3-TİP CEBİRSEL MODELLER

(1 BAĞLANTILI)

Nermin ALÇAY

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Kasım - 2006

3-TİP CEBİRSEL MODELLER
(1 BAĞLANTILI)

Nermin ALÇAY

Dumlupınar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Erdal ULUALAN

Kasım – 2006

KABUL ve ONAY SAYFASI

Nermin ALÇAY'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "3-TİP CEBİRSEL MODELLER (1 BAĞLANTILI) " başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

23 / 11 /2006

Üye : Doç. Dr. Murat ALP

Üye : Yrd. Doç. Dr. İlker AKÇA

Üye : Yrd. Doç. Dr. Erdal ULUALAN (Danışman)

Fen Bilimleri Enstitüsün Yönetim Kurulu'nun ....../...../..... gün ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. M. Sabri ÖZYURT
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

3-TİP CEBİRSEL MODELLER
(1 BAĞLANTILI)

Nermin ALÇAY
Matematik Anabilimdalı , Yüksek Lisans Tezi, 2006
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Erdal ULUALAN

ÖZET

Bu tez 4 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmı olup bu bölümde tezde kullanılacak temel kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde braided çaprazlanmış modüller, indirgenmiş simplisel gruplar ve kuadratik modüller arasındaki ilişki verilmiştir. Üçüncü bölümde braided cat-gruplar ve braided çaprazlanmış modüller arasındaki denklik verilmiştir.

Son bölümde, Artin-Mazur kodiyagonal funktor kullanılarak, çaprazlanmış köşe kategorisi ile braided çaprazlanmış modüller kategorisinin denk olduğu gösterilmiş ve ayrıca çaprazlanmış köşe ile Moore kompleksinin boyutu ≤ 2 olan indirgenmiş simplisel gruplar arasındaki ilişki verilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Braided Çaprazlanmış Modül, Braided Cat-Grup, Kuadratik Modül, Simplisel Grup.

3-TYPES ALGEBRAİC MODELS
(1 CONNECTED)

Nermin ALÇAY
Department of Mathematics, M.S.Thesis, 2006
Thesis Supervisor: Assist. Prof. Erdal ULUALAN

SUMMARY

This thesis consist of 4 chapters In first Chapter, we give basic informations to use them in the next sections. In the second chapter, we give the relations among braided crossed modules, reduced simplicial groups and reduced quadratic modules. In the third chapter, we give an equivalance between braided cat-groups and crossed modules.

In the last chapter, by using Artin-Mazur Codiagonal functor, we proved that the category of crossed corners is equivalent to that of braided crossed modules. We give also in this chapter, the link between crossed corners and reduced simplicial groups with Moore complex of length 2.

Keywords: Braided Crossed Module, Braided Cat-Group, Quadratic Module, Simplicial Group.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmam süresince desteğini esirgemeyen Matematik Bölüm Başkanı Doç. Dr. Murat ALP'e, çalışmamı yöneten ve bu tezin hazırlanması sırasında vakit ayırarak ilgi ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Erdal ULUALAN'a ve her zaman yanımda olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Kütahya-2006 Nermin ALÇAY

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
G	Simplisel Grup
NG	G simplisel grubunun Moore kompleksi
$\propto$	Yarı direkt çarpım
$tr_k G$	K-parçalanmış simplisel grup

Kısaltmalar	**Açıklama**
$BCat(Gp)$	Braided cat-gruplar kategorisi
BCM	Braided çaprazlanmış modül
$BiSimpGrp$	Bisimplisel gruplar kategorisi
CC	Çaprazlanmış köşeler kategorisi
$Cat(Gp)$	Cat-gruplar kategorisi
CM	Çaprazlanmış modül
Grp	Grup
$\mathrm{Re}\, SimpGrp$	İndirgenmiş simplisel gruplar kategorisi
$\mathrm{Re}\, SimpGrp_{\leq 2}$	2-parçalanmış indirgenmiş simplisel gruplar kategorisi
$\mathrm{Re}\, X_2 Mod$	İndirgenmiş 2-çaprazlanmış modüller
RQM	İndirgenmiş kuadaratik modül
$SimpGrp$	Simplisel gruplar kategorisi
$Tr_k SimpGrp$	K-parçalanmış simplisel gruplar kategorisi

1. GİRİŞ

1.1. Çaprazlanmış Modül ve Morfizması

Çaprazlanmış modül kavramı ilk olarak 1949 yılında Whitehead tarafından tanımlanmıştır [1]. Çaprazlanmış modüller homotopi tipi 2 olan cebirsel modellerdir. Bir çaprazlanmış modül grupların bir genelleştirilmesi olarak değerlendirilebilir. Loday çaprazlanmış modüllere denk olan kategoriksel grupları tanımlamıştır [2]. Alp, çaprazlanmış modülleri ve cat-grupları GAP programına uygulamıştır [3].

C_1 ve C_2 iki grup ve $\partial : C_2 \to C_1$ bir grup homomorfizması olsun. C_1 in C_2 üzerindeki $x \in C_2$ ve $y \in C_1$ için x^y ile gösterilen etkisi ile birlikte, aşağıdaki şartlar sağlanırsa (C_2, C_1, ∂) yapısına bir çaprazlanmış modül denir.

$$\begin{aligned} &CM1- \quad \partial(x^y) = y^{-1}(\partial x)\, y \\ &CM2- \quad x^{\partial x'} = x'^{-1} x x' \end{aligned}$$

Burada $x, x' \in C_2$ ve $y \in C_1$ dir. İkinci şarta Peiffer özdeşliği denir. Eğer ∂ sadece birinci şartı sağlarsa yarı-çaprazlanmış modül denir. (C_2, C_1, ∂) den (C_2', C_1', ∂') ye bir çaprazlanmış modül morfizması $x \in C_2$ ve $y \in C_1$ için $\varphi : C_2 \to C_2'$ ve $\psi : C_1 \to C_1'$ olmak üzere $\varphi(x^y) = \psi(x)^{\varphi(y)}$ ve $\partial' \varphi(x) = \psi\ \partial(x)$ olacak şekilde grup morfizmaları çiftidir.

Şimdi birkaç çaprazlanmış modül örneği verilecektir.

Örnek 1.1.1. S , R grubunun bir normal alt grubu olmak üzere

$$\begin{aligned} İç: \quad & S \to R \\ & s \mapsto s \end{aligned}$$

içine homomorfizmi ve

$$\begin{aligned} R \times S &\to S \\ (r,s) &\mapsto {}^r s = r s r^{-1} \end{aligned}$$

eşlenik etkisi tanımlansın. Bu etkiyle birlikte $İç : S \to R$ homomorfizmi bir çaprazlanmış modüldür.

Örnek 1.1.2. S , ZR - modül olmak üzere

$$\begin{aligned} \partial = 1: \ & S \to R \\ & s \mapsto 1_R \end{aligned}$$

aşikar homomorfizmi ve

$$\begin{aligned} R \times S \ & \to \ S \\ (r, s) \ & \mapsto \ {}^{r}s = sr \end{aligned}$$

etkisiyle birlikte ∂ bir çaprazlanmış modüldür.

1.2. Komutatör ve Peiffer Çarpımı

$x, y \in G$ için

$$[x, y] = x^{-1} y^{-1} x y$$

ile bir G grubunda komütatörü ve $x, y \in C_2$ için

$$\langle x, y \rangle = x^{-1} y^{-1} x y^{\partial x}$$

ile $\partial : C_2 \to C_1$ yarı-çaprazlanmış modülünde Peiffer komütatörü gösterilir. Böylece $\forall x, y \in C_2$ için eğer $\langle x, y \rangle = 1$ ise $\partial : C_2 \to C_1$ yarı-çaprazlanmış modülü bir çaprazlanmış modüldür. Ayrıca, bir G grubunda n uzunluğundaki bütün $[x_1, ..., x_n]$ tekrarlı komütatörleri tarafından üretilen $\Gamma_n = \Gamma_n(G)$, G nin alt grubu olmak üzere

$$...\Gamma_{n+1} \subset \Gamma_n \subset ... \subset \Gamma_2 \subset \Gamma_1 = G$$

şeklinde bir dizi vardır. Burada $\Gamma_2(G)$, G nin komütatör alt grubudur. Aynı şekilde, bir $\partial : C_2 \to C_1$ yarı-çaprazlanmış modülünde

$$\dots P_{n+1} \subset P_n \subset ... \subset P_2 \subset C_2$$

şeklinde bir dizi vardır. Burada $P_n = P_n(G)$, C_2 deki n uzunluğundaki bütün $\langle x_1,...,x_n \rangle$ tekrarlı Peiffer komütatörleri tarafından üretilen C_2 nin normal alt grubudur.

1.3. Nil(2)-Modüller, Nil(2)-Gruplar

$Nil(2)-$*modüller* kategorisi ilk olarak Baues tarafından 1991 de tanımlanmıştır [4]. Baues bu tanımı kuadratik modül tanımını kullanarak yapmıştır.

Bir G grubu eğer $\Gamma_3(G)=1$ ve $\Gamma_2(G)\neq 1$ ise nilpotent sınıfı 2 dir. Bu durumda G ye bir $nil(2)-grubu$ denir. Bir $nil(2)-$*modülü* ise "nilpotency" şartı ile bir $\partial : C_2 \to C_1$ yarı-çaprazlanmış modülüdür. Bu şart $P_3(\partial)=1$ dir. Burada $P_3(\partial)$ uzunluğu 3 olan $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ Peiffer elemanları tarafından üretilir. Böylece bir $nil(2)-$*modülü*, $nil(2)-grubu$ nun genellemesi olarak değerlendirilebilir.

Her G grubu için , $G^{ab}= G/\Gamma_2(G)$ grubu G grubunun abelyenleştirilmesidir.

$$\partial^{cr} : C_2^{cr} = C_2 / P_2(\partial) \to C_1$$

çaprazlanmış modülü $\partial : C_2 \to C_1$ yarı-çaprazlanmış modülüneden elde edilen çaprazlanmış modüldür. Burada $P_2(\partial) = \langle C_2, C_2 \rangle$, C_2 nin Peiffer alt grubudur.

1.4. Simplisel Gruplar ve Moore Kompleksi

Simplisel grupların temel özellikleri May tarafından incelenmiştir [5]. Şimdi kısaca bir simplisel grubun tanımı verilsin.

$n \in N$ olmak üzere grupların bir $\{G_n\}$ ailesi göz önüne alınsın. Sırasıyla yüz ve dejenere operatörleri olarak adlandırılan

$$d_i^n : G_n \to G_{n-1} \quad (0 \leq i \leq n) \; n \neq 0$$

ve

$$s_i^n : G_n \to G_{n+1} \quad (0 \leq i \leq n)$$

homomorfizmleri için aşağıdaki şartlar sağlanırsa (G_n, d_i^n, s_i^n) üçlüsüne bir simplisel grup denir ve kısaca **G** ile gösterilir.

1. $d_i^{n-1} d_j^n = d_{j-1}^{n-1} d_i^n$, $(0 \le i < j \le n)$,
2. $s_i^{n+1} s_j^n = s_{j+1}^{n+1} s_i^n$, $(0 \le i \le j \le n)$,
3. $d_i^{n+1} s_j^n = s_{j-1}^{n-1} d_i^n$, $(0 \le i < j \le n)$,
4. $d_i^{n+1} s_j^n = id$, $(i = j \ veya \ i = j+1)$,
5. $d_i^{n+1} s_j^n = s_j^{n-1} d_{i-1}^n$, $(0 \le j < i-1 \le n)$.

Bir indirgenmiş simplisel grup ilk öğesi birim olan bir simplisel gruptur. Bir k-parçalanmış simplisel grup $\Delta_{\le k}^{op}$ dan Grp a bir funktordur. Simplisel gruplar kategorisi $SimpGrp$ ile ve k-parçalanmış simplisel gruplar kategorisi $Tr_k SimpGrp$ ile belirtilir. Bir simplisel grubun bir k-parçalanmışı ile bir $\boldsymbol{G}$ simplisel grubunda $> k$ sırasının boyutlarının yok sayılmasıyla $tr_k G$ k-parçalanmış simplisel grubunun alınacağı anlaşılır.

Bu; bir $\cos k_k : Tr_k SimpGrp \to SimpGrp$ sağ eşleniğine k-coskeleton funktoru,
bir $sk_k : Tr_k SimpGrp \to SimpGrp$ sol eşleniğine k-skeleton funktoru denen
$tr_k : SimpGrp \to Tr_k SimpGrp$ parçalanmış funktorunu verir [6].

G bir simplisel grup olsun.

$$NG_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} çek d_i^n$$

ve $\partial_n = d_n : NG_n \to NG_{n-1}$ homomorfizmler olmak üzere

$$\boldsymbol{NG} : \quad \cdots \to NG_2 \xrightarrow{d_2} NG_1 \xrightarrow{d_1} NG_0$$

kompleksine **G** simplisel grubunun Moore kompleksi denir.

G nin n inci $\pi_n(\boldsymbol{G})$ homotopi grubu **G** nin Moore kompleksinin n inci homolojisidir. Yani;

$$\pi_n(\boldsymbol{G}) \cong H_n(\boldsymbol{NG}, \partial)$$

$$= \bigcap_{i=0}^{n} çekd_i^n \,/\, d_{n+1}^{n+1}\left(\bigcap_{i=0}^{n} çekd_i^{n+1}\right)$$

dir.

NG, bir **G** simplisel grubunun Moore kompleksi olsun. Eğer her $\forall n \geq k+1$ için $NG_n = 1$ ise **NG** Moore kompleksine k uzunluğundadır denir. Moore kompleksinin boyutu k olan simplisel gruplar kategorisi $SimpGrp_{\leq k}$ şeklinde gösterilir.

1.5. Hyper Çaprazlanmış Kompleks Çiftleri

Aşağıda G_n in bir N_n normal alt grubu tanımlansın $[7]$, $[8]$. $S(n)$ de leksikografik sıralamaya uymasıyla $\alpha \cap \beta = \Phi \quad ve \quad \beta < \alpha$ olacak şekilde $S(n)$ deki (α, β) eleman çiftlerinden oluşan bir $P(n)$ kümesi tanımlansın. $\alpha = (i_r, ..., i_1)$, $\beta = (j_s, ..., j_1) \in S(n)$ dir. Gerekli olan

$$\{F_{\alpha,\beta} : NG_{n-\#\alpha} \times NG_{n-\#\beta} \to NG_n : (\alpha, \beta) \in P(n), n \geq 0\}$$

çiftleri diyagramda bileşik olarak verilecektir.

$$\begin{tikzcd}
NG_{n-\#\alpha} \times NG_{n-\#\beta} \arrow[r, "F_{\alpha,\beta}"] & NG_n \\
G_n \times G_n \arrow[u, "s_\alpha \times s_\beta"] \arrow[r, "\mu"'] & G_n \arrow[u, "p_1"']
\end{tikzcd}$$

Burada $p(x) = p_{n-1}...p_0(x)$ bileşik izdüşümleri tarafından

$s_\alpha = s_{i_r}, ..., s_{i_1} : NG_{n-\#\alpha} \to G_n$, $s_\beta = s_{j_s}, ..., s_{j_1} : NG_{n-\#\beta} \to G_n$, $p : G_n \to NG_n$ üretilir ve $j = 0,1,...,n-1$ olacak şekilde $p_j(z) = zs_j d_j(z)^{-1}$ ve $\mu : G_n \times G_n \to G_n$ komütatör dönüşümleri tarafından verilir ve $\#\alpha$, α kümesindeki elemanların sayısıdır. Aynı şekilde $\#\beta$ de β kümesindeki elemanların sayısıdır.

Böylece

$$F_{\alpha,\beta}(x_\alpha , y_\beta) = p\mu(s_\alpha \times s_\beta)(x_\alpha , y_\beta)$$
$$= p[s_\alpha (x_\alpha) , s_\beta (x_\beta)]$$

dir.

Tanım 1.5.1. [8]

$$F_{\alpha,\beta}(x_\alpha , y_\beta)$$

formundaki elemanlar tarafından üretilen G_n in normal alt grubu olsun. Burada $x_\alpha \in NG_{n-\#\alpha}$ ve $y_\beta \in NG_{n-\#\beta}$ dır.

Bu normal alt grubun $n = 2$ ve $n = 3$ için üreteç elemanlarının nasıl olduğu aşağıdaki örnekte kısaca verilsin.

Örnek 1.5.2. [8] $n = 2$ için, $\alpha = (1)$ $\beta = (0)$ ve $x, y \in NG_1 = çekd_0$ olduğunu kabul edelim. N_2 normal alt grubunun üreteç elemanının

$$F_{(1)(0)}(x, y) = p_1 p_0 ([s_0 x, s_1 y])$$
$$= p_1 [s_0 x, s_1 y]$$
$$= [s_0 x, s_1 y][s_1 y, s_1 x]$$

olduğu anlaşılır.

