Şubat – 2007

PARA SASAKİAN MANİFOLDLARDA

BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI

Mehmet Alattin DEMİRLİ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Şubat – 2007

PARA SASAKİAN MANİFOLDLARDA BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI

Mehmet Alattin DEMİRLİ

Dumlupınar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Ahmet YILDIZ

Şubat – 2007

KABUL VE ONAY SAYFASI

Mehmet Alattin DEMİRLİ'nin YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "PARA SASAKİAN MANİFOLDLARDA BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

........./......../2007

Üye : Doç. Dr. Cihan ÖZGÜR

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ahmet YILDIZ (Danışman)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Erhan ATA

Fen Bilimleri Enstitüsün Yönetim Kurulu'nun ....../...../..... gün ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

. Prof. Dr. M. Sabri ÖZYURT

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

PARA SASAKİAN MANİFOLDLARDA BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI

Mehmet Alattin DEMİRLİ
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Tezi 2007
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ahmet YILDIZ

ÖZET

Bu tezin amacı Para-sasakian manifoldlarda bazı eğrilik şartlarını çalışmaktır. Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar ve sonuçları içermektedir. İkinci bölüm Sasakian ve Para-Sasakian manifoldlar ile ilgili tanımlar, teoremler ve sonuçları içermektedir. Üçüncü bölüm orijinal çalışmalarımızdan oluşmaktadır.

Birinci bölümde Riemann eğrilik tensörü, Einstein manifold, Weyl-conformal eğrilik tensörü, projektif eğrilik tensörü, konharmonikal eğrilik tensörü, hemen hemen değme metrik manifoldlar gibi temel kavramlar tanıtılmıştır.

İkinci bölümde Sasakian manifold, Sasakian uzay formu, Para-Sasakian manifold tanımları, bu tanımlarla ilgili temel teorem ve önermeler verilmiştir.

Son bölümde Para-Sasakian manifoldlarda Riemann eğrilik tensörü, konharmonikal eğrilik tensörü, Weyl-conformal eğrilik tensörü ile ilgili bazı eğrilik şartları ve bu eğrilik şartlarını sağlamamızda kullandığımız eşitlikler verilmiştir. Verilen tüm bu bilgiler ışığında yazılan teoremler ispatlanmış ve sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Riemann eğrilik tensörü, Einstein manifold, η- Einstein manifold, Weyl-conformal tensörü, sasakian manifold, hemen hemen değme metrik manifold, Para-Sasakian manifold

SOME CURVATURE CONDITIONS ON PARA SASAKİAN MANİFOLDS

Mehmet Alattin DEMİRLİ
Department of Mathematics
MSc. Thesis 2007
Supervisor: Asist.Prof.Dr. Ahmet YILDIZ

ABSTRACT

The aim of this thesis is to study some curvature conditions on Para-Sasakian manifolds. The thesis has three chapters.

First chapter contains some fundamental definitions and results which will be used in other chapters. Second chapter contains some fundamental definitions, theorems and results about Sasakian and Para-Sasakian manifolds. Chapter three contains original works.

In the first chapter we introduce basic definitions such as, Riemannian curvature tensor, Einstein manifold, Weyl Conformal curvature tensor, projective curvature tensor, Conhormonical curvature tensor and almost contact metric manifolds.

In the second chapter the definitions of Sasakian manifold, sasakian space form, Para-Sasakian manifold and the basic theorems and propositions which are connected with these definitions have been given.

In the last chapter some curvature conditions and equations which are used to provide these curvature conditions about Riemann curvature tensor, conharmonical curvature tesor, Weyl-conformal curvature tensor on Para-Sasakian manifolds are given. Under the light of these given information, the written theorems have been proved and results have been obtained.

Keywords: Riemannian curvature tensor, Einstein manifold, η- Einstein manifold,Weyl-conformal tensor, almost contact metric manifold, Para-Sasakian manifold

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek çalışmanın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Ahmet YILDIZ'a, ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklamalar**
R	Reel sayılar cümlesi
M	Manifold
g	Metrik tensör
C^{∞}	Diferensiyellenebilme
$[,]$	Lie Parantez operatörü
$T_P(M)$	p noktasında teğet uzay
$T_P^{\perp}(M)$	p noktasında normal uzay
$\chi(M)$	M nin teğet vektör alanlarının uzayı
$\chi^{\perp}(M)$	M nin normal vektör alanlarının uzayı
∇	M üzerindeki afin koneksiyon
$\tilde{\nabla}$	$\bar{M}$ üzerindeki afin koneksiyon
D	Normal koneksiyon
R	M nin Riemann eğrilik tensörü
$\bar{R}$	$\bar{M}$ nin Riemann eğrilik tensörü
A_{ξ}	Şekil operatörü
B	İkinci temel form
τ	Skaler eğrilik
S	Ricci tensörü
C	Weyl-conformal tensörü
Q	Ricci operatörü
η	1-form
K	Konharmonikal eğrilik tensörü
P	Projektif eğrilik tensörü
ϕ	(1-1)- tipinde tensör alanı İkinci temel formun boyu
N_F	F nin Nijenhuis torsion tensörü

1.TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar tanıtılmıştır.

Tanım 1.1.1: M bir diferansiyellenebilir (C^{∞}) manifold olsun. M üzerindeki C^{∞} vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den R ye C^{∞} fonksiyonların uzayı $C^{\infty}(M, R)$ olmak üzere, M üzerinde;

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \mapsto C^{\infty}(M, R)$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik, 2-lineer g Riemann metriği ile birlikte M ye bir Riemann manifoldu adı verilir ve (M, g) şeklinde gösterilir.[6]

M manifoldunun herhangi iki p ve q noktası için M üzerinde bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabilirse M ye bağlantılı manifold adı verilir. M bağlantılı ve temel grubu sadece birim elemandan oluşuyor ise M ye basit bağlantılıdır denir [2]

Tanım 1.1.2: M bir diferensiyellenebilir manifold ve M üzerindeki C^{∞} vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere;

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \xrightarrow{2-\text{lineer}} \chi(M)$$

$$(X, Y) \longrightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y$$

dönüşümü $\forall f, g \in C^{\infty}(M, R)$, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

i) $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$

ii) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$

iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

özeliklerini sağlarsa, ∇ ya M üzerinde bir Afin Koneksiyon adı verilir [3].

Tanım 1.1.3: (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan bir afin koneksiyon olsun. O zaman $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere; ∇ dönüşümü;

i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (Koneksiyonun sıfır torsiyon özeliği),

ii) $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Koneksiyonun metrikle bağdaşması özeliği)

şartlarını sağlıyorsa, ∇ ya M üzerinde sıfır torsiyonlu Riemann Koneksiyon veya M nin Levi-Civita Koneksiyonu adı verilir [3].

Tanım 1.1.4: M bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere;

$$\nabla : \chi(M) x \chi(M) \xrightarrow{2-lineer} \chi(M)$$

$$(X, Y) \longrightarrow \nabla(X,Y) = \nabla_X Y$$

biçiminde tanımlanan ∇ operatörü, M nin bir U bölgesi üzerinde tanımlı olup her bir C^∞ X, $Y \in \chi(U)$ vektör alan çiftine U üzerinde $\nabla_X Y$ ile ifade edilen üçüncü bir C^∞ vektör alanı karşılık getirir.

Bu karşılık gelme aşağıdaki özellikleri sağladığında ∇ ya Lineer Koneksiyon (veya kovaryant türev) adı verilir [2].

$\forall X, Y, Z \in \chi(M)$, $\forall f \in C^\infty(M, R)$ olmak üzere;

i) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$,

ii) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$,

iii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

iv) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

dir.

Tanım 1.1.5: (M, g) bir Riemann manifoldu, ∇ de M üzerindeki Levi–Civita koneksiyonu olsun.

$$R : \chi(M) x \chi(M) x \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{1.1}$$

ile tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde bir (1, 3)-tensör alanıdır ve M nin Riemann eğrilik tensörü olarak adlandırılır. Ayrıca $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$ tensörüne M nin Riemann-Christoffel eğrilik tensörü adı verilir.

Her $X, Y, Z, V, W \in \chi(M)$ için Riemann eğrilik tensörü R aşağıdaki özelliklere sahiptir;

i) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z,$ (1.2)

ii) $g(R(X, Y)V, W) = -g(R(X, Y)W, V)$ (1.3)

iii) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y =$ (1.4)

iv) $g(R(X, Y)V,W) = g(R(V,W)X,Y)$ [14] (1.5)

v) $g(X,R(Y,Z)W) = R(Y,Z,W,X)$ (1.6)

Tanım 1.1.6: *(M,g)* bir Riemann mamifoldu olsun.m üzerinde sırası ile ξ ve bir r-form ω olmak üzere,

$V_2,...,V_r \in T_P M \ (r \geq 1)$ vektörleri için M üzerinde;

$$(C_\xi \omega)(P)(V_2,...V_1) = \omega(\xi(P), V_2,...V_r) \quad (1.7)$$

olacak şekilde tanımlanan $(C_\xi \omega)$ (r-1) formuna ω'nin ξ ile konstraksiyonu denir [15].

Tanım 1.1.7: *(M, g)* bir Riemann manifoldu olsun. T_pM tanjant uzayının iki boyutlu altuzayı Π olmak üzere $V, W \in \Pi$ tanjant vektörleri için Q fonksiyonu;

$$\boldsymbol{Q(V, W) = g(V, V)g(W, W) - g(V, W)^2}$$

biçiminde tanımlansın. $Q(V, W) \neq 0$ olmak üzere;

$$\tau(V,W) = \frac{g(R(V,W)W,V)}{Q(V,W)} \quad (1.8)$$

olup buna Π nin kesitsel eğriliği denir ve $\tau(\Pi)$ ile gösterilir [2].

Tanım 1.1.8: *(M, g)* n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için;

$S(X, Y) = \lambda g(X,Y)$ (1.9)

olacak biçimde M üzerinde bir λ fonksiyonu var ise yani M nin Ricci tensörü S, metrik tensör g nin bir katı ise M ye Einstein manifoldu adı verilir [4].

Tanım 1.1.9: *(M, g)* n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere;

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i) \tag{1.10}$$

değerine M nin skalar eğriliği adı verilir [4].

Tanım 1.1.10: *(M, g)* n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları olsunlar.

$$S : \chi(M) \text{ x } \chi(M) \to R$$

$$(X,Y) \to S(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X)Y, e_i) \tag{1.11}$$

şeklinde tanımlı (0,2) tipindeki S tensör alanına, M üzerinde *Ricci eğrilik tensörü* adı verilir [4].Ayrıca Q Ricci operatörü ve S^2 (0,2)-tensörü sırası ile

$$g(QX,Y)=S(X,Y) \tag{1.12}$$

$$S^2(X,Y)=S(QX,Y) \tag{1.13}$$

biçiminde tanımlanır [8].

Tanım 1.1.11: M n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için M nin Weyl conformal eğrilik tensör alanı;

$$C(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{n-2}[S(Y, Z)X - S(X, Z)Y + g(Y,Z)QX - g(X, Z)QY]$$

$$+ \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \tag{1.14}$$

ile tanımlanır. Burada Q Ricci operatörüdür [4].

Tanım 1.1.12: $n \geq 4$ için $C = 0$ ise M manifoldu conformal flat olarak adlandırılır [4].

Tanım 1.1.13: Sabit eğrilikli, tam, bağlantılı manifoldlara uzay form denir. n-boyutlu bir M uzay formu $M^n(c)$ ile gösterilir. Eğer,

$$\begin{aligned} c = 0 \; & ise \quad M^n(c) = \mathbf{E}^n \; \text{Öklid uzayı} \\ c = \frac{1}{r^2} \; & ise \quad M^n(c) = S^n(r) \; küresi \\ c = -\frac{1}{r^2} \; & ise \quad M^n(c) = H^n(r) \; \text{Hiperbolik uzay} \end{aligned}$$

dır [5].

Tanım 1.1.14: *M* $n\geq 2$ boyutlu C^{∞}sınıfından bağlantılı bir Riemann manifoldu olsun. *M* üzerinde tanımlı (0,2)-tipinde bir simetrik tensör alanı A olmak üzere Λ_A endomorfizmi

$$\Lambda_A : \quad \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M) \tag{1.15}$$

$$(X \Lambda_A Y)Z = A(Y,Z)X - A(X,Z)Y \tag{1.16}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer A=g alınırsa son denklem

$$(X \Lambda_g Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y \tag{1.17}$$

biçimine indirgenir. Bundan sonra $(X \Lambda_g Y)$ yerine kısaca $X \Lambda Y$ kullanılacaktır [6].

M üzerinde (0,k)-tipinde $(k\geq 1)$ bir T tensör alanı ve (0,2)-tipinde bir simetrik A tensör alanı verildiğinde R.T ve Q(A,T) tensörleri sırası ile;

$$\begin{aligned}(R.T)(X_1,X_2,\ldots,X_k;X,Y) = & -T(R(X,Y)X_1,X_2,\ldots,X_k)-\ldots \\ & -T(X_1,X_2,\ldots,R(X,Y)X_k)\end{aligned} \tag{1.18}$$

ve

$$\begin{aligned}Q(A,T)(X_1,X_2,\ldots,X_k;X,Y) = & -T((X \Lambda_A Y)X_1,X_2,\ldots,X_k)-\ldots \\ & -T(X_1,X_2,\ldots,(X \Lambda_A Y)X_k)\end{aligned} \tag{1.19}$$

biçiminde tanımlanır [5].

Böylece (1.18) ve (1.19) denklemlerinde T=R ve A=g alındığında

$$\begin{aligned}(R.R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) = & -R(R(X,Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-\ldots \\ & -R(X_1,X_2,X_3,R(X,Y)X_4)\end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\begin{aligned}Q(g,R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) = & -R((X \Lambda_g Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-\ldots \\ & -R(X_1,X_2,X_3,R(X \Lambda_g Y)X_4)\end{aligned} \tag{1.21}$$

T=R ve A=g alındığında

$$\begin{aligned}(R.C)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) = & -C(R(X,Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-\ldots \\ & -C(X_1,X_2,X_3,R(X,Y)X_4)\end{aligned} \tag{1.22}$$

$$Q(g,C)\ (X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-C((X\wedge_g Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-\dots$$

$$-C(X_1,X_2,X_3,R(X\wedge_g Y)X_4) \qquad (1.23)$$

T=S ve A=g alındığında

$$(R.S)\ (X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-S(R(X,Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-\dots$$

$$-S(X_1,X_2,X_3,R(X,Y)X_4) \qquad (1.24)$$

$$Q(g,C)\ (X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-C((X\wedge_g Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-\dots$$

$$-C(X_1,X_2,X_3,R(X\wedge_g Y)X_4) \qquad (1.25)$$

ve ayrıca A=S, T=R için (1.19) denkleminden

$$Q(S,R)\ (X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-R((X\wedge_S Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-\dots$$

$$-R(X_1,X_2,X_3,R(X\wedge_S Y)X_4) \qquad (1.26)$$

olarak elde edilir. Eğer *M* nin her p noktası için bundan başka ,

Eğer R.R=0 ise *M* ye *semisimetriktir* denir [17].

Eğer R.S=0 ise *M* ye *Ricci-semisimetriktir* denir [8].

Eğer R.C=0 ise *M* ye Weyl-semisimetriktir denir [8].

Tanım1.1.15: $n \geq 3$ boyutlu bir *(M,g)* Riemann manifoldu için eğer *M* nin her noktasında R.R ve Q(g,R) tensörleri lineer bağımlı ise *M* ye pseudosimetriktir denir.

Yani *M*'nin pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart,

$U_R = \{p \in M : Q(g,R) \neq 0\}$ kümesi üzerinde $R.R = L_R Q(g,R)$ olmasıdır. L_R, U_R üzerinde bir fonksiyondur.

Tanım1.1.16: $n \geq 3$ boyutlu bir *(M,g)* Riemann manifoldu için eğer *M* nin her noktasında R.S ve Q(g,R) tensörleri lineer bağımlı ise *M* ye Ricci- pseudosimetriktir manifold denir [22].

Yani , *M*'nin Ricci-pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart,

U_s={ $p\in$ M: $S-\frac{\tau}{n}g\neq 0$} kümesi üzerinde $R.S = L_S Q(g,S)$ olmasıdır. L_S ,U_S üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.

Tanım1.1.17: $n \geq 4$ boyutlu bir *(M,g)* Riemann manifoldu için eğer M nin her noktasında R.C ve Q(g,C) tensörleri lineer bağımlı ise M ye Weyl- pseudosimetriktir manifold denir [22].

Yani ,M'nin Weyl-pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart

$U_C = \{p\in M : p\in M \text{ de } C \neq 0\}$ kümesi üzerinde $R.C = L_C Q(g,C)$ olmasıdır. L_C ,U_C üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.

Tanım1.1.18: Eğer R.R ve Q(S,R) tensörleri lineer bağımlı ise yani

R.R=LQ(S,R) ise M ye Genelleştirilmiş Ricci-pseudosimetriktir denir [22].

Yukarıda numaralı tanımlarda tanımlanan eğrilik şartları için aşağıdaki kapsama bağıntıları geçerlidir.

$$R.R = 0 \subset R.S = 0$$
$$R.R = 0 \subset R.C = 0$$
$$R.S = 0 \subset R.S = L_S Q(g,S)$$
$$R.R = 0 \subset R.R = L_R Q(g,R)$$
$$R.C = 0 \subset R.C = L_C Q(g,C)$$
$$R.R = L_R Q(g,R) \subset R.S = L_S Q(g,S)$$
$$R.R = L_R Q(g,R) \subset R.C = L_C Q(g,C) \quad [22]$$

Eğer M semisimetrik olmayan fakat pseudosimetrik bir manifold ise M ye proper pseudosimetrik, Ricci-semisimetrik olmayan fakat Ricci-pseudosimetrik manifold ise M ye proper Ricci-pseudosimetrik, Weyl-semisimetrik olmayan fakat Weyl-pseudosimetrik bir manifold ise M ye proper Weyl-pseudosimetriktir denir.

