([\alpha_{g_1},\alpha_{g_2}],[\phi_{g_1},\phi_{g_2}])\\ &= [(\alpha_{g_1},\phi_{g_1}),(\alpha_{g_2},\phi_{g_2})]\\ &= [\theta(g_1),\theta(g_2)]\end{aligned}$$

olduğunudan ε ve θ nın Lie cebir morfizmidir.

Ayrıca

a) Her $m\in M$ için

$$\begin{aligned}\theta\mu(m) &= (\alpha_{\mu(m)},\phi_{\mu(m)})\\ &= (\varepsilon_m\mu',\mu'\varepsilon_m)\\ &= \Delta'\varepsilon(m)\end{aligned}$$

b) Her $g\in G$ ve $m\in M$ için

$\theta(g)\cdot\varepsilon(m)=(\alpha_g,\phi_g)\cdot\varepsilon_m=\alpha_g\varepsilon_m-\varepsilon_m\phi_g\overset{(*)}{=}\varepsilon_{g\cdot m}=\varepsilon(g\cdot m)$ dir. Yani

$$\begin{aligned}(*)\ (\alpha_g\varepsilon_m-\varepsilon_m\phi_g)(g') &= -g\cdot(g'\cdot m)+[g,g']\cdot m\\ &= -g'\cdot(g\cdot m)\\ &= \varepsilon_{g\cdot m}(g')\end{aligned}$$

olduğundan (ε,θ) bir çaprazlanmış modül homomorfizmidir[2].

2.2 Aktör Çaprazlanmış Modül Örnekleri

Örnek: I,G de ideal olmak üzere $i:I\to G$ içine dönüşümü

$$\begin{aligned}G\times I &\to I\\ (g,i) &\mapsto g\cdot i=gi\end{aligned}$$

etkisi ile birlikte (I,G,i) çaprazlanmış modül yapısı oluşturur.

$$\chi=\{f\in Der(G): f|_I\in Der(I)\}$$

olmak üzere

$$\sum : Der(I,G,i) \to \chi \qquad\qquad \omega : \chi \to Der(I,G,i)$$
$$(\alpha,\phi) \mapsto \phi \qquad\qquad \phi \mapsto (f|_I, f)$$

homomorfizmleri için

$$\sum \omega = \mathrm{Id}_{\chi} \qquad\qquad \omega \sum = \mathrm{Id}_{Der(I,G,i)}$$

olur. Böylece

$$Der(I,G,i) \cong \chi$$

olur. O halde, $A(I,G,i) = (Der(G,I), \chi, \Delta)$ elde edilir[2].

Örnek: Yukarıdaki örnekte özel olarak $I = 0$ ise

$$A(I,G,i) = (Der(G,0), Der(G), \Delta) = (0, Der(G), i)$$

ve $I = G$ ise

$$A(G,G,Id) = (Der(G,G), Der(G), \Delta) = (Der(G), Der(G), Id)$$

olur[2].

2.3 Çaprazlanmış Modül Merkezi

Tanım: (M,G,μ) bir çaprazlanmış modül olsun. (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün merkezi $(\eta,\gamma):(M,G,\mu) \to A(M,G,\mu)$ homomorfizminin çekirdeği olarak tanımlanır ve $Z(M,G,\mu)$ ile gösterilir[7].

$$\begin{aligned} Ker\eta &= \{m \in M : \eta_m(g) = 0, g \in G\} \\ &= \{m \in M : g \cdot m = 0, g \in G\} \\ &= M^G \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Kerg &= \{g \in G : \gamma(g) = 0\} \\ &= \{g \in G : \alpha_g(m) = 0, m \in M \text{ ve } \phi_g(g') = 0, g' \in G\} \\ &= \{g \in G : g \cdot m = 0, m \in M\} \cap \{g \in G : [g,g'] = 0, g' \in G\} \\ &= st_G(M) \cap Z(G) \end{aligned}$$

alınarak;

$$Z(M,G,\mu) = Ker(\eta,\gamma) = (M^G, st_G(M) \cap Z(G), \mu)$$

dir. Aynı zamanda $Z(M,G,\mu)$, (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün bir idealidir.

Örnek: M bir $G-$ modül olsun. Bu durumda $(M,G,0)$ ın merkezi

$$Z(M,G,0) = (M^G, st_G(M) \cap Z(G), 0)$$
$$= (H^0(G;M), st_G(M) \cap Z(G), 0)$$

dir[2].

Örnek: $Z(G, Der(G), ad) = (G^{Der(G)}, st_{Der(G)}(G) \cap Z(Der(G)), ad)$
$$= (G^{Der(G)}, 0, ad)$$

dir[2].

Tanım: (M,G,μ) bir çaprazlanmış modül olsun. Eğer $Z(M,G,\mu) = (0,0,0)$ ise (M,G,μ) çaprazlanmış modülü aşikar merkezlidir denir[2].

Teorem: a.) (M,G,μ) asferikal çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda (M,G,μ) nin aşikar merkezli olması için gerek ve yeter şart $Z(G) = 0$ olmasıdır.

b.) (M,G,μ) basit bağlantılı çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda (M,G,μ) nin aşikar merkezli olması için gerek ve yeter şart $Z(M) = 0$ olmasıdır[2].

İspat: a.) $(\Rightarrow)$ $g \in Z(G)$ olsun. Bu durumda $m \in M$ için $g \cdot m \in Ker\mu$ ve $g \in st_G(M)$ olduğundan dolayı $[g, \mu(m)] = 0$ ve $\mu(g \cdot m) = 0$ olacak şekilde $m \in M$ vardır. Dolayısıyla $Z(G) \subset st_G(M)$ olur. Sonuç olarak

$$Z(G) = Z(G) \cap st_G(M)$$

elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $Z(G) = 0$ olsun. Bu durumda $Z(G) \cap st_G(M) = 0$ dır. Her bir $m \in M^G$ için $g \cdot m = 0$ olacak şekilde $g \in G$ vardır. Böylece

$$[g, \mu(m)] = \mu(g \cdot m) = 0$$

dır. Diğer taraftan $\mu(m) \in Z(G) = 0$ olduğundan $m \in Ker\mu = 0$ sonuç olarak $M^G = 0$ elde edilir.

b.) $(\Rightarrow)$ Her $m \in Z(M)$ için $M^G = 0$ olup $\mu(m') \cdot m = [m', m] = 0$ olacak şekilde $m' \in M$ var ve $\mu(m') \in \operatorname{Im}\mu = G$ dir. Bu durumda $g \in G$ için $g \cdot m = 0$ olduğundan $m \in M^G = 0$ dır. Böylece $Z(M) = 0$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ Eğer $m \in M^G$ ise $[m', m] = \mu(m') \cdot m = 0$ olacak şekilde $g \in G$ vardır. Buradan da $m \in M^G = 0$ ve böylece $m = 0$ elde edilir. Diğer taraftan $g \in st_G(M)$ alalım. Bu durumda

$m \in M$ için $g \cdot m = 0$ dır. Aynı zamanda $g \in G$ için $g = \mu(m')$ olacak şekilde $m' \in M$ vardır. Böylece

$$0 = g \cdot m = \mu(m') \cdot m = [m', m]$$

dır. Buradan da $m' \in Z(M) = 0$ ve sonuçta $g = \mu(m') = 0$ elde edilir. Yani

$$Z(G) \cap st_G(M) = 0$$

olduğundan (M, G, μ) aşikar merkezlidir[2].

Teorem: İki çaprazlanmış modülün merkezlerinin direkt çarpımları, direkt çarpımlarının merkezidir[2].

İspat: (M, G, μ) ve (M', G', μ') iki çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} Z((M,G,\mu)\times(M',G',\mu')) &= Z(M\times M', G\times G', \mu\times\mu') \\ &= ((M\times M')^{G\times G'}, Z(G\times G')\cap st_{G\times G'}(M\times M'), \mu\times\mu') \\ &= (M^G\times M'^{G'}, (Z(G)\times Z(G'))\cap(st_G(M)\times st_{G'}(M')), \mu\times\mu') \\ &= (M^G\times M'^{G'}, (Z(G)\cap(st_G(M))\times(Z(G')\cap st_{G'}(M')), \mu\times\mu') \\ &= (M^G, Z(G)\cap st_G(M), \mu)\times(M'^{G'}, Z(G')\cap st_{G'}(M'), \mu') \\ &= Z(M,G,\mu)\times Z(M',G',\mu') \end{aligned}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} (M\times M')^{G\times G'} &= \{(m,m')\in M\times M' : (g,g')\cdot(m,m') = (0,0)\ ,\ (g,g')\in G\times G'\} \\ &= \{(m,m')\in M\times M' : g\cdot m = 0\ ,\ g\in G \text{ ve } g'\cdot m' = 0\ ,\ g'\in G'\} \\ &= M^G\times M'^{G'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} st_{G\times G'}(M\times M') &= \{(g,g')\in G\times G' : (g,g')\cdot(m,m') = (0,0)\ ,\ (m,m')\in M\times M'\ \} \\ &= \{(g,g')\in G\times G' : g\cdot m = 0\ ,\ \mathrm{m}\in M \text{ ve } g'\cdot m' = 0\ ,\ m'\in M'\} \\ &= st_G(M)\times st_{G'}(M') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(G\times G') &= \{(g,g')\in G\times G' : [(g,g'),(x,y)] = 0\ ,\ (x,y)\in G\times G'\ \} \\ &= \{(g,g')\in G\times G' : [g,x] = 0\ ,\ x\in G \text{ ve } [g',y] = 0\ ,\ y\in G'\} \\ &= Z(G)\times Z(G') \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır[2].

Tanım: $\alpha_1 : A_1 \to B$ ve $\alpha_2 : A_2 \to B$ iki morfizm olsun. Eğer

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[dr, "\alpha_1"'] & A_1 \times A_2 \arrow[d, dotted, "\alpha_1 \circ \alpha_2"] & A_2 \arrow[l] \arrow[dl, "\alpha_2"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir $\alpha_1 \circ \alpha_2 : A_1 \times A_2 \to B$ varsa α_1 ve α_2 ye uyumlu (değişimli) denir.

Eğer özel olarak

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r] \arrow[dr, equal, "1"'] & B \times A \arrow[d, dotted] & A \arrow[l] \arrow[dl, "\alpha"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $\alpha : A \to B$ özdeş morfizm ise α ya merkez denir.

Özel olarak $\alpha : A \to B$ monomorfizmi varsa A ya B nin alt obje merkezi denir[2].

Tanım: Bir objenin merkezi, monomorfizmalar ile var olan bağıntıların oluşturduğu maksimal alt objenin merkezi olarak tanımlanır[10].

Teorem: (M,G,μ) çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda $Z(M,G,\mu)$, (M,G,μ) nin maksimal alt objesinin merkezidir[2].

İspat: (N,H,ν) , (M,G,μ) nün alt merkez nesnesi olsun. Bu durumda

$$\begin{tikzcd}
(M,G,\mu) \arrow[r] \arrow[dr, equal, "{(1,1)}"'] & (M,G,\mu)\times(N,H,\nu) \arrow[d, dotted, "{(\beta_1,\beta_2)}"] & (N,H,\nu) \arrow[l] \arrow[dl, "{(\alpha,\alpha_2)}"] \\
 & (M,G,\mu) &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $(\beta_1,\beta_2):(M,G,\mu)\times(N,H,\nu)\to(M,G,\mu)$ morfizmi vardır. Aynı zamanda

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r] \arrow[dr, equal, "1"'] & M\times N \arrow[d, "\beta_1"] \\
 & M
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r] \arrow[dr, equal, "1"'] & G\times H \arrow[d, "\beta_2"] \\
 & G
\end{tikzcd}$$

diyagramları da değişmeli olacak şekilde β_1 ve β_2 vardır. Böylece $m\in M$, $g\in G$ için β_1(m,0)=0 ve $\beta_2(g,0)=0$ yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r] \arrow[dr, "\alpha_1"'] & M\times N \arrow[d, "\beta_1"] \\
 & M
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
H \arrow[r] \arrow[dr, "\alpha_2"'] & G\times H \arrow[d, "\beta_2"] \\
 & G
\end{tikzcd}$$

olup $n\in N$ ve $h\in H$ için $\beta_1(0,n)=\alpha_1(n)$ ve $\beta_2(0,h)=\alpha_2(h)$ yazılabilir.