$n = 3$ için olası çiftler aşağıdadır.

$$F_{(1,0)(2)},\quad F_{(2,0)(1)},\ F_{(0)(2,1)},\ F_{(0)(2)},\ F_{(1)(2)},\ F_{(0)(1)}\quad .$$

Her $x_1 \in NG_1$, $y_2 \in NG_2$ için N_3 ün uygun üreteçleri:

$$F_{(1,0)(2)}(x_1 , y_2) = [s_1 s_0 x_1 , s_2 y_2][s_2 y_2 , s_2 s_0 x_1],$$
$$F_{(2,0)(1)}(x_1 , y_2) = [s_2 s_0 x_1 , s_1 y_2][s_1 y_2 , s_2 s_1 x_1][s_2 s_1 x_1 , s_2 y_2][s_2 y_2 , s_2 s_0 x_1]$$

ve her $x_2 \in NG_2$, $y_1 \in NG_1$ için

$$F_{(0)(2,1)}(x_2, y_1) = [s_0 x_2, s_2 s_1 y_1][s_2 s_1 y_1, s_1 x_2][s_2 x_2, s_2 s_1 y_1]$$

olurken her $x_2, y_2 \in NG_2$ için

$$F_{(0)(1)}(x_2, y_2) = [s_0 x_2, s_1 y_2][s_1 y_2, s_1 x_2][s_2 x_2, s_2 y_2]$$
$$F_{(0)(2)}(x_2, y_2) = [s_0 x_2, s_2 y_2]$$
$$F_{(1)(2)}(x_2, y_2) = [s_1 x_2, s_2 y_2][s_2 y_2, s_2 x_2]$$

dir.

Mutlu ve Porter de bu üreteç elemanlarının görüntülerine bakarak

$$\partial_2(NG_2) = [Çekd_0, Çekd_1]$$

olduğunu göstermişlerdir [8]. Bu eşitlik ilk olarak Arvasi tarafından değişmeli cebirler üzerinde gösterilmiştir. Ladra bu eşitliğin herhangi bir n için doğruluğunu operadlar üzerinde tanımlamış ve Arvasi; Mutlu ve Porter' in gruplar ve değişmeli cebirler üzerinde buldukları formülleri operadlar üzerinde genelleştirmiştir.

2. BRAİDED ÇAPRAZLANMIŞ VE İNDİRGENMİŞ KUADRATİK MODÜLLER

2.1. Braided Çaprazlanmış Modüller

Grupoidler üzerinde braided regüler çaprazlanmış modüller ilk olarak Brown ve Gilbert tarafından tanımlanmıştır. Ulualan doktora tezinde bu yapıya algebroidler üzerinde tanımlamış ve indirgenmiş hali olan değişmeli cebirler üzerinde braided çaprazlanmış modüller yapısını incelemiştir. Ulualan bu çalışmasında, braided çaprazlanmış modüller, indirgenmiş kuadratik modüller ve simplisel gruplar arasındaki ilişkileri vermiştir. Bu yapının indirgenmiş hali braided çaprazlanmış modüldür. Ulualan, braided çaprazlanmış modüller ile 1-bağlantılı cebirsel modellerin ilişkisini incelemiştir [9]. Arvasi, Koçak, ve Ulualan $F_{\alpha,\beta}$ fonksiyon çiftlerini kullanarak braided çaprazlanmış modüllerin, Moore kompleksinin boyutu 2 olan indirgenmiş simplisel gruplara denk olduğunu göstermişlerdir [10]. Şimdi gruplar üzerinde braided çaprazlanmış modül tanımı verilsin.

Tanim 2.1.1. [9]

$$\partial : C_2 \xrightarrow{\partial} C_1$$

bir çaprazlanmış modül olsun. Braiding dönüşümü olarak adlandırılan $\{-,-\} : C_1 \times C_1 \to C_2$ fonksiyonu için aşağıdaki şartlar sağlanırsa ∂ çaprazlanmış modülüne *braided çaprazlanmış modül* adı verilir.

Her $x, x', y, y' \in C_1$ ve $a, b \in C_2$ için

$$\begin{aligned}
&BC1 - \{x, yy'\} = \{x, y\}^{y'}\{x, y'\} \\
&BC2 - \{xx', y\} = \{x', y\}\{x, y\}^{x'} \\
&BC3 - \partial\{x, y\} = [y, x] \\
&BC4 - \{x, \partial a\} = a^{-1}a^{x} \\
&BC5 - \{\partial b, y\} = \left(b^{-1}\right)^{y} b.
\end{aligned}$$

Ayrıca, $a, b \in C_2$ için $BC4$ *ve* $BC5$ den

$$\begin{aligned}\{\partial a, \partial b\} &= a^{-1}a^{\partial b} \\ &= a^{-1}b^{-1}ab \ \ (\because \partial \text{ bir çaprazlanmış modüldür.}) \\ &= [b,a]\end{aligned}$$

olduğu açıktır.

Böylece braided çaprazlanmış modül aksiyomlarına $a,b \in C_2$ için

$$BC6 - \{\partial b, \partial a\} = [a,b]$$

şeklinde bir aksiyom eklenebilir. Bir braided çaprazlanmış modül morfizması braiding dönüşümlerle uyumlu bir çaprazlanmış modül morfizmasıdır. Braided çaprazlanmış modüller kategorisi BCM ile belirtilebilir.

2.2. Braided Çaprazlanmış Modüller ve İndirgenmiş Simplisel Gruplar

$$\boldsymbol{BCM \leftrightarrow \mathbf{Re}\,SimpGrp_{\leq 2}}$$

Bu bölümde braided çaprazlanmış modüller ve Moore kompleksinin boyutu < 2 olan indirgenmiş simplisel gruplar arasındaki ilişki verilecektir.

Önerme 2.2.1. G, **NG** Moore kompleksi ile bir indirgenmiş simplisel grup olsun. Bu durumda

$$NG_2 / \partial_3(NG_3 \cap D_3) \xrightarrow{\partial_2} NG_1$$

kompleksi gruplar için bir braided çaprazlanmış modüldür. Braiding dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\begin{aligned}\{\,,\}: NG_1 \times NG_1 &\to NG_2 / \partial_3(NG_3 \cap D_3) \\ (x,y) &\mapsto (s_0x^{-1}s_1y^{-1}s_0xs_1x^{-1}s_1ys_1x)\partial_3(NG_3 \cap D_3)\end{aligned}$$

Burada sağ taraf, NG_2 deki bir eleman tarafından gösterilen $NG_2 / \partial_3(NG_3 \cap D_3)$ de bir eş küme belirtir.

$NG_2/\partial_3(NG_3\cap D_3)$ de NG_1 in iki etkisi aşağıdaki gibidir.

1. $l^{\partial_1 m}$, etkisi $s_0(m)^{-1}ls_0m$ şeklindedir.

2. l^m **,** etkisi $s_1(m)^{-1}ls_1(m)$ şeklindedir.

İspat: Açıkça $\partial_2 : NG_2/\partial_3(NG_3\cap D_3)\to NG_1$ bir çaprazlanmış modüldür. Gerçekten de $x\in NG_1$ ve $y\in NG_2/\partial_3(NG_3\cap D_3)$ için

$$
\begin{aligned}
CM1-\quad & \partial_2\left(y^x\right)=\partial_2\left(s_1x^{-1}(y)s_1x\right)=x^{-1}\partial_2(y)x\\
CM2-\quad & y^{\partial_2 y'}=s_1d_2y'^{-1}ys_1d_2y'\\
& \equiv y'^{-1}yy' \quad \mathrm{mod}\ \partial_3\left(NG_3\cap D_3\right)
\end{aligned}
$$

olur. Şimdi braided çaprazlanmış modül aksiyomlarını sağladığı gösterilecektir.

Aşağıdaki hesaplamalarda karışıklık çıkmaması amacıyla üst çizgiler ihmal edilecektir.

$BC1: x_i\in NG_1,(i=0,1,2.)$ için

$$
\begin{aligned}
\{x_0,x_1x_2\} &= s_0x_0^{-1}s_1x_2^{-1}s_1x_1^{-1}s_0x_0s_1x_0^{-1}s_1x_1s_1x_2s_1x_0\\
&=\left(s_0x_0^{-1}s_1x_2^{-1}s_1x_1^{-1}s_0x_0s_1x_0^{-1}s_1x_1\right)\left(s_1x_0s_0x_0^{-1}s_1x_2s_0x_0\right)\\
&\quad\left(s_0x_0^{-1}s_1x_2^{-1}s_0x_0s_1x_0^{-1}\right)s_1x_2s_1x_0\\
&=\left(s_0x_0^{-1}s_1x_2^{-1}s_1x_1^{-1}s_0x_0s_1x_0^{-1}s_1x_1s_1x_0s_0x_0^{-1}s_1x_2s_0x_0\right)\{x_0,x_2\}\\
&=s_0x_0^{-1}s_1x_2^{-1}\left(s_0x_0s_0x_0^{-1}\right)\left(s_1x_1^{-1}s_0x_0s_1x_0^{-1}s_1x_1s_1x_0\right)s_0x_0^{-1}s_1x_2s_0x_0\{x_0,x_2\}\\
&=\left(s_0x_0^{-1}s_1x_2^{-1}s_0x_0\right)\left(s_0x_0^{-1}s_1x_1^{-1}s_0x_0s_1x_0^{-1}s_1x_1s_1x_0\right)s_0x_0^{-1}s_1x_2s_0x_0\{x_0,x_2\}\\
&=s_0x_0^{-1}s_1x_2^{-1}s_0x_0\left(\{x_0,x_1\}\right)s_0x_0^{-1}s_1x_2s_0x_0\{x_0,x_2\}\\
&=\left(s_1x_2^{-1}\right)^{\partial_1x_0}\left(\{x_0x_1\}\right)\left(s_1x_2\right)^{\partial_1x_0}\left(\{x_0,x_2\}\right)\\
&=\left(s_1x_2^{-1}\{x_0,x_1\}s_1x_2\right)\{x_0,x_2\}\quad\left(\partial_1\ \text{birim olduğundan}\right)\\
&=\{x_0,x_1\}^{x_2}\{x_0,x_2\}\quad\left((2)\,\text{etkisinden}\right)
\end{aligned}
$$

dir.

$BC2: y_i \in NG_1, (i = 0,1,2.)$ için

$$
\begin{aligned}
\{y_0 y_1, y_2\} &= s_0 y_1^{-1} s_0 y_0^{-1} s^1 y_2^{-1} s_0 y_0 s_0 y_1 s_1 y_1^{-1} s_1 y_0^{-1} s_1 y_2 s_1 y_0 s_1 y_1 \\
&= s_0 y_1^{-1} s_0 y_0^{-1} s^1 y_2^{-1} s_0 y_0 s_0 y_1 s_1 y_1^{-1} \left(s_0 y_0^{-1} s_1 y_2 s_0 y_0\right) \\
&\quad \left(s_0 y_0^{-1} s_1 y_2^{-1} s_0 y_0\right) s_1 y_0^{-1} s_1 y_2 s_1 y_0 s_1 y_1 \\
&= s_0 y_1^{-1} s_0 y_0^{-1} s^1 y_2^{-1} s_0 y_0 s_0 y_1 s_1 y_1^{-1} s_0 y_0^{-1} s_1 y_2 s_0 y_0 \\
&\quad \left(s_0 y_0^{-1} s_1 y_2^{-1} s_0 y_0 s_1 y_0^{-1} s_1 y_2 s_1 y_0\right) s_1 y_1 \\
&= s_0 y_1^{-1} s_0 y_0^{-1} s^1 y_2^{-1} s_0 y_0 s_0 y_1 s_1 y_1^{-1} s_0 y_0^{-1} s_1 y_2 s_0 y_0 \\
&\quad s_1 y_1 \left(s_1 y_1^{-1} \{y_{0,} y_2\} s_1 y_1\right) \\
&= s_0 y_1^{-1} \left(s_1 y_2^{-1}\right)^{\partial_1 y_0} s_0 y_1 s_1 y_1^{-1} \left(s_1 y_2\right)^{\partial_1 y_0} s_1 y_1 \{y_0, y_2\} \quad \text{(etkiden dolayı)} \\
&= s_0 y_1^{-1} s_1 y_2^{-1} s_0 y_1 s_1 y_1^{-1} s_1 y_2 s_1 y_1 \{y_0, y_2\}^{y_1} \quad (\partial_1 \text{ birim olduğundan}) \\
&= \{y_1, y_2\}\{y_0, y_2\}^{y_1}
\end{aligned}
$$

dir.

$$
\begin{aligned}
BC3: \overline{\partial_2}\{x, y\} &= d_2\left(s_0 x^{-1} s_1 y^{-1} s_0 x s_1 x^{-1} s_1 y s_1 x\right) \\
&= s_0 d_1\left(x^{-1}\right) y^{-1} s_0 d_1(x) x^{-1} y x \\
&= \left(y^{-1}\right)^{\partial_1 x} x^{-1} y x \quad \text{(etkiden dolayı)} \\
&= y^{-1} x^{-1} y x \quad (\partial_1 \text{ birim olduğundan}) \\
&= [\mathrm{y}, \mathrm{x}]
\end{aligned}
$$

dir.

$BC4: \alpha = (2,0), \beta = (1)$ için ve $x \in NG_2, y \in NG_1$ olduğundan

$$\partial_3\left(F_{(2,0)(1)}(y, x)\right) = [s_0 y, s_1 d_2 x][s_1 d_2 x, s_1 y][s_1 y, x][x, s_0 y] \in \partial_3(NG_3 \cap D_3),$$

$$
\begin{aligned}
\left\{y, \overline{\partial_2}(x)\right\} &= [s_0 y, s_1 d_2 x][s_1 d_2 x, s_1 y] \\
&\equiv [s_0 y, x][x, s_1 y] \ \text{ mod } \ \partial_3\left(NG_3 \cap D_3\right) \\
&= s_0 y^{-1} x^{-1} s_0 y x x^{-1} s_1 y^{-1} x s_1 y \\
&= s_0 y^{-1} x^{-1} s_0 y s_1 y^{-1} x s_1 y \\
&\equiv s_1 s_0 d_0 y^{-1} x^{-1} s_1 s_0 d_0 y s_1 y^{-1} x s_1 y \ \text{ mod } \ \partial_3\left(NG_3 \cap D_3\right) \\
&= \left(x^{-1}\right)^{\partial_1 y} x^{y} \\
&= x^{-1} x^{y} \quad \left(\partial_1 \text{ birim olduğundan}\right)
\end{aligned}
$$

dir.

BC5: $\alpha = (0), \beta = (2,1)$ için ve $x \in NG_2, y \in NG_1$ olduğundan

$$
\partial_3\left(F_{(0)(2,1)}(x, y)\right) = [s_0 d_2 x, s_1 y][s_1 y, s_1 d_2 x][x, s_1 y] \in \partial_3\left(NG_3 \cap D_3\right),
$$

$$
\begin{aligned}
\left\{\overline{\partial_2}(x), y\right\} &= s_0 d_2 x^{-1} s_1 y^{-1} s_0 d_2 x s_1 d_2 x^{-1} s_1 y s_1 d_2 x \\
&= [s_0 d_2 x, s_1 y][s_1 y, s_1 d_2 x] \\
&\equiv [s_1 y, x] \ \text{ mod } \ \partial_3\left(NG_3 \cap D_3\right) \\
&= s_1 y^{-1} x^{-1} s_1 y x \\
&= \left(x^{-1}\right)^{y} x
\end{aligned}
$$

dir.

Dolayısıyla braided çaprazlanmış modüllerin tüm aksiyomlarının sağlandığı gösterilmiş olur.

Teorem 2.2.2. Gruplar üzerinde braided çaprazlanmış modül yapısı ile Moore kompleksinin boyutu ≤ 2 olan indirgenmiş simplisel gruplar kategorisi denktir.

İspat: G, Moore kompleksinin boyutu ≤ 2 olan indirgenmiş bir simplisel grup olsun. Bir önceki önermede

$$
\partial_2 : NG_2 / \partial_3(NG_3 \cap D_3) \rightarrow NG_1
$$

homomorfizmasının her zaman bir braided çaprazlanmış modül olduğu gösterildi. Eğer ***G*** nin Moore kompleksi ≤ 2 ise $\partial_3(NG_3 \cap D_3) = 1$ olacağından

$$\partial_2 : NG_2 \to NG_1$$

bir braided çaprazlanmış modül olur. O halde Moore kompleksinin boyutu ≤ 2 olan indirgenmiş simplisel gruplar kategorisi $\operatorname{Re} SimpGrp$ den braided çaprazlanmış modüller kategorisi BCM ye

$$\theta : \operatorname{Re} SimpGrp \to BCM$$

şeklinde gösterilen bir funktor tanımlanmış olur.