Tanım1.1.19: Bir *(M,g)* $n > 3$ boyutlu diferansiyellenebilir manifoldu için eğer

$$(\nabla_X S)(Y,Z) = \alpha(X)S(Y,Z) \tag{1.27}$$

olacak şekilde bir $\alpha(X)$ 1-formu var ise M ye *Ricci Rekürent* denir [25].

$$(\nabla_X S)(Y,Z) = \alpha(X)S(Y,Z) + \beta(X)g(Y,Z) \tag{1.28}$$

olacak biçimde $\alpha(X)$ ve $\beta(X)$ 1-formları var ise *M* ye genelleştirilmiş Ricci Rekürent denir [25]. S nin kovaryant türevi ∇S

$$(\nabla_X S)(Y,Z) + \nabla_Y S(X,Z) + (\nabla_Z S)(X,Y) = 0 \tag{1.29}$$

ile tanımlanır.Eğer;

$$(\nabla_X S)(Y,Z) + \nabla_Y S(X,Z) + (\nabla_Z S)(X,Y) = 0 \tag{1.30}$$

ise *M* ye dairesel paralel Ricci tensöre sahiptir denir [25].

Bundan başka g metrik tensörünün türevi

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = \nabla_X g(y,Z) - g(\nabla_X Y,Z) - g(Y,\nabla_X Z) \tag{1.31}$$

ile ifade edilir.

Tanım 1.1.20: *M* n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her X, Y , Z$\in\chi$(M) için *M* nin *konharmonik eğrilik tensörü;*

$$K(X,Y)Z=R(X,Y)Z-\frac{1}{n-2}[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y + g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY] \tag{1.32}$$

ile tanımlanır [24].

Tanım 1.1.21: Eğer *K=0* ise *M* manifoldu *konharmonik flat* olarak adlandırılır [24].

Tanım 1.1.22: *M* n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her X, Y , Z$\in\chi$(M) için *M* nin *projektif eğrilik tensörü;*

$$P(X,Y)Z=R(X,Y)Z-\frac{1}{n-1}[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y] \tag{1.33}$$

ile tanımlanır [17].

1.1. Hemen Hemen Değme Metrik Manifoldları

Tanım 1.1.1: *M* bir *(2n+1)*-boyutlu manifold, ϕ, ξ, η da *M* üzerinde, sırası ile, (1,1)-tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve bir 1-form olsun. Eğer ϕ, ξ, η için, *M* üzerinde herhangi bir vektör alanı *X* olmak üzere;

$$\eta(\xi)=1 \tag{1.34}$$

$$\phi^2 X=-X+\eta(X)\xi \tag{1.35}$$

özellikleri sağlanıyor ise o zaman (ϕ, ξ, η) ya M üzerinde bir hemen hemen değme yapısı denir. M bu yapı ile bir hemen hemen değme manifoldu olarak adlandırılır [4].

Teorem 1.1.1: (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı için;

i) $\phi\xi=0$ (1.36)

ii) $\eta(\phi X)=0$ (1.37)

iii) $rank\ \phi=2n$ (1.38)

dir [4].

Tanım 1.1.2: Hemen hemen değme manifoldu M verilsin. M üzerinde hemen hemen değme yapısı (ϕ, ξ, η) olsun. M üzerinde bir g Riemann metriği;

$$\eta(X)=g(X,\xi) \tag{1.39}$$

$$g(\phi X,\phi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y) \tag{1.40}$$

şartlarını sağlıyor ise g metriğine M üzerinde hemen hemen değme metrik, (ϕ,ξ,η,g) yapısına da hemen hemen değme metrik yapısı, (ϕ, ξ, η, g) yapısı ile M ye de hemen hemen değme metrik manifoldu denir [4].

Sonuç 1.1.1: $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifoldu M ile hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) verilsin. Böylece,

$$g(\phi X, Y)=-g(X, \phi Y) \tag{1.41}$$

dir [4].

Tanım 1.1.3: $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M verilsin. Herbir η 1-formu için $\eta\wedge(d\eta)^n \neq 0$ şartı sağlanır ise η ya M nin değme yapısı ve M ye de değme manifoldu denir [4].

Teorem 1.1.2: $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M verilsin. M nin bir değme yapısı η verildiğinde;

$$g(X, \phi Y) = d\eta(X, Y) \tag{1.42}$$

olacak şekilde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) vardır [4].

Tanım 1.1.4: M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) için;

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y)$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) nın 2.temel formu denir [4].

1.2. Hemen Hemen Değme Manifoldların Torsion Tensörü

Tanım 1.2.1: V bir reel vektör uzayı olmak üzere;

$$J : V \longrightarrow V$$

lineer dönüşümü;

$$J^2 = -I$$

şartını sağlıyor ise J ye V üzerinde bir kompleks yapı denir. $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M verilsin. Bu manifold üzerinde hemen hemen değme yapısı (ϕ, ξ, η) olsun. Reel bir doğruyu R ile göstererek $M\times R$ çarpı manifoldunu gözönüne alalım. $M\times R$ üzerinde herhangi bir vektör alanı;

$$(X, f\frac{d}{dt})$$

şeklindedir. Burada X, M ye teğet bir vektör alanı, t R nin bir koordinatı ve f ,$M\times R$ üzerinde tanımlı bir fonksiyondur. $M\times R$ nin tanjant uzayındaki bir J lineer dönüşümü;

$$J(X, f\frac{d}{dt}) = (\phi X - f.\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}) \qquad (1.43)$$

ile tanımlanır [4].

Sonuç 1.2.1: Yukarıdaki şekilde tanımlanan J dönüşümü $M\times R$ üzerinde bir hemen hemen kompleks yapıdır [4].

Tanım 1.2.2: M bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere M üzerinde (1,1)-tipinde bir tensör alanı F olsun. $\forall X, Y\in\chi(M)$ için;

$$N_F(X,Y) = F^2[X,Y]+[FX,FY]-F[FX,Y]-F[X,FY]$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alanına F nin Nijenhuis torsion tensörü denir [4].

$F=J$ hemen hemen kompleks yapı olması halinde de,

$$N_J(X,Y) = J^2[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY]$$

$$= -[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] \tag{1.44}$$

dir [4].

Tanım 1.2.3: Hemen hemen kompleks manifoldu (M, J) verilsin. $N_J = 0$ ise J dönüşümüne *integrallenebilirdir* denir [4].

Tanım 1.2.4: Eğer $M \times R$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısına normaldir denir [4].

Örnek 1.2.1: E^4 Kaehler manifoldunun 3-boyutlu bir reel hiperküresi S^3 olsun. E^4 de S^3 ün bir birim normali C olmak üzere E^4 ün hemen hemen kompleks tensör alanı J

$$J : E^4 \longrightarrow E^4$$

$$JC = -\xi$$

biçiminde tanımlansın.

O zaman ξ, S^3 üzerinde bir birim vektör alanı olur. Yani $\xi \in \chi(S^3)$ dir. S^3 e teğet her bir X vektör alanı için $\eta(X)=g(X,\xi)$ olmak üzere η 1-formu iyi tanımlıdır. Üstelik $\eta(\xi)=1$ dir. Diğer yandan,

$$JX = \phi X + \eta(X)C$$

eşitliği ile ϕ lineer dönüşümünü tanımlayalım. Buna göre $\forall p=(p_1, p_2, p_3, p_4) \in S^3$ için;

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yapısı yardımı ile;

$$J(C(p)) = J(p_1, p_2, p_3, p_4) = (-p_3, -p_4, p_1, p_2) = -\xi$$

elde edilir [2]. Burada;

$$\xi = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} \text{dir.}$$

Şimdi $g(X, \xi)\xi$ için;

$$g(X,\ \xi)\xi = < \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$g(X,\ \xi)\xi = (x_1 p_3 + x_2 p_4 - x_3 p_1 - x_4 p_2) \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece;

$$\lambda = (x_1 p_3 + x_2 p_4 - x_3 p_1 - x_4 p_2)$$

olmak üzere;

$$g(X,\xi)\xi = \lambda\xi$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca,

$$\phi(\phi X) = J(\phi X) - \eta(\phi X)C$$

$$\phi(\phi X) = J(JX - \eta(X)C) - \eta(JX - \eta(X)C)C$$

$$= J\left(\begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_4 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} \right) - g(JX - \eta(X)C,\ \xi)C$$

$$= \begin{bmatrix} -x_1 + \lambda p_3 \\ -x_2 + \lambda p_4 \\ -x_3 - \lambda p_1 \\ -x_4 - \lambda p_2 \end{bmatrix} - < \begin{bmatrix} -x_3 - \lambda p_1 \\ -x_4 - \lambda p_2 \\ -x_1 - \lambda p_3 \\ -x_2 - \lambda p_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\lambda p_3 - \left[(x_3-\lambda p_1)p_3 + (x_4-\lambda p_2)p_4 + (x_1+\lambda p_3)p_1 + (x_2+\lambda p_4)p_2\right]p_1 \\ -\lambda p_4 - \left[(x_3-\lambda p_1)p_3 + (x_4-\lambda p_2)p_4 + (x_1+\lambda p_3)p_1 + (x_2+\lambda p_4)p_2\right]p_2 \\ -\lambda p_1 - \left[(x_3-\lambda p_1)p_3 + (x_4-\lambda p_2)p_4 + (x_1+\lambda p_3)p_1 + (x_2+\lambda p_4)p_2\right]p_3 \\ -\lambda p_2 - \left[(x_3-\lambda p_1)p_3 + (x_4-\lambda p_2)p_4 + (x_1+\lambda p_3)p_1 + (x_2+\lambda p_4)p_2\right]p_4 \end{bmatrix}$$

dir. O zaman

$$\phi(\phi X) = -\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan,

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi$$

elde edilir. Bununla birlikte,

$$\phi\xi = J\xi - \eta(\xi)C$$

olduğundan,

$$\phi\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = 0$$

bulunur. Böylece;

$$\begin{aligned} \eta(\phi X) &= g(\phi X, \xi) \\ &= g(JX - \eta(X)C, \xi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğu da açıkça görülebilir.

Sonuç olarak (ϕ, ξ, η, g) yapısı S^3 üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı oluşturur [17].

2. SASAKİAN MANİFOLDLAR

Tanım 2.1.1: M, değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan $(2n+1)$-boyutlu bir değme metrik manifoldu olsun. Eğer M nin değme metrik yapısı normal ise, M Sasakian yapıya sahiptir denir. Bazan Sasakian manifold normal değme metrik manifold olarak da adlandırılır [4].

Teorem 2.1.1: M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) bir

Sasakian yapıdır $\Leftrightarrow$ $\forall X, Y \in \chi(M)$ için;

$$(\nabla_X \phi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X \tag{2.1}$$

dir [4]. Burada;

$$\nabla_X(\phi Y) = (\nabla_X \phi)Y + \phi \nabla_X Y$$

dir.

Sonuç 2.1.1: M bir Sasakian manifold ise M nin bir Riemann eğrilik tensörü R olmak üzere;

$$R(X, Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y \tag{2.2}$$

dir [4].

Teorem 2.1.2: M $(2n+1)$-boyutlu bir Riemann manifoldu olmak üzere M üzerinde bir birim Killing vektör alanı ξ verilsin. Ayrıca M nin eğrilik tensörü R olmak üzere M Sasakian manifolddur $\Leftrightarrow$

$$R(X, \xi)Y = -g(X, Y)\xi + \eta(Y)X \tag{2.3}$$

dir [4].

Uyarı : Bir Sasakian manifoldu bir K-değme manifolddur fakat tersi sadece boy $M = 3$ olması halinde geçerlidir [4].

Sonuç 2.1.2: M bir Sasakian manifold olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve ξ bir birim Killing vektör alanı olmak üzere;

$$R(X, \xi)Y = -(\nabla_X \phi)Y \tag{2.4}$$

dir [4].

Sonuç 2.1.3: M, değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan $(2n+1)$-boyutlu bir Sasakian manifold olsun. Bu takdirde;

$$R(X, Y)\phi Z = \phi R(X, Y)Z + g(\phi X, Z)Y - g(Y, Z)\phi X$$

$$+g(X,Z)\phi Y - g(\phi Y, Z)X \tag{2.5}$$

dır [4].

Sonuç 2.1.4: M bir Sasakian manifold olmak üzere;

$$R(X, Y)Z = -\phi R(X, Y)\phi Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$

$$-g(\phi Y, Z)\phi X + g(\phi X, Z)\phi Y \tag{2.6}$$

dır [4].

2.1. *M(c)* Sasakian Uzay Formu

Önerme 2.1.1: (M, g) Riemann manifoldu sabit k eğrilikli bir manifold olsun.

O zaman $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için;

$$R(X,Y)Z = k(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) \tag{2.7}$$

dir [4].

Tanım 2.1.1: M bir Sasakian manifold olsun. Böylece $p\in M$ deki T_pM tanjant uzayında ξ ya dik bir X birim vektörü $\{X,\phi X\}$ ortonormal olacak şekilde var ise $\{X,\phi X\}$ düzlemine T_pM nin ϕ–kesitseli denir. Ayrıca

$$K(X, \phi X) = g(R(X, \phi X)\phi X, X)$$

şeklinde tanımlanan ifadeye M nin bir ϕ–kesitsel eğriliği adı verilir [4].

Tanım 2.1.2: M bir Sasakian manifold olmak üzere M nin ϕ–kesitsel eğriliği $c=sbt$ ise M bir Sasakian uzay formu olarak adlandırılır ve $M(c)$ şeklinde gösterilir [4].

Teorem 2.1.1: $M(c)$ Sasakian uzay formunun R eğrilik tensörü; $\forall X, Y, Z\in\chi(M)$ için,

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{4}(c+3)[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y]$$

$$-\frac{1}{4}(c-1)[\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X$$

$$+g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi$$

$$+g(\phi Y,Z)\phi X - g(\phi X,Z)\phi Y + 2g(\phi X,Y)\phi Z] \tag{2.8}$$

dir [4].

Tanım 2.1.3 : Bir M değme metrik manifoldu için;

$$Q = aId + b\eta\otimes\xi \tag{2.9}$$

eşitliği var ise η-Einstein olarak adlandırılır. Burada Q Ricci operatörü, a ve b M üzerinde C^∞ fonksiyonlardır [16].

2.2. Para-Sasakian Manifoldlar

Tanım 2.2.1 : M, $(2n+1)$ boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold ve M üzerinde ϕ (1,1)- tensör alanı, ξ bir vektör alanı, η 1-form ve g Riemann metrik olduğunda M' nin hemen hemen para-kontakt Riemann yapısı (ϕ, ξ, η, g) dir. Eğer (ϕ, ξ, η, g) aşağıdaki eşitlikleri sağlarsa M ye Para-Sasakian manifold ya da kısaca P-Sasakian manifold denir. $\forall X, Y, Z\in\chi(M)$ için,

$$d\eta = 0 \tag{2.10}$$

$$\nabla_X\xi = \phi X \tag{2.11}$$

$$(\nabla_X\phi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X - \eta(Y)\eta(X)\xi \tag{2.12}$$

dir [19].

Bir Para-Sasakian manifold

$$(\nabla_X\eta)Y = -g(X,Y)\xi + \eta(Y)\eta(X) \tag{2.13}$$

eşitliğini sağlarsa özel Para-Sasakian manifold ya da kısaca SP-Sasakian manifold olarak tanımlanır [19].

Önerme 2.2.2: M^n Para-Sasakian manifold ve M nin eğrilik tensörü R ve Ricci tensörü S olsun. O zaman $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için M Para-Sasakian manifoldu aşağıdaki şartları sağlar;

$$S(X,\xi) = (1-n)\eta(X) \tag{2.14}$$

$$\eta(R(X,Y)Z) = g(X,Z)\,\eta(Y) - g(Y,Z)\,\eta(X) \tag{2.15}$$

[19].

3. PARA-SASAKİAN MANİFOLDLARDA BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI

Bu bölümde Para-Sasakian manifoldlarda R Riemann eğrilik tensörü, K konharmonik eğrilik tensörü ve C Weyl konformal eğrilik tensörü ile ilgili bazı eğrilik şartları verilmiştir.

Teorem 3.1.1: M , n-boyutlu Para-Sasakian manifold olsun. M üzerinde

$\forall X, Y, Z, U, W \in \chi(M)$ için, $(K(X,Y)\cdot R)(Z,U)W=0$ ise M^n η-Einstein manifolddur.

