LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL
DENKLEMLERİN TAM ÇÖZÜMLERİ

İclal TOPOĞLU

Yüksek Lisans Tezi

Matematik AnaBilim Dalı

Temmuz-2007

LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN TAM ÇÖZÜMLERİ

İclal TOPOĞLU

Dumlupınar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Ahmet BEKİR

Temmuz-2007

KABUL ve ONAY

İclal TOPOĞLU' nun YÜKSEK LİSANS/DOKTORA tezi olarak hazırladığı LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN TAM ÇÖZÜMLERİ başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

........./......../.........

Üye : Prof.Dr. Naci ÖZER

Üye : Yrd.Doç.Dr. Elçin YUSUFOĞLU

Üye : Yrd.Doç.Dr. Ahmet BEKİR

Fen Bilimleri Enstitüsün Yönetim Kurulu'nun ....../...../..... gün ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

. Prof.Dr.M.SabriÖZYURT.
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN TAM ÇÖZÜMLERİ

İclal Topoğlu
Matematik, Yüksek Lisans Tezi, 2007
Tez Danışmanı: Yrd.Doç.Dr.Ahmet BEKİR

ÖZET

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde adi ve kısmi türevli denklemler ve sınıflandırılmaları, lineer olmayan oluşum denklemleri ve örnekleri verilmiştir.

İkinci bölümde ise; lineer olmayan oluşum denklemlerinin tam çözümlerini bulmak için tanh yöntemi verilerek, bu yöntemin bazı uygulamaları yapılmıştır.

Üçüncü bölümde; soliton ve periyodik çözümleri elde etmek için Sinüs-Kosinüs yöntemi verilerek, bilinen lineer olmayan oluşum denklemlerine uygulamaları yapılmıştır.

Dördüncü bölümde ise; son zamanlarda geliştirilen genelleştirilmiş tanh yöntemi verilerek, lineer olmayan oluşum denklemlerine ve denklem sistemlerine uygulamaları yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Tam çözümler, solitonlar, Tanh yöntemi, Sinüs-Kosinüs yöntemi.

EXACT SOLUTIONS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

İclal Topoğlu
Mathematics, M.S.Thesis, 2007
Thesis Supervisor: Assist. Prof. Ahmet BEKİR

SUMMARY

This thesis study consists of four chapters. In the first chapter, ordinary and partial differential equations and their classifications, nonlinear evolution equations and their examples are given.

In the second chapter, tanh method is introduced in order to find exact solutions of nonlinear evolution equations and some applications of this method is given.

In the third chapter, sine-cosine method is defined which is used for obtaining soliton and periodic solutions. Also this method is applied to known nonlinear evolution equations.

In the last chapter, tanh method, which is developed recently, is given and applications of this method is shown for nonlinear evolution equations and of equations systems.

Keywords: Exact solutions, Solitons, Tanh method, Sine-Cosine method.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında büyük yardımlarını ve desteklerini gördüğüm tez danışmanım Yrd.Doç.Dr. Ahmet BEKİR hocama teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (Devamı)

Sayfa

İÇİNDEKİLER (Devamı)

Sayfa

KISALTMALAR DİZİNİ

KdV	: Korteweg-de Vries Denklemi
ADD	: Adi Diferensiyel Denklem
RLW	: Düzenlenmiş Uzun-Dalga Denklemi
DS	: Drinfeld-Sokolov Denklem Sistemi
DKdV	: Değiştirilmiş Korteweg-de Vries Denklemi
GKdV	: Genelleştirilmiş Korteweg-de Vries Denklemi
B	: Boussinesq Denklemi
BBM	: Benjamin-Bona-Mahony Denklemi
PF	: Phi-Four Denklemi
KN	: Kaup-Newel Denklemi
GDS	: Genelleştirilmiş Drinfeld-Sokolov Denklem Sistemi
BK	: Broer-Kaup Denklem Sistemi
BD	: Burgers Denklemi
F	: Fisher Denklemi
BF	: Burger-Fisher Denklemi
H	: Huxley Denklemi
LORY	: Lineer Olmayan Reaksiyon-Yayılma Denklemleri
HSKdV	: Hirota-Satsuma- Korteweg-de Vries Denklem Sistemi
KDD	: (2+1)-Boyutlu Konopelchenko-Dubrovsky Denklem Sistemi

BÖLÜM 1

1.1 Giriş

Bu bölümde lineer olmayan oluşum denklemlerine temel teşkil edecek adi diferensiyel denklemler ve sınıflandırılmalarını, kısmi türevli diferensiyel denklemler ve sınıflandırılmalarını, birinci mertebeden lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemlerini vereceğiz.

Ayrıca tez içinde kullanılan lineer olmayan oluşum denklemlerini; soliton, kompakton kavramlarını ve çözüm şekillerini tanımlayacağız.

1.2 Diferensiyel Denklemler

Tanım 1.1 Bir denklemde; belirli bir değişkene göre türev varsa, bu değişkene *bağımsız değişken*, denklemde türevi bulunan değişkene de *bağımlı değişken* adı verilir.

Tanım 1.2 Bir yada daha çok bağımlı değişkenin, bir yada daha çok bağımsız değişkene göre türevlerini içinde bulunduran bir denkleme *diferensiyel denklem* denir. Bu tanım kısaca, içinde türev (veya kısmi türev) bulunan denklemlere *diferensiyel denklem* denir, şeklinde de yapılabilir.

Tanım 1.3 Bir diferensiyel denklemde eğer bir tek bağımsız değişken varsa denkleme *adi (bayağı) diferensiyel denklem*, birden fazla bağımsız değişken varsa denkleme *kısmi diferensiyel denklem* denir.

Tanım 1.4 Bir diferensiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevin mertebesine *diferensiyel denklemin mertebesi* denir. Diferensiyel denklem, bağımlı değişkene ve bağımlı değişkenin türevlerine göre bir polinom şekline getirilebiliyorsa, denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevin kuvvetine (derecesine) *diferensiyel denklemin derecesi* adı verilir.

Genel olarak x - bağımsız, y - bağımlı değişkenli, n -inci mertebeden bir diferensiyel denklem

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \text{ yada } y^{(n)} = F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right), \tag{1.1}$$

şeklinde yazılabilir. Bu tipden denklemlerin incelenmesinde önemli bir kavram da diferensiyel denklemlerin lineer olmasıdır.

Tanım 1.5 Eğer (1.1) n-inci mertebeden diferensiyel denkleminde $F; y, y', y'', ..., y^{(n)}$ değişkenlerine göre lineer bir fonksiyon ise denkleme *lineer diferensiyel denklem*, aksi halde *lineer olmayan (nonlineer) diferensiyel denklem* denir. Buna göre n-inci mertebeden lineer diferensiyel denklemi, genel olarak, $a_0(x) \neq 0$ şartıyla;

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x), \tag{1.2}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Dikkat edilirse lineer denklemlerde, bağımsız değişkenin denklemde bulunuş şekli lineerliği hiçbir durumda etkilemez ve bağımlı değişkenle, onun türevleri birinci derecedendir, yani y-li terimlerin kuvveti birdir [15].

1.3 Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemler

Tanım 1.6 İçinde en az iki bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre çeşitli mertebeden kısmi türevlerini kapsayan eşitliklere (özdeşlik değil) bir *kısmi türevli denklem* denir.

z bağımlı; x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere bir kısmi türevli denklem genel olarak

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, ...) = 0 \tag{1.3}$$

şeklindedir. Burada

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad z_y = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \qquad z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, ... \tag{1.4}$$

dir. n bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip kısmi türevli denklemlerin genel şekli, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $z = z(x)$ olmak üzere

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, z, z_{x_1}, ..., z_{x_n}, z_{x_1 x_1}, z_{x_1 x_2}, ...) = 0 \tag{1.5}$$

formundadır. Burada $x_1, x_2, ..., x_n$ bağımsız değişkenleri; z ise bağımlı değişkeni göstermekte ve

$$z_{x_i} = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \qquad z_{x_i y_j} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial y_j}; \qquad i, j = 1,2,...,n \tag{1.6}$$

dir.

Tanım 1.7 Bir kısmi türevli denklemde görülen en yüksek mertebeden kısmi türevin mertebesine *denklemin basamağı veya meretebesi* denir.

Adi türevli diferensiyel denklemlerin genel çözümleri, denklemin mertebesi kadar keyfi sabit kapsayan ve her noktasından teğet doğruların çizilebildiği eğri aileleridir. Bu eğri aileleri xy - düzlemindedir. Kısmi türevli denklemlerin genel çözümleri ise denklemin mertebesi kadar keyfi fonksiyon kapsayan ve her noktasından teğet düzlemlerin çizilebildiği yüzey aileleridir. Adi türevli denklemlerde önceden verilen bir noktadan geçen çözümü araştırırken bir başlangıç veya sınır değer problemi karşımıza çıkar. Buna karşılık kısmi türevli denklemlerde ise önceden verilen bir eğriden geçen çözümün araştırılması Cauchy Problemi olarak ortaya çıkar.

Tanım 1.8 Bir kısmi türevli denklemi özdeş olarak sağlayan ve keyfi fonksiyon veya keyfi parametre kapsamayan bir fonksiyona bu kısmi türevli denklemin bir *özel çözümü* denir. Diğer taraftan bir kısmi türevli denklemin mertebesi kadar (sürekli türetilebilir) keyfi fonksiyon kapsayan ve denklemi özdeş olarak sağlayan bir yüzey ailesine bu kısmi türevli denklemin genel çözümü denir.

1.3.1 Kısmi Türevli Denklemlerin Genel Bir Sınıflandırılması

Tanım 1.9 Bir kısmi türevli denklemdeki bağımlı değişken (birden fazla bağımlı değişken olması halinde bağımlı değişkenler) ve bunların denklemdeki bütün kısmi türevleri birinci dereceden ve denklemi, bağımlı değişken ile onun türevleri parantezinde yazdığımızda katsayılar yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonu oluyorsa bu denkleme *lineer*dir denir. Aksi halde *lineer olmayan denklem* adını alır.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan lineer kısmi türevli denklemlerin genel formları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$P(x,y)z_x + Q(x,y)z_y + R(x,y)z = S(x,y) \tag{1.7}$$

$$A(x,y)z_{xx} + B(x,y)z_{xy} + C(x,y)z_{yy} + D(x,y)z_x + E(x,y)z_y + F(x,y)z = G(x,y) \tag{1.8}$$

(1.7) ve (1.8) denklemlerinde x, y bağımsız; z bağımlı değişkendir.

Tanım 1.10 Bir kısmi türevli denklem, denklemde bulunan en yüksek mertebeden kısmi türevlere göre (denklemdeki düşük mertebeden türevlerin ve bağımlı değişkenin bulunuş şeklinden bağımsız olarak) lineer ise bu denklem *yarı-lineer (kuasi-lineer)* adını alır.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci mertebeden yarı-lineer denklemlerin genel şekilleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$P(x,y,z)z_x + Q(x,y,z)z_y = R(x,y,z), \tag{1.9}$$

$$A(x,y,z,z_x,z_y)z_{xx} + B(x,y,z,z_x,z_y)z_{xy} + C(x,y,z,z_x,z_y)z_{yy} + D(x,y,z,z_x,z_y) = 0. \quad (1.10$$

Bağımsız değişkenlerin ikiden fazla olması halinde (1.9) ve (1.10) denklemine benzer şekilde yarı-lineer denklemleri de yazabiliriz.

Tanım 1.11 Bir kısmi türevli denklem yarı-lineer ve denklemde görülen en yüksek mertebeden türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise, bu denkleme *hemen-hemen lineerdir* denir.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip ikinci mertebeden hemen-hemen lineer bir denklemin genel şekli

$$A(x,y)z_{xx} + B(x,y)z_{xy} + C(x,y)z_{yy} + D(x,y,z,z_x,z_y) = 0 \tag{1.11}$$

formundadır. Diğer taraftan üç bağımsız, bir bağımlı değişkene sahip ikinci mertebeden genel bir yarı-lineer denklem (1.11) denklemine benzer şekilde yazılabilir.

1.3.2 Birinci Mertebeden Lineer Olmayan Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemler

Bu kısımda, $p = z_x$, $q = z_y$ olmak üzere,

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1.12}$$

birinci basamaktan genel kısmi türevli denklemini inceleyeceğiz. Burada F 'in p ve q ya göre lineer olması gerekmemektedir.

Tanım 1.12

$$G(x, y, z, a, b) = 0 \tag{1.13}$$

iki parametreli bir yüzey ailesi, birinci mertebeden (1.12) denklemini sağlarsa bu yüzey ailesine (1.12) denkleminin *tam integrali* denir.

1.3.3 Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri

Genel olarak; $K[u]$; $u(x,t)$ ve u değişkeninin x değişkenine göre türevlerine bağlı fonksiyon olmak üzere;

$$u_t = K[u] = K[u, u_x, u_{xx}, ...] \tag{1.14}$$

şeklindeki denklemlere lineer olmayan oluşum denklemleri denir. Örneğin;

$$u_t + auu_x + bu_{xxx} = 0$$

bir lineer olmayan oluşum denklemidir ve KdV (Korteveg-de Vries) denklemi olarak bilinir. Denklem ilk olarak, J. Scott Russel' in 1834 yılında Edinburg ile Glasgow arasındaki kanalda soliter dalgaları incelemesiyle bulundu ve sığ bir kanalın yüzeyindeki dalganın yayılımı olarak tanımlandı. Bu denklem için;

$$u(x,t) = f(x + ct),$$

şeklindeki hareketli dalga çözümünün, ε faz ve $2a^2$ dalganın yarı hızı olmak üzere;

$$u(x,t) = 2a^2 \sec h^2 a(x + 4a^2 t + \varepsilon),$$

olduğu bilinmektedir. (1.14) denkleminde $u_t = 0$ alınırsa, bulunan $K[u] = 0$ adi diferensiyel denklemi (1.14) denkleminin durgun (durağan) denklemi olarak adlandırılır [2].

1.4 Soliton

Solitonlar, lineer olmayan dalgalardır. Bir soliton, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemin soliter, hareketli dalga çözümü olarak düşünülebilir. Soliter dalgalar, partiküller gibi davranırlar. Her biri yaklaşık olarak sabit şekil ve hıza sahip hareketli dalgadırlar. İki tane soliter dalga yakınlaştıkça yavaşça deforme olur ve sonuçta tek bir dalga paketinde birleşirler. Bu dalga paketi, bir süre sonra “çarpışma”dan önce aynı şekil ve hıza sahip iki soliter dalgaya ayrılır. Çarpışma, hiç bir dalganın dalga formuna zarar vermez. Çarpışma anında dalga genliği iki dalganın toplamından daha küçük olur. Bu lineer olmayan bir davranıştır.

Lineer olmama önemli bir rol oynar. Birçok oluşum denklemleri için, soliter dalgalar elastik olmadan dağılır ve radyasyona bağlı olarak enerji kaybeder. Solitonlar için böyle değildir. Tamamen lineer olmayan bir etkileşimden sonra soliter dalgalar aynı hız ve şekille kimliklerini koruyarak dağılırlar. Kararlılık soliton fiziğinde önemli bir rol oynar. Model denklemlerinde, solitonların kararlılığı, lineer olmama ve dağılma arasındaki hassas dengeden kaynaklanır. Lineer olmama bir soliter dalganın daha uzakta toplanmasına neden olur. Dağılma, bir yerde toplanmış dalganın yayılma efektidir. Eğer bu iki zıt efektten biri kaybedilirse, solitonlar kararsız hale gelir ve sonuçta yok olurlar.

Soliton fiziğinin başlangıcı 1834 yılının Ağustos ayında John Scott Russel’ın Edinburgh yakınında bir kanalda, geniş bir soliter dalga gözlemlemesiyle başlamıştır. Scott Russell’ın zamanında, soliter dalgaların varlığıyla ilgili birçok tartışma vardı.

Dalgaların sığ bir kanalın yüzeyindeki dağılımını açıklayan denklem Korteweg de Vries tarafından 1895’de bulundu. Galilean uyguladıktan ve çeşitli dönüşümler yaptıktan sonra KdV denklemini basitleştirilmiş şekliyle yazdı:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{1.15}$$

Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemin soliton çözümü:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} c \sec h^2 \frac{1}{2}\sqrt{c}(x - ct + \delta), \tag{1.16}$$

şeklindedir.

Burada c solitonun hızıdır ve δ fazdır. Bu, John Scott Russel tarafından gözlemlenen soliter dalgayı temsil eder ve tepe genliğinin hızın yarısı olduğunu gösterir. Bu yüzden daha büyük soliter dalgalar daha fazla hıza sahiptir.

1.5 Kompakton

Kompaktonlar aşağıdaki özelliklere sahiptirler.

(1) Kompaktonlar üstel kanatlardan bağımsız tek dalgalardır.

(2) Bir kompaktonun genişliği genliğinden bağımsızdır.

Kompaktonlar, sonsuz kanatları etkileri altına almazlar. Böylece birbirleriyle sadece kısa mesafelerde etkileşirler. Kompaktonun genişliği genliğinden bağımsızdır.

Modern fizikte, sona gelen on takısı atom özelliğini belirtmek için kullanılır [22]. Phonon, photon, soliton gibi. Bu nedenle sıkı destekli tek dalga kompakton olarak atomun özelliğini taşıdığını belirtmek için adlandırılır.

Kompakton kavramı Peudo-Spectral Yöntemi [17,18], sonlu fark yöntemi [10] gibi birçok analitik ve nümerik metotla incelenmiştir.

Lineer olmayan diferensiyel denklemlerin tam çözümleri periyodik, kompleks, kink, soliton ve kompakton çözümler şeklinde elde edilir.

Periyodik çözümler, (sin, cos, tan, cot) fonksiyonlarını içeren çözümlerdir.

Kompleks çözümler, karmaşık sonuçlar içeren çözümlerdir.

Kink çözümler, $(a+\tanh)$ ve $(a+\coth)$ fonksiyonlarını içeren çözümlerdir.

Soliton çözümler, hiperbolik $\sinh, \cosh, \tanh, \coth, \sec h, \cos ech$ fonksiyonlarını içeren çözümlerdir.

Kompakton çözümler, $\sin^2, \cos^2, \sec^2, \cos ec^2$ fonksiyonlarını içeren çözümlerdir.

Bu tez çalışmasında aşağıdaki lineer olmayan oluşum denklemlerinden bahsedilmiştir;

(i) KdV denklemi: u bağımlı değişken, x ve t bağımısız değişkenler olmak üzere,

$$u_t + auu_x + b(u)_{xxx} = 0.$$

(ii) Değiştirilmiş (Modifiye) Korteveg-de Vries denklemi (DKdV):

$$u_t + au^2u_x + b(u)_{xxx} = 0.$$

(iii) Genelleştirilmiş Korteveg-de Vries denklemi (GKdV):

$$u_t + a(n+1)(n+2)u^n u_x + b(u)_{xxx} = 0.$$

(iv) Boussinesq denklemi (B):

$$u_{tt} - au_{xx} + 3(u^2)_{xx} - bu_{xxxx} = 0.$$

(v) RLW denklemi:

$$u_t + au_x - 6uu_x - bu_{txx} = 0.$$

(vi) Benjamin-Bona-Mahony denklemi (BBM):

$$u_t + 1/2(u^2)_x - u_{xxx} = 0.$$

(vii) Phi-Dört denklemi (PD):

$$u_{tt} - u_{xx} - u + u^3 = 0.$$

(viii) Kaup-Newel denklemi (KN):

$$u_t + cu^2u_x - u_{xxxxx} = 0.$$

(ix) Drinfeld-Sokolov denklem sistemi (DS):

$$u_t + (v^2)_x = 0,$$
$$v_t - av_{xxx} + 3bu_x v + 3kuv_x = 0.$$

(x) Genelleştirilmiş Drinfeld-Sokolov denklem sistemi (GDS):

$$u_t + \left(v^n\right)_x = 0,$$
$$v_t - av_{xxx} + 3bu_x v + 3kuv_x = 0.$$

(xi) Broer-Kaup denklem sistemi (BK):

$$u_t = uu_x + v_x - \frac{1}{2}u_{xx}$$
$$v_t = \left(uv\right)_x + \frac{1}{2}v_{xx}.$$

(xii) Drinfeld-Sokolov denklem sisteminin bir çeşidi:

$$u_t + \left(v^{-n}\right)_x = 0, n > 2$$
$$v_t - av_{xxx} + 3bu_x v + 3kuv_x = 0.$$

(xiii) Burger denklemi (BD):

$$u_t + uu_x - u_{xx} = 0.$$

(xiv) Fisher denklemi (F):

$$u - u_{xx} - u\left(1-u\right) = 0.$$

(xv) Burger-Fisher denklemi (BF):

$$u_t + uu_x + u_{xx} + u\left(1-u\right) = 0.$$

(xvi) Huxley denklemi (H):

$$u_t - au_{xx} - u\left(k - u''\right)\left(u^n - 1\right) = 0.$$

(xvii) Lineer olmayan reaksiyon-yayılma denklemleri (LORY):

$$u_t - \left(u^2\right)_{xx} - u\left(1-u\right) = 0$$
$$\mathrm{u}_\mathrm{t} - \left(u^3\right)_{xx} - u\left(1-u^2\right) = 0.$$

(xviii) Hirota-Satsuma- Korteveg-de Vries denklem sistemi (HSKdV):

$$u_t = \frac{1}{4}u_{xxx} + 3uu_x - 6vv_x$$

$$v_t = -\frac{1}{2}v_{xxx} - 3uv_x.$$

(xix) (2+1)-Boyutlu Konopelchenko-Dubrovsky denklem sistemi:

$$u_y = v_x,$$

$$u_t - u_{xxx} - 6buu_x + \frac{3}{2}a^2u^2u_x - 3v_y + 3au_xv = 0.$$

Detaylı bilgi için [3] ve [42] numaralı kaynaklara bakılabilir..

