LORENTZİAN

$\alpha -$ SASAKİAN MANİFOLDLAR

Ali Gökhan ERTAŞ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Ekim – 2006

LORENTZİAN
$\alpha-$SASAKİAN MANİFOLDLAR

Ali Gökhan ERTAŞ

Dumlupınar Üniversitesi
Fen bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman:Yrd.Doç.Dr. AHMET YILDIZ

Ekim - 2006

KABUL VE ONAY SAYFASI

Ali Gökhan ERTAŞ'ın YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırladığı "LORENTZİAN $\alpha -$**SASAKİAN MANİFOLDLAR"** başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmenliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

…/…/2006

<u>İmza</u>

Üye: Doç. Dr. Cengizhan MURATHAN

Üye: Yrd. Doç. Dr. Ahmet YILDIZ (Danışman)

Üye: Yrd. Doç. Dr. Mine TURAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …../…../….. gün ve ……… sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. M. Sabri ÖZYURT

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

LORENTZİAN α-SASAKİAN MANİFOLDLAR

Ali Gökhan ERTAŞ
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, 2006
Tez Danışmanı : Yrd.Doç.Dr. Ahmet YILDIZ

ÖZET

Bu tezde, Sasakian manifoldları ve lorentzian $\alpha -$ Sasakian manifoldları incelenmiştir. Tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar ve sonuçları içermektedir.İkinci bölümde Sasakian manifoldları ile ilgili bazı temel tanım, teorem ve sonuçları çalıştık.Tezimizin son bölümünde ise Lorentzian $\alpha -$ Sasakian manifoldları çalışılmış bu manifoldların bazı eğrilik şartları incelenmiş ve ilgili bazı mükemmel sonuçlara ulaşılmıştır.

Birinci bölüm Afin koneksiyon, Riemann eğrilik tensörü.Einstein manifold, Weyl-conformal tensörü, conformal flat manifold, Ricci eğrilik tensörü gibi bazı temel kavramlar tanıtılmıştır.

İkinci bölümde hemen hemen değme manifoldu,Riemann metriği, Lie türevi,Killing vektör alanı, K-değme manifoldu gibi bazı temel kavramlar verilerek Sasakian manifoldları tanıtılmaya çalışılmış ve bir sonraki bölümümüz olan son bölümde $\alpha -$ Sasakian manifoldlarında bazı eğrilik şartları için temel teşkil etmiştir.

Son bölümde Lorentzian $\alpha -$ Sasakian manifoldları ile ilgili temel teorem ve tanımlarıyla beraber eğrilik şartlarını sağlamamızda kullandığımız eşitlikler verilmiştir.Verilen tüm bu bilgilerin ışığında yazılan teoremler ispatlanarak güzel sonuçlar elde edilmiştir.

Key Words : Conctact metric manifold, Curvation tensor, Einstein manifold, K-conctact manifold, Lorentzian $\alpha -$ Sasakian manifold, Ricci curvation tensor, Sasakian manifold,

LORENTZİAN α-SASAKİAN MANİFOLDS

Ali Gökhan ERTAŞ
Mathematics Main Discipline, M.S.Thesis, 2006
Thesis Supervisor : Assist Prof. Ahmet YILDIZ

SUMMARY

In this thesis, Sasakian manifolds and Lorentzian $\alpha-$Sasakian manifolds are examined. Thesis falls into 3 sections. In te first section includes somefundamental concepts and results which will be used in other sections. In the second section, we study some fundamental describtions, thearies and results about the Sasakian manifolds. In the last section, Lorentzian $\alpha-$Sasakian manifolds are studied, and some of the conditions of curvation are examined, and some of the reasanable results related to it are attained.

In the first section, some of the fundamental concepts such as afin convection, Riemann curvaton tensor, Eistein manifold, Weyl-conformal tensor, conormal flat maniold, Ricci curvation tensor are introduced.

In the second section, Sasakian manifolds are introduced by giving some of the fundamental concept such as nearly contact manifold, riemann metric, Lie involution, Killing vector area, K-contact manifold, and inthe last section Lorentzian $\alpha-$Sasakian.

In the last section, basic theories and definitions about Lorentzian $\alpha-$Sasakian manifolds and aguivalences used to obtain conditions of curvation are given. Remarkable results are attained by proving these theories by mentioning about all these information.

Key Words : Conctact metric manifold, Curvation tensor, Einstein manifold, K-conctact manifold, Lorentzian $\alpha-$Sasakian manifold, Ricci curvation tensor, Sasakian manifold,

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmamı yöneten ve bu tezin hazırlanması esnasında, çalışmam boyunca vakit ayırarak her türlü yardımı ve hoşgörüyü esirgemeyen, çalışmalarımda büyük emeği olan değerli hocam sayın Yrd.Doç. Dr. Ahmet YILDIZ' a, çalışmalarım boyunca her türlü yardımı esirgemeyen Boğaziçi Eğitim Kurumları personeline, tezi birlikte yürüttüğüm sevgili arkadaşım Ceyhun BALI' na ve kadim dostum Selim DEĞER' e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Kütahya, 2006 Ali Gökhan ERTAŞ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklamalar**
R	Reel sayılar cümlesi
M	Monifold
g	Metrik tensör
C^{∞}	Diferensiyellenebilme
$[,]$	Lie Parantez operatörü
$T_p(M)$	p noktasındaki teğet uzay
$T_p^{\perp}(M)$	p noktasındaki normal uzay
$\chi(M)$	M nin teğet vektör alanlarının uzayı
$\chi^{\perp}(M)$	M nin normal vektör alanlarının uzayı
∇	M üzerinde afin koneksiyon
$\tilde{\nabla}$	$\bar{M}$ üzerindeki afin koneksiyon
$\bar{\nabla}$	van der Waerden-Bortolotti koneksiyonu
D	Normal koneksiyon
R	M'nin Riemann eğrilik tensörü
$\bar{R}$	$\bar{M}$ 'nin Riemann eğrilik tensörü
A_{ξ}	Şekil operatörü
B	İkinci temel form
H	Ortalama eğrilik
K	Kesitsel eğrilik
τ	Skaler eğrilik
S	Ricci tesörü
C	Weyl conformal tensörü
Q	Ricci operatörü
div	Divergens fonksiyonu
Δ	Laplace operatörü
$\|B\|$	İkinci temel formun boyu

1.BÖLÜM

1.1. TEMEL TANIMLAR

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanımlar verilecektir.

Tanım 1.1: M bir diferensiyellenebilir (C^∞) manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den $\boldsymbol{R}$ ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, \boldsymbol{R})$ olmak üzere, M üzerinde;

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, \boldsymbol{R})$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik, 2-lineer g Riemann metriği ile birlikte M ye bir **Riemann manifoldu** adı verilir ve (M, g) şeklinde gösterilir (Kobayashi and Nomizu, 1963).

M manifoldunun herhangi iki p ve q noktası için M üzerinde bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabilirse M ye **bağlantılı manifold** adı verilir. M bağlantılı ve temel grubu sadece birim elemandan oluşuyor ise M ye **basit bağlantılı** dır denir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.2: M bir diferensiyellenebilir manifold ve M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere;

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \xrightarrow{2-\text{lineer}} \chi(M)$$

$$(X, Y) \longrightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y$$

dönüşümü $\forall f, g \in C^\infty(M, \boldsymbol{R})$, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

i) $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$

ii) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$

iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

özeliklerini sağlarsa, ∇ ya M üzerinde bir **Afin Koneksiyon** adı verilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.3: *(M, g)* bir Riemann manifoldu ve ∇ da *M* üzerinde tanımlanan bir afin koneksiyon olsun. O zaman $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere; ∇ dönüşümü;

i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (Koneksiyonun sıfır torsiyon özeliği),

ii) $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Koneksiyonun metrikle bağdaşması özeliği)

şartlarını sağlıyorsa, ∇ ya *M* üzerinde **sıfır torsiyonlu Riemann Koneksiyon** veya *M* nin **Levi-Civita Koneksiyonu** adı verilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.4: *M* bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere;

$$\nabla : \chi(M) x \chi(M) \xrightarrow{2-lineer} \chi(M)$$

$$(X, Y) \longrightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y$$

biçiminde tanımlanan ∇ operatörü, *M* nin bir *U* bölgesi üzerinde tanımlı olup her bir C^∞ $X, Y \in \chi(U)$ vektör alan çiftine *U* üzerinde $\nabla_X Y$ ile ifade edilen üçüncü bir C^∞ vektör alanı karşılık getirir. Bu karşılık gelme aşağıdaki özellikleri sağladığında ∇ ya **Lineer Koneksiyon** (veya **kovaryant türev**) adı verilir (O' Neill 1983).

$\forall X, Y, Z \in \chi(M)$, $\forall f \in C^\infty(M, \mathbf{R})$ olmak üzere;

i) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$,

ii) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$,

iii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

iv) $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f) Y$

dir.

Tanım 1.5: *(M, g)* bir Riemann manifoldu, ∇ de *M* üzerindeki Levi–Civita koneksiyonu olsun.

$$R: \ \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \qquad (1.1)$$

ile tanımlanan *R* fonksiyonu *M* üzerinde bir (1, 3)-tensör alanıdır ve *M* nin **Riemann eğrilik tensörü** olarak adlandırılır. Ayrıca $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$ tensörüne *M* nin **Riemann-Christoffel eğrilik tensörü** adı verilir.

Her $X, Y, Z, V, W \in \chi(M)$ için Riemann eğrilik tensörü *R* aşağıdaki özelliklere sahiptir;

i) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z,$ (1.2)

ii) $g(R(X, Y)V, W) = -g(R(X, Y)W, V),$ (1.3)

iii) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0,$ (1.4)

iv) $g(R(X, Y)V, W) = g(R(V, W)X, Y)$ (1.5)

(O'Neill 1983).

Tanım 1.6: *(M, g)* bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde sırası ile ξ ve bir r-form ω olmak üzere $V_2,...V_r \in T_pM \ (r \geq 1)$ vektörleri için M üzerinde

$\left(C_\xi \omega\right)(P)\left(V_2,...V_r\right) = \omega\left(\xi(P), V_2,...V_r\right)$ biçiminde tanımlanan $C_\xi \omega$ (r-1)-formuna ω nin ξ ile **kontraksiyonu** denir.