$\beta_1(m,n)=m+\alpha_1(n)$ ve $\beta_2(g,h)=g+\alpha_2(h)$ olup β_1 ve β_2 lie cebiri homomorfizmidir.

$$\begin{aligned}[\alpha_2(h),g] &= [\beta_2(0,h),\beta_2(g,0)] \\ &= \beta_2[(0,h),(g,0)] \\ &= \beta_2(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

olduğundan $\alpha_2(H)\subseteq Z(G)$ dir.

Şimdi (β_1,β_2) nin çaprazlanmış modül morfizmi olduğunu gösterelim.

$$\beta_1((g,h)\cdot(m,n))=\beta_2(g,h)\cdot\beta_1(m,n)$$

dir. Fakat

$$\begin{aligned}\beta_1((g,h)\cdot(m,n)) &= \beta_1(g\cdot m,h\cdot n) \\ &= g\cdot m+\alpha_1(h\cdot n)\end{aligned}$$

ve

$$\beta_2(g,h)\cdot\beta_1(m,n)=(g+\alpha_2(h))\cdot(m+\alpha_1(n))$$

olacağından dolayı

$h=0$ için $\begin{aligned}[t] g\cdot m &= g\cdot(m+\alpha_1(n)) \\ &= g\cdot m+g\cdot\alpha_1(n)\end{aligned}$

olup buradan $g\cdot\alpha_1(n)=0$ elde edilir ve $\alpha_1(N)\subseteq M^G$ dir.

$n=0$ için $\begin{aligned}[t] (g+\alpha_2(h))\cdot(m) &= g\cdot m+\alpha_2(h)\cdot m \\ &= g\cdot m\end{aligned}$

olup buradan $\alpha_2(h)\cdot m=0$ elde edilir ve $\alpha_2(H)\subseteq st_g(M)$ dir. Böylece

$$\begin{aligned}Im(\alpha_1,\alpha_2) &\subseteq (M^G,st_G(M)\cap Z(G),\mu) \\ &= Z(M,G,\mu)\end{aligned}$$

dir[2].

2.4 Abelyan Çaprazlanmış Modüller Ve Komutatör Alt Çaprazlanmış Modüller

Tanım: (M,G,μ) çaprazlanmış modül olsun. Eğer $Z(M,G,\mu)=(M,G,\mu)$ ise (M,G,μ) ye abelyan çaprazlanmış modül denir[2].

Teorem: (M,G,μ) nün bir abelyan çaprazlanmış modül olması için gerek ve yeter şart G nin M üzerine bir etkisinin aşikar ve G nin bir abelyan Lie cebiri olmasıdır[2].

İspat:

($\Rightarrow$) Eğer $Z(M,G,\mu)=(M,G,\mu)$ ise $M^G=M$ ve $st_G(M)\cap Z(G)=G$ dir. $M^G=M$ olması G nin M üzerine $st_G(M)=G$ şeklinde bir etkisinin aşikar olması demektir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} G &= st_G(M)\cap Z(G) \\ &= G\cap Z(G) \\ &= Z(G) \end{aligned}$$

olup G abelyandır.

($\Leftarrow$) G nin M üzerine $M^G=M$ ve $st_G(M)=G$ şeklinde bir etkisi var olsun. O zaman

$$\begin{aligned} Z(M,G,\mu) &= (M,G\cap Z(G),\mu) \\ &= (M,G,\mu) \end{aligned}$$

dir. Bu da (M,G,μ) nün bir abelyan çaprazlanmış modül olduğunu gösterir[2].

Teorem: Eğer (M,G,μ) bir abelyan çaprazlanmış modül ise G ve M abelyan Lie cebiridir[2].

İspat: Bir önceki teoremden G abelyan ve G nin M üzerine bir etkisi varsa bu durumda her $m,m'\in M$ için $[m,m']=\mu(m)\cdot m'=0$ yazılabilir. Yani M abelyandır[2].

Örnek: A, G nin bir ideali olsun. Bu durumda (A,G,i) nin abelyan çaprazlanmış modül olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} Z(A,G,i) &= (A\cap Z(G),Z(G),i) \\ &= (A,G,i) \end{aligned}$$

olmasıdır. Bu eşitlik $Z(G)=G$ olduğu durumunda sağlanır ve bu da G nin abelyan Lie cebiri olması demektir[2].

Örnek: $(G,Der(G),ad)$ nin abelyan çaprazlanmış modül olması için gerek ve yeter şart $Der(G)=0$ olmasıdır. O halde

($\Rightarrow$) $$\begin{aligned} Z(G,Der(G),ad) &= (G^{Der(G)},0,ad) \\ &= (G,Der(G),ad) \end{aligned}$$

dir. Bu eşitlik ancak $Der(G)=0$ olmasıyla elde edilir.

($\Leftarrow$) $Der(G)=0$ ise $G^{Der(G)}=G^0=G$ dir[2].

Tanım: (M,G,μ) çaprazlanmış modül olsun. $D_G(M)=\{g\cdot m : g\in G \ , m\in M\}$ ve $G'=[G,G]$ olmak üzere (M,G,μ) nün komutatör alt çaprazlanmış modülü $(D_G(M),G',\mu)$ şeklinde tanımlanır ve $(M,G,\mu)'$ ile gösterilir.

Burada tanımlanan $D_G(M)$, M nin bir idealidir ve $g,g'\in G$; $m,m'\in M$ için $g'\cdot(g\cdot m)\in D_G(M)$ ve $[m',g\cdot m]=\mu(m)\cdot(g\cdot m)\in D_G(M)$ şeklindedir[2].

Örnek: A, G nin bir ideali olsun. Bu durumda (A,G,i) çaprazlanmış modülünün komutatörü

$$\begin{aligned} D_G(A) &= \{g\cdot a : g\in G \ , a\in A\} \\ &= \{[g,a] : g\in G \ , a\in A\} \\ &= [G,A] \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} [(A,G,i),(A,G,i)] &= (D_G(A),[G,G],i) \\ &= ([G,A],G',i) \end{aligned}$$

olarak elde edilir[2].

Örnek: (M,G,μ) basit bağlantılı çaprazlanmış modül olsun.

$$\begin{aligned} D_G(M) &= \{g\cdot m : g\in G \ , m\in M\} \\ &= \{\mu(m')\cdot m : g=\mu(m')\in G \ , m\in M\} \\ &= [M,M] \end{aligned}$$

olmak üzere (M',G',μ) komutatör alt çaprazlanmış modülü

$$\begin{aligned} [(M,G,\mu),(M,G,\mu)] &= (D_G(M),[G,G],\mu) \\ &= (M',G',\mu') \end{aligned}$$

olarak elde edilir[2].

Lemma: (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün her bir alt çaprazlanmış modülü, (M,G,μ) nün ideali olan $(M,G,\mu)'$ nü içerir[2].

İspat: (S,H,μ), (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülü ve $(M,G,\mu)'\subseteq(S,H,\mu)$ olsun. Bu durumda $D_G(M)\subseteq S$ ve $[G,G]\subseteq H$ dır.

a) $h\in H$ ve $g\in G$ olsun. Bu durumda $[g,h]\in[G,G]\subseteq H$ dır.

b) $h\in H$ ve $m\in M$ olsun. Bu durumda $h\cdot m\in D_G(M)\subseteq S$ dir.

c) $s\in S$ ve $g\in G$ olsun. Bu durumda $g\cdot s\in D_G(M)\subseteq S$ dir.

Buradan da (S,H,μ) nin (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün bir ideali olduğu görülür. Sonuçta $(M,G,\mu)'$, (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün idealidir[2].

Teorem: (M,G,μ) çaprazlanmış modül olmak üzere, $(M,G,\mu)'$ komutatör idealinin *tek bir* abelyan $(M,G,\mu)/(S,H,\mu)$ ideali vardır[2].

İspat: $(M,G,\mu)/(S,H,\mu)$ abelyan olmak üzere (S,H,μ), (M,G,μ) nün bir ideali olsun. Bu durumda G/H abelyandır ve M/S üzerine açık bir etkisi söz konusudur. Bu da $[G,G]\subseteq H$ ve $D_G(M)\subseteq S$ demektir. Ayrıca diğer bir ideal $(R,K,\mu)\subseteq(M,G,\mu)'$ olsun ve böylece $(M,G,\mu)/(R,K,\mu)$ abelyandır. Buradan $(M,G,\mu)'\subseteq(R,K,\mu)$ sonucuna varılır. Buradan da $(M,G,\mu)'=(R,K,\mu)$ elde edilir[2].

Tanım: (S,H,μ) ve $(R,K,\mu),(M,G,\mu)$ çaprazlanmış modülünün iki ideali olsun. Bu durumda (S,H,μ) ve (R,K,μ) nin komutatör alt çaprazlanmış modülü $(\langle D_K(S),D_H(R)\rangle,[H,K],\mu)$ şeklinde tanımlanır. Burada $\langle D_K(S),D_H(R)\rangle=\{k\cdot s,h\cdot r:k\in K,h\in H,s\in S,r\in R\}$ kümesi ile birlikte M nin alt lie cebiridir. Bu alt çaprazlanmış modül $[(S,H,\mu),(R,K,\mu)]$ şeklindedir[2].

Örnek: $[(S,H,\mu),(R,K,\mu)]$, (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün bir idealidir. Yani

a) $g\in G$ için $[h,k]\in[H,K]$ ve $[g,[h,k]]=[[g,h],k]+[h,[g,k]]\in[H,K]$

b) $[h,k]\in[H,K]$ için $m\in M$ ve $[h,k]\cdot m=h\cdot(k\cdot m)-k\cdot(h\cdot m)\in\langle D_K(S),D_H(R)\rangle$

c) $g\in G$ için $k\cdot s+h\cdot r\in\langle D_K(S),D_H(R)\rangle$ ve

$$g\cdot(k\cdot s+h\cdot r)=[g,k]\cdot s+k\cdot(g\cdot s)+[g,h]\cdot r+h\cdot(g\cdot r)\in\langle D_K(S),D_H(R)\rangle$$

dir[2].

Örnek: $[(S,H,\mu),(R,K,\mu)]\subseteq(S,H,\mu)\cap(R,K,\mu)$ dir[2].

Örnek: $[(M,G,\mu),(M,G,\mu)]=(M,G,\mu)'$ olup $(M,G,\mu)'$ ne (M,G,μ) çaprazlanmış modülü tarafından türetilmiş alt çaprazlanmış modül denir[2].

Teorem: (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün abelyan olması için gerek ve yeter şart $[(M,G,\mu),(M,G,\mu)]=0$ olmasıdır[2].

İspat: ($\Rightarrow$) (M,G,μ) çaprazlanmış modülü abelyan olsun. Bu durumda abelyan olan G nin M üzerine etkisiyle birlikte $[(M,G,\mu),(M,G,\mu)]=(D_G(M),[G,G],\mu)=0$ elde edilir. Aynı zamanda $D_G(M)=0$ ve $[G,G]=0$ dır.

($\Leftarrow$) $[(M,G,\mu),(M,G,\mu)]=0$ olsun. Bu durumda G nin M üzerine etkisiyle birlikte $D_G(M)=0$ ve $[G,G]=0$ olup G abelyandır[2].

Teorem: (M,G,μ) basit abelyan olmayan çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda $Z(M,G,\mu)=0$ ve $(M,G,\mu)'=(M,G,\mu)$ dür[2].

İspat: $Z(M,G,\mu)$ nün (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün ideali olduğunu ve $Z(M,G,\mu)\neq(M,G,\mu)$ olduğunu söyleyebiliriz. Bu durumda $Z(M,G,\mu)=0$ ve (M,G,μ) abelyan değildir. Diğer taraftan $(M,G,\mu)'$, (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün ideali olduğundan $(M,G,\mu)'=0$ yada $(M,G,\mu)'=(M,G,\mu)$ olacaktır. Fakat (M,G,μ) abelyan olmadığından bir önceki teoremden dolayı $(M,G,\mu)'\neq 0$ olup $(M,G,\mu)'=(M,G,\mu)$ olmak zorundadır[2].