İspat: $\forall X, Y, Z, U, W \in \chi(M)$ için, (1.18) eşitliğinden;

$$(K(X,Y)\cdot R)(Z,U)W=K(X,Y)R(Z,U)W-R(K(X,Y)Z,U)W$$
$$-R(Z,K(X,Y)U)W-R(Z,U)K(X,Y)W=0 \tag{3.1}$$

elde edilir. (3.1) denkleminde $X=\xi$ alırsak;

$$(K(\xi,Y)\cdot R)(Z,U)W=K(\xi,Y)R(Z,U)W-R(K(\xi,Y)Z,U)W$$
$$-R(Z,K(\xi,Y)U)W-R(Z,U)K(\xi,Y)W=0 \tag{3.2}$$

dır.(3.2) denklemi (1.32), (1.39), (2.14) ve (2.15) eşitlikleri kullanılarak;

$$K(\xi,Y)R(Z,U)W=R(\xi,Y)R(Z,U)W-\frac{1}{n-2}[S(Y,R(Z,U)W)\xi-(1-n)\,\eta(R(Z,U)W)Y$$
$$+(1-n)g(Y,R(Z,U)W)\xi-\eta(R(Z,U)W)QY] \tag{3.3}$$

$$R(K(\xi,Y)Z,U)W=R(R(\xi,Y)Z,U)W-\frac{1}{n-2}[S(Y,Z)R(\xi,U)W-(1-n)\,\eta(Z)R(Y,U)W$$
$$+(1-n)g(Y,Z)R(\xi,U)W-\eta(Z)R(QY,U)W] \tag{3.4}$$

$$R(Z,K(\xi,Y)U)W=R(Z,R(\xi,Y)U)W-\frac{1}{n-2}[S(Y,U)R(Z,\xi)W-(1-n)\,\eta(U)R(Z,Y)W$$
$$+(1-n)g(Y,U)R(Z,\xi)W-\eta(U)R(Z,QY)W] \tag{3.5}$$

$$R(Z,U)K(\xi,Y)W=R(Z,U)R(\xi,Y)W-\frac{1}{n-2}[S(Y,W)R(Z,U)\xi-(1-n)\eta(W)R(Z,U)Y$$
$$+(1-n)g(Y,W)R(Z,U)\xi-\eta(W)R(Z,U)QY] \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) denklemlerini ξ ile çarparsak;

$$\eta(K(\xi,Y)R(Z,U)W)=\eta(R(\xi,Y)R(Z,U)W)-\frac{1}{n-2}[S(Y,R(Z,U)W)-(1n)\eta(R(Z,U)W)\eta(Y)$$

$$+(1\text{-}n)g(Y,R(Z,U)W)-\eta(R(Z,U)W)(1\text{-}n)\eta(Y)] \tag{3.7}$$

$$\eta(R(K(\xi,Y)Z,U)W)=\eta(R(R(\xi,Y)Z,U)W)-\frac{1}{n-2}[S(Y,Z)\eta(R(\xi,U)W)$$

$$-(1\text{-}n)\eta(Z)\eta(R(Y,U)W)+(1\text{-}n)g(Y,Z)\eta(R(\xi,U)W)$$

$$-\eta(Z)\ \eta(R(QY,U)W)] \tag{3.8}$$

$$\eta(R(Z,K(\xi,Y)U)W)=\eta(R(Z,R(\xi,Y)U)W-\frac{1}{n-2}[S(Y,U)\eta(R(Z,\xi)W)$$

$$-(1\text{-}n)\eta(U)\eta(R(Z,Y)W)+(1\text{-}n)g(Y,U)\eta(R(Z,\xi)W)$$

$$-\eta(U)\eta(R(Z,\ QY)W)] \tag{3.9}$$

$$\eta(R(Z,U)K(\xi,Y)W)=\eta(R(Z,U)R(\xi,Y)W)-\frac{1}{n-2}[S(Y,W)\eta(R(Z,U)\xi)$$

$$-(1\text{-}n)\eta(W)\ \eta(R(Z,U)Y)+(1\text{-}n)g(Y,W)\ \eta(R(Z,U)\xi)$$

$$-\ \eta(W)\ \eta(R(Z,U)\ QY)] \tag{3.10}$$

elde edilir. (3.7), (3.8), (3.9), (3.10) denklemlerinde (2.14) ve (2.15) eşitlikleri kullanılarak gerekli açılımlar yapılırsa,

$$\eta(K(\xi,Y)R(Z,U)W)\ =g(Z,W)\eta(U)\eta(Y)-g(U,W)\eta(Z)\eta(Y)-g(Y,R(Z,U)W)$$

$$-\frac{1}{n-2}[S(Y,R(Z,U)W)-(1\text{-}n)g(Z,W)\eta(U)\eta(Y)$$

$$+\ (1\text{-}n)\ g(U,W)\eta(Z)\eta(Y)+(1\text{-}n)\ g(Y,R(Z,U)W$$

$$-(1\text{-}n)g(Z,W)\eta(U)\eta(Y)+(1\text{-}n)g(U,W)\eta(Z)\eta(Y)] \tag{3.11}$$

$$\eta(K(\xi,Y)R(Z,U)W)=g(Z,W)\eta(U)\eta(Y)-g(U,W)\eta(Z)\eta(Y)-g(Y,R(Z,U)W)$$

$$-\frac{1}{n-2}[S(Y,R(Z,U)W)-2(1\text{-}n)g(Z,W)\eta(U)\eta(Y)$$

$$+2(1-n)g(U,W)\eta(Z)\eta(Y)+(1-n)g(Y,R(Z,U)W)] \quad (3.12)$$

$$\eta(R(K(\xi,Y)Z,U)W)=g(R(\xi,Y)Z,W)\eta(U)-g(U,W)\ \eta(Z)\eta(Y)+g(U,W)g(Y,Z)$$

$$-\frac{1}{n-2}[S(Y,Z)\eta(W)\eta(U)-S(Y,Z)g(U,W)-(1-n)g(Y,W)\eta(U)\eta(Z)$$

$$+(1-n)g(U,W)\eta(Y)\eta(Z)+(1-n)g(Y,Z)\eta(W)\eta(U)$$

$$-(1-n)g(Y,Z)g(U,W)-S(Y,W)\eta(U)\eta(Z)+(1n)(U,W)\eta(Y)\eta(Z)]$$

$$= g(R(\xi,Y)Z,W)\eta(U)-g(U,W)\eta(Z)\eta(Y)+g(U,W)g(Y,Z)$$

$$-\frac{1}{n-2}[S(Y,Z)\eta(W)\eta(U)-S(Y,Z)g(U,W)-(1-n)g(Y,W)\eta(U)\eta(Z)$$

$$+2(1-n)g(U,W)\eta(Y)\eta(Z)+(1-n)g(Y,Z)\eta(W)\eta(U)$$

$$-(1-n)g(Y,Z)g(U,W)-S(Y,W)\eta(U)\eta(Z)] \quad (3.13)$$

$$\eta(R(Z,K(\xi,Y)U)W)=g(Z,W)\eta(U)\eta(Y)-g(Z,W)g(U,Y)-g(R(\xi,Y)U,W)\eta(Z)$$

$$-\frac{1}{n-2}[S(Y,U)g(Z,W)-S(Y,U)\eta(W)\eta(Z)-(1-n)g(Z,W)\eta(U)\eta(Y)$$

$$+(1-n)g(Y,W)\eta(U)\eta(Z)+(1-n)g(Y,U)g(Z,W)$$

$$-(1-n)g(Y,U)\eta(W)\eta(Z)-(1-n)g(Z,W)\eta(Y)\eta(U)$$

$$+S(Y,W)\eta(U)\eta(Z)]$$

$$=g(Z,W)\eta(U)\ \eta(Y)-g(Z,W)g(U,Y)-g(R(\xi,Y)U,W)\eta(Z)$$

$$-\frac{1}{n-2}[S(Y,U)g(Z,W)-S(Y,U)\eta(W)\eta(Z)-2(1-n)g(Z,W)\eta(U)\eta(Y)$$

$$+(1-n)g(Y,W)\eta(U)\eta(Z)+(1-n)g(Y,U)g(Z,W)$$

$$-(1-n)\ g(Y,U)\eta(W)\eta(Z)+S(Y,W)\eta(U)\eta(Z)] \quad (3.14)$$

$$\eta(R(Z,U)K(\xi,Y)W)=g(Z,R(\xi,Y)W)\eta(U)-g(U,R(\xi,Y)W)\eta(Z)$$

$$-\frac{1}{n-2}[-(1-n)g(Z,Y)\eta(U)\eta(W)+(1-n)g(Y,U)\eta(W)\eta(Z)$$

$$-S(Z,Y)\eta(U)\eta(W)+S(U,Y)\eta(Z)\eta(W)] \qquad (3.15)$$

elde edilir. Bulunan (3.12) ,(3.13), (3.14), (3.15) sonuçları (3.2) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\eta((K(\xi,Y)\cdot R)(Z,U)W)=g(Z,W)\eta(U)\eta(Y)-g(U,W)\eta(Z)\eta(Y)-g(Y,R(Z,U)W)$$

$$-\frac{1}{n-2}[S(Y,R(Z,U)W)-2(1-n)g(Z,W)\eta(U)\eta(Y)$$

$$+2(1-n)g(U,W)\eta(Z)\eta(Y)+(1-n)g(Y,R(Z,U)W)]$$

$$-g(R(\xi,Y)Z,W)\eta(U)+g(U,W)\eta(Z)\eta(Y)-g(U,W)g(Y,Z)$$

$$+\frac{1}{n-2}[S(Y,Z)\eta(W)\eta(U)-S(Y,Z)g(U,W)-(1-n)g(Y,W)\eta(U)\eta(Z)$$

$$+2(1-n)g(U,W)\eta(Y)\eta(Z)+(1-n)g(Y,Z)\eta(W)\eta(U)$$

$$-(1-n)\,g(Y,Z)g(U,W)-S(Y,W)\ \eta(U)\eta(Z)]$$

$$-g(Z,W)\ \eta(U)\ \eta(Y)+g(Z,W)g(U,Y)-g(R(\xi,Y)U,W)\eta(Z)$$

$$+\frac{1}{n-2}[S(Y,U)g(Z,W)-S(Y,U)\eta(W)\eta(Z)-2(1-n)g(Z,W)\eta(U)\eta(Y)$$

$$+(1-n)g(Y,W)\eta(U)\eta(Z)+(1-n)g(Y,U)g(Z,W)$$

$$-(1-n)g(Y,U)\eta(W)\eta(Z)+S(Y,W)\eta(U)\eta(Z)]$$

$$-g(Z,R(\xi,Y)W)\ \eta(U)+g(U,R(\xi,Y)W)\eta(Z)$$

$$+\frac{1}{n-2}[-(1-n)g(Z,Y)\eta(U)\eta(W)+(1-n)g(Y,U)\eta(W)\eta(Z)$$

$$-S(Z,Y)\eta(U)\eta(W)+S(U,Y)\eta(Z)\eta(W)]=0 \qquad (3.16)$$

elde edilir. (3.16) denklemi (1.3) ve (1.5) eşitlikleri de kullanılarak sadeleştirmeler ;

$$\eta((K(\xi,Y)\cdot R)(Z,U)W)=-g(Y,R(Z,U)W)-g(R(\xi,Y)Z,W)\eta(U)-g(U,W)g(Y,Z)+g(Z,W)g(U,Y)$$

$$+g(R(\xi,Y)U,W)\eta(Z)\ -g(Z,R(\xi,Y)W)\ \eta(U)+\ g(U,R(\xi,Y)W)\ \eta(Z)$$

$$+\frac{1}{n-2}[-S(Y,R(Z,U)W)-(1-n)g(Y,R(Z,U)W)-S(Y,Z)g(U,W)$$

$$-(1-n)g(Y,Z)g(U,W)+S(Y,U)g(Z,W)+(1-n)g(Y,U)g(Z,W)]=0, \quad (3.17)$$

şeklini alır. (3.17) eşitliği (1.3) ve (1.5) eşitlikleri de kullanılarak ;

$$\eta((K(\xi,Y)\cdot R)(Z,U)W)= -g(Y,R(Z,U)W)- g(U,W)g(Y,Z)+ g(Z,W)g(U,Y)$$

$$+\frac{1}{n-2}[-S(Y,R(Z,U)W)-(1-n)g(Y,R(Z,U)W)-S(Y,Z)g(U,W)$$

$$-(1-n)g(Y,Z)g(U,W)+S(Y,U)g(Z,W)+(1-n)g(Y,U)g(Z,W)]=0 \quad (3.18)$$

elde edilir. (3.18) eşitliğinde $W=\xi$ alınırsa;

$$\eta((K(\xi,Y)\cdot R)(Z,U)\xi)= - g(Y,R(Z,U)\xi)- g(U, \xi)g(Y,Z)+g(Z, \xi)g(U,Y)$$

$$+\frac{1}{n-2}[-S(Y,R(Z,U)\xi)-(1-n)g(Y,R(Z,U)\xi)-S(Y,Z)g(U,\xi)$$

$$-(1-n)g(Y,Z)g(U,\xi)+S(Y,U)g(Z,\xi)+(1-n)g(Y,U)g(Z,\xi)]=0 \quad (3.19)$$

elde edilir. (3.19) denklemi (1.34), (1.39), (2.14), (2.15) eşitlikleri kullanılarak;

$$\eta((K(\xi,Y)\cdot R)(Z,U)\xi)=-\eta(U)g(Y,Z)+\eta(Z)g(Y,U)-\eta(U)g(Y,Z)+\eta(Z)g(Y,U)$$

$$+\frac{1}{n-2}[-\eta(U)S(Y,Z)+\eta(Z)S(U,Y)-(1-n)\eta(U)g(Y,Z)$$

$$+(1-n)\eta(Z)g(Y,U)-\eta(U)S(Y,Z)-(1-n)\eta(U)g(Y,Z)$$

$$+\eta(Z)S(U,Y)+(1-n)\eta(Z)g(Y,U)]=0 \quad (3.20)$$

elde edilir.

$$\eta((K(\xi,Y)\cdot R)(Z,U)\xi)=2\eta(Z)g(Y,U)-2\eta(U)g(Y,Z)$$

$$+\frac{1}{n-2}[-2\eta(U)S(Y,Z)+2\eta(Z)S(U,Y)-2(1-n)\eta(U)g(Y,Z)$$

$$+2(1-n)\eta(Z)g(Y,U)]=0 \quad (3.21)$$

elde edilir. (3.21) denkleminde $Z=\xi$ alınır ve (1.34) , (1.39) ve (2.14) denklemlerini de kullanılırsa;

$$\eta((K(\xi,Y)\cdot R)(\xi,U)\xi)=2g(Y,U)-2\eta(U)\eta(Y)$$

$$+\frac{1}{n-2}[-2(1-n)\eta(U)\eta(Y)+2S(U,Y)-2(1-n)\eta(U)\eta(Y)$$

$$+2(1-n)g(Y,U)]=0 \qquad (3.22)$$

elde edilen (3.22) denkleminde düzenleme yapılırsa;

$$\eta((K(\xi,Y)\cdot R)(\xi,U)\xi)=\frac{2}{n-2}S(Y,U)-$$

$$(2+\frac{2-2n}{n-2})g(Y,U)+\left(-2+\frac{-4+4n}{n-2}\right)\eta(U)\eta(Y)$$

$$=\frac{2}{n-2}S(Y,U)-(\frac{2}{n-2})g(Y,U)+\left(\frac{2n}{n-2}\right)\eta(U)\eta(Y)=0 \qquad (3.23)$$

elde edilir. (3.23) denkleminden

$$S(Y,U)=g(Y,U)-n\eta(U)\eta(Y) \qquad (3.24)$$

elde edilir. Bu ise, M^n nin η-Einstein manifold olduğunu gösterir.

Teorem 3.1.2: M, n- boyutlu Para-Sasakian manifold olsun.M üzerinde $\forall X, Y, Z, U, W \in \chi(M)$ için, $(K(X,Y)\cdot P)(Z,U)W=0$ ise M^n η-Einstein manifolddur.

İspat: $\forall X, Y, Z, U, W \in \chi(M)$ için,

$$(K(X,Y)\cdot P)(Z,U)W=(K(X,Y)\cdot R)(Z,U)W-\frac{1}{n-1}(S(U,W)K(X,Y)Z-S(Z,W)K(X,Y)U)=0 \qquad (3.25)$$

elde edilir. (3.25) denkleminde $X=\xi$ alalım. Bu durumda denklem;

$$(K(\xi,Y)\cdot P)(Z,U)W=(K(\xi,Y)\cdot R)(Z,U)W-\frac{1}{n-1}(S(U,W)K(\xi,Y)Z-S(Z,W)K(\xi,Y)U)=0 \qquad (3.26)$$

şeklini alır. (3.26) denkleminde;

$$K(\xi,Y)R_1(Z,U)W=S(U,W)K(\xi,Y)Z-S(Z,W)K(\xi,Y)U \qquad (3.27)$$

eşitliğini kullanırsak denklem;

$$(K(\xi,Y)\cdot P)(Z,U)W=(K(\xi,Y)\cdot R)(Z,U)W-\frac{1}{n-1}(K(\xi,Y)\cdot R_1)(Z,U)W=0 \tag{3.28}$$