Tanım 1.7: *(M, g)* bir Riemann manifoldu olsun. T_pM tanjant uzayının iki boyutlu altuzayı Π olmak üzere $V, W \in \Pi$ tanjant vektörleri için *Q* fonksiyonu;

$$Q(V, W) = g(V, V)g(W, W) - g(V, W)^2$$

biçiminde tanımlansın. $Q(V, W) \neq 0$ olmak üzere;

$$K(V,\ W) = \frac{g(R(V,W)W,V)}{Q(V,W)} \tag{1.6}$$

olup buna Π nin **kesitsel eğriliği** denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir (O'Neill, 1983)

Tanım 1.8: *(M, g)* *n*-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları olsunlar.

$$S : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \boldsymbol{R}$$

$$(X,\ Y) \rightarrow S(X,\ Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X)Y, e_i) \tag{1.7}$$

şeklinde tanımlı (0, 2) tipindeki *S* tensör alanına, *M* üzerinde **Ricci eğrilik tensörü** adı verilir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.9: *(M, g)* *n*-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $X,\ Y \in \chi(M)$ için;

$$S(X,\ Y) = \lambda g(X, Y) \tag{1.8}$$

olacak biçimde *M* üzerinde bir λ fonksiyonu var ise yani *M* nin Ricci tensörü *S*, metrik tensör *g* nin bir katı ise *M* ye **Einstein manifoldu** adı verilir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.10: *(M, g)* *n*-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere;

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i) \tag{1.9}$$

değerine *M* nin **skalar eğriliği** adı verilir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.11: *M* *n*-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $X,\ Y,\ Z \in \chi(M)$ için *M* nin **Weyl conformal eğrilik tensör alanı;**

$$C(X,\ Y)Z = R(X,\ Y)Z + \frac{1}{n-2}[S(X,\ Z)Y - S(Y,\ Z)X + g(X,\ Z)QY$$

$$-g(Y,\ Z)QX] - \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(X,\ Z)Y - g(Y,\ Z)X] \tag{1.10}$$

ile tanımlanır. Burada Q Ricci operatörüdür (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.12: $C = 0$ ise M manifoldu **conformal flat** olarak adlandırılır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.13: Sabit eğrilikli, tam, bağlantılı manifoldlara **uzay form** denir. n-boyutlu bir M uzay formu $M^n(c)$ ile gösterilir. Eğer,

$$\begin{aligned} &\mathrm{c} = 0 \text{ ise } \mathrm{M}^n(\mathrm{c}) = \mathbf{E}^n \text{ Öklid uzayı} \\ &\mathrm{c} = \frac{1}{\mathrm{r}^2} \text{ ise } \mathrm{M}^n(\mathrm{c}) = \mathrm{S}^n(\mathrm{r}) \text{ küresi} \\ &\mathrm{c} = -\frac{1}{\mathrm{r}^2} \text{ ise } \mathrm{M}^n(\mathrm{c}) = \mathrm{H}^n(\mathrm{r}) \text{ Hiperbolik uzay} \end{aligned}$$

dır (Chen, 1973).

Tanım 1.14: M ve N, sırası ile, m ve n boyutlu birer C^∞ manifold ve $f_* : T_pM \xrightarrow{lineer} T_{f(p)}N$, $\forall p \in M$, türev dönüşümü 1:1 ise f fonksiyonuna bir **immersiyon (daldırma)** denir (Chen, 1973).

Tanım 1.15: M ve N, sırası ile, m ve n boyutlu birer C^∞ manifold ve $f_* : T_pM \xrightarrow{lineer} T_{f(p)}N$ türev dönüşümü birebir ve f tek değişkenli ise f ye M den N ye bir **imbeding** adı verilir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.16: (M, g) ve $(N, \tilde{g})$ birer Riemann manifold ve f M den N ye bir immersiyon olsun. $\forall X, Y \in T_pM$ için,

$$\tilde{g}(f_*(X), f_*(Y)) = g(X, Y)$$

ise f ye bir **izometrik immersiyon** adı verilir (Yano and Kon, 1984).

2. BÖLÜM

2.1. SASAKIAN MANİFOLDLAR

Tanım 2.1: M bir $(2n+1)$-boyutlu manifold, ϕ, ξ, η da M üzerinde, sırası ile, (1,1)-tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve bir 1-form olsun. Eğer ϕ, ξ, η için, M üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere;

$$\eta(\xi)=1 \tag{2.1}$$

ve

$$\phi^2 X=-X+\eta(X)\xi \tag{2.2}$$

özellikleri sağlanıyor ise o zaman (ϕ, ξ, η) ya M üzerinde bir **hemen hemen değme yapısı** denir. M bu yapı ile bir **hemen hemen değme manifoldu** olarak adlandırılır (Yano and Kon, 1984).

Teorem 2.2: (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı için;

i) $$\phi\xi=0 \tag{2.3}$$

ii) $$\eta(\phi X)=0 \tag{2.4}$$

iii) $$rank\ \phi=2n \tag{2.5}$$

dir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.3: Hemen hemen değme manifoldu M verilsin. M üzerinde hemen hemen değme yapısı (ϕ, ξ, η) olsun. M üzerinde bir g Riemann metriği;

$$\eta(X)=g(X,\xi) \tag{2.6}$$

$$g(\phi X,\phi Y)=g(X, Y)-\eta(X)\eta(Y) \tag{2.7}$$

şartlarını sağlıyor ise g metriğine M üzerinde **hemen hemen değme metrik,** (ϕ,ξ,η, g) yapısına da **hemen hemen değme metrik yapısı,** (ϕ, ξ, η, g) yapısı ile M ye de **hemen hemen değme metrik manifoldu** denir (Yano and Kon, 1984).

Teorem 2.1: (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı için;

i) $\phi\xi=0$ (2.8)

ii) $\eta(\phi X)=0$ (2.9)

iii) $rank\ \phi=2n$ (2.10)

dir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.4: Hemen hemen değme manifoldu M verilsin. M üzerinde hemen hemen değme yapısı (ϕ, ξ, η) olsun. M üzerinde bir g Riemann metriği;

$$\eta(X)=g(X,\xi) \tag{2.11}$$

$$g(\phi X,\phi Y)=g(X, Y)-\eta(X)\eta(Y) \tag{2.12}$$

şartlarını sağlıyor ise g metriğine M üzerinde **hemen hemen değme metrik,** (ϕ,ξ,η, g) yapısına da **hemen hemen değme metrik yapısı,** (ϕ, ξ, η, g) yapısı ile M ye de **hemen hemen değme metrik manifoldu** denir (Yano and Kon, 1984).

Sonuç 2.1: $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifoldu M ile hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) verilsin. Böylece,

$$g(\phi X, Y)=-g(X, \phi Y) \tag{2.13}$$

dir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.5: $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M verilsin. Herbir η 1-formu için $\eta\wedge(d\eta)^n \neq 0$ şartı sağlanır ise η ya M nin **değme yapısı** ve M ye de **değme manifoldu** denir (Yano and Kon, 1984).

Teorem 2.2: $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M verilsin. M nin bir değme yapısı η verildiğinde;

$$g(X, \phi Y) = d\eta(X, Y) \tag{2.14}$$

olacak şekilde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) vardır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.6: *M* üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) için;

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y)$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) nın **2. temel formu** denir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.7: *V* bir reel vektör uzayı olmak üzere;

$$J : V \longrightarrow V$$

lineer dönüşümü;

$$J^2 = -I$$

şartını sağlıyor ise *J* ye *V* üzerinde bir **kompleks yapı** denir.

$(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu *M* verilsin. Bu manifold üzerinde hemen hemen değme yapısı (ϕ, ξ, η) olsun. Reel bir doğruyu $\boldsymbol{R}$ ile göstererek $M\times\boldsymbol{R}$ çarpım manifoldunu gözönüne alalım. $M\times\boldsymbol{R}$ üzerinde herhangi bir vektör alanı;

$(X, f\frac{d}{dt})$ şeklindedir. Burada *X*, *M* ye teğet bir vektör alanı, *t* $\boldsymbol{R}$ nin bir koordinatı ve *f* $M\times\boldsymbol{R}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.

$M\times\boldsymbol{R}$ nin tanjant uzayındaki bir *J* lineer dönüşümü;

$$J\left(X, f\frac{d}{dt}\right) = \left(\phi X - f.\ \xi, \eta(X)\frac{d}{dt}\right) \tag{2.15}$$

ile tanımlanır (Yano and Kon, 1984).

Sonuç 2.2: Yukarıdaki şekilde tanımlanan *J* dönüşümü $M\times\boldsymbol{R}$ üzerinde bir **hemen hemen kompleks yapı** dır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.8: *M* bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere *M* üzerinde (1, 1)-tipinde bir tensör alanı *F* olsun. $\forall X, Y\in\chi(M)$ için;

$$N_F(X,Y) = F^2[X,Y]+[FX,FY]-F[FX,Y]-F[X,FY]$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alanına F nin **Nijenhuis torsion tensörü** denir.

$F=J$ hemen hemen kompleks yapı olması halinde de,

$$N_J(X,Y)=J^2[X,Y]+[JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY]$$

$$=-[X,Y]+[JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY] \qquad (2.16)$$

dir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.9: Eğer $M\times\mathbf{R}$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısına **normaldir** denir (Yano and Kon, 1984).

Örnek 2.1: E^4 Kaehler manifoldunun 3-boyutlu bir reel hiperküresi S^3 olsun. E^4 de S^3 ün bir birim normali C olmak üzere E^4 ün hemen hemen kompleks tensör alanı J

$$J : E^4 \longrightarrow E^4$$

$$JC=-\xi$$

biçiminde tanımlansın. O zaman ξ, S^3 üzerinde bir birim vektör alanı olur. Yani $\xi\in\chi(S^3)$ dir. S^3 e teğet her bir X vektör alanı için $\eta(X)=g(X,\xi)$ olmak üzere η 1-formu iyi tanımlıdır. Üstelik $\eta(\xi)=1$ dir. Diğer yandan,

$$JX=\phi X+\eta(X)C$$

eşitliği ile ϕ lineer dönüşümünü tanımlayalım. Buna göre $\forall p=(p_1, p_2, p_3, p_4)\in S^3$ için;

$$J=\begin{bmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yapısı yardımı ile;

$$J(C(p))=J(p_1, p_2, p_3, p_4)=(-p_3, -p_4, p_1, p_2)=-\xi$$

elde edilir (Yano and Kon, 1984). Burada;

$$\xi = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

dir.

Şimdi $g(X, \xi)\xi$ için;

$$g(X, \xi)\xi = < \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$g(X, \xi)\xi = (x_1 p_3 + x_2 p_4 - x_3 p_1 - x_4 p_2) \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece;

$$\lambda = (x_1 p_3 + x_2 p_4 - x_3 p_1 - x_4 p_2)$$

olmak üzere;

$$g(X, \xi)\xi = \lambda\xi$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca,

$$\phi(\phi X) = J(\phi X) - \eta(\phi X)C$$

$$\phi(\phi X) = J(JX - \eta(X)C) - \eta(JX - \eta(X)C)C$$

$$=J\left(\begin{bmatrix}-x_3\\-x_4\\x_1\\x_2\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{bmatrix}\right)-g(JX-\eta(X)C,\ \xi)C$$

$$=\begin{bmatrix}-x_1+\lambda p_3\\-x_2+\lambda p_4\\-x_3-\lambda p_1\\-x_4-\lambda p_2\end{bmatrix}-<\begin{bmatrix}-x_3-\lambda p_1\\-x_4-\lambda p_2\\-x_1-\lambda p_3\\-x_2-\lambda p_4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}p_3\\p_4\\-p_1\\-p_2\end{bmatrix}>\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-x_1\\-x_2\\-x_3\\-x_4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\lambda p_3-\left[(x_3-\lambda p_1)p_3+(x_4-\lambda p_2)p_4+(x_1+\lambda p_3)p_1+(x_2+\lambda p_4)p_2\right]p_1\\-\lambda p_4-\left[(x_3-\lambda p_1)p_3+(x_4-\lambda p_2)p_4+(x_1+\lambda p_3)p_1+(x_2+\lambda p_4)p_2\right]p_2\\-\lambda p_1-\left[(x_3-\lambda p_1)p_3+(x_4-\lambda p_2)p_4+(x_1+\lambda p_3)p_1+(x_2+\lambda p_4)p_2\right]p_3\\-\lambda p_2-\left[(x_3-\lambda p_1)p_3+(x_4-\lambda p_2)p_4+(x_1+\lambda p_3)p_1+(x_2+\lambda p_4)p_2\right]p_4\end{bmatrix}$$

dir. O zaman

$$\phi(\phi X)=-\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}p_3\\p_4\\-p_1\\-p_2\end{bmatrix}$$

olduğundan,

$$\phi^2X=-X+\eta(X)\xi$$

elde edilir. Bununla birlikte,

$$\phi\xi=J\xi-\eta(\xi)C$$

olduğundan,

$$\phi\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = 0$$

bulunur. Böylece;

$$\eta(\phi X) = g(\phi X,\ \xi)$$

$$= g(JX - \eta(X)) = 0$$ olduğu da açıkça görülebilir.