3 ÇÖZÜLEBİLİR, NİLPOTENT ve YARI BASİT ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

J.M. Casas, [2] çalışmasında, Lie cebrinde bir çaprazlanmış modülün komütatörünü tanımlayarak, bu tanımı çaprazlanmış modül ideallerinin komütatörlerine genişletmiştir. Buradan, çaprazlanmış modüllerin azalan merkezsel serilerini ve çaprazlanmış modüllerin merkezi yardımıyla artan merkezsel serileri oluşturmuştur. Böylece, nilpotent çaprazlanmış modül kavramını ve ilgili sonuçları elde etmiştir. Biz de, çaprazlanmış modül merkezi yardımıyla elde ettiğimiz benzer serileri nilpotent çaprazlanmış modülü tanımlamada ve bazı ilgili sonuçlarda kullandık.

Tanım: (M,G,μ) çaprazlanmış modül olsun. $n\in\mathbb{N}$ için $(M,G,\mu)^n$ olan azalan merkez seri

$$(M,G,\mu)^1=(M,G,\mu)$$

$$(M,G,\mu)^n=[(M,G,\mu)^{n-1},(M,G,\mu)]$$

şeklinde tanımlanır[2].

Tanım: (M,G,μ) çaprazlanmış modül olsun. $n\in\mathbb{Z}^+$ için elde edilen $(M,G,\mu)^{(n)}$ serisi

$$(M,G,\mu)^{(0)}=(M,G,\mu)$$

$$(M,G,\mu)^{(n)}=[(M,G,\mu)^{(n-1)},(M,G,\mu)^{(n-1)}]$$

şeklinde tanımlanır[2].

Bu iki tanımdan faydalanarak

$$\begin{aligned}(M,G,\mu)^2&=(M,G,\mu)^{(1)}\\&=[(M,G,\mu),(M,G,\mu)]\\&=(M,G,\mu)'\end{aligned}$$

olduğunu söyleyebiliriz.

Lemma: $D^n{}_G(M)=\{g_1\cdot(g_2\cdot(\ldots(g_n\cdot m)\ldots)):g_1,\ldots,g_n\in G, m\in M\}$ ve $D^0{}_G(M)=M$ olmak üzere

i.) $D_G(D^n{}_G(M))=D^{n+1}{}_G(M)$

ii.) $D^n{}_G(D_G(M))=D^{n+1}{}_G(M)$

iii.) $D_{G^n}(M)\subseteq D^n{}_G(M)$

iv.) $D^n{}_G(M)\subseteq D^{n-1}{}_G(M)$

v.) $D_{G^{(n)}}(M)\subseteq D_G(M)$

vi.) $D_{G^{(n)}}(D_{G^{(n-1)}}(...(D_G(M)...)) \subseteq D^n{}_G(M)$

ifadeleri geçerlidir[2].

İspat:

i.) $$\begin{aligned} D_G(D^n{}_G(M)) &= \{g\cdot x : x \in D^n{}_G(M)\} \\ &= \{g\cdot(g_1\cdot(g_2\cdot(...(g_n\cdot x)...))) : g_1,...,g_n \in G, m \in M\} \\ &= D^{n+1}{}_G(M) \end{aligned}$$

ii.) $$\begin{aligned} D^n{}_G(D_G(M)) &= \{g_1\cdot(g_2\cdot(...(g_n\cdot(g\cdot x))...)) : g_1,...,g_n \in G, m \in M\} \\ &= D^{n+1}{}_G(M) \end{aligned}$$

iii.) İspat için tümevarım metodunu kullanalım.

$n=0$ ve $n=1$ için kapsama açıktır. $n-1$ için doğruluğunu kabul edelim.

$x=[g_1,g_2]$, $g_1 \in G^{n-1}$ ve $g_2 \in G$ için

$$\begin{aligned} x\cdot m &= [g_1,g_2]\cdot m \\ &= g_1\cdot(g_2\cdot m) - g_2\cdot(g_1\cdot m) \in D^n{}_G(M) \end{aligned}$$

olduğundan n için durum

$$D_{G^n}(M) = \{x\cdot m : x \in G^n, m \in M\} \subseteq D^n{}_G(M)$$

şeklindedir.

iv.) $g_1\cdot(g_2\cdot(...(g_n\cdot m)...)) \in D^n{}_G(M)$ olsun. Bu durumda $g_n\cdot m \in M$ ve $m' = g_n\cdot m$ olmak üzere

$$g_1\cdot(g_2\cdot(...(g_{n-1}\cdot m')...)) \in D^{n-1}{}_G(M)$$

olur. Yani $D^n{}_G(M) \subseteq D^{n-1}{}_G(M)$ elde edilir.

v.) Benzer şekilde tümevarım metodu ile ispatlanır.

vi.) İspatı tümevarım metodu ile yapalım.

$n=0$ için $D_{G^{(0)}}(M) = D_G(M) \subseteq M = D^0{}_G(M)$

$n=1$ için $D_{G^{(1)}}(D_G(M)) \subseteq D_G(D_G(M)) = D^2{}_G(M) \subseteq D^1{}_G(M)$

$n-1$ için doğruluğunu kabul edelim. n için durum

$$\begin{aligned} D_{G^{(n)}}(D_{G^{(n-1)}}(...(D_G(M)...)) &\subseteq D_{G^{(n)}}(D^{n-1}{}_G(M)) \\ &\subseteq D_G(D^{n-1}{}_G(M)) \\ &= D^n{}_G(M) \end{aligned}$$

şeklindedir[2].

Teorem: *i.)* $n-$boyutlu G^n, G nin azalan merkez serisi ise

$$(M,G,\mu)^n = (D^{n-1}{}_G(M), G^n, \mu)$$

dir.

ii.) $n-$boyutlu $G^{(n)}$, G nin elde edilen serisi ve $D_{G^{(-1)}}(M) = M$ ise

$$(M,G,\mu)^{(n)} = (D_{G^{(n-1)}}(D_{G^{(n-2)}}(...(D_{G^{(1)}}D_G(M)...)), G^{(n)}, \mu)$$

dir[2].

İspat: İspatı tümevarım metoduyla gösterelim.

i.) $n=1$ için $(M,G,\mu)^1 = (M,G,\mu)$

$$= (D^0{}_G(M), G^1, \mu)$$

$n=2$ için $(M,G,\mu)^2 = [(M,G,\mu),(M,G,\mu)]$

$$= (D_G(M),[G,G],\mu)$$
$$= (D^1{}_G(M), G^2, \mu)$$

$n-1$ için doğruluğunu kabul edelim. Bu durumda n için eşitliğin geçerliliğini görelim.

$$(M,G,\mu)^n = [(M,G,\mu)^{n-1},(M,G,\mu)]$$
$$= [(D^{n-2}{}_G(M), G^{n-1}, \mu),(M,G,\mu)]$$
$$= (\langle D_{G^{n-1}}(M), D_G(D^{n-2}{}_G(M))\rangle, [G^{n-1},G], \mu) \overset{(*)}{=} (D^{n-1}{}_G(M), G^n, \mu)$$

olur. (*) eşitliği ise

$$\langle D_{G^{n-1}}(M), D_G(D^{n-2}{}_G(M))\rangle = \langle D^{n-1}{}_G(M)\rangle$$
$$= D^{n-1}{}_G(M)$$

şeklinde görülür. Böylece

$$(M,G,\mu)^n = (D^{n-1}{}_G(M), G^n, \mu)$$

bulunur.

ii.) $n=0$ için $(M,G,\mu)^{(0)} = (M,G,\mu)$

$$= (D_{G^{(-1)}}(M), G^{(0)}, \mu)$$

$n=1$ için $(M,G,\mu)^{(1)} = [(M,G,\mu),(M,G,\mu)]$

$$= (D_G(M),[G,G],\mu)$$
$$= (D_{G^{(0)}}(M), G^{(1)}, \mu)$$

$n-1$ için doğruluğunu kabul edelim. Bu durumda n için eşitliğin geçerliliğini görelim.

$$(M,G,\mu)^{(n)} = [(M,G,\mu)^{(n-1)},(M,G,\mu)^{(n-1)}]$$
$$= [(D_{G^{(n-2)}}(D_{G^{(n-3)}}(...(D_G(M)...)),G^{(n-1)},\mu),(D_{G^{(n-2)}}(D_{G^{(n-3)}}(...(D_G(M)...)),G^{(n-1)},\mu)]$$
$$= (D_{G^{(n-1)}}(D_{G^{(n-2)}}((...(D_G(M))...)),[G^{(n-1)},G^{(n-1)}],\mu)$$
$$= (D_{G^{(n-1)}}(D_{G^{(n-2)}}((...(D_G(M))...)),G^{(n)},\mu)$$

olarak elde edilir[2].

Teorem: Aşağıdaki ifadeler doğrudur[2].

i.) $n \in \mathbb{N}$ için $(M,G,\mu)^n$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için $(M,G,\mu)^{(n)}$, (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün idealleridir.

ii.) $n \in \mathbb{Z}^+$ için $(M,G,\mu)^{(n)} \subseteq (M,G,\mu)^n$ dir.

İspat: i.) İspat için aşağıdaki şartları inceleyelim.

a. G^n, G nin bir idealidir. [1]

b. $g \in G^n$ ve $m \in M$ olsun. Bu durumda $g \cdot m \in D_{G^n}(M) \subseteq D^n{}_G(M) \subseteq D^{n-1}{}_G(M)$

c. $g \in G$ ve $x \in D^{n-1}{}_G(M)$ olsun. Bu durumda

$$g \cdot x \in D_G(D^n{}_G(M)) = D^{n+1}{}_G(M) \subseteq D^{n-1}{}_G(M)$$

olduğundan dolayı $(M,G,\mu)^{(n)} = (D^{n-1}{}_G(M),G^n,\mu)$, (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülüdür. Benzer şekilde

a. G^n, G nin bir idealidir.[1]

b. $g \in G^{(n)}$ ve $m \in M$ olsun. Bu durumda $g \cdot m \in (D_{G^{(n-1)}}(D_{G^{(n-2)}}(...(D_G(M))...)$ dir.

Bunun doğruluğunu tümevarım metoduyla gösterelim.

$n = 0$ için $g \in G^{(0)}$=G ve $m \in M$ olsun. Bu durumda $g \cdot m \in M = D_{G^{(-1)}}(M)$

$n = 1$ için $g \in G^{(1)}$=[G,G] ve $m \in M$ olsun. Bu durumda $g = [g_1, g_2]$; $g_1, g_2 \in G$ için

$$g \cdot m = [g_1, g_2] \cdot m$$
$$= g_1 \cdot (g_2 \cdot m) - g_2 \cdot (g_1 \cdot m) \in D^2{}_G(M) \subseteq D_G(M) = D_{G^{(1)}}(M)$$

$n-1$ için doğruluğunu kabul edelim. Bu durumda n için doğru olduğunu gösterelim.

$g \in G^{(n)}$,$m \in M$ ile $g = [g_1, g_2]$; $g_1, g_2 \in G^{(n-1)}$ olsun. Bu durumda

$$g \cdot m = [g_1, g_2] \cdot m$$
$$= g_1 \cdot (g_2 \cdot m) - g_2 \cdot (g_1 \cdot m) \in D_{G^{(n-1)}}(D_{G^{(n-2)}}(...(D_G(M))...))$$

olup $g_1 \in G^{(n-1)}$, m ∈ M ve $g_1 \cdot m \in D_{G^{(n-2)}}(D_{G^{(n-3)}}(...(D_G(M))...))$ elde edilir.

c. $g \in G$ ve $x \in D_{G^{(n-1)}}(D_{G^{(n-2)}}(...(D_G(M))...))$ olsun. Bu durumda

$g \cdot x \in D_{G^{(n-1)}}(D_{G^{(n-2)}}(...(D_G(M))...))$ olur. Bu ifadenin doğruluğunu da tümevarım metodu ile gösterelim.