BÖLÜM 2

2.1 Giriş

Bu bölümde lineer olmayan denklemlerin tam çözümleri için tanh yöntemi verilmiştir. Bu yöntem yardımıyla Kaup-Newel denkleminin ve Drinfeld-Sokolov, genelleştirilmiş Drinfeld-Sokolov, Broer-Kaup denklem sistemlerinin tam çözümleri elde edilmiştir.

Son yıllarda lineer olmayan denklemlerin tam çözümlerini bulmak için birçok yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden başlıcaları; homojenleştirilmiş denge yöntemi [6,7], tanh-sech yöntemi [14,25,27], F-açılım yöntemi [1,16,40], Jacobi eliptik fonksiyon yöntemidir [5,8,12,38].

2.2 Tanh Yöntemi:

Bu yöntem ilk olarak Malfliet [13] tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra Fan [17] ve Senthilvelan [19] tarafından genişletilmiştir. Wazwaz tarafından son halini almıştır. Wazwaz tanh yöntemini aşağıdaki gibi tanımlamıştır [25,27].

1. n. mertebeden lineer olmayan kısmi türevli denklemler aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$P(u, u_t, u_x, u_{xx}, \ldots) = 0 \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlansın.

2. Bu denklemin hareketli dalga çözümünü bulmak için (2.1) denkleminde dalga değişkeni olarak $\xi = \alpha(x - \beta t)$ dönüşümü yaparak,

$$u(x,t) = U(\xi) \tag{2.2}$$

alınmak suretiyle denklem bir adi diferensiyel denkleme indirgenebilir.

Burada β hızı ile hareketli dalga çözümü U(ξ) olduğundan aşağıdaki dönüşümler yapılabilir;

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\alpha\beta \frac{d}{d\xi},$$
$$\frac{\partial}{\partial x} = \alpha \frac{d}{d\xi},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{d^2}{d\xi^2}, \qquad (2.3)$$
$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} = \alpha^3 \frac{d^3}{d\xi^3},$$

(2.1) denkleminde (2.3) eşitlikleri kullanılarak elde edilen adi diferensiyel denklem

$$P(U, U', U'', \ldots) = 0 \qquad (2.4)$$

şeklinde yazılabilir.

3. (2.4) denkleminin tüm terimleri ξ ye göre türev içeriyorsa, bu denklemde integrasyon sabiti sıfır kabul edilerek integral alınır ve denklem daha basit hale gelir.

4.

$$Y = \tanh(\xi) \text{veya } Y = \coth(\xi) \qquad (2.5)$$

ifadelerini çözüm kabul eden Ricatti denklemi $Y' = 1 - Y^2$ olduğuna göre (2.3) deki dönüşümler göz önünde bulundurularak aşağıdaki türevler yazılabilir.

$$\frac{d}{d\xi} = (1-Y^2)\frac{d}{dY},$$
$$\frac{d^2}{d\xi^2}(1-Y^2)\left(-2Y\frac{d}{dY} + (1-Y^2)\frac{d^2}{dY^2}\right), \qquad (2.6)$$
$$\frac{\partial^3}{\partial \xi^3} = (1-Y^2)\left((6Y^2-2)\frac{d}{dY} - 6Y(1-Y^2)\frac{d^2}{dY^2} + (1-Y^2)\frac{d^3}{dY^3}\right).$$

Benzer şekilde diğer türevler de elde edilebilir.

Ayrıca Senthilvelan [19], $Y' = 1 + Y^2$ Ricatti denkleminin çözümünü

$$Y = \tan(\xi) \text{veya } Y = -\cot(\xi) \tag{2.7}$$

şeklinde yazarak, (2.3) denklemindeki dönüşümleri de göz önünde bulundurarak aşağıdaki türevlerinde yazılabileceğini göstermiştir.

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\xi} = (1+Y^2)\frac{d}{dY}, \\ &\frac{d^2}{d\xi^2}(1+Y^2)\left(2Y\frac{d}{dY} + (1+Y^2)\frac{d^2}{dY^2}\right), \\ &\frac{\partial^3}{\partial\xi^3} = (1+Y^2)\left((6Y^2+2)\frac{d}{dY} + 6Y(1+Y^2)\frac{d^2}{dY^2} + (1+Y^2)\frac{d^3}{dY^3}\right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

5. m pozitif tamsayı ve a_k lar belirlenebilen sabitler olmak üzere, (2.4) denkleminin çözümü

$$U(\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{m} a_k Y^k \tag{2.9}$$

şeklinde aranır.

Bu çözüm (2.6) denkleminde veya (2.7) denkleminde yerine yazılarak Y nin artan kuvvetlerine göre denklem sistemi elde edilir.

6. "m" parametresine dengeleme sayısı denir. Bu denge sayısı lineer olmayan kısmi türevli denklemdeki en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terimin dengelenmesi ile bulunur.

Lineer olmayan terim ile lineer terimin dengelenmesi:

$$U = \phi^m, \tag{2.10}$$

olarak alınır.

$$
\begin{aligned}
&U' = m\phi^{m+1}, \\
&U'' = m(m+1)\phi^{m+2}, \\
&U''' = m(m+1)(m+2)\phi^{m+3}, \\
&. \\
&. \\
&. \\
&U^{(n)} = m(m+1)(m+2)...(m+n-1)\phi^{m+n},
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&U^2 = \phi^{2m}, \\
&U^3 = \phi^{3m}, \\
&. \\
&. \\
&. \\
&U^n = \phi^{mn},
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

ifadeleri indirgenmiş denklemde yerine yazılarak dengeleme sayısı elde edilir.

m belirlendikten sonra, Y nin kuvvetlerinin katsayıları eşitlenerek bulunan denklem sisteminden $a_k, (k = 0,...,m)$, α ve β bulunur.

ξ ifadesi $U(\xi)$de yerine yazılarak, (2.1) denkleminin hareketli dalga çözümü bulunmuş olur.

Trigonometrik özdeşlikler yardımıyla sech veya cosech çözümleri ile sec veya

cosec çözümleri de bulunabilir.

2.2.1 Kaup-Newel Denkleminin Tam Çözümleri

$$u_t + cu^2 u_x - u_{xxxxx} = 0 \tag{2.13}$$

şeklindeki Kaup-Newel denklemini göz önüne alalım. İkinci bölümdeki dönüşümleri

$$u = u(\xi), \qquad \xi = \alpha(x - \beta t) \tag{2.14}$$

denklemlerini, (2.13) denklemine uygularsak, Kaup-Newel denklemi

$$-\beta u' + cu^2 u' - \alpha^4 u''''' = 0 \tag{2.15}$$

şeklinde lineer olmayan bir adi diferensiyel denkleme dönüşür. Lineer olmayan en yüksek mertebeden terim ile en yüksek mertebeden lineer terimi dengelersek, yani;

$$U = \phi^m,$$

$$U' = m\phi^{m+1},$$
$$U'' = m(m+1)\phi^{m+2},$$
$$U''' = m(m+1)(m+2)\phi^{m+3},$$
$$U'''' = m(m+1)(m+2)(m+3)\phi^{m+4},$$
$$U''''' = m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)\phi^{m+5},$$

ve

$$U^2U' = m\phi^{(m+1)}\phi^{2m} = m\phi^{3m+1},$$

ifadelerini (2.15) denkleminde yerine yazarsak,

$$-\beta m\phi^m + cm\phi^{3m+1} - \alpha^4 m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)\phi^{m+5} = 0,$$

ifadesinde

$$m + 5 = 3m + 1$$

olduğundan,

$$2m = 4$$

$$m = 2$$

olarak bulunur.

O halde $u(\xi) = \sum_{k=0}^{m} a_k Y^k$ olduğundan Kaup-Newel denkleminin

$$u(\xi) = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 \tag{2.16}$$

şeklinde çözümü vardır.

1.Durum: $Y' = 1 - Y^2$ Ricatti denkleminin çözümü $Y = \tanh(\xi)$ veya $Y = \coth(\xi)$ şeklinde yazılabileceğinden, (2.16) denklemi yardımıyla aşağıdaki türevler elde edilir,

$$u'(\xi) = a_1 Y' + 2a_2 YY'$$
$$u'(\xi) = a_1(1 - Y^2) + 2a_2 Y(1 - Y^2)$$
$$u'(\xi) = a_1 - a_1 Y^2 + 2a_2 Y - 2a_2 Y^3$$

$$u''(\xi) = -2a_1 YY' + 2a_2 Y' - 6a_2 Y^2 Y'$$
$$u''(\xi) = -2a_1 Y(1 - Y^2) + 2a_2(1 - Y^2) - 6a_2 Y^2(1 - Y^2)$$
$$u''(\xi) = -2a_1 Y + 2a_1 Y^3 + 2a_2 - 2a_2 Y^2 - 6a_2 Y^2 + 6a_2 Y^4$$
$$u''(\xi) = 2a_2 - 2a_1 Y - 8a_2 Y^2 + 2a_1 Y^3 + 6a_2 Y^4$$

$$u'''(\xi) = -2a_1 Y' - 16a_2 YY' + 6a_1 Y^2 Y' + 24a_2 Y^3 Y'$$
$$u'''(\xi) = -2a_1(1 - Y^2) - 16a_2 Y(1 - Y^2) + 6a_1 Y^2(1 - Y^2) + 24a_2 Y^3(1 - Y^2)$$
$$u'''(\xi) = -2a_1 + 2a_1 Y^2 - 16a_2 Y + 16a_2 Y^3 + 6a_1 Y^2 - 6a_1 Y^4 + 24a_2 Y^3 - 24a_2 Y^5$$
$$u'''(\xi) = -2a_1 + 8a_1 Y^2 - 16a_2 Y + 40a_2 Y^3 - 6a_1 Y^4 - 24a_2 Y^5$$

$$u''''(\xi) = +16a_1 YY' - 16a_2 Y' + 120a_2 Y^2 Y' - 24a_1 Y^3 Y' - 120a_2 Y^4 Y'$$
$$u''''(\xi) = +16a_1 Y(1 - Y^2) - 16a_2(1 - Y^2) + 120a_2 Y^2(1 - Y^2)$$
$$-24a_1 Y^3(1 - Y^2) - 120a_2 Y^4(1 - Y^2)$$
$$u''''(\xi) = +16a_1 Y - 16a_1 Y^3 - 16a_2 + 16a_2 Y^2 + 120a_2 Y^2 - 120a_2 Y^4$$
$$-24a_1 Y^3 + 24a_1 Y^5 - 120a_2 Y^4 + 120a_2 Y^6$$
$$u''''(\xi) = -16a_2 + 16a_1 Y + 136a_2 Y^2 - 40a_1 Y^3 - 240a_2 Y^4 + 24a_1 Y^5 + 120a_2 Y^6$$

Bunlar (2.15) denkleminde yerine yazılırsa;

$$-\beta(a_1 - a_1 Y^2 + 2a_2 Y^3) + c(a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2)(a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2)$$
$$(a_1 - a_1 Y^2 + 2a_2 Y - 2a_2 Y^3) - \alpha^4 \begin{pmatrix} 16a_1 + 272a_2 Y - 136a_1 Y^2 - 1232a_2 Y^3 \\ +240a_1 Y^4 + 1680a_2 Y^5 - 120a_1 Y^6 - 720a_2 Y^7 \end{pmatrix} = 0$$

$$-\beta a_1+\beta a_1Y^2-2\beta a_2Y+2\beta a_2Y^3+c\begin{pmatrix} a_0^{\ 2}+a_0a_1Y+a_0a_2Y^2+a_0a_1Y \\ +a_1^{\ 2}Y^2+a_1a_2Y^3+a_0a_2Y^2+a_1a_2Y^3+a_2^{\ 2}Y^4 \end{pmatrix}$$
$$\left(a_1-a_1Y^2+2a_2Y-2a_2Y^3\right)-16\alpha^4a_1-272\alpha^4a_2Y+136\alpha^4a_1Y^2$$
$$+1232\alpha^4a_2Y^3-240\alpha^4a_1Y^4-1680\alpha^4a_2Y^5+120\alpha^4a_1Y^6+720\alpha^4a_2Y^7=0$$

$$-\beta a_1+\beta a_1Y^2-2\beta a_2Y+2\beta a_2Y^3+ca_0^{\ 2}a_1-ca_0^{\ 2}a_1Y^2+2ca_0^{\ 2}a_2Y$$
$$-2ca_0^{\ 2}a_2Y^3+ca_0a_1^{\ 2}Y-ca_0a_1^{\ 2}Y^3+2ca_0a_1a_2Y^2-2ca_0a_1a_2Y^4$$
$$+ca_0a_1a_2Y^2-ca_0a_1a_2Y^4+2ca_0a_2^{\ 2}Y^3-2ca_0a_2^{\ 2}Y^5+ca_0a_1^{\ 2}Y$$
$$-ca_0a_1^{\ 2}Y^3+2ca_0a_1a_2Y^2-2ca_0a_1a_2Y^4+ca_1^{\ 3}Y^2-ca_1^{\ 3}Y^4$$
$$+2ca_1a_2Y^3-2ca_1^{\ 2}a_2Y^5+ca_1^{\ 2}a_2Y^3-ca_1^{\ 2}a_2Y^5+2ca_1a_2^{\ 2}Y^4$$
$$-2ca_1a_2^{\ 2}Y^6+ca_0a_1a_2Y^2-ca_0a_1a_2Y^4+2ca_0a_2^{\ 2}Y^3-2ca_0a_2^{\ 2}Y^5$$
$$+ca_1^{\ 2}a_2Y^3-ca_1^{\ 2}a_2Y^5+2ca_1^{\ 2}a_2^{\ 2}Y^4-2ca_1a_2^{\ 2}Y^6+ca_1a_2^{\ 2}Y^4$$
$$-ca_1a_2^{\ 2}Y^6+2ca_2^{\ 2}Y^5-2ca_2^{\ 3}Y^7-16\alpha^4a_1-272\alpha^4a_2Y+136\alpha^4a_1Y^2$$
$$+1232\alpha^4a_2Y^3-240\alpha^4a_1Y^4-1680\alpha^4a_2Y^5+120\alpha^4a_1Y^6+720\alpha^4a_2Y^7=0$$

$$\left(-\beta a_1+ca_0^{\ 2}a_1-16\alpha^4a_1\right)Y^0+\left(-272\alpha^4a_2-2\beta a_2+2ca_0^{\ 2}a_2+2ca_0a_1^{\ 2}\right)Y^1$$
$$+\left(\beta a_1-ca_0^{\ 2}a_1+6ca_0a_1a_2+ca_1^{\ 3}+136\alpha^4a_1\right)Y^2$$
$$+\left(2\beta a_2-2ca_0a_1^{\ 2}+4ca_0a_2^{\ 2}+1232\alpha^4a_2-2ca_0^{\ 2}a_2+4ca_1^{\ 2}a_2\right)Y^3$$
$$+\left(-6ca_0a_1a_2-ca_1^{\ 3}+5ca_1a_2^{\ 2}-240\alpha^4a_1\right)Y^4$$
$$+\left(-4ca_0a_2^{\ 2}-4ca_1^{\ 2}a_2+2ca_2^{\ 3}-1680\alpha^4a_2\right)Y^5$$
$$+\left(-5ca_1a_2^{\ 2}+120\alpha^4a_1\right)Y^6+\left(-2ca_2^{\ 3}+720\alpha^4a_2\right)Y^7=0$$

Yazılan son eşitlikten aşağıdaki denklemler elde edilebilir;

$$-2ca_2^{\ 3}+720\alpha^4a_2=0 \tag{2.17}$$

$$-5ca_1a_2^{\ 2}+120\alpha^4a_1=0 \tag{2.18}$$

$$-4ca_0a_2^{\ 2}-4ca_1^{\ 2}a_2+2ca_2^{\ 3}-1680\alpha^4a_2=0 \tag{2.19}$$

$$-6ca_0a_1a_2-ca_1^{\ 3}+5ca_1a_2^{\ 2}-240\alpha^4a_1=0 \tag{2.20}$$

$$2\beta a_2 - 2ca_0 a_1^{\ 2} + 4ca_0 a_2^{\ 2} + 1232\alpha^4 a_2 - 2ca_0^{\ 2} a_2 + 4ca_1^{\ 2} a_2 = 0 \tag{2.21}$$

$$\beta a_1 - ca_0^{\ 2} a_1 + 6ca_0 a_1 a_2 + ca_1^{\ 3} + 136\alpha^4 a_1 = 0 \tag{2.22}$$

$$-272\alpha^4 a_2 - 2\beta a_2 + 2ca_0^{\ 2} a_2 + 2ca_0 a_1^{\ 2} = 0 \tag{2.23}$$

$$-\beta a_1 + ca_0^{\ 2} a_1 - 16\alpha^4 a_1 = 0 \tag{2.24}$$

(2.17) denklemini çözersek;

$$a_2 = \mp \frac{6\sqrt{10}\alpha^2}{\sqrt{c}}$$

bulunur.

(2.18) denklemini çözersek;

$$-5ca_1 a_2^{\ 2} + 120\alpha^4 a_1 = 0$$

ve

$$a_2 = \mp \frac{6\sqrt{10}\alpha^2}{\sqrt{c}}$$

olduğundan,

$$a_1 = 0$$

olarak bulunur.

(2.19) denklemini çözersek;

$$ca_2^{\ 2} = 360\alpha^4$$

olduğundan,

$$a_0 = \mp \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{c}} \alpha^2$$

olarak bulunur.

(2.23) denklemini çözersek;

$$-272\alpha^4 a_2 - 2\beta a_2 + 2ca_0^{\ 2} a_2 + 2ca_0 a_1^{\ 2} = 0$$

ve

$$a_1 = 0$$

olduğundan,

$$\beta = 24\alpha^4$$

olarak bulunur.

Böylece çözüm;

$$\begin{aligned} u_1 &= \mp 2\sqrt{\frac{10}{c}}\alpha^2 \left[2 \mp 3\tanh(\alpha(x - \beta t))\right] \\ u_2 &= \mp 2\sqrt{\frac{10}{c}}\alpha^2 \left[2 \mp 3\coth(\alpha(x - \beta t))\right] \end{aligned} \tag{2.25}$$

bulunur.

2.Durum: $Y' = 1 + Y^2$ ricatti denkleminin çözümü $Y = \tan(\xi)$ veya $Y = -\cot(\xi)$ şeklinde yazılabileceğinden, (2.16) denklemi yardımıyla aşağıdaki türevler elde edilir,

$$\begin{aligned} u'(\xi) &= a_1 Y' + 2a_2 YY' \\ u'(\xi) &= a_1\left(1 + Y^2\right) + 2a_2 Y\left(1 + Y^2\right) \\ u'(\xi) &= a_1 + a_1 Y^2 + 2a_2 Y + 2a_2 Y^3 \end{aligned}$$

$$u''(\xi) = 2a_1 YY' + 2a_2 Y' + 6a_2 Y^2 Y'$$
$$u''(\xi) = 2a_1 Y(1+Y^2) + 2a_2(1+Y^2) + 6a_2 Y^2 (1+Y^2)$$
$$u''(\xi) = 2a_1 Y + 2a_1 Y^3 + 2a_2 + 2a_2 Y^2 + 6a_2 Y^2 + 6a_2 Y^4$$
$$u''(\xi) = 2a_2 + 2a_1 Y + 8a_2 Y^2 + 2a_1 Y^3 + 6a_2 Y^4$$

$$u'''(\xi) = 2a_1 Y' + 16a_2 YY' + 6a_1 Y^2 Y' + 24a_2 Y^3 Y'$$
$$u'''(\xi) = 2a_1(1+Y^2) + 16a_2 Y(1+Y^2) + 6a_1 Y^2 (1+Y^2) + 24a_2 Y^3 (1+Y^2)$$
$$u'''(\xi) = 2a_1 + 2a_1 Y^2 + 16a_2 Y + 16a_2 Y^3 + 6a_1 Y^2 + 6a_1 Y^4 + 24a_2 Y^3 + 24a_2 Y^5$$
$$u'''(\xi) = 2a_1 + 8a_1 Y^2 + 16a_2 Y + 40a_2 Y^3 + 6a_1 Y^4 + 24a_2 Y^5$$

$$u''''(\xi) = +16a_1 YY' + 16a_2 Y' + 120a_2 Y^2 Y' + 24a_1 Y^3 Y' + 120a_2 Y^4 Y'$$
$$u''''(\xi) = +16a_1 Y(1+Y^2) + 16a_2(1+Y^2) + 120a_2 Y^2 (1+Y^2) + 24a_1 Y^3 (1+Y^2)$$
$$+120a_2 Y^4 (1+Y^2)$$
$$u''''(\xi) = +16a_1 Y + 16a_1 Y^3 + 16a_2 + 16a_2 Y^2 + 120a_2 Y^2 + 120a_2 Y^4$$
$$+24a_1 Y^3 + 24a_1 Y^5 + 120a_2 Y^4 + 120a_2 Y^6$$
$$u''''(\xi) = 16a_2 + 16a_1 Y + 136a_2 Y^2 + 40a_1 Y^3 + 240a_2 Y^4 + 24a_1 Y^5 + 120a_2 Y^6$$

Bunlar (2.15) denkleminde yerine yazılırsa;

$$-\beta(a_1 + a_1 Y^2 + 2a_2 Y^3) + c(a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2)(a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2)$$
$$(a_1 + a_1 Y^2 + 2a_2 Y + 2a_2 Y^3) - \alpha^4 \begin{pmatrix} 16a_1 + 272a_2 Y + 136a_1 Y^2 + 1232a_2 Y^3 \\ +240a_1 Y^4 + 1680a_2 Y^5 + 120a_1 Y^6 + 720a_2 Y^7 \end{pmatrix} = 0$$

$$-\beta a_1 + \beta a_1 Y^2 - 2\beta a_2 Y + 2\beta a_2 Y^3 + c\begin{pmatrix} a_0^{\,2} + a_0 a_1 Y + a_0 a_2 Y^2 + a_0 a_1 Y \\ + a_1^{\,2} Y^2 + a_1 a_2 Y^3 + a_0 a_2 Y^2 + a_1 a_2 Y^3 + a_2^{\,2} Y^4 \end{pmatrix}$$
$$(a_1 + a_1 Y^2 + 2a_2 Y + 2a_2 Y^3) - 16\alpha^4 a_1 - 272\alpha^4 a_2 Y - 136\alpha^4 a_1 Y^2$$
$$-1232\alpha^4 a_2 Y^3 - 240\alpha^4 a_1 Y^4 - 1680\alpha^4 a_2 Y^5 - 120\alpha^4 a_1 Y^6 - 720\alpha^4 a_2 Y^7 = 0$$

$$
\begin{aligned}
&-\beta a_1+\beta a_1Y^2-2\beta a_2Y+2\beta a_2Y^3+ca_0{}^2a_1+ca_0{}^2a_1Y^2+2ca_0{}^2a_2Y\\
&+2ca_0{}^2a_2Y^3+ca_0a_1{}^2Y+ca_0a_1{}^2Y^3+2ca_0a_1a_2Y^2+2ca_0a_1a_2Y^4+ca_0a_1a_2Y^2\\
&+ca_0a_1a_2Y^4+2ca_0a_2{}^2Y^3+2ca_0a_2{}^2Y^5+ca_0a_1{}^2Y+ca_0a_1{}^2Y^3+2ca_0a_1a_2Y^2\\
&+2ca_0a_1a_2Y^4+ca_1{}^3Y^2+ca_1{}^3Y^4+2ca_1a_2Y^3+2ca_1{}^2a_2Y^5+ca_1{}^2a_2Y^3\\
&+ca_1{}^2a_2Y^5+2ca_1a_2{}^2Y^4+2ca_1a_2{}^2Y^6+ca_0a_1a_2Y^2+ca_0a_1a_2Y^4+2ca_0a_2{}^2Y^3\\
&+2ca_0a_2{}^2Y^5+ca_1{}^2a_2Y^3+ca_1{}^2a_2Y^5+2ca_1{}^2a_2{}^2Y^4+2ca_1a_2{}^2Y^6+ca_1a_2{}^2Y^4\\
&+ca_1a_2{}^2Y^6+2ca_2{}^2Y^5+2ca_2{}^3Y^7-16\alpha^4a_1-272\alpha^4a_2Y-136\alpha^4a_1Y^2-\\
&1232\alpha^4a_2Y^3-240\alpha^4a_1Y^4-1680\alpha^4a_2Y^5-120\alpha^4a_1Y^6-720\alpha^4a_2Y^7=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(-\beta a_1+ca_0{}^2a_1-16\alpha^4a_1\right)Y^0+\left(-272\alpha^4a_2-2\beta a_2+2ca_0{}^2a_2+2ca_0a_1{}^2\right)Y^1\\
&+\left(-\beta a_1+ca_0{}^2a_1+6ca_0a_1a_2+ca_1{}^3-136\alpha^4a_1\right)Y^2\\
&+\left(-2\beta a_2+2ca_0a_1{}^2+4ca_0a_2{}^2-1232\alpha^4a_2+2ca_0{}^2a_2+4ca_1{}^2a_2\right)Y^3\\
&+\left(6ca_0a_1a_2+ca_1{}^3+5ca_1a_2{}^2-240\alpha^4a_1\right)Y^4+\\
&\left(4ca_0a_2{}^2+4ca_1{}^2a_2+2ca_2{}^3-1680\alpha^4a_2\right)Y^5\\
&+\left(5ca_1a_2{}^2-120\alpha^4a_1\right)Y^6+\left(2ca_2{}^3-720\alpha^4a_2\right)Y^7=0
\end{aligned}
$$

Yazılan son eşitlikten aşağıdaki denklemler elde edilebilir;

$$2ca_2{}^3-720\alpha^4a_2=0 \tag{2.26}$$

$$5ca_1a_2{}^2-120\alpha^4a_1=0 \tag{2.27}$$

$$4ca_0a_2{}^2+4ca_1{}^2a_2+2ca_2{}^3-1680\alpha^4a_2=0 \tag{2.28}$$

$$6ca_0a_1a_2+ca_1{}^3+5ca_1a_2{}^2-240\alpha^4a_1=0 \tag{2.29}$$

$$-2\beta a_2+2ca_0a_1{}^2+4ca_0a_2{}^2-1232\alpha^4a_2+2ca_0{}^2a_2+4ca_1{}^2a_2=0 \tag{2.30}$$

$$-\beta a_1+ca_0{}^2a_1+6ca_0a_1a_2+ca_1{}^3-136\alpha^4a_1=0 \tag{2.31}$$

$$-272\alpha^4a_2-2\beta a_2+2ca_0{}^2a_2+2ca_0a_1{}^2=0 \tag{2.32}$$

$$-\beta a_1+ca_0{}^2a_1-16\alpha^4a_1=0 \tag{2.33}$$

(2.26) denklemini çözersek;

$$a_2 = \mp \frac{6\sqrt{10}\alpha^2}{\sqrt{c}}$$

olarak bulunur.

(2.27) denklemini çözersek;

$$-5ca_1a_2^{\ 2} + 120\alpha^4 a_1 = 0$$

ve

$$a_2 = \mp \frac{6\sqrt{10}\alpha^2}{\sqrt{c}}$$

olduğundan,

$a_1 = 0$ bulunur.

(2.28) denklemini çözersek;

$$ca_2^{\ 2} = 360\alpha^4$$

olduğundan,

$$a_0 = \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{c}}\alpha^2$$

olarak bulunur.

(2.32) denklemini çözersek;

$$-272\alpha^4 a_2 - 2\beta a_2 + 2ca_0^{\ 2}a_2 + 2ca_0a_1^{\ 2} = 0$$

$$a_1 = 0$$

olduğundan,

$$\beta = 24\alpha^4$$

olarak bulunur.

Böylece çözüm;

$$\begin{aligned} u_3 &= \mp 2\sqrt{\frac{10}{c}}\alpha^2\left[2 \mp 3\tan\left(\alpha\left(x-\beta t\right)\right)\right] \\ u_4 &= \mp 2\sqrt{\frac{10}{c}}\alpha^2\left[2 \mp 3\cot\left(\alpha\left(x-\beta t\right)\right)\right] \end{aligned} \tag{2.34}$$

olarak elde edilir.

2.2.2 Drinfeld-Sokolov Denklem Sistemi:

Drinfeld-Sokolov sistemini tanh yöntemi ile çözelim [9].

$$\begin{aligned} & u_t + v^2{}_x = 0, \\ & v_t - av_{xxx} + 3bu_x v + 3kuv_x = 0. \end{aligned} \tag{2.35}$$

(2.35) deklemi,

$$c^2 v - \left(2b+k\right)v^3 + acv'' = 0, \tag{2.36}$$

ADD' ye çevrilir.

Tanh yöntemine göre bir seri açılımı olduğundan,

$$u\left(x,t\right) = S(Y) = \sum_{m=0}^{M} a_m Y^m, \tag{2.37}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $Y = \tanh\left(\mu\xi\right)$ dir. Böylece aşağıdaki denklem elde edilir

$$c^2 S - \left(2b+k\right)S^3 + ac\mu^2\left(1-Y^2\right)\left(-2Y\frac{dS}{dY} + \left(1-Y^2\right)\frac{d^2S}{dY^2}\right) = 0. \tag{2.38}$$

En yüksek mertebeden lineer terim ile lineer olmayan terim dengelenirse,

$$3m = 4 + m - 2, \tag{2.39}$$

bulunur. Buradan

$$m = 1$$

olur ve

$$u(x,t) = a_0 + a_1 Y \tag{2.40}$$

yazılabilir.

(2.40) denklemini (2.38) denkleminde yerine yazarak ve Y'nin katsayılarını toplayarak a_0, a_1 ve μ için,

$$\begin{aligned}
&Y^3 :- 2ba_1^{\ 3} + 2ac\mu^2 a_1 - ka_1^{\ 3} = 0, \\
&Y^2 : -2ba_0 a_1^{\ 2} - ka_0 a_1^{\ 2} = 0, \\
&Y^1 : -2ac\mu^2 a_1 - 6ba_0^{\ 2} a_1 + c^2 a_1 - 3ka_0^{\ 2} a_1 = 0, \\
&Y^0 : -2ba_0^{\ 3} + c^2 a_0 - ka_0^{\ 3} = 0.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

şeklinde bir cebirsel denklem sistemi oluşturulur.

Bu denklem sistemini çözersek,

$$\begin{aligned}
&a_0 = 0, \\
&a_1 = \frac{c}{\sqrt{2b+k}}, 2b + k \neq 0, \\
&\mu = \sqrt{\frac{c}{2a}}, \frac{c}{2a} > 0, a \neq 0,
\end{aligned} \tag{2.42}$$

buluruz.

$\dfrac{c}{2a} > 0$ için kink soliton çözümleri bulunur,

$$v(x,t) = \frac{c}{\sqrt{2b+k}} \tanh\left(\sqrt{\frac{c}{2a}} (x - ct) \right), \tag{2.43}$$

ve

$$v(x,t)=\frac{c}{\sqrt{2b+k}}\coth\left(\sqrt{\frac{c}{2a}}(x-ct)\right). \tag{2.44}$$

$\frac{c}{2a}<0$ için,

$$v(x,t)=ic\frac{c}{\sqrt{2b+k}}\tan\left(\sqrt{-\frac{c}{2a}}(x-ct)\right), \tag{2.45}$$

ve

$$v(x,t)=ic\frac{c}{\sqrt{2b+k}}\cot\left(\sqrt{-\frac{c}{2a}}(x-ct)\right), \tag{2.46}$$

kompleks çözümler olarak bulunur.

$u=\frac{1}{c}v^2$ ve $\frac{c}{2a}>0$ için,

$$u(x,t)=\frac{c}{2b+k}\tanh^2\left(\sqrt{\frac{c}{2a}}(x-ct)\right), \tag{2.47}$$

$$u(x,t)=\frac{c}{2b+k}\coth^2\left(\sqrt{\frac{c}{2a}}(x-ct)\right), \tag{2.48}$$

soliton çözümleri olarak elde edilir.

$\frac{c}{2a}<0$ için,

$$u(x,t)=-\frac{c}{2b+k}\tan^2\left(\sqrt{-\frac{c}{2a}}(x-ct)\right), \tag{2.49}$$

$$u(x,t)=-\frac{c}{2b+k}\cot^2\left(\sqrt{-\frac{c}{2a}}(x-ct)\right), \tag{2.50}$$

periyodik çözümleri olarak elde edilir.

2.2.3 Genelleştirilmiş Drinfeld-Sokolov Denklem Sistemi

Bir Drinfeld-Sokolov sistemi ;

$$\begin{aligned} &u_t + v^n{}_x = 0, \\ &v_t - av_{xxx} + 3bu_x v + 3kuv_x = 0. \end{aligned} \tag{2.51}$$

ADD' ye çevirilir,

$$c^2 v - \frac{3(bn+k)}{n+1} v^{n+1} + acv'' = 0. \tag{2.52}$$

tanh yöntemi sonlu bir serinin açılımı olduğundan,

$$u(x,t) = S(Y) = \sum_{m=0}^{M} a_m Y^m, \tag{2.53}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $Y = \tanh(\mu\xi)$ dir. (2.53) açılımını (2.52) denkleminde yerine yazarsak;

$$c^2 S - \frac{3(bn+k)}{n+1} S^{n+1} + ac\mu^2 (1-Y^2)\left(-2Y\frac{dS}{dY} + (1-Y^2)\frac{d^2S}{dY^2}\right) = 0. \tag{2.54}$$

Denge yöntemini uygularsak,

$$(n+1)m = 4 + m - 2 \tag{2.55}$$

buluruz.

Böylece

$$m = \frac{2}{n}. \tag{2.56}$$

Kapalı formda bir çözüm elde etmek için M bir tamsayı olmalıdır. Demek ki $n = 1$ için $m = 2$ ve $n = 2$ için $m = 1$ dir. Son durum daha önce incelendiği için $n = 1$ için $m = 2$ durumu incelenecektir.

$$u(x,t) = S(Y) = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2. \tag{2.57}$$

(2.57) açılımını (2.54) denkleminde yerine yazarak ve Y' nin katsayılarını toplayarak a_0, a_1, a_2 ve μ için,

$$\begin{aligned}
&Y^4 : -\frac{3}{2} b a_2^{\,2} + 6ac\mu^2 a_2 - \frac{3}{2} k a_2^{\,2} = 0, \\
&Y^3 : -3b a_1 a_2 - 3k a_1 a_2 + 2ac\mu^2 a_1 = 0, \\
&Y^2 : -3k a_0 a_2 + c^2 a_2 - \frac{3}{2} b a_1^{\,2} - 8ac\mu^2 a_2 - \frac{3}{2} k a_1^{\,2} - 3b a_0 a_2 = 0, \\
&Y^1 : -3k a_0 a_1 + c^2 a_1 - 2ac\mu^2 a_1 - 3b a_0 a_1 = 0, \\
&Y^0 : -\frac{3}{2} b a_0^{\,2} + c^2 a_0 + 2ac\mu^2 a_2 - \frac{3}{2} k a_0^{\,2} = 0,
\end{aligned} \tag{2.58}$$

cebirsel denklem sistemi oluşturulur.

Bu sistemi çözersek,

$$\begin{aligned}
&a_0 = \frac{c^2}{b+k}, b \neq -k, \\
&a_1 = 0, \\
&a_2 = \frac{c^2}{b+k}, \\
&\mu = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{c}{a}}, \frac{c}{a} < 0, a \neq 0
\end{aligned} \tag{2.59}$$

ve

$$
\begin{aligned}
a_0 &= -\frac{c^2}{3(b+k)}, b \neq -k, \\
a_1 &= 0, \\
a_2 &= \frac{c^2}{3(b+k)}, \\
\mu &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}, \frac{c}{a} > 0, a \neq 0,
\end{aligned}
\tag{2.60}
$$

iki çözüm kümesi oluşturulur.

Birinci küme $\frac{c}{a} < 0$ için,

$$v(x,t) = -\frac{c^2}{b+k}\operatorname{csc}h^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{c}{2a}}(x-ct)\right), \tag{2.61}$$

ve

$$v(x,t) = \frac{c^2}{b+k}\operatorname{sec}h^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{c}{2a}}(x-ct)\right), \tag{2.62}$$

soliton çözümlerini verir.

$u(x,t) = \frac{1}{c}v(x,t)$ ise;

$$u(x,t) = -\frac{c}{b+k}\operatorname{csc}h^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{c}{2a}}(x-ct)\right), \tag{2.63}$$

ve

$$u(x,t) = \frac{c}{b+k}\operatorname{sec}h^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{c}{2a}}(x-ct)\right), \tag{2.64}$$

bulunur.

Birinci küme $\frac{c}{a} > 0$ için,

$$v(x,t) = \frac{c^2}{b+k}\csc^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{2a}}(x-ct)\right), \tag{2.65}$$

ve

$$v(x,t) = \frac{c^2}{b+k}\sec^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{2a}}(x-ct)\right), \tag{2.66}$$

periyodik çözümleri verir.

$u(x,t) = \frac{1}{c}v(x,t)$ ise;

$$u(x,t) = \frac{c}{b+k}\csc^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{2a}}(x-ct)\right), \tag{2.67}$$

ve

$$u(x,t) = \frac{c}{b+k}\sec^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{2a}}(x-ct)\right), \tag{2.68}$$

bulunur.

Diğer tarafta ikinci küme,

$\frac{c}{a} > 0$ için,

$$v(x,t) = -\frac{c^2}{3(b+k)}\left(1 - 3\tanh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}(x-ct)\right)\right), \tag{2.69}$$

ve

$$v(x,t) = -\frac{c^2}{3(b+k)}\left(1 - 3\coth^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}(x-ct)\right)\right), \tag{2.70}$$

soliton çözümleri olark bulunur. Eğer;

$u(x,t) = \frac{1}{c}v(x,t)$ ise;

$$u(x,t) = -\frac{c}{3(b+k)}\left(1 - 3\tanh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}(x-ct)\right)\right), \tag{2.71}$$

ve

$$u(x,t) = -\frac{c}{3(b+k)}\left(1 - 3\coth^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}(x-ct)\right)\right), \tag{2.72}$$

olur.

İkinci küme $\frac{c}{a} < 0$ için,

$$v(x,t) = -\frac{c^2}{3(b+k)}\left(1 + 3\tan^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{c}{a}}(x-ct)\right)\right), \tag{2.73}$$

ve

$$v(x,t) = -\frac{c^2}{3(b+k)}\left(1 + 3\cot^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{c}{a}}(x-ct)\right)\right), \tag{2.74}$$

çözümleri ve

$u(x,t) = \frac{1}{c}v(x,t)$ ise;

$$u(x,t) = -\frac{c}{3(b+k)}\left(1 + 3\tan^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{c}{a}}(x-ct)\right)\right), \tag{2.75}$$

ve

$$u(x,t) = -\frac{c}{3(b+k)}\left(1 + 3\cot^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{c}{a}}(x-ct)\right)\right). \tag{2.76}$$

şeklinde tam çözümler elde edilir [30].

2.2.4 Broer-Kaup Denklem Sisteminin Tam Çözümleri

Şimdi ise,

$$\begin{aligned} u_t &= uu_x + v_x - \frac{1}{2}u_{xx} \\ v_t &= (uv)_x + \frac{1}{2}v_{xx} \end{aligned} \tag{2.77}$$

şeklindeki Broer-Kaup sisteminin tam çözümünü tanh yöntemiyle bulmaya çalışalım. $\xi = \alpha$ (x- β t) hareketli dalga dönüşümü denklem sistemine uygulanırsa,

$$\begin{aligned} -\alpha\beta u' &= \alpha uu' + \alpha v' - \frac{1}{2}\alpha^2 u'' \\ -\alpha\beta v' &= \alpha(uv)' + \frac{\alpha^2}{2}v'' \end{aligned} \tag{2.78}$$

şeklinde diferensiyel denklem sistemi elde edilip, $(\alpha \neq 0)$ gerekli sadeleştirme işlemi yapılırsa,

$$\begin{aligned} \beta u' + uu' + v' - \frac{\alpha}{2}u'' &= 0 \\ \beta v' + (uv)' + \frac{\alpha}{2}v'' &= 0 \end{aligned} \tag{2.79}$$

olur ve her iki denklemde ayrı ayrı,

uu' ile u'' dengelenir $\Rightarrow m_1 = 1$

uu' ile v' dengelenir $\Rightarrow m_2 = 2$

olarak bulunur. Bu durumda ,

$$u = a_0 + a_1 Y$$
$$v = b_0 + b_1 Y + b_2 Y^2 \tag{2.80}$$

şeklinde çözüm aranır. Bu değerler sistemde yerine yazılırsa, (2.2) dönüşümünden,

$$Y' = 1 - Y^2$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
&-a_1^{\;2} - 2b_2 - \alpha a_1 = 0\\
&-b_1 - \beta a_1 - a_0 a_1 = 0\\
&a_1^{\;2} + 2b_2 + \alpha a_1 = 0\\
&\beta a_1 + b_1 + a_0 a_1 = 0\\
&-3a_1 b_2 + 3\alpha b_2 = 0\\
&\alpha b_1 - 2\beta b_2 - 2a_1 b_1 - 2a_0 b_2 = 0\\
&-4\alpha b_2 + 3a_1 b_2 - a_0 b_1 - \beta b_1 - a_1 b_0 = 0\\
&2a_1 b_1 + 2\beta b_2 - \alpha b_1 + 2a_0 b_2 = 0\\
&a_0 b_1 + \beta b_1 + a_1 b_0 + \alpha b_2 = 0
\end{aligned} \tag{2.81}$$

olup a_j ve b_j katsayıları,

$$a_0 = -\beta, \quad a_1 = \alpha, \quad b_0 = \alpha^2, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -\alpha^2, \tag{2.82}$$

olarak bulunur.

Böylece Broer-Kaup sisteminin soliton çözümleri,

$$\begin{aligned}
u &= -\beta + \alpha \tanh[\alpha(x - \beta t)],\\
v &= \alpha^2 - \alpha^2 \tanh^2[\alpha(x - \beta t)],
\end{aligned} \tag{2.83}$$

veya

$$\begin{aligned}
u &= -\beta + \alpha \coth[\alpha(x - \beta t)],\\
v &= \alpha^2 - \alpha^2 \coth^2[\alpha(x - \beta t)].
\end{aligned} \tag{2.84}$$

periyodik çözümleri,

$$\begin{aligned} u &= -\beta - \alpha \tan\left[\alpha\left(x-\beta\right)\right], \\ v &= -\alpha^2 - \alpha^2 \tan^2\left[\alpha\left(x-\beta t\right)\right], \end{aligned} \tag{2.85}$$

veya

$$\begin{aligned} u &= -\beta + \alpha \cot\left[\alpha\left(x-\beta\right)\right], \\ v &= -\alpha^2 - \alpha^2 \cot^2\left[\alpha\left(x-\beta t\right)\right], \end{aligned} \tag{2.86}$$

olarak bulunur [35].

BÖLÜM 3

3.1 Giriş

Bu bölümde lineer olmayan denklemlerin tam çözümleri için Sine-Cosine yöntemi verilmiştir. Bu yöntem yardımıyla KdV, DKdV, GKdV, Boussinesq, RLW, Benjamin-Bona-Mahony, Phi-Dört denklemlerinin ve Drinfeld-Sokolov, genelleştirilmiş Drinfeld-Sokolov denklem sistemlerinin tam çözümleri elde edilmiştir.

3.2 Sinüs-Kosinüs Yöntemi

Başlangıç olarak aşağıdaki formdaki $u(x,t)$ dinamik dalga çözümünü tanımlayan,

$$P(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \ldots) = 0, \tag{3.1}$$

lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemi ele alalım [26] ve Sinüs-Kosinüs yönteminin ana adımlarını özetleyelim:

1. (3.1) denkleminin hareketli dalga çözümünü bulmak için, dalga değişkeni olarak,

$$\xi = (x - ct), \tag{3.2}$$

kullanılır. Böylece

$$u(x,t) = u(\xi), \tag{3.3}$$

yazılabilir.

2. Buna bağlı olarak,

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c\frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = c^2\frac{d^2}{d\xi^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{d^2}{d\xi^2}, \tag{3.4}$$

değişken değiştirmeleri yapılabilir ve bunlar gibi diğer türevler içinde;

$$P(u, u_\xi, u_{\xi\xi}) = 0, \tag{3.5}$$

yazılabilir. Burada $u_\xi = \dfrac{du}{d\xi}$ dir.

3. Daha sonra (3.5) adi diferensiyel denklemin olabildiğince integrali alınabilir ve integral sabiti sıfır kabul edilir.

4. [18,23,24] ‘de yapılan sonuçları izleyerek çözümler aşağıdaki gibi seçilebilir.

$$u(x,t) = \lambda \sin^{\beta}[\mu\xi], \tag{3.6}$$

veya

$$u(x,t) = \lambda \cos^{\beta}[\mu\xi]. \tag{3.7}$$

Burada λ, β, μ belirlenecek parametrelerdir.

5. Sonuç olarak (3.6) denkleminin türevleri alınırsa,

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \lambda \sin^{\beta}(\mu\xi), \\ u^{n}(\xi) &= \lambda^{n} \sin^{n\beta}(\mu\xi), \\ \left(u^{n}\right)_{\xi} &= n\mu\beta\lambda^{n} \cos(\mu\xi)\sin^{n\beta-1}(\xi), \\ \left(u^{n}\right)_{\xi\xi} &= -n^{2}\mu^{2}\beta^{2}\lambda^{n} \sin^{n\beta} + n\mu^{2}\lambda^{n}\beta(n\beta-1)\sin^{n\beta-2}(\mu\xi), \end{aligned} \tag{3.8}$$

ve (3.7) denkleminin türevleri alınırsa,

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \lambda \cos^{\beta}(\mu\xi), \\ u^{n}(\xi) &= \lambda^{n} \cos^{n\beta}(\mu\xi), \\ \left(u^{n}\right)_{\xi} &= -n\mu\beta\lambda^{n} \sin(\mu\xi)\cos^{n\beta-1}(\xi), \\ \left(u^{n}\right)_{\xi\xi} &= -n^{2}\mu^{2}\beta^{2}\lambda^{n} \cos^{n\beta} + n\mu^{2}\lambda^{n}\beta(n\beta-1)\cos^{n\beta-2}(\mu\xi), \end{aligned} \tag{3.9}$$

bulunur. Diğer türevler için de benzer şekilde türev alınabilir.

6. (3.8) türevleri ve (3.9) türev değerleri indirgenmiş (3.5) denkleminde yerine yazılır. (3.9) türevleri kullanıldığı zaman Kosinüs fonksiyonlarının terimlerini veya (3.8) türevleri kullanıldığında Sinüs fonksiyonlarının terimlerini dengeleyebiliriz. Son olarak ortaya çıkan cebirsel denklemler bilgisayar yardımıyla sembolik hesaplamalar kullanılarak λ, μ ve β parametrelerinin bütün olası değerlerini çıkarmak için çözülür. Bulunan λ, μ ve β değerleri (3.6) veya (3.7) denklemlerinde yerine yazılarak çözüm bulunmuş olur.

Yöntemin temel avantajı çoğu diferensiyel denklemlere doğrudan uygulanabilmesidir. Diğer önemli avantajı hesaplama işini oldukça azaltmasıdır.

Bunu geliştirmek için, bazı gerçek fiziksel işlemlere dayanan doğrusal olmayan denklemlerin bazıları önerilen yöntemin güvenilirliğini göstermek için incelenecektir.

3.2.1 KdV Denklemi

KdV denklemi, a ve b sabitler ve $u(x,t)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere,

$$u_t + auu_x + bu_{xxx} = 0, \tag{3.10}$$

şeklindedir [3].

Yukarıda (3.5) ve (3.6) ile sunulan yöntemi uygularsak, (3.10) denklemi,

$$-cu_\xi + \frac{a}{2}u^2{}_\xi + bu_{\xi\xi\xi} = 0, \tag{3.11}$$

şekline dönüşür.

Bu denklemin bir kez integrali alınır ve integral sabiti sıfır kabul edilirse,

$$-cu + \frac{a}{2}u^2 + bu_{\xi\xi} = 0, \tag{3.12}$$

bulunur. (3.9) türevlerini (3.12) denkleminde yerine yazarsak,

$$-c\lambda\cos^\beta(\mu\xi) + \frac{a}{2}\lambda^2\cos^{2\beta}(\mu\xi) - b\mu^2\beta^2\lambda\cos^\beta(\mu\xi) + b\lambda\mu^2\beta(\beta-1)\cos^{\beta-2}(\mu\xi) = 0, \tag{3.13}$$

buluruz.

Eğer aşağıdaki cebirsel denklemin sistemi uygulanırsa denklem (3.13) denkleminin sağlanmış olacağı kesindir.

$$\begin{aligned}
&\beta - 1 \neq 0,\\
&\beta - 2 = 2\beta,\\
&\frac{a}{2}\lambda = -b\mu^2\beta(\beta - 1),\\
&-c = b\mu^2\beta^2.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Bu sistemi çözersek;

$$\begin{aligned}
&\beta = -2,\\
&\mu = \sqrt{\frac{-c}{4b}},\\
&\lambda = \frac{3c}{a}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

elde edilir.

Eğer biz sinüs yöntemini (3.10) kullanırsak da sonuç (3.15)' ye ulaşırız. Bu durumda,

$$u(x,t) = \frac{3c}{a}\sec^2\left[\sqrt{\frac{-c}{4b}}(x - ct)\right], \qquad c < 0, \tag{3.16}$$

ve

$$u(x,t) = \frac{3c}{a}\csc^2\left[\sqrt{\frac{-c}{4b}}(x - ct)\right], \qquad c < 0, \tag{3.17}$$

çözümleri elde edilir. (3.16) ve (3.17) sonuçlarının sadece $c < 0,$ olduğunda geçerli olduğunu belirtmek gerekir. $c > 0,$ için

$$u(x,t) = \frac{3c}{a}\sec h^2\left[\sqrt{\frac{c}{4b}}(x - ct)\right], \qquad c > 0, \tag{3.18}$$

ve

$$u(x,t) = -\frac{3c}{a}\csc h^2\left[\sqrt{\frac{c}{4b}}(x - ct)\right], \qquad c > 0, \tag{3.19}$$

çözümleri oluşur.

$\beta - 1 = 0$, olduğu durum sadece $a = 0$ ise sağlanır. Sonuçta,

$$\lambda \text{=herhangi bir gerçek sayı,} \qquad \mu = \sqrt{\frac{-c}{b}}, \tag{3.20}$$

elde ederiz.

Bu aşağıdaki çözümleri verir:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= A\cos\left[\sqrt{\frac{-c}{b}}(x-ct)\right] + B\sin\left[\sqrt{\frac{-c}{b}}(x-ct)\right], c < 0, \\ u(x,t) &= A\cosh\left[\sqrt{\frac{c}{b}}(x-ct)\right] + B\sinh\left[\sqrt{\frac{c}{b}}(x-ct)\right], c > 0, \end{aligned} \tag{3.21}$$

A ve B rastgele seçilmiş sabitlerdir.

3.2.2 Değiştirilmiş KdV Denklemi

Şimdi değiştirilmiş KdV denklemini ele alalım [3].

$$u_t + au^2u_x + bu_{xxx} = 0, \qquad a, b > 0. \tag{3.22}$$

Öncelikle (3.22) denklemi benzerlik dönüşümü uygulanırsa,

$$-cu_\xi + \frac{a}{3}\left(u^3\right)_\xi + bu_{\xi\xi\xi} = 0, \tag{3.23}$$

yazılır. Bir kere integral alınır ve integral sabitini sıfır kabul edersek,

$$-cu + \frac{a}{3}u^3 + bu_{\xi\xi} = 0, \tag{3.24}$$

bulunur. (3.9) türevleri (3.24) denkleminde yerine yazılırsa,

$$-c\lambda\cos^{\beta}(\mu\xi)+\frac{a}{3}\lambda^{3}\cos^{3\beta}(\mu\xi)-b\mu^{2}\beta^{2}\lambda\cos^{\beta}(\mu\xi)+b\lambda\mu^{2}\beta(\beta-1)\cos^{\beta-2}(\mu\xi)=0, \tag{3.25}$$

bulunur. Bu denklem, eğer cebirsel denklemlerin sistemi aşağıdaki koşulu sağlıyorsa çözüm bulunur.

$$\begin{aligned}
&\beta-1\neq 0,\\
&\beta-2=3\beta,\\
&\frac{a}{3}\lambda^{2}=-b\mu^{2}\beta(\beta-1),\\
&-c=b\mu^{2}\beta^{2},
\end{aligned} \tag{3.26}$$

denklem sistemi bulunur. Bu denklemleri çözersek,

$$\begin{aligned}
&\beta=-1,\\
&\mu=\sqrt{\frac{-c}{b}},\\
&\lambda=\sqrt{\frac{6c}{a}}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Benzer şekilde sinüs yöntemi (3.8) türevlerini kullanırsak da elde edilir. Sonuç olarak,

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{6c}{a}}\sec\left[\sqrt{\frac{-c}{b}}(x-ct)\right],\qquad c<0, \tag{3.28}$$

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{6c}{a}}\csc\left[\sqrt{\frac{-c}{b}}(x-ct)\right],\qquad c<0, \tag{3.29}$$

çözümleri elde edilir.

$c>0$ için,

$$u(x,t)=\sqrt{\frac{6c}{a}}\sec h\left[\sqrt{\frac{c}{b}}(x-ct)\right],\qquad c>0, \tag{3.30}$$

$$u(x,t)=\pm i\sqrt{\frac{6c}{a}}\csc h\left[\sqrt{\frac{c}{b}}(x-ct)\right],\quad c>0,\;\; i=\sqrt{-1}\,, \tag{3.31}$$

bulunur.

Eğer (3.25) denkleminde $\beta=1$ ise, denklem sadece $a=0$ için sağlanır. Bu durumda daha önce (3.21)' de elde ettiğimiz sonuçları buluruz.

3.2.3 Genelleştirilmiş KdV Denklemi

Şimdi genelleştirilmiş KdV denklemini inceleyelim [3]. Burada a ve b sabitler olmak üzere:

$$u_t+a(n+1)(n+2)u^n u_x+bu_{xxx}=0,\qquad a,b>0. \tag{3.32}$$

(3.32) denklemi,

$$-cu_{\xi}+a(n+2)\left(u^{n+1}\right)_{\xi}+bu_{\xi\xi\xi}=0. \tag{3.33}$$

denklemine dönüştürülür. Bu denklemin ξ- değişkenine göre integrali alınır ve integral sabiti sıfır kabul edilirse,

$$-cu+a(n+2)\left(u^{n+1}\right)+bu_{\xi\xi}=0, \tag{3.34}$$

eşitliği bulunur. Bu denklemde (3.9) türevlerini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}&-c\lambda\cos^{\beta}(\mu\xi)+a(n+2)\lambda^{n+1}\cos^{\beta(n+1)}(\mu\xi)-b\mu^2\beta^2\lambda\cos^{\beta}(\mu\xi)\\&+b\lambda\mu^2\beta(\beta-1)\cos^{\beta-2}(\mu\xi)=0,\end{aligned} \tag{3.35}$$

bulunur. Bu denklem,

$$\begin{aligned}&\beta-1\neq 0,\\&\beta(n+1)=\beta-2,\\&a(n+2)\lambda^{n}=-b\mu^2\beta(\beta-1),\\&-c=b\mu^2\beta^2,\end{aligned} \tag{3.36}$$

için sağlanır.

Bu denklemleri çözersek,

$$\beta = -\frac{2}{n},$$
$$\mu = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{-c}{b}}, \tag{3.37}$$
$$\lambda = \left(\frac{c}{2a}\right)^{1/n}.$$

elde ederiz. Bu sonuçları sinüs yöntemi (3.8) türevlerini kullanırsak da buluruz. Sonuç olarak;

$$u(x,t) = \left\{\left(\frac{c}{2a}\right)\sec^2\left[\frac{n}{2}\sqrt{\frac{-c}{b}}(x-ct)\right]\right\}^{1/n}, \quad c<0, \tag{3.38}$$

ve

$$u(x,t) = \left\{\left(\frac{c}{2a}\right)\csc^2\left[\frac{n}{2}\sqrt{\frac{-c}{b}}(x-ct)\right]\right\}^{1/n}, \quad c<0, \tag{3.39}$$

bulunur.

Fakat $c>0$ için ,

$$u(x,t) = \left\{\left(\frac{c}{2a}\right)\sec h^2\left[\frac{n}{2}\sqrt{\frac{c}{b}}(x-ct)\right]\right\}^{1/n}, \quad c>0, \tag{3.40}$$

ve

$$u(x,t) = \left\{\left(-\frac{c}{2a}\right)\csc h^2\left[\frac{n}{2}\sqrt{\frac{c}{b}}(x-ct)\right]\right\}^{1/n}, \quad c>0, \tag{3.41}$$

bulunur. $\beta - 1 = 0,$ için eğer $a = 0$ ise bu durum sağlanır. Sonuç olarak daha önce (3.21)' de elde ettiğimiz sonuçlara ulaşırız.

3.2.4 Boussinesq Denklemi

Şimdi Boussinesq denklemini inceleyelim [42].

$$u_{tt} - au_{xx} + 3u^2{}_{xx} - bu_{xxxx} = 0, \qquad a,b > 0. \tag{3.42}$$

Bu denklem,

$$c^2 u_{\xi\xi} - au_{\xi\xi} + 3\left(u^2\right)_{\xi\xi} - bu_{\xi\xi\xi\xi} = 0, \tag{3.43}$$

şekline dönüşür.

İki kere ξ-değişkenine göre integral alınır ve integral sabiti sıfır kabul edilirse;

$$\left(c^2 - a\right)u + 3u^2 - bu_{\xi\xi} = 0, \tag{3.44}$$

bulunur.

(3.9) türevlerini (3.44) denkleminde yerine yazarsak;

$$\begin{aligned} &\left(c^2 - a\right)\lambda \cos^{\beta}(\mu\xi) + 3\lambda^2 \cos^{2\beta}(\mu\xi) + b\mu^2\beta^2\lambda\cos^{\beta}(\mu\xi) \\ &- b\lambda\mu^2\beta(\beta-1)\cos^{\beta-2}(\mu\xi) = 0. \end{aligned} \tag{3.45}$$

elde edilir.

Benzer analiz kullanılarak, cebirsel denklemlerin sistemini;

$$\begin{aligned} &\beta - 1 \neq 0, \\ &2\beta = \beta - 2, \\ &3\lambda = b\mu^2\beta(\beta-1), \\ &c^2 - a = -b\mu^2\beta^2, \end{aligned} \tag{3.46}$$

olarak buluruz. Bu denklemler çözülürse,

$$\begin{aligned} &\beta = -2, \\ &\mu = \sqrt{\frac{a-c^2}{4b}}, \\ &\lambda = \frac{a-c^2}{2}, \end{aligned} \tag{3.47}$$

bulunur. Eğer sinüs yöntemi (3.8) türevlerini kullanırsak da aynı sonuçları buluruz. Böylece,

$$u(x,t)=\frac{a-c^2}{2}\sec^2\left[\sqrt{\frac{a-c^2}{4b}}(x-ct)\right], \qquad a>c^2, \tag{3.48}$$

$$u(x,t)=\frac{a-c^2}{2}\csc^2\left[\sqrt{\frac{a-c^2}{4b}}(x-ct)\right], \qquad a>c^2, \tag{3.49}$$

buluruz.

$a<c^2$ için,

$$u(x,t)=\frac{a-c^2}{2}\sec h^2\left[\sqrt{\frac{c^2-a}{4b}}(x-ct)\right], \qquad a<c^2, \tag{3.50}$$

$$u(x,t)=-\frac{a-c^2}{2}\csc h^2\left[\sqrt{\frac{c^2-a}{4b}}(x-ct)\right], \qquad a<c^2, \tag{3.51}$$

bulunur. Daha önce bulunan dört sonuç (k, bir sabit olmak üzere) $x-ct$' yi $x-ct+k,$ ile değiştirirsek de sağlanır.

3.2.5 Düzenlenmiş Uzun-Dalga (RLW) Denklemi

RLW denklemi aşağıdaki gibi ele alalım [39].

$$u_t+au_x-6uu_x-bu_{txx}=0, \quad a,b>0. \tag{3.52}$$

(3.52) denklemi,

$$(a-c)\lambda\cos^{\beta}(\mu\xi)-3\lambda^2\cos^{2\beta}(\mu\xi)-bc\mu^2\beta^2\lambda\cos^{\beta}(\mu\xi)$$
$$+bc\lambda\mu^2\beta(\beta-1)\cos^{\beta-2}(\mu\xi)=0, \tag{3.53}$$

şeklinde yazılır. Bu denklem,

$$\begin{aligned}
&\beta-1\neq 0,\\
&2\beta=\beta-2,\\
&3\lambda=bc\mu^2\beta(\beta-1),\\
&a-c=bc\mu^2\beta^2,
\end{aligned} \tag{3.54}$$

için sağlanır. Böylece,

$$\begin{aligned}
&\beta=-2,\\
&\mu=\sqrt{\frac{a-c}{4bc}},\\
&\lambda=\frac{a-c}{2},
\end{aligned} \tag{3.55}$$

eşitlikleri elde edilir.

Eğer Sinüs-Kosinüs yönteminde (3.8) türevlerini kullanırsak da aynı sonuçları buluruz. (3.55) de bulunan değerlere göre,

$$u(x,t)=\frac{a-c}{2}\sec^2\left[\sqrt{\frac{a-c}{4bc}}(x-ct)\right], \qquad a>c, \tag{3.56}$$

$$u(x,t)=\frac{a-c}{2}\csc^2\left[\sqrt{\frac{a-c}{4bc}}(x-ct)\right], \qquad a>c, \tag{3.57}$$

bulunur.

$a<c$ için,

$$u(x,t)=\frac{a-c}{2}\sec h^2\left[\sqrt{\frac{c-a}{4bc}}(x-ct)\right], \qquad a<c, \tag{3.58}$$

$$u(x,t) = -\frac{a-c}{2}\operatorname{csc}h^2\left[\sqrt{\frac{c-a}{4bc}}(x-ct)\right], \qquad a < c, \tag{3.59}$$

bulunur.

3.2.6 Benjamin-Bona-Mahony Denklemi

Benjamin-Bona-Mahony denklemini ele alalım [42].

$$u_t + \frac{a}{2}u^2{}_x - bu_{xxx} = 0, \qquad a,b > 0. \tag{3.60}$$

(3.60) denklemini,

$$-cu_\xi + \frac{a}{2}\left(u^2\right)_\xi - bu_{\xi\xi\xi} = 0, \tag{3.61}$$

şeklinde yazarız.

Bir kez integral alınır ve integral sabiti sıfır kabul edilirse;

$$-cu + \frac{a}{2}u^2 - bu_{\xi\xi} = 0, \tag{3.62}$$

bulunur.

(3.9) türevlerini (3.62) denkleminde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} &-c\lambda\cos^\beta(\mu\xi) + \frac{a}{2}\lambda^2\cos^{2\beta}(\mu\xi) + b\mu^2\beta^2\lambda\cos^\beta(\mu\xi) \\ &-b\lambda\mu^2\beta(\beta-1)\cos^{\beta-2}(\mu\xi) = 0, \end{aligned} \tag{3.63}$$

elde edilir.

Bu denklem,

$$\begin{aligned}&\beta-1\neq 0,\\&2\beta=\beta-2,\\&\frac{a}{2}\lambda=b\mu^2\beta(\beta-1),\\&c=b\mu^2\beta^2,\end{aligned}\tag{3.64}$$

için sağlanır. Böylece,

$$\begin{aligned}&\beta=-2,\\&\mu=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{b}},\\&\lambda=\frac{3c}{a},\end{aligned}\tag{3.65}$$

eşitlikleri elde edilir. Eğer Sinüs-Kosinüs yönteminde (3.8) türevlerini kullanırsak da aynı sonuçları elde ederiz. (3.65) de bulunan değerlere göre,

$$u(x,t)=\frac{3c}{a}\sec^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{b}}(x-ct)\right],\qquad c>0,\tag{3.66}$$

$$u(x,t)=\frac{3c}{a}\csc^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{b}}(x-ct)\right],\qquad c>0,\tag{3.67}$$

bulunur.

$c<0$ için,

$$u(x,t)=\frac{3c}{a}\sec h^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-c}{b}}(x-ct)\right],\qquad c<0,\tag{3.68}$$

$$u(x,t)=-\frac{3c}{a}\csc h^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-c}{b}}(x-ct)\right],\qquad c<0.\tag{3.69}$$

bulunur.

3.2.7 Phi-Dört Denklemi

Son olarak PF denklemini ele alalım [42].

$$u_{tt} - au_{xx} - u + u^3 = 0, \qquad a > 0. \tag{3.70}$$

(3.70) denklemini,

$$c^2 u_{\xi\xi} - au_{\xi\xi} - u + u^3 = 0, \tag{3.71}$$

şeklinde yazarız.

(3.9) türevlerini (3.71) denkleminde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} &-\lambda \cos^{\beta}(\mu\xi) + \lambda^3 \cos^{3\beta}(\mu\xi) + \left(a - c^2\right)\mu^2 \beta^2 \lambda \cos^{\beta}(\mu\xi) \\ &+ \left(c^2 - a\right)\mu^2 \beta(\beta - 1)\cos^{\beta-2}(\mu\xi) = 0, \end{aligned} \tag{3.72}$$

bulunur.

Bu denklem,

$$\begin{aligned} &\beta - 1 \neq 0, \\ &3\beta = \beta - 2, \\ &\lambda^2 = \left(a - c^2\right)\mu^2 \beta(\beta - 1), \\ &\left(a - c^2\right)\mu^2 \beta^2 = 1, \end{aligned} \tag{3.73}$$

için sağlanır. Böylece,

$$\begin{aligned} &\beta = -1, \\ &\mu = \frac{1}{\sqrt{a - c^2}}, \\ &\lambda = \sqrt{2}, \end{aligned} \tag{3.74}$$

eşitlikleri elde edilir. Eğer Sinüs-Kosinüs yönteminde (3.8) türevlerini kullanırsak da aynı sonuçları buluruz. (3.74) de bulunan değerlere göre,

$$u(x,t) = \sqrt{2}\sec\left[\frac{1}{\sqrt{a - c^2}}(x - ct)\right], \qquad a > c^2, \tag{3.75}$$

$$u(x,t) = \sqrt{2}\,\csc\left[\frac{1}{\sqrt{a-c^2}}(x-ct)\right], \quad a > c^2, \tag{3.76}$$

bulunur.

$a < c^2$ için aşağıdaki sonuçlar bulunur,

$$u(x,t) = \sqrt{2}\,\sec h\left[\frac{1}{\sqrt{c^2-a}}(x-ct)\right], \qquad a < c^2, \tag{3.77}$$

$$u(x,t) = i\sqrt{2}\,\csc h\left[\frac{1}{\sqrt{c^2-a}}(x-ct)\right], \qquad a < c^2, \qquad i = \sqrt{-1} \tag{3.78}$$

3.2.8 Drinfeld-Sokolov Denklem Sistemi

DS denklem sistemini ele alalım [30].

$$\begin{aligned} &u_t + {v^2}_x = 0, \\ &v_t - av_{xxx} + 3bu_x v + 3kuv_x = 0. \end{aligned} \tag{3.79}$$

(3.79) denklemi, $\xi = (x-ct)$ dalga değişkeni kullanılarak,

$$\begin{aligned} &-cu' + {v^2}' = 0, \\ &cv' + av''' - 3bu'v - 3kuv' = 0 \end{aligned} \tag{3.80}$$

ADD' ya çevirilir.

Sistemdeki birinci denklemin integrali alınarak ve integrasyon sabitlerini sıfırlayarak

$$cu = v^2, \tag{3.81}$$

eşitliği elde edilir.

Sistemin ikinci denkleminde (3.81) denklemi yerine konularak ve integrali alınarak

$$c^2 v - (2b+k)v^3 + acv'' = 0, \tag{3.82}$$

ifadesi bulunur.

(3.9) türevlerini (3.82) denkleminde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} &c^2\lambda\cos^{\beta}(\mu\xi)-(2b+k)\lambda^3\cos^{3\beta}(\mu\xi)-ac\lambda\mu^2\beta^2\cos^{\beta}(\mu\xi) \\ &+ac\mu^2\lambda\beta(\beta-1)\cos^{\beta-2}(\mu\xi)=0, \end{aligned} \tag{3.83}$$

elde edilir.

Her çift $\cos^{j}$'nin üslerini ve katsayılarını eşitleyerek;

$$\begin{aligned} &\beta-1\neq 0, \\ &3\beta=\beta-2, \\ &ac\mu^2\beta^2=c^2, \\ &(2b+k)\lambda^3=ac\lambda\mu^2\beta(\beta-1). \end{aligned} \tag{3.84}$$

bulunur.

(3.84) sistemini çözersek,

$$\begin{aligned} &\beta=-1, \\ &\mu=\sqrt{\frac{c}{a}},\frac{c}{a}\rangle 0, a\neq 0 \\ &\lambda=c\sqrt{\frac{2}{2b+k}},2b+k\neq 0, \end{aligned} \tag{3.85}$$

elde edilir.

$\frac{c}{a}>0$ ve $a\neq 0$ için,

$$v(x,t)=c\sqrt{\frac{2}{2b+k}}\csc\left(\sqrt{\frac{c}{a}}(x-ct)\right), \qquad 0\langle \mu(x-ct)\langle \pi \tag{3.86}$$

ve

$$v(x,t)=c\sqrt{\frac{2}{2b+k}}\sec\left(\sqrt{\frac{c}{a}}(x-ct)\right), \qquad |\mu(x-ct)|\langle \frac{\pi}{2}, \tag{3.87}$$

periyodik çözümleri bulunur.

(3.81) eşitliğinden $u = \frac{1}{c} v^2$ yazılır. Böylece,

$$u(x,t) = \frac{2c}{2b+k} \csc^2\left(\sqrt{\frac{c}{a}}(x-ct)\right), \qquad 0 \langle \mu(x-ct) \langle \pi \tag{3.88}$$

ve

$$u(x,t) = \frac{2c}{2b+k} \sec^2\left(\sqrt{\frac{c}{a}}(x-ct)\right), \qquad |\mu(x-ct)| \langle \frac{\pi}{2}, \tag{3.89}$$

bulunur.

Fakat $\frac{c}{a} < 0$, $a \neq 0$ için

$$v(x,t) = ic\sqrt{\frac{2}{2b+k}} \csc h\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}(x-ct)\right) \tag{3.90}$$

karmaşık çözümü ve

$$v(x,t) = c\sqrt{\frac{2}{2b+k}} \sec h\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}(x-ct)\right) \tag{3.91}$$

soliton çözümünü elde ederiz.

Yine, $u = \frac{1}{c} v^2$ olduğundan,

$$u(x,t) = -\frac{2c}{2b+k} \csc h^2\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}(x-ct)\right), \tag{3.92}$$

ve

$$u(x,t) = -\frac{2c}{2b+k}\sec h^2\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}(x-ct)\right), \tag{3.93}$$

soliton çözümleri bulunur.

3.2.9 Genelleştirilmiş Drinfeld-Sokolov Denklem Sistemi

Genelleştirilmiş DS denklem sistemini ele alalım,

$$\begin{aligned} &u_t + {v^n}_x = 0, \\ &v_t - av_{xxx} + 3bu_x v + 3kuv_x = 0, \end{aligned} \tag{3.94}$$

Dalga değişkeni $\xi = x - ct$ kullanılarak (3.94) denklemi,

$$\begin{aligned} &-cu' + \left(v^n\right)' = 0, \\ &cv' + av''' - 3bu'v - 3kuv' = 0, \end{aligned} \tag{3.95}$$

ADD şeklinde yazılır.

Daha sonra integral alınır ve $cu = v^n$ ifadesi yerine yazılırsa,

$$c^2 v - \frac{3(bn+k)}{n+1}v^{n+1} + acv'' = 0, \tag{3.96}$$

elde edilir.

(3.9) türevlerini (3.96) denkleminde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} &c^2\lambda\cos^\beta(\mu\xi) - \frac{3(bn+k)}{n+1}\lambda^{n+1}\cos^{(n+1)\beta}(\mu\xi) - ac\lambda\mu^2\beta^2\cos^\beta(\mu\xi) \\ &+ ac\mu^2\lambda\beta(\beta-1)\cos^{\beta-2}(\mu\xi) = 0, \end{aligned} \tag{3.97}$$

bulunur.

$\cos^j$ ' nin her çiftinin üslerini ve katsayılarını eşitleyerek,

$$
\begin{aligned}
&\beta - 1 \neq 0, \\
&(n+1)\beta = \beta - 2, \\
&ac\mu^2\beta^2 = c^2, \\
&\frac{3(bn+1)}{n+1}\lambda^{n+1} = ac\lambda\mu^2\beta(\beta-1),
\end{aligned} \tag{3.98}
$$

eşitlikleri elde edilir.

(3.94) denklem sisteminin çözümü,

$$
\begin{aligned}
&\beta = -\frac{2}{n}, \\
&\mu = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{c}{a}} \qquad \frac{c}{a}\rangle 0, \quad a \neq 0, \\
&\lambda = \left(\frac{(n+1)(n+2)c^2}{6(bn+k)}\right)^{\frac{2}{n}},
\end{aligned} \tag{3.99}
$$

olarak bulunur.

$\frac{c}{a} > 0, a \neq 0$ için,

$$
v(x,t) = \left(\frac{(n+1)(n+2)c^2}{6(bn+k)}\csc^2\left[\frac{n}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}(x-ct)\right]\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad 0 < \mu(x-ct) < \pi \tag{3.100}
$$

ve

$$
v(x,t) = \left(\frac{(n+1)(n+2)c^2}{6(bn+k)}\sec^2\left[\frac{n}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}(x-ct)\right]\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad |\mu(x-ct)| < \frac{\pi}{2}, \tag{3.101}
$$

periyodik çözümleri bulunur.

$u = \frac{1}{c}v^n$ eşitliğini kullanırsak,

$$u(x,t)=\frac{(n+1)(n+2)c}{6(bn+k)}\csc^2\left[\frac{n}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}(x-ct)\right], \qquad 0<\mu(x-ct)<\pi \tag{3.102}$$

ve

$$u(x,t)=\frac{(n+1)(n+2)c}{6(bn+k)}\sec^2\left[\frac{n}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}(x-ct)\right], \qquad |\mu(x-ct)|<\frac{\pi}{2}, \tag{3.103}$$

bulunur.

$\frac{c}{a}<0,$ için,

$$v(x,t)=\left(-\frac{(n+1)(n+2)c^2}{6(bn+k)}\csc h^2\left[\frac{n}{2}\sqrt{-\frac{c}{a}}(x-ct)\right]\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{3.104}$$

ve

$$v(x,t)=\left(-\frac{(n+1)(n+2)c^2}{6(bn+k)}\sec h^2\left[\frac{n}{2}\sqrt{-\frac{c}{a}}(x-ct)\right]\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{3.105}$$

soliton çözümleri bulunur.

$u=\frac{1}{c}v^n$ eşitliğini kullanırsak,

$$u(x,t)=-\frac{(n+1)(n+2)c}{6(bn+k)}\csc h^2\left[\frac{n}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}(x-ct)\right], \tag{3.106}$$

ve

$$u(x,t)=\frac{(n+1)(n+2)c}{6(bn+k)}\sec h^2\left[\frac{n}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}(x-ct)\right] \tag{3.107}$$

bulunur.

3.2.10 Drinfeld-Sokolov Denklem Sisteminin Bir Çeşidi

Negatif üslü DS sisteminin bir çeşidini ele alalım,

$$\begin{aligned} &u_t + v^{-n}{}_x = 0, n > 2 \\ &v_t - av_{xxx} + 3bu_x v + 3kuv_x = 0. \end{aligned} \tag{3.108}$$

Dalga değişkeni $\xi = x - ct$ kullanılarak (3.108) denklemi,

$$\begin{aligned} &-cu' + v^{-n'} = 0, \\ &cv' + av''' - 3bu'v - 3kuv' = 0, \end{aligned} \tag{3.109}$$

ADD şeklinde yazılır.

Daha önce yaptığımız gibi (3.110) denklemi elde edilir.

$$c^2 v + \frac{3(nb-k)}{1-n} v^{-n+1} + acv'' = 0. \tag{3.110}$$

(3.9) türevlerini (3.110) denkleminde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} &c^2 \lambda \cos^{\beta}(\mu\xi) - \left(\frac{3(k-nb)}{1-n}\right)\lambda^{-n+1} \cos^{(-n+1)\beta} - ac\lambda\mu^2\beta^2 \cos^{\beta}(\mu\xi) \\ &+ ac\mu^2\lambda\beta(\beta-1)\cos^{\beta-2}(\mu\xi) = 0. \end{aligned} \tag{3.111}$$

elde edilir. Bu denklem,

$$\begin{aligned} &\beta - 1 \neq 0, \\ &(-n+1)\beta = \beta - 2, \\ &ac\mu^2\beta^2 = c^2, \\ &\frac{3(k-nb)}{1-n}\lambda^{-n+1} = ac\lambda\mu^2\beta(\beta-1), \end{aligned} \tag{3.112}$$

için sağlanır.

Oluşan sistemi çözersek,

$$\beta = \frac{2}{n},$$
$$\mu = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}, \frac{c}{a} > 0, \tag{3.113}$$
$$\lambda = \left(\frac{6(k-nb)}{c^2(n-1)(n-2)}\right)^{\frac{1}{n}}, n > 2,$$

eşitliklerini elde ederiz.

$\frac{c}{a} > 0$ için,

$$v(x,t) = \begin{cases} \left\{\dfrac{6(k-nb)}{c^2(n-1)(n-2)}\sin^2\left[\dfrac{n}{2}\sqrt{\dfrac{c}{a}}(x-ct)\right]\right\}^{\frac{1}{n}}, |\mu\xi| < \pi, \\ 0, aksitaktirde, \end{cases} \tag{3.114}$$

ve

$$v(x,t) = \begin{cases} \left\{\dfrac{6(k-nb)}{c^2(n-1)(n-2)}\cos^2\left[\dfrac{n}{2}\sqrt{\dfrac{c}{a}}(x-ct)\right]\right\}^{\frac{1}{n}}, |\mu\xi| < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, aksitaktirde, \end{cases} \tag{3.115}$$

kompakton (compacton) çözümleri elde edilir.

$u = \frac{1}{c}v^{-n}$ eşitliği kullanılarak,

$$u(x,t) = \frac{c(n-1)(n-2)}{6(k-nb)}\csc^2\left[\frac{n}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}(x-ct)\right], 0 < \mu\xi < \pi, \tag{3.116}$$

ve

$$u(x,t) = \frac{c(n-1)(n-2)}{6(k-nb)}\sec^2\left[\frac{n}{2}\sqrt{\frac{c}{a}}(x-ct)\right], 0 < \mu\xi < \frac{\pi}{2}, \tag{3.117}$$

çözümleri elde edilir.

$\frac{c}{a} < 0$ ve $v(x,t)$ için,

$$v(x,t) = \left\{ -\frac{6(k-nb)}{c^2(n-1)(n-2)} \sinh^2\left[\frac{n}{2}\sqrt{-\frac{c}{a}}(x-ct) \right] \right\}^{\frac{1}{n}}, \tag{3.118}$$

ve

$$v(x,t) = \left\{ \frac{6(k-nb)}{c^2(n-1)(n-2)} \cosh^2\left[\frac{n}{2}\sqrt{-\frac{c}{a}}(x-ct) \right] \right\}^{\frac{1}{n}}, \tag{3.119}$$

soliter ve pattern örnek çözümlerini elde ederiz.

$\frac{c}{a} < 0$ için,

$$u(x,t) = -\frac{c(n-1)(n-2)}{6(k-nb)} \operatorname{csc} h^2\left[\frac{n}{2}\sqrt{-\frac{c}{a}}(x-ct) \right], \tag{3.120}$$

ve

$$u(x,t) = -\frac{c(n-1)(n-2)}{6(k-nb)} \operatorname{csc} h^2\left[\frac{n}{2}\sqrt{-\frac{c}{a}}(x-ct) \right] \tag{3.121}$$

soliton çözümlerini elde ederiz.

BÖLÜM 4

4.1 Giriş

Bu bölümde lineer olmayan denklemlerin tam çözümleri için genelleştirilmiş tanh yöntemi verilmiştir. Genelleştirilmiş tanh yöntemi lineer olmayan dalga denklemlerinin yalnız dalga çözümlerini bulmak için kullanılır. Elde edilen çözümler solitonları, kinkleri, periyodik çözümleri içerir. Bu çalışma Malfliet' in önemli buluşuna bir ektir. Genelleştirilmiş tanh yöntemi lineer olmayan dalga denklemlerini çözmek için daha geniş bir uygulanabilirlik sağlar.

Lineer olmayan dalga denklemlerinin bazı bilimsel ve mühendislik alanlarında önemli bir rolü vardır. Bu denklemler katı hal fiziğinde, akışkanlar mekaniğinde, kimyasal kinetiklerde, plazma fiziğinde, populasyon modellerinde, lineer olmayan optiklerde, Josephson birleşmesinde, fluxonların yayılmasında, ve diğer birçok yerlerde kullanılır. Malfliet' in çalışması hiperbolik tanjant yöntemini lineer olmayan dalga denklemlerinin güvenilir çözümleri için kaynak olmuştur. Bu yöntem sistemli ve doğrusal yoldan kesin veya yaklaşık sonuçlar bulunması için kullanılan bir metottur [13].

Tanh yöntemi esas olarak Ricatti denklemine ve iyi bilinen denklemlerin çözümlerine dayanan birçok modifikasyona bağlıdır. Standart tanh yöntemi ve önerilen modifikasyonlar hepsi denge yöntemine dayanır (burada en yüksek derecenin lineer terimleri indirgenmiş denklemin lineer olmayan en yüksek derecesiyle dengelenir).

Bu çalışmalarda, her araştırılan denklem için sadece bir tane yalnız dalga çözümü elde edilmiştir. Amacımız genelleştirilmiş tanh yöntemi ile bu denklemlerin çözümü için bir tane yerine birçok sonuç elde etmektir.

Bu yöntem yardımıyla, Burgers, KdV, DKdV, Fisher, Burger-Fisher, Huxley denklemlerinin, Hirota-Satsuma-KdV, Drinfeld-Sokolov, (2+1)-Boyutlu Konopelchenko-Dubrovsky denklem sistemlerinin tam çözümleri elde edilmiştir.

4.2 Genelleştirilmiş Tanh Yöntemi:

Genelleştirilmiş tanh yönteminde,

$$Y = \tanh(\mu\xi),\ \xi = x - ct\,,$$

ve

$$\frac{d}{d\xi} = \mu\left(1 - Y^2\right)\frac{d}{dY},$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} = -2\mu Y\left(1 - Y^2\right)\frac{d}{dY} + \mu^2\left(1 - Y^2\right)^2\frac{d^2}{dY^2},$$

$$\frac{d^3}{d\xi^3} = 2\mu^3\left(1 - Y^2\right)\left(3Y^2 - 2\right)\frac{d}{dY} - 6\mu^3 Y\left(1 - Y^2\right)^2\frac{d^2}{dY^2} + \mu^3\left(1 - Y^2\right)^3\frac{d^3}{dY^3},$$

$$\frac{d^4}{d\xi^4} = -8\mu^4 Y\left(1 - Y^2\right)\left(3Y^2 - 2\right)\frac{d}{dY} + 4\mu^4\left(1 - Y^2\right)^2\left(9Y^2 - 2\right)\frac{d^2}{dY^2}$$
$$-12\mu^4 Y\left(1 - Y^2\right)^3\frac{d^3}{dY^3} + \mu^4\left(1 - Y^2\right)^4\frac{d^4}{dY^4}.$$

dönüşümleri tekrarlanır ve

$$u(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{m} a_k Y^k + \sum_{k=1}^{m} b_k Y^{-k}., \tag{4.1}$$

sonlu seri açılımı yazılır.

Burada m, belirlenecek pozitif tamsayıdır. (4.1) açılımı $b_k = 0,\ \ 1 \le k \le m$ için standart tanh yöntemine çevrilir. m parametresi daha önce belirtildiği gibi genellikle sonuç denkleminde en yüksek mertebeden lineer terimlerini, en yüksek mertebeden lineer olmayan terimleriyle dengeleyerek elde edilir. Eğer m bir tamsayı değilse, bu zorluğu atlatabilmek için bir dönüşüm formülü kullanılmalıdır. (4.1) açılımı Y kuvvetlerinde olan cebirsel denklem sisteminde sonuçlanan ADD' de $Q(u, u', u'', u''', ...) = 0$ yerine yazılarak $a_k\left(0,...,M\right)$, μ ve c parametreleri bulunur [31].

Şimdi bu yöntemi birkaç lineer olmayan oluşum denklemlerine uygulayalım.

4.2.1 Burger Denklemi:

Burger denklemini aşağıdaki şekilde tanımlayalım;.

$$u_t + uu_x - u_{xx} = 0. \tag{4.2}$$

Dalga değişkeni olan $\xi = x - ct$ ' yi kulanarak (4.2) denklemi,

$$-cu + \frac{1}{2}u^2 - u' = 0\,, \tag{4.3}$$

Şeklinde bir ADD' e dönüşür. Bu denklem ADD' nin bir kez integrali alınarak ve integral sabiti sıfır alınarak elde edilmiştir. u' terimini u^2 ile dengelersek ,

$$m + 1 = 2m\,, \tag{4.4}$$

olduğundan,

$$m = 1 \tag{4.5}$$

bulunur. Genelleştirilmiş tanh yöntemi (4.1) sonlu açılımı kullanılırsa,

$$u(\xi) = a_0 + a_1 Y + \frac{b_1}{Y}, \tag{4.6}$$

olarak bulunur. Bu çözümü, (4.3) denkleminde yerine yazar ve Y' nin artan kuvvetlerinin katsayılarını toplarsak; a_0, a_1, b_1 ve μ için cebirsel denklemlerden oluşan bir sistem ve bu sistemi çözerek üç tane durum elde ederiz:

(i) Birinci durum:

$$a_0 = c,\ a_1 = -c,\ b_1 = 0,\ \mu = \frac{c}{2}. \tag{4.7}$$

(ii) İkinci durum:

$$a_0 = c,\ a_1 = 0,\ b_1 = -c,\ \mu = \frac{c}{2}. \tag{4.8}$$

(iii) Üçüncü durum:

$$a_0 = c,\ a_1 = -\frac{c}{2},\ b_1 = -\frac{c}{2},\ \mu = \frac{c}{4}. \tag{4.9}$$

Böylece çözümler:

$$u_1(x,t) = c\left(1 - \tanh\left[\frac{c}{2}(x - ct)\right]\right), \tag{4.10}$$

$$u_2(x,t) = c\left(1 - \coth\left[\frac{c}{2}(x - ct)\right]\right), \tag{4.11}$$

ve

$$u_3(x,t) = c\left(1 - \frac{1}{2}\left(\tanh\left[\frac{c}{4}(x - ct)\right] - \frac{1}{2}\coth\left[\frac{c}{4}(x - ct)\right]\right)\right), \tag{4.12}$$

olarak bulunur. Burada c, serbest parametre olarak alınmıştır. Genelleştirilmiş tanh yöntemini kullanarak üç çift çözüm elde edileceği kesindir. Tanh yönteminde sadece bir sonuç elde edilmiştir.

4.2.2 KdV Denklemi

KdV denklemi konveksiyon terimi uu_x ve dağılım terimi u_{xxx} ile tanımlanır.

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{4.13}$$

Dalga değişkeni $\xi = x - ct$ ’ yi kullanarak (4.13) denklemini,

$$-cu' + 6uu' + u''' = 0,$$

ADD’ e dönüştürürüz.

Bu ADD’ nin bir kez integrali alınarak ve integral sabiti sıfır kabul edilerek

$$-cu + 3u^2 + u'' = 0, \tag{4.14}$$

elde edilir.

u'' ile u^2 dengelenirse,

$$m + 2 = 2m\,, \tag{4.15}$$

olduğundan,

$$m = 2 \text{ bulunur.} \tag{4.16}$$

Genelleştirilmiş tanh yöntemine göre (4.1) sonlu açılımı aşağıdaki gibi alabiliriz.

$$u(\xi) = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 + \frac{b_1}{Y} + \frac{b_2}{Y^2}. \tag{4.17}$$

(4.17) sonlu açılımını (4.14) denkleminde yerine yazar ve Y’ nin artan kuvvetlerinin katsayılarını toplarsak; a_0, a_1, a_2, b_1, b_2 ve μ için cebirsel denklemlerden oluşan bir sistem ve bu sistemi çözerek altı tane durum elde ederiz:

(i) Birinci durum:

$$a_0 = -\frac{c}{6},\; a_1 = b_1 = b_2 = 0,\; a_2 = \frac{c}{2},\; \mu = \frac{1}{2}\sqrt{-c}. \tag{4.18}$$

(ii) İkinci durum:

$$a_0 = -\frac{c}{6},\ a_1 = b_1 = a_2 = 0,\ b_2 = \frac{c}{2},\ \mu = \frac{1}{2}\sqrt{-c}. \tag{4.19}$$

(iii) Üçüncü durum:

$$a_0 = \frac{c}{2},\ a_1 = b_1 = b_2 = 0,\ a_2 = -\frac{c}{2},\ \mu = \frac{1}{2}\sqrt{c}. \tag{4.20}$$

(iv) Dördüncü durum:

$$a_0 = \frac{c}{2},\ a_1 = b_1 = a_2 = 0,\ a_2 = -\frac{c}{2},\ \mu = \frac{1}{2}\sqrt{c}. \tag{4.21}$$

(v) Beşinci durum:

$$a_0 = \frac{c}{12},\ a_1 = b_1 = 0,\ a_2 = b_2 = \frac{c}{8},\ \mu = \frac{1}{4}\sqrt{c}. \tag{4.22}$$

(vi) Altıncı durum:

$$a_0 = \frac{c}{4},\ a_1 = b_1 = 0,\ a_2 = b_2 = -\frac{c}{8},\ \mu = \frac{1}{4}\sqrt{c}. \tag{4.23}$$

c, serbest parametre olarak alınmıştır.

Birinci durum aşağıdaki çözümü verir;

$$u_1(x,t) = -\frac{c}{6}\left(1 - 3\tanh^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{-c}(x-ct)\right]\right),\quad c<0 \tag{4.24}$$

ve periyodik çözüm

$$u_2(x,t) = -\frac{c}{6}\left(1 + 3\tan^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x-ct)\right]\right),\qquad c>0 \tag{4.25}$$

İkinci durum aşağıdaki soliton çözümünü verir;

$$u_3(x,t) = -\frac{c}{6}\left(1 - 3\coth^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{-c}(x-ct)\right]\right), \quad c<0 \tag{4.26}$$

ve periyodik çözüm

$$u_4(x,t) = -\frac{c}{6}\left(1 + 3\cot^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x-ct)\right]\right), \quad c>0. \tag{4.27}$$

Üçüncü durum aşağıdaki soliton çözümünü verir;

$$u_5(x,t) = \frac{c}{2}\sec h^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x-ct)\right], \quad c>0 \tag{4.28}$$

ve periyodik çözüm

$$u_6(x,t) = \frac{c}{2}\sec^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{-c}(x-ct)\right], \quad c<0 \tag{4.29}$$

Dördüncü durum aşağıdaki çözümü verir;

$$u_7(x,t) = -\frac{c}{2}\csc h^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x-ct)\right], \quad c>0 \tag{4.30}$$

ve periyodik çözüm

$$u_8(x,t) = \frac{c}{2}\csc^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{-c}(x-ct)\right], \quad c<0 \tag{4.31}$$

Beşinci durum aşağıdaki çözümü verir;

$$u_9(x,t) = \frac{c}{12}\left(1 + \frac{3}{2}\left(\tanh^2\left[\frac{1}{4}\sqrt{-c}(x-ct)\right] + \coth^2\left[\frac{1}{4}\sqrt{-c}(x-ct)\right]\right)\right), \quad c<0 \tag{4.32}$$

ve periyodik çözüm

$$u_{10}(x,t)=\frac{c}{12}\left(1-\frac{3}{2}\left(\tan^2\left[\frac{1}{4}\sqrt{c}(x-ct)\right]+\cot^2\left[\frac{1}{4}\sqrt{c}(x-ct)\right]\right)\right),\quad c>0 \tag{4.33}$$

Altıncı durum aşağıdaki çözümü verir;

$$u_{11}(x,t)=\frac{c}{8}\left(2-\left(\tanh^2\left[\frac{1}{4}\sqrt{c}(x-ct)\right]+\coth^2\left[\frac{1}{4}\sqrt{c}(x-ct)\right]\right)\right),\quad c>0 \tag{4.34}$$

ve periyodik çözüm

$$u_{12}(x,t)=\frac{c}{8}\left(2+\left(\tan^2\left[\frac{1}{4}\sqrt{-c}(x-ct)\right]-\cot^2\left[\frac{1}{4}\sqrt{-c}(x-ct)\right]\right)\right),\quad c>0 \tag{4.35}$$

genelleştirilmiş tanh yöntemini kullanarak altı çift çözüm elde edilmiştir.

4.2.3 Fisher Denklemi

Fisher denklemi reaksiyon ve yayılma arasındaki etkileşimin sürecini tanımlar ve

$$u-u_{xx}-u(1-u)=0 \tag{4.36}$$

şeklindeki bu denklem kimyasal kinetiklerde ve bir boyutlu yerdeki nüfusun lineer olmayan gelişimi gibi problemleri içeren nüfus dinamiğinde, bir nükleer reaksiyonda nötron nüfusunda kullanılır.

Dalga değişkeni $\xi = x - ct$ kullanarak (4.36) denklem,

$$-cu'-u''-u(1-u)=0, \tag{4.37}$$

ADD' e dönüşür, bu denklemde u'' ve u^2 dengelenirse,

$$m+2=2m\,, \tag{4.38}$$

olduğundan,

$$m=2 \text{ bulunur.} \tag{4.39}$$

Genelleştirilmiş tanh yöntemi (4.1) sonlu açılımı kullanılırsa,

$$u(\xi)=a_0+a_1Y+a_2Y^2+\frac{b_1}{Y}+\frac{b_2}{Y^2}. \tag{4.40}$$

olur. Bu çözümü (4.40) denkleminde yerine yazar, Y' nin artan kuvvetlerinin katsayılarını bir araya toplarsak, a_0, a_1, a_2, b_1, b_2 ve μ için aşağıdaki cebirsel denklem sistemini elde ederiz. Bu sistemi çözerek üç farklı çözüm kümeleri elde edilir:

(i) Birinci durum:

$$a_0=\frac{1}{4},\qquad a_1=-\frac{1}{2},\qquad a_2=\frac{1}{4},\qquad b_1=b_2=0,\qquad c=\frac{5}{\sqrt{6}},$$

$$\mu=\frac{1}{2\sqrt{6}}. \tag{4.41}$$

(ii) İkinci durum:

$$a_0=\frac{1}{4},\qquad a_1=a_2=0,\qquad b_1=-\frac{1}{2},\qquad b_2=\frac{1}{4},\qquad c=\frac{5}{\sqrt{6}},$$

$$\mu=\frac{1}{2\sqrt{6}}. \tag{4.42}$$

(iii) Üçüncü durum:

$$a_0=\frac{3}{8},\ a_1=-\frac{1}{4},\ a_2=\frac{1}{16},\ b_1=-\frac{1}{4},\ b_2=\frac{1}{16},\ c=\frac{5}{\sqrt{6}},\ \mu=\frac{1}{4\sqrt{6}}. \tag{4.43}$$

Birinci durum;

$$u_1(x,t)=\frac{1}{4}\left(1-\tanh^2\left[\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(x-\frac{5}{\sqrt{6}}t\right)\right]\right)^2. \tag{4.44}$$

İkinci durum;

$$u_2(x,t)=\frac{1}{4}\left(1-\coth^2\left[\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(x-\frac{5}{\sqrt{6}}t\right)\right]\right)^2. \tag{4.45}$$

ve üçüncü durum;

$$u_3(x,t)=\frac{1}{16}\left(6-4\tanh\left[\frac{1}{4\sqrt{6}}\left(x-\frac{5}{\sqrt{6}}t\right)\right]+\tanh^2\left[\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(x-\frac{5}{\sqrt{6}}t\right)\right]\right)$$
$$+\frac{1}{16}\left(-4\coth\left[\frac{1}{4\sqrt{6}}\left(x-\frac{5}{\sqrt{6}}t\right)\right]+\coth^2\left[\frac{1}{2\sqrt{6}}\left(x-\frac{5}{\sqrt{6}}t\right)\right]\right), \tag{4.46}$$

çözümlerini verir.

4.2.4. Burger-Fisher Denklemi

Şimdi aşağıdaki Burger-Fisher denklemini ele alalım.

$$u_t+uu_x+u_{xx}+u(1-u)=0. \tag{4.47}$$

Bu denkleme $\xi=x-ct$ dalga dönüşümünü uygularsak,

$$-cu'+uu'+u''+u(1-u)=0, \tag{4.48}$$

ADD elde edilir. Bu denklemde uu' ile u'' dengelenirse,

$$m+2=2m+1, \tag{4.49}$$

olduğundan,

$$m=1 \text{ dir.} \tag{4.50}$$

Böylece genelleştirilmiş tanh yöntemine göre,

$$u(\xi)=a_0+a_1Y+\frac{b_1}{Y}, \tag{4.51}$$

açılımı yazılır. (4.51) açılımı (4.48) denkleminde yerine konulursa, önceki gibi üç durum elde edilir.

(i) Birinci durum:

$$a_0 = \frac{1}{2}, \qquad a_1 = \frac{1}{2}, \qquad b_1 = 0, \qquad c = \frac{5}{2}, \qquad \mu = \frac{1}{4}. \tag{4.52}$$

(ii) İkinci durum:

$$a_0 = \frac{1}{2}, \qquad a_1 = 0, \qquad b_1 = \frac{1}{2}, \qquad c = \frac{5}{2}, \qquad \mu = \frac{1}{4}. \tag{4.53}$$

(iii) Üçüncü durum:

$$a_0 = \frac{1}{2}, \qquad a_1 = \frac{1}{4}, \qquad b_1 = \frac{1}{4}, \qquad c = \frac{5}{2}, \qquad \mu = \frac{1}{8}. \tag{4.54}$$

Bu durumlar aşağıdaki kinks çözümlerini verir;

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}\left(1 + \tanh\left[\frac{1}{4}\left(x - \frac{5}{2}t\right)\right]\right), \tag{4.55}$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2}\left(1 + \coth\left[\frac{1}{4}\left(x - \frac{5}{2}t\right)\right]\right), \tag{4.56}$$

$$u_3(x,t) = \frac{1}{4}\left(2 + \tanh\left[\frac{1}{8}\left(x - \frac{5}{2}t\right)\right] + \coth\left[\frac{1}{8}\left(x - \frac{5}{2}t\right)\right]\right). \tag{4.57}$$

4.2.5 Huxley Denklemi

Huxley denklemini aşağıdaki gibi ele alalım,

$$u_t - au_{xx} - u(k - u'')(u^n - 1) = 0, \qquad \text{n>1}. \tag{4.58}$$

Bu denklem nörofizikte sinir çoğalması ve akışkan kristallerde duvar çoğalması için kullanılır. Dalga değişkeni $\xi = x - ct$ kullanırsak,

$$-cu' - au'' - (k+1)u^{n+1} + u^{2n+1} + ku = 0, \tag{4.59}$$

ADD elde edilir. Bu eşitlikte u'' ile u^{2n+1} dengelenirse;

$$m+2=(2n+1)m, \tag{4.60}$$

olduğundan,

$$m=\frac{1}{n}\text{dir.} \tag{4.61}$$

Kapalı formda bir çözüm elde etmek için m bir tamsayı olmalıdır. Bu yüzden,

$$u(x,t)=v^{\frac{1}{n}} \tag{4.62}$$

dönüşümü kullanılır.

Ve sonuç olarak;

$$-cnvv'-anvv''-a(1-n)(v')^2-(k+1)n^2v^3+n^2v^4+kn^2v^2=0, \tag{4.63}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde, vv'' ile v^4 dengelenirse

$$m=1$$

bulunur.

Sonuçta genelleştirilmiş tanh yöntemine göre,

$$v(\xi)=a_0+a_1Y+\frac{b_1}{Y}, \tag{4.64}$$

çözümü bulunur. Böylece aşağıdaki çözüm kümeleri bulunur,

(i) Birinci durum:

$$a_0=\frac{1}{2},\qquad a_1=\pm\frac{1}{2},\qquad b_1=0,\qquad c=\mp\gamma,\qquad \mu=\frac{n}{2\sqrt{a(n+1)}}. \tag{4.65}$$

(ii) İkinci durum:

$$a_0 = \frac{1}{2}, \qquad a_1 = 0, \qquad b_1 = \pm\frac{1}{2}, \qquad c = \mp\gamma, \qquad \mu = \frac{n}{2\sqrt{a(n+1)}}. \tag{4.66}$$

(iii) Üçüncü durum:

$$a_0 = \frac{1}{2}, \qquad a_1 = \pm\frac{1}{4}, \qquad b_1 = \pm\frac{1}{4}, \qquad c = \mp\gamma, \qquad \mu = \frac{n}{2\sqrt{a(n+1)}}. \tag{4.67}$$

(iv) Dördüncü durum:

$$a_0 = \frac{k}{2}, \qquad a_1 = \pm\frac{k}{2}, \qquad b_1 = 0, \qquad c = \mp\lambda, \qquad \mu = \frac{kn}{2\sqrt{a(n+1)}}. \tag{4.68}$$

(v) Beşinci durum:

$$a_0 = \frac{k}{2}, \qquad a_1 = 0, \qquad b_1 = \pm\frac{k}{2}, \qquad c = \mp\lambda, \qquad \mu = \frac{kn}{2\sqrt{a(n+1)}}. \tag{4.69}$$

(vi) Altıncı durum:

$$a_0 = \frac{k}{2}, \qquad a_1 = \pm\frac{k}{4}, \qquad b_1 = \pm\frac{k}{4}, \qquad c = \mp\lambda, \qquad \mu = \mp\frac{kn}{4\sqrt{a(n+1)}}, \tag{4.70}$$

Burada;

$$\begin{aligned} \gamma &= (k(n+1)-1)\sqrt{\frac{a}{n+1}}, \\ \lambda &= (n-k+1)\sqrt{\frac{a}{n+1}}. \end{aligned} \tag{4.71}$$

$u = v^{\frac{1}{n}}$ dir. Buna bağlı olarak ilk üç durum,

$$u_1(x,t) = \left\{\frac{1}{2}\left(1 \pm \tanh\left[\frac{n}{2\sqrt{a(n+1)}}(x \mp \gamma t)\right]\right)\right\}^{\frac{1}{n}}, \tag{4.72}$$

$$u_2(x,t)=\left\{\frac{1}{2}\left(1\pm\coth\left[\frac{n}{2\sqrt{a(n+1)}}(x\mp\gamma t)\right]\right)\right\}^{\frac{1}{n}}, \tag{4.73}$$

ve

$$u_3(x,t)=\left\{\frac{1}{4}\left(2\pm\tanh\left[\frac{n}{4\sqrt{a(n+1)}}(x\mp\gamma t)\right]\pm\coth\left[\frac{n}{4\sqrt{a(n+1)}}(x\mp\gamma t)\right]\right)\right\}^{\frac{1}{n}}, \tag{4.74}$$

kinks çözümlerini verir. Son üç durum;

$$u_4(x,t)=\left\{\frac{k}{2}\left(1\pm\tanh\left[\frac{kn}{2\sqrt{a(n+1)}}(x\mp\gamma t)\right]\right)\right\}^{\frac{1}{n}}, \tag{4.75}$$

$$u_5(x,t)=\left\{\frac{k}{2}\left(1\pm\coth\left[\frac{kn}{2\sqrt{a(n+1)}}(x\mp\gamma t)\right]\right)\right\}^{\frac{1}{n}} \tag{4.76}$$

ve

$$u_6(x,t)=\left\{\frac{k}{4}\left(2\pm\tanh\left[\frac{kn}{4\sqrt{a(n+1)}}(x\mp\gamma t)\right]\pm\coth\left[\frac{kn}{4\sqrt{a(n+1)}}(x\mp\gamma t)\right]\right)\right\}^{\frac{1}{n}}, \tag{4.77}$$

çözümlerini verir.

4.2.6 Lineer Olmayan Reaksiyon-Yayılma Denklemleri:

Lineer olmayan reaksiyon-yayılma denklemi birçok formda bulunur. Bu bölümde bu reaksiyon- yayılma denklemlerinden ikisi üzerine yoğunlaşacağız. Bunlar;

$$u_t-u^2{}_{xx}-u(1-u)=0 \tag{4.78}$$

ve

$$u_t-u^3{}_{xx}-u(1-u^2)=0, \tag{4.79}$$

denklemleridir.

(i) Birinci tip

Dalga değişkenini $\xi = x - ct$ kullanırsak,

$$-cu' - \left(u^2\right)'' - u(1-u) = 0, \tag{4.80}$$

ADD elde edilir veya denk olarak;

$$-cu' - 2uu'' - 2(u')^2 - u + u^2 = 0, \tag{4.81}$$

yazılabilir. Bu denklemde, uu'' ile u' dengelenirse,

$$2m + 2 = m + 1, \tag{4.82}$$

$$m = -1$$

bulunur. (4.83)

Wazwaz' göre, alternatif bir seri açılımı yazılabilir,

$$u(\xi) = \frac{1}{a_0 + a_1 Y} = \frac{A}{1 + aY} \tag{4.84}$$

$x \to -\infty$ gittikçe artan soliter bir çözüm elde edilir.

Daha çok çözüm elde etmek için, genelleştirilmiş tanh yönteminde,

$$u(\xi) = \frac{1}{a_0 + a_1 Y + \frac{b_1}{Y}} = \frac{A}{1 + aY + \frac{b}{Y}}, \tag{4.85}$$

yazılabilir. Bu durumda (4.85) denklemi (4.81) denkleminde yerine yazılırsa ve Y' nin artan kuvvetlerinin katsayılarını toplarsak ve oluşan sistemi çözersek aşağıdaki çözümleri elde ederiz:

(i) Birinci durum:

$$A = 2, \qquad a = \pm 1, \qquad b = 0, \qquad c = \mp 1, \qquad \mu = \frac{1}{4}. \tag{4.86}$$

(ii) İkinci durum:

$$A = 2, \qquad a = 0, \qquad b = \pm 1, \; c = \mp 1, \qquad \mu = \frac{1}{4}. \tag{4.87}$$

(iii) Üçüncü durum:

$$A = 2, \qquad a = \pm\frac{1}{2}, \qquad b = \pm\frac{1}{2}, \qquad c = \mp 1, \qquad \mu = \frac{1}{8}. \tag{4.88}$$

Bu sonuçların ışığında,

$$u_1(x,t) = \frac{2}{1 \pm \tanh\left[\frac{1}{4}(x \pm t)\right]}. \tag{4.89}$$

$$u_2(x,t) = \frac{2}{1 \pm \coth\left[\frac{1}{4}(x \pm t)\right]} \tag{4.90}$$

ve

$$u_3(x,t) = \frac{2}{1 \pm \frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{8}(x \pm t)\right] \pm \frac{1}{2}\coth\left[\frac{1}{8}(x \pm t)\right]}, \tag{4.91}$$

üç çift soliter çözüm elde ederiz.

(ii) İkinci tip

Dalga değişkeni $\xi = x - ct$ kullanarak (4.85) denklemi,

$$-cu' - \left(u^3\right)'' - u\left(1 - u^2\right) = 0, \tag{4.92}$$

ADD dönüştürülür veya denk olarak;

$$-cu' - 3u^2u'' - 6u(u')^2 - u + u^3 = 0, \tag{4.93}$$

yazılabilir. Bu denklemde, u^2u'' ile u' dengelenirse

$$3m+2=m+1, \tag{4.94}$$

$$m=-\frac{1}{2} \tag{4.95}$$

bulunur.

Genelleştirilmiş tanh yöntemine göre,

$$u(\xi)=\left(\frac{1}{a_0+a_1Y+\frac{b_1}{Y}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{A}{1+aY+\frac{b}{Y}}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.96}$$

çözümü bulunur.

(4.96) denklemini (4.93) denkleminde yerine yazar, Y' nin artan kuvvetlerinin katsayılarını bir araya toplarsak ve oluşan sistemi çözersek,

(i) Birinci durum:

$$A=2, \qquad a=\pm 1, \qquad b=0, \qquad c=\mp 1, \qquad \mu=\frac{1}{3}. \tag{4.97}$$

(ii) İkinci durum:

$$A=2, \qquad a=0, \qquad b=\pm 1,\ \ c=\mp 1, \qquad \mu=\frac{1}{3}. \tag{4.98}$$

(iii) Üçüncü durum:

$$A=2, \qquad a=\pm\frac{1}{2}, \qquad b=\pm\frac{1}{2}, \qquad c=\mp 1, \qquad \mu=\frac{1}{6}, \tag{4.99}$$

çözümlerini elde ederiz. Bu sonuçların ışığında,

$$u_1(x,t)=\left(\frac{2}{1\pm\tanh\left[\frac{1}{3}(x\pm t)\right]}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (4.100)$$

$$u_2(x,t)=\left(\frac{2}{1\pm\coth\left[\frac{1}{3}(x\pm t)\right]}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (4.101)$$

ve

$$u_3(x,t)=\left(\frac{2}{1\pm\frac{1}{2}\tanh\left[\frac{1}{6}(x\pm t)\right]\pm\frac{1}{2}\coth\frac{1}{6}(x\pm t)}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (4.102)$$

üç çift soliter çözüm elde ederiz.

4.2.7 Hirota-Satsuma-KdV Denklem Sistemi

İlk olarak birleştirilmiş Hirota-Satsuma-KdV denklemini ele alalım [4],

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{4}u_{xxx}+3uu_x-6vv_x, \\ v_t &= -\frac{1}{2}v_{xxx}-3uv_x, \end{aligned} \qquad (4.103)$$

$\xi = x-\beta t$ dalga değişkenini kullanarak (4.103) denklemi,

$$\begin{aligned} -\beta U' &= \frac{1}{4}U'''+3UU'-6VV'=0, \\ -\beta V' &= -\frac{1}{2}V'''-3UV'=0, \end{aligned} \qquad (4.104)$$

ADD dönüştürülür.

(4.104) denkleminde U''' terimini UU' ile ve U''' terimini VV' ile dengelersek;

$$\begin{aligned} &m+3=2m+1, \\ &m+3=2n+1, \end{aligned} \tag{4.105}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} &m=2, \\ &n=2. \end{aligned} \tag{4.106}$$

elde edilir.

Genelleştirilmiş tanh yöntemi (4.1) sonlu açılımını kullanırsak;

$$\begin{aligned} &U(\xi)=S(Y)=a_0+a_1Y+a_2Y^2+\frac{b_1}{Y}+\frac{b_2}{Y^2}, \\ &V(\xi)=Q(Y)=c_0+c_1Y+c_2Y^2+\frac{d_1}{Y}+\frac{d_2}{Y^2}, \end{aligned} \tag{4.107}$$

(4.107) denklemlerini (4.104) denklem sistemlerinde yerine koyar, Y'nin artan kuvvetlerini eşitlersek, $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2, d_1$ ve d_2 için cebirsel denklem sistemini elde ederiz. Bu sistem çözülürse on tane çözüm kümesi bulunur.

(i) Birinci durum:

$$a_0=\frac{\beta+1}{3},\quad b_2=-1,\quad d_1=\sqrt{\frac{1-2\beta}{3}},\quad a_1=a_2=b_1=0,\quad c_0=c_1=c_2=d_2=0. \tag{4.108}$$

(ii) İkinci durum:

$$a_0=\frac{\beta+1}{3},\quad a_2=-1,\ c_1=\sqrt{\frac{1-2\beta}{3}},\ a_1=b_1=b_2=0,\quad c_0=c_2=d_1=d_2=0. \tag{4.109}$$

(iii) Üçüncü durum:

$$a_0 = \frac{\beta+4}{3},\ c_1 = \sqrt{-\frac{2\beta+3}{3}},\ d_1 = -\sqrt{-\frac{2\beta+2}{3}},\ a_1 = b_1 = c_0 = c_2 = d_2 = 0,$$

$$a_2 = -1,\ b_2 = -1. \tag{4.110}$$

(iv) Dördüncü durum:

$$a_0 = \frac{\beta-2}{3},\ c_1 = \sqrt{\frac{4-2\beta}{3}},\ d_1 = \sqrt{\frac{4-2\beta}{3}},\ a_1 = b_1 = c_0 = c_2 = d_2 = 0,\ a_2 = -1,\ b_2 = -1. \tag{4.111}$$

(v) Beşinci durum:

$$a_0 = \frac{\beta+4}{3},\ c_0 = -\frac{2\beta+2}{3},\ a_1 = a_2 = b_1 = c_1 = c_2 = d_1 = 0,\ b_2 = -2,\ d_2 = 1. \tag{4.112}$$

(vi) Altıncı durum:

$$a_0 = \frac{\beta+4}{3},\ c_0 = \frac{2\beta+2}{3},\ a_1 = a_2 = b_1 = c_1 = c_2 = d_1 = 0,\ b_2 = -2,\ d_2 = -1. \tag{4.113}$$

(vii) Yedinci durum:

$$a_0 = \frac{\beta+4}{3},\ c_0 = -\frac{2\beta+2}{3},\ a_1 = b_1 = b_2 = c_1 = d_1 = d_2 = 0,\ a_2 = -2,\ c_2 = 1. \tag{4.114}$$

(viii) Sekizinci durum:

$$a_0 = \frac{\beta+4}{3},\ c_0 = \frac{2\beta+2}{3},\ a_1 = b_1 = b_2 = c_1 = d_1 = d_2 = 0,\ a_2 = -2,\ c_2 = -1. \tag{4.115}$$

(ix) Dokuzuncu durum:

$$a_0 = \frac{\beta+4}{3},\ c_0 = -\frac{2\beta+2}{3},\ a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0,\ a_2 = b_2 = -2,\ c_2 = d_2 = 1. \tag{4.116}$$

(x) Onuncu durum:

$$a_0 = \frac{\beta+4}{3},\ c_0 = \frac{2\beta+2}{3},\ a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0,\ a_2 = b_2 = -2,\ c_2 = d_2 = -1. \tag{4.117}$$

Bunların sonucunda,

$$u_1 = \frac{\beta+1}{3} - \coth^2(x-\beta t),$$
$$v_1 = \sqrt{\frac{1-2\beta}{3}}\coth(x-\beta t), \tag{4.118}$$

$$u_2 = \frac{\beta+1}{3} - \tanh^2(x-\beta t),$$
$$v_2 = \sqrt{\frac{1-2\beta}{3}}\tanh(x-\beta t), \tag{4.119}$$

$$u_3 = \frac{\beta+4}{3} - \tanh^2(x-\beta t) - \coth^2(x-\beta t),$$
$$v_3 = \sqrt{-\frac{\beta+2}{3}}\tanh(x-\beta t) - \sqrt{-\frac{2\beta+2}{3}}\coth(x-\beta t), \tag{4.120}$$

$$u_4 = \frac{\beta-2}{3} - \tanh^2(x-\beta t) - \coth^2(x-\beta t),$$
$$v_4 = \sqrt{\frac{4-2\beta}{3}}\tanh(x-\beta t) + \sqrt{\frac{4-2\beta}{3}}\coth(x-\beta t), \tag{4.121}$$

$$u_5 = \frac{\beta+4}{3} - 2\coth^2(x-\beta t),$$
$$v_5 = -\frac{2\beta+2}{3} + \coth^2(x-\beta t), \tag{4.122}$$

$$u_6 = \frac{\beta+4}{3} - 2\coth^2(x-\beta t),$$
$$v_6 = \frac{2\beta+2}{3} - \coth^2(x-\beta t), \tag{4.123}$$

$$u_7 = \frac{\beta+3}{3} - 2\tanh^2(x-\beta t),$$
$$v_7 = -\frac{2\beta+2}{3} + \tanh^2(x-\beta t), \quad (4.124)$$

$$u_8 = \frac{\beta+4}{3} - 2\tanh^2(x-\beta t),$$
$$v_8 = \frac{2\beta+2}{3} - \tanh^2(x-\beta t), \quad (4.125)$$

$$u_9 = \frac{\beta+4}{3} - 2\tanh^2(x-\beta t) - 2\coth^2(x-\beta t),$$
$$v_9 = -\frac{2\beta+2}{3} + \tanh^2(x-\beta t) + \coth^2(x-\beta t), \quad (4.126)$$

$$u_{10} = \frac{\beta+4}{3} - 2\tanh^2(x-\beta t) - 2\coth^2(x-\beta t),$$
$$v_{10} = \frac{2\beta+2}{3} - \tanh^2(x-\beta t) - \coth^2(x-\beta t), \quad (4.127)$$

soliton ve kinks çözümlerini elde ederiz.

4.2.8 Drinfeld-Sokolov Denklem Sistemi

Şimdi de Drinfeld-Sokolov denklem sistemini inceleyelim [4];

$$u_t + \left(v^2\right)_x = 0,$$
$$v_t - av_{xxx} + 3bu_x v + 3kuv_x = 0. \quad (4.128)$$

$\xi = x - \beta t$ dalga değişkenini kullanarak (4.128) denklem sistemi,

$$-\beta U' + \left(V^2\right)' = 0,$$
$$\beta V' + aV''' - 3bU'V - 3kUV' = 0, \quad (4.129)$$

ADD' e dönüştürülür. Sistemdeki ilk denklemin integralini alırsak ve integral sabitini sıfır kabul edersek,

$$\beta U = V^2, \quad (4.130)$$

buluruz.

(4.130) denklemi (4.129) denkleminin ikinci denkleminde yerine konulursa ve integrali alınırsa,

$$\beta^2 V - (2b+k)V^3 + a\beta V'' = 0, \tag{4.131}$$

bulunur.

(4.129) denkleminde V'' ile V^3 dengelenirse,

$$\begin{aligned} &n+4=3n, \\ &m=2n, \end{aligned} \tag{4.132}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} &m=2, \\ &n=1, \end{aligned} \tag{4.133}$$

bulunur.

Genelleştirilmiş tanh yöntemine göre (4.1) sonlu açılımı kullanılırsa;

$$\begin{aligned} &U(\xi)=S(Y)=a_0+a_1Y+a_2Y^2+\frac{b_1}{Y}+\frac{b_2}{Y^2}, \\ &V(\xi)=Q(Y)=c_0+c_1Y+\frac{d_1}{Y}, \end{aligned} \tag{4.134}$$

elde edilir.