Sonuç olarak (ϕ, ξ, η, g) yapısı S^3 üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı oluşturur.

Tanım 2.10: M diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere;

$$\varphi : \boldsymbol{R} \times M \xrightarrow{C^\infty} M$$

$$(t,\ p) \longrightarrow \varphi_t(p)$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyor ise φ ye M nin **diferensiyellenebilir bir parametreli grubu** adı verilir.

i) $\forall t \in \boldsymbol{R}$ için

$$\varphi_t : M \longrightarrow M$$

$$p \longrightarrow \varphi_t(p)$$ bir diffeomorfizm

ii) $\forall t,\ s \in \boldsymbol{R}$ ve $p \in M$ için

$$\varphi_{t+s}(p) = \varphi_t(\varphi_s(p))$$

dir (Kobayashi and Nomizu, 1963).

Tanım 2.11: M üzerinde bir vektör alanı X ve φ_t ise X ile genelleştirilmiş lokal dönüşümlü bir 1-parametreli grubu olsun. X vektör alanına göre bir K tensör alanının X yönünde $L_X K$ **Lie türevi,**

$$(L_X K)_X = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [K_X - (\varphi_t K)_X]$$

şeklinde tanımlanır (Kobayashi and Nomizu, 1963).

Tanım 2.12: M Riemann metriği g olan bir Riemann manifoldu ve M üzerinde bir vektör alanı X verilsin. M nin her bir noktasının bir komşuluğunda X ile meydana gelen lokal dönüşümlerin lokal 1-parametreli grubu lokal izometrilerden oluşuyor ise X vektör alanı **Killing vektör alanı** adı verilir. Böylece X bir Killing vektör alanıdır $\Leftrightarrow$ $L_X g = 0$ dır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.13: Değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan ($2n$+l)-boyutlu bir M manifoldu **değme metrik manifold** olarak adlandırılır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.14: ($2n$+1)-boyutlu değme metrik manifoldu M verilsin. Eğer (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısında verilen ξ vektör alanı g ye göre bir Killing vektör alanı ise o zaman M üzerinde değme yapı **K-değme yapısı** ve M ye de **K-değme manifoldu** adı verilir (Yano and Kon, 1984).

Önerme 2.1: Bir değme metrik manifoldu M olsun. O zaman M bir K-değme manifoldudur $\Leftrightarrow$

$$\nabla_X \xi = -\phi X \qquad (2.17)$$

dir (Yano and Kon, 1984).

Teorem 2.3: ($2n$+1)-boyutlu bir Riemann manifoldu M nin bir K-değme manifoldu olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır.

i) M bir ξ birim Killing vektör alanına sahiptir.

ii) M nin her bir noktasında ξ yı kapsayan düzlem kesitleri için kesitsel eğriliği 1 e eşittir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 2.15: M, değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan ($2n$+l)-boyutlu bir değme metrik manifoldu olsun. **Eğer M nin değme metrik yapısı normal ise, M Sasakian yapıya sahiptir** denir. Bazan Sasakian manifold **normal değme metrik manifold** olarak da adlandırılır (Yano and Kon, 1984).

Teorem 2.4: M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı $(\phi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ bir Sasakian yapıdır $\Leftrightarrow$ $\forall X,\ Y\in\chi(M)$ için;

$$(\nabla_X\phi)Y=g(X,\ Y)\xi-\eta(Y)X \tag{2.18}$$

dir (Yano and Kon, 1984). Burada;

$$\nabla_X(\phi Y)=(\nabla_X\phi)Y+\phi\nabla_X Y$$

dir.

Sonuç 2.3: M bir Sasakian manifold ise M nin bir Riemann eğrilik tensörü R olmak üzere;

$$R(X,\ Y)\xi=\eta(Y)X-\eta(X)Y \tag{2.19}$$

dir (Yano and Kon, 1984).

Teorem 2.5: M $(2n+1)$-boyutlu bir Riemann manifoldu olmak üzere M üzerinde bir birim Killing vektör alanı ξ verilsin. Ayrıca M nin eğrilik tensörü R olmak üzere M Sasakian manifolddur $\Leftrightarrow$

$$R(X,\ \xi)Y=-g(X,\ Y)\xi+\eta(Y)X \tag{2.20}$$

dir (Yano and Kon, 1984).

Uyarı : Bir Sasakian manifoldu bir K-değme manifolddur fakat tersi sadece boy $M=3$ olması halinde geçerlidir (Yano and Kon, 1984).

Sonuç 2.4: M, değme metrik yapısı $(\phi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ olan $(2n+1)$-boyutlu bir Sasakian manifold olsun. Bu takdirde;

$$\begin{aligned} R(X,\ Y)\phi Z=\ &\phi R(X,\ Y)Z+g(\phi X,\ Z)Y-g(Y,\ Z)\phi X \\ &+g(X,\ Z)\phi Y-g(\phi Y,\ Z)X \end{aligned} \tag{2.21}$$

dır (Yano and Kon, 1984).

Sonuç 2. 5: *M* bir Sasakian manifold olmak üzere;

$$R(X,\ Y)Z = -\phi R(X,\ Y)\phi Z + g(Y,\ Z)X - g(X,\ Z)Y$$
$$-g(\phi Y,\ Z)\phi X + g(\phi X,\ Z)\phi Y \qquad (2.22)$$

dır (Yano and Kon, 1984).

2.2. LORENTZİAN α-SASAKİAN MANİFOLDLAR

[15] de. S. Tanno, otomorfik grupları maksimum boyuta sahip olan hemen hemen değme metrik manifoldlarını sınıflandırmıştır. Böyle bir manifold için, ξ yı içeren düzlem kesitlerin, kesitsel eğilikleri sabittir. Ve bu sabite c diyelim. S. Tanno 3 sınıfa ayrılabileceğini de gösterdi: [15]

(1) c>0 olmak üzere homojen normal değme Riemann manifoldları.

(2) Eğer c=0 ise, sabit holomophic kesitsel eğriliklere ait Kaehler manifoldları ile bir doğru veya bir çemberin global Riemann çarpımları.

(3) Eğer c<0 ise, $R\times_f C$ warped çarpım uzayı

(1) sınıfına ait manifoldların bir Sasakian yapısının atanmasıyla karakterize edildiği bilinmektedir. Kenmotsu (3) sınıfına ait manifoldların diferansiyel geometrik özelliklerini karakterize etmiştir; bu şekilde elde edilen yapılar Kenmotsu yapısı olarak bilinir. Genel olarak, böyle yapılar Sasakian değildir.

Hemen hemen Hermitian manifoldların Gray-Hervella sınıflandırılmasında, Hermitian manifoldlarına ait W_4 sınıfı ortaya çıkar, bunlar lokal conformal Kaehler manifoldları ile yakından alakalıdır. Eğer $M\times R$ çarpım manifoldu W_4 sınıfına ait ise M manifoldu üzerindeki hemen hemen değme metrik yapısına bir trans –Sasakian yapısı denir. $C_6\oplus C_5$ sınıfı, (α,β) biçimindeki trans-Sasakian yapısı ile eşleşir. Gerçekte, trans-Sasakian yapısının alt sınıfları olan C_5 ve C_6 yapılarının, lokal yapıları yani bir yerdeki özellikleri, yapıları ve yapısal özellikleri tamamiyle karakterize edilmiştir.

Sonuç 2.6: α sıfır olmayan bir sabit olmak üzere (α,β) şeklinde olan bir trans-Sasakian yapısı daima α-Sasakian dır.

Bu durumda α bir sabit olur. Eğer α=1 ise, α-Sasakian manifoldu Sasakiandır. Bu tezde C=0 olduğu Lorentzian α-Sasakian manfoldlarını keşfediyoruz. Burada C Weyl conformal eğrilik tensörü sonra $\tilde{C}$=0 olduğu durumlardaki Lorentzian α-Sasakian Manifoldları üzerinde de çalışacağız. $\tilde{C}$ quasi conformal eğrilik tensörüdür. Her iki durumda da, Lorentzian α-Sasakian manifoldunun S^{2n+1} küresine izometrik olduğu gösterilmiştir, burada $c=\alpha^2$ dir. [12]

Son olarak, $R(X,Y).C=0$ biçimindeki Lorentzian α-Sasakian manifoldu dikkate alınmıştır, burada $R(X,Y)$, X, Y teğet vektörlerine ait manifoldun her bir noktasındaki tensör cebirinin türevi olarak değerlendirilmiştir. $R(X,Y).R=0$ ın $R(X,Y).C=0$ ifadesini gerektirdiği kolayca görülmektedir. Dolayısıyla $R(X,Y).C=0$ şartını sağlayan manifoldlar üzerinde çalışmak yeterlidir.

Tanım 2.16: M (2n+1) boyutlu Lorentzian α-Sasakian manifoldu olsun. M üzerinde ϕ (1, 1)-tensör alanı, ξ kovaryant vektör alanı, η kovaryant vektör alanı ve g Lorentzian metriği ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır. [6], [7], [8], [9], [10], [11]

$$\eta(\xi) = -1 \tag{2.23}$$

$$\phi^2 = I+\eta\otimes\xi \tag{2.24}$$

$$g(\phi X,\phi Y) = g(X,Y)+\eta(X)\eta(Y) \tag{2.25}$$

$$g(X,\xi) = \eta(X) \tag{2.26}$$

$$\phi\xi = 0 \qquad \eta(\phi X) = 0 \tag{2.27}$$

Burada ∇, g Lorentzian metriğinin yönlü türev operatörünü gösterir. Bir α-Sasakian manifoldunda aşağıdaki bağıntıların sağlandığı kolaylıkla görülebilir. [12]

$$\nabla_X \xi = -\alpha\phi X, \tag{2.28}$$

$$(\nabla_X \eta)Y = -\alpha g(\phi X, Y). \tag{2.29}$$

Eğer S Ricci tensörü herhangi X, Y vektörleri ve M üzerinde a, b fonksiyonları için

$$S(X,Y) = ag(X,Y) + b\eta(X)\eta(Y)$$

ise M α-Sasakian manifolduna η-Einstein manifoldu denir. [12]

Ayrıca (ϕ,ξ,η,g) yapılı bu tip bir α-Sasakian manifoldunda aşağıdaki bağıntılar sağlanır. [12]

$$R(\xi,\mathrm{X})Y = \alpha^2\left(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X\right) \tag{2.30}$$

$$R(\mathrm{X},\mathrm{Y})\xi = \alpha^2\left(\eta(Y)X - \eta(X)Y\right) \tag{2.31}$$

$$R(\xi,\mathrm{X})\xi = \alpha^2\left(\eta(X)\xi + X\right) \tag{2.32}$$

$$S(X,\xi) = 2\mathrm{n}\alpha^2\eta(X) \tag{2.33}$$

$$\phi\xi = 2\mathrm{n}\alpha^2\xi \tag{2.34}$$

$$S(\xi,\xi) = -2\mathrm{n}\alpha^2 \tag{2.35}$$

Burada R eğrilik tensörü, S Ricci tensörü Q Ricci operatörü dür.