$n = 0$ için $g \in$ G ve $x \in D_{G^{(-1)}}(M)$ olsun. Bu durumda $g \cdot m \in M = D_{G^{(-1)}}(M)$ dir.

$n = 1$ için $g \in$ G ve $x \in D_{G^{(0)}}(M) = D_G(M)$ olsun. Bu durumda

$g \cdot x = g \cdot (g_1 \cdot m) \in D^2{}_G(M) \subseteq D_G(M)$ elde edilir.

$n-1$ için doğruluğunu kabul edelim. Bu durumda n için doğru olduğunu gösterelim.

$g \in G$ ve $x \in D_{G^{(n-1)}}(D_{G^{(n-2)}}(...(D_G(M))...))$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} g \cdot x &= g \cdot (g_1 \cdot y) \\ &= [g, g_1] \cdot y + g_1 \cdot (g \cdot y) \in D_{G^{(n-1)}}(D_{G^{(n-2)}}(...(D_G(M))...)) \end{aligned}$$

$g_1 \in G^{(n-1)}$ ve y $\in D_{G^{(n-2)}}(...(D_G(M))...)$ olup $[g, g_1] \in G^{(n-1)}$ ve bununla beraber

$g \cdot$ y $\in D_{G^{(n-2)}}(...(D_G(M))...)$ elde edilir. O halde

$(M, G, \mu)^{(n)} = (D_{G^{(n-1)}}(D_{G^{(n-2)}}(...(D_G(M))...)), G^{(n)}, \mu)$, (M, G, μ) çaprazlanmış modülünün bir alt çaprazlanmış modülüdür[2].

ii.) $G^{(n)} \subseteq G^n$,[1] olduğu açık olup $D_{G^{(n-1)}}(D_{G^{(n-2)}}(...(D_G(M))...)) \subseteq D^{(n-1)}{}_G(M)$ dir.

Bu da $n \in \mathbb{Z}^+$ için $(M, G, \mu)^{(n)} \subseteq (M, G, \mu)^n$ olduğunu gösterir[2].

Teorem: $(\alpha, \phi) : (M, G, \mu) \to (M', G', \mu')$ örten homomorfizma olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur[2].

i.) $(\alpha, \phi)(M, G, \mu)^n = (M', G', \mu')^n$, $n \in \mathbb{N}$

ii.) $(\alpha, \phi)(M, G, \mu)^{(n)} = (M', G', \mu')^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}^+$

İspat: i.) $(\alpha, \phi) : (M, G, \mu) \longrightarrow (M', G', \mu')$ örten homomorfizm olmak üzere,

$$\begin{aligned} (\alpha, \phi)(M, G, \mu)^n &= (\alpha, \phi)\left(D_G^{n-1}(M), G^n, \mu\right) \\ &= (\alpha(D_G^{n-1}(M)), \phi(G^n), \mu') \\ &\overset{(*)}{=} (D_{G'}^{n-1}(M'), G'^n, \mu') \\ &= (M', G', \mu')^n \end{aligned}$$

dir. (*) $\alpha(D_G^{n-1}(M)) = D_{G'}^{n-1}(M')$ eşitliğini n üzerinde tümevarımla ispatlayalım.

n=1 için; $\alpha(D_G^0(M)) = \alpha(M) = M' = D_{G'}^0(M')$

n=2 için; $g\cdot m\in D_G^1(M), \alpha(g\cdot m)=\phi(g)\cdot\alpha(m)\in D_{G'}^1(M')$ olduğundan

$$\alpha\left(D_G^1(M)\right)\subseteq D_{G'}^1(M')$$

sağlanır. $g'\cdot m'\in D_{G'}^1(M')$ için $g'\in G'$ ve $g'=\phi(g)$ olacak şekilde $g\in G$ ve $\alpha(m)=m'$ olacak şekilde $m\in M$ vardır.

$$g'\cdot m'=\phi(g)\cdot\alpha(m)=\alpha(g\cdot m)\in\alpha(D_G^1(M))$$

olduğundan

$$D_{G'}^1(M')\subseteq\alpha\left(D_G^1(M)\right)$$

sağlanır. Böylece,

$$\alpha\left(D_G^1(M)\right)=D_{G'}^1(M')$$

elde edilir. n-2 için

$$\alpha\left(D_G^{n-2}(M)\right)=D_{G'}^{n-2}(M')$$

eşitliğinin doğruluğunu kabul edelim. n-1 için doğruluğunu araştıralım.
$g_1\cdot(g_2\cdot(...(g_{n-1}\cdot m)...))\in D_G^{n-1}(M)$ elemanını $g_1\in G$ ve
$x=g_2\cdot(...(g_{n-1}\cdot m)...)\in D_G^{n-2}(M)$ olmak üzere $g_1\cdot x$ olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}\alpha(g_1\cdot(g_2\cdot(...(g_{n-1}\cdot m)...)))&=\alpha(g_1\cdot x)\\&=\phi(g_1)\cdot\alpha(x)\in D_{G'}(D_{G'}^{n-2}(M'))=D_{G'}^{n-1}(M')\end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$\alpha\left(D_G^{n-1}(M)\right)\subseteq D_{G'}^{n-1}(M')$$

bulunur. $g_1'\cdot(g_2'\cdot(...(g_{n-1}'\cdot m')...))\in D_{G'}^{n-1}(M')$ elemanını
$g_1'\in G', x'=g_2'\cdot(...(g_{n-1}'\cdot m')...)\in D_{G'}^{n-2}(M')$ olmak üzere $g_1'\cdot x'$ olarak tanımlayalım. $g_1'\in G'$ için, $g_1'=\phi(g_1)$ olacak şekilde $g_1\in G$ vardır. Tümevarım hipotezinden $x'\in D_{G'}^{n-2}(M')$ için $\alpha(x)=x'$ olacak şekilde $x\in D_G^{n-2}(M)$ vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned}g_1'\cdot(g_2'\cdot(...(g_{n-1}'\cdot m')...))&=g_1'\cdot x'\\&=\phi(g_1)\cdot\alpha(x)\\&=\alpha(g_1\cdot x)\in\alpha(D_G(D_G^{n-2}(M)))=\alpha(D_G^{n-1}(M))\end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$D_{G'}^{n-1}(M')\subseteq\alpha\left(D_G^{n-1}(M)\right)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$D_{G'}^{n-1}(M')=\alpha\left(D_G^{n-1}(M)\right)$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca, $\phi(G'')=G'''$ olur. Böylece $(*)$ eşitliği sağlanır.

ii.) $(\alpha,\phi)(M,G,\mu)^{(n)} = (\alpha(D_{G^{(n-1)}}(D_{G^{(n-2)}}(...(D_G(M))...))),\phi(G''),\mu')$

$\overset{(*)}{=}(D_{G'^{(n-1)}}(D_{G'^{(n-2)}}(...(D_{G'}(M))...)),G'^{(n)},\mu')$

$=(M',G',\mu')^{(n)}$

dır. Yani

$$(\alpha(D_{G^{(n-1)}}(D_{G^{(n-2)}}(...(D_G(M))...))),\phi(G''),\mu') = (D_{G'^{(n-1)}}(D_{G'^{(n-2)}}(...(D_{G'}(M))...)),G'^{(n)},\mu')$$

eşitliğinin doğruluğunu tümevarım metodunu ile gösterelim.

$n=0$ için $\alpha(D_{G^{(-1)}}(M)) = \alpha(M)$

$= M'$

$= D_{G'^{(-1)}}(M')$

$n=1$ için $\alpha(D_{G^{(0)}}(M)) = \alpha(D_G(M))$

$= D_{G'}(M')$

$n-2$ için doğruluğunu kabul edelim. Bu durumda $n-1$ için doğru olduğunu gösterelim. $g_{n-1}\cdot(g_{n-2}\cdot(...(g_1\cdot(g\cdot m))...)) \in (D_{G^{(n-1)}}(D_{G^{(n-2)}}(...(D_G(M))...))$ olsun. Bu elemanı $g_{n-1}\in G^{(n-1)}$ ve $x = g_{n-2}\cdot(...(g_1\cdot(g\cdot m))...) \in D_{G^{(n-2)}}(...(D_G(M))...)$ olarak $g_{n-1}\cdot x$ şeklinde tanımlayalım. Buradan da

$$\alpha(g_{n-1}\cdot(g_{n-2}\cdot(...(g_1\cdot(g\cdot m))...))) = \alpha(g_{n-1}\cdot \mathrm{x})$$
$$= \phi(g_{n-1})\cdot\alpha(\mathrm{x}) \in D_{G'^{(n-1)}}(D_{G'^{(n-2)}}(...(D_{G'}(M'))...))$$

olduğundan

$$(\alpha(D_{G^{(n-1)}}(D_{G^{(n-2)}}(...(D_G(M))...))),\phi(G''),\mu') \subseteq (D_{G'^{(n-1)}}(D_{G'^{(n-2)}}(...(D_{G'}(M))...)),G'^{(n)},\mu')$$

sağlanır. Diğer taraftan

$g'_{n-1}\cdot(g'_{n-2}\cdot(...(g'_1\cdot(g'\cdot m'))...)) \in D_{G'^{(n-1)}}(D_{G'^{(n-2)}}(...(D_{G'}(M'))...))$ benzer şekilde bu elemanı da $g'_{n-1}\in G'^{(n-1)}$ ve $x' = g'_{n-2}\cdot(...(g'_1\cdot(g'\cdot m'))...) \in D_{G'^{(n-2)}}(...(D_{G'}(M'))...)$ olarak alıp $g'_{n-1}\cdot x'$ şeklinde tanımlayalım. Burada $\phi(g_{n-1}) = g'_{n-1}$ olacak şekilde $g_{n-1}\in G^{(n-1)}$ ve $\alpha(x) = x'$ olacak şekilde $\mathrm{x}\in D_{G^{(n-2)}}(...(D_G(M))...)$ vardır. Buradan da

$$g'_{n-1}\cdot(g'_{n-2}\cdot(...(g'_1\cdot(g'\cdot m'))...)) = g'_{n-1}\cdot x'$$
$$= \phi(g_{n-1})\cdot\alpha(x)$$
$$= \alpha(g_{n-1}\cdot x) \in \alpha(D_{G^{(n-1)}}(D_{G^{(n-2)}}(...(D_{G'}(M'))...)))$$

olur. Böylece

$$(D_{G'^{(n-1)}}(D_{G'^{(n-2)}}(...(D_{G'}(M))...)),G'^{(n)},\mu') \subseteq (\alpha(D_{G^{(n-1)}}(D_{G^{(n-2)}}(...(D_G(M))...))),\phi(G''),\mu')$$

bulunur. Ayrıca $\phi(G^{(n)}) = G'^{(n)}$ olur. Dolayısıyla (*) eşitliği sağlanır.[6]

Teorem: (M, G, μ) basit bağlantılı bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler doğrudur[2].

i.) $D^{n-1}{}_G(M) = M^n$

ii.) $D_{G^{(n-1)}}(D_{G^{(n-2)}}(...(D_G(M))...)) = M^{(n)}$

İspat: İspatı tümevarım metodunu kullanarak yapalım.

i.) $n=1$ için $D^0{}_G(M) = M = M'$

$n-1$ için doğruluğunu kabul edelim. Bu durumda n için doğru olduğunu gösterelim. $g \cdot x \in D^{n-1}{}_G(M)$ ve $g \in G$ için $\mu(m) = g$ ve $x \in D^{n-2}{}_G(M) = M^{n-1}$ olacak şekilde $m \in M$ vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} g \cdot x &= \mu(m) \cdot x \\ &= [m, x] \in [M, M^{n-1}] = M^n \end{aligned}$$

olduğundan dolayı

$$D^{n-1}{}_G(M) \subseteq M^n$$

olur.