şeklini alır. (1.32) denklemini kullanarak (3.27) denklemini açarsak;

$$K(\xi,Y)R_1(Z,U)W = S(U,W)\{R(\xi,Y)Z$$

$$-\frac{1}{n-2}[S(Y,Z)\xi-S(\xi,Z)Y+g(Y,Z)Q\xi-g(\xi,Z)QY]\}$$

$$-S(Z,W)\{R(\xi,Y)U$$

$$-\frac{1}{n-2}[S(Y,U)\xi-S(\xi,U)Y+g(Y,U)Q\xi-g(\xi,U)QY]\} \tag{3.29}$$

(3.29) denklemi elde edilir. (3.29) denklemi (2.14) ve (2.15) eşitliklerini de kullanarak ξ ile çarpılırsa;

$$\eta(K(\xi,Y)R_1(Z,U)W)=S(U,W)\eta(R(\xi,Y)Z)$$

$$-\frac{1}{n-2}[S(U,W)S(Y,Z)-S(U,W)(1-n)\eta(Z)\eta(Y)$$

$$+S(U,W)g(Y,Z)(1-n)-S(U,W)\eta(Z)(1-n)\eta(Y)]$$

$$-S(Z,W)\eta(R(\xi,Y)U)$$

$$+\frac{1}{n-2}[S(Z,W)S(Y,U)-S(Z,W)(1-n)\eta(U)\eta(Y)$$

$$+S(Z,W)g(Y,U)(1-n)-S(Z,W)\eta(U)(1-n)\eta(Y)] \tag{3.30}$$

elde edilir. (3.30) eşitliğinde (2.15) ,(1.39) denklemleri kullanılırsa;

$$\eta(K(\xi,Y)R_1(Z,U)W)=S(U,W)\eta(Z)\eta(Y)-S(U,W)g(Y,Z)$$

$$+\frac{1}{n-2}[-S(U,W)S(Y,Z)+S(U,W)(1-n)\eta(Z)\eta(Y)$$

$$-S(U,W)g(Y,Z)(1-n)+S(U,W)\eta(Z)(1-n)\eta(Y)]$$

$$-S(Z,W)\eta(U)\eta(Y)+S(Z,W)g(Y,U)$$

$$+\frac{1}{n-2}[\,S(Z,W)S(Y,U)-S(Z,W)(1-n)\eta(U)\eta(Y)$$

$$+S(Z,W)g(Y,U)(1-n)-S(Z,W)\eta(U)(1-n)\eta(Y)] \tag{3.31}$$

elde edilir. (3.31) da $Z=\xi$ alıp (1.39) , (1.34), (2.14) eşitliklerini kullanarak;

$$\eta(K(\xi,Y)R_1(\xi,U)W)=S(U,W)\eta(Y)-S(U,W)\ \eta(Y)$$

$$+\frac{1}{n-2}[\,-S(U,W)\ \eta(Y)(1-n)+S(U,W)(1-n)\eta(Y)$$

$$-S(U,W)\eta(Y)(1-n)+S(U,W)(1-n)\eta(Y)]$$

$$-(1-n)\eta(W)\eta(U)\eta(Y)+(1-n)\eta(W)g(Y,U)$$

$$+\frac{1}{n-2}[(1-n)\eta(W)S(Y,U)-(1-n)\eta(W)(1-n)\eta(U)\eta(Y)$$

$$+(1-n)\eta(W)g(Y,U)(1-n)-(1-n)\eta(W)\eta(U)(1-n)\eta(Y)] \tag{3.32}$$

elde edilir. (3.32) da (1.39) , (1.34), (2.14) eşitliklerini kullanarak $W=\xi$ alınırsa;

$$\eta(K(\xi,Y)R_1(\xi,U)\ \xi)=(1-n)\eta(U)\eta(Y)+(1-n)g(Y,U)$$

$$+\frac{1}{n-2}[\,(1-n)\ S(Y,U)-(1-n)^2\eta(U)\eta(Y)$$

$$+(1-n)^2g(Y,U)-(1-n)^2\eta(U)\eta(Y)] \tag{3.33}$$

elde edilir. (3.33) de gerekli düzenleme yapılırsa;

$$\eta(K(\xi,Y)R_1(\xi,U)\xi)=(\frac{1-n}{n-2})S(Y,U)+(\frac{n-1}{n-2})g(Y,U)+(\frac{n(1-n)}{n-2})\ \eta(U)\eta(Y) \tag{3.34}$$

olur.(3.28) denkleminde, (3.23) ve (3.34) eşitlikleri yerlerine yazılırsa;

$$\eta\ ((K(\xi,Y)\cdot P)(\xi,U)\xi)=\frac{2}{n-2}\mathrm{S(Y,U)}-(\frac{2}{n-2})\,\mathrm{g(Y,U)}+\left(\frac{2n}{n-2}\right)\eta(\mathrm{U})\eta(\mathrm{Y})$$

$$-\frac{1}{n-1}[\,(\frac{1-n}{n-2})\,\mathrm{S(Y,U)}+(\frac{n-1}{n-2})\,\mathrm{g(Y,U)}$$

$$+(\frac{n(1-n)}{n-2})\,\eta(U)\eta(Y)]=0 \tag{3.35}$$

elde edilir. (3.35) de gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\left(\frac{2}{n-2}+\frac{1}{n-2}\right)S(Y,U)+\left(\frac{-1}{n-2}-\frac{2}{n-2}\right)g(Y,U)+\left(\frac{2n}{n-2}+\frac{n}{n-2}\right)\eta(U)\eta(Y)=0$$

$$\left(\frac{3}{n-2}\right)S(Y,U)+\left(\frac{-3}{n-2}\right)g(Y,U)+\left(\frac{3n}{n-2}\right)\eta(U)\eta(Y)=0 \tag{3.36}$$

elde edilir. (3.36) denkleminden

$$S(Y,U)=g(Y,U)-n\eta(U)\eta(Y) \tag{3.37}$$

dır. Bu sonuç M^n ' nin η-Einstein manifold olduğunu gösterir.

Teorem 3.1.3: *M ,n-* boyutlu Para-Sasakian manifold olsun.M üzerinde $\forall X, Y, Z, U, W \in \chi(M)$ için, $(R(X,Y)\cdot K)(Z,U)W=0$ ise M^n η-Einstein manifolddur.

İspat: $\forall X, Y, Z, U, W \in \chi(M)$ için,

$$(R(X,Y)\cdot K)(Z,U)W=R(X,Y)K(Z,U)W-K(R(X,Y)Z,U)W-K(Z,R(X,Y)U)W-K(Z,U)R(X,Y)W=0 \tag{3.38}$$

şeklinde açılır.(3.38) denkleminde $X=\xi$ alalım.Böylece;

$$(R(\xi\, Y)\cdot K)(Z,U)W=R(\xi,Y)K(Z,U)W$$

$$-K(R(\xi,Y)Z,U)W-K(Z,R(\xi,Y)U)W-K(Z,U)R(\xi,Y)W=0 \tag{3.39}$$

dir. (3.39) denkleminde her bir terimin açılımını ayrı ayrı yaparsak;

$$R(\xi,Y)K(Z,U)W=R(\xi,Y)[R(Z,U)W-\frac{1}{n-2}[S(U,W)Z-S(Z,W)U+g(U,W)QZ-g(Z,W)QU]]$$

$$= R(\xi,Y)R(Z,U)W$$

$$-\frac{1}{n-2}[S(U,W)\,R(\xi,Y)Z-S(Z,W)\,R(\xi,Y)U$$

$$+g(U,W)R(\xi,Y)QZ-g(Z,W)R(\xi,Y)QU] \tag{3.40}$$

$$K(R(\xi,Y)Z,U)W=R(R(\xi,Y)Z,U)W$$

$$-\frac{1}{n-2}[S(U,W)R(\xi,Y)Z-S(R(\xi,Y)Z,W)U$$

$$+g(U,W)QR(\xi,Y)Z-g(R(\xi,Y)Z,W)QU] \qquad (3.41)$$

$$K(Z,R(\xi,Y)U)W=R(Z,R(\xi,Y)U)W$$

$$-\frac{1}{n-2}[S(R(\xi,Y)U,W)Z-S(Z,W)R(\xi,Y)U$$

$$+g(R(\xi,Y)U,W)QZ-g(Z,W)QR(\xi,Y)U] \qquad (3.42)$$

$$K(Z,U)R(\xi,Y)W=R(Z,U)\,R(\xi,Y)W$$

$$-\frac{1}{n-2}[S(U,\,R(\xi,Y)W)Z-S(Z,\,R(\xi,Y)W)U$$

$$+g(U,R(\xi,Y)W)QZ-g(Z,R(\xi,Y)W)QU] \qquad (3.43)$$

elde edilir. (3.40), (3.41), (3.42), (3.43)denklemleri ξ ile çarpılırsa;

$$\eta(R(\xi,Y)K(Z,U)W)=\eta(R(\xi,Y)R(Z,U)W)$$

$$-\frac{1}{n-2}[S(U,W)\eta(R(\xi,Y)Z)-S(Z,W)\eta(R(\xi,Y)U)$$

$$+g(U,W)\;\eta(R(\xi,Y)QZ)-g(Z,W)\;\eta(R(\xi,Y)QU)] \qquad (3.44)$$

$$\eta(K(R(\xi,Y)Z,U)W)=\eta(R(R(\xi,Y)Z,U)W)$$

$$-\frac{1}{n-2}[S(U,W)\;\eta(R(\xi,Y)Z)-S(R(\xi,Y)Z,W)\eta(U)$$

$$+g(U,W)\eta(QR(\xi,Y)Z)-g(R(\xi,Y)Z,W)\;\eta(QU)] \qquad (3.45)$$

$$\eta(K(Z,R(\xi,Y)U)W)=\eta(R(Z,\,R(\xi,Y)U)W)$$

$$-\frac{1}{n-2}[\,S(R(\xi,Y)U,W)\;\eta(Z)-S(Z,W)\eta(R(\xi,Y)U)$$

$$+g(R(\xi,Y)U,W)\;\eta(QZ)-g(Z,W)\;\eta(QR(\xi,Y)U)] \qquad (3.46)$$

$$\eta(K(Z,U)R(\xi,Y)W)=\eta(R(Z,U)\,R(\xi,Y)W)$$

$$-\frac{1}{n-2}[S(U, R(\xi,Y)W)\ \eta(Z)-S(Z, R(\xi,Y)W)\ \eta(U)$$

$$+g(U, R(\xi,Y)W)\ \eta(QZ)-g(Z, R(\xi,Y)W)\ \eta(QU)] \quad (3.47)$$

elde edilir. (3.44), (3.45), (3.46), (3.47) denklemleri yine ayrı ayrı (1.12), (1.39), (1.34), (2.14) ve (2.15) eşitlikleri kullanılarak;

$$\eta(R(\xi,Y)K(Z,U)W)=g(Z,W)\eta(U)\eta(Y)-g(U,W)\eta(Z)\eta(Y)-g(Y,R(Z,U)W)$$

$$-\frac{1}{n-2}[S(U,W)\eta(Z)\eta(Y)-S(U,W)g(Y,Z)-S(Z,W)\ \eta(U)\eta(Y)$$

$$+S(Z,W)g(Y,U)+g(U,W)(1-n)\ \eta(Z)\eta(Y)-g(U,W)S(Y,Z)$$

$$-(1-n)g(Z,W)\eta(U)\eta(Y)+g(Z,W)S(Y,U)] \quad (3.48)$$

$$\eta(K(R(\xi,Y)Z,U)W)=g(R(\xi,Y)Z,W)\eta(U)-g(U,W)\ \eta(Z)\eta(Y)+g(U,W)g(Y,Z)$$

$$-\frac{1}{n-2}[\ S(U,W)\eta(Z)\eta(Y)-S(U,W)g(Y,Z)$$

$$-S(R(\xi,Y)Z,W)\eta(U)+g(U,W)(1-n)\eta(Z)\eta(Y)$$

$$-g(U,W)(1-n)g(Y,Z)-g(R(\xi,Y)Z,W)(1-n)\eta(U)] \quad (3.49)$$

$$\eta(K(Z,R(\xi,Y)U)W)=g(Z,W)\eta(U)\eta(Y)-g(Z,W)g(Y,U)-g(R(\xi,Y)U,W)\eta(Z)$$

$$-\frac{1}{n-2}[\ S(R(\xi,Y)U,W)\eta(Z)-S(Z,W)\eta(U)\eta(Y)$$

$$+S(Z,W)g(Y,U)+(1-n)g(R(\xi,Y)U,W)\eta(Z)$$

$$-(1-n)g(Z,W)\eta(U)\eta(Y)+(1-n)g(Z,W)g(Y,U)] \quad (3.50)$$

$$\eta(K(Z,U)R(\xi,Y)W)=g(Z,R(\xi,Y)W)\ \eta(U)-g(U,R(\xi,Y)W)\eta(Z)$$

$$-\frac{1}{n-2}[\ S(U,R(\xi,Y)W)\eta(Z)-S(Z,R(\xi,Y)W)\eta(U)$$

$$+(1-n)g(U,R(\xi,Y)W)\eta(Z)-(1-n)g(Z,R(\xi,Y)W)\eta(U)] \quad (3.51)$$

elde edilir. (3.48), (3.49), (3.50), (3.51) denklemleri (3.39) de yerine yazılırsa;

$$\eta((R(\xi,Y)\cdot K)(Z,U)W)=g(Z,W)\eta(U)\eta(Y)-g(U,W)\eta(Z)\eta(Y)-g(Y,R(Z,U)W)$$

$$-\frac{1}{n-2}[S(U,W)\eta(Z)\eta(Y)-S(U,W)g(Y,Z)-S(Z,W)\ \eta(U)\eta(Y)$$

$$+S(Z,W)g(Y,U)+g(U,W)(1-n)\ \eta(Z)\eta(Y)-g(U,W)S(Y,Z)$$

$$-(1-n)g(Z,W)\eta(U)\eta(Y)+g(Z,W)S(Y,U)]$$

$$-g(R(\xi,Y)Z,W)\eta(U)+g(U,W)\ \eta(Z)\eta(Y)-g(U,W)g(Y,Z)$$

$$+\frac{1}{n-2}[\ S(U,W)\eta(Z)\eta(Y)-S(U,W)g(Y,Z)-S(R(\xi,Y)Z,W)\eta(U)$$

$$+g(U,W)(1-n)\eta(Z)\eta(Y)-g(U,W)(1-n)g(Y,Z)-g(R(\xi,Y)Z,W)(1-n)\eta(U)]$$

$$-g(Z,W)\eta(U)\eta(Y)+g(Z,W)g(Y,U)+g(R(\xi,Y)U,W)\eta(Z)$$

$$+\frac{1}{n-2}[\ S(R(\xi,Y)U,W)\eta(Z)-S(Z,W)\eta(U)\eta(Y)+S(Z,W)g(Y,U)$$

$$+(1-n)g(R(\xi,Y)U,W)\eta(Z)-(1-n)g(Z,W)\eta(U)\eta(Y)+(1-n)g(Z,W)g(Y,U)]$$

$$-g(Z,R(\xi,Y)W)\ \eta(U)+g(U,R(\xi,Y)W)\eta(Z)$$

$$+\frac{1}{n-2}[S(U,R(\xi,Y)W)\eta(Z)-S(Z,R(\xi,Y)W)\eta(U)$$

$$+(1-n)g(U,R(\xi,Y)W)\eta(Z)-(1-n)g(Z,R(\xi,Y)W)\eta(U)]=0 \tag{3.52}$$

dir. (1.3) ve (1.5) eşitlikleri (3.52) da kullanılırsa;

$$\eta((R(\xi,Y)\cdot K)(Z,U)W)=-g(Y,R(Z,U)W)\ -g(U,W)g(Y,Z)\ +g(Z,W)g(Y,U)$$

$$+\frac{1}{n-2}[-S(U,W)\eta(Z)\eta(Y)+S(U,W)g(Y,Z)+S(Z,W)\eta(U)\eta(Y)$$

$$-S(Z,W)g(Y,U)-g(U,W)(1-n)\eta(Z)\eta(Y)+g(U,W)S(Y,Z)$$

$$+(1-n)g(Z,W)\eta(U)\eta(Y)-g(Z,W)S(Y,U)+S(U,W)\eta(Z)\eta(Y)$$

$$-S(U,W)g(Y,Z)-S(R(\xi,Y)Z,W)\eta(U)+g(U,W)(1-n)\eta(Z)\eta(Y)$$

$$-g(U,W)(1-n)g(Y,Z)-g(R(\xi,Y)Z,W)(1-n)\eta(U)+S(R(\xi,Y)U,W)\eta(Z)$$

$$-S(Z,W)\eta(U)\eta(Y)+S(Z,W)g(Y,U)+(1-n)g(R(\xi,Y)U,W)\eta(Z)$$

$$-(1-n)g(Z,W)\eta(U)\eta(Y)+(1-n)g(Z,W)g(Y,U)+S(U,R(\xi,Y)W)\eta(Z)$$

$$-S(Z,R(\xi,Y)W)\eta(U)+(1-n)g(U,R(\xi,Y)W)\eta(Z)$$

$$-(1-n)g(Z,R(\xi,Y)W)\eta(U)]=0 \tag{3.53}$$

elde edilir. Böylece (3.53) denkleminden;

$$\eta((R(\xi,Y)\cdot K)(Z,U)W)=-g(Y,R(Z,U)W)-g(U,W)g(Y,Z)+g(Z,W)g(Y,U)$$

$$+\frac{1}{n-2}[+S(U,W)g(Y,Z)+g(U,W)S(Y,Z)-g(Z,W)S(Y,U)$$

$$-S(U,W)g(Y,Z)-S(R(\xi,Y)Z,W)\eta(U)-g(U,W)(1-n)g(Y,Z)$$

$$+S(R(\xi,Y)U,W)\eta(Z)+(1-n)g(Z,W)g(Y,U)+S(U,R(\xi,Y)W)\eta(Z)$$

$$-S(Z,R(\xi,Y)W)\eta(U)]=0 \tag{3.54}$$

elde edilir. (3.54) de $Z=\xi$ alınırsa;

$$\eta((R(\xi,Y)\cdot K)(\xi,U)W)=-g(Y,R(\xi,U)W)-g(U,W)g(Y,\xi)+g(\xi,W)g(Y,U)$$

$$+\frac{1}{n-2}[+S(U,W)g(Y,\xi)+g(U,W)S(Y,\xi)-g(\xi,W)S(Y,U)$$

$$-S(U,W)g(Y,\xi)-(R(\xi,Y)\xi,W)\eta(U)-g(U,W)(1-n)g(Y,\xi)$$

$$+S(R(\xi,Y)U,W)\eta(\xi)+(1-n)g(\xi,W)g(Y,U)$$

$$+S(U,R(\xi,Y)W)\eta(\xi)-S(\xi,R(\xi,Y)W)\eta(U)]=0 \tag{3.55}$$

dır. (3.55) de (1.34) ve (1.39) kullanılır ve $W=\xi$ alınırsa;

$$\eta((R(\xi,Y)\cdot K)(\xi,U)\xi)=-g(Y,R(\xi,U)\xi)-g(U,\xi)g(Y,\xi)+g(\xi,\xi)g(Y,U)$$

$$+\frac{1}{n-2}[+S(U,\xi)g(Y,\xi)+g(U,\xi)S(Y,\xi)-g(\xi,\xi)S(Y,U)$$

$$-S(U,\xi)g(Y,\xi)-S(R(\xi,Y)\xi,\xi)\eta(U)-g(U,\xi)(1-n)g(Y,\xi)$$

$$+S(R(\xi,Y)U,\xi)\eta(\xi)+(1-n)g(\xi,\xi)g(Y,U)$$

$$+S(U,R(\xi,Y)\xi)\eta(\xi)-S(\xi,R(\xi,Y)\xi)\eta(U)]=0 \tag{3.56}$$

elde edilir. (3.56) te (1.34), (1.39), (2.14) ve (2.15) eşitlikleri kullanılarak;

$$\eta((R(\xi,Y)\cdot K)(\xi,U)\xi)=-2\eta(U)\eta(Y)+2g(Y,U)+\frac{1}{n-2}[-2S(Y,U)+2(1-n)\eta(U)\eta(Y)]=0 \tag{3.57}$$

$$=-\frac{2}{n-2}S(Y,U)+2g(Y,U)+\frac{6-4n}{n-2}\eta(U)\eta(Y)=0 \tag{3.58}$$

elde edilir.(3.58) denkleminden

$$S(Y,U)=(n-2)g(Y,U)+(3-2n)\eta(U)\eta(Y) \tag{3.59}$$

bulunur. Bu sonuç M^n ‘nin η-Einstein manifold olduğunu gösterir.