Tersine $L \xrightarrow{\partial} M$ in bir braided çaprazlanmış modül olduğu kabul edilsin. M grubunun birim elemanı $1_M \in M$ olsun. $G_0 = \{1_M\}$ ve $G_1 = M$ olarak alınsın. Bu durumda $\{G_0, G_1\}$ birim homomorfizmaları ile 1-parçalanmış simplisel gruptur. M nin L üzerinde $m \in M$, $l \in L$ için

$$l^m = l\{m^{-1}, \partial l\}$$

şeklindeki etkisini kullanarak $L \propto M$ şeklinde bir yarı-direkt çarpım grubu oluşturulabilir. $L \propto M$ üzerindeki grup işlemi ise $(l, m)(l', m') \in N \propto M$ için

$$(l, m)(l', m') = (l l'^m, mm')$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $\{,\}$ braiding dönüşüm ve $m, m' \in M$, $l, l' \in L$ dir.

$m \in M$ nin $(l, m') \in L \propto M$ üzerindeki etkisi

$$(l, m')^m = \left(l\{m^{-1}, \partial(l)\}, mm'm^{-1}\right).$$

şeklinde tanımlansın. Bu etki iyi tanımlı bir grup etkisidir. Braiding dönüşümünün özellikleri kullanılarak iyi tanımlılık kolaylıkla gösterilebilir. Bu durumda $L \propto M$ deki M nin bu etkisinin kullanılmasıyla

$$(l, m_1, m_2)(l', m_1', m_2') = \left(ll'\{m_2^{-1} m_1^{-1}, \partial(l')\}, m_1 m_2 m_1' m_2^{-1}, m_2 m_2'\right).$$

işlemleriyle birlikte bir $G_2 = (L \propto M) \propto M$ yari-direkt çarpım grubu tanımlanabilir. G_2 nin bir grup olduğu gösterilsin. Ayrıca $(1_L, 1_M, 1_M)$, G_2 nin birim elemanıdır, çünkü

$$\begin{aligned}
(l, m_1, m_2).(1_L, 1_M, 1_M) &= \left(l1_M \left\{m_2^{-1} m_1^{-1}, \partial(1_L)\right\}, m_1 m_2 1_M\, m_2^{-1}, m_2 1_M\right) \\
&= \left(l\left\{m_2^{-1} m_1^{-1}, 1_M\right\}, m_1, m_2\right) \\
&= (l1_L, m_1, m_2) \\
&= (l, m_1, m_2)
\end{aligned}$$

dir. $(l, m_1, m_2) \in G_2$ nin tersi

$$(l, m_1, m_2)^{-1} = \left(l^{-1}\left\{m_1 m_2, \partial\left(l^{-1}\right)\right\}, m_2^{-1} m_1^{-1} m_2, m_2^{-1}\right)$$

dir.

Gerçekten de

$$\begin{aligned}
(l, m_1, m_2).(l, m_1, m_2)^{-1} &= (l, m_1, m_2)\left(l^{-1}\left\{m_1 m_2, \partial\left(l^{-1}\right)\right\}, m_2^{-1} m_1^{-1} m_2, m_2^{-1}\right) \\
&= (ll^{-1}\left\{m_1 m_2, \partial\left(l^{-1}\right)\right\}\left\{m_2^{-1} m_1^{-1}, \partial\left(l^{-1}\left\{m_1 m_2, \partial\left(l^{-1}\right)\right\}\right)\right\}, \\
&\quad m_1 m_2 m_2^{-1} m_1^{-1} m_2 m_2^{-1}, m_2 m_2^{-1}) \\
&= \left(l\left({}^{m_2^{-1} m_1^{-1}} l^{-1}\right)\left({}^{m_1 m_2} l\right)\left({}^{m_1 m_2}\left({}^{m_2^{-1} m_1^{-1}} l^{-1}\right)\right), 1_M, 1_M \right) \\
&= \left(ll^{-1}, 1_M, 1_M\right) \\
&= (1_L, 1_M, 1_M)
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca G_2 deki yukarıda tanımlanan işlem birleşme özelliğini sağlar. Ayrıca ,

$$\begin{aligned}
x_0 &= (l, m_1, m_2) \\
x_1 &= (l', m_1', m_2') \\
x_3 &= (l'', m''{}_1, m_2'')
\end{aligned}$$

için

$$
\begin{aligned}
x_0(x_1x_2) &= (l,m_1,m_2).\left[(l',m_1',m_2').(l'',m''_1,m_2'')\right] \\
&= (l,m_1,m_2).\left(l'\left({}^{m_1'm_2'}l''\right),m_1'm_2'm_1''(m_2')^{-1},m_2'm_2''\right) \\
&= \left(l\left({}^{m_1m_2}\left(l'{}^{m_1'm_2'}l''\right)\right),m_1m_2\left(m_1'm_2'm_1''(m_2')^{-1}\right)m_2{}^{-1},m_2m_2'm_2''\right) \\
&= \left(l\left({}^{m_1m_2}l'\right)\left({}^{m_1\,m_2\,m_1'm_2'}l''\right),\ m_1m_2m_1'm_2'm_1''(m_2')^{-1}m_2^{-1},m_2m_2'm_2''\right)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
(x_0x_1)x_2 &= \left[(l,m_1,m_2).(l',m_1',m_2')\right].(l'',m''_1,m_2'') \\
&= \left[\left(l\left({}^{m_1'm_2'}l'\right),m_1m_2m'_1m_2{}^{-1},m_2m_2'\right)\right].(l'',m_1'',m_2'') \\
&= \left[\left(l\left({}^{m_1m_2}l'\right)\left({}^{m_1m_2m_1'm_2^{-1}m_2m_2}l''\right),m_1m_2m_1'm_2{}^{-1}m_2m_2'm_1''(m_2m_2')^{-1},\ m_2m_2'm_2''\right)\right] \\
&= \left(l\left({}^{m_1m_2}l'\right)\left({}^{m_1\,m_2\,m_1'm_2'}l''\right),\ m_1m_2m_1'm_2'm''_1(m_2')^{-1}m_2{}^{-1},m_2m_2'm_2''\right)
\end{aligned}
$$

dir. Buradan

$$(x_0x_1)x_2 = x_0(x_1x_2)$$

olduğu elde edilir. G_2 ve G_1 arasında tanımlı

$$
\begin{aligned}
d_0^2(l,m_1,m_2) &= m_1 \\
d_1^2(l,m_1,m_2) &= m_1m_2 \\
d_2^2(l,m_1,m_2) &= m_2 \\
s_0^1(m_1) &= (1_L,m_1,1_M) \\
s_1^1(m_1) &= (1_L,1_M,m_1)
\end{aligned}
$$

homomorfizmalar mevcuttur. Bu dönüşümler simplisel özdeşliklerini sağlarlar.

Böylece

$$\mathbf{G} = \{G_0,G_1,G_2\}$$

2-parçalanmış simplisel gruplar kategorisinden simplisel gruplar kategorisine bir $\cos k_2$ funktorunun var olduğundan daha önce bahsedilmişti. $\boldsymbol{G} = \{G_0,G_1,G_2\}$ olmak üzere

$\mathbf{G}' = Cosk_2\{G_0, G_1, G_2\}$ olsun. $\mathbf{G}'$ indirgenmiş simplisel grubun Moore kompleksinin boyutunun ≤ 2 olduğunu gösterilmelidir. Bunun için elde edilen $\boldsymbol{G} = \{G_0, G_1, G_2\}$ simplisel grubu için $F_{\alpha,\beta}$ fonksiyon çiftlerini kullanarak $\partial_3(NG_3 \cap D_3) = 1$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Mutlu ve Porter' in

$$\begin{aligned}\partial_3(NG_3 \cap D_3) = {} & [çekd_2, çekd_0 \cap çekd_1][çekd_1, çekd_0 \cap çekd_2][çekd_1 \cap çekd_2, çekd_0] \\ & [çekd_0 \cap çekd_2, çekd_0 \cap çekd_1][çekd_0 \cap çekd_2, çekd_1 \cap çekd_2] \\ & [çekd_0 \cap çekd_1, çekd_1 \cap çekd_2]\end{aligned}$$

eşitliğini gösterdiği biliniyor [8]. Buna göre adım adım elemanlar alarak bu elemanların çarpımının birim olduğu gösterilecektir.

Adım 1 : $\alpha = (1,0)$, $\beta = (2)$ ve $x = m \in NG_1$ için $y = (l, 1_M, 1_M)$ iken $y = çekd_0 \cap çekd_1$ dır. Bu durumda;

$$\begin{aligned}\partial_3(F_{(1,0)(2)}(x,y)) &= [s_1 s_0 d_1 m, (l, 1_M, 1_M)][(l, 1_M, 1_M), s_0 m] \\ &= (l, 1_M, 1_M)(l, m, 1_M)(l^{-1}, 1_M, 1_M)(l, m^{-1}, 1_M) \\ &= (l, m, 1_M)(l^{-1}, m^{-1}, 1_M) \\ &= ({}^{m}l\, l^{-1}, 1_M, 1_M) \in [çekd_2, çekd_0 \cap çekd_1]\end{aligned}$$

dir.

Adım 2 : $\alpha = (2,0)$, $\beta = (1)$ ve $x = m \in NG_1$ için $y = (l, 1_M, 1_M)$ iken $y = çekd_0 \cap çekd_1$ dır. Bu durumda;

$$\begin{aligned}\partial_3(F_{(2,0)(1)}(x,y)) &= [s_0 m, s_1 d_2(l, 1_M, 1_M)][s_1 d_2(l, 1_M, 1_M), s_1 m][s_1 m, (l, 1_M, 1_M)][(l, 1_M, 1_M), s_0 m] \\ &= ({}^{m}l, 1_M, m)(1_L, m, m^{-1})(l^{-1}, m^{-1}, 1_M) \\ &= ({}^{m}l, 1_M, m)(l^{-1}, 1_M, m^{-1}) \\ &= (1_L, 1_M, 1_M) \in [çekd_1, çekd_0 \cap çekd_2]\end{aligned}$$

dir.

Adım 3 : $\alpha = (2,1)$, $\beta = (0)$ ve $x = m \in NG_1$ için $y = (l, 1_M, 1_M) \in NG_2$ dır. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
\partial_3\left(F_{(2,1)(0)}(x,y)\right) &= [s_1 m, s_0 d_2(l,1_M,1_M)][s_1 d_2(l,1_M,1_M), s_1 m][s_1 m,(l,1_M,1_M)] \\
&= (1_L, 1_M, m)(l, 1_M, 1_M)\left(1_L, 1_M, m^{-1}\right)\left(l^{-1}, 1_M, 1_M\right) \\
&= \left({}^{m}l, 1_M, m\right)\left({}^{m^{-1}}l^{-1}, 1_M, m^{-1}\right) \\
&= \left({}^{m}ll^{-1}, 1_M, 1_M\right) \in [çekd_1 \cap çekd_2, çekd_0]
\end{aligned}$$

dir.

Adım 4 : $\alpha = (2)$, $\beta = (1)$ için NG_2 nin her elemanı $x = (l', 1_M, 1_M)$, $y = (l, 1_M, 1_M)$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
\partial_3\left(F_{(2)(1)}(x,y)\right) &= [x, s_1 d_2 y][y, x] \\
&= (l, 1_M, 1_M)(l', 1_M, 1_M)\left(l^{-1}, 1_M, 1_M\right)\left(l'^{-1}, 1_M, 1_M\right) \\
&= \left(ll'l^{-1}l'^{-1}, 1_M, 1_M\right) \in [çekd_0 \cap çekd_2, çekd_0 \cap çekd_1]
\end{aligned}$$

dir.

Adım 5 : $\alpha = (2)$, $\beta = (0)$ için NG_2 nin her elemanı $x = (l', 1_M, 1_M)$, $y = (l, 1_M, 1_M)$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
\partial_3\left(F_{(2)(0)}(x,y)\right) &= [x, s_0 d_2 y] \\
&= (l', 1_M, 1_M)\left(l'^{-1}, 1_M, 1_M\right) \\
&= (1_L, 1_M, 1_M) \in [çekd_0 \cap çekd_1, çekd_1 \cap çekd_2]
\end{aligned}$$

dir.

Adım 6 : $\alpha = (1)$, $\beta = (0)$ için NG_2 nin her elemanı $x = (l', 1_M, 1_M)$, $y = (l, 1_M, 1_M)$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
\partial_3\left(F_{(1)(0)}(x,y)\right) &= [s_1 d_2 x, s_0 d_2 y][s_1 d_2 y, s_1 d_2 x][x, y] \\
&= (l', 1_M, 1_M)(l, 1_M, 1_M)\left(l'^{-1}, 1_M, 1_M\right)\left(l^{-1}, 1_M, 1_M\right) \\
&= \left(l'll'^{-1}l^{-1}, 1_M, 1_M\right) \in [çekd_0 \cap çekd_1, çekd_1 \cap çekd_2]
\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}\partial_3(NG_3) = {} & [çekd_2, çekd_0 \cap çekd_1][çekd_1, çekd_0 \cap çekd_2][çekd_1 \cap çekd_2, çekd_0] \\ & [çekd_0 \cap çekd_2, çekd_0 \cap çekd_1][çekd_0 \cap çekd_2, çekd_1 \cap çekd_2] \\ & [çekd_0 \cap çekd_1, çekd_1 \cap çekd_2]\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $\tau \in \partial_3(NG_3)$ için

$$\begin{aligned}\tau &= \left(l^m l^{-1}, 1_M, 1_M\right)\left(1_L, 1_M, 1_M\right)\left({}^m l l^{-1}, 1_M, 1_M\right) \\ &= \left(l l' l^{-1} l'^{-1}, 1_M, 1_M\right)\left(1_L, 1_M, 1_M\right)\left(l' l l'^{-1} l^{-1}, 1_M, 1_M\right) \\ &= \left(l^m \left(l^{-1}\right)^m l l^{-1}, 1_M, 1_M\right)\left(l l' l^{-1} l'^{-1} l' l l'^{-1} l^{-1}, 1_M, 1_M\right) \\ &= \left(1_L, 1_M, 1_M\right)\end{aligned}$$

dir. Bu ise $\partial_3(NG_3) = 1$ olması demektir. Yani; elde edilen simplisel grubun Moore kompleksinin boyutu < 2 dir.

2.3. İndirgenmiş Kuadratik Modüller

Kuadratik modül kavramı ilk olarak Baues tarafından 1991 de tanımlanmıştır $[4]$. Arvasi ve Ulualan kuadratik modülleri ve bu modüllerin simplisel gruplar, 2-çaprazlanmış modüller ve çaprazlanmış kareler ile ilişkilerini incelemiştir $[11]$.

İndirgenmiş kuadratik modül kavramı yine Baues tarafından 1-bağlantılı 3-tip cebirsel bir model olarak tanımlanmıştır $[4]$.

Ulualan indirgenmiş simplisel gruplar kategorisinden $F_{\alpha,\beta}$ fonksiyon çiftlerini kullanarak, indirgenmiş kuadrtaik modüllere bir funktor oluşturmuştur $[12]$.

Tanım 2.3.1. $[4]$ M ve N bir grup $\partial : M \to N$ bir grup homomorfizması olmak üzere grup homomorfizmalarının

$$\begin{tikzcd} & N^{ab} \otimes N^{ab} \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] \\ M \arrow[r, "\partial"'] & N \end{tikzcd}$$

şeklindeki diyagramı göz önüne alınsın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa bu diyagrama bir indirgenmiş kuadratik modül denir ve kısaca (ω,∂) ile gösterilir. Burada $w: N^{ab}\otimes N^{ab}\to N$ komütatör dönüşümüdür.

1. N grubu bir $nil(2)-grubu$ ve $N\to N^{ab}$, $x\mapsto \bar{x}$ ile tanımlı bir bölüm dönüşümüdür.

2. $x,y\in N$ için $\partial\omega = w$ eşitliği sağlanır. Yani $x,y\in N$ için

$$\partial\omega\left(\bar{x}\otimes\bar{y}\right)=w\left(\bar{x}\otimes\bar{y}\right)=[x,y]$$

dir.

3. $a\in M$ ve $x\in N$ için;

$$1=\omega\left(\left(\overline{\partial a}\otimes\bar{x}\right)\left(\bar{x}\otimes\overline{\partial a}\right)\right)$$

4. $a,b\in M$ için;

$$\omega\left(\overline{\partial a}\otimes\overline{\partial b}\right)=[a,b]\ .$$

İndirgenmiş kuadratik modüller arasındaki bir $(l,m):(\omega,\partial)\to(\omega',\partial')$ morfizmi $m\partial=\partial' l$ ve $l\omega=\omega'$ ile $l:M\to M'$, $m:N\to N'$ homomorfizmalar çiftidir. Öyle ki kuadratik dönüşüm $\omega: N^{ab}\otimes N^{ab}\to M$ fonksiyonu ile uyumludur.