Diğer taraftan $m \in M^n$ olsun. Bu durumda $m_1 \in M$ ve $m_2 \in M^{n-1}$ olmak üzere $m = [m_1, m_2]$ ve $M^{n-1} = D^{n-2}{}_G(M)$ elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} m &= [m_1, m_2] \\ &= \mu(m_1) \cdot m_2 \in D_G(D^{n-2}{}_G(M)) = D^{n-1}{}_G(M) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$M^n \subseteq D^{n-1}{}_G(M)$$

elde edilir. Dolayısıyla $D^{n-1}{}_G(M) = M^n$ eşitliği sağlanır.

ii.) $n=0$ için $D_{G^{(-1)}}(M) = M = M^{(0)}$

$n-1$ için doğruluğunu kabul edip n için doğru olduğunu gösterelim. $x \in (D_{G^{(n-1)}}(D_{G^{(n-2)}}(...(D_G(M))...))$ olsun. Bu elemanı $x_1 \in G^{(n-1)}$ ve $x_2 \in D_{G^{(n-2)}}(...(D_G(M))...)$ olarak $x = x_1 \cdot x_2$ şeklinde tanımlayalım. $x_1 \in G^{(n-1)}$ elemanı için $\mu(m_1) = x_1$ olacak şekilde $m_1 \in M^{(n-1)}$ elemanı vardır ve aynı zamanda $x_2 \in M^{(n-1)}$ dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cdot x_2 \\ &= \mu(m_1) \cdot x_2 \\ &= [m_1, x_2] \in [M^{(n-1)}, M^{(n-1)}] = M^{(n)} \end{aligned}$$

olduğundan dolayı

$$D_{G^{(n-1)}}(D_{G^{(n-2)}}(\ldots(D_G(M))\ldots)) \subseteq M^{(n)}$$

elde edilir.

$m \in M^n$ olsun. Bu durumda $m_1, m_2 \in M^{(n-1)}$ için $m = [m_1, m_2]$ yazılabilir. μ yardımı ile $\mu(M^{(n-1)}) = G^{(n-1)}$ ve $x_2 \in M^{(n-1)} = D_{G^{(n-2)}}(\ldots(D_G(M))\ldots)$ elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} m &= [m_1, m_2] \\ &= \mu(m_1) \cdot m_2 \in D_{G^{(n-1)}}(D_{G^{(n-2)}}(\ldots(D_G(M))\ldots)) \end{aligned}$$

olduğundan dolayı

$$M^{(n)} \subseteq D_{G^{(n-1)}}(D_{G^{(n-2)}}(\ldots(D_G(M))\ldots))$$

elde edilir. Sonuç olarak $D_{G^{(n-1)}}(D_{G^{(n-2)}}(\ldots(D_G(M))\ldots)) = M^{(n)}$ eşitliği sağlanır[2].

Sonuç: Eğer (M, G, μ) basit bağlantılı bir çaprazlanmış modül ise aşağıdaki eşitlikler doğrudur[2].

i.) $(M, G, \mu)^n = (M^n, G^n, \mu)$

ii.) $(M, G, \mu)^{(n)} = (M^{(n)}, G^{(n)}, \mu)$

Tanım: (M, G, μ) çaprazlanmış modül olsun. Eğer $(M, G, \mu)^{(n)} = 0$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ varsa (M, G, μ) çaprazlanmış modülüne çözülebilir çaprazlanmış modül denir. Buradaki $n \in \mathbb{Z}^+$ elemanına da (M, G, μ) çaprazlanmış modülünün çözülebilirlik indeksi adı verilir[2].

Tanım: (M, G, μ) çaprazlanmış modül olsun. Eğer $(M, G, \mu)^n = 0$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ varsa (M, G, μ) çaprazlanmış modülüne nilpotent çaprazlanmış modül denir. Buradaki $n \in \mathbb{N}$ elemanına da (M, G, μ) çaprazlanmış modülünün nilpotentlik indeksi adı verilir[2].

Örnek: A, G nin bir ideali olsun. (A, G, i) çaprazlanmış modülünün çözülebilir olması için gerek ve yeter şart G nin çözülebilir olmasıdır.

$(\Rightarrow)$ (A, G, i) çözülebilir olsun. Bu durumda

$(A,G,i)^{(n)} = (D_{G^{(n-1)}}(...(D_{G^{(1)}}(D_G(A)))...), G^{(n)}, i) = (0,0,0)$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır ve $G^{(n)} = 0$ olup G çözülebilirdir.

($\Leftarrow$) G çözülebilir olsun. Bu durumda $G^{(n)} = 0$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

$D_{G^{(n)}}(...(D_{G^{(1)}}(D_G(A)))...) \subseteq G^{(n)} = 0$ ve sonuç olarak $(A,G,i)^{(n)} = (0,0,0)$ elde edilir.

Benzer şekilde aynı örnek nilpotentlik için de yapılabilir[2].

Örnek: (M,G,μ) basit bağlantılı bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda (M,G,μ) nün çözülebilir olması için gerek ve yeter şart M ve G Lie cebirlerinin çözülebilir olmasıdır.

Eğer (M,G,μ) çözülebilir ise bu ancak ve ancak $(M,G,\mu)^{(n)} = (M^{(n)}, G^{(n)}, \mu) = (0,0,0)$ olması durumunda sağlanır. Bu da ancak $G^{(n)} = 0$ ve $M^{(n)} = 0$ olması ile gerçeklenir. O halde M ve G Lie cebirleri çözülebilirdir[2].

Teorem: $(M,G,\mu)^2 = (M,G,\mu)^{(1)} = 0$ olması için gerek ve yeter şart (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün abelyan olmasıdır[2].

İspat: (M,G,μ) abelyan $\Leftrightarrow [(M,G,\mu),(M,G,\mu)] = 0$

$$\Leftrightarrow (M,G,\mu)^2 = (M,G,\mu)^{(1)} = 0$$

elde edilir[2].

Sonuç: a.) Eğer (M,G,μ) çaprazlanmış modülü abelyan ise çözülebilirdir[2].

b.) Eğer (M,G,μ) çaprazlanmış modülü abelyan ise nilpotenttir[2].

Teorem: Eğer (M,G,μ) abelyan olmayan basit bağlantılı bir çaprazlanmış modül ise (M,G,μ) çözülebilir değildir[2].

İspat: $[(M,G,\mu),(M,G,\mu)] = (M,G,\mu)^{(1)}$, (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün bir idealidir. Fakat (M,G,μ) basit çaprazlanmış modül olduğundan $(M,G,\mu)^{(1)} = (0,0,0)$ yada $(M,G,\mu)^{(1)} = (M,G,\mu)$ olmalıdır. (M,G,μ) abelyan olmadığından $(M,G,\mu)^{(1)} \neq (0,0,0)$ olacaktır. Bu durumda $(M,G,\mu)^{(1)} = (M,G,\mu)$ olmak zorundadır. Bu da (M,G,μ) nün çözülebilir olmadığını gösterir[2].

Lemma: (M,G,μ) bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda

i.) (M',G',μ'), (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülü ise

$$(M',G',\mu')^{(n)} \subseteq (M,G,\mu)^{(n)}$$

dir[2].

ii.) $((M,G,\mu)^{(n)})^{(m)} = (M,G,\mu)^{(n+m)}$ dir[2].

İspat: a. İspatı tümevarım metodu ile yapalım.

$n=0$ için $(M',G',\mu')^{(0)} = (M',G',\mu')$

$$\subseteq (M,G,\mu)$$
$$= (M,G,\mu)^{(0)}$$

$n-1$ için doğruluğunu kabul edip n için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}(M',G',\mu')^{(n)} &= [(M',G',\mu')^{(n-1)},(M',G',\mu')^{(n-1)}]\\ &\subseteq [(M,G,\mu)^{(n-1)},(M,G,\mu)^{(n-1)}]\\ &= (M,G,\mu)^{(n)}\end{aligned}$$

olur[2].

b. Benzer şekilde tümevarım metodunu kullanarak ispatlayalım.

$m=0$ için $((M,G,\mu)^{(n)})^{(0)} = (M,G,\mu)^{(n)}$

$m-1$ için doğruluğunu kabul edelim. m için durum

$$\begin{aligned}(M',G',\mu')^{(n)} &= [(M',G',\mu')^{(n-1)},(M',G',\mu')^{(n-1)}]\\ &\subseteq [(M,G,\mu)^{(n-1)},(M,G,\mu)^{(n-1)}]\\ &= (M,G,\mu)^{(n)}\end{aligned}$$

şeklindedir[2].

Teorem: (M,G,μ) bir çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i.) Eğer (M,G,μ) çözülebilir ise (M,G,μ) nün tüm alt çaprazlanmış modülleri ve görüntüleri de çözülebilirdir[2].

ii.) Eğer (M',G',μ'), (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün çözülebilir ideali ise $(M,G,\mu)/(M',G',\mu')$ de çözülebilir olup buradan da (M,G,μ) çözülebilirdir[2].

iii.) (M_1,G_1,μ_1) ve (M_2,G_2,μ_2), (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün çözülebilir idealleri olsun. Bu durumda $(M_1,G_1,\mu_1)\cap(M_2,G_2,\mu_2)$ ve $(M_1,G_1,\mu_1)+(M_2,G_2,\mu_2)$ de çözülebilirdir[2].

İspat: i.) (M',G',μ'), (M,G,μ)'nün alt çaprazlanmış modülü olsun. Bu durumda (M,G,μ) çözülebilir olduğundan $(M,G,\mu)^{(n)}=0$ olacak şekilde $n\in\mathbb{Z}^+$ vardır. Diğer taraftan $(M',G',\mu')^{(n)} \subseteq (M,G,\mu)^{(n)} = 0$ yazılabilir. Buradan da $(M',G',\mu')^{(n)} = 0$ olup (M',G',μ') çözülebilirdir.

Şimdide görüntünün çözülebilirliğini gösterelim.

$(\alpha,\phi):(M,G,\mu) \to (M',G',\mu')$ çaprazlanmış modül morfizmi olsun. Bu durumda $(\alpha,\phi)(M,G,\mu)^{(n)} = (M',G',\mu')^{(n)}$ yazılabilir. (M,G,μ) çözülebilir olduğundan $(M,G,\mu)^{(n)} = 0$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. O halde $(M',G',\mu')^{(n)} = (\alpha,\phi)(0) = 0$ olup (M',G',μ') çözülebilirdir.

ii.) $(M,G,\mu)/(M',G',\mu')$ çözülebilir olduğundan $((M,G,\mu)/(M',G',\mu'))^{(n)} = 0$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

$(\pi_1,\pi_2):(M,G,\mu) \to (M,G,\mu)/(M',G',\mu')$ morfizmini ele alalım. Bu durumda $(\pi_1,\pi_2)(M,G,\mu)^{(n)} = ((M,G,\mu)/(M',G',\mu'))^{(n)} = 0$ yazılabilir. Buradan $(M,G,\mu)^{(n)} = 0$ yada $(M,G,\mu)^{(n)} \subseteq Ker(\pi_1,\pi_2) = (M',G',\mu')$ elde edilir. (M',G',μ') çözülebilir olduğundan $(M',G',\mu')^{(m)} = 0$ olacak şekilde $m \in \mathbb{Z}^+$ vardır ve $((M,G,\mu)^{(n)})^{(m)} \subseteq (M',G',\mu')^{(m)} = 0$ olduğundan $(M,G,\mu)^{(n+m)} = 0$ olup (M,G,μ) çözülebilirdir.

iii.) (M_1,G_1,μ_1) ve (M_2,G_2,μ_2) çözülebilir iki ideal olsun. Bu durumda $(M_1,G_1,\mu_1) \cap (M_2,G_2,\mu_2) \subseteq (M_1,G_1,\mu_1)$ yazılabilir. Diğer taraftan (M_1,G_1,μ_1) çözülebilir olduğundan $(M_1,G_1,\mu_1) \cap (M_2,G_2,\mu_2)$ de çözülebilirdir. İzomorfizm teoreminden dolayı

$$((M_1,G_1,\mu_1)+(M_2,G_2,\mu_2))/(M_2,G_2,\mu_2) \cong (M_1,G_1,\mu_1)/((M_1,G_1,\mu_1) \cap (M_2,G_2,\mu_2))$$

dır. (M_1,G_1,μ_1) çözülebilir olduğundan dolayı $(M_1,G_1,\mu_1)/((M_1,G_1,\mu_1) \cap (M_2,G_2,\mu_2))$ çözülebilirdir. Çözülebilir çaprazlanmış modülün görüntüsünü ele alırsak $((M_1,G_1,\mu_1)+(M_2,G_2,\mu_2))/(M_2,G_2,\mu_2)$ de çözülebilir olacaktır. Diğer taraftan (M_2,G_2,μ_2) nin çözülebilir olması $(M_1,G_1,\mu_1)+(M_2,G_2,\mu_2)$ nin çözülebilirliğinin kesinleştirir[2].