Teorem 3.1.4:

M, n-boyutlu Para-Sasakian manifold olsun. *M* üzerinde $\forall X,Y,Z,U,W\in\chi(M)$ için, $(R(X,Y)\cdot K)(Z,U)W-(K(X,Y)\cdot R)(Z,U)W=0$ ise *M* η-Einstein manifolddur.

İspat: $\forall X, Y, Z, U, W\in\chi(M)$ için $X=\xi$ alınırsa;

$$(R(\xi,Y)\cdot K)(Z,U)W-(K(\xi,Y)\cdot R)(Z,U)W=0$$

elde edilir.

$$(R(\xi,Y)\cdot K)(Z,U)W-(K(\xi,Y)\cdot R)(Z,U)W=0$$

eşitliğini ξ ile çarpıp $Z=W=\xi$ alırsak;

$$\eta((R(\xi,Y)\cdot K)(\xi,U)\xi)-\eta((K(\xi,Y)\cdot R)(\xi,U)\xi)=0$$

dır.Yukarıdaki eşitlikte (3.23) ve (3.58) eşitliklerini kullanırsak;

$$\eta((R(\xi,Y)\cdot K)(\xi,U)\xi)-\eta((K(\xi,Y)\cdot R)(\xi,U)\xi)=$$

$$-\frac{2}{n-2}S(Y,U)+2g(Y,U)+\frac{6-4n}{n-2}\eta(U)\eta(Y)$$

$$-[\frac{2}{n-2}S(Y,U)-(\frac{2}{n-2})g(Y,U)+\left(\frac{2n}{n-2}\right)\eta(U)\eta(Y)]=0 \quad (3.60)$$

elde edilir. (3.60) eşitliğinde düzenleme yapılarak;

$$\left(-\frac{2}{n-2}-\frac{2}{n-2}\right)S(Y,U)+\left(2+\frac{2}{n-2}\right)g(Y,U)+\left(\frac{6-4n}{n-2}-\frac{2n}{n-2}\right)\eta(U)\eta(Y)=0 \quad (3.61)$$

dır. (3.61) eşitliğinden

$$S(Y,U)=\left(\frac{n-1}{2}\right)g(Y,U)+\left(\frac{3-3n}{2}\right)\eta(U)\eta(Y) \quad (3.62)$$

elde edilir.Bu sonuç M^n 'nin η-Einstein manifold olduğunu gösterir.

Teorem 3.1.5: *M, n*-boyutlu Para-Sasakian manifold olsun.M üzerinde $\forall$ $X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için, $(R(X,Y)\cdot S)(Z,W)=0$ ise M Einstein manifolddur.

İspat: $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için,

$$(R(X,Y)\cdot S)(Z,W)=R(X,Y)S(Z,W)-S(R(X,Y)Z,W)-S(Z,R(X,Y)W)=0 \quad (3.63)$$

$$(R(X,Y)\cdot S)(Z,W)=-S(R(X,Y)Z,W)-S(Z,R(X,Y)W)=0 \quad (3.64)$$

elde edilir. (3.64) de $Z=\xi$ alınırsa;

$$S(R(X,Y)\xi,W)=-S(\xi,R(X,Y)W) \quad (3.65)$$

elde edilir.(3.65) de sol taraf için (2.2) eşitliğini kullanarak;

$$S(R(X,Y)\xi,W)=S(\eta(X)Y-\eta(Y)X,W)$$

$$=\eta(X)S(Y,W)-\eta(Y)S(X,W) \quad (3.66)$$

dır. (3.66) eşitliğinin sağ tarafı için ise (2.14) denklemini kullanırsak;

$$S(\xi,R(X,Y)W)=(1-n)\ \eta(R(X,Y)W) \quad (3.67)$$

dır. (3.66) ve (3.67), (3.65) te yerlerine yazılırsa;

$$\eta(X)S(Y,W)-\eta(Y)S(X,W)=(n-1)\ \eta(R(X,Y)W) \quad (3.68)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı için (2.15) denkleminden yararlanıldığında

$\eta(X)S(Y,W)-\eta(Y)S(X,W) = (n-1)[g(X,W)\ \eta(Y)-g(Y,W)\ \eta(X)]$ (3.69)

dır. (3.69) de $X=\xi$ alınırsa;

$\eta(\xi)S(Y,W)-\eta(Y)S(\xi,W)=(n-1)[g(\xi,W)\ \eta(Y)-g(Y,W)\ \eta(\xi)]$ (3.70)

dır. (3.70) de ise (1.34) , (1.39) ve (2.14) eşitlikleri kullanılırsa;

$-(1-n)\eta(Y)\eta(W)+S(Y,W)=(n-1)\ \eta(W)\ \eta(Y)-(n-1)g(Y,W)$ (3.71)

elde edilir. (3.71) da gerekli işlemler yapılarak;

$$S(Y,W)=(1-n)\ \eta(Y)\ \eta(W)+(n-1)\ \eta(W)\ \eta(Y)+(1-n)g(Y,W)$$

$S(Y,W)=(1-n)g(Y,W)$ (3.72)

elde edilir.

Sonuç olarak M, n-boyutlu Para-Sasakian manifold $(R(X,Y).S)(Z,W)=0$ şartını sağlarsa Einstein manifolddur.

Teorem 3.1.6: M, n-boyutlu Para-Sasakian manifold olsun.M üzerinde $\forall\ X,\ Y,\ Z\in\chi(M)$ için, $(R(X,Y)\cdot K)(Z,U)W=L_C Q(g,R)(Z,U,W;X,Y)$ ise $L_C\neq-1$ olması durumunda M, η-Einstein manifolddur.

İspat: $\forall\ X,\ Y,\ Z\in\chi(M)$ için, $(R(X,Y)K)(Z,U)W=L_C Q(g,R)(Z,U,W;X,Y)$ eşitliğin sol tarafı için Teorem 3.1.3 ün ispatında uyguladığımız işlemleri $Q(g,R)(Z,U,W;X,Y)$ ifadesinde de sırasıyla uygulayalım.

$Q(g,R)(Z,U,W;X,Y)=$

$((X\wedge_g Y)R)(Z,U)W=(X\wedge_g Y)R(Z,U)W-R((X\wedge_g Y)Z,U)W-R(Z,(X\wedge_g Y)U)W-R(Z,U)(X\wedge_g Y)W$ (3.73)

(3.73) denkleminde $X=\xi$ alınırsa;

$((\xi\wedge_g Y)R)(Z,U)W=(\xi\wedge_g Y)R(Z,U)W-R((\xi\wedge_g Y)Z,U)W-R(Z,(\xi\wedge_g Y)U)W-R(Z,U)\xi\wedge_g Y)W$ (3.74)

elde edilir. (3.74) deki terimlerin ayrı ayrı (1.17), (1.39), (2.2), (2.15) denklemlerini kullanarak açılırsa;

$$(\xi\wedge_g Y)R(Z,U)W=g(Y,R(Z,U)W)\xi-g(\xi,R(Z,U)W)Y$$
$$=g(Y,R(Z,U)W)\xi-\eta(R(Z,U)W)Y$$

$$=g(Y,R(Z,U)W)\xi-(g(Z,W)\eta(U)-g(U,W)\ \eta(Z))Y$$

$$=g(Y,R(Z,U)W)\xi-g(Z,W)\eta(U)Y+g(U,W)\ \eta(Z)Y \tag{3.75}$$

$$R((X\wedge_g Y)Z,U)W=R(g(Y,Z)\xi-g(\xi,Z)Y,U)W$$

$$=g(Y,Z)R(\xi,U)W-\eta(Z)R(Y,U)W \tag{3.76}$$

$$R\ (Z,(X\wedge_g Y)U)W=R(Z,g(Y,U)\xi-g(\xi,U)Y)W$$

$$=g(Y,U)R(Z,\ \xi)W-g(\xi,U)R(Z,Y)W$$

$$=g(Y,U)R(Z,\ \xi)W-\eta(U)R(Z,Y)W \tag{3.77}$$

$$R(Z,U)(X\wedge_g Y)W=R(Z,U)(g(Y,W)\xi-g(\xi,W)Y)$$

$$=g(Y,W)R(Z,U)\xi-\eta(W)R(Z,U)Y$$

$$=g(Y,W)\ \eta(U)Z-g(Y,W)\ \eta(Z)U-\eta(W)R(Z,U)Y \tag{3.78}$$

elde edilir. Bulunan (3.75), (3.76), (3.77), (3.78) sonuçlarını, (3.74) de yerine yazılırsa;

$$((\xi\wedge_g Y)R)(Z,U)W=g(Y,R(Z,U)W)\xi-g(Z,W)\eta(U)Y+g(U,W)\eta(Z)Y-g(Y,Z)R(\xi,U)W$$

$$+\eta(Z)R(Y,U)W-g(Y,U)R(Z,\ \xi)W+\eta(U)R(Z,Y)W-g(Y,W)\ \eta(U)Z$$

$$+g(Y,W)\ \eta(Z)U+\eta(W)R(Z,U)Y \tag{3.79}$$

dır. (3.79) denklemi ξ ile çarpılırsa;

$$\eta(((\xi\wedge_g Y)R)(Z,U)W)=g(Y,R(Z,U)W)-g(Z,W)\eta(U)\eta(Y)+g(U,W)\eta(Z)\eta(Y)$$

$$-g(Y,Z)\eta(R(\xi,U)W)+\eta(Z)\eta(R(Y,U)W)-g(Y,U)\eta(R(Z,\xi)W)$$

$$+\eta(U)\eta(R(Z,Y)W)-g(Y,W)\eta(U)\eta(Z)$$

$$+g(Y,W)\eta(Z)\eta(U)+\eta(W)\eta(R(Z,U)Y) \tag{3.80}$$

dır. (3.80) da gerekli açılımlar yapılarak;

$$\eta(((\xi\wedge_g Y)R)(Z,U)W)=g(Y,R(Z,U)W)-g(Z,W)\eta(U)\eta(Y)+g(U,W)\eta(Z)\eta(Y)$$

$$-g(Y,Z)\eta(W)\eta(U)\ +g(U,W)g(Y,Z)+\eta(Z)\eta(U)g(Y,W)$$

$$-g(U,W)\eta(Z)\eta(Y)-g(Y,U)g(Z,W)+\eta(Z)\eta(W)g(Y,U)$$

$$+g(Z,W)\eta(U)\eta(Y)-\eta(Z)\eta(U)g(Y,W)-g(Y,W)\eta(U)\eta(Z)$$

$$+g(Y,W)\eta(Z)\eta(U)+g(Y,Z)\eta(W)\eta(U)-\eta(Z)\eta(W)g(Y,U) \qquad (3.81)$$

elde edilir. (3.81) dan;

$$\eta(((\xi\wedge_g Y)R)(Z,U)W)=g(Y,R(Z,U)W)+g(U,W)g(Y,Z)-g(Y,U)g(Z,W) \qquad (3.82)$$

elde edilir. (3.82) da $W=Z=\xi$ alalım.Bu durumda ;

$$\eta(((\xi\wedge_g Y)R)(\xi,U)\xi)=g(Y,R(\xi,U)\xi)+g(U,\xi)g(Y,\xi)-g(Y,U)g(\xi,\xi) \qquad (3.83)$$

elde edilir. (3.83) de yapılan düzenlemelerden sonra;

$$\eta(((\xi\wedge_g Y)R)(\xi,U)\xi)=g(Y,g(U,\xi)\xi-U)+\eta(U)\eta(Y)-g(Y,U)$$

$$=\eta(U)g(Y,\xi)-g(Y,U)+\eta(U)\eta(Y)-g(Y,U)$$

$$=-2g(Y,U)+2\eta(U)\eta(Y) \qquad (3.84)$$

dır. M üzerinde $\forall X,\ Y,\ Z\in\chi(M)$ için, $(R(X,Y)\cdot K)(Z,U)W=L_CQ(g,R)(Z,U,W;X,Y)$ eşitliğinde sol taraf için Teorem 3.1.4 ün ispatında bulduğumuz (3.58) eşitliğini, sağ taraf için ise (3.84) eşitliğini kullanırsak;

$$-\frac{2}{n-2}S(Y,U)+2g(Y,U)+\frac{6-4n}{n-2}\eta(U)\eta(Y)=L_C(-2g(Y,U)+2\eta(U)\eta(Y)) \qquad (3.85)$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\frac{2}{n-2}S(Y,U)=(1+L_C)2g(Y,U)+\left(\frac{6-4n}{n-2}-2L_C\right)\eta(U)\eta(Y)$$

$$S(Y,U)=(1+L_C)(n-2)g(Y,U)+(3-2n-(n-2)L_C)\eta(U)\eta(Y) \qquad (3.86)$$

dır. Sonuç olarak (3.86) denkleminde $L_C\neq-1$ olması durumunda M, n-boyutlu Para-Sasakian manifold η- Einstein manifolddur.

Teorem 3.1.7: M n-boyutlu Para-Sasakian manifold olsun. M üzerinde $\forall X,\ Y,\ Z\in\chi(M)$ için, $(R(X,Y)\cdot K)(Z,U)W=L_CQ(S,R)(Z,U,W;X,Y)$ ise L_C nin alacağı her değer için M η-Einstein manifolddur.

İspat: $\forall X, Y, Z\in\chi(M)$ için, $(R(X,Y)\cdot K)(Z,U)W=L_C Q(S,R)(Z,U,W;X,Y)$ eşitliğin sol tarafı için Teorem 3.1.3 ün ispatında uyguladığımız işlemleri $Q(S,R)(Z,U,W;X,Y)$ ifadesinde de sırasıyla uygulayalım.

$Q(S,R)(Z,U,W;X,Y)=$

$$((X\wedge_S Y)R)(Z,U)W=(X\wedge_S Y)R(Z,U)W-R((X\wedge_S Y)Z,U)W- R(Z,(X\wedge_S Y)U)W-R(Z,U)(X\wedge_S Y)W \quad (3.87)$$

dır. (3.87) denkleminde $X=\xi$ alalım. Bu durum da denklem;

$$((\xi\wedge_S Y)R)(Z,U)W=(\xi\wedge_S Y)R(Z,U)W-R((\xi\wedge_S Y)Z,U)W-R(Z,(\xi\wedge_S Y)U)W-R(Z,U)(\xi\wedge_S Y)W \quad (3.88)$$

olur. (3.88) deki terimleri (1.17) , (1.39), (2.2) , (2.14) , (2.15) denklemlerini kullanarak ayrı ayrı açarsak;

$$(\xi\wedge_S Y)R(Z,U)W= S(Y,R(Z,U)W)\xi - S(\xi,R(Z,U)W)Y$$

$$= S(Y,R(Z,U)W)\xi -(1-n)\eta(R(Z,U)W)Y$$

$$=S(Y,R(Z,U)W)\xi -(1-n)\eta(U)g(Z,W)Y+(1-n)\eta(Z)g(U,W)Y \quad (3.89)$$

$$R((\xi\wedge_S Y)Z,U)W= R(S(Y,Z)\xi -S(\xi,Z)Y,U)W$$

$$=S(Y,Z)R(\xi,U)W-(1-n)\eta(Z)R(Y,U)W \quad (3.90)$$

$$R(Z,(\xi\wedge_S Y)U)W= R(Z,S(Y,U)\xi -S(\xi,U)Y)W$$

$$= R(Z,S(Y,U)\xi -(1-n)\eta(U)Y)W$$

$$=S(Y,U)R(Z,\xi)W-(1-n)\eta(U)R(Z,Y)W \quad (3.91)$$

$$R(Z,U)(\xi\wedge_S Y)W= R(Z,U)(S(Y,W)\xi -S(\xi,W)Y)$$

$$= S(Y,W)R(Z,U)\xi -(1-n)\ \eta(W)R(Z,U)Y$$

$$=S(Y,W)\eta(U)Z- S(Y,W)\eta(Z)U-(1-n)\ \eta(W)R(Z,U)Y \quad (3.92)$$

elde edilir. (3.89), (3.90), (3.91), (3.92) sonuçları (3.88) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$((\xi\wedge_S Y)R)(Z,U)W=S(Y,R(Z,U)W)\xi -(1-n)\eta(U)g(Z,W)Y+(1-n)\eta(Z)g(U,W)Y$$

$$- S(Y,Z)R(\xi,U)W +(1-n)\eta(Z)R(Y,U)W- S(Y,U)R(Z,\xi)W$$

$$+(1-n)\eta(U)R(Z,Y)W-S(Y,W)\eta(U)Z+S(Y,W)\eta(Z)U$$

$$+(1-n)\eta(W)R(Z,U)Y \qquad (3.93)$$

elde edilir. (3.93) denklemi ξ ile çarpılırsa denklem;

$$\eta(((\xi\wedge_S Y)R)(Z,U)W)=S(Y,R(Z,U)W) - (1-n)\eta(U)g(Z,W)\eta(Y)+(1-n)\eta(Z)g(U,W)\eta(Y)$$

$$-S(Y,Z)\eta(R(\xi,U)W)+(1-n)\eta(Z)\eta(R(Y,U)W)- S(Y,U)\eta(R(Z,\xi)W)$$

$$+(1-n)\eta(U)\eta(R(Z,Y)W)-S(Y,W)\eta(U)\eta(Z)$$

$$+S(Y,W)\eta(Z)\ \eta(U)+(1-n)\eta(W)\ \eta(R(Z,U)Y) \qquad (3.94)$$

şeklini alır. (3.94) eşitliğinde (1.34), (1.39), (2.15) denklemleri kullanılarak gerekli açılımlar yapılırsa;

$$\eta(((\xi\wedge_S Y)R)(Z,U)W)=S(Y,R(Z,U)W)-(1-n)\eta(U)g(Z,W)\eta(Y)+(1-n)\eta(Z)g(U,W)\eta(Y)$$

$$- S(Y,Z)\ \eta(U)\eta(W)\ +S(Y,Z)g(U,W)+(1-n)\eta(Z)\eta(U)g(Y,W)$$

$$-(1-n)\eta(Z)\eta(Y)g(U,W)-S(Y,U)g(Z,W)+S(Y,U)\eta(W)\eta(Z)$$

$$+(1-n)\eta(U)\eta(Y)g(Z,W)-(1-n)\eta(U)\eta(Z)g(Y,W)-S(Y,W)\eta(U)\eta(Z)$$

$$+S(Y,W)\eta(Z)\ \eta(U)+(1-n)\eta(W)\eta(U)g(Z,Y)-(1-n)\eta(W)\eta(Z)g(U,Y) \qquad (3.95)$$

dır. Sadeleştirmelerden sonra;

$$\eta(((\xi\wedge_S Y)R)(Z,U)W)=S(Y,R(Z,U)W)-S(Y,Z)\ \eta(U)\eta(W)\ +S(Y,Z)g(U,W)$$

$$-S(Y,U)g(Z,W)\ +S(YU)\eta(W)\eta(Z)$$

$$+(1-n)\eta(W)\eta(U)g(Z,Y)-(1-n)\eta(W)\eta(Z)g(U,Y) \qquad (3.96)$$

elde edilir. (3.96) te $W=Z=\xi$ alınırsa;

$$\eta(((\xi\wedge_S Y)R)(\xi,U)\xi)=S(Y,R(\xi,U)\xi)-S(Y,\ \xi)\eta(U)+S(Y,\xi)g(U,\xi)$$

$$-S(Y,U)+S(Y,U)+(1-n)\eta(U)g(\xi,Y)-(1-n)g(U,Y) \qquad (3.97)$$

elde edilir.(3.97) da (1.39), (2.2), (2.14) eşitlikleri kullanarak gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\eta(((\xi\wedge_S Y)R)(\xi,U)\xi)=S(Y,\ \eta(U)\xi-U)-(1-n)\eta(Y)\eta(U)+(1-n)\eta(Y)\eta(U)$$

$$-S(Y,U)+S(Y,U)+(1-n)\eta(U)\eta(Y)-(1-n)g(U,Y)$$

$$=\eta(U)(1-n)\eta(Y)-S(Y,U)-(1-n)\eta(Y)\eta(U)+(1-n)\eta(Y)\eta(U)$$

$$-S(Y,U)+S(Y,U)+(1-n)\eta(U)\eta(Y)-(1-n)g(U,Y) \quad (3.98)$$

dır.