Ayrıca ϑ-Weyl ve Concircular eğrilik tensörleri sırası ile

$$P(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{2n}\left[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y\right] \tag{2.36}$$

$$Z(X,Y)W = R(X,Y)W - \frac{\tau}{2n(2n+1)}\left[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right] \tag{2.37}$$

şeklinde tanımlanır.[12]

Tanım 2.17: M düzgün, parakompakt Housdorff manifoldu olsun. $\prod : TM \rightarrow M$ de M'nin tanjant demetini göstersin. M'nin bir g yarı-Riemann metriği, M'de (0,2) tipinde düzgün simetrik tensör alanıdır öyle ki $\forall p \in M$ için

$$g|_p : T_pM \times T_pM - R$$

tensörü (-, …, -, +, …, +) işaretli non-dejenere bir iç çarpımdır.

M üzerinde $\left(u, \left(x^1, ..., x^n\right)\right)$ lokal olarak koordinatlardaki g yarı-Riemann metriği

$g|_p = \sum_{i,j=1}^{n} g_{i,j}\left(x\right) dx_i \otimes dx_j$ olarak alınabilir, buradaki $g_{i,j} = g_{j,i}$

ve $\det g \neq 0$ dır. Eğer g, s tane negatif eigen değerine ve r = n – s tane pozitif eigen değerine sahipse o zaman g, (s, r) tipindendir denir. Her $p \in M$ için $g|_p$'nin $diag\{-1, ..., -1, +1, ..., +1\}$ ile gösterilebilecek şekilde lokal koordinatları vardır. (Beem vd 1996)

Tanım 2.18: M diferansiyellenebilir bir manifold ve g'de M üzerinde sabi indeksli bir metrik tensör olmak üzere (M, g) ikilisine bir yarı-Riemann manifoldu denir. (O'neill 1983. Duggal ve Bejancu 1996).

Tanım 2.19: (M, g) bir yarı-Riemann manifoldu olsun. g'nin sabit indeksi q'ya (M, g) yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir, q indeksli ve n-boyutlu bir yarı-Riemann manifoldu M_q^n ile gösterilir. (O'neill 1983. Duggal ve Bejancu 1996).

Tanım 2.20: M_q^n bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Eğer $n \geq 2$ ve q=1 ise, bu durumda M_1^n yarı-Riemann manifolduna Lorentz manifoldu denir. (O'neill 1983. Duggal ve Bejancu 1996).

Özel olarak q = 0 ise, bu durumda M^n bir Riemann manifoldu ve de bir Riemann metriğidir.

3. BÖLÜM

3.1. LORENTZİAN α-SASAKİAN MANİFOLDLARDA BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI

Bu bölümde daha önceki bölümlerde verdiğimiz teoremlerden faydalanılarak Lorentzian α-Sasakian manifoldlarda bazı eğrilik şartlarına bakılmış ve orijinal sonuçlara ulaşılmıştır.

Teorem 3.1: M, (2n+1) boyutlu bir Lorentzian α-Sasakian manifold olsun. Eğer M semi-simetrik ise M $S^{2n+1}(c)$ küresine lokal izometriktir. Burada $c=\alpha^2$ dir.

İspat: M Lorentzian α-Sasakian manifold olsun ve R.R=0 şartını sağlasın. Böylece

$$\big(R(X,Y)R\big)(Z,U)W = R(X,Y)R(Z,U)W - R\big(R(X,Y)Z,U\big)W$$

$$-R\big(Z,R(X,Y)U\big)W - R(Z,U)R(X,Y)W = 0 \tag{3.1}$$

yazılır ve (3.1) denkleminde X=Z= ξ alınırsa,

$$\big(R(\xi,Y)R\big)(\xi,U)W = R(\xi,Y)R(\xi,U)W - R\big(R(\xi,Y)\xi,U\big)W$$

$$-R\big(\xi,R(\xi,Y)U\big)W - R(\xi,U)R(\xi,Y)W = 0 \tag{3.2}$$

elde edilir.

$R(\xi,Y)R(\xi,U)W$ eşitliğinde $R(\xi,U)W$ yerine (2.30) uygulanırsa

$$R(\xi,Y)R(\xi,U)W = R(\xi,Y)\left[\alpha^2\big(g(U,W)\xi-\eta(W)U\big)\right] \tag{3.3}$$

$$R(\xi,Y)R(\xi,U)W = \alpha^2 g(U,W)R(\xi,Y)\xi-\alpha^2\eta(W)R(\xi,Y)U$$

elde edilir ve burada da $R(\xi,Y)\xi$ yerine (2.30) ve (2.31) uygulanırsa

$$R(\xi,Y)R(\xi,U)W = \alpha^2 g(U,W)\left[\alpha^2\left(\eta(Y)\xi+Y\right)\right]$$
$$-\alpha^2\eta(W)\left[\alpha^2\left(g(Y,U)\xi-\eta(U)Y\right)\right]$$

$$R(\xi,Y)R(\xi,U)W = \alpha^4\eta(Y)g(U,W)\xi+\alpha^4 g(U,W)Y$$
$$-\alpha^4\eta(W)g(Y,U)\xi+\alpha^4\eta(W)\eta(U)Y$$

elde edilir.

Aşağıdaki (3.4) eşitliğinde $R(\xi,Y)\xi$ yerine (2.31) uygulanırsa

$$R\left(R(\xi,Y)\xi,U\right)W = R\left(\alpha^2\left(\eta(Y)\xi+Y\right),U\right)W \tag{3.4}$$

$$R\left(R(\xi,Y)\xi,U\right)W = \alpha^2\eta(Y)R(\xi,Y)W+\alpha^2 R(Y,U)W$$

elde edilir ve burada da tekrar $R(\xi,Y)W$ eşitliğine (2.30) uygulanırsa

$$R\left(R(\xi,Y)\xi,U\right)W = \alpha^4\eta(Y)g(U,W)\xi-\alpha^4\eta(Y)\eta(W)U+\alpha^2 R(Y,U)W$$

elde edilir. (3.5) eşitliğinde de $R(\xi,Y)U$ ya (2.30) uygulanırsa

$$R\left(\xi,R(\xi,Y)U\right)W = R\left(\xi,\alpha^2\left(g(Y,U)\xi-\eta(U)Y\right)\right)W \tag{3.5}$$

$$R\left(\xi,R(\xi,Y)U\right)W = \alpha^2 g(Y,U)R(\xi,\xi)W-\alpha^2\eta(U)R(\xi,Y)W$$

elde edilir. $R(\xi,\xi)=0$ olduğundan ve kalan eşitlikte de (2.30) uygulanırsa

$$R\left(\xi,R(\xi,Y)U\right)W = -\alpha^4\eta(U)g(Y,W)\xi+\alpha^4\eta(U)\eta(W)Y$$

eşitliği elde edilir.

Aşağıdaki $R(\xi,Y)W$ eşitliğinde (2.30) uygulanırsa

$$R(\xi,U)R(\xi,Y)W = R(\xi,U)\alpha^2\left(g(Y,W)\xi-\eta(W)Y\right)$$

$$R\left(\xi,R(\xi,Y)U\right)W \quad = \alpha^2 g(Y,W)R(\xi,U)\xi-\alpha^2\eta(W)R(\xi,U)Y$$

elde edilir ve burada da (2.31) ile (2.32) uygulanırsa

$$\begin{aligned} R(\xi,U)R(\xi,Y)W = {} & \alpha^4\eta(U)g(Y,W)\xi+\alpha^4 g(Y,W)U \\ & -\alpha^4\eta(W)g(U,Y)\xi+\alpha^4\eta(W)\eta(Y)U \end{aligned} \tag{3.6}$$

elde edilir.

(3.3)-(3.4)-(3.5)-(3.6), (3.2) de yazılır ve gerekli sadeleştirme yapıldığında

$$\left(R(\xi,Y).R\right)(\xi,U)W \quad =\alpha^4 g(U,W)y-\alpha^2 R(Y,U)W-\alpha^4 g(Y,W)U=0$$

dir. Buradan

$$R(Y,U)W=\alpha^2\left(g(U,W)Y-g(Y,W)U\right)$$

elde edilir.Böylece R.R=0 şartını sağlayan Lorentzian α-Sasakian manifoldlar $S^{2n+1}(c)$ küresine lokal olarak izometriktir.

Teorem 3.2: M (2n+1) boyutlu bir Lorentzian α-Sasakian manifold ve R.P=0 şartını sağlasın. Bu durumda M bir Einstein manifoldudur.

İspat: M Lorentzian α-Sasakian manifold ve R.P=0 şartını sağlasın. $\forall X,Y,Z,U,W\in\chi(M)$ için

$$\begin{aligned} \left(R(X,Y)P\right)(Z,U)W = {} & R(X,Y)P(Z,U)W-P\left(R(X,Y)Z,U\right)W \\ & -P\left(Z,R(X,Y)U\right)W-P(Z,U)R(X,Y)W=0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir ve (3.7) denkleminde X=Z= ξ alınırsa,

$$\left(R(\xi,Y)P\right)(\xi,U)W = R(\xi,Y)P(\xi,U)W - P\left(R(\xi,Y)\xi,U\right)W$$

$$-P\left(\xi,R(\xi,Y)U\right)W - P(\xi,U)R(\xi,Y)W = 0 \qquad (3.8)$$

yazılabilir.

$R(\xi,Y)P(\xi,U)W$ denkleminde $P(\xi,U)W$ eşitliği yerine (2.36) uygulanırsa

$$R(\xi,Y)P(\xi,U)W = R(\xi,Y)\left[R(\xi,U)W - \frac{1}{2n}\left(S(U,W)\xi - S(\xi,W)U\right)\right] \qquad (3.9)$$

elde edilir. Ve burada $R(\xi,U)W$ eşitliğine (2.30) ile $S(\xi,W)$ eşitliğine de (2.33) uygulanırsa buradan

$$R(\xi,Y)P(\xi,U)W = R(\xi,Y)\left[\left(\alpha^2\left(g(U,W)\xi - S(U,W)\xi\right)\right)\right]$$
$$-\frac{1}{2n}\left(S(U,W)\xi - 2n\alpha^2\eta(W)U\right)$$

$$R(\xi,Y)P(\xi,U)W = \alpha^2 g(U,W)R(\xi,Y)\xi - \eta(W)R(\xi,Y)U$$

$$-\frac{1}{2n}S(U,W)R(\xi,Y)\xi + \frac{1}{2n}2n\alpha^2\eta(W)R(\xi,Y)U$$

elde edilir. Elde edilen bu denkleme (2.30), (2.31), (2.32) uygulanırsa

$$R(\xi,Y)P(\xi,U)W = -\frac{\alpha^2}{2n}\eta(Y)S(U,W)\xi - \frac{\alpha^2}{2n}S(U,W)Y$$

$$+\alpha^4\eta(W)g(Y,U)\xi - \alpha^4\eta(W)\eta(U)Y$$

eşitliği elde edilir.