Teorem: (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün çözülebilir olması için gerek ve yeter şart

$$0 = (M_0,G_0,\mu_0) \trianglelefteq (M_1,G_1,\mu_1) \trianglelefteq \dots \trianglelefteq (M_n,G_n,\mu_n) = (M,G,\mu)$$

ve $(M_i,G_i,\mu_i)/(M_{i-},G_{i-1},\mu_{i-1})$, $(1 \le i \le n)$ abelyan olacak şekilde

$$(M_0,G_0,\mu_0),(M_1,G_1,\mu_1),\dots,(M_n,G_n,\mu_n)$$

ideallerinin var olmasıdır[2].

İspat: ($\Rightarrow$) $(M_n, G_n, \mu_n) = (M, G, \mu)^{(0)}, (M_{n-1}, G_{n-1}, \mu_{n-1}) = (M, G, \mu)^{(1)}, \ldots,$ $(M_{n-i}, G_{n-i}, \mu_{n-i}) = (M, G, \mu)^{(i)}, \ldots, (M_0, G_0, \mu_0) = (M, G, \mu)$ ideallerini ele alalım. Bu durumda (M, G, μ) çaprazlanmış modülünün bir çözülebilirlik indeksi n vardır. Buradan

$$\begin{aligned}(M_i, G_i, \mu_i)/(M_{i-1}, G_{i-1}, \mu_{i-1}) &= (M, G, \mu)^{(n-i)}/(M, G, \mu)^{(n-i+1)} \\ &= (M, G, \mu)^{(n-i)}/[(M, G, \mu)^{(n-i)}, (M, G, \mu)^{(n-i)}]\end{aligned}$$

olup $(M_i, G_i, \mu_i)/(M_{i-1}, G_{i-1}, \mu_{i-1})$ abelyandır.

($\Leftarrow$) Hipotezi sağlayan ideallerin varlığını kabul edelim. Bu durumda $(M_1, G_1, \mu_1)/(M_0, G_0, \mu_0) = (M_1, G_1, \mu_1)$ abelyan ve çözülebilirdir. Benzer şekilde $(M_2, G_2, \mu_2)/(M_1, G_1, \mu_1)$ abelyan ve çözülebilirdir. (M_1, G_1, μ_1) çözülebilir olduğundan (M_2, G_2, μ_2) de çözülebilirdir. Bu şekilde devam edilerek $(M_n, G_n, \mu_n)/(M_{n-1}, G_{n-1}, \mu_{n-1})$ in abelyan ve çözülebilir olduğu söylenebilir. Diğer taraftan $(M_{n-1}, G_{n-1}, \mu_{n-1})$ çözülebilir olduğundan (M_n, G_n, μ_n) de çözülebilirdir ve de $(M_n, G_n, \mu_n) = (M, G, \mu)$ olarak elde edilir[2].

Teorem: (M_1, G_1, μ_1) ve (M_2, G_2, μ_2), (M, G, μ) çaprazlanmış modülünün iki ideali olsun. Bu durumda $[(M_1, G_1, \mu_1), (M_2, G_2, \mu_2)]$ de (M, G, μ) nün çözülebilir idealidir[2].

İspat: Daha önce $[(M_1, G_1, \mu_1), (M_2, G_2, \mu_2)]$ nin (M, G, μ)'nün ideali olduğunu gösterdik. Aynı zamanda $[(M_1, G_1, \mu_1), (M_2, G_2, \mu_2)] \subseteq (M_1, G_1, \mu_1) \cap (M_2, G_2, \mu_2)$ dir. Diğer taraftan $(M_1, G_1, \mu_1) \cap (M_2, G_2, \mu_2)$ çözülebilir olduğundan $[(M_1, G_1, \mu_1), (M_2, G_2, \mu_2)]$ de çözülebilirdir[2].

Lemma: (M, G, μ) ve (T, H, ∂) iki çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda $[(M \times T, G \times H, \mu \times \partial), (M \times T, G \times H, \mu \times \partial)] = [(M, G, \mu), (M, G, \mu)] \times [(T, H, \partial), (T, H, \partial)]$ dır[2].

İspat:

$$
\begin{aligned}
[(M\times T,G\times H,\mu\times\partial),(M\times T,G\times H,\mu\times\partial)] &= (D_{G\times H}(M\times T),[G\times H,G\times H],\mu\times\partial) \\
&= (D_G(M)\times D_H(T),[G,G]\times[H,H],\mu\times\partial) \\
&= (D_G(M),[G,G],\mu)\times(D_H(T),[H,H],\partial) \\
&= [(M,G,\mu),(M,G,\mu)]\times[(T,H,\partial),(T,H,\partial)]
\end{aligned}
$$

elde edilir[2].

Lemma: (M,G,μ) ve (T,H,∂) iki çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda

$$(M\times T,G\times H,\mu\times\partial)^{(n)} = (M,G,\mu)^{(n)}\times(T,H,\partial)^{(n)} \quad , \; n\in\mathbb{Z}^+$$

dır[2].

İspat: Tümevarım metodunu kullanarak eşitliği gösterelim.

$n=0$ için
$$
\begin{aligned}
(M\times T,G\times H,\mu\times\partial)^{(0)} &= (M\times T,G\times H,\mu\times\partial) \\
&= (M,G,\mu)\times(T,H,\partial) \\
&= (M,G,\mu)^{(0)}\times(T,H,\partial)^{(0)}
\end{aligned}
$$

$n-1$ için doğruluğunu kabul edelim. n için durum

$$
\begin{aligned}
(M\times T,G\times H,\mu\times\partial)^{(n)} &= [(M\times T,G\times H,\mu\times\partial)^{(n-1)},(M\times T,G\times H,\mu\times\partial)^{(n-1)}] \\
&= [(M,G,\mu)^{(n-1)}\times(T,H,\partial)^{(n-1)},(M,G,\mu)^{(n-1)}\times(T,H,\partial)^{(n-1)}] \\
&= [(M,G,\mu)^{(n-1)},(M,G,\mu)^{(n-1)}]\times[(T,H,\partial)^{(n-1)},(T,H,\partial)^{(n-1)}] \\
&= (M,G,\mu)^{(n)}\times(T,H,\partial)^{(n)}
\end{aligned}
$$

şeklindedir[2].

Teorem: (M,G,μ) ve (T,H,∂) iki çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda $(M,G,\mu)\times(T,H,\partial)$ nın çözülebilir olması için gerek ve yeter şart (M,G,μ) ve (T,H,∂) nın çözülebilir olmasıdır[2].

İspat: $(\Rightarrow)$ $(M\times T,G\times H,\mu\times\partial)$ çözülebilir olsun. Bu durumda $(M\times T,G\times H,\mu\times\partial)^{(n)}=0$ olacak şekilde $n\in\mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan $(M,G,\mu)^n\times(T,H,\partial)^n=0$ olup $(M,G,\mu)^n=0$ ve $(T,H,\partial)^n=0$ olacaktır. Bu da (M,G,μ) ve (T,H,∂) nın çözülebilir olduğunu gösterir.

$(\Leftarrow)$ (M,G,μ) ve (T,H,∂) çözülebilir olsun. Bu durumda $(M,G,\mu)^n=0$ ve $(T,H,\partial)^m=0$ olacak şekilde $n,m\in\mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan da

$$(M\times T,G\times H,\mu\times\partial)^{(n+m)} = (M,G,\mu)^{(n+m)}\times(T,H,\partial)^{(n+m)}=0$$

olup $(M,G,\mu)\times(T,H,\partial)$ çözülebilirdir[2].

Teorem: (M,G,μ) çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur[2].

i.) $[(M,G,\mu)^m,(M,G,\mu)^n]\subseteq(M,G,\mu)^{m+n}\quad ; n,m\in\mathbb{N}$

ii.) $(M,G,\mu)^{(n)}\subseteq(M,G,\mu)^{2^n}\quad ; n\in\mathbb{Z}^+$

İspat: i.) $$\begin{aligned}[(M,G,\mu)^m,(M,G,\mu)^n] &\subseteq [(D^{m-1}{}_G(M),G^m,\mu),(D^{n-1}{}_G(M),G^n,\mu)]\\ &= (\langle D_{G^n}(D^{m-1}{}_G(M)),D_{G^m}(D^{n-1}{}_G(M))\rangle,[G^m,G^n],\mu)\\ &\subseteq (D^{n+m-1}{}_G(M),G^{n+m},\mu)\\ &= (M,G,\mu)^{m+n}\end{aligned}$$

Bunun yanısıra $[G^m,G^n]\subseteq G^{n+m}$ ve

$$\begin{aligned}\langle D_{G^n}(D^{m-1}{}_G(M)),D_{G^m}(D^{n-1}{}_G(M))\rangle &\subseteq \langle D^{m+n-1}{}_G(M),D^{m+n-1}{}_G(M)\rangle\\ &= D^{n+m-1}{}_G(M)\end{aligned}$$

dır.

ii.) Kapsamayı tümevarım metodu ile gösterelim.

$$\begin{aligned} n=0 \text{ için } (M,G,\mu)^{(0)} &= (M,G,\mu)\\ &= (M,G,\mu)^1\\ &= (M,G,\mu)^{2^0}\end{aligned}$$

$n-1$ için doğruluğunu kabul edelim. n için durum

$$\begin{aligned}(M,G,\mu)^{(n)} &= [(M,G,\mu)^{n-1},(M,G,\mu)^{n-1}]\\ &\subseteq [(M,G,\mu)^{2^{n-1}},(M,G,\mu)^{2^{n-1}}]\\ &\subseteq (M,G,\mu)^{2^{n-1}+2^{n-1}}\\ &= (M,G,\mu)^{2^n}\end{aligned}$$

şeklindedir[2].

Sonuç: Her nilpotent çaprazlanmış modül çözülebilirdir[2].

İspat: (M,G,μ) nilpotent çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda $(M,G,\mu)^n=0$ olacak şekilde $n\in\mathbb{N}$ vardır. O halde $(M,G,\mu)^{(n)}\subseteq(M,G,\mu)^n=0$ olup $(M,G,\mu)^{(n)}=0$ elde edilir. Yani (M,G,μ) çözülebilirdir[2].

Lemma: (S,H,μ), (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün ideali olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur[2].

i.) Eğer $[(S,H,\mu),(M,G,\mu)]=0$ ise $(S,H,\mu)\subseteq Z(M,G,\mu)$

ii.) $[(M,G,\mu),Z(M,G,\mu)]=0$

İspat: i.) $[(S,H,\mu),(M,G,\mu)] = (\langle D_G(S), D_H(M)\rangle, [H,G], \mu)$
$$= (0,0,0)$$

olsun. $s \in S$ için $g \cdot s \in D_G(S)$ ise her $g \in G$ için $g \cdot s = 0$ olur. Dolayısıyla $s \in M^G$ elde edilir. Diğer taraftan $h \in H$ için $h \cdot m \in D_H(M)$ ise her $m \in M$ için $h \cdot m = 0$ olup $h \in st_G(M)$ bulunur. Yani $[H,G] = 0$ olup $H \subseteq Z(G)$ elde edilir[2].

ii.) $[(M,G,\mu), Z(M,G,\mu)] = [(M,G,\mu),(M^G, st_G(M) \cap Z(G), \mu)]$
$$= (\langle D_G(M^G), D_{st_G(M)\cap Z(G)}(M)\rangle, [G, st_G(M) \cap Z(G)], \mu)$$
$$= 0$$

dir[2].