$$\eta(((\xi\wedge_S Y)R)(\xi,U)\xi)=\eta(U)(1-n)\eta(Y)-S(Y,U)+(1-n)\eta(U)\eta(Y)-(1-n)g(U,Y)$$

$$=-S(Y,U)+(n-1)g(U,Y)+2(1-n)\eta(U)\eta(Y) \quad (3.99)$$

elde edilir. M üzerinde $\forall\ X,\ Y,\ Z\in\chi(M)$ için, $(R(X,Y)\cdot K)(Z,U)W=L_C Q(S,R)(Z,U,W;X,Y)$ eşitliğinde sol taraf için Teorem 3.1.3 ün ispatında bulduğumuz (3.58) eşitliğini, sağ taraf için ise (3.99) eşitliğini kullanırsak;

$$-\frac{2}{n-2}S(Y,U)+2g(Y,U)+\frac{6-4n}{n-2}\eta(U)\eta(Y)=L_C(-S(Y,U)+(n-1)g(U,Y)+2(1-n)\eta(U)\eta(Y)) \quad (3.100)$$

bulunur. (3.100) da gerekli düzenleme yapılırsa;

$$S(U,Y)=\left(\frac{-2(n-2)+L_C(n-1)(n-2)}{L_c(n-2)-2}\right)g(U,Y)+\left(\frac{4n-6-2L_C(n-1)(n-2)}{L_c(n-2)-2}\right)\eta(U)\eta(Y) \quad (3.101)$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak burada L_C nin alacağı her değer için M, η- Einstein manifolddur.

Teorem 3.1.8: M n-boyutlu Para-Sasakian manifold olsun.M üzerinde $\forall\ X,\ Y,\ Z\in\chi(M)$ için, $(R(X,Y)\cdot K)(Z,U)W=L_C Q(S,K)(Z,U,W;X,Y)$ ise

$$S^2(Y,U)=\left(n-2-\frac{2}{L_C}\right)S(Y,U)+\left(\frac{2n-4}{L_C}+n-1\right)g(Y,U)+\left(\frac{6-4n}{L_C}+n^2-5n+4\right)\eta(Y)\eta(U)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $\forall\ X,\ Y,\ Z\in\chi(M)$ için, $(R(X,Y)\cdot K)(Z,U)W=L_C Q(S,K)(Z,U,W;X,Y)$ eşitliğin sol tarafı için Teorem 3.1.3 ün ispatında uyguladığımız işlemleri $Q(S,K)(Z,U,W;X,Y)$ ifadesinde de sırasıyla uygulayalım.

$Q(S,K)(Z,U,W;X,Y)=$

$$((X\wedge_S Y)K)(Z,U)W=(X\wedge_S Y)K(Z,U)W-K((X\wedge_S Y)Z,U)W-K(Z,(X\wedge_S Y)U)W-K(Z,U)(X\wedge_S Y)W \quad (3.102)$$

olur. (3.102) de $X=\xi$ alalım

$$((\xi \wedge_S Y)K)(Z,U)W=(\xi \wedge_S Y)K(Z,U)W-K((\xi \wedge_S Y)Z,U)W$$

$$-K(Z,(\xi \wedge_S Y)U)W-K(Z,U)(\xi \wedge_S Y)W \tag{3.103}$$

(3.103) deki terimleri (1.16), (1.32), (1.39), (2.2), (2.14), (2.15) denklemlerini kullanarak ayrı ayrı açalım. Bu durumda;

$$(\xi \wedge_S Y)K(Z,U)W= S(Y,K(Z,U)W)\xi - S(\xi,K(Z,U)W)Y$$

$$=S(Y,R(Z,U)W-\frac{1}{n-2}[S(U,W)Z-S(Z,W)U+g(U,W)QZ-g(Z,W)QU])\xi$$

$$-(1-n)\eta(R(Z,U)W-\frac{1}{n-2}[S(U,W)Z-S(Z,W)U+g(U,W)QZ-g(Z,W)QU])Y$$

$$=S(Y,R(Z,U)W)\xi$$

$$-\frac{1}{n-2}[S(U,W)S(Y,Z)\xi-S(Z,W)S(Y,U)\xi$$

$$+g(U,W)S(Y,QZ)\xi-g(Z,W)S(Y,QU)\xi]$$

$$-(1-n)\eta(R(Z,U)W)$$

$$+\frac{1}{n-2}[-(1-n)S(U,W)\eta(Z)Y+(1-n)S(Z,W)\eta(U)Y$$

$$-(1-n)g(U,W)\eta(QZ)Y+(1-n)g(Z,W)\eta(QU)Y]$$

$$=S(Y,R(Z,U)W-\frac{1}{n-2}[S(U,W)Z-S(Z,W)U+g(U,W)QZ-g(Z,W)QU])\xi$$

$$-(1-n)\eta(R(Z,U)W-\frac{1}{n-2}[S(U,W)Z-S(Z,W)U+g(U,W)QZ-g(Z,W)QU])Y$$

$$= S(Y,R(Z,U)W)\xi -(1-n)g(Z,W)\eta(U)Y+(1-n)g(U,W)\eta(Z)Y$$

$$+\frac{1}{n-2}[-S(U,W)S(Y,Z)\xi+S(Z,W)S(Y,U)\xi-g(U,W)S(Y,QZ)\xi$$

$$+g(Z,W)S(Y,QU)\xi+(1-n)S(U,W)\eta(Z)Y-(1-n)S(Z,W)\eta(U)Y$$

$$+(1-n)^2 g(U,W)\eta(Z)Y-(1-n)^2 g(Z,W)\eta(U)Y] \tag{3.104}$$

$$K((\xi\wedge_S Y)Z,U)W= K(S(Y,Z)\xi-S(\xi,Z)Y,U)W$$

$$= S(Y,Z)K(\xi,U)W-(1-n)\eta(Z)K(Y,U)W$$

$$= S(Y,Z)(R(\xi,U)W-\frac{1}{n-2}[S(U,W)\xi-S(\xi,W)U+g(U,W)Q\xi-g(\xi,W)QU])$$

$$-(1-n)\eta(Z)(R(Y,U)W-\frac{1}{n-2}[S(U,W)Y-S(Y,W)U+g(U,W)QY-g(Y,W)QU])$$

$$= S(Y,Z)R(\xi,U)W-(1-n)\eta(Z)R(Y,U)W$$

$$-\frac{1}{n-2}[S(Y,Z)S(U,W)\xi-(1-n)\eta(W)S(Y,Z)U+g(U,W)S(Y,Z)Q\xi$$

$$-\eta(W)S(Y,Z)QU-(1-n)\eta(Z)S(U,W)Y+(1-n)\eta(Z)S(Y,W)U$$

$$-(1-n)\eta(Z)g(U,W)QY+(1-n)\eta(Z)g(Y,W)QU] \tag{3.105}$$

$$K(Z,(\xi\wedge_S Y)U)W= K(Z,S(Y,U)\xi-S(\xi,U)Y)W$$

$$= S(Y,U)K(Z,\xi)W-(1-n)\eta(U)K(Z,Y)W$$

$$= S(Y,U)(R(Z,\xi)W-\frac{1}{n-2}[S(\xi,W)Z-S(Z,W)\xi+g(\xi,W)QZ-g(Z,W)Q\xi])$$

$$-(1-n)\eta(U)(R(Z,Y)W-\frac{1}{n-2}[S(Y,W)Z-S(Z,W)Y+g(Y,W)QZ-g(Z,W)QY])$$

$$= S(Y,U)R(Z,\xi)W-(1-n)\eta(U)R(Z,Y)W$$

$$-\frac{1}{n-2}[(1-n)\eta(W)S(Y,U)Z-S(Z,W)S(Y,U)\xi+\eta(W)S(Y,U)QZ$$

$$-g(Z,W)S(Y,U)Q\xi-(1-n)\eta(U)S(Y,W)Z+(1-n)\eta(U)S(Z,W)Y$$

$$-(1-n)\eta(U)g(Y,W)QZ+(1-n)\eta(U)g(Z,W)QY] \tag{3.106}$$

$$K(Z,U)(\xi \wedge_S Y)W = K(Z,U)(S(Y,W)\xi - S(\xi,W)Y)$$

$$= S(Y,W)K(Z,U)\xi - (1-n)\eta(W)K(Z,U)Y$$

$$= S(Y,W)\Big(R(Z,U)\xi - \frac{1}{n-2}[S(U,\xi)Z - S(Z,\xi)U + g(U,\xi)QZ - g(Z,\xi)QU]\Big)$$

$$-(1-n)\eta(W)\Big(R(Z,U)Y - \frac{1}{n-2}[S(U,Y)Z - S(Z,Y)U + g(U,Y)QZ - g(Z,Y)QU]\Big)$$

$$= S(Y,W)\eta(U)Z - S(Y,W)\eta(Z)U - (1-n)\eta(W)R(Z,U)Y$$

$$-\frac{1}{n-2}[(1-n)\eta(U)S(Y,W)Z - (1-n)\eta(Z)S(Y,W)U + \eta(U)S(Y,W)QZ$$

$$-\eta(Z)S(Y,W)QU - (1-n)\eta(W)S(U,Y)Z + (1-n)\eta(W)S(Z,Y)U$$

$$-(1-n)\eta(W)g(U,Y)QZ + (1-n)\eta(W)g(Z,Y)QU] \qquad (3.107)$$

elde edilir. (3.104), (3.105), (3.106), (3.107) denklemlerini (3.103) de yerine yazıp denklemi ξ ile çarpalım.Buradan;

$$\eta(((\xi \wedge_S Y)K)(Z,U)W) = S(Y,R(Z,U)W) - (1-n)g(Z,W)\eta(U)\eta(Y) + (1-n)g(U,W)\eta(Z)\eta(Y)$$

$$-S(Y,Z)\eta(R(\xi,U)W) + (1-n)\eta(Z)\eta(R(Y,U)W) - S(Y,U)\eta(R(Z,\xi)W)$$

$$+(1-n)\eta(U)\eta(R(Z,Y)W) - S(Y,W)\eta(U)\eta(Z) + S(Y,W)\eta(Z)\eta(U)$$

$$+(1-n)\eta(W)\eta(R(Z,U)Y)$$

$$+\frac{1}{n-2}[-S(U,W)S(Y,Z) + S(Z,W)S(Y,U) - g(U,W)S(Y,QZ)$$

$$+g(Z,W)S(Y,QU) + (1-n)S(U,W)\eta(Z)\eta(Y) - (1-n)S(Z,W)\eta(U)\eta(Y)$$

$$+(1-n)^2 g(U,W)\eta(Z)\eta(Y) - (1-n)^2 g(Z,W)\eta(U)\eta(Y) + S(Y,Z)S(U,W)$$

$$-(1-n)\eta(W)S(Y,Z)\eta(U) + g(U,W)S(Y,Z)(1-n) - \eta(W)S(Y,Z)\eta(U)(1-n)$$

$$-(1-n)\eta(Z)S(U,W)\eta(Y) + (1-n)\eta(Z)S(Y,W)\eta(U)$$

$$-(1-n)\eta(Z)g(U,W)\eta(Y)(1-n) + (1-n)\eta(Z)g(Y,W)\eta(U)(1-n)$$

$$+(1-n)\eta(W)S(Y,U)\eta(Z)-S(Z,W)\ S(Y,U)+\eta(W)S(Y,U)\eta(Z)(1-n)$$

$$-g(Z,W)S(Y,U)(1-n)-(1-n)\eta(U)S(Y,W)\eta(Z)+(1-n)\eta(U)S(Z,W)\eta(Y)$$

$$-(1-n)\eta(U)g(Y,W)\eta(Z)(1-n)+(1-n)\eta(U)g(Z,W)\eta(Y)(1-n)$$

$$+(1-n)\eta(U)S(Y,W)\eta(Z)-(1-n)\eta(Z)S(Y,W)\eta(U)$$

$$+\eta(U)S(Y,W)\eta(Z)(1-n)-\eta(Z)S(Y,W)\eta(U)(1-n)$$

$$-(1-n)\eta(W)S(U,Y)\eta(Z)+(1-n)\eta(W)S(Z,Y)\eta(U)$$

$$-(1-n)\eta(W)g(U,Y)\eta(Z)(1-n)+(1-n)\eta(W)g(Z,Y)\eta(U)(1-n)] \qquad (3.108)$$

elde edilir. (3.108) denkleminde gerekli açılımlar yapılırsa;

$$\eta(((\xi\wedge_S Y)K)(Z,U)W)=S(Y,R(Z,U)W)-(1-n)g(Z,W)\eta(U)\eta(Y)+(1-n)g(U,W)\eta(Z)\eta(Y)$$

$$-S(Y,Z)\eta(W)\eta(U)\ +S(Y,Z)g(U,W)+(1-n)\eta(Z)g(Y,W)\eta(U)$$

$$-(1-n)\eta(Z)g(U,W)\eta(U)-S(Y,U)g(Z,W)+S(U,Y)\ \eta(Z)\eta(W)$$

$$+(1-n)\eta(U)g(Z,W)\eta(Y)-(1-n)\eta(U)g(Y,W)\eta(Z)-S(Y,W)\eta(U)\eta(Z)$$

$$+S(Y,W)\eta(Z)\eta(U)+(1-n)\eta(W)g(Z,Y)\eta(U)-\ (1-n)\eta(W)g(U,Y)\eta(Z)$$

$$+\frac{1}{n-2}[-g(U,W)S(Y,QZ)+g(Z,W)S(Y,QU)-(1-n)\eta(W)S(Y,Z)\eta(U)$$

$$+g(U,W)S(Y,Z)(1-n)-\eta(W)S(Y,Z)\eta(U)(1-n)\ +\eta(W)S(Y,U)\eta(Z)(1-n)$$

$$-g(Z,W)S(Y,U)(1-n)+(1-n)\eta(W)S(Z,Y)\eta(U)$$

$$-(1-n)\eta(W)g(U,Y)\eta(Z)(1-n)+(1-n)\eta(W)g(Z,Y)\eta(U)(1-n)]$$

$$=S(Y,R(Z,U)W)-S(Y,Z)\ \eta(W)\eta(U)\ +S(Y,Z)g(U,W)-S(Y,U)g(Z,W)$$

$$+S(U,Y)\ \eta(Z)\eta(W)\ +(1-n)\eta(W)g(Z,Y)\eta(U)-(1-n)\eta(W)g(U,Y)\eta(Z)$$

$$+\frac{1}{n-2}[-g(U,W)S(Y,QZ)+g(Z,W)S(Y,QU)+g(U,W)S(Y,Z)(1-n)$$

$$-\eta(W)S(Y,Z)\eta(U)(1-n)\ +\eta(W)S(Y,U)\eta(Z)(1-n)-g(Z,W)S(Y,U)(1-n)$$

$$-(1-n)^2\eta(W)g(U,Y)\eta(Z)+(1-n)^2\eta(W)g(Z,Y)\eta(U)] \quad (3.109)$$

dır. (3.109) de $W=Z=\xi$ alındığında;

$$\eta(((\xi\wedge_S Y)K)(\xi,U)\xi)=S(Y,R(\xi,U)\xi)-S(Y,\xi)\eta(U)+S(Y,\xi)g(U,\xi)-S(Y,U)+S(U,Y)$$

$$+(1-n)g(\xi,Y)\eta(U)-(1-n)g(U,Y)$$

$$+\frac{1}{n-2}[-g(U,\xi)S(Y,Q\xi)+S(Y,QU)+g(U,\xi)S(Y,\xi)(1-n)$$

$$-S(Y,\xi)\eta(U)(1-n)+S(Y,U)(1-n)-S(Y,U)(1-n)-(1-n)^2g(U,Y)$$

$$+(1-n)^2g(\xi,Y)\eta(U)] \quad (3.110)$$

elde edilir.(3.110) da (1.32), (1.39), (2.2), (2.14), (2.15) eşitlikleri yardımıyla gerekli düzenlemeleri yaparak;