$P(R(\xi,Y)\xi,U)W$ eşitliğindeki $R(\xi,Y)\xi$ yerine (2.32) uygulandığında

$$P(R(\xi,Y)\xi,U)W = P(\alpha^2(\eta(Y)\xi+Y),U)W \tag{3.10}$$

$$P(R(\xi,Y)\xi,U)W = \alpha^2\eta(Y)P(\xi,U)W + \alpha^2 P(Y,U)W$$

elde edilir. Ve burada bu denklemede (2.36) uygulanırsa

$$P(R(\xi,Y)\xi,U)W = \alpha^2\eta(Y)\left[R(\xi,U)W - \frac{1}{2n}(S(U,W)\xi - S(\xi,W)U)\right]$$

$$+\alpha^2\left[R(Y,U)W - \frac{1}{2n}(S(U,W)Y - S(Y,W)U)\right]$$

elde edilir. Burada da (2.33) uygulanıp açıldığında

$$P(R(\xi,Y)\xi,U)W = \alpha^2\eta(Y)R(\xi,U)W - \frac{1}{2n}\eta(Y)S(U,W)\xi$$
$$+\frac{1}{2n}\alpha^4\eta(Y)\eta(W)U$$

$$+\alpha^2 R(Y,U)W - \frac{1}{2n}\alpha^2 S(U,W)Y + \frac{1}{2n}\alpha^2 S(Y,W)U$$

yazılır ve gerekli sadeleştirmelerle birlikte

$$P(R(\xi,Y)\xi,U)W = -\frac{\alpha^2}{2n}\eta(Y)S(U,W)\xi + \alpha^4\eta(Y)\eta(W)U$$

$$+\frac{\alpha^2}{2n}S(U,W)Y - \frac{\alpha^2}{2n}S(Y,W)U$$

eşitliği yazılabilir.

Verilen (3.11) denkleminde gerekli yere (2.30) uygulandığında

$$P\left(\xi, R(\xi, Y)U\right)W = P\left(\xi, \alpha^2\left(g(Y,U)\xi - \eta(U)Y\right)\right)W \tag{3.11}$$

$$P\left(\xi, R(\xi, Y)U\right)W = \alpha^2 g(Y,U)P(\xi,\xi)W - \alpha^2\eta(U)P(\xi,Y)W$$

denklemi elde edilir. bu eşitliğe (2.36) uygulandığında

$$P\left(\xi, R(\xi, Y)U\right)W = -\alpha^2\eta(U)\left(R(\xi,Y)W - \frac{1}{2n}\left(S(Y,W)\xi - S(\xi,W)Y\right)\right)$$

$$P\left(\xi, R(\xi, Y)U\right)W = -\alpha^2\eta(U)R(\xi,Y)W + \frac{1}{2n}\alpha^2\eta(U)S(Y,W)\xi$$
$$-\frac{1}{2n}2n\alpha^4\eta(U)\eta(W)Y$$

elde edilir. Ve buradan da

$$P\left(\xi, R(\xi, Y)U\right)W = -\alpha^2\eta(U)\left(\alpha^2\left(g(Y,W)\xi - \eta(W)Y\right)\right) + \frac{1}{2n}\alpha^2\eta(U)S(Y,W)\xi$$

$$-\frac{1}{2n}2n\alpha^4\eta(U)\eta(W)Y$$

eşitliği elde edilip neticede aşağıda eşitlik bulunmuştur.

$$P\left(\xi, R(\xi, Y)U\right)W = \frac{1}{2n}\eta(U)S(Y,W)\xi - \alpha^2\eta(U)\eta(W)Y$$

$P(\xi,U)R(\xi,Y)W$ eşitliğinde (2.30) uygulanırsa

$$P(\xi,U)R(\xi,Y)W = P(\xi,U)\alpha^2\left(g(Y,W)\xi - \eta(W)Y\right) \tag{3.12}$$

$$P(\xi,U)R(\xi,Y)W = \alpha^2 g(Y,W)P(\xi,U)\xi - \alpha^2\eta(W)P(\xi,U)Y$$

denklemi elde edilir.Bu denkleme (2.36) uygulandığında

$$P(\xi,U)R(\xi,Y)W \ = \alpha^2 g(Y,W)\left[R(\xi,U)\xi - \frac{1}{2n}\big(S(U,\xi)\xi - S(\xi,\xi)U\big)\right]$$

$$-\alpha^2\eta(W)\left[R(\xi,U)Y - \frac{1}{2n}\big(S(U,Y)\xi - \big)S(\xi,Y)U\right]$$

eşitliği elde edilir. Bu denklem düzenlendiğinde ise

$$P(\xi,U)R(\xi,Y)W \ = -\alpha^4\eta(U)g(Y,W)\xi - \alpha^4 g(Y,W)U$$

$$+\frac{\alpha^2}{2n}\eta(W)S(U,Y)\xi - \alpha^4\eta(W)\eta(Y)U$$

denklemi elde ediliyor.

(3.9)-(3.10)-(3.11)-(3.12), (3.8) de yerine yazılır ve gerekli sadeleştirme yapıldığında

$$S(U,Y) = 2n\alpha^2 g(Y,U) - 4n\alpha^2\eta(Y)\eta(U) + 2n\alpha^2\eta(Y)\eta(U) - 2n\eta(Y)\eta(U)$$

$$+2n\eta(Y)\eta(U) + 2n\alpha^2\eta(Y)\eta(U)$$

eşitliği görülür ve

$$S(U,Y) = 2n\alpha^2 g(Y,U)$$

elde edilir.Böylece M Einstein manifoldudur.

Teorem 3.3: M (2n+1) boyutlu bir Sasakian manifold olsun. R.Z=0 şartını sağlayan Lorentzian α-Sasakian lokal olarak $S^{2n+1}(c)$ küresine izometriktir. $\left(c=\alpha^2\right)$

İspat: M Lorentzian α-Sasakian manifold olsun. M üzerinde

$$\big(R(X,Y)Z\big)(V,U)W = R(X,Y)Z(V,U)W - Z\big(R(X,Y)V,U\big)W$$

$$-Z\big(V,R(X,Y)U\big)W - Z(V,U)R(X,Y)W \qquad (3.13)$$

olur ve (3.13) denkleminde X=V= ξ alınırsa,

$$\left(R(\xi,Y)Z\right)(\xi,U)W = R(\xi,Y)Z(\xi,U)W - Z\left(R(\xi,Y)\xi,U\right)W$$

$$-Z\left(\xi,R(\xi,Y)U\right)W - Z(\xi,U)R(\xi,Y)W \tag{3.14}$$

Aşağıdaki (3,15) eşitliğine (2.37) uygulandığında

$$R(\xi,Y)Z(\xi,U)W = R(\xi,Y)\left[R(\xi,U)W - \frac{\tau}{2n(2n+1)}\left(g(U,W)\xi - g(\xi,W)U\right)\right] \tag{3.15}$$

denklemi yazılır. Ve bu denkleme de (2.30) ve (2.26) uygulanırsa

$$R(\xi,Y)Z(\xi,U)W = R(\xi,Y)\begin{bmatrix} \alpha^2\left(g(U,W)\xi - \eta(W)U\right) \\ -\dfrac{\tau}{2n(2n+1)}g(U,W)\xi \\ +\dfrac{\tau}{2n(2n+1)}\eta(W)U \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Parantez açıldığında ise

$$R(\xi,Y)Z(\xi,U)W = \alpha^2 g(U,W)R(\xi,Y)\xi - \alpha^2\eta(W)R(\xi,Y)U$$

$$-\frac{\tau}{2n(2n+1)}g(U,W)R(\xi,Y)\xi + \frac{\tau}{2n(2n+1)}\eta(W)R(\xi,Y)U$$

elde edilir. Tekrar bu denkleme (2.32) ve (2.30) uygulandığında ise

$$R(\xi,Y)Z(\xi,U)W = \alpha^4 g(U,W)\eta(Y)\xi + \alpha^4 g(U,W)Y - \alpha^4\eta(W)g(Y,U)\xi$$

$$+\alpha^4\eta(W)\eta(U)Y - \frac{\tau}{2n(2n+1)}\alpha^2 g(U,W)\eta(Y)\xi - \frac{\tau}{2n(2n+1)}\alpha^2 g(U,W)Y$$

$$+\frac{\tau}{2n(2n+1)}\alpha^2\eta(W)g(Y,U)\xi - \frac{\tau}{2n(2n+1)}\alpha^2\eta(W)\eta(U)Y$$

denklemi elde edilir.

Ve burada $\alpha^2 - \frac{\tau}{2n(2n+1)}$=A yazılırsa yukarıdaki denklem,

$$A\alpha^2\eta(Y)g(U,W)\xi + A\alpha^2 g(U,W)Y - A\alpha^2\eta(W)g(Y,U)\xi + A\alpha^2\eta(W)\eta(U)Y$$

elde edilir.

$$Z\big(R(\xi,Y)\xi,U\big)W = Z\big(\alpha^2\big(\eta(Y)\xi + Y\big),U\big)W \tag{3.16}$$

yukarıda yazan (3.16) eşitliğine (2.31) uygulanmış

$$Z\big(R(\xi,Y)\xi,U\big)W = \alpha^2\eta(Y)Z(\xi,U)W + \alpha^2 Z(Y,U)W$$

elde edilmiştir. Bu eşitliği de (2.37) uygulanırsa

$$Z\big(R(\xi,Y)\xi,U\big)W = \alpha^2\eta(Y)\left[R(\xi,U)W - \frac{\tau}{2n(2n+1)}\big(g(U,W)\xi - g(\xi,W)U\big)\right]$$

$$+\alpha^2\left[R(Y,U)W - \frac{\tau}{2n(2n+1)}\big(g(U,W)Y - g(Y,W)U\big)\right]$$

elde edilir ve yine $\alpha^2 - \frac{\tau}{2n(2n+1)}$=A eşitliği kullanılırsa,

$$Z\big(R(\xi,Y)\xi,U\big)W = A\alpha^2\eta(Y)g(U,W)\xi - A\alpha^2\eta(Y)\eta(W)U$$

$$+\alpha^2 R(Y,U)W - \frac{\tau}{2n(2n+1)}\alpha^2 g(U,W)Y$$

$$+\frac{\tau}{2n(2n+1)}\alpha^2 g(Y,W)U$$

denklemi elde edilir.