Yukarıda objeleri ve morfizimleri verilen kategori RQM ile gösterilecektir.

2.4. Braided Çaparazlanmış Modüller ve İndirgenmiş Kuadratik Modüller

$$\boldsymbol{BCM\to RQM}$$

Ulualan, braided çaprazlanmış modüllerden indirgenmiş kuadratik modüllere bir funktor oluşturmuştur [9]. Bu bölümde bu funktorun homotopi yapılarını koruduğu gösterilecektir. İlk olarak bahsedilen funktorun oluşturulması aşağıdaki önermede verilecektir.

Önerme 2.4.1. Gruplarda braided çaprazlanmış modüller kategorisinden indirgenmiş kuadratik modüllere bir funktor vardır.

İspat : $$\partial : C_2 \to C_1$$

bir braided çaprazlanmış modül olsun. Bu yapıdan bir indirgenmiş kuadratik modül kurulabilir.

$$N = C_1 / \Gamma_3(C_1)$$

bir bölüm grubu olsun. O zaman N bir $nil(2)-grubu$ olur. Çünkü üçlü komütatör çarpımları birimdir.

$$q_1 : C_1 \to N$$

bir bölüm dönüşümü olsun. $C = N^{ab}$ ve

$$\begin{aligned} N &\to C \\ q_1 x &\mapsto \overline{q_1 x} \end{aligned}$$

bölüm dönüşümü olsun. $x, y, z \in C_1$ için

$$\{[x,y],z\} \text{ ve } \{x,[y,z]\}$$

formunun elemanları tarafından üretilen C_2 nin P alt grubu dikkate alınır. Burada $\{-,-\}$ braiding dönüşümüdür. $\Gamma_2(C_1)$ de $[x,y]$ ve $[y,z]$ elemanları ve $\{-,-\}$ braiding dönüşümü olduğuna göre P nin C_2 nin bir normal alt grubu olduğu gösterilebilir. Şimdi $M = C_2 / P$ bölüm grubunu ve $q_2 : C_2 \to M$ bölüm dönüşümü dikkate alınsın. Her $x \in C_1$ ve $[y,z] \in \Gamma_2(C_1)$ ve $\{x,[y,z]\} \in P$ için $BC3$ den $\partial\{x,[y,z]\} = [x,[y,z]] \in \Gamma_3(C_1)$ yazılabilir. Aynı şekilde $[x,y] \in \Gamma_2(C_1)$ ve $z \in C_1$ ve $\{[x,y],z\} \in P$ için $\partial\{[x,y],z\} = [[x,y],z] \in \Gamma_3(C_1)$ yazılabilir. Böylece $\partial(P) \subseteq \Gamma_3(C_1)$ elde edilir. O halde $aP \in M$ için $\overline{\partial}(aP) = (\partial a)\Gamma_3(C_1)$ ile verilen iyi tanımlanmış $\overline{\partial} : M \to N$ homomorfizması elde edilir. Gerçekten eğer $aP = bP$ ise $ab^{-1} \in P$ ve buradan $\partial(ab^{-1}) \in \partial(P)$ olup,

$\partial(P) \subseteq \Gamma_3(C_1)$ olduğundan $\partial(ab^{-1}) \in \Gamma_3(C_1)$ dir ve ∂ bir homomorfizma olduğundan $\partial a \partial b^{-1} \in \Gamma_3(C_1)$ olup,

$$(\partial a)\Gamma_3(C_1) = (\partial b)\Gamma_3(C_1)$$

elde edilir. Yani $aP = bP$ iken $\bar{\partial}(aP) = \bar{\partial}(bP)$ elde edilir.

Böylece aşağıdaki değişmeli diyagram oluşturulabilir.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\bar{\partial}"] & N \\ C_2 \arrow[u, "q_2"] \arrow[r, "\partial"'] & C_1 \arrow[u, "q_1"'] \end{tikzcd}$$

Burada

$$\begin{array}{rcl} w : C \otimes C & \to & N \\ \overline{q_1 x} \otimes \overline{q_1 y} & \mapsto & [x, y] \end{array}$$

komütatör dönüşüm olsun. $\omega(\overline{q_1 x} \otimes \overline{q_1 y}) = q_2\{y, x\}$ ile verilen

$$\omega : C \otimes C \to M$$

braiding dönüşümüyle, kuadratik dönüşümü tanımlanabilir. Burada $\{-,-\}$ braiding dönüşümdür. Bu nedenle

$$\begin{tikzcd} & C \otimes C \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] \\ M \arrow[r, "\bar{\partial}"'] & N \end{tikzcd}$$

bir indirgenmiş kuadratik modül olur. Şimdi indirgenmiş kuadratik modüllerin tüm aksiyomlarını sağladığı gösterilecektir.

1. $x\Gamma_3(C_1)$, $y\Gamma_3(C_1)$, $z\Gamma_3(C_1) \in C_1/\Gamma_3(C_1) = N$ elemanları için

$$\begin{aligned}[[x\Gamma_3(C_1), y\Gamma_3(C_1)], z\Gamma_3(C_1)] &= [[x,y],z]\Gamma_3(C_1) \\ &= \Gamma_3(C_1) \quad (\because [[x,y],z] \in \Gamma_3(C_1))\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}[x\Gamma_3(C_1),[y\Gamma_3(C_1), z\Gamma_3(C_1)]] &= [x,[y,z]]\Gamma_3(C_1) \\ &= \Gamma_3(C_1) \quad (\because [x,[y,z]] \in \Gamma_3(C_1))\end{aligned}$$

olduğuna göre N grubu bir $nil(2) - grubu$ dur.

2. $\overline{q_1 x}$, $\overline{q_1 y} \in C$ için

$$\begin{aligned}\bar{\partial}\omega\left(\overline{q_1 x} \otimes \overline{q_1 y}\right) &= \bar{\partial}\, q_2\{y,x\} \\ &= q_1\partial\{y,x\} \\ &= q_1([x,y]) \quad (BC3\ ile) \\ &= [q_1 x, q_1 y]\end{aligned}$$

elde edilir.

3. $q_2 a \in M$ ve $q_1 x \in N$ için

$$\begin{aligned}\omega([\bar{\partial} q_2 a] \otimes [q_1 x][q_1 x] \otimes [\bar{\partial} q_2 a]) &= q_2(\{x,\partial a\}\{\partial a, x\}) \\ &= q_2(1) \quad (BC4\ ve\ BC5\ ile)\end{aligned}$$

elde edilir.

4. $q_2 a , q_2 b \in M$ için

$$\begin{aligned}\omega\left(\overline{\bar{\partial} q_2 a} \otimes \overline{\bar{\partial} q_2 b}\right) &= \omega\left(\overline{q_1 \partial a} \otimes \overline{q_1 \partial b}\right) \\ &= q_2\{\partial b, \partial a\} \\ &= q_2[a,b] \quad (BC6\ ile) \\ &= [q_2 a, q_2 b]\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece indirgenmiş kuadratik modüllerin tüm aksiyomları sağlanır. Braided çaprazlanmış modüller kategorisinden indirgenmiş kuadratik modüllere bir funktor tanımlanabilir:

$$\Delta : BCM \to RQM$$

Şimdi yukarıda tanımlanan Δ funktorunun homotopi yapısını koruduğu gösterilecektir.

$$\partial_2 : C_2 \to C_1$$

braided çaprazlanmış modülünün homotopi grupları

$$\pi_1(\partial_2) = C_1 / I_m(\partial_2)\ ,\ \pi_2(\partial_2) = Çek\partial_2 \text{ ve } \pi'_n(\omega) = 1\ (n \geq 3)$$

şeklindedir. Bu braided çaprazlanmış modülünden elde edilen indirgenmiş kuadratik modülün homotopi grupları ise

$$\pi'_1(\omega) = N / I_m\left(\overline{\partial_2}\right),\ \pi'_2(\omega) = Çek\overline{\partial_2} \text{ ve } \pi'_n(\omega) = 1\ (n \geq 3)$$

şeklindedir. Şimdi her $n \geq 0$ için $\pi_n \cong \pi'_n$ olduğu gösterilsin.

Açıkça $\partial_2(\Gamma_3 C_1) = 1$ olduğundan

$$\pi'_1(\omega) = N / I_m\left(\overline{\partial_2}\right) = \left(C_1 / \Gamma_3(C_1)\right) / I_m\left(\overline{\partial_2}\right) \cong C_1 / I_m(\partial_2) = \pi_1(\partial_2)$$

olur.

Yukarıdaki önermede $\overline{\partial_2}(P) \subseteq \Gamma_3(C_1)$ olduğu gösterilmişti. Dolayısıyla $Çek\overline{\partial_2} \cong Çek\partial_2$ yani $\pi'_2(\omega) \cong \pi_2(\partial_2)$ olur.

2.5. İndirgenmiş Simplisel Gruplar ve Kuadratik Modüller

$$\mathbf{Re}\,\boldsymbol{SimpGrp_{\leq 2} \leftrightarrow RQM}$$

Bu bölümde $F_{\alpha,\beta}$ çiftlerini kullanarak, indirgenmiş simplisel gruplar ile indirgenmiş kuadratik modüller arasındaki ilişki kısaca verilecektir $[12]$.

Teorem 2.5.1. İndirgenmiş kuadratik modüller kategorisi RQM ile Moore kompleksinin boyutu ≤ 2 olan indirgenmiş simplisel gruplar kategorisi $\mathrm{Re}\,SimpGrp_{\leq 2}$ denktir.

İspat: **G** indirgenmiş simplisel grup olsun. **NG** bu simplisel grubun Moore komleksi olsun. O zaman

$$G_0 = NG_0 = \{1\}$$

dir. $x, y \in NG_1$ için üçlü komütatörler dikkate alınsın ve Γ_3 , üçlü komütatör çarpımları tarafından üretilen NG_1 in alt grubu olsun. O zaman $M = NG_1 / \Gamma_3$ bir $nil(2) - grubu$ olur. Γ_3' , s_0 *ve* s_1 dejenere operatörleri altında yukarıdaki üçlü komütatör çarpımlarının imajiner elemanları tarafından üretilen $NG_2 / \partial_3(NG_3 \cap D_3)$ ın alt grubu olsun. $L = \left(NG_2 / \partial_3(NG_3 \cap D_3)\right) / \Gamma_3'$ olsun. Bu durumda,

$$q_1 : NG_1 \to M = NG_1 / \Gamma_3$$

ve

$$q_2 : NG_2 / \partial_3(NG_3 \cap D_3) \to L = NG_2 / \partial_3(NG_3 \cap D_3) / \Gamma_3'$$

bölüm dönüşümleri tanımlanabilir. Bu durumda, $NG_2 / \partial_3(NG_3 \cap D_3)$ den NG_1 e $\overline{\partial_2}$ yüz operatörü için,

$$\overline{\partial_2} q_2 = q_1 d_2$$

elde edilir. Kuadratik dönüşüm aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{array}{lll}\omega : (NG_1/\Gamma_3)^{ab} \otimes (NG_1/\Gamma_3)^{ab} & \to & (NG_2/\partial_3(NG_3 \cap D_3))/\Gamma_3' \\ \{q_1x\} \otimes \{q_1y\} & \mapsto & \left(\overline{s_0y^{-1}s_1x^{-1}s_0ys_1y^{-1}s_1xs_1y}\right).\end{array}$$

Burada $x, y \in NG_1$, $q_1x, q_1y \in NG_1/\Gamma_3$ ve $\{q_1x\} \otimes \{q_1y\} \in (NG_1/\Gamma_3)^{ab}$ dir. Burada sağ taraf NG_2 deki bir eleman tarafından gösterilen $NG_2/\partial_3(NG_3 \cap D_3)$ de eş küme belirtir. Bu nedenle, ortaya koyulan yukarıdaki kuadratik dönüşümle aşağıdaki diyagram bir indirgenmiş kuadratik modüldür.

$$\begin{tikzcd} & (NG_1/\Gamma_3)^{ab} \otimes (NG_1/\Gamma_3)^{ab} \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] \\ (NG_2/\partial_3(NG_3 \cap D_3))/\Gamma_3' \arrow[r, "\overline{\partial_2}"'] & NG_1/\Gamma_3 \end{tikzcd}$$

İndirgenmiş kuadratik modüllerin bütün aksiyomları sağladığı aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$RQM1$- $M = NG_1/\Gamma_3$ bir $nil(2)-grubu$ dur. Çünkü M deki üçlü komütatörler birimdir. (Bkz Sayfa 22, 1. aksiyom)

$RQM2$- $\overline{\partial_2}\omega = w$ bileşkesi komütatör dönüşümdür. Çünkü , $q_1x, q_1y \in M = NG_1/\Gamma_3$ için

$$\begin{aligned}\overline{\partial_2}\omega(\{q_1x\} \otimes \{q_1y\}) &= \overline{\partial_2}q_2\left(s_0y^{-1}s_1x^{-1}s_0ys_1y^{-1}s_1xs_1y\right) \\ &= q_1d_2\left(s_0y^{-1}s_1x^{-1}s_0ys_1y^{-1}s_1xs_1y\right) \\ &= q_1\left(s_0d_1\left(y^{-1}\right)x^{-1}s_0d_1(y)y^{-1}xy\right) \\ &= q_1\left(\left(x^{-1}\right)^{\partial_1 y}y^{-1}xy\right) \qquad (etki\ olduğundan) \\ &= q_1x^{-1}q_1y^{-1}q_1xq_1y \qquad (\partial_1 = birim\ olduğundan) \\ &= [q_1x, q_1y].\end{aligned}$$

$RQM3$- $\alpha = (2,0)$, $\beta = (1)$ $ve\ x \in NG_2$, $y \in NG_1$ için

$$\partial_3\left(F_{(2,0)(1)}(y,x)\right) = [s_0y, s_1d_2x][s_1d_2x, s_1y][s_1y, x][x, s_0y] \in \partial_3(NG_3 \cap D_3) \text{ den,}$$

$$
\begin{aligned}
\omega\{q_1 y\}\otimes\{\overline{\partial}_2 q_2 x\} &= \omega\{q_1 y\}\otimes(q_1\partial_2 x)\\
&= q_2\left([s_0 y, s_1 d_2 x][s_1 d_2 x, s_1 y]\right)\\
&\equiv q_2\left([s_0 y, x][x, s_1 y]\right) \bmod \partial_3(NG_3 \cap D_3)\\
&= q_2\left(s_0 y^{-1} x^{-1} s_0 y x x^{-1}\, s_1 y^{-1} x s_1 y\right)\\
&= q_2\left(s_0 y^{-1} x^{-1} s_0 y\, s_1 y^{-1} x s_1 y\right)\\
&\equiv q_2\left(s_1 s_0 d_0 y^{-1} x^{-1} s_1 s_0 d_0 y s_1 y^{-1} x s_1 y\right) \bmod \partial_3(NG_3 \cap D_3)\\
&= \left(q_2 x^{-1}\right)^{\partial_1 y} q_2\left(x^y\right)\\
&= q_2 x^{-1} q_2\left(x^y\right). \quad \left(\partial_1 = birim\ olduğundan\right)
\end{aligned}
$$

ve $\alpha=(0)$, $\beta=(2,1)$ $ve\ x\in NG_2$, $y\in NG_1$ için

$\partial_3\left(F_{(0)(2,1)}(x,y)\right)=[s_0 d_2 x, s_1 y][s_1 y, s_1 d_2 x][x, s_1 y]\in \partial_3(NG_3\cap D_3)$ den,

$$
\begin{aligned}
\omega\{\overline{\partial}_2 q_2 x\}\otimes\{q_1 y\} &= \omega\{q_1\partial_2 x\}\otimes\{q_1 y\}\\
&= q_2\left(s_0 d_2 x^{-1} s_1 y^{-1} s_0 d_2 x s_1 d_2 x^{-1} s_1 y s_1 d_2 x\right)\\
&= q_2\left([s_0 d_2 x, s_1 y][s_1 y, s_1 d_2 x]\right)\\
&\equiv q_2\left([s_1 y, x]\right) \bmod \partial_3(NG_3\cap D_3)\\
&= q_2\left(s_1 y^{-1} x^{-1} s_1 y x\right)\\
&= q_2\left(\left((x^{-1})^y\right) q_2 x\right).
\end{aligned}
$$

Böylece $q_2 x\in L\ ve\ q_1 y\in M$ için

$$
\begin{aligned}
\omega\{\overline{\partial}_2 q_2 x\}\otimes\{q_1 y\}\{q_1 y\}\otimes\{\overline{\partial}_2 q_2 x\} &= \left(q_2\left((x^{-1})^y\right) q_2 x q_2 x^{-1} q_2\left(x^y\right)\right)\\
&= q_2\left(\left((x^{-1})^y\right) x x^{-1}\left(x^y\right)\right)\\
&= q_2(1)\\
&= [1]
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$RQM\,4$- $q_2 a$, $q_2 b\in L\ ve$ $\alpha=(1)$, $\beta=(0)$ için

$\partial_3\left(F_{(0)(1)}(a,b)\right)=[s_0 d_2 b, s_1 d_2 a][s_1 d_2 a, s_1 d_2 b][b,a]\in \partial_3(NG_3\cap D_3)$

$$\begin{aligned}
\omega\left(\left\{\overline{\partial_2} q_2 a\right\} \otimes \left\{\overline{\partial_2} q_2 b\right\}\right) &= \omega\left(\{q_1 \partial_2 a\} \otimes \{q_1 \partial_2 b\}\right) \\
&= q_2\left([s_0 d_2 b, s_1 d_2 a][s_1 d_2 a, s_1 d_2 b]\right) \\
&= q_2\left(s_0 d_2 b^{-1} s_1 d_2 a^{-1} s_0 d_2 b s_1 d_2 b^{-1} s_1 d_2 a s_1 d_2 b\right) \\
&\equiv q_2\left(s_0 d_2 b^{-1} a^{-1} (s_0 d_2 b) b^{-1} a b\right) \quad \left(\mathrm{mod}\ \partial_3 (NG_3 \cap D_3)\right) \\
&\equiv q_2\left(s_1 s_0 d_1 d_2 \left(b^{-1}\right) a^{-1} s_1 s_0 d_1 d_2 (b) b^{-1} a b\right) \\
&= q_2\left(a^{-1} b^{-1} a b\right) \qquad (\mathit{etki\ olduğundan}) \\
&= q_2 a^{-1} q_2 b^{-1} q_2 a q_2 b \qquad (\partial_1 = \mathit{birim\ olduğundan}) \\
&= [q_2 a, q_2 b].
\end{aligned}$$

Bu şekilde indirgenmiş kuadratik modülün bütün aksiyomlarının sağlandığı gösterilmiş olur.