$$\eta(((\xi\wedge_S Y)K)(\xi,U)\xi)= S(Y,\ \eta(U)\xi-U)-(1-n)\eta(Y)\eta(U)+(1-n)\eta(Y)\eta(U)-S(Y,U)+S(U,Y)$$

$$+(1-n)\eta(Y)\eta(U)-(1-n)g(U,Y)$$

$$+\frac{1}{n-2}[-(1-n)\eta(Y)\eta(U)+S(Y,QU)+(1-n)\eta(Y)\eta(U)-(1-n)\eta(Y)\eta(U)$$

$$+S(Y,U)(1-n)-S(Y,U)(1-n)-(1-n)^2g(U,Y)+(1-n)^2\eta(Y)\eta(U)]$$

$$=(1-n)\eta(Y)\eta(U)-S(Y,U)+(1-n)\eta(Y)\eta(U)-(1-n)g(U,Y)$$

$$+\frac{1}{n-2}[+S(Y,QU)-(1-n)\eta(Y)\eta(U)\ -(1-n)^2g(U,Y)+(1-n)^2\eta(Y)\eta(U)]$$

$$=2(1-n)\eta(Y)\eta(U)-S(Y,U)-(1-n)g(U,Y)$$

$$+\frac{1}{n-2}[S(Y,QU)-(1-n)\eta(Y)\eta(U)-(1-n)^2g(U,Y)+(1-n)^2\eta(Y)\eta(U)]$$

$$=\frac{1}{n-2}S(Y,QU)-S(Y,U)+\left(n-1-\frac{(1-n)^2}{n-2}\right)g(U,Y)$$

$$+\left(2-2n+\frac{n-1+(1-n)^2}{n-2}\right)\eta(Y)\eta(U)$$

$$= \frac{1}{n-2} S(Y,QU)\text{-}(Y,U) + \left(\frac{1-n}{n-2}\right) g(U,Y)$$

$$+\left(\frac{-n^2+5n-4}{n-2}\right)\eta(Y)\eta(U) \tag{3.111}$$

elde edilir. M üzerinde $\forall$ X, Y, $Z\in\chi(M)$ için, $(R(X,Y)\cdot K)(Z,U)W=L_C Q(S,K)(Z,U,W;X,Y)$ eşitliğinde sol taraf için Teorem 3.1.3 ün ispatında bulduğumuz (3.58) eşitliğini, sağ taraf için ise (3.111) eşitliğini kullanırsak;

$$-\frac{2}{n-2} S(Y,U)+2g(Y,U) + \frac{6-4n}{n-2}\eta(U)\eta(Y)=$$

$$L_C\left(\frac{1}{n-2} S(Y,QU) - S(Y,U) + \left(\frac{1-n}{n-2}\right) g(U,Y) + \left(\frac{-n^2+5n-4}{n-2}\right)\eta(Y)\eta(U)\right) \tag{3.112}$$

elde edilir. (3.112) de gerekli düzenleme yapılarak ,

$$S^2(Y,U)=\left(n-2-\frac{2}{L_C}\right)S(Y,U)+\left(\frac{2n-4}{L_C}+n-1\right)g(Y,U)+\left(\frac{6-4n}{L_C}+n^2-5n+4\right)\eta(Y)\eta(U) \tag{3.113}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.1.9: M, n-boyutlu Para-Sasakian manifold olsun.M üzerinde $\forall$ X, Y, $Z,U,W\in\chi(M)$ için, $(C(X,Y)\cdot C)(Z,U)W=0$ ise $\tau=0$ veya M, η- Einstein manifolddur.

İspat: $\forall X$, Y, $Z,U,W\in\chi(M)$ için,

$$(C(X,Y)\cdot C)(Z,U)W=C(X,Y)C(Z,U)W-C(C(X,Y)Z,U)W-C(Z,C(X,Y)U)W-C(Z,U)C(X,Y)W=0 \tag{3.114}$$

eşitliğini yazalım. (3.114) eşitliğinde $X=\xi$ alınırsa;

$$(C(\xi,Y)C)(Z,U)W=C(\xi,Y)C(Z,U)W-C(C(\xi,Y)Z,U)W-C(Z,C(\xi,Y)U)W-C(Z,U)C(\xi,Y)W=0 \tag{3.115}$$

elde edilir.(3.115) denklemindeki terimleri açalım. Bu durumda;

$$C(\xi,Y)C(Z,U)W= C(\xi,Y)(R(Z,U)W-\frac{1}{n-2}[S(U,W)Z - S(Z,W)U + g(U,W)QZ - g(Z,W)QU]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(U,W)Z-g(Z,W)U])$$

$=C(\xi,Y)R(Z,U)W$

$-\frac{1}{n-2}[S(U,W)C(\xi,Y)Z - S(Z,W)C(\xi,Y)U + g(U,W)C(\xi,Y)QZ$

$- g(Z,W)\, C(\xi,Y)QU]$

$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(U,W)C(\xi,Y)Z - g(Z,W)C(\xi,Y)U]$

$=R(\xi,Y)R(Z,U)W$

$-\frac{1}{n-2}[S(Y,R(Z,U)W)\xi - S(\xi, R(Z,U)W)Y + g(Y, R(Z,U)W)Q\xi$

$- g(\xi, R(Z,U)W)QY]$

$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(Y,R(Z,U)W)\xi - g(\xi, R(Z,U)W)Y]$

$-\frac{1}{n-2}[\, S(U,W)R(\xi,Y)Z - \frac{1}{n-2}[\, S(U,W)S(Y,Z)\xi - S(U,W)S(\xi,Z)Y$

$+ S(U,W)g(Y,Z)Q\xi - S(U,W)g(\xi,Z)QY]$

$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[\, S(U,W)g(Y,Z)\ \xi - S(U,W)g(\xi,Z)Y]$

$- S(Z,W)R(\xi,Y)U + \frac{1}{n-2}[\, S(Z,W)S(Y,U)\xi - S(Z,W)S(\xi,U)Y$

$+ S(Z,W)g(Y,U)Q\xi - S(Z,W)g(\xi,U)QY]$

$-\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[\, S(Z,W)g(Y,U)\ \xi - S(Z,W)g(\xi,U)Y]$

$+ g(U,W)R(\xi,Y)QZ - \frac{1}{n-2}[\, g(U,W)S(Y,QZ)\xi - g(U,W)S(\xi,QZ)Y$

$+ g(U,W)g(Y,QZ)Q\xi - g(U,W)g(\xi,QZ)QY]$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[\,g(U,W)g(Y,QZ)\ \xi\text{-}g(U,W)g(\xi,QZ)Y]$$

$$-\ g(Z,W)R(\xi,Y)QU+\frac{1}{n-2}[\,g(Z,W)S(Y,QU)\,\xi\text{ - }g(Z,W)S(\xi,QU)Y$$

$$+\ g(Z,W)g(Y,QU)Q\xi\ -g(Z,W)g(\xi,QU)QY]$$

$$-\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[\,g(Z,W)g(Y,QU)\ \xi\text{ - }g(Z,W)g(\xi,QU)Y]]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[\,g(U,W)R(\xi,Y)Z\text{-}\frac{1}{n-2}[\,g(U,W)S(Y,Z)\,\xi$$

$$-g(U,W)S(\xi,Z)Y+g(U,W)g(Y,Z)Q\xi-g(U,W)g(\xi,Z)QY]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[\,g(U,W)g(Y,Z)\,\xi\text{-}g(U,W)g(\xi,Z)Y]\text{-}g(Z,W)R(\xi,Y)U$$

$$+\frac{1}{n-2}[g(Z,W)S(Y,U)\,\xi\text{-}g(Z,W)S(\xi,U)Y+g(Z,W)g(Y,U)Q\xi$$

$$-\ g(Z,W)g(\xi,U)QY]$$

$$-\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[\,g(Z,W)g(Y,U)\ \xi\text{ - }g(Z,W)g(\xi,U)Y] \tag{3.116}$$

elde edilir. (3.116) eşitliği ξ ile çarpıp $Z=W=\xi$ alınırsa;

$$\eta(C(\xi,Y)C(\xi,U)\,\xi)=\eta(R(\xi,Y)R(\xi,U)\,\xi)$$

$$-\frac{1}{n-2}[S(Y,R(\xi,U)\,\xi)\text{-}S(\xi,R(\xi,U)\,\xi)\,\eta(Y)$$

$$+g(Y,R(\xi,U)\,\xi)\ \eta(Q\xi)-g(\xi,R(\xi,U)\ \xi)\ \eta(QY)]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(Y,R(\xi,U)\ \xi)\text{-}g(\xi,R(\xi,U)\ \xi)\,\eta(Y)]$$

$$-\frac{1}{n-2}[\,S(U,\xi)\,\eta(R(\xi,Y)\ \xi)\text{-}\frac{1}{n-2}[\,S(U,\xi)S(Y,\xi)$$

$$-S(U,\xi)S(\xi,\xi)\eta(Y)+S(U,\xi)g(Y,\xi)\ \eta(Q\xi)-S(U,\xi)g(\xi,\xi)\eta(QY)]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[S(U,\xi)g(Y,\xi)-S(U,\xi)g(\xi,\xi)\eta(Y)]$$

$$-S(\xi,\xi)\eta(R(\xi,Y)U)+\frac{1}{n-2}[\ S(\xi,\ \xi)S(Y,U)-S(\xi,\xi)S(\xi,U)\eta(Y)$$

$$+S(\xi,\ \xi)g(Y,U)\ \eta(Q\xi)-S(\xi,\ \xi)g(\xi,U)\eta(QY)]$$

$$-\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[\ S(\xi,\xi)g(Y,U)-S(\xi,\ \xi)g(\xi,U)\eta(Y)]$$

$$+g(U,\xi)\eta(R(\xi,Y)Q\xi)-\frac{1}{n-2}[g(U,\xi)S(Y,Q\xi)$$

$$-g(U,\xi)S(\xi,Q\xi)\eta(Y)+g(U,\xi)g(Y,Q\xi)\eta(Q\xi)$$

$$-g(U,\xi)g(\xi,Q\xi)\ \eta(QY)]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(U,\xi)g(Y,Q\xi)-g(U,\xi)g(\xi,Q\xi)\eta(Y)]$$

$$-g(\xi,\ \xi)\eta(R(\xi,Y)QU)$$

$$+\frac{1}{n-2}[g(\xi,\xi)S(Y,QU)-g(\xi,\xi)S(\xi,QU)\eta(Y)$$

$$+g(\xi,\xi)g(Y,QU)\eta(Q\xi)-g(\xi,\ \xi)g(\xi,QU)\eta(QY)]$$

$$-\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(\xi,\xi)g(Y,QU)-g(\xi,\ \xi)g(\xi,QU)\eta(Y)]]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[\ g(U,\ \xi)\eta(R(\xi,Y)\ \xi)-\frac{1}{n-2}[g(U,\xi)S(Y,\ \xi)$$

$$-g(U,\ \xi)S(\xi,\xi)\eta(Y)+g(U,\ \xi)g(Y,\xi)\eta(Q\xi)-g(U,\xi)g(\xi,\xi)\eta(QY)]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[\ g(U,\xi)g(Y,\xi)-g(U,\xi)g(\xi,\xi)\eta(Y)]$$

$$-g(\xi,\xi)\eta(R(\xi,Y)U)$$

$$+\frac{1}{n-2}[g(\xi,\ \xi)S(Y,U)-g(\xi,\xi)S(\xi,U)\eta(Y)+g(\xi,\xi)g(Y,U)\eta(Q\xi)$$

$$-g(\xi,\xi)g(\xi,U)\eta(QY)]$$

$$-\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(\xi,\xi)g(Y,U)-g(\xi,\xi)g(\xi,U)\eta(Y)] \qquad (3.117)$$

elde edilir. (3.117) da gerekli düzenleme yapılırsa ;

$$\eta(C(\xi,Y)C(\xi,U)\xi)=-\eta(U)\ \eta(Y)+g(Y,U)+\frac{1}{(n-2)^2}[-2(1-n)S(Y,U)$$

$$+4(1-n)^2\eta(U)\eta(Y)-(1-n)^2g(Y,U)-S(Y,QU)]$$

$$+(\frac{\tau}{(n-1)(n-2)})^2[\eta(U)\eta(Y)-g(Y,U)] \qquad (3.118)$$

bulunur.

$$C(C(\xi,Y)Z,U)W=C(R(\xi,Y)Z-\frac{1}{n-2}[S(Y,Z)\xi-S(\xi,Z)Y+g(Y,Z)Q\xi-g(\xi,Z)QY]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(Y,Z)\ \xi-g(\xi,Z)Y],U)W$$

$$=C(R(\xi,Y)Z,U)W-\frac{1}{n-2}[S(Y,Z)C(\xi,U)W-S(\xi,Z)C(Y,U)W$$

$$+g(Y,Z)C(Q\xi,U)W-g(\xi,Z)C(QY,U)W]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(Y,Z)\ C(\xi,U)W-g(\xi,Z)C(Y,U)W]$$

$$=R(R(\xi,Y)Z,U)W-\frac{1}{n-2}[S(U,W)\ R(\xi,Y)Z-S(R(\xi,Y)Z,W)U$$

$$+g(U,W)QR(\xi,Y)Z-g(R(\xi,Y)Z,W)QU]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(U,W)\ R(\xi,Y)Z-g(R(\xi,Y)Z,W)U]$$

$$- \frac{1}{n-2} [S(Y,Z)R(\xi ,U)W - \frac{1}{n-2} [S(Y,Z)S(U,W) \xi - S(Y,Z)S(\xi ,W)U$$

$$+ S(Y,Z)g(U,W)Q \xi - S(Y,Z)g(\xi ,W)QU]$$

$$+ \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} [S(Y,Z)g(U,W) \xi - S(Y,Z)g(\xi ,W)U]$$

$$- S(\xi ,Z)R(Y,U)W + \frac{1}{n-2} [S(\xi ,Z)S(U,W)Y - S(\xi ,Z)S(Y,W)U$$

$$+ S(\xi ,Z)g(U,W)QY - S(\xi ,Z)g(Y,W)QU]$$

$$- \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} [S(\xi ,Z)g(U,W)Y - S(\xi ,Z)g(Y,W)U]$$

$$+g(Y,Z)R(Q\xi ,U)W - \frac{1}{n-2} [g(Y,Z)S(U,W)Q\xi - g(Y,Z)S(Q\xi ,W)U$$

$$+g(Y,Z)g(U,W)QQ\xi - g(Y,Z)g(Q\xi ,W)QU]$$

$$+ \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} [g(Y,Z)g(U,W)Q\xi - g(Y,Z)g(Q\xi ,W)U]$$

$$- g(\xi ,Z)R(QY,U)W + \frac{1}{n-2} [g(\xi ,Z)S(U,W)QY - g(\xi ,Z)S(QY,W)U$$

$$+g(\xi ,Z)g(U,W)QQY - g(\xi ,Z)g(QY,W)QU]$$

$$- \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} [g(\xi ,Z)g(U,W)QY - g(\xi ,Z)g(QY,W)U]]$$

$$+ \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} [g(Y,Z)R(\xi ,U)W - \frac{1}{n-2} [g(Y,Z)S(U,W) \xi$$

$$- g(Y,Z)S(\xi ,W)U + g(Y,Z)g(U,W)Q\xi - g(Y,Z)g(\xi ,W)QU]$$

$$+ \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} [g(Y,Z)g(U,W) \xi - g(Y,Z)g(\xi ,W)U]$$

$$-g(\xi ,Z)R(Y,U)W + \frac{1}{n-2} [g(\xi ,Z)S(U,W)Y - g(\xi ,Z)S(Y,W)U$$

$$+ g(\xi,Z)g(U,W)QY - g(\xi,Z)g(Y,W)QU]$$

$$-\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[\, g(\xi,Z)g(U,W)Y- g(\xi,Z)g(Y,W)U]] \tag{3.119}$$

bulunur. (3.119) eşitliğini ξ ile çarpıp $W=Z=\xi$ alınırsa;

$$\eta(C(C(\xi,Y)\xi,U)\xi) = \eta(R(R(\xi,Y)Z,U)W) - \frac{1}{n-2}[S(U,\ \xi)\ \eta(R(\xi,Y)\xi) - S(R(\xi,Y)\xi,\xi)$$

$$\eta(U)+g(U,\xi)\ \eta(QR(\xi,Y)\xi) - g(R(\xi,Y)\xi,\xi)\ \eta(QU)]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(U,\xi)\ \eta(R(\xi,Y)\xi) - g(R(\xi,Y)\ \xi,\xi)\ \eta(U)]$$

$$-\frac{1}{n-2}[\, S(Y,Z)\ \eta(R(\xi,U)\xi) - \frac{1}{n-2}[\, S(Y,\xi)S(U,\xi)$$

$$-S(Y,\xi)S(\xi,\xi)\eta(U)+S(Y,\xi)g(U,\xi)\ \eta(Q\xi) - S(Y,\xi)\eta(QU)]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[\, S(Y,\xi)g(U,\xi) - S(Y,\xi)\eta(U)]$$

$$- S(\xi,\xi)\ \eta(R(Y,U)\xi) + \frac{1}{n-2}[\, S(\xi,\xi)S(U,\xi)\ \eta(Y)$$

$$-S(\xi,\xi)S(Y,\xi)\eta(U)+S(\xi,\xi)g(U,\xi)\eta(QY) - S(\xi,\xi)g(Y,\ \xi)\ \eta(QU)]$$

$$-\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[\, S(\xi,\xi)g(U,\xi)\ \eta(Y) - S(\xi,\xi)g(Y,\xi)\ \eta(U)]$$

$$+ g(Y,\xi)\ \eta(R(Q\xi,U)\xi) - \frac{1}{n-2}[\, g(Y,\xi)S(U,\xi)\ \eta(Q\xi)$$

$$-g(Y,\xi)S(Q\xi,\xi)\eta(U)+g(Y,\xi)g(U,\xi)\eta(QQ\xi) - (Y,\xi)g(Q\xi,\xi)\eta(QU)]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[\, g(Y,\xi)g(U,\xi)\eta(Q\xi) - g(Y,\xi)g(Q\xi,\xi)\eta(U)]$$

$$-\eta(R(QY,U)\xi) + \frac{1}{n-2}[S(U,\xi)\eta(QY) - S(QY,\xi)\eta(U)$$

$$+g(U,\xi)\eta(QQY)-g(QY,\xi)\eta(QU)]$$

$$-\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(U,\xi)\eta(QY)-g(QY,\xi)\ \eta(U)]]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[\ g(Y,\xi)\eta(R(\xi,U)\xi)-\frac{1}{n-2}[g(Y,\xi)S(U,\xi)$$

$$-g(Y,\xi)S(\xi,\xi)\eta(U)+g(Y,\xi)g(U,\xi)\eta(Q\xi)-g(Y,\xi)\eta(QU)]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(Y,\xi)g(U,\xi)-\ g(Y,\xi)\ \eta(U)]$$

$$-\eta(R(Y,U)\xi)+\frac{1}{n-2}[S(U,\xi)\eta(Y)-S(Y,\xi)\eta(U)$$

$$+g(U,\xi)\eta(QY)-g(Y,\xi)\ \eta(QU)]$$

$$-\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(U,\xi)\eta(Y)-g(Y,\xi)\eta(U)]]=0 \qquad (3.120)$$

elde edilir.