$Z\big(\xi,R(\xi,Y)U\big)W$ denkleminde $R(\xi,Y)U$ eşitine (2.30) uygulandığında

$$Z\left(\xi,R\left(\xi,Y\right)U\right)W = Z\left(\xi,\alpha^2 g\left(Y,U\right)\xi-\alpha^2\eta\left(U\right)Y\right)W \tag{3.17}$$

$$Z\left(\xi,R\left(\xi,Y\right)U\right)W = -\alpha^2\eta\left(U\right)Z\left(\xi,Y\right)W$$

elde edilir. (2.37) uygulanır ise

$$Z\left(\xi,R\left(\xi,Y\right)U\right)W = -\alpha^2\eta\left(U\right)\left[R\left(\xi,U\right)W-\frac{\tau}{2n\left(2n+1\right)}\left(g\left(Y,W\right)\xi-g\left(\xi,W\right)Y\right)\right]$$

elde ediliyor ve burada da (2.30) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}Z\left(\xi,R\left(\xi,Y\right)U\right)W &= -\alpha^4\eta\left(U\right)g\left(Y,W\right)\xi+\alpha^4\eta\left(U\right)\eta\left(W\right)Y \\ &\quad +\frac{\tau}{2n\left(2n+1\right)}\alpha^2\eta\left(U\right)g\left(Y,W\right)\xi-\frac{\tau}{2n\left(2n+1\right)}\alpha^2\eta\left(U\right)\eta\left(W\right)Y\end{aligned}$$

eşitliği bulunuyor.Ve yine burada $\alpha^2-\frac{\tau}{2n\left(2n+1\right)}$=A eşiti yukarıdaki denklemde yazılırsa,

$$Z\left(\xi,R\left(\xi,Y\right)U\right)W = -A\alpha^2\eta\left(U\right)g\left(Y,W\right)\xi+A\alpha^2\eta\left(U\right)\eta\left(W\right)Y$$

elde edilir.

$$Z\left(\xi,U\right)R\left(\xi,Y\right)W = Z\left(\xi,U\right)\left(\alpha^2 g\left(Y,W\right)\xi-\alpha^2\eta\left(W\right)Y\right) \tag{3.18}$$

$$Z\left(\xi,U\right)R\left(\xi,Y\right)W = \alpha^2 g\left(Y,W\right)Z\left(\xi,U\right)\xi-\alpha^2\eta\left(W\right)Z\left(\xi,U\right)Y$$

yukarıda ki denkleme önce (2.30) sonra da (2.37) uygulanırsa aşağıdaki

$$\begin{aligned}Z\left(\xi,U\right)R\left(\xi,Y\right)W &= \alpha^2 g\left(Y,W\right)\left[\alpha^2\eta\left(U\right)\xi+\alpha^2 U-\frac{\tau}{2n\left(2n+1\right)}\left(\eta\left(U\right)\xi+U\right)\right] \\ &\quad -\alpha^2\eta\left(W\right)\left[\alpha^2 g\left(U,Y\right)\xi-\alpha^2\eta\left(Y\right)U-\frac{\tau}{2n\left(2n+1\right)}\left(g\left(U,Y\right)\xi-\eta\left(Y\right)U\right)\right]\end{aligned}$$

denklem elde ediliyor. Denklem açıldığında ise

$$\begin{aligned}Z(\xi,U)R(\xi,Y)W &= \alpha^4\eta(U)g(Y,W)\xi+\alpha^4 g(Y,W)U \\ &-\frac{\tau}{2n(2n+1)}\alpha^2\eta(U)g(Y,W)\xi \\ &-\frac{\tau}{2n(2n+1)}\alpha^2 g(Y,W)U-\alpha^4\eta(W)g(U,Y)\xi+\alpha^4\eta(W)\eta(Y)U \\ &+\frac{\tau}{2n(2n+1)}\alpha^2\eta(W)g(U,Y)\xi-\frac{\tau}{2n(2n+1)}\alpha^2\eta(W)\eta(Y)U\end{aligned}$$

eşitliği elde ediliyor. Tekrar bu yukarıdaki denkleme $\alpha^2-\frac{\tau}{2n(2n+1)}$=A eşitliğini uyguladığımızda,

$$\begin{aligned}Z(\xi,U)R(\xi,Y)W &= A\alpha^2\eta(U)g(Y,W)\xi+A\alpha^2 g(Y,W)U \\ &-A\alpha^2\eta(W)g(U,Y)\xi+A\alpha^2\eta(W)\eta(Y)U\end{aligned}$$

elde edilir.

(3.15)-(3.16)-(3.17)-(3.18), (3.14) de yerine yazılır ve gerekli sadeleştirme yapıldığında sonuç olarak

$$R(Y,U)W=\alpha^2 g(U,W)Y-\alpha^2 g(Y,W)U \tag{3.19}$$

elde edilir. Ve böylece R.Z=0 şartını sağlayan Lorentzian α-Sasakian lokal olarak $S^{2n+1}(c)$, (c= α^2) küresine izometriktir.

Teorem 3.4: M (2n+1) boyutlu bir Sasakian manifold olsun. R. C=0 şartını sağlayan Lorentzian α-Sasakian lokal olarak $S^{2n+1}(c)$ küresine izometriktir. (c= α^2)[12]

İspat: M Lorentzian α-Sasakian manifold olsun.

(3.4) , (3.6) ve (3.9) kullanılarak X=ξ eşitliği uygulandığında,

$$C(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \frac{1}{2n-1}\begin{bmatrix} S(X,Z)Y - S(Y,Z)X \\ +g(X,Z)\phi Y - g(Y,Z)\phi X \end{bmatrix}$$

$$-\frac{\tau}{2n(2n-1)}\left[g(X,Z)Y - g(Y,Z)X\right] \tag{3.20}$$

(3.20) denkleminden (3.21) elde edilir.

$$\eta\big(C(X,Y)Z\big) = \frac{1}{2n-1}\begin{bmatrix} \left(\frac{\tau}{2n} - \alpha^2\right)\{g(Y,Z)\eta(X) - g(Y,Z)\eta(Y)\} \\ -\{S(Y,Z)\eta(X) - S(X,Z)\eta(Y)\} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

(3.21) denkleminde Z=ξ alınır ve (2.26) ile (2.33) uygulanırsa

$$\eta\big(C(X,Y)\xi\big) = 0,$$

elde edilir ve tekrar (3.20) de X=ξ eşitliği uygulanırsa

$$\eta\big(C(X,Y)Z\big) = \left(\alpha^2 - \frac{2n\alpha^2}{2n-1} + \frac{\tau}{2n(2n+1)}\right)g(Y,Z)$$

$$-\left(\alpha^2 - \frac{4n\alpha^2}{2n-1} + \frac{\tau}{2n(2n+1)}\right)\eta(Y)\eta(Z) - \frac{1}{2n-1}S(Y,Z) \tag{3.22}$$

elde edilir. Şimdi

$$\big(R(\xi,Y)C\big)(U,V)W = \mathrm{R}(\xi,Y)C(U,V)W - C\big(R(\xi,Y)U,V\big)W$$

$$-C\big(U,R(\xi,Y)V\big)W - C(U,V)R(\xi,Y)W \tag{3.23}$$

$R(X,Y)C = 0$ eşitliği gereğince

$$g\left[R(\xi,Y)C(U,V)W,\xi\right] - g\left[C\big(R(\xi,Y)U,V\big)W,\xi\right]$$

$$-g\left[C\big(R(\xi,Y)UV\big)W,\xi\right] - g\left[C(U,V)R(\xi,Y)W,\xi\right] = 0 \tag{3.24}$$

(3.24) eşitliğinde (3.26) ve (2.30) eşitlikleri uygulanırsa

$$-\alpha^2 g\big(C(U,V)W,Y\big)-\alpha^2\eta(Y)\eta\big(C(U,V)W\big)-\alpha^2 g(Y,U)\eta\big(C(\xi,V)W\big)$$

$$+\alpha^2\eta(U)\eta\big(C(Y,V)W\big)-\alpha^2 g(Y,V)\eta\big(C(U,\xi)W\big)+\alpha^2\eta(V)\eta\big(C(U,Y)W\big)$$

$$-\alpha^2 g(Y,W)\eta\big(C(U,V)\xi\big)+\alpha^2\eta(W)\eta\big(C(U,V)Y\big)=0 \tag{3.25}$$

(3.25) eşitliğinde U=Y alınırsa

$$-\alpha^2 g\big(C(U,V)W,U\big)-\alpha^2\eta(U)\eta\big(C(U,V)W\big)-\alpha^2 g(U,U)\eta\big(C(\xi,V)W\big)$$

$$+\alpha^2\eta(U)\eta\big(C(U,V)W\big)-\alpha^2 g(U,V)\eta\big(C(U,\xi)W\big)+\alpha^2\eta(V)\eta\big(C(U,U)W\big)$$

$$-\alpha^2 g(U,W)\eta\big(C(U,V)\xi\big)+\alpha^2\eta(W)\eta\big(C(U,V)U\big)=0 \tag{3.26}$$

elde edilir. Her noktada tanjant uzayın ortanormal bazı olan $\{\tilde{e}_i : i=1, \ ... \ ,2n+1\}$

$1\le i\le n$ için (3.26) denkleminde U=$\tilde{e}_i$ uygulanırsa

$$-2n\alpha^2\eta\big(C(\xi,V)W\big)=0$$

$$\eta\big(C(\xi,V)W\big)=0 \quad (n>1) \tag{3.27}$$

$\eta\big(C(X,Y)\xi\big)=0$ ve (3.25) ile (3.27) denklemlerinden

$$-\alpha^2 g\big(C(U,V)W,Y\big)-\alpha^2\eta(Y)\eta\big(C(U,V)W\big)+\alpha^2\eta(U)\eta\big(C(Y,V)W\big)$$

$$+\alpha^2\eta(V)\eta\big(C(U,Y)W\big)+\alpha^2\eta(W)\eta\big(C(U,V)Y\big) = 0 \tag{3.28}$$

elde edilir ve (3.28) da (3.21) uygulanırsa

$$-\alpha^2 g\left(C(U,V)W,Y\right)$$

$$+\alpha^2\eta(W)\frac{1}{2n-1}\begin{bmatrix}(\frac{\tau}{2n}-1)\{\eta(U)g(Y,V)-\eta(V)g(U,Y)\}\\ -\{\eta(U)S(Y,V)-\eta(V)S(U,Y)\}\end{bmatrix}=0 \qquad (3.29)$$

elde edilir. (3.27) gereği (3.29) denkleminden

$$S(Y,Z)=(\frac{\tau}{2n}-\alpha^2)g(Y,Z)+\left(\frac{\tau}{2n+1}-(2n+1)\alpha^2\right)\eta(Y)\eta(Z) \qquad (3.30)$$

elde edilir ve (3.28) ve (3.30) bize gösterdi ki

$$-\alpha^2 g\left(C(U,V)W,Y\right)=0 \qquad (3.31)$$

yani buradan $C(U,V)W = 0$ olduğu görülür.

Böylece R.C=0 şartını sağlayan Lorentzian α-Sasakian lokal olarak $S^{2n+1}(c)$ küresine izometriktir. (c= α^2)

Teorem 3.5: Conformally flat Lorentzian α-Sasakian manifoldu lokal olarak $S^{2n+1}(c)$ küresine izometriktir. (c= α^2).