Böylece Moore kompleksinin boyutu ≤ 2 olan indirgenmiş simplisel gruplardan indirgenmiş kuadratik modüllere

$$\Theta : \operatorname{Re} SimpGrp_{\leq 2} \to RQM$$

şeklinde gösterilecek bir funktor tanımlanabilir.

Tersine kabul edelim ki;

$$\begin{tikzcd}
& M^{ab} \otimes M^{ab} \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] \\
L \arrow[r, "\partial"'] & M
\end{tikzcd}$$

gruplarda indirgenmiş kuadratik modül olsun. M grubunun birim elemanı $1_M \in M$ olsun.

$G_0 = \{1_M\}\ ve\ G_1 = M$ tanımlansın. Bu durumda $\{G_0, G_1\}$ birim homomorfizmalarıyla

1-parçalanmış simplisel gruptur. $l \in L$ deki $m \in M$ nin bir etkisi

$$l^m = l\omega\{\partial(l)\} \otimes \{m\}$$

ile verilir. Burada ω kuadratik dönüşümdür. Bu etki iyi tanımlı bir grup etkisidir. L deki M nin bu etkisini kullanarak $m, m' \in M$, $l, l' \in L$ için

$$(l,m)(l',m') = (ll'\omega\{\partial(l')\}\otimes\{m\}, mm')$$

grup işlemiyle $L \propto M$ yarı-direkt çarpımı oluşturulabilir. $(l,m') \in L \propto M$ deki $m \in M$ nin bir etkisi

$$(l,m')^{m} = (l\omega\{\partial(l)\}\otimes\{m\}, mm'm^{-1})$$

ile verilir. Benzer şekilde bu etki iyi tanımlıdır. O zaman $L \propto M$ deki $m \in M$ nin bir etkisini kullanarak $G_2 = (L \propto M) \propto M$ tanımlanabilir. G_2 deki çarpım

$$(l,m_1,m_2)(l',m_1',m_2') = (ll'\omega\{\partial(l')\}\otimes\{m_1m_2\}, m_1m_2m_1'm_2^{-1}, m_2m_2')$$

ile verilir. G_2 bu çarpımla bir grup olur. G_2 ve G_1 arasında

$$\begin{array}{lll} d_0^2(l,m_1,m_2) = m_1 & d_1^2(l,m_1,m_2) = m_1m_2 & d_2^2(l,m_1,m_2) = m_2 \\ s_0^1(m_1) = (1_L, m_1, 1_M) & s_1^1(m_1) = (1_L, 1_M, m_1) & \end{array}$$

homomorfizmaları tanımlansın. Bu dönüşümler simplisel özdeşliklerini sağlar. Böylece

$$(G_0, G_1, G_2)$$

2-parçalanmış indirgenmiş simplisel grubu elde edilir. İspatın geri kalan kısmı sayfa 15 deki gibi yapılabilir.

Önerme 2.5.2. ***G*** bir indirgenmiş simplisel grup olsun. ***G*** nin Moore kompleksinin homoloji grupları ile ***G*** den elde edilen indirgenmiş kuadratik modülün homotopi grupları izomorftur.

İspat: ***G*** bir simplisel grup olsun. ***G*** nin n inci homotopi grupları

$$\pi_n(\boldsymbol{G}) \cong H_n(\boldsymbol{NG}) \cong \frac{çekd_{n-1}^{n-1} \cap NG_{n-1}}{d_n^n(NG_n)}$$

gibi ***G*** nin Moore kompleksinin n inci homolojisidir. Böylece ***G*** nin $\pi_n(\boldsymbol{G}) = \pi_n$ homoloji grupları

$$\pi_n = \begin{cases} \{1\} & n=1, \\ NG_1/\partial_2(NG_1) & n=2, \\ NG_2/\partial_3(NG_3) & n=3, \\ \{1\} & n=0 \text{ veya } n>3 \end{cases}$$

dir. Buna denk olan indirgenmiş kuadratik modüllün π'_n homoloji grupları

$$\pi'_n = \begin{cases} \{1\} & n=1, \\ çek\partial/\operatorname{Im}\delta & n=2, \\ çek\delta & n=3, \\ \{1\} & n=0 \text{ veya } n>3 \end{cases}$$

dir. $n=1,2,3$ için $\pi'_n \cong \pi_n$ olduğu gösterilebilir. $M = NG_1/P_3(\partial_1)$ ve $d_1(P_3(\partial_1))=1$ olduğundan,

$$\{1\} = \partial(NG_1/P_3(\partial_1)) = d_1(NG_1)$$

elde edilir ve bu durumda

$$\pi'_1 = \{1\} \cong NG_0/d_1(NG_1) = \pi_1$$

dir. Ayrıca $\partial = \dfrac{çekd_1 \cap NG_1}{P_3(\partial_1)}$ ve $\operatorname{Im}\delta = d_2(NG_2)/P_3(\partial_1)$ iken

$$\pi'_2 = \frac{çek\partial}{\operatorname{Im}\delta} = \frac{çekd_1 \cap NG_1/P_3(\partial_1)}{d_2(NG_2)/P_3(\partial_1)} \cong \frac{çekd_1 \cap NG_1}{d_2(NG_2)} = \pi_2$$

elde edilir. $P'_3(\partial_1)$

$$s_0(\langle x,y\rangle)s_1 z s_0(\langle x,y\rangle)^{-1} s_1(\langle x,y\rangle)s_1 z^{-1} s_1(\langle x,y\rangle)^{-1}$$

ve

$$s_0 x s_1(\langle y,z\rangle)s_0 x^{-1} s_1 x s_1(\langle y,z\rangle)^{-1} s_1 x^{-1}$$

formundaki elemanlar tarafından üretildiği bilinmektedir.

$$
\begin{aligned}
d_2\left(s_0(\langle x, y\rangle)s_1 z s_0(\langle x, y\rangle)^{-1} s_1(\langle x, y\rangle)s_1 z^{-1} s_1\left(\langle x, y\rangle^{-1}\right)\right) &= {}^{d_1\langle x, y\rangle} z \langle x, y\rangle \left(z^{-1}\right)\langle x, y\rangle^{-1} \\
&= \langle\langle x, y\rangle, z\rangle \in P_3(\partial_1)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
d_2\left(s_0 x s_1(\langle y, z\rangle)s_0 x^{-1} s_1 x s_1(\langle y, z\rangle)^{-1} s_1 x^{-1}\right) &= s_0 d_1 x \langle y, z\rangle s_0 d_1 x^{-1}(x)\langle y, z\rangle^{-1} x^{-1} \\
&= {}^{d_1 x}\langle y, z\rangle x \langle y, z\rangle^{-1} x^{-1} \\
&= \langle x, \langle y, z\rangle\rangle \in P_3(\partial_1)
\end{aligned}
$$

olduğundan $d_2(P_3'(\partial_1) = P_3(\partial_1))$ alınabilir. π_3' ve π_3 arasındaki izomorfizm Sayfa 24 dekine benzer şekilde ispat edilebilir.

3. BRAİDED CAT GRUPLAR VE SİMPLİSEL GRUPLAR

3.1. Braided Cat-Gruplar

Cat-gruplar, Loday tarafından tanımlanmıştır $[2]$. Loday cat-gruplar ve çaprazlanmış modüllerin denk olduğunu göstermiştir. Garzon ve Miranda, cat-grupları üzerinde braiding dönüşümü tanımlamışlardır. Garzon ve Miranda, braided cat-gruplar ve indirgenmiş 2-çaprazlanmış modüllerin denk olduğunu göstermişler ve bu yapıların homotopilerini incelemişlerdir $[13]$. Ulualan, indirgenmiş simplisel gruplardan braided cat-gruplara bir funktor oluşturur $[9]$. $Cat(Gp)$ un bir objesine cat-grup denilecek,

$$A \underset{I}{\overset{s\,,\,t}{\rightleftarrows}} O$$

grup morfizması ve gruplar diyagramı tarafından gösterilecektir. Böylece $sI = tI = id_o$, $x, y \in A$ $\; t(x) = s(y)$ ile iki morfizmanin bileşimi $x \circ y$ ile belirtilecektir.

Tanım 3.1.1 $[5],[14],[15]$ Bir

$$G\ :A \underset{I}{\overset{s\,,\,t}{\rightleftarrows}} O$$

cat-grubu için bir braiding aşağıdaki şartları sağlayan bir

$$\begin{array}{ccc} O\times O & \xrightarrow{\tau} & A \\ (a,b) & \mapsto & \tau_{a,b} \end{array}$$

dönüşümüdür.

a) $s\tau_{a,b} = ba$ ve $t\tau_{a,b} = ab$.

b) Verilen $x, y \in A$; $x : a \to a'$, $y : b \to b'$ için aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$
\begin{tikzcd}
ba \arrow[r, "yx"] & b'a' \\
ab \arrow[u, "\tau_{a,b}"] \arrow[r, "xy"'] & a'b' \arrow[u, "\tau_{a'b'}"']
\end{tikzcd}
$$

c) $a,b,c \in O$ için aşağıdaki diyagramlar değişmelidir.

$$
\begin{tikzcd}
 & (ab)c & \\
a(bc) \arrow[ur, equal] & & (ba)c \arrow[ul, "\tau_{a,b}I_c"'] \arrow[d, equal] \\
(bc)a \arrow[u, "\tau_{a,bc}"] \arrow[dr, equal] & & b(ac) \\
 & b(ca) \arrow[ur, "I_b\tau_{a,c}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & a(bc) & \\
(ab)c \arrow[ur, equal] & & a(cb) \arrow[ul, "I_a\tau_{b,c}"'] \arrow[d, equal] \\
c(ab) \arrow[u, "\tau_{ab,c}"] \arrow[dr, equal] & & (ac)b \\
 & (ca)b \arrow[ur, "\tau_{a,c}I_b"'] &
\end{tikzcd}
$$

d) $\tau_{1,a} = \tau_{a,1} = I_a$

e) Braiding dönüşümle birlikte bir cat-gruba genellikle *braided cat-grup* denir. Verilen (G,τ), (G',τ') braided cat-grupları arasındaki morfizma aşağıda değişmeli karenin içindeki τ ile uyuşabilir bir cat-gruplar morfizmasıdır.

$$
\begin{tikzcd}
O \times O \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "f_o \times f_o"'] & A \arrow[d, "f_1"] \\
O' \times O' \arrow[r, "\tau'"'] & A'
\end{tikzcd}
$$

$BCat(Gp)$, braided cat-gruplar kategorisini belirtecektir.

Şimdi braided çaprazlanmış modüller ve braided cat-gruplar arasındaki ilişki verilecektir. Gruplar kategorisi içinde internal kategorilerin oluşturduğu kategori ile çaprazlanmış modüllerin kategorisinin denk olduğu de gösterilmiştir [2], [13]. Joyal ve Street monoidler üzerinde çaprazlanmış semi-modüller için braiding dönüşümünü tanımlamışlar ve braided monoidal kategori ile denk olduğunu göstermişlerdir [16]. Aşağıda verilecek önerme braided çaprazlanmış modüller ile braided cat-grupların denkliğini vermektedir. Bu önerme Garzon ve Miranda tarafından indirgenmiş 2-çaprazlanmış modüller braided cat-gruplara denktir şeklinde verilmiştir [13]. Çaprazlanmış modüller üzerindeki braiding dönüşümü ile cat-gruplar üzerindeki braiding dönüşümünün ilişkisini göstermek amacıyla aşağıdaki önerme verilecektir.

3.2. Braided Çaprazlanmış Modüller ve Braided Cat-Gruplar

$$\boldsymbol{BCM \leftrightarrow Braided\ Cat - Grup}$$

Önerme 3.2.1. [9] Braided çaprazlanmış modüller ve braided cat-gruplar kategorisi denktir.

İspat : $\partial : C_2 \to C_1$ bir braided çaprazlanmış modül olsun.

$$t(x, y) = x(\partial y) \quad , \quad s(x, y) = x \quad ve \quad I(x) = (x,1)$$

ile birlikte

$$G \ : C_1 \propto C_2 \underset{I}{\overset{s\,,t}{\rightrightarrows}} C_1$$

bir cat-gruptur [2] ve [13]. Kolaylıkla görülebilir ki eğer $(x, y),(x', y') \in C_1 \propto C_2$ için $x' = x(\partial y)$ ise

$$(x, y) \circ (x', y') = (x, yy')$$

iki morfizmanın bileşkesidir. $C_1 = O \ \ ve \ \ C_1 \propto C_2 = A$ olsun. Bu cat-gruptaki braiding dönüşüm $a, b \in O$ için

$$\begin{aligned} \tau : O \times O \ &\to \ A \\ (a,b) \ &\mapsto \ (ba,\{b,a\}) \end{aligned}$$

ile verilir. Burada $\{-,-\}$, ∂ çaprazlanmış modülündeki braiding dönüşümdür. O zaman (G,τ) bir braided cat-grup olur. Gerçekten de

$$\begin{aligned} s\tau_{a,b} &= s(ba,\{b,a\}) \\ &= ba\delta\{b,a\} \\ &= baa^{-1}b^{-1}ab \quad (BC3\ ile) \\ &= ab \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} t\tau_{a,b} &= t(ba,\{b,a\}) \\ &= ba \end{aligned}$$

olup bu braided cat-grupların *a)* aksiyomudur. Diğer aksiyomlar benzer şekilde gösterilebilir. Dolayısıyla bir funktor tanımlanabilir:

$$\Theta : BCM \rightarrow BCat(Gp).$$

Tersine,

$$G : A \underset{I}{\overset{s,t}{\rightrightarrows}} O$$

bir braided cat-grup olsun. Bu durumda $t : çek\, s \rightarrow O$, $I^{x} = (I_{x})^{-1} l (I_{x})$ ile verilen etkiyle birlikte G cat-grubuna eşlenik bir çaprazlanmış modüldür. Bu çaprazlanmış modül üzerinde braiding dönüşüm

$$\begin{aligned} \{-,-\} : O \times O &\rightarrow çek\, s \\ (a,b) &\mapsto (Ib)^{-1}(Ia)^{-1}\tau_{a,b} \end{aligned}$$

ile verilir. Örneğin aşağıdaki eşitlikler sırasına göre $BC3$, $BC4$, $BC5$ aksiyomlarıdır:

$a,b \in O$ için

$$\begin{aligned} t\{a,b\} &= t\left((Ib)^{-1}(Ia)^{-1}\tau_{a,b}\right) \\ &= b^{-1}a^{-1}ba \\ &= [b,a], \end{aligned}$$

$a \in O$, $y \in çek\, s$ için

$$\begin{aligned}\{a, t(y)\} &= (It\,y)^{-1}(Ia)^{-1}\tau_{a,t\,y} \\ &= y^{-1}I(a)^{-1}\,yI(a) \\ &= y^{-1}(y)^{a},\end{aligned}$$

$x \in çek\, s$ ve $b \in O$ için

$$\begin{aligned}\{t(x), b\} &= (Ib)^{-1}(I(t\,x))^{-1}\tau_{t\,x,b} \\ &= (Ib)^{-1}x^{-1}I(b)x \\ &= (x^{-1})^{b}\,x.\end{aligned}$$

Diğer aksiyomlar benzer şekilde gösterilebilir. Bu durumda bu çaprazlanmış modül bir braided çaprazlanmış modül olur. Dolayısıyla bir funktor tanımlanabilir:

$$\Delta : BCat(Gp) \rightarrow BCM\ .$$

Garzon ve Miranda 'nın $[13]$ gösterdiği braided cat-gruplar kategorisi $BCat-Gp$, Conduché $[14]$ tarafından verilen indirgenmiş 2-çaprazlanmış modüller kategorisi $\mathrm{Re}\, X_2Mod$ e denktir. Aynı zamanda braided çaprazlanmış modüller kategorisinin indirgenmiş 2-çaprazlanmış modüllere denk olduğunu kolaylıkla söylenebilir. Dolayısıyla denk kategorilerin diyagramı aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Re}\, X_2Mod \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & BCM \arrow[dl] \\ & BCat(Gp) & \end{tikzcd}$$

3.3. İndirgenmiş Simplisel Gruplar ve Braided Cat-Gruplar

$$\mathbf{Re}\, \boldsymbol{SimpGrp_{\leq 2} \leftrightarrow Braided\ Cat-Grup}$$

Bu bölümde Moore kompleksinin boyutu ≤ 2 olan ile indirgenmiş simplisel gruplar kategorisi ve braided cat-gruplar kategorisi arasında bir denklik verilecektir

İlk önce indirgenmiş simplisel gruplardan braided cat-gruplara bir funktor oluşturulsun.

G, NG Moore kompleksi ile indirgenmiş simplisel grup olsun. Bir braided cat-grup kurulabilir.

$$C\ :A \underset{I}{\overset{s\,,\,t}{\rightrightarrows}} O$$

$O = NG_1$ olsun. s_1 aracılığıyla NG_1 in NG_2 üzerinde etkisinin kullanılmasıyla $A = NG_1 \times NG_2 / \partial_3(NG_3)$ yarı-direkt çarpım grubu tanımlanır. s ve t dönüşümleri sırasıyla $s(x,\overline{a}) = x\ ve\ t(x,\overline{a}) = x\partial_2 a$ ile verilir. $y = x\partial_2 a$ için

$$(x,\overline{a}) \circ (y,\overline{b}) = (x,\overline{ab})$$

ile bileşke işlemi tanımlanabilir. $I : O \to A$ özdeşlik dönüşümü $I(x) = (x,\overline{1})$ ile verilir. Burada $\overline{a}$, $NG_2 / \partial_3(NG_3)$ de NG_2 nin a elemanının bir eş kümesini simgeler. $x, y \in NG_1$, $a,b \in NG_2$ için

$$(x,\overline{a})(y,\overline{b}) = \left(xy, \left(\overline{s_1 yas_1 y^{-1}}\right)\overline{b}\right)$$

ile $NG_1 \times NG_2 / \partial_3(NG_3)$ de grup etkisi verilir. O halde bir

$$C\ :A \underset{I}{\overset{s\,,\,t}{\rightrightarrows}} O$$

cat-grubu elde edilir. Bu cat-grup üzerindeki braiding dönüşümü

$x, y \in O$ için

$$\begin{aligned} &\tau : O \times O \to A \\ &\quad (x, y) \mapsto \tau_{x,y} = \left(yx, \overline{s_0 y^{-1} s_1 x^{-1} s_0 y s_1 y^{-1} s_1 x s_1 y}\right) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Şimdi braided cat-grupların bazı aksiyomları sağladığı gösterilecektir.

a)

$$
\begin{aligned}
s\tau_{xy} &= s\left(yx, \overline{s_0 y^{-1} s_1 x^{-1} s_0 y s_1 y^{-1} s_1 x s_1 y}\right) \\
&= yx
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
t\tau_{xy} &= t\left(yx, \overline{s_0 y^{-1} s_1 x^{-1} s_0 y s_1 y^{-1} s_1 x s_1 y}\right) \\
&= yxd_2\left(s_0 y^{-1} s_1 x^{-1} s_0 y s_1 y^{-1} s_1 x s_1 y\right) \\
&= yx\left(s_0 d_1 y^{-1} x^{-1} s_0 d_1 y y^{-1} xy\right) \\
&= yx\left(x^{-1}\right)^{d_1 y} y^{-1} xy \qquad (etki\ ile) \\
&= yxx^{-1} y^{-1} xy \qquad (indirgenmiş\ şart\ ile) \\
&= xy.
\end{aligned}
$$

b) $x = (a, \bar{k})$ ve $y = (b, \bar{l})$, $s(x) = a$, $t(x) = ad_2 k = a'$ ve $s(y) = b$, $t(y) = bd_2 l = b'$ için

$$
\tau_{a,b} \circ xy = yx \circ \tau_{a',b'}
$$

olduğu gösterilmelidir.

$$
xy = (a, \bar{k})(b, \bar{l}) = \left(ab, \overline{(s_1 b)^{-1} k s_1 b l}\right) \ ve \ \tau_{a,b} = \left(ba, \overline{s_0 b^{-1} s_1 a^{-1} s_0 b s_1 b^{-1} s_1 a s_1 b}\right)
$$

ve $t\tau_{a,b} = ab = s(xy)$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
xy \circ \tau_{a,b} &= \left(ba, \overline{s_0 b^{-1} s_1 a^{-1} s_0 b s_1 b^{-1} s_1 a s_1 b}\right) \circ \left(ab, \overline{(s_1 b)^{-1} k s_1 b l}\right) \\
&= \left(ba, \overline{s_0 b^{-1} s_1 a^{-1} s_0 b s_1 b^{-1} s_1 a k s_1 b l}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir ve $s\left(xy \circ \tau_{a,b}\right) = ba$ ve

$$
\begin{aligned}
t\left(xy \circ \tau_{a,b}\right) &= b\,a\,s_0 d_1 b^{-1} a^{-1} s_0\, d_1 b b^{-1} a d_2 k b d_2\, l \\
&= ba\left(a^{-1}\right)^{d_1 b} b^{-1} a d_2 k b d_2 l \qquad (etki\ ile) \\
&= baa^{-1} b^{-1} a d_2 k b d_2\, l \qquad (indirgenmiş\ şart\ ile) \\
&= a d_2 k b d_2 l \\
&= a' b'
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Diğer taraftan

$$
yx = \left(b, \bar{l}\right)\left(a, \bar{k}\right) = \left(ba\, , \overline{(s_1 a)^{-1}\, l\, s_1 a k}\right)\ ve\ \ \tau_{a',b'} = \left(b' a'\, , \overline{(s_0 b')^{-1} (s_1 a')^{-1} s_0 b'\ (s_1 b')^{-1} s_1 a' s_1 b'}\right)
$$

ve

$$
\begin{aligned}
yx \circ \tau_{a',b'} &= \left(ba\, , \overline{(s_1 a)^{-1}\, l\, s_1 a k}\right) \circ \left(b' a'\, , \overline{(s_0 b')^{-1} (s_1 a')^{-1} s_0 b'\ (s_1 b')^{-1} s_1 a' s_1 b'}\right) \\
&= \left(ba\, , \overline{(s_1 a)^{-1}\, l\, s_1 a\, k\, (s_0 b')^{-1} (s_1 a')^{-1} s_0\, b' (s_1 b')^{-1} s_1\, a' s_1\, b'}\right) \\
&= \left(ba\, , s_1 a^{-1} l s_1\, a k s_0\, (b')^{-1} s_1 (a d_2 k)^{-1} s_0 (b') s_1 (b d_2 l)^{-1} s_1 (a d_2 k) s_1 (b d_2 l)\right) \\
&= \left(ba\, , s_1 a^{-1} l s_1\, a k \left(s_1 (a d_2 k)^{-1}\right)^{d_1 (b')} s_1 (b d_2 l)^{-1} s_1 (a d_2 k) s_1 (b d_2 l)\right) \qquad (etki\ ile) \\
&= \left(ba\, , s_1 a^{-1} l s_1\, a k \left(s_1 (a d_2 k)^{-1}\right) s_1 (b d_2 l)^{-1} s_1 (a d_2 k) s_1 (b d_2 l)\right) \qquad (indirgenmiş\ şart\ ile)
\end{aligned}
$$

ve

$$
s\left(yx \circ \tau_{a',b'}\right) = ba
$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
t\left(yx \circ \tau_{a',b'}\right) &= b a\, a^{-1} d_2 l\, a d_2 k\, (a d_2 k)^{-1} (b d_2 l)^{-1} (a d_2 k)(b d_2 l) \\
&= (b d_2 l)(a d_2 k)(a d_2 k)^{-1} (b d_2 l)^{-1} (a d_2 k)(b d_2 l) \\
&= (a d_2 k)(b d_2 l) \\
&= a' b'
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Böylece

$$\begin{tikzcd} ba \arrow[r, "yx"] & b'a' \\ ab \arrow[u, "\tau_{a,b}"] \arrow[r, "xy"'] & a'b' \arrow[u, "\tau_{a'b'}"'] \end{tikzcd}$$

diyagramının değişmeli olduğu görülür.

c) Bu aksiyom b) aksiyomunda kullanılan metot ile benzer şekilde gösterilebilir

d) $\tau_{1,a} = \tau_{a,1} = I_a$ olduğu gösterilmelidir. Burada $I_a = (a,1)$ dır.

$$\begin{aligned} \tau_{1,a} &= \left(a, \overline{s_0a^{-1}s_1 1^{-1}s_0as_1a^{-1}s_1 1s_1a}\right) \\ &= \left(a, s_0a^{-1}s_0as_1a^{-1}s_1a\right) \\ &= (a,1) \\ &= I_a \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \tau_{a,1} &= \left(a, \overline{s_0 1^{-1}s_1a^{-1}s_0 1s_1 1^{-1}s_1as_1 1}\right) \\ &= \left(a, s_1a^{-1}s_1a\right) \\ &= (a,1) \\ &= I_a \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece indirgenmiş simplisel gruplardan braided cat-gruplara bir funktor tanımlanabilir.

$$\Gamma : \mathrm{Re}\, SimpGrp \to BCat(Gp).$$

Teorem 3.3.1 Braided cat-gruplar kategorisi ile Moore kompleksinin boyutu ≤ 2 olan indigenmiş simplisel gruplar kategorisi denktir.

İspat: Yukarıdaki ifadelerden zaten indirgenmiş simplisel gruplar kategorisinden braided cat-gruplar kategorisine bir funktor tanımlanmıştır. Bu yüzden Moore kompleksinin boyutu ≤ 2

olan indirgenmiş simplisel gruplar kategorisinden braided cat-gruplar kategorisine bir funktor tanımlanabilir.

$$\Gamma : \operatorname{Re} SimpGrp_{\leq 2} \to BCat(Gp).$$

Tersine

$$C \ : A \ \underset{I}{\overset{s\,,\,t}{\rightrightarrows\!\!\!\longleftarrow}} \ O$$

Bir braided cat-grup olsun. Bir indirgenmiş simplisel grup kurulabilir. $e \in O$ birim eleman olsun. $G_0 = \{e\}$ ve $G_1 = O$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $\{G_0, G_1\}$ birim homomorfizması ile 1-parçalanmış simplisel grubu elde edilir. O grubu I tarafından $çeks$ deki etkilerdir. Yani $x \in O$ ve $a \in çeks$ için $a^x = I(x)^{-1} aI(x) \in çeks$ dir. Gerçekten $s(a^x) = s\left(I(x)^{-1} aI(x)\right) = x^{-1} 1x = 1$ dir. Bu etkinin kullanılmasıyla

$$(x,a)(x',a') = \left(xx', I(x')^{-1} aI(x)a'\right)$$

grup etkisiyle

$$O \propto çeks$$

yarı-direkt çarpım grubu oluşturulabilir. Diğer taraftan, O grubu $(x,a) \in O \times çeks$ ve $x' \in O$ için

$$(x,a)^{x'} = \left(xx', I(x')^{-1} aI(x)\right)$$

ile $O \propto çeks$ üzerine etki eder. Bu etkinin kullanılmasıyla $O \propto (O \propto çeks)$ yarı-direkt çarpım grubu oluşturulabilir. $G_2 = O \propto (O \propto çeks)$ olsun. G_2 ve G_1 arasındaki homomorfizimler

$$d_0^2(c_1, c_2, a) = c_1 \qquad d_1^2(c_1, c_2, a) = c_1 c_2$$
$$d_2^2(c_1, c_2, a) = c_2 \qquad s_0^1(c_1) = (c_1, 1, 1) \quad , \quad s_1^1(c_2) = (1, c_2, 1)$$

ile tanımlansın. Bu dönüşümler simplisel özdeşliklerini sağlar. Böylece

$$(G_2, G_1, G_0)$$

indirgenmiş 2-parçalanmış simplisel grubu elde edilir. Burada 2-parçalanmış simplisel grup kategorisinden simplisel gruplar kategorisine bir $Cosk_2$ funktoru vardır. Aşağıdaki diyagramı verilebilir.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Re} SimpGrp_{\leq 2} \arrow[rr, "\Theta"] & & BCat(Gp) \arrow[dl] \\
& Tr_2 \operatorname{Re} SimpGrp \arrow[ul, "Cosk_2"] &
\end{tikzcd}$$

ve bu bir funktor tanımlanmasını sağlar.

$$\Delta \ : \ BCat(Gp) \rightarrow \operatorname{Re} SimpGrp_{\leq 2} \ .$$

Böylece kategorilerin denkliğinin diyagramı aşağıdaki gibi resimlenebilir.

$$\begin{tikzcd}
RQM \arrow[rr, "{[12]}"] & & \operatorname{Re} SimpGrp_{\leq 2} \arrow[dl, leftrightarrow, "{[17]}"] \arrow[ddl, leftrightarrow, "{[9]}"] \arrow[dddl, leftrightarrow, "{[13]}"] \\
& BCM \arrow[ul, "{[9]}"'] & \\
& B\,Cat(GP) \arrow[u, "{[16]}"] \arrow[uul] & \\
& \operatorname{Re} X_2 Mod \arrow[u, leftrightarrow, "{[13]}"] \arrow[uuul] &
\end{tikzcd}$$

Diyagramdaki numaralar referans numaralarıdır.

4. ÇAPRAZLANMIŞ KÖŞE VE SİMPLİSEL GRUPLAR

Çaprazlanmış köşe kavramı ilk olarak Alp tarafından tanımlanmıştır [18]. M. Alp çaprazlanmış köşe ile çaprazlanmış kare arasındaki ilişkiyi açıklamıştır. E. Ulualan bu konuyu yüksek lisans tezinde de incelemiştir [20]. Bu bölümde çaprazlanmış köşe ile çaprazlanmış karenin ilişkileri verilerek braided çaprazlanmış modüller, indirgenmiş simplisel gruplar ve çaprazlanmış köşe arasındaki denklikler kurulacaktır.

Tanım 4.1. [19], [20], [21] R,S ve P birer grup, R ve S , P grubu üzerinde etkiye sahip ve yine R nin S üzerinde S ninde R üzerindeki etkisiyle birlikte grupların

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\mu} & R \\ {\scriptstyle v}\downarrow & & \\ S & & \end{array}$$

diyagramını göz önüne alalım. $h : R \times S \to P$ dönüşümü ile birlikte aşağıdaki şartlar sağlanırsa bu diyagrama bir çaprazlanmış köşe adı verilir.

1. $h(rr',s) = {}^{r}h(r',s)\,h(r,s)$

2. $h(r,ss') = h(r,s)\,{}^{s}h(r,s')$

3. $h(\mu(p),s) = p^{s}\,p^{-1}$

4. $h(r,v(p)) = {}^{r}pp^{-1}$

5. ${}^{r_s}p = {}^{rsr^{-1}}p$

6. ${}^{s_r}p = {}^{srs^{-1}}p$

dir. Burada $s_r = \mu(h(r,s))^{-1}$ ve ${}^{r}s = vh(r,s)s$ şeklindedir.

$$\mathrm{Re}\,SimpGrp_{\leq 2} \to CC$$

Şimdi Moore kompleksinin boyutu ≤ 2 olan indirgenmiş simplisel gruplar kategorisinden çaprazlanmış köşeler kategorisine bir funktor tanımlayalım. Bu funktoru oluştururken hyper çaprazlanmış kompleks çiftlerinden yararlanacağız.

G, Moore kompleksi **NG** olan indirgenmiş bir simplisel grup olsun.

$$NG_1 = Çekd_0^1 \text{ ve } \overline{NG_1} = Çekd_1^1$$

olmak üzere

$$\begin{tikzcd} NG_2/\partial_3(NG_3 \cap D_3) \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "\partial_2'"'] & NG_1 \\ \overline{NG_1} & \end{tikzcd}$$

diyagramının bir çaprazlanmış köşe olduğunu gösterelim. Burada NG_1 ve $\overline{NG_1}$, NG_2 üzerine s_1 vasıtasıyla etki ettiğinden ∂_2 ve ∂_2' homomorfizmlerinin birer çaprazlanmış modül olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

$$\begin{aligned} h: NG_1 \times \overline{NG_1} &\to NG_2/\partial_3(NG_3 \cap D_3) \\ (x, \bar{y}) &\mapsto \overline{[s_1x, s_1y][s_1y, s_0x]} \end{aligned}$$

şeklinde h dönüşümü tanımlayabiliriz.

Şimdi çaprazlanmış köşe aksiyomlarının sağlandığını gösterelim.

1. $h(y_0y_1, y_2) = {}^{y_0}h(y_1, y_2)h(y_0, y_2)$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} h(y_1, y_2) &= s_1y_1s_1y_2s_1y_1^{-1}s_0y_1s_1y_2^{-1}s_0y_1^{-1} \\ h(y_0, y_2) &= s_1y_0s_1y_2s_1y_0^{-1}s_0y_0s_1y_2^{-1}s_0y_0^{-1} \end{aligned}$$

olup

$$
\begin{aligned}
h(y_0 y_1, y_2) &= [s_1(y_0 y_1), s_1 y_2][s_1 y_2, s_0(y_0 y_1)] \\
&= s_1 y_0 s_1 y_1 s_1 y_2 s_1 y_1^{-1} s_1 y_0^{-1} s_0 y_0 s_0 y_1 s_1 y_2^{-1} s_0 y_1^{-1} s_0 y_0^{-1} \\
&= s_1 y_0 s_1 y_1 s_1 y_2 s_1 y_1^{-1} \left(s_0 y_1 s_1 y_2^{-1} s_0 y_1^{-1} s_0 y_1 s_1 y_2 s_0 y_1^{-1} \right) s_1 y_0^{-1} s_0 y_0 s_0 y_1 \\
&\quad s_1 y_2^{-1} s_0 y_1^{-1} s_0 y_0^{-1} \\
&= s_1 y_0 \left(s_1 y_1 s_1 y_2 s_1 y_1^{-1} s_0 y_1 s_1 y_2^{-1} s_0 y_1^{-1} \right) s_0 y_1 s_1 y_2 s_0 y_1^{-1} s_1 y_0^{-1} s_0 y_0 s_0 y_1 \\
&\quad s_1 y_2^{-1} s_0 y_1^{-1} s_0 y_0^{-1} \\
&= s_1 y_0 [h(y_1, y_2)] \left(s_1 y_0^{-1} s_1 y_0 \right) \left(s_0 y_1 s_1 y_2 s_0 y_1^{-1} s_1 y_0^{-1} s_0 y_0 s_0 y_1 s_1 y_2^{-1} \right. \\
&\quad \left. s_0 y_1^{-1} s_0 y_0^{-1} \right) \\
&= {}^{y_0}h(y_1, y_2) s_1 y_0 s_0 y_1 s_1 y_2 s_0 y_1^{-1} s_1 y_0^{-1} s_0 y_0 s_0 y_1 s_1 y_2^{-1} s_0 y_1^{-1} s_0 y_0^{-1} \\
&= {}^{y_0}h(y_1, y_2) s_1 y_0 \left({}^{\partial_1 y_1} s_1 y_2 \right) s_1 y_0^{-1} s_0 y_0 \left({}^{\partial_1 y_1} s_1 y_2^{-1} \right) s_0 y_0^{-1} \\
&= {}^{y_0}h(y_1, y_2) s_1 y_0 s_1 y_2 s_1 y_0^{-1} s_0 y_0 s_1 y_2^{-1} s_0 y_0^{-1} \\
&= {}^{y_0}h(y_1, y_2) h(y_0, y_2)
\end{aligned}
$$

olur.

2. $h(y_0, y_1 y_2) = h(y_0, y_1)\, {}^{y_1}h(y_0, y_2)$ olmalıdır.

$$
\begin{aligned}
h(y_0, y_1 y_2) &= [s_1 y_0, s_1(y_1 y_2)][s_1(y_1 y_2), s_0 y_0] \\
&= s_1 y_0 s_1 y_1 s_1 y_2 s_1 y_0^{-1} s_0 y_0 s_1 y_2^{-1} s_1 y_1^{-1} s_0 y_0^{-1} \\
&= s_1 y_0 s_1 y_1 \left(s_1 y_0^{-1} s_0 y_0 s_1 y_1^{-1} s_0 y_0^{-1} s_0 y_0 s_1 y_1 s_0 y_0^{-1} s_1 y_0 \right) s_1 y_2 s_1 y_0^{-1} \\
&\quad s_0 y_0 s_1 y_1^{-1} s_0 y_0^{-1} \\
&= \left(s_1 y_0 s_1 y_1 s_1 y_0^{-1} s_0 y_0 s_1 y_1^{-1} s_0 y_0^{-1} \right) \left(s_0 y_0 s_1 y_1 s_0 y_0^{-1} s_1 y_0 s_1 y_2 s_1 y_0^{-1} \right. \\
&\quad \left. s_0 y_0 s_1 y_2^{-1} s_1 y_1^{-1} s_0 y_0^{-1} \right) \\
&= h(y_0, y_1) s_0 y_0 s_1 y_1 s_0 y_0^{-1} s_1 y_0 s_1 y_2 s_1 y_0^{-1} s_0 y_0 s_1 y_2^{-1} \left(s_0 y_0^{-1} s_0 y_0 \right) \\
&\quad s_1 y_1^{-1} s_0 y_0^{-1} \Big) \\
&= h(y_0, y_1) \left({}^{\partial_1 y_0} s_1 y_1 \right) s_1 y_0 s_1 y_2 s_1 y_0^{-1} s_0 y_0 s_1 y_2^{-1} s_0 y_0 \left({}^{\partial_1 y_0} s_1 y_1^{-1} \right) \\
&= h(y_0, y_1) s_1 y_1 s_1 y_0 s_1 y_2 s_1 y_0^{-1} s_0 y_0 s_1 y_2^{-1} s_0 y_0^{-1} s_1 y_1^{-1} \\
&= h(y_0, y_1) s_1 y_1 h(y_0, y_2) s_1 y_1^{-1} \\
&= h(y_0, y_1)\, {}^{y_1}h(y_0, y_2)
\end{aligned}
$$

olur.

3. $x \in NG_2 / \partial_3(NG_3 \cap D_3)$ ve $y \in \overline{NG_1}$ için $h(\partial_2(x), y) = x^y x^{-1}$ olmalıdır.

$$h(\partial_2(x), y) = [s_1 d_2 x, s_1 y][s_1 y, s_0 d_2 x]$$

olup $\alpha = (0)$ ve $\beta = (2,1)$ için

$$\partial_3(F_{(0)(2,1)}(x, y))^{-1} = [s_1 y, x][s_1 d_2 x, s_1 y][s_1 y, s_0 d_2 x] \in \partial_3(NG_3 \cap D_3)$$

olup

$$\begin{aligned} h(\partial_2 x, y) &\equiv [x, s_1 y] \ \mathrm{mod}\ (\partial_3(NG_3 \cap D_3)) \\ &= x s_1 y x^{-1} s_1 y^{-1} \\ &= x^y x^{-1} \end{aligned}$$

bulunur.

4. $y \in NG_1$ ve $x \in NG_2 / \partial_3(NG_3 \cap D_3)$ için

$$h(y, \partial_2 x) = {}^y x x^{-1}$$

olmalıdır.

$$h(y, \partial_2 x) = [s_1 y, s_1 d_2 x][s_1 d_2 x, s_0 y]$$

olup $\alpha = (2,0)$ ve $\beta = (1)$ olmak üzere

$$\partial_3(F_{(2,0)(1)}(y, x))^{-1} = [x, s_1 y][s_0 y, x][s_1 y, s_1 d_2 x][s_1 d_2 x, s_0 y] \in \partial_3(NG_3 \cap D_3)$$

olup

$$\begin{aligned} h(y, \partial_2 x) &\equiv [s_1 y, x][x, s_0 y] \ \mathrm{mod}\ (\partial_3(NG_3 \cap D_3)) \\ &= s_1 y x s_1 y^{-1} s_0 y x^{-1} s_0 y^{-1} \\ &= {}^y x^{\partial_1 y} x^{-1} \\ &= {}^y x x^{-1} \qquad (\because \partial_1 y = 1) \end{aligned}$$

bulunur.

5. $r \in NG_1$ ve s $\in \overline{NG_1}$ için

$$ {}^{(s_r)}x = {}^{srs^{-1}}x $$

olmalıdır.

$$
\begin{aligned}
{}^{(s_r)}x &= {}^{\partial_2 h(r,s)^{-1}\, r}x \\
&= {}^{\partial_2\left(s_0 r s_1 s s_0 r^{-1} s_1 r s_1 s^{-1} s_1 r^{-1}\right) r}x \\
&= {}^{s_0 d_1 r(s) s_0 d_1 r^{-1} r s^{-1} r^{-1} r}x \\
&= {}^{\partial_1 r\; srs^{-1}}x \\
&= {}^{srs^{-1}}x \qquad (\because \partial_1 r = 1)
\end{aligned}
$$

bulunur.

6. $r \in NG_1$ ve s $\in \overline{NG_1}$ için

$$ {}^{(r_s)}x = {}^{rsr^{-1}}x $$

olmalıdır.

$$
\begin{aligned}
{}^{(r_s)}x &= {}^{\partial_2\left(s_1 r s_1 s s_1 r^{-1} s_0 r s_1 s^{-1} s_0 r^{-1}\right) s}x \\
&= {}^{rsr^{-1} s_0 d_1 r s^{-1} s_0 r^{-1} d_1 r^{-1} s}x \\
&= {}^{rsr^{-1}\; \partial_1 r\; s^{-1} s}x \\
&= {}^{rsr^{-1} s^{-1} s}x \qquad (\because \partial_1 r = 1) \\
&= {}^{rsr^{-1}}x
\end{aligned}
$$

bulunur.

Dolayısıyla çaprazlanmış köşenin bütün aksiyomları sağlanmış olur. O halde

$$ \Delta : \mathrm{Re}\, SimpGrp_{\leq 2} \to CC $$

şeklinde bir funktor tanımlayabiliriz.

Tersine, çaprazlanmış köşeler kategorisinden Moore kompleksinin boyutu 2 olan indirgenmiş simplisel gruplara bir funktor tanımlayalım.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda'"'] & M \\ N & \end{tikzcd}$$

bir çaprazlanmış köşe olsun. Bu durumda

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda'"'] & M \\ N & \end{tikzcd} \quad \cong \quad \begin{tikzcd} L \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda'"'] & M \arrow[d, "1"] \\ N \arrow[r, "1"'] & \{1\} \end{tikzcd}$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda'"'] & M \arrow[d] \\ N \arrow[r] & \{1\} \end{tikzcd}$$

indirgenmiş çaprazlanmış kareden bir bisimplisel grup elde edelim.

$M \to \{1\}$ in bir çaprazlanmış modül olduğu açıktır. Bu çaprazlanmış modülden

$$\cdots\ M \propto (M \propto \{1\}) \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow\\ \longleftarrow}\; M \propto \{1\} \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow}\; \{1\}$$

şeklinde indirgenmiş bir simplisel grup elde ederiz. Burada

$$M \propto \{1\} \cong M$$

dir. Dolayısıyla

$$\cdots\ (M \propto M) \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow\\ \longleftarrow}\; M \longrightarrow \{1\}$$

şeklinde bir indirgenmiş simplisel grup elde edilir. Benzer şekilde $N \to \{1\}$ çaprazlanmış modülünden de bir indirgenmiş simplisel grup elde edebiliriz. Buradan,

$$\begin{array}{ccccc}
\cdots & \overset{\longrightarrow}{\underset{\longleftarrow}{\rightrightarrows}} & \left(L^N\right) \propto \left(\left(L^N\right) \propto (M)\right) & \overset{\longrightarrow}{\underset{\longleftarrow}{\longrightarrow}} & M \propto M \\
\downdownarrows\!\downarrow\!\upuparrows & & \downdownarrows\!\downarrow\!\upuparrows & & \downdownarrows\!\downarrow\!\upuparrows \\
\left(\left(L^N\right) \propto N\right) \propto \left(M^M\right) & \overset{\longrightarrow}{\underset{\longleftarrow}{\rightrightarrows}} & \left(L^N\right) \propto (M) & \overset{\longrightarrow}{\underset{\longleftarrow}{\longrightarrow}} & M \\
\downdownarrows\!\uparrow & & \downdownarrows\!\uparrow & & \downdownarrows\!\uparrow \\
N \propto N & \overset{\rightrightarrows}{\underset{\leftleftarrows}{\longrightarrow}} & N & \overset{\longrightarrow}{\underset{\longleftarrow}{\longrightarrow}} & \{1\}
\end{array}$$

şeklinde bir bisimplisel grup elde ederiz. Burada $L^N = L \propto N$ dir. Şimdi Artin-Mazur [21] kodiyagonal funktoru kullanarak bir simplisel grup elde edelim.

Kısaca bisimplisel gruplardan simplisel gruplara tanımlı Artin-Mazur [21] kodiyagonal funktoru hatırlayalım. **G** bir indirgenmiş simplisel grup olsun.

$$G_{(n)} = \prod_{p+q=n} G_{p,q}$$

ve $G_{(n)}$ içinde bir ∇_n normal alt grubunu $x_p \in G_{p,n-p}$ ve $(x_0, x_1, ..., x_n) \in G_{(n)}$ olmak üzere,

$$d_0^v x_p = d_{p+1}^h x_{p+1}$$

şartını sağlıyorsa $(x_0, ..., x_n) \in \nabla_n$ dir şeklinde tanımlayalım. ∇_n ve ∇_{n+1} arasındaki yüz ve dejenere operatörleri

$$D_j(x) = \left(d_j^v x_0, d_{j-1}^v x_1, ..., d_1^v x_{j-1}, d_j^h x_{j+1}, d_j^h x_{j+2}, ..., d_j^h x_n\right)$$

ve

$$S_j(x) = \left(s_j^v x_0, s_{j-1}^v x_1, ..., s_0^v x_j, s_j^h x_j, s_j^h x_{j+1}, ..., s_j^h x_n\right)$$

şeklinde tanımlıdırlar.

Şimdi bu funktoru yukarıda elde ettiğimiz indirgenmiş bisimplisel gruba uygulayalım. Elde edeceğimiz simplisel grubun ilk öğesi

$$G_0 \cong \{1\}$$

dir. Diğer yandan elde edeceğimiz simplisel grubun ikinci öğesi

$$G_{1,0} \times G_{0,1} = (M \propto \{1\}) \times (N \propto \{1\})$$

grubunun bir alt kümesi olup bu küme

$$G_1 = \{((m,1),(n,1)) : d_0^v(m,1) = 1 = d_1^h(n,1)\}$$

şeklindedir. Diğer taraftan

$$\begin{array}{ccc} f : G_1 & \to & N \propto M \propto \{1\} \\ ((m,1),(n,1)) & \mapsto & (n,m,1) \end{array}$$

dönüşümü bir izomorfizimdir.

$$G_1 \cong N \propto M \propto \{1\} \quad \text{ve} \quad G_0 \cong \{1\}$$

alarak G_1 ve G_0 arasında

$$\begin{aligned} d_0(n,m,1) &= 1 \\ d_1(n,m,1) &= 1 \end{aligned}$$

homomorfizmlerini tanımlayalım. Sonuç olarak $\{G_1, G_0\}$ şeklinde indirgenmiş 1-parçalanmış simplisel grubunu elde edebiliriz.

Şimdi elde edeceğimiz simplisel grubun üçüncü öğesini araştıralım. Bu grup

$$G_{2,0} \times G_{1,1} \times G_{0,2} = (M \propto (M \propto \{1\})) \times ((L \propto N) \propto (M \propto \{1\})) \times (N \propto (N \propto \{1\}))$$

grubunun bir alt grubudur. Artin-Mazur $[21]$ kodiyagonal funktor tanımından bu kümenin elemanları

$$((m_2, m_1, 1), ((l, n), (m_1, 1)), (n_2, n_1, 1))$$

formunda olup

$$d_0^v(m_2, m_1, 1) = d_1^h(l, n, m, 1)$$

ve

$$d_0^v(l, n, m, 1) = d_2^h(n_2, n_1, 1)$$

olmalıdır. Bu eşitliklerden $m_1 = m$ ve $\lambda'(l)n = n_2$ elde edilir. Yani G_2 nin elemanları

$$\left((m_2, m_1, 1), \left(l, (\lambda' l)^{-1} n_2, m, 1\right), (\lambda'(l)n, n_1, 1)\right)$$

formunda olur.

$$f : G_2 \quad \to \quad (L \propto (N \propto M)) \propto (N \propto (M \propto \{1\}))$$

$$((m_2, m_1, 1), ((l, n), (m_1, 1)), ((\lambda' l)n, n_1, 1)) \quad \mapsto \quad ((l, (n, m_1)), (n_1, (m_2, 1)))$$

dönüşümü bir izomorfizimdir.

Böylece aşağıdaki gibi 2-parçalanmış indirgenmiş simplisel grubunu elde ederiz.

$$G^{(2)} : (L \propto (N \propto M)) \propto (N \propto (M \propto \{1\})) \underset{s_0^1, s_1^1}{\overset{d_0^2, d_1^2, d_2^2}{\rightrightarrows}} (N \propto (M \propto \{1\})) \underset{s_1^1}{\overset{d_0^1, d_1^1}{\rightrightarrows}} \{1\}$$

Burada

$$d_0^1(n, m, 1) = 1, \qquad d_1^1(n, m, 1) = 1, \qquad s_0^0(1) = (1, 1, 1)$$

ve

$$
\begin{aligned}
d_0^2\left(\left(l,\left(n,m_1\right)\right),\left(n_1,\left(m_2,1\right)\right)\right) &= \left(n_1,\left(\lambda l\right)m_1,1\right),\\
d_1^2\left(\left(l,\left(n,m_1\right)\right),\left(n_1,\left(m_2,1\right)\right)\right) &= \left(n_1\left(\lambda' l\right)n, m_1 m_2,1\right),\\
d_2^2\left(\left(l,\left(n,m_1\right)\right),\left(n_1,\left(m_2,1\right)\right)\right) &= \left(n, m_2,1\right),\\
s_0^1\left(n,m,1\right) &= \left(\left(1,\left(1,m\right)\right),\left(n,\left(1,1\right)\right)\right),\\
s_1^1\left(n,m,1\right) &= \left(\left(1,\left(n,1\right)\right),\left(1,\left(m,1\right)\right)\right)
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlıdır.

Böylece Moore kompleksinin boyutu ≤ 2 olan indirgenmiş bir simplisel grup elde ederiz. Dolayısıyla çaprazlanmış köşe kategorisi ile Moore kompleksinin boyutu ≤ 2 olan indirgenmiş simplisel gruplar kategorisi denktir.

Şimdi çaprazlanmış köşe kategorisi ile braided çaprazlanmış modüller kategorisi arasındaki ilişkiyi inceleyelim. Yukarıda elde ettiğimiz çaprazlanmış köşeden $\mathbf{G}^{(2)}$ indirgenmiş simplisel grubunu göz önüne alıp bu simplisel grubun Moore kompleksini araştıralım. Bu Moore kompleksin bir braided çaprazlanmış modüle sahip olduğunu göstereceğiz.

$$NG_0 = \{1\}$$

dir. Ayrıca d_0^1 ve d_1^1 in tanımlarından

$$NG_1 \cong N \propto \left(M \propto \{1\}\right) \cong N \propto M$$

bulunur.

Şimdi $NG_2 = Çekd_0^2 \cap Çekd_1^2$ yi araştıralım.

d_0^2 nin tanımından $x \in Çekd_0^2$ olması için gerek ve yeter şart

$$d_0^2\left(x\right) = \left(n_1, \lambda l m_1, 1\right) = \left(1,1,1\right)$$

olup $n_1 = 1$, $m_1 = \lambda l^{-1}$ bulunur.

d_1^2 nin tanımından $x \in Çekd_1^2$ olması için gerek ve yeter şart

$$d_1^2(x) = (n, \lambda' \ln, m_1 m_2, 1) = (1,1,1)$$

dan

$$n_1(\lambda' l)n = 1 \text{ ve } m_1 m_2 = 1$$

olmalıdır. O halde

$$x = (l, (n, m_1), (n_1, m_2, 1)) \in Çekd_0^2 \cap Çekd_1^2$$

olması için gerek ve yeter şart

$$n_1 = 1, \; n = \lambda' l^{-1}, \; m_1 = \lambda l^{-1} \text{ ve } m_2 = m_1^{-1} = \lambda l$$

olup bu eleman

$$(l, (\lambda' l^{-1}, \lambda l^{-1}), (1, \lambda l, 1))$$

formunda olur. Dolayısıyla $x \in NG_2$ olduğunda bütün bileşenleri l ye bağlı çıkar. O halde $NG_2 \cong L$ diyebiliriz. Yani $G^{(2)}$, 2-parçalanmış simplisel grubun Moore kompleksi

$$L \xrightarrow{\partial_2} N \propto (M \propto \{1\}) \xrightarrow{\partial_1} \{1\}$$

kompleksine izomorftur.

Burada

$$\begin{aligned} \partial_2(l) &= d_2(l, (\lambda' l^{-1}, \lambda l^{-1}), (1, \lambda l, 1)) \\ &= (\lambda' l^{-1}, \lambda l, 1) \end{aligned}$$

dir. Eğer

$$\begin{array}{rcl} N \propto (M \propto \{1\}) & \cong & M \propto N \\ (n,m,1) & \mapsto & (m^{-1}, n^{-1}, 1) \end{array}$$

izomorfizmini kullanırsak

$$L \xrightarrow{\partial_2} N \propto M \xrightarrow{1} \{1\}$$

kompleksini elde ederiz. Burada $l \in L$ için

$$\partial_2(l) = (\lambda l^{-1}, \lambda' l)$$

şeklinde tanımlıdır. Şimdi

$$L \xrightarrow{\partial_2} M \propto N$$

nin bir braided çaprazlanmış modül olduğunu göstermeliyiz.

İlk önce bu yapı üzerinde braiding dönüşümünü tanımlayalım.

$$\begin{array}{rcl} \{-,-\} : (M \propto N) \times (M \propto N) & \to & L \\ ((m,n),(c,a)) & \mapsto & h(m, nan^{-1}) \end{array}$$

şeklinde olsun. Burada h, çaprazlanmış köşenin dönüşümüdür.

Şimdi braided çaprazlanmış modüler aksiyomlarının sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned} BC1- \quad \partial_2\{x,y\} &= \partial_2\{(m,n),(c,a)\} \\ &= \partial_2 h(m, nan^{-1}) \\ &= (\lambda^{-1}, \lambda')\, h(m, nan^{-1}) \\ &= (\lambda h^{-1}(m, nan^{-1}), \lambda' h(m, nan^{-1})) \\ &= ({}^{nan^{-1}}m)^{m}\, (nan^{-1})(na^{-1}n^{-1}) \\ &= [(m,n),(c,a)] \\ &= [x,y] \end{aligned}$$

olur.

$BC2-\ \{x,\partial_2 a\}=a^{-1}a^{x}$ olmalıdır.

$x=(m,n)\in M\propto N$ ve $a\in L$ olmak üzere

$$\{x,\partial_2 a\}=\{(m,n),(\lambda a^{-1},\lambda' a)\}=h(m,n\lambda' a n^{-1})$$

$$=h(m,\lambda'({}^{n}a))\quad (\because\ \lambda' \text{ çaprazlanmış modül})$$

$$=a^{-1}(a^{n})^{m}$$
$$=a^{-1}a^{(m,n)}$$
$$=a^{-1}a^{x}$$

olur.

$BC3-\ \{\partial b,y\}=(b^{-1})^{y}b$ olmalıdır.

$b\in L$ ve $y=(c,a)\in M\propto N$ için

$$\begin{aligned}\{\partial_2 b,(c,a)\}&=\{(\lambda b^{-1},\lambda' b),(c,a)\}\\&=h(\lambda b^{-1},\lambda' ba\lambda' b^{-1})\\&={}^{\lambda' ba\lambda' b^{-1}}\lambda b^{-1}(\lambda b^{-1}a^{-1}\lambda' b^{-1})\end{aligned}$$

Diğer aksiyomlar benzer şekilde $h-$dönüşümünün özellikleri kullanılarak gösterilebilir.

Şimdi braided çaprazlanmış modüller ve simplisel gruplar arasındaki denkliği kullanarak braided çaprazlanmış modüllerden çaprazlanmış köşelere bir funktor oluşturalım.

$L\xrightarrow{\partial}M$ bir braided çaprazlanmış modül olsun. Bu yapıdan

$$\mathbf{G:}\ (L\propto M)\propto M \ \substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longleftarrow\\\longleftarrow} \ M\longrightarrow\{1\}$$

şeklinde indirgenmiş simplisel grup elde etmiştik. (Bkz Bölüm 2 sayfa 13)

Şimdi **G** simplisel grubundan bir çaprazlanmış köşe elde edelim. Bölüm 4 de herhangi bir simplisel yapıdan bir çaprazlanmış köşenin nasıl oluşturulduğunu vermiştik. Bu funktor **G** simplisel grubuna uygulanarak

$$\begin{array}{ccc} NG_2/\partial_3(NG_3 \cap D_3) & \xrightarrow{\partial_2} & NG_1 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \partial_2'} & & \\ \overline{NG_1} & & \end{array}$$

şeklinde çaprazlanmış köşe elde edilir. Burada **G** 2-parçalanmış olduğundan

$$\partial_3(NG_3 \cap D_3) = 1$$

dir. Şimdi NG_2 ve NG_1 in normal olduğuna bakalım. Sayfa 15 deki d_0^2 ve d_1^2 nin tanımlarından

$$d_0^2(l, m_1, m_2) = m_1 \quad \text{ve} \quad d_1^2(l, m_1, m_2) = m_1 m_2$$

olduğundan

$$(l, m_1, m_2) \in Çekd_0^2 \cap Çekd_1^2 \leftrightarrow m_1 = 1 \text{ ve } m_1 m_2 = 1$$

olup

$$m_2 = 1$$

bulunur. Yani $(l,1,1) \in NG_2$ olur. O halde

$$NG_2 \cong ((L \propto \{1\}) \propto \{1\})$$

dir. Şimdi NG_1 i araştıralım. $NG_1 = Çekd_0^1$ olduğundan

$$NG_1 \cong M$$

olur. $\overline{NG_1} = Çekd_1^1$ olduğundan

$$\overline{NG_1} \cong M \propto \{1\}$$

olur. Çünkü $d_1^1(m) = 1$ dir. O halde

$$L \longrightarrow M$$

braided çaprazlanmış modülünden elde edilen çaprazlanmış köşe

$$\begin{tikzcd}
((L \propto \{1\}) \propto \{1\}) \arrow[r] \arrow[d] & M \\
M \propto \{1\} &
\end{tikzcd}$$

dir. Çaprazlanmış köşenin $h-$dönüşümü ise braiding dönüşümü yardımıyla tanımlanabilir.

Bu bölümde yaptığımız çaprazlanmış köşe kategorisi CC, braided çaprazlanmış modüller kategorisi BCM ve Moore kompleksinin boyutu ≤ 2 olan indirgenmiş simplisel gruplar kategorisi $\operatorname{Re} SimpGrp_{\leq 2}$ arasındaki ilişkileri kısaca aşağıdaki diyagramda verebiliriz.

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Re} SimpGrp_{\leq 2} \arrow[dl] \arrow[dr, shift left] & \\
CC \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & BiSimpGrp \arrow[u] \arrow[r, "Artin-Mazur"] & BCM \arrow[ul, shift left]
\end{tikzcd}$$

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] Whitehead, J. H. C., 1949, Combinatorial Homotopy II, Bull. Amer. Math. Soc., 55, 453-496.

[2] Loday, J.L., 1982, Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups, J. Pure and Applied Algebra, 24, 179-202.

[3] Alp, M.,1997, GAP, Crossed Modules, Cat 1-groups, Ph. D. Thesis, University of Wales, Bangor.

[4] Baues, H. J., 1991, Combinatorial homotopy and 4-dimensional complexes, Walter de Gruyter,15.

[5] May, J. P., 1967, Simplicial objects in algebraic topology, Math. Studies 11, Van Nostrand.

[6] Duskin, J., 1975, Simplicial methods and the interpretation of triple cohomology, Memoirs A. M. S., vol. 3, 163 p.

[7] Carrasco, P. and Cagerra, A. M., 1991, Group-theoretic algebraic models for homotopy types, J. Pure and Applied Algebra, 75, 1995-235.

[8] Mutlu, A. and Porter, T., 1998, Applications of Peiffer pairings in the Moore complex of a simplicial group, Theory and Applications of Categories, Vol. 4, No. 7, 148-173.

[9] Ulualan, E., 2006, Relations Among Algebraic Models of 1-Connected Homotopy 3-types, Turkish Journal of Mathematics, (yayımda)

[10] Arvasi, Z., Koçak, M. and Ulualan E., 2005, Braided Crossed Modules and Reduced Simplicial Groups, Taiwanese Journal of Mathematics, Vol.9, No.3 ,477-488.

[11] Arvasi, Z. and Ulualan, E., 2006, On Algebraic Models For Homotopy 3-Types, J. Homotopy and Related Structures, Vol. 1, No.1, 1-27.

[12] Ulualan, E., 2004, Reduced Quadratic Modules and Simplicial Groups, Algebras Groups and Geometries-21, 489-502.

[13] Garzon, A. R. and Miranda G. G., 1997, Homotopy Theory for (braided) cat-groups, Chaires de Topology Geometrie Differentielle Categoriques, Vol. 38-2.

[14] Conduché, D., 1984, Modules croisés généralisés de longueur 2, J. Pure and Applied Algebra, 34, 155-178.

[15] Bullejos, M., Corrasco, P. and Cegarra, A. M., 1993, Cohomology with coefficients in symetric cat-groups an extension of Eilenberg Maclane's classification theorem Math. Porc. Comb. Phil. Soc. 114, 163-189.

[16] Joyal, A. and Street, R., 1991, Braided Tensor Categories, Adv. in Math, (1) 82, 20-78.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

[17] Brown, R. and Gilbert, N.D., 1989, Algebraic models of 3-types and automorphism structures for crossed modules. Proc. London Math. Soc. (3), 59, 51-73

[18] Alp, M., 1999, Characterization of Crossed Corner, Algebras, Groups and Geometries, Volume 15 No:2, 173-182.

[19] Alp, M., 1998, Application of Crossed Corner, 2. Uluslararası Kızılırmak Fen Bilimleri Kongresi, Kırıkkale, 176-180.

[20] Ulualan, E., 2000, Çaprazlanmış Köşe, Yüksek Lisans Tezi Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 1-53.

[21] Artin, M. and Mazur, B., 1966, On the Van Kampen theorem, Topology, 5, 179-189

[22] Mac Lane, S. and Whitehead, J. H. C., 1950, On the 3-type of a complex, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., Vol. 37, 41-48.

[23] Porter, T., 1993, n-type of simplicial groups and crossed n-cubes, Topology, 32, 5-24.

[24] Baues, H. J., 1998, Algebraic homotopy, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 15, 450 p.

[25] Brown, R. and Spencer C.B., 1976, G-groupoids, crossed modules and the fundamental groupoid of topological group, Prac. Kon. Ned. Akad. 79, 296-302.

[26] Brown, R. and Loday, J.L., 1987, Van Kampen theorems for diagram of spaces, Topology 26, 311-335.

[27] Berger, C., 1999, Double loop spaces, braided monoidal categories and algebraic 3-types of spaces, Contemporary Mathematics, 227, 46-66.

[28] Guin-Walery, D. and Loday, J.L., 1981, Obsruction a l'excision en K-theories algébrique, In: Friedlander, E.M., Stein, M.R.(eds) Evansion cof. on algebraic K-Theory 1980. Berlin Heidelberg New York: Springer, Lect. Notes Math., Vol. 854,179-216.

[29] Conduché, D., 2003, Simplicial crossed modules and mapping cones, Georgian Mathematical Journal, 10, No.4, 623-636.

[30] Ellis, G.J. and Steiner, R., 1987, Higher dimensional crossed modules and the homotopy groups of (n+1)-ads., J. Pure and Applied Algebra, 46, 117-136.

[31] Ellis, G.J., 1993, Crossed squares and combinatorial homotopy, Math. Z., 214, 93-110.

[32] Bullejos, M., Cabello, J.G. and Faro, E., 1998, On the equivariant 2-type of a G-space, J. Pure and Applied Algebra 129, 215-245.