Teorem: (M,G,μ) çaprazlanmış modülü için aşağıdaki ifadeler sağlanır[2].

a) (M,G,μ) nilpotent ise alt çaprazlanmış modülü ve çaprazlanmış modül morfizminin görüntüsü nilpotenttir.

b) $(M,G,\mu)/\ Z(M,G,\mu)$ nilpotent ise (M,G,μ) nilpotent çaprazlanmış modüldür.

c) $(M,G,\mu) \neq 0$ ve nilpotent ise $Z(M,G,\mu) \neq 0$ dır.

İspat: a.) (M',G',μ'), (M,G,μ) nün alt çaprazlanmış modülü olsun. Bu durumda $(M',G',\mu')^n \subseteq (M,G,\mu)^n$ kapsamasını inceleyelim.

$n=1$ için $(M',G',\mu')^1 = (M',G',\mu') \subseteq (M,G,\mu) = (M,G,\mu)^1$

$n-1$ için doğruluğunu kabul edelim. n için durum

$$\begin{aligned}(M',G',\mu')^n &= [(M',G',\mu'),(M',G',\mu')^{n-1}] \\ &\subseteq [(M,G,\mu),(M,G,\mu)^{n-1}] \\ &= (M,G,\mu)^n\end{aligned}$$

olur.

(M,G,μ) nilpotent olduğundan $(M,G,\mu)^n = 0$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır. Sonuç olarak $(M',G',\mu')^n = 0$ olup (M',G',μ') nilpotenttir.

Diğer taraftan görüntünün nilpotentliğini inceleyelim.

$(\alpha,\phi):(M,G,\mu) \to (M',G',\mu')$ örten çaprazlanmış modül homomorfizmi olsun.

$$(\alpha,\phi)(M,G,\mu)^n = (M',G',\mu')^n$$

ve (M,G,μ) nilpotent olduğundan $(M,G,\mu)^n = 0$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned}(M',G',\mu')^n &= (\alpha,\phi)(M,G,\mu)^n \\ &= (\alpha,\phi)(0) = 0\end{aligned}$$

olup (M',G',μ') nilpotenttir.

b.) $(M,G,\mu)/Z(M,G,\mu)$ nilpotent ise

$$((M,G,\mu)/Z(M,G,\mu))^n = 0$$

olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır.

$$(\pi_1,\pi_2):(M,G,\mu) \to (M,G,\mu)/Z(M,G,\mu)$$

örten çaprazlanmış modül homomorfizminden dolayı

$$((M,G,\mu)/Z(M,G,\mu))^n = (M,G,\mu)^n + Z(M,G,\mu) = 0$$

ve $(M,G,\mu)^n \subseteq Z(M,G,\mu)$ bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}(M,G,\mu)^{n+1} &= [(M,G,\mu)^n,(M,G,\mu)] \\ &\subseteq [Z(M,G,\mu),(M,G,\mu)] \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (M,G,μ) nilpotent çaprazlanmış modül olur.

c.) (M,G,μ) nilpotent olduğundan $(M,G,\mu)^n = 0$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan da $(M,G,\mu)^{n-1} \neq 0$ olup $[(M,G,\mu),(M,G,\mu)^{n-1}] = (M,G,\mu)^n = 0$ olur. Yani $(M,G,\mu)^{n-1} \subseteq Z(M,G,\mu)$ elde edilir. Sonuç olarak $Z(M,G,\mu) \neq 0$ olmak zorundadır[2].

Tanım: (R,K,μ) ve (S,H,μ), (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün iki ideali olsun.

$$\begin{aligned}M^{(H,R)} &= \{m \in M : h \cdot m \in R, \text{ her } h \in H \text{ için}\} \\ st_G(S,R) &= \{g \in G : g \cdot s \in R, \text{ her } s \in S \text{ için}\} \\ C_G(H,K) &= \{g \in G : [g,h] \in K, \text{ her } h \in H \text{ için}\}\end{aligned}$$

olmak üzere

(M,G,μ) içinde (R,K,μ) ve (S,H,μ) nin merkezleştiricisi

$(M,G,\mu),(M^{(H,R)},st_G(S,R) \cap C_G(H,K),\mu)$ olarak tanımlanır ve

$C_{(M,G,\mu)}((S,H,\mu),(R,K,\mu))$ şeklinde gösterilir.

Eğer $(R,K,\mu) = (0,0,0)$ ise (M,G,μ) içinde (S,H,μ) idealinin merkezleştiricisi

$$\begin{aligned}C_{(M,G,\mu)}((S,H,\mu),(0,0,0)) &= (M^{(H,0)},st_G(S,0) \cap C_G(H,0),\mu) \\ &= (M^H,st_G(S) \cap C_G(H),\mu)\end{aligned}$$

olur ve $C_{(M,G,\mu)}((S,H,\mu))$ olarak gösterilir.

Eğer $(R,K,\mu)=(0,0,0)$ ve $(S,H,\mu)=(M,G,\mu)$ ise (M,G,μ) içinde (M,G,μ) nin merkezleştiricisi

$$\begin{aligned} C_{(M,G,\mu)}((M,G,\mu),(0,0,0)) &= C_{(M,G,\mu)}((M,G,\mu)) \\ &= (M^G, st_G(M)\cap C_G(G),\mu) \\ &= Z(M,G,\mu) \end{aligned}$$

şeklindedir[2].

Tanım: (M,G,μ) çaprazlanmış modül olmak üzere

$$\begin{aligned} &Z_0(M,G,\mu)=0 \\ &Z_n(M,G,\mu)=C_{(M,G,\mu)}((M,G,\mu),Z_{n-1}(M,G,\mu)) \end{aligned}$$

şeklinde oluşturulan seriye artan seri denir. Burada $Z_n(M,G,\mu)$, (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün idealidir ve

$$Z_1(M,G,\mu)=C_{(M,G,\mu)}((M,G,\mu),(0,0,0))=Z(M,G,\mu)$$

olduğuna dikkat edilmelidir[2].

Tanım: (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün

$$[(M,G,\mu)_n,(M,G,\mu)]\subseteq(M,G,\mu)_{n-1}$$

şartını sağlayan

$$0=(M,G,\mu)_0\trianglelefteq(M,G,\mu)_1\trianglelefteq\cdots\trianglelefteq(M,G,\mu)_n\trianglelefteq\cdots$$

ideal serisine (M,G,μ) nin artan serisi denir[2].

Teorem: $Z_n(M,G,\mu)$, $Z_{n+1}(M,G,\mu)$ nin bir idealidir[2].

İspat: $Z_n(M,G,\mu)$, $Z_{n+1}(M,G,\mu)$ nin alt çaprazlanmış modülüdür ve her ikisi de (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün idealidir. Dolayısıyla $Z_n(M,G,\mu)$, $Z_{n+1}(M,G,\mu)$ nin bir idealidir[2].

Lemma: (R,K,μ) ve (S,H,μ), (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün iki ideali olsun. Eğer $[(S,H,\mu),(M,G,\mu)]\subseteq(R,K,\mu)$ ise

$$(S,H,\mu)\subseteq C_{(M,G,\mu)}((M,G,\mu),(R,K,\mu))$$

olur[2].

İspat: $[(S,H,\mu),(M,G,\mu)]=(\langle D_G(S),D_H(M)\rangle,[H,G],\mu)\subset(R,K,\mu)$ ise

$D_G(S) \subseteq R$ olduğundan $s \in S$ ve her $g \in G$ için $g \cdot s \in D_G(S) \subseteq R$ olur ve $S \subseteq M$ olduğundan

$$s \in M^{(G,R)}$$

olur. $h \in H$ ve $m \in M$ için $h \cdot m \in D_H(M) \subseteq R$ ve $H \subseteq G$ olduğundan

$$h \in st_G(M,R)$$

olur. Ayrıca $[H,G] \subseteq K$ olduğundan $h \in H, g \in G$ ve $[h,g] \in K$ için $h \in C_G(G,H)$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}(S,H,\mu) &\subseteq (M^{(G,R)}, st_G(M,R) \cap C_G(G,K), \mu) \\ &= \mathrm{C}_{(M,G,\mu)}((M,G,\mu),(R,K,\mu))\end{aligned}$$

sağlanır[2].

Teorem: (M,G,μ) çaprazlanmış modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

i.) $(M,G,\mu)_n \subseteq Z_n(M,G,\mu)$

ii.) $(M,G,\mu)_n = (M,G,\mu)$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Bu durumda

$$(M,G,\mu)^i = (M,G,\mu)_{n-i+1} \quad , \quad 1 \le i \le n+1$$

dir[2].

İspat: i.) Tümevarım metounu kullanarak ifadenin doğruluğunu gösterelim.

$n=0$ için $(M,G,\mu)_0 = 0 = Z_0(M,G,\mu)$

$n=1$ için $[(M,G,\mu)_1,(M,G,\mu)] \subseteq (M,G,\mu)_0 = 0$ ise bu durumda

$$(M,G,\mu)_1 \subseteq Z(M,G,\mu) = Z_1(M,G,\mu)$$

olur.

$n-1$ için

$$[(M,G,\mu)_n,(M,G,\mu)] \subseteq (M,G,\mu)_{n-1} \subseteq Z_{n-1}(M,G,\mu)$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda tanım gereği

$$\begin{aligned}(M,G,\mu)_n &\subseteq \mathrm{C}_{(M,G,\mu)}((M,G,\mu),Z_{n-1}(M,G,\mu)) \\ &= Z_n(M,G,\mu)\end{aligned}$$

şeklinde n için doğru olduğu görülür.

ii.) Benzer şekilde ispat için yine tümevarım metodunu kullanalım.

$i=1$ için $(M,G,\mu)^1 = (M,G,\mu) = (M,G,\mu)_n$

$i=2$ için $(M,G,\mu)^2=[(M,G,\mu),(M,G,\mu)]$
$$=[(M,G,\mu)_n,(M,G,\mu)]$$
$$\subseteq (M,G,\mu)_{n-1}$$

$i-1$ için doğruluğunu kabul edelim. Böylece $1\le i\le n+1$ için

$$(M,G,\mu)^i=[(M,G,\mu)^{i-1},(M,G,\mu)]$$
$$=[(M,G,\mu)_{n-i+2},(M,G,\mu)]$$
$$\subseteq (M,G,\mu)_{n-i+1}$$

bulunur[2].

Lemma: (R,K,μ), (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün ideali olsun. Bu durumda $[\mathrm{C}_{(M,G,\mu)}((M,G,\mu),(R,K,\mu)),(M,G,\mu)]\subseteq (R,K,\mu)$ dir[2].

İspat:

$[\mathrm{C}_{(M,G,\mu)}((M,G,\mu),(R,K,\mu)),(M,G,\mu)]$
$=[(M^{(G,R)},st_G(M,R)\cap C_G(G,K),\mu),(M,G,\mu)]$
$=(\left\langle D_G(M^{(G,R)}),D_{st_G(M,R)\cap C_G(G,K)}(M)\right\rangle,[st_G(M,R)\cap C_G(G,K),G],\mu)$
$\subseteq\ (R,K,\mu)$

elde edilir. Burada

$$D_G(M^{(G,R)})=\{g\cdot m : g\in G\ ,\ m\in M^{(G,R)}\}\subseteq\ R$$
$$D_{st_G(M,R)\cap C_G(G,K)}(M)=\{x\cdot m : x\in st_G(M,R)\cap C_G(G,K)\ ,\ m\in M\}$$
$$\subseteq\{x\cdot m : x\in st_G(M,R)\ ,\ m\in M\}\subseteq\ R$$
$$[st_G(M,R)\cap C_G(G,K),G]\subseteq[C_G(G,K),G]\subseteq\ K$$

olur[2].

Teorem: (M,G,μ) çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir[2].

a) (M,G,μ) nilpotent çaprazlanmış modüldür.

b) $Z_n(M,G,\mu)=(M,G,\mu)$ olacak şekilde $n\in\mathbb{Z}^+$ vardır.

c) (M,G,μ) nin serisi sonlu uzunluktadır, yani $(M,G,\mu)_n=(M,G,\mu)$ dir.