İspat: quasi Weyl conformal eğrilik tensörü $\tilde{C}$,

$$\tilde{C}(X,Y)Z=aR(X,Y)Z+b\begin{Bmatrix}S(Y,Z)X-S(X,Z)Y\\ +g(Y,Z)QX-g(X,Z)QY\end{Bmatrix}$$
$$-\frac{\tau}{(2n+1)}\left(\frac{a}{2n}+2b\right)\{g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\} \qquad (3.32)$$

yukarıdaki denklemde a ve b sabitleri ve a,b$\neq$ 0 ve

$$S(Y,Z)=g(QY,Z).$$

$\tilde{C}$=0 olduğundan (3.32) denkleminden

$$R(X,Y)Z=-\frac{b}{a}\{S(Y,Z)X-S(X,Z)Y-g(Y,Z)QX-g(X,Z)QY\}$$

$$+\left\{\frac{\tau}{(2n+1)a}\left(\frac{a}{2n}+2b\right)\right\}\{g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\}. \tag{3.33}$$

(3. 46) denkleminde $Z=\xi$ alınır ve (2.26), (2.31), (2.33) eşitlikleri uygulanırsa ,

$$\alpha^2\left(\eta(Y)X-\eta(X)Y\right)=-\frac{b}{a}\{\eta(Y)QX-\eta(X)QY\} \tag{3.34}$$

elde edilir. $Y=\xi$ alınır ve (2.23) uygulanırsa biz aşağıdaki (3.35) denklemini elde edeceğiz.

$$QX=\left\{\frac{\tau}{(2n+1)b}\left(\frac{a}{2n}+2b\right)-2n\alpha^2-\frac{a}{b}\alpha^2\right\}X$$

$$+\left\{\frac{\tau}{(2n+1)b}\left(\frac{a}{2n}+2b\right)-4n\alpha^2-\frac{a}{b}\alpha^2\right\}\eta(X)\xi \tag{3.35}$$

(3.35) denkleminde gerekli düzenlemelerden sonra

$$\tau=2n(2n+1)\alpha^2. \tag{3.36}$$

(3.36) yı (3.35) de kullanırsak

$$QX=2n\alpha^2X. \tag{3.37}$$

elde edilir. Son olarak (3.37) yi (3.33) de kullanırsak

$$R(X,Y)Z=\alpha^2\{g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\}.$$

olduğu görülür ve yarı conormal flat Lorentzian α-Sasakian manifolduna lokal olarak $S^{2n+1}(c)$ küresine izometriktir. (c= α^2)

Teorem 3.6: M (2n+1) boyutlu bir Lorentzian α-Sasakian manifold olsun.M P.R=0 şartını sağlasın.Bu durumda M bir Einstein manifoldudur.

İspat: M Lorentzian α-Sasakian manifold ve P.R=0 şartını sağlasın. $\forall X,Y,Z,U,W \in \chi(M)$ için

$$\big(P(X,Y)R\big)(Z,U)W = P(X,Y)R(Z,U)W - R\big(P(X,Y)Z,U\big)W$$

$$-R\big(Z,P(X,Y)U\big)W - R(Z,U)P(X,Y)W = 0 \qquad (3.38)$$

dır. (3.38) denkleminde $X = Z = \xi$ alınırsa,

$$\big(P(\xi,Y)R\big)(\xi,U)W = P(\xi,Y)R(\xi,U)W - R\big(P(\xi,Y)\xi,U\big)W$$

$$-R\big(\xi,P(\xi,Y)U\big)W - R(\xi,U)P(\xi,Y)W = 0 \qquad (3.39)$$

dır.

$P(\xi,Y)R(\xi,U)W$ ifadesinde $R(\xi,U)W$ eşitliği yerine (2.30) uygulanırsa

$$P(\xi,Y)R(\xi,U)W = P\Big(\xi,Y\big[\alpha^2\big(g(U,W)\xi - \eta(W)U\big)\big]\Big)$$

elde edilir ve yukarıdaki denklemi açarsak,

$$P(\xi,Y)R(\xi,U)W = \alpha^2 g(U,W)P(\xi,Y)\xi - \alpha^2\eta(W)P(\xi,Y)U \qquad (3.40)$$

elde edilir. Buradaki (3.40) denklemine gereken ifadelere (2.36) uygulanırsa ,

$$\begin{aligned} P(\xi,Y)R(\xi,U)W = {} & \alpha^2 g(U,W)\left[R(\xi,Y)\xi - \frac{1}{2n}\big(S(Y,\xi)\xi - S(\xi,\xi)Y\big)\right] \\ & -\alpha^2\eta(W)\left[R(\xi,Y)U - \frac{1}{2n}\big(S(Y,U)\xi - S(\xi,U)Y\big)\right] \end{aligned} \qquad (3.41)$$

elde edilir.(3.41) eşitliğine de (2.30) ve (2.31) uygulanırsa

$$P(\xi,Y)R(\xi,U)W=-\alpha^4\eta(W)g(Y,U)\xi+\frac{\alpha^2}{2n}\eta(W)S(Y,U)\xi \qquad (3.42)$$

eşitliği yazılabilir.

$R\left(P(\xi,Y)\xi,U\right)W$ ifadesinde ki $P(\xi,Y)\xi$ eşitini (3.41) denkleminde 0 olarak hesapladığımız için

$R\left(P(\xi,Y)\xi,U\right)W=0$ eşitliğini elde ederiz. (3.43)

(3.39) denklemindeki $R\left(\xi,P(\xi,Y)U\right)W$ ifadesine (2.36) uygulanırsa,

$R\left(\xi,P(\xi,Y)U\right)W=R\left(\xi,\alpha^2 g(Y,U)\xi-\frac{1}{2n}S(Y,U)\xi\right)W$ yazılır.Ve bu denklemde açılırsa,

$$R\left(\xi,P(\xi,Y)U\right)W=\alpha^2 g(Y,U)R(\xi,\xi)W-\frac{1}{2n}S(Y,U)R(\xi,\xi)W \qquad (3.44)$$

elde edilir.Bu (3.44) denklemindeki $R(\xi,\xi)$ eşiti 0 olduğunda

$R\left(\xi,P(\xi,Y)U\right)W=0$ ifadesi elde edilir. (3.45)

(3.39) denklemindeki $R(\xi,U)P(\xi,Y)W$ eşitliğine (2.36) uygulanırsa

$$R(\xi,U)P(\xi,Y)W=R(\xi,U)\left[\alpha^2 g(Y,W)\xi-\frac{1}{2n}S(Y,W)\xi\right]$$

elde edilir ve bu denklem açılırsa,

$$R\left(\xi,P(\xi,Y)U\right)W=\alpha^2 g(Y,W)R(\xi,U)\xi-\frac{1}{2n}S(Y,W)R(\xi,U)\xi \qquad (3.46)$$

yazılabilir.Bu (3.46) denklemine ise (2.32) uygulanırsa,

$$R\left(\xi,P\left(\xi,Y\right)U\right)W=\alpha^{4}\eta\left(U\right)g\left(Y,W\right)\xi+\alpha^{4}g\left(Y,W\right)U$$
$$-\frac{\alpha^{2}}{2n}\eta\left(U\right)S\left(Y,W\right)\xi-\frac{\alpha^{2}}{2n}S\left(Y,W\right)U \tag{3.47}$$

eşitliği elde edilir.

(3.42)-(3.43)-(3.45)-(3.47), (3.41) de yerine yazılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$S\left(Y,U\right)=2n^{2}g\left(Y,U\right)$$

elde edilir.Böylece M Einstein manifoldudur.

Sonuç 3.1: M (2n+1) boyutlu bir Lorentzian α-Sasakian manifold olsun.

RP-PR=0 dır.

İspat: Teorem 3.2: de R.P=0 şartının sağlandığı ispatlanmış ve (3.9)-(3.10)-(3.11)-(3.12) farkı hesaplanarak

$$S\left(U,Y\right)=2n\alpha^{2}g\left(Y,U\right)-4n\alpha^{2}\eta\left(Y\right)\eta\left(U\right)-2n\alpha^{2}\eta\left(Y\right)\eta\left(U\right)-2n\eta\left(Y\right)\eta\left(U\right)$$

$$+2n\eta\left(Y\right)\eta\left(U\right)+2n\alpha^{2}\eta\left(Y\right)\eta\left(U\right)$$

denklemi elde edilmiş ve gerekli sadeleştirmelerle

$$S\left(U,Y\right)=2n\alpha^{2}g\left(Y,U\right) \tag{3.48}$$

denklemi elde edilmişti.

Yine Teorem 3.6: da P.R=0 şartının sağlanması durumunda sonuç olarak M nin bir Einstein manifoldu olup olmadığına bakılmış ve (3.42)-(3.43)-(3.45)-(3.47) farkı sonucunda

$$S\left(Y,U\right)=2n^{2}g\left(Y,U\right) \tag{3.49}$$

denklemi elde edilmişti.

Şimdi R.P-P.R=0 şartı için sadece (3.48) ile (3.49) denklemlerinin eşitliğini sağlamak yeterli olacaktır.Ve bu eşitlikte aşikar olduğu için R.P-P.R=0 dır diyebiliriz.

Sonuç 3.2: M (2n+1) boyutlu bir Lorentzian α-Sasakian manifold olsun.R.P+P.R=0 ise M bir Einstein manifoldudur.

İspat: Teorem 3.2: den elde etmiş olduğumuz R.P=0 iken

$$S(Y,U)=2n^2g(Y,U) \tag{3.50}$$

denklemi ile yine Teorem 3.6: dan elde etmiş olduğumuz P.R=0 iken

$$S(Y,U)=2n^2g(Y,U) \tag{3.51}$$

denklemlerinin toplanması durumuna bakalım.(3.50) ve (3.51) denkleminin eşiti

$$S(Y,U)-2n^2g(Y,U)=0$$

denklemi şeklindedir.(3.50) ve (3.51) denklemleri toplandığında ise

$$S(Y,U)-2n^2g(Y,U)+S(Y,U)-2n^2g(Y,U)=0$$

$$S(Y,U)=2n^2g(Y,U) \tag{3.52}$$

elde edilir.

Böylece M nin bir Einstein manifoldu olduğu görülmektedir.

Teorem 3.7: M (2n+1) boyutlu bir Sasakian manifold olsun. Z.R=0 şartını sağlayan Lorentzian α-Sasakian lokal olarak $S^{2n+1}(c)$ küresine izometriktir. $(c=\alpha^2)$

İspat: M Lorentzian α-Sasakian manifold olsun. M üzerinde

$$\begin{aligned}(Z(X,Y)R)(V,U)W &= Z(X,Y)R(V,U)W-R(Z(X,Y)V,U)W \\ &\quad -R(V,Z(X,Y)U)W-R(V,U)Z(X,Y)W\end{aligned} \tag{3.53}$$

olur ve (3.53) denkleminde X=V= ξ alınırsa,

$$\big(Z(\xi,Y)R\big)(\xi,U)W = Z(\xi,Y)R(\xi,U)W - R\big(Z(\xi,Y)\xi,U\big)W \tag{3.54}$$

$$-R\big(\xi,Z(\xi,Y)U\big)W - R(\xi,U)Z(\xi,Y)W$$

Yukarıdaki (3.54) dekleminde $Z(\xi,Y)R(\xi,U)W$ eşitine (2.30) uygulanırsa

$$Z(\xi,Y)R(\xi,U)W = \alpha^2 g(U,W)Z(\xi,Y)\xi - \alpha^2\eta(W)Z(\xi,Y)U \tag{3.55}$$

elde edilir ve (3.55) denklemine de (2.37) uygulanırsa

$$Z(\xi,Y)R(\xi,U)W{=}\alpha^2 g(U,W)\left(\alpha^2 - \frac{\tau}{2n(2n+1)}\right)\big(\eta(Y)\xi + Y\big)$$
$$-\alpha^2\eta(W)\left(\alpha^2 - \frac{\tau}{2n(2n+1)}\right)\big(g(Y,U)\xi - \eta(U)Y\big)$$

elde edilir ve bu denklemde $\alpha^2 - \dfrac{\tau}{2n(2n+1)}$ =A eşiti yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} Z(\xi,Y)R(\xi,U)W &{=}\mathrm{A}\alpha^2 g(U,W)\big(\eta(Y)\xi + Y\big) \\ &- A\alpha^2\eta(W)\big(g(Y,U)\xi - \eta(U)Y\big) \end{aligned} \tag{3.56}$$

elde edilir.