$$C(Z,C(\xi,Y)U)W=C(Z,R(\xi,Y)U-\frac{1}{n-2}[S(Y,U)\xi-S(\xi,U)Y+g(Y,U)Q\xi-g(\xi,U)QY]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(Y,U)\ \xi-g(\xi,U)Y])W$$

$$=C(Z,R(\xi,Y)U)W-\frac{1}{n-2}[S(Y,U)C(Z,\xi)W$$

$$-S(\xi,U)C(Z,Y)W+g(Y,U)C(Z,Q\xi)W-g(\xi,U)C(Z,QY)W]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(Y,U)C(Z,\xi)W-g(\xi,U)C(Z,Y)W$$

$$=R(Z,\ R(\xi,Y)U)W-\frac{1}{n-2}[S(R(\xi,Y)U,W)Z-S(Z,W)R(\xi,Y)U$$

$$+g(R(\xi,Y)U,W)QZ-g(Z,W)QU]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(R(\xi,Y)U,W)Z-g(Z,W)R(\xi,Y)U]$$

$$-\frac{1}{n-2}[S(Y,U)R(Z,\xi)W-\frac{1}{n-2}[S(Y,U)S(\xi,W)Z-S(Y,U)S(Z,W)\xi$$

$$+S(Y,U)g(\xi,W)QZ-S(Y,U)g(Z,W)Q\xi]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[S(Y,U)g(\xi,W)Z-S(Y,U)g(Z,W)\xi]$$

$$-S(\xi,U)R(Z,Y)W+\frac{1}{n-2}[S(\xi,U)S(Y,W)Z-S(\xi,U)S(Z,W)Y$$

$$+S(\xi,U)g(Y,W)QZ-S(\xi,U)g(Z,W)QY]$$

$$-\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[S(\xi,U)g(Y,W)Z-S(\xi,U)g(Z,W)Y]]$$

$$+g(Y,U)R(Z,Q\xi)W-\frac{1}{n-2}[g(Y,U)S(Q\xi U,W)Z-g(Y,U)S(Z,W)Q\xi$$

$$+g(Y,U)g(Q\xi,W)QZ-g(Y,U)g(Z,W)QQ\xi]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(Y,U)g(Q\xi,W)Z-g(Y,U)g(Z,W)Q\xi]$$

$$-g(\xi,U)R(Z,QY)W+\frac{1}{n-2}[g(\xi,U)S(QY,W)Z-g(\xi,U)S(Z,W)QY$$

$$+g(\xi,Z)g(QY,W)QZ-g(\xi,U)g(Z,W)QQY]$$

$$-\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(\xi,U)g(QY,W)Z-g(\xi,U)g(Z,W)QY]]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(Y,U)R(Z,\xi)W-\frac{1}{n-2}[g(Y,U)S(\xi,W)Z-g(Y,U)S(Z,W)\xi$$

$$+g(Y,U)g(\xi,W)QZ-g(Y,U)g(Z,W)Q\xi]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(Y,U)g(\xi,W)Z-g(Y,U)g(Z,W)\xi]$$

$$-g(\xi,U)R(Z,Y)W+\frac{1}{n-2}[\,g(\xi,U)S(Y,W)Z-g(\xi,U)S(Z,W)Y$$

$$+g(\xi,U)g(Y,W)QZ-g(\xi,U)g(Z,W)QY]$$

$$-\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[\,g(\xi,U)g(Y,W)Z-g(\xi,U)g(Z,W)Y]] \qquad (3.121)$$

elde edilir. (3.121) eşitliği ξ ile çarpılıp $W=Z=\xi$ alınır ve gerekli düzenleme yapılırsa;

$$\eta(C(\xi,C(\xi,Y)U)\xi)=\eta(R(\xi,R(\xi,Y)U)\xi)-\frac{1}{n-2}[S(R(\xi,Y)U,\xi)$$

$$-S(\xi,\xi)\eta(R(\xi,Y)U)+g(R(\xi,Y)U,\xi)\ \eta(Q\xi)-\eta(QU)]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(R(\xi,Y)U,\xi)-\eta(R(\xi,Y)U)]$$

$$-\frac{1}{n-2}[S(Y,U)\ \eta(R(\xi,\xi)\xi)-\frac{1}{n-2}[\,S(Y,U)S(\xi,\xi)$$

$$-S(Y,U)S(\xi,\xi)+S(Y,U)\eta(Q\xi)-S(Y,U)\eta(Q\xi)]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[\,S(Y,U)-S(Y,U)g(\xi,\xi)]$$

$$-S(\xi,U)\eta(R(\xi,Y)\xi)+\frac{1}{n-2}[\,S(\xi,U)S(Y,\xi)$$

$$-S(\xi,U)S(\xi,\xi)\eta(Y)+S(\xi,U)g(Y,\xi)\eta(Q\xi)-S(\xi,U)\eta(QY)]$$

$$-\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[S(\xi,U)g(Y,W)-S(\xi,U)\eta(Y)]\,]$$

$$+g(Y,U)\eta(R(\xi,Q\xi)\xi)-\frac{1}{n-2}[g(Y,U)S(Q\xi U,\xi)$$

$$-g(Y,U)S(\xi,\xi)\eta(Q\xi)+g(Y,U)g(Q\xi,\xi)\eta(Q\xi)-g(Y,U)\eta(QQ\xi)]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[\,g(Y,U)g(Q\xi,\xi)-(Y,U)\eta(Q\xi)]$$

$$-g(\xi,U)\eta(R(\xi,QY)\xi)+\frac{1}{n-2}[g(\xi,U)S(QY,\xi)$$

$$-g(\xi,U)S(\xi,\xi)\eta(QY)+g(QY,\xi)\eta(Q\xi)-g(\xi,U)\eta(QQY)]$$

$$-\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(\xi,U)g(QY,\xi)-g(\xi,U)\eta(QY)]]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(Y,U)\ \eta(R(Z,\xi)\xi)-\frac{1}{n-2}[g(Y,U)S(\xi,\xi)$$

$$-g(Y,U)S(\xi,\xi)+g(Y,U)\eta(Q\xi)-g(Y,U)\eta(Q\xi)]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(Y,U)g(\xi,\xi)-g(Y,U)]$$

$$-g(\xi,U)\ \eta(R(\xi,Y)\xi)+\frac{1}{n-2}[g(\xi,U)S(Y,\xi)$$

$$-g(\xi,U)S(\xi,\xi)\eta(Y)+g(\xi,U)g(Y,\xi)\eta(Q\xi)-g(\xi,U)\eta(QY)]$$

$$-\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(\xi,U)g(Y,\xi)-g(\xi,U)\eta(Y)]]=0 \qquad (3.122)$$

bulunur.

$$C(Z,U)C(\xi,Y)W=C(Z,U)(R(\xi,Y)W-\frac{1}{n-2}[S(Y,W)\xi-S(\xi,W)Y+g(Y,W)Q\xi-g(\xi,W)QY]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(Y,W)\xi-g(\xi,W)Y])$$

$$=C(Z,U)R(\xi,Y)W-\frac{1}{n-2}[S(Y,W)C(Z,U)\xi-S(\xi,W)C(Z,U)Y$$

$$+g(Y,W)C(Z,U)Q\xi-g(\xi,W)\ C(Z,U)QY]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(Y,W)C(Z,U)\xi-g(\xi,W)C(Z,U)Y])$$

$$=R(Z,U)R(\xi,Y)W-\frac{1}{n-2}[S(U,R(\xi,Y)W)Z$$

$$-S(Z,R(\xi,Y)W)U + g(U,R(\xi,Y)W)QZ - g(Z, R(\xi,Y)W)QU]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(U,R(\xi,Y)W)Z - g(Z,R(\xi,Y)W)U]$$

$$-\frac{1}{n-2}[\, S(Y,W)R(Z,U)\xi - \frac{1}{n-2}[\, S(Y,W)S(U,\xi)Z$$

$$-S(Y,W)S(Z,\xi)U + S(Y,W)g(U,\xi)QZ - S(Y,W)g(Z,\xi)QU]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[\, S(Y,W)g(U,\xi)Z - S(Y,W)g(Z,\xi)U]$$

$$-S(\xi,W)R(Z,U)Y + \frac{1}{n-2}[S(\xi,W)S(U,Y)Z - S(\xi,W)S(Z,Y)U$$

$$+S(\xi,W)g(U,Y)QZ - S(\xi,W)g(Z,Y)QU]$$

$$-\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[S(\xi,W)g(U,Y)Z - (\xi,W)g(Z,Y)U]$$

$$+g(Y,W)R(Z,U)Q\xi - \frac{1}{n-2}[g(Y,W)S(U,Q\xi)Z - g(Y,W)S(Z,Q\xi)U$$

$$+g(Y,W)g(U,Q\xi)QZ - g(Y,W)g(Z,Q\xi)QU]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[\, g(Y,W)g(U,Q\xi)Z - g(Y,W)g(Z,Q\xi)U]$$

$$-\, g(\xi,W)R(Z,U)QY + \frac{1}{n-2}[g(\xi,W)S(U,QY)Z - g(\xi,W)S(Z,QY)U$$

$$+g(\xi,W)g(U,QY)QZ - g(\xi,W)g(Z,QY)QU]$$

$$-\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(\xi,W)g(U,QY)Z - g(\xi,W)g(Z,QY)U]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(Y,W)R(Z,U)\xi - \frac{1}{n-2}[g(Y,W)S(U,\xi)Z - g(Y,W)S(Z,\xi)U$$

$$+\, g(Y,W)g(U,\xi)QZ - g(Y,W)g(Z,\xi)QU]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(Y,W)g(U,\xi)Z-g(Y,W)g(Z,\xi)U]$$

$$-g(\xi,W)R(Z,U)Y+\frac{1}{n-2}[g(\xi,W)S(U,Y)Z-g(\xi,W)S(Z,Y)U$$

$$+g(\xi,W)g(U,Y)QZ-g(\xi,W)g(Z,Y)QU]$$

$$-\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(\xi,W)g(U,Y)Z-g(\xi,W)g(Z,Y)U] \tag{3.123}$$

elde edilir. Buradan (3.123) eşitliği ξ ile çarpar, $W=Z=\xi$ alır ve gerekli düzenlemeleri yaparsak;

$$\eta(C(\xi,U)\cdot C(\xi,Y)\xi)=-\eta(U)\eta(Y)+g(U,Y)+\frac{1}{(n-2)^2}[-2(1-n)S(U,Y)-S(U,QY)$$

$$-(1-n)^2g(U,Y)+4(1-n)^2\eta(U)\eta(Y)]$$

$$-\frac{\tau}{(n-1)(n-2)^2}[-2S(U,Y)+3(1-n)\eta(U)\eta(Y)-(1-n)g(U,Y)]$$

$$+\left(\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\right)^2[\eta(U)\eta(Y)-g(Y,U)] \tag{3.124}$$

bulunur. (3.118), (3.120), (3.122), (3.124) eşitlikleri (3.115) denkleminde yerlerine yazılırsa;

$$\eta((C(\xi,Y)\cdot C)(\xi,U)\xi)=-\eta(U)\eta(Y)+g(Y,U)+\frac{1}{(n-2)^2}[-2(1-n)S(Y,U)$$

$$+4(1-n)^2\eta(U)\eta(Y)-(1-n)^2g(Y,U)-S(Y,QU)]$$

$$+\left(\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\right)^2[\eta(U)\eta(Y)-g(Y,U)]+\eta(U)\eta(Y)-g(U,Y)$$

$$-\frac{1}{(n-2)^2}[-2(1-n)S(U,Y)-S(U,QY)-(1-n)^2g(U,Y)+4(1-n)^2\eta(U)\eta(Y)]$$

$$+\frac{\tau}{(n-1)(n-2)^2}[-2S(U,Y)+3(1-n)\eta(U)\eta(Y)-(1-n)g(U,Y)]$$

$$-\left(\frac{\tau}{(n-1)(n-2)}\right)^2[\eta(U)\eta(Y)-g(Y,U)]=0$$

$$=\frac{\tau}{(n-1)(n-2)^2}[-2S(U,Y)+3(1-n)\eta(U)\eta(Y)-(1-n)g(U,Y)]=0 \qquad (3.125)$$

sonucuna ulaşılır. (3.125) eşitliğinden $\tau=0$ veya $-2S(U,Y)+3(1-n)\eta(U)\eta(Y)-(1-n)g(U,Y)=0$ elde edilir.

$$-2S(U,Y)+3(1-n)\eta(U)\eta(Y)-(1-n)g(U,Y)=0$$

ise

$$S(U,Y)=\frac{3}{2}(1-n)\eta(U)\eta(Y)-\frac{1}{2}(1-n)g(U,Y)$$

dır.

Bu sonuç M^n ' nin η -Einstein manifold olduğunu gösterir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] Arslan K., Murathan C, Yıldız A., Özgür C., 2000, On Contact Metric Manıfolds R-Harmonic Manifolds, Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol. 5, 1-6

[2] Arslan K., Murathan C, Yıldız A., Özgür C , Pseudo-symmetric contact metric manifolds in the sense of M.C.Chaki, Proc.Estonian Acad.Sci. Phys.Math.50(3), 124-132

[3] Blair D.E., Koufogiorgos T., Papantoniou B.J., 1995, Contact Metric Manıfolds satisfying a nullity condition , İsrael Journal of Mathehatics 91, 189-214

[4] Blair D.E. 1976, Contact manifolds in Riemannian geometry 1976, Lectures Notes in Mathematics 509. Springer-Verlag,Berlin, 146 p

[5] Boeckx E., Kowalski O., Vanhacke L., 1996, Riemannian manifolds of conullity two, World Scientific, ISBN 981-02-2768-X. 300p.

[6] Chaki M.C., On pseudo-symmetric manifolds, 1987, Analele Stintifice Ale Universitatii, AL:I..CUZA.Din lasi, Romania, 33,53

[7] Hen B.Y. 1973, Geometry of Submanıfolds,Marcel Dekker Inc., New York, 298p.

[8] Hacısalihoğlu H.H., 1983, Differantial Geometry, Inönü , Unıversty Pres, 895p.

[9] Kobayashi S., Nomizu K., 1963 Foundations of Differential Geometry, 470p.

[10] Koufigiorgos T., 1996,Contact Riemannian manifolds with constant ϕ-sectional curvature, Geometry and Topology of SubmanifoldsVIII, World Scientific, ISBN 981-02-2776-0

[11] Sato, I., On a scructure similar to the almost contact structure, Tensor, N.S., 30(1976), 219-224

[12] Murathan C., Yıldız A., 2000 Contact Riemannian Manifolds Satisfying $C(\xi, X)S = 0$ and $\xi \in (k,\mu)$-Nullity distribition , Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1, V.49,33-37

[13] O'Neill B., 1983 Semi Riemannian Geometry,Academic Pres, New York, 468p.

[14] Özgür C., On A Class of Para-Sasakian Manifols, Turk J. Math, 29(2005), 249-257

[15] Kobayashi S., Nomizu K., 1963 Foundations of Differential Geometry, 470p.

[16] Adati T., Matsumoto K., 1977 On Conformally Recurent and Conformally Symmetric P-Sasakian manifolds,TRU Math., 13(1977), 25-32

[17] Yano K., Kon M., 1984 Structure on Manıfolds,World Scientific, 508p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devamı)

[18] Verstraelen L., Vranken L., 1988 Pinching Theorems for C-Totally Real Submanıfolds of Sasakian Space Forms,Journal of Geometry, Vol 33.

[19] Adati T. and Miyazawa T., 1979 On P-Sasakian Manifolds Satisfyings Certain Conditions, Tensor, N.S., 33(1979), 173-178

[20] De U.C. and Pathak G., 1994 On P-Sasakian Manifolds Satisfying Certain Conditions, J. Indian Acad. Math. 16(1994), 72-77.

[21] De U.C. and Guha N., 1992 On a Type of P-Sasakian Manifold,İstanbul Univ. Fen Fak.Mat Der. 51(1992), 35-39

[22] Deszcz R., 1990 On Pseudosymmetric Spaces , Bull. Soc. Math. Belg., 49(1990), 134-145

[23] Sato I. and Matsumoto K., 1979 On P-Sasakian Manifolds Satisfying Certain Conditions, Tensor, N.S., 33(1979), 173-178

[24] Ishii Y., On Conharmonic transformations, Tensor, N.S., 7(1957), 73-89

[25] De, U. C., Guha, N., Kamilya, D., “On genaralize Ricci-recurrent manifolds”, Tensor (N.S.) 56 (1995), no. 3, 312-317