İspat:

(a.$\Rightarrow$c.) $(M,G,\mu)^{n+1}=0$ olmak üzere $(M,G,\mu)_i=(M,G,\mu)^{n-i+1}$ ideallerini gözönüne alalım. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
&(M,G,\mu)_0 = (M,G,\mu)^{n+1} = 0\\
&(M,G,\mu)_1 = (M,G,\mu)^{n}\\
&\quad\vdots\\
&(M,G,\mu)_n = (M,G,\mu)^{1} = (M,G,\mu)
\end{aligned}
$$

şeklinde

$$
\begin{aligned}
[(M,G,\mu)_i,(M,G,\mu)] &= [(M,G,\mu)^{n-i+1},(M,G,\mu)]\\
&= (M,G,\mu)^{n-i+2}\\
&= (M,G,\mu)_{i-1}
\end{aligned}
$$

şartını sağlayan sonlu uzunlukta bir seri elde edilir.

(c.$\Rightarrow$a.) $(M,G,\mu)_n = (M,G,\mu)$ olduğundan dolayı $(M,G,\mu)^i \subseteq (M,G,\mu)_{n-i+1}$ dır. Bu durumda $(M,G,\mu)^{n+1} \subseteq (M,G,\mu)_0 = 0$ olduğundan (M,G,μ) nin nilpotent olduğu görülür.

(c.$\Rightarrow$b.) Kabul edelimki $(M,G,\mu)_n = (M,G,\mu)$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) olsun. Bu durumda

$$(M,G,\mu) = (M,G,\mu)_n \subseteq Z_n(M,G,\mu) \subseteq (M,G,\mu)$$

olup istenen $Z_n(M,G,\mu) = (M,G,\mu)$ eşitliği elde edilir.

(b. $\Rightarrow$(a. $\Leftrightarrow$ c.)) İspat için $(M,G,\mu)^i \subseteq Z_{n-i+1}(M,G,\mu)$ kapsamasının varlığını gösterelim.

$i=1$ için $(M,G,\mu)^1 = (M,G,\mu) \subseteq Z_n(M,G,\mu)$

$$
\begin{aligned}
i=2 \text{ için } (M,G,\mu)^2 &= [(M,G,\mu),(M,G,\mu)]\\
&= [Z_n(M,G,\mu),(M,G,\mu)]\\
&= [\mathrm{C}_{(M,G,\mu)}((M,G,\mu),Z_{n-1}(M,G,\mu)),(M,G,\mu)]\\
&\subseteq Z_{n-1}(M,G,\mu)
\end{aligned}
$$

$i-1$ için doğruluğunu kabul edelim. i için durum

$$
\begin{aligned}
(M,G,\mu)^i &= [(M,G,\mu)^{i-1},(M,G,\mu)]\\
&\subseteq [Z_{n-i+2}(M,G,\mu),(M,G,\mu)]\\
&= [\mathrm{C}_{(M,G,\mu)}((M,G,\mu),Z_{n-i+1}(M,G,\mu)),(M,G,\mu)]\\
&\subseteq Z_{n-i+1}(M,G,\mu)
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Buradan $(M,G,\mu)^{n+1} \subseteq Z_0(M,G,\mu) = 0$ olup (M,G,μ) nilpotenttir[2].

Lemma: (M,G,μ) ve (T,H,∂) iki çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler gerçeklenir[2].

i.) $D^n{}_{G\times H}(M\times T) = D^n{}_G(M)\times D^n{}_H(T)$

ii.) $(G\times H)^n = G^n \times H^n$

İspat: i.) İspatı tümevarım metodu ile gösterelim.

$n=0$ için $D^n{}_{G\times H}(M\times T) = M\times T$

$$= D^0{}_G(M)\times D^0{}_H(T)$$

$n-1$ için doğruluğunu kabul edelim. Bu durumda n için

$$\begin{aligned} D^n{}_{G\times H}(M\times T) &= D_{G\times H}(D^{n-1}{}_{G\times H}(M\times T)) \\ &= D_{G\times H}(D^{n-1}{}_G(M)\times D^{n-1}{}_H(T)) \\ &= D_G(D^{n-1}{}_G(M))\times D_H(D^{n-1}{}_H(T)) \\ &= D^n{}_G(M)\times D^n{}_H(T) \end{aligned}$$

elde edilir[2].

ii.) Lie cebirinin genel özelliklerinden kolayca görülür[2].

Teorem: (M,G,μ) ve (T,H,∂) iki çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda

$$((M,G,\mu)\times(T,H,\partial))^n = (M,G,\mu)^n \times (T,H,\partial)^n$$

dir[2].

İspat: $$\begin{aligned} (M\times T, G\times H, \mu\times\partial)^n &= (D^{n-1}{}_{G\times H}(M\times T),(G\times H)^n, \mu\times\partial) \\ &= (D^{n-1}{}_G(M)\times D^{n-1}{}_H(T), G^n\times H^n, \mu\times\partial) \\ &= (D^{n-1}{}_G(M), G^n, \mu)\times(D^{n-1}{}_H(T), H^n, \partial) \\ &= (M,G,\mu)^n\times(T,H,\partial)^n \end{aligned}$$

elde edilir[2].

Sonuç: (M,G,μ) ve (T,H,∂) iki çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda $(M,G,\mu)\times(T,H,\partial)$ nın nilpotent çaprazlanmış modül olması için gerek ve yeter şart (M,G,μ) ve (T,H,∂) nın nilpotent olmasıdır[2].

İspat: ($\Rightarrow$) $(M,G,\mu)\times(T,H,\partial)$ nilpotent olsun. Bu durumda $(M\times T, G\times H, \mu\times\partial)^n = 0$ olacak şekilde $n\in\mathbb{N}$ vardır. Fakat $0 = (M\times T, G\times H, \mu\times\partial)^n = (M,G,\mu)^n\times(T,H,\partial)^n$ olup $(M,G,\mu)^n = 0$ ve $(T,H,\partial)^n = 0$ olacaktır. Böylece (M,G,μ) ve (T,H,∂) nilpotenttir.

($\Leftarrow$) (M,G,μ) ve (T,H,∂) nilpotent olduğundan $(M,G,\mu)^n = 0$ ve $(T,H,\partial)^m = 0$ olacak şekilde $n,m\in\mathbb{N}$ vardır. $p=\max\{n,m\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}(M\times T, G\times H, \mu\times\partial)^{p} &= (M,G,\mu)^{p}\times(T,H,\partial)^{p}\\ &= 0\times 0\\ &= 0\end{aligned}$$

olur. Yani $(M,G,\mu)\times(T,H,\partial)$ nilpotenttir[2].

Tanım: (S,H,μ) aşikar olmayan (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün ideali olsun. Eğer $(S,H,\mu)\subseteq(R,K,\mu)\subseteq(M,G,\mu)$ olacak şekilde (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün hiçbir (R,K,μ) ideali yoksa (S,H,μ) ye maksimal ideal denir[2].

Teorem: Herbir (M,G,μ) çaprazlanmış modülün birtek çözülebilir maksimal ideali vardır[2].

İspat: (S,H,μ), (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün çözülebilir maksimal ideali ve (R,K,μ), (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün çözülebilir ideali olsun. Bu durumda $(S,H,\mu)+(R,K,\mu)$ çözülebilir ideal ve $(S,H,\mu)+(R,K,\mu)\subseteq(S,H,\mu)$ olacaktır. Sonuç olarak bu eşitsitlik $(R,K,\mu)\subseteq(S,H,\mu)$ olarak yazılabilir. Böylece (S,H,μ) tek çözülebilir idealidir[2].

Tanım: (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün tek çözülebilir maksimal idealine kök(radikal) denir ve $Rad(M,G,\mu)$ ile gösterilir[2].

Tanım: Eğer (M,G,μ) aşikar olmayan çaprazlanmış modül ve $Rad(M,G,\mu)=0$ ise (M,G,μ) çaprazlanmış modülüne yarıbasit denir[2].

Teorem: (M,G,μ) aşikar ve abelyan olmayan basit çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda (M,G,μ) çaprazlanmış modülü yarıbasittir[2].

İspat: (M,G,μ) aşikar olmadığından dolayı $Rad(M,G,\mu)$, (M,G,μ) nün çözülebilir ideali olacaktır. Yine (M,G,μ) basit çaprazlanmış modül olduğundan dolayı $Rad(M,G,\mu)=0$ yada $Rad(M,G,\mu)=(M,G,\mu)$ olacaktır. Diğer taraftan (M,G,μ) çözülebilir olmadığından $Rad(M,G,\mu)\neq(M,G,\mu)$ olup $Rad(M,G,\mu)=0$ olmak zorundadır. Bu da (M,G,μ) nün yarıbasit olduğunu gösterir[2].

Teorem: (M,G,μ) çaprazlanmış modülü için $(M,G,\mu)/Rad(M,G,\mu)$ yarıbasit çaprazlanmış modüldür[2].

İspat: $(S,H,\mu)/Rad(M,G,\mu)$, $(M,G,\mu)/Rad(M,G,\mu)$ nün abelyan ideali olsun. Bu durumda $(S,H,\mu)/Rad(M,G,\mu)$ ve $Rad(M,G,\mu)$ çözülebilir olduğundan (S,H,μ) çözülebilirdir. $Rad(M,G,\mu),(S,H,\mu)$ nin ideali olacak şekilde $(S,H,\mu)/Rad(M,G,\mu)$ yı düşünelim. Fakat $Rad(M,G,\mu)=(S,H,\mu)$ ve $(S,H,\mu)/Rad(M,G,\mu)=0$ olduğundan $Rad(M,G,\mu)$ çözülebilir maksimal idealdir. Böylece $(M,G,\mu)/Rad(M,G,\mu)$ nün her abelyan ideali aşikardır ve $(M,G,\mu)/Rad(M,G,\mu)$ yarıbasittir[2].

Teorem: (M,G,μ) çaprazlanmış modülü yarıbasit ise aşağıdaki ifadeler doğrudur[2].

i.) $Z(M,G,\mu)=0$

ii.) (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün bağlılık simgesi birebirdir.

İspat: i.) Bunun için $Z(M,G,\mu)$nün (M,G,μ) çaprazlanmış modülünün bir abelyan ideali olduğunu göstermek yeterlidir.

$[Z(M,G,\mu),Z(M,G,\mu)]\subseteq[Z(M,G,\mu),(M,G,\mu)]=0$ olduğundan $Z(M,G,\mu)$ abelyan idealdir[2].

ii.) $(\eta,\gamma):(M,G,\mu)\to A(M,G,\mu)$ bağlılık simgesini ele alalım. Burada $Ker(\eta,\gamma)=Z(M,G,\mu)=0$ olduğundan birebirdir[2].

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] Amayo, R. and Stewart , I., 1974, Infinite-dimensional lie algebras, Nordhoff

[2] Casas, J.M., 1990, Invariantes de módulos cruzados en Álgebras de Lie, Ph.D.Thesis, University of Santiago, 173

[3] Chow, Y., 1978, General theory of lie algebras, University of Wisconsin, Gordon and Breach Science Publishers Inc, New York

[4] Grandjean, A.R., 1971, Reticulo de ideales de un objeto en una R-categoria, Rev. Math. Hisp. Amer. T. 32, 14-20

[5] Guin, D., 1986, Cohomologie non abelienne des algebras de lie, Universite Louis Pasteur. Irma.,Strasbourg

[6] Humphreys, J., 1972, Intruduction to lie algebras and representation theory, Springer

[7] Jacobson, N., 1962, Lie algebras, İnterscience

[8] Lavendhomme, R. and Lucas,T.H., 1996, On modules and crossed modules, Journal of Algebra, 179, 936-963.

[9] Mac Lane, S., 1958, Extensions and Obstructions for Rings, Illinois J. Math., 121, 316-345

[10] Mitchel, B., theory of categories, 1965, Acedemic Pres

[11] Norrie, K.J., 1987, Crossed Modules and Analogues of Group Teorems, Ph.D.Thesis, King's College

[12] Porter, T., 1986, Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconceles, J. Algebra, 99 , 458-465

[13] Samelson, H., 1969, Notes on Lie Algebra, University of Crete Department of Mathematics,165,1-3

[14] Shammu, N.M., 1992, Algebraic and Categorical Structure of Category of Crossed Modules of Algebras, Ph.D. Thesis, U.C.N.W