(3.54) denklemindeki $R\big(Z(\xi,Y)\xi,U\big)W$ eşitine (2.37) uygulanırsa,

$$R\big(Z(\xi,Y)\xi,U\big)W = \mathrm{R}\left(\mathrm{R}(\xi,\mathrm{Y})\xi - \frac{\tau}{2n(2n+1)}\big[g(Y,\xi)\xi - g(\xi,\xi,)Y\big],U\right)W$$

elde edilir ve bu denklemede (2.30) ve (2.26) uygulanırsa,

$$R\left(Z\left(\xi,Y\right)\xi,U\right)W=\left(\alpha^{2}-\frac{\tau}{2n\left(2n+1\right)}\right)\eta\left(Y\right)\alpha^{2}\left(g\left(U,W\right)\xi-\eta\left(W\right)U\right)$$
$$+\left(\alpha^{2}-\frac{\tau}{2n\left(2n+1\right)}\right)R\left(Y,U\right)W$$

elde edilir ve bu denklemde $\alpha^{2}-\frac{\tau}{2n\left(2n+1\right)}$=A eşiti yerine yazılırsa,

$$R\left(Z\left(\xi,Y\right)\xi,U\right)W=\mathrm{A}\eta\left(Y\right)\alpha^{2}\left(g\left(U,W\right)\xi-\eta\left(W\right)U\right)+AR\left(Y,U\right)W \tag{3.57}$$

elde edilir.

(3.54) denkleminde $R\left(\xi,Z\left(\xi,Y\right)U\right)W$ eşitine (2.37) uygulanırsa,

$$R\left(\xi,Z\left(\xi,Y\right)U\right)W=R\left(\xi,R\left(\xi,Y\right)U-\frac{\tau}{2n\left(2n+1\right)}\left[g\left(Y,U\right)\xi-g\left(\xi,U\right)Y\right]\right)W$$

elde edilir ve bu denkleme de (2.26) ve (2.30) uygulanırsa,

$$R\left(\xi,Z\left(\xi,Y\right)U\right)W=\left(\alpha^{2}-\frac{\tau}{2n\left(2n+1\right)}\right)\eta\left(U\right)\alpha^{2}\left(g\left(Y,W\right)\xi-\eta\left(W\right)Y\right)$$

elde edilir ve bu denklemde $\alpha^{2}-\frac{\tau}{2n\left(2n+1\right)}$=A eşiti yerine yazılırsa,

$$R\left(\xi,Z\left(\xi,Y\right)U\right)W=A\eta\left(U\right)\alpha^{2}\left(g\left(Y,W\right)\xi-\eta\left(W\right)Y\right) \tag{3.58}$$

elde edilir.

(3.54) denkleminde $R\left(\xi,U\right)Z\left(\xi,Y\right)W$ eşitine (2.37) uygulanırsa,

$$R\left(\xi,U\right)Z\left(\xi,Y\right)W=R\left(\xi,U\right)\left[R\left(\xi,Y\right)W-\frac{\tau}{2n\left(2n+1\right)}\left(g\left(Y,W\right)\xi-g\left(\xi,W\right)Y\right)\right]$$

elde edilir.Ve yine bu denkleme (2.26) ve (2.30) uygulanırsa,

$$R(\xi,U)Z(\xi,Y)W=\left(\alpha^2-\frac{\tau}{2n(2n+1)}\right)g(Y,W)\alpha^2\left(\eta(U)\xi+U\right)$$
$$-\left(\alpha^2-\frac{\tau}{2n(2n+1)}\right)\eta(W)\alpha^2\left(g(U,Y)\xi-\eta(Y)U\right)$$

elde edilir ve bu denklemde $\alpha^2-\frac{\tau}{2n(2n+1)}$=A eşiti yerine yazılırsa,

$$R(\xi,U)Z(\xi,Y)W=Ag(Y,W)\alpha^2\left(\eta(U)\xi+U\right)-A\eta(W)\alpha^2\left(g(U,Y)\xi-\eta(Y)U\right) \quad (3.59)$$

elde edilir ve (3.56)-(3.57)-(3.58)-(3.59) farkı uygulanırsa,

$$R(Y,U)W=\alpha^2\left(g(U,W)Y-g(Y,W)U\right) \quad (3.60)$$

elde edilir. Ve böylece R.Z=0 şartını sağlayan Lorentzian α-Sasakian lokal olarak $S^{2n+1}(c)$ küresine izometriktir.

Sonuç 3.3: M (2n+1) boyutlu bir Sasakian manifold olsun.M üzerinde R.Z-Z.R=0 dir.

İspat: M (2n+1) boyutlu bir Sasakian manifold olsun.Teorem 3.3: de R.Z=0 şartını sağlayan manifoldun lokal olarak $S^{2n+1}(c)$ küresine izometrik olduğunu göstermiştik ve,

(3.15)-(3.16)-(3.17)-(3.18) uygulanarak, gerekli sadeleştirmelerle sonuç olarak,

$$R(Y,U)W=\alpha^2 g(U,W)Y-\alpha^2 g(Y,W)U \quad (3.61)$$

denklemini elde etmiştik.

Yine Teorem 3.6: da Z.R=0 şartının sağlandığı durumda lokal olarak $S^{2n+1}(c)$ küresine izometrik olduğu ispatlanmış ve, (3.56)-(3.57)-(3.58)-(3.59) farkı uygulanılarak sonuç olarak,

$$R(Y,U)W=\alpha^2\left(g(U,W)Y-g(Y,W)U\right) \quad (3.62)$$

denklemi elde edilmiştir.

Şimdi R.Z-Z.R=0 şartının sağlandığını (3.61) ile (3.62) denklemlerinin eşit olduğunu görmek yeterli olacaktır ve bu eşitlikte açıkça görüldüğünden R.Z-Z.R=0 dır.

Sonuç 3.4: M (2n+1) boyutlu bir Sasakian manifold olsun.R.Z+Z.R=0 şartını sağlayan Lorentzian α-Sasakian lokal olarak $S^{2n+1}(c)$ küresine izometriktir.

İspat: M (2n+1) boyutlu bir Sasakian manifold olsun.Teorem 3.3: de R.Z=0 şartını sağlayan manifoldun lokal olarak $S^{2n+1}(c)$ küresine izometrik olduğunu göstermiştik ve,

(3.15)-(3.16)-(3.17)-(3.18) uygulanarak, gerekli sadeleştirmelerle sonuç olarak,

$$R(Y,U)W=\alpha^2 g(U,W)Y-\alpha^2 g(Y,W)U \tag{3.61}$$

denklemini elde etmiştik.

Yine Teorem 3.6: da Z.R=0 şartının sağlandığı durumda lokal olarak $S^{2n+1}(c)$ küresine izometrik olduğu ispatlanmış ve,

(3.56)-(3.57)-(3.58)-(3.59) farkı uygulanılarak sonuç olarak,

$$R(Y,U)W=\alpha^2\left(g(U,W)Y-g(Y,W)U\right) \tag{3.62}$$

denklemi elde edilmiştir.

Yukarıda verilen (3.61) ve (3.62) denklemlerinin eşiti olarak,

$$R(Y,U)W-\alpha^2\left(g(U,W)Y-g(Y,W)U\right)=0 \tag{3.63}$$

eşitliğini kullanacak olursak R.Z+Z.R =0 olması durumunda (3.61) ve (3.62) denklemlerinin toplanması ile oluşan denklem,

$$R(Y,U)W-\alpha^2\left(g(U,W)Y-g(Y,W)U\right)+R(Y,U)W-\alpha^2\left(g(U,W)Y-g(Y,W)U\right)=0$$

veya,

$$2\left[R(Y,U)W-\alpha^2\left(g(U,W)Y-g(Y,W)U\right)\right]=0 \tag{3.64}$$

şeklinde yazılabilir.Bu eşitlikten de (3.62)=(3.63) olduğu ortaya çıkar ve sonuç olarakta Lorentzian α-Sasakian lokal olarak $S^{2n+1}(c)$ küresine izometriktir diyebiliriz ve ispat tamamlanmış olur.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] O’Neill B. , 1983, Semi-Riemannian Geometry, Academic Pres, NewYork, 468p.

[2] Hacısalihoğlu H. H. , 1983, Diferensiyel geometri, İnönü Üniveritesi Yayınları, 895p.

[3] Yano K. , kon M. , 1984, Structures on manifolds, World Scientific, 508p.

[4] Chen, B. Y. , 1973, Geometry of submanifolds, Pure and Applied Mathematics. No. 22. Marcel Dekker, Inc. , New York.

[5] Kobayashi, S. , Nomizu, K. , 1963, Foundations of Differantial Geometry, 470p.

[6] M. C. Chaki, and B. Gupta, On conformally Symmetric Spaces, Indian j. Math. , 1963

[7] K. Matsumoto. , 1989, On Lorentzian paracontac manifolds. Bull. of Yamagata univ. Nat. Sci.

[8] I. Mihai and R. Rosca. , 1992, On Lorentzian P-Sasakian manifols, Classical Analysis, Singapore,

[9] K. Matsumoto and I. Mihai. , 1988, On a certain transformation in Lorentzian para-Sasakan manifols. Tensor, N. S.

[10] I. Mihai, A. A. Shaikh and U. C. de, On Lorentzian para-Sasakian Manifolds

[11] M. Tarafdar and A. Bhattacharyya. , 2000, On Lorentzian para-Sasakian manifolds, Syeps in diff. Geo. , Proc. of the Coll. on Differential Geo.

[12] Yıldız, A. , 2002, Değme metrik manifoldlarda bazı eğrilik şartları, Osmangazi Üniv. Fen Bilimleri Enst. Doktora Tezi.

[13] U. C. De and M. M. Tripathi. , 2003, Ricci Tensor in 3-dimensional Trans- Sasakian Manifolds, Kyungpook Math. J. , 43, 247-255

[14] J. S. Kim. , 2006, R. Prasad ad M. M. Tripathi, On generalized Ricci-recurrent trans- Sasakian anifolds, J. Korean Math. Soc. , 39(6), 953-961.

[15] S. Tanno. , 1969, The automorphism groups of almost cantact Riemann manifolds, Tohoku Math. J. , 21,321, 38

[16] JA. Oubina. , 1985, New calsses of contact metric structres, Publ. Math. Debrecen, 32(34), 187-193

[17] M. M. Tripathi. , 2000, Trans-Sasakian manifolds are generalized guasi-Sasakian, Nepali Math. Sci. Rep. , 18(1-2), 11-14

[18] A. Gray and L. M. Hervalla. , 1980, The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and heir linear invariants, Ann. Mat. Pura Appl. , 123(4), 35-38

[19] D. Janssens and L. Vanhacke. , 1981, Almost contact structures and curvature tensors, Kodai Math. J. , 4, 1-27

[20] D. Chinea and C. Gonzales. , 1987, Curvature relations in trans-Sasakian manifolds, Prceedigs of the XIIth Porteguese-Spanish conference on Mathematics, vol II(Braga), 564, 571, Univ. Minho,