(4.134) denklemleri (4.129) denklem sisteminde yerine yazar, Y' nin artan kuvvetlerini eşitlersek, $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c_0, c_1, d_1$ ve β için cebirsel denklem sistemini elde ederiz. Bu sistemi çözerek dört durum elde edilir.

(i) Birinci durum:

$$a_0=a_1=a_2=b_1=c_0=c_1=0,\ b_2=\frac{2a}{2b+k},\ d_1=\frac{2a}{\sqrt{2b+k}},\ \beta=2a. \tag{4.135}$$

(ii) İkinci durum:

$$a_0 = a_1 = b_1 = b_2 = c_0 = d_1 = 0,\ a_2 = \frac{2a}{2b+k},\ c_1 = \frac{2a}{\sqrt{2b+k}},\ \beta = 2a. \tag{4.136}$$

(iii) Üçüncü durum:

$$a_0 = -\frac{4a}{2b+k},\ a_2 = \frac{2a}{2b+k},\ b_2 = \frac{2a}{2b+k},\ c_1 = 2a\sqrt{\frac{-2}{2b+k}},\ a_1 = b_1 = c_0 = 0,\ \beta = -4a. \tag{4.137}$$

(iv) Dördüncü durum:

$$\begin{gathered} a_0 = \frac{4a}{2b+k},\ a_2 = \frac{2a}{2b+k},\ b_2 = \frac{2a}{2b+k},\ c_1 = 4a\sqrt{\frac{1}{2b+k}},\ d_1 = 4a\sqrt{\frac{1}{2b+k}}, \\ a_1 = b_1 = c_0 = 0,\ \beta = 8a. \end{gathered} \tag{4.138}$$

Bunların sonucunda,

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2a}{2b+k}\coth^2(x-2at), \\ v_1 &= \frac{2a}{\sqrt{2b+k}}\coth(x-2at), \end{aligned} \tag{4.139}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{2a}{2b+k}\tanh^2(x-2at), \\ v_2 &= \frac{2a}{\sqrt{2b+k}}\tanh(x-2at), \end{aligned} \tag{4.140}$$

$$\begin{aligned} u_3 &= -\frac{4a}{2b+k} + \frac{2a}{2b+k}\tanh^2(x+4at) + \frac{2a}{2b+k}\coth^2(x+4at), \\ v_3 &= \frac{2a\sqrt{-2}}{\sqrt{2b+k}}\tanh(x+4at) + \frac{2a\sqrt{-2}}{\sqrt{2b+k}}\coth(x+4at), \end{aligned} \tag{4.141}$$

$$u_4 = \frac{4a}{2b+k} + \frac{2a}{2b+k}\tanh^2(x-8at) + \frac{2a}{2b+k}\coth^2(x-8at),$$
$$v_4 = \frac{4a}{\sqrt{2b+k}}\tanh(x-8at) + \frac{4a}{\sqrt{2b+k}}\coth(x-8at), \tag{4.142}$$

soliton ve kinks çözümlerini elde ederiz

Genelleştirilmiş tanh yöntemi kullanılarak dört çift çözümün elde edildiği açıktır. Halbuki tanh yöntemi ile iki çift çözüm elde edilmiştir [30].

4.2.9 (2+1)-Boyutlu Konopelchenko-Dubrovsky Denklem Sistemi

KDD sisteminin genel formu aşağıdaki gibidir [4],

$$u_y = v_x,$$
$$u_t - u_{xxx} - 6buu_x + \frac{3}{2}a^2u^2u_x - 3v_y + 3au_xv = 0, \tag{4.143}$$

Burada a ve b reel parametrelerdir. Dalga değişkeni $\xi = (x + y - \beta t)$ kullanılarak (4.143) denklemi,

$$-\beta U' - U''' - 3b(U^2)' + \frac{1}{2}a^2(U^3)' - 3V' + 3aU'V = 0,$$
$$U' = V', \tag{4.144}$$

ADD' e dönüştürülür. İkinci denklemin integrali alınırsa ve integrasyon sabiti sıfır kabul edilirse,

$$U = V\,. \tag{4.145}$$

bulunur.

(4.145) denklemi (4.143) denklem sisteminin ilk denkleminde yerine konulursa ve integral alınırsa;

$$(\beta+3)U + \frac{3}{2}(2b-a)U^2 - \frac{1}{2}a^2U^3 + U'' = 0, \tag{4.146}$$

elde edilir.

Bu denklemde, U'' ile U^3 dengelenirse;

$$m + 2 = 3m, \tag{4.147}$$

$$m = 1, \tag{4.148}$$

elde edilir.

Genelleştirilmiş tanh yöntemine göre (4.1) sonlu açılımı kullanılırsa;

$$U(\xi) = S(Y) = a_0 + a_1 Y + \frac{b_1}{Y}. \tag{4.149}$$

(4.149) denklemini (4.144) denkleminde yerine yazılır, Y' nin artan kuvvetleri eşitlenirse, a_0, a_1, b_1, μ ve β için cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemi çözerek onbir tane çözüm kümesi bulunur.

(i) Birinci durum:

$$a_0 = 0\ a_1 = \pm\frac{2}{a},\ b_1 = 0,\ \beta = -1,\ a = 2b. \tag{4.150}$$

(ii) İkinci durum:

$$a_0 = \frac{2}{a},\ a_1 = \pm\frac{2}{a},\ b_1 = 0,\ \beta = -7,\ 3a = 2b. \tag{4.151}$$

(iii) Üçüncü durum:

$$a_0 = -\frac{2}{a},\ a_1 = \pm\frac{2}{a},\ b_1 = 0,\ \beta = -7,\ a = -2b. \tag{4.152}$$

(iv) Dördüncü durum:

$$a_0 = 0, a_1 = \pm\frac{2}{a},\ b_1 = \pm\frac{2}{a},\ \beta = 5,\ a = 2b. \tag{4.153}$$

(v) Beşinci durum:

$$a_0 = 0\,, a_1 = \pm\frac{2}{a},\; b_1 = \pm\frac{2}{a},\; \beta = -7,\; a = 2b. \tag{4.154}$$

(vi) Altıncı durum:

$$a_0 = 0\,, a_1 = 0\,, b_1 = \pm\frac{2}{a},\; \beta = -1,\; a = 2b. \tag{4.155}$$

(vii) Yedinci durum:

$$a_0 = \frac{2}{a},\; a_1 = 0\,, b_1 = \pm\frac{2}{a},\; \beta = -7,\; 3a = 2b. \tag{4.156}$$

(viii) Sekizinci durum:

$$a_0 = -\frac{2}{a},\; a_1 = 0\,, b_1 = \pm\frac{2}{a},\; \beta = -7,\; a = -2b. \tag{4.157}$$

(ix) Dokuzuncu durum:

$$a_0 = \frac{4}{a},\; a_1 = \pm\frac{2}{a},\; b_1 = \pm\frac{2}{a},\; \beta = -19,\; 5a = 2b. \tag{4.158}$$

(x) Onuncu durum:

$$a_0 = -\frac{4}{a},\; a_1 = \pm\frac{2}{a},\; b_1 = \pm\frac{2}{a},\; \beta = -19,\; 3a = -2b. \tag{4.159}$$

(xi) Onbirinci durum:

$$a_0 = \pm\frac{2\sqrt{2}i}{a},\; a_1 = \pm\frac{2}{a},\; b_1 = \pm\frac{2}{a},\; \beta = 5,\; \left(1 \pm 2\sqrt{2}i\right)a = 2b. \tag{4.160}$$

Bunun sonucunda,

$a = 2b$ için;

$$u_{1,2} = \pm\frac{2}{a}\tanh[x+y+t],$$
$$v_{1,2} = \pm\frac{2}{a}\tanh[x+y+t], \tag{4.161}$$

$3a = 2b$ için;

$$u_{3,4} = \frac{2}{a} \pm \frac{2}{a}\tanh[x+y+7t],$$
$$v_{3,4} = \frac{2}{a} \pm \frac{2}{a}\tanh[x+y+7t] \tag{4.162}$$

$a = -2b$ için;

$$u_{5,6} = -\frac{2}{a} \pm \frac{2}{a}\tanh[x+y+7t],$$
$$v_{5,6} = -\frac{2}{a} \pm \frac{2}{a}\tanh[x+y+7t], \tag{4.163}$$

$a = 2b$ için;

$$u_{7,8} = \pm\frac{2}{a}\tanh[x+y-5t] \pm \frac{2}{a}\coth[x+y-5t],$$
$$v_{7,8} = \pm\frac{2}{a}\tanh[x+y-5t] \pm \frac{2}{a}\coth[x+y-5t], \tag{4.164}$$

$a = 2b$ için;

$$u_{9,10} = \pm\frac{2}{a}\tanh[x+y+7t] \pm \frac{2}{a}\coth[x+y+7t],$$
$$v_{9,10} = \pm\frac{2}{a}\tanh[x+y+7t] \pm \frac{2}{a}\coth[x+y+7t], \tag{4.165}$$

$a = 2b$ için;

$$u_{11,12} = \pm\frac{2}{a}\coth[x+y+t],$$
$$v_{11,12} = \pm\frac{2}{a}\coth[x+y+t], \tag{4.166}$$

$3a = 2b$ için;

$$\begin{aligned} u_{13,14} &= \frac{2}{a} \pm \frac{2}{a}\coth[x + y + 7t], \\ v_{13,14} &= \frac{2}{a} \pm \frac{2}{a}\coth[x + y + 7t], \end{aligned} \tag{4.167}$$

$a = -2b$ için;

$$\begin{aligned} u_{15,16} &= -\frac{2}{a} \pm \frac{2}{a}\coth[x + y + 7t], \\ v_{15,16} &= -\frac{2}{a} \pm \frac{2}{a}\coth[x + y + 7t], \end{aligned} \tag{4.168}$$

$5a = 2b$ için;

$$\begin{aligned} u_{17,18} &= \frac{4}{a} \pm \frac{2}{a}\tanh[x + y + 19t] \pm \frac{2}{a}\coth[x + y + 19t], \\ v_{17,18} &= \frac{4}{a} \pm \frac{2}{a}\tanh[x + y + 19t] \pm \frac{2}{a}\coth[x + y + 19t], \end{aligned} \tag{4.169}$$

$3a = -2b$ için;

$$\begin{aligned} u_{19,20} &= -\frac{4}{a} \pm \frac{2}{a}\tanh[x + y + 19t] \pm \frac{2}{a}\coth[x + y + 19t], \\ v_{19,20} &= -\frac{4}{a} \pm \frac{2}{a}\tanh[x + y + 19t] \pm \frac{2}{a}\coth[x + y + 19t], \end{aligned} \tag{4.170}$$

$(1 \pm 2\sqrt{2}i)a = 2b$ için;

$$\begin{aligned} u_{21,22} &= \pm\frac{2\sqrt{2}i}{a} \pm \frac{2}{a}\tanh[x + y - 5t] \pm \frac{2}{a}\coth[x + y - 5t], \\ v_{19,20} &= \pm\frac{2\sqrt{2}i}{a} \pm \frac{2}{a}\tanh[x + y - 5t] \pm \frac{2}{a}\coth[x + y - 5t], \end{aligned} \tag{4.171}$$

kinks çözümleri elde edilir. Tanh yöntemi ile dört çift çözümün [34]'de elde edildiği açıktır. Halbuki genelleştirilmiş tanh yöntemi ile on dört çift çözüm bulunmuştur. Ayrıca, son birkaç yılda, genelleştirilmiş tanh yöntemi ile birçok makale daha yayınlanmıştır [32,33,41].

BÖLÜM 5

5.1 SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde lineer olmayan oluşum denklemlerinin tam çözümlerini bulmak için üç farklı yöntem verilmiştir. Bu yöntemler arasında genelleştirilmiş tanh yöntemi diğerlerine göre daha fazla kullanışlıdır. Sinüs-Kosinüs yöntemi ise verilen denklemlerin soliton ve periyodik çözümlerini bulmak için kullanılır.

Bu üç yönteminde kullanışlılığı ve uygulanabilirliği son yıllarda yayınlanan makalelerde gösterilmiştir [36]. Bu yöntemler diğer lineer olmayan denklemlere de uygulanabilir.

Ayrıca son zamanlarda geliştirilen diğer tam çözüm yöntemlerine bakılabilir ve elde ettiğimiz çözümler ile bu çözümler karşılaştırılabilir.

Bu tez çalışmasında ki tüm hesaplamalar MAPLE ve MATHEMATİCA paket programları ile yapılmıştır.

Örneğin; KdV denkleminin tanh yöntemi ile elde edilen iki çözümü vardır [25]. Sinüs-Kosinüs yöntemi ile elde edilen (3.16)-(3.19) denklemleri ile verilen dört çözümüne karşılık, genelleştirilmiş tanh yöntemi ile çözümünden elde edilen (4.24)-(4.35) denklemleri ile verilen oniki çözüm elde edilmiştir.

Ayrıca Drinfeld-Sokolov denklem sisteminin tanh yöntemi ile çözümünden elde edilen (2.43)-(2.50) ile verilen soliton, periyodik ve kompleks çözümler, Sinüs-Kosinüs yöntemi ile çözümünden elde edilen (3.86)-(3.93) ile verilen dört periyodik ve soliton çözümler, genelleştirilmiş tanh yöntemi ile çözümünden elde edilen (4.139)-(4.142) ile verilen dört soliton çözüm elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

[1]. Abdou, M. A., 2007, The extended F-expansion method and its application for a class of nonlinear evolution equations, Chaos, Solitons and Fractals, **31**, 95-104.

[2]. Ablowitz, M. J. ve Segur, 1981, H., Solitons and inverse scattering transform, SIAM, Philadelphia.

[3]. Ablowitz, M. J. ve Clarkson, P. A., 1991, Solitons, nonlinear evolutions and iverse scatttering transform, Cambridge, Cambridge University Press.

[4]. Bekir, A., 2007, Applications of the extended tanh method for coupled nonlinear evolution equations, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, baskıda.

[5]. Dai, C. Q. ve Zhang, J. F., 2006, Jacobian elliptic function method for nonlinear differential-difference equations, Chaos, Solitons and Fractals, **27**, 1042-1049.

[6]. Fan, E. ve Zhang, H., 1998, A note on the homogeneous balance method. Physics Letters A., **246**, 403-406.

[7]. Fan, E., 2000, Two new applications of the homogeneous balance method. Physics Letters A., **265**, 353-357.

[8]. Fan, E. ve Zhang, J., 2002, Applications of the Jacobi elliptic function method to special-type nonlinear equations, Physics Letters A., **305**, 383-392.

[9]. Goktas, U. ve Hereman, E., 1997, Symbolic computation of conserved denities for systems of nonlinear evolution equations. J Symb Comput, **24**(5): 591-622.

[10]. Ismail, M. S. ve Taha, A., 1998, A numerial study of compactions, Mathematics and Computers in Simulation, **47**, 519-530.

[11]. Koca, K., 2001, Kısmi türevli denklemler, Kırıkkale

[12]. Liu, S., Fu, Z., Liu, S. ve Zhao, Q., 2001, Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations, Physics Letters A., **289**, 69.

[13]. Malfliet, W., 1992, Solitary wave solutions of nonlinear wave equations. Am J Phys, **60**(7), 650-4.

[14]. Malfliet, W. ve Hereman, W., 1996, The tanh method-I: Exact solitions of nonlinear evolution and wave equations. Physica Scripta, **54**, 569-575

[15]. Özer, M. N. ve Eser, D., 2000, Diferensiyel denklemler ve uygulamaları, Birlik ofset Eskişehir.

KAYNAKLAR (Devamı)

[16]. Ren, Y. J. ve Zhang, H. Q., 2006, A generalized F-expansion method to find abun-dant families of Jacobi elliptic function solutions of the (2+1)-dimensional Nizhnik-Novikov-Veselov equation, Chaos, Solitons and Fractals, **27**, 959-979.

[17]. Rosenau, P. ve Hyman, J. M., 1993, Solitons with finite wavelengths, Phys. Rev. Lett., **70** (5), 564-567.

[18]. Rosenau, P., 2000, Compact and noncompact dispersive structures, Physics Letters A., **275** (3), 193-203.

[19]. Senthilvelan, M., 2001, On the extended applications of homogenous balance method, Applied Mathematics and Computation, **123**, 381-388.

[20]. Wadati, M., 1972, The exact solution of the modified Kortweg-de Vries equation, J. Phys. Soc. Japan, **32**, 1681-1687.

[21]. Wadati, M., 1973, The modified Kortweg-de Vries equation, J. Phys. Soc. Japan, **34**, 1289-1296.

[22]. Wadati, M., 2001, Introduction to solitons, Pramana: Journal of Physics, **57** (5/6), 841-847.

[23]. Wazwaz, A. M., 2001, Construction of soliton solutions and periodic solutions of the Boussinesq equation by the modified decomposition method, Chaos, Solitons and Fractals, **12** (8), 1549-1556.

[24]. Wazwaz, A. M., 2002, Partial Differential Equations: Methods and Applications, Balkema, The Netherlands.

[25]. Wazwaz, A. M., 2004, The tanh method for travelling wave solutions of nonlinear equations, Applied Mathematics and Computation, **154**, 713-723

[26]. Wazwaz, A. M., 2004, A Sine-Cosine method for handling nonlinear wave equations. Mathematical and Computer Modelling, **40**, 499-508.

[27]. Wazwaz, A. M., 2005, The tanh method: exact solutions of the Sine-Gordon and the Sinh-Gordon equations, Applied Mathematics and Computation, **167**, 1196-1210

[28]. Wazwaz A. M., 2005, The tanh method for generalized forms of nonlinear heat conduction and Burgers-Fisher equation, Applied Mathematics and Computation, **169**, 321-338

[29]. Wazwaz A. M., 2005, The tanh method for a reliable treatment of the $K(n,n)$ and the $KP(n,n)$ equations and its variants. Applied Mathematics and Computation, **170**, 361-379

KAYNAKLAR (Devamı)

[30]. Wazwaz, A. M., 2006, Exact and explicit travelling wave solutions fort he nonlinear Drinfeld-Sokolov system. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **11**, 311-325.

[31]. Wazwaz, A. M., 2006, The extended tanh method for abundant solitary wave solutions of nonlinear wave equations Applied Mathematics and Computation, baskıda.

[32]. Wazwaz, A. M., 2007, The extended tanh method for Zakharov-Kuznetsov equation, modified Zakharov-Kuznetsov equation and its generalized form, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, baskıda.

[33]. Wazwaz, A. M., The extended tanh method for new soliton solutions for many forms of the fifth-order KdV equations, Applied Mathematics and Computation, baskıda.

[34]. Wazwaz A. M., New kinks and solitons solutions to the (2+1)-dimensional Konopelchenko-Dubrovsky equation, Math. and Comput. Modelling, **45,** 473-479.

[35]. Yusufoğlu, E., Bekir, A. ve Bilgil, H., 2006, Lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin tanh yöntemi ile çözümü, 19. Ulusal matematik sempozyumu, Kütahya.

[36]. Yusufoğlu, E. ve Bekir, A., 2006, Periodic and solitary wave solutions of Kawahara and modified Kawahara equations by using Sine-Cosine method, Chaos, Solitons and Fractals, baskıda

[37]. Yusufoğlu, E. ve Bekir, A., 2006, Solitons and periodic solutions of coupled nonlinear evolution equations by using the sine-cosine method, International Journal of Computer Mathematics, **83** (12), 915-924.

[38]. Yusufoğlu, E. ve Bekir, A., 2007, On the extended tanh method Applications of nonlinear equations, İnternational Journal of Nonlinear Science, **4**, (1), 10-16

[39]. Yusufoğlu, E., Bekir, A. ve Alp, M., 2007, The tanh and the sine-cosine methods for exact solutions of the MBBM and the Vakhnenko equations, Chaos, Solitons and Fractals, baskıda.

[40]. Zhang, J. L., Wang, M. L., Wang, Y. M. ve Fang Z. D., 2006, The improved F-expansion method and its applications, Phys. Lett A., **350**, 103.

[41]. Zhao, X. Q., Zhi, H. Y. ve Zhang, H. Q., 2006, Improved Jacobi-function method with symbolic computation to construct new double-periodic solutions fort he generalized to system, Chaos, Solitons and Fractals, **28**, 112-126.

[42]. Zwillinger, D., 1997, Handbook of differential equations, 3 rd editon, Boston, MA: Academic Press.