AĞIRLIKLI LORENTZ UZAYLARINDA
GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖTELEME OPERATÖRÜ İLE
ELDE EDİLEN RİESZ DÖNÜŞÜMLERİ VE
KLASİK OPERATÖRLERİN SINIRLILIĞI

Ahmet COŞKUN

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Eylül - 2007

AĞIRLIKLI LORENTZ UZAYLARINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖTELEME OPERATÖRÜ İLE ELDE EDİLEN RİESZ DÖNÜŞÜMLERİ VE KLASİK OPERATÖRLERİN SINIRLILIĞI

Hazırlayan
Ahmet COŞKUN

Dumlupınar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman
Yrd. Doç. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

Eylül - 2007

KABUL ve ONAY SAYFASI

Ahmet COŞKUN' un YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı Ağırlıklı Lorentz Uzaylarında Genelleştirilmiş Öteleme Operatörü İle Elde Edilen Riesz Dönüşümleri ve Klasik Operatörlerin Sınırlılığı başlıklı bu çalışması jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

…../…../…..

Üye	:	Prof.Dr.Yusuf YAYLI
Üye	:	Yrd.Doç.Dr.Elçin YUSUFOĞLU
Üye	:	Yrd.Doç.Dr.İsmail EKİNCİOĞLU (Danışman)

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …../…../….. gün ve ……….. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr.M.Sabri ÖZYURT

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

AĞIRLIKLI LORENTZ UZAYLARINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖTELEME OPERATÖRÜ İLE ELDE EDİLEN RİESZ DÖNÜŞÜMLERİ VE KLASİK OPERATÖRLERİN SINIRLILIĞI

Ahmet COŞKUN
Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi 2007
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, temel kavramlara ve bazı teoremlere ayrıldı. İkinci bölümünde, genelleştirilmiş öteleme operatörü verildi. Üçüncü bölümde klasik Riesz dönüşümleri ile genelleştirilmiş öteleme operatörü ele alındı. Dördüncü bölümde ağırlıklı Lorentz uzayları ve bu uzaylarda klasik Riesz dönüşümünün sınırlılığı verildi. Son bölümde ağırlıklı Lorentz uzaylarında bazı operatörlerin sınırlılığı incelendi.

Anahtar Kelimeler: Ağırlıklı Lorentz uzayı, Lorentz uzaylar, Riesz Dönüşümler.

RIESZ TRANSFORMATIONS
GENERATED WITH GENERALIZED SHIFT OPERATOR AND
THE BOUNDEDNESS OF CLASSICAL OPERATORS
IN WEIGHTED LORENTZ SPACE

Ahmet COŞKUN
Department of Mathematics, MSc. Thesis 2007
Thesis Supervisor: Assoc.Prof.Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

SUMMARY

This thesis consist of five chapters. The first chapter denoted to the fundemental concepts and main theorems. In the second chapter denoted generalized shift operators. Than, given clasical Riesz transform with generalized operators. In the fourth chapter considered weigted Lorentz spaces and boundedness of classical Riesz transform in weighted Lorentz spaces. At last chapter we shown boundedness of some operators in weighted Lorentz space.

Keywords: Lorentz spaces, Riesz transform, Weighted Lorentz spaces.

TEŞEKKÜR

Matematik alanında bilgi sahibi olmamı sağlayan değerli hocalarıma, tez çalışmamda her türlü desteği sağlayan Yrd. Doç. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU’ na, bilime ve insana verdiği değerden dolayı TÜBİTAK (Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu)’ na, tez arkadaşlarım Mehmet Karakelek ve Şahin Sağlam’ a, ayrıca bugüne kadar maddi manevi hiçbir desteği esirgemeyen, bana devamlı destek olan aileme ve biricik eşime;

sonsuz teşekkürler…

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklamalar**
$\mathbb{R}^n$	Öklid uzayı
S^{n-1}	Birim küre
A_p	Ağırlıklı Muckenhoupt sınıfı
w	Ağırlık fonksiyonu
p.v.	Esas değer
L_{pw}	Ağırlıklı uzay
T	Singüler integral operatörü
$L_p(\mathbb{R}_n)$	Lebesque uzayı
$W_p(T_p)$	Singüler operatörler için ağırlık uzayı
$W_p(M_p)$	Maksimal operatörler için ağırlık uzayı
C^∞	Sonsuz mertebeden sürekli fonksiyonlar
$W_p(g_\Omega)$	g_Ω için L^p ağırlıklarınının sınıfı
$\Gamma(n)$	Gamma fonksiyonu
R_j	Riesz dönüşümü
$L_{loc}(\mathbb{R}^n)$	Lokal integrallenebilir fonksiyonların sınıfı
B_t	Bessel operatörü
$T_y f(x)$	Adi öteleme operatörü
$\mathbb{R}_n^+$	n- boyutlu yarı uzayında genelleştirilmiş öteleme
$\Delta = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} + B_{x_n}$	Laplace –Bessel operatörü
F_B	Fourier-Bessel dönüşümü
$K_j(x)$	Riesz dönüşümünün çekirdekleri
$\lambda_f(\sigma)$	Dağılım fonksiyonu
$f^*(t)$	Azalan yeniden düzenleme fonksiyonu

GİRİŞ

Bu çalışmada, ağırlıklı Lorentz uzaylarında genelleştirilmiş öteleme ile elde edilen Riesz dönüşümleri ve bu uzayda bazı klasik operatörlerin sınırlılığı incelenmiştir. Bunun için önce,

$$T_x^y f(x) = \frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(\upsilon+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi} f(x'-y', \sqrt{x_n^2+y_n^2-2x_ny_n\cos\theta})\sin^{2\upsilon}\theta d\theta$$

genelleştirilmiş öteleme operatörü verilmiştir. Bu operatör $\mathbb{R}^n$ de son değişkene göre elde edilen genelleşmiş öteleme operatörüdür. Daha sonra bu operatöre bağlı

$$\left(R_j f\right)(x) = c_\upsilon\left(n,\upsilon\right)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\substack{0<\varepsilon<|x| \\ 0<x_n<\infty}} \frac{x_j}{|x|^{n+2\upsilon}} T_x^y f\left(x\right) x_n^{2\upsilon} dx,$$

Riesz dönüşümü verilmiştir. Burada $c_\upsilon(n,\upsilon) = 2^{\frac{n+2\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{n+2\nu}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}$ dir.

Bu çalışmada verilen Riesz dönüşümü son bir değişkene göre elde edilen Riesz dönüşümüdür. Daha sonra ağırlıklı Lorentz uzaylar tanımlanmıştır. (X,υ), ölçü uzayı olsun. $1\le p\le\infty$ ve $1\le s\le\infty$ için $L_\upsilon^{ps} = L^{ps}(\mathrm{X}, d\upsilon)$ Lorentz uzayı, $\|f\|_{L^{ps}(\mathrm{X},d\upsilon)}<\infty$ olduğunda tüm υ ölçülebilir f fonksiyonlarının uzayıdır. Burada, eğer $1\le p\le\infty$ ve $1\le s<\infty$ ise

$$\|f\|_{L^{ps}(\mathrm{X},d\upsilon)} = \left(s\int_0^\infty\left(\upsilon\left\{x\in\mathrm{X};\left|f(x)\right|>r\right\}\right)^{s/p} r^{s-1}dr\right)^{1/s}$$

ve eğer $1\le p<\infty$, $s=\infty$ ise o zaman $\|f\|_{L^{ps}(\mathrm{X},d\upsilon)} = \sup\limits_{r>0} r\left(\left\{x\in\mathrm{X};\left|f(x)\right|>r\right\}\right)^{1/p}$ dir. Eğer $1<p<\infty$ ve $1\le s\le\infty$ veya $p=s=1$, $p=s=\infty$ ise bu durumda $L^{ps}(\mathrm{X},d\upsilon)$, $\|\cdot\|_{L^{ps}(\mathrm{X},d\upsilon)}$ normuna denk normlu bir Banach Uzayı olur. $\mathrm{X}=\mathbb{R}^n$ ve υ ölçümünün Lebesgue ölçümüne göre mutlak sürekli olduğunu kabul edeceğiz. Yani $d\upsilon=\omega(x)dx$' dir. $L_\omega^{ps}=(\mathbb{R}^n,\omega dx)$ uzayına ω ağırlıklı Lorentz uzayı diyelim. Bu durumda klasik Riesz döşümü denilen yani adi ötelemeye bağlı,

$$R_j f(x) = c_n\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|y|\ge\varepsilon} f(x-y)\frac{y_j}{|y|^{n+1}}dy \qquad \left(j=1,2,3,...,n\right)$$

Riesz dönüşümünün, kenarları koordinat eksenlerine paralel olan tüm $Q\subset\mathbb{R}^n$ küpler olmak üzere L_ω^{ps} uzayından L_ω^{ps} uzayına sınırlı olduğunu veren teoremler verilmiştir.

Son kısımda ağırlıklı Lorentz uzaylarında Hilbert operatörü ve kesirli maksimal operatörün sınırlılığı incelenmiştir.

1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm, sonraki bölümlerde geçen bazı temel teorem, tanım ve kısa bilgilerden oluşmaktadır.

Tanım 1.1 (Öklid Uzayı): $\mathbb{R}^n = \{x : x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., n\}$ biçiminde tanımlanan uzaya Öklid uzayı denir.

Tanım 1.2 : $\mathbb{R}^n$ uzayının her kompakt alt cümlesi üzerinde integrallenebilen fonksiyona lokal integrallenebilirdir denir ve bu fonksiyonların cümlesi $L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

Tanım1.3 (Yarıçap Fonksiyonu): Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu için, $f(x) = f(|x|)$ ise $f(x)$ fonksiyonuna yarıçap (radial) fonksiyonu denir [1].

Tanım 1.4 (Karekteristik Fonksiyon): Bir A cümlesinin karakteristik fonksiyonu

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve χ_A ile gösterilir.

Tanım 1.5 (Gamma Fonksiyonu): $\Gamma(n)$ sembolü ile gösterilen ve $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ bağıntısıyla tanımlanan fonksiyona Gamma fonksiyonu denir.

Tanım 1.6 (Destek - Support): Bir f fonksiyonunun desteği, $Suppf = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ olarak tanımlanır.

Tanım 1.7 : Görüntü kümesi sonlu elemandan meydana gelen bir φ fonksiyonuna basit fonksiyon denir. $\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{A_k}$, $\int_E \chi_A dx = |A|$ ve $\int_E \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{A_k} dx = \sum_{k=1}^{n} c_k |A_k|$ biçimindedir.

Tanım 1.8 : $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul her $\alpha \in \mathbb{R}$ için,

$$f^{-1}((\alpha, +\infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \text{ olmasıdır.}$$

Tanım 1.9 (Ağırlık Fonksiyonu): Hemen hemen her yerde lokal integrallenebilen ω, $\omega : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir.

Tanım 1.10 (Hölder Eşitsizliği): $f \in L^p$, $g \in L^q$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere,

$$\left|\int f(x)g(x)dx\right| \leq \| f\|_p \|g\|_q$$

eşitsizliğine Hölder eşitsizliği denir.

Tanım 1.11 (Minkowsky Eşitsizliği): $f \in L^p$, $g \in L^q$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere,

$$\| f+g\|_p \leq \| f\|_p + \|g\|_q$$

eşitsizliğine Minkowsky eşitsizliği denir.

Tanım 1.12 : $1 \leq p < \infty$ olmak üzere; $L^p = L^p(\mathbb{R}^n) = \{ f : \int \left| f(x)\right|^p dx < \infty\}$ uzayına p. mertebeden Lebesque anlamında integrallenebilen fonksiyon uzayı denir. $L^p = L^p(\mathbb{R}^n)$ normu da,

$$\| f\|_p = \left(\int_{R^n} | f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty \quad , 1 \leq p < \infty$$

şeklinde tanımlanır [2].

Tanım 1.13: $\mathbb{R}_n^+ = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_n \geq 0 \right\}$ olsun. $1 \leq p \leq \infty$ ve $\upsilon > 0$ olmak üzere $L_{p\upsilon}$ ağırlıklı uzayı,

$$L_{p\upsilon} = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}^n} | f(x)|^p \, x_n^{2\upsilon} dx < \infty \right\}$$

ve normu,

$$\| f\|_{p\upsilon} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} | f(x)|^p x_n^{2\upsilon} dx \right)^{1/p} < \infty$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.14: Lokal integrallenebilen pozitif w fonksiyonları

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)dx \right)^{1/p} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-p'/p} dx \right)^{1/p'} < \infty \qquad (A_p)$$

eşitsizliğini sağlarsa bu sınıfa (A_p) ağırlık sınıfı denir.

Tanım 1.15 (Adi Öteleme): $T_y f\left(x\right) = f(x-y)$ ile gösterilen, x noktasını $x-y$ noktasına öteleyen operatöre $\mathbb{R}$ ' de adi öteleme denir. Adi öteleme $\left(-\infty,\infty\right)$ aralığında tanımlı olup $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dir.

Tanım 1.16 ($\mathbb{R}^+$ Ötelemesi): $T_y f\left(x\right) = f(x-y)$ adi öteleme $x', y' \in \mathbb{R}_{n-1}$ ve

$$c_\upsilon = \frac{\Gamma\left(\upsilon+1\right)}{\Gamma\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$ olmak üzere $\mathbb{R}^+$ ötelemesi,

$$T_x^y f(x) = \frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(\upsilon+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^\pi f(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta})\sin^{2\upsilon}\theta d\theta$$

şeklindedir ve genelleştirilmiş öteleme operatörü;

$$T_x^y f(x) = \frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(\upsilon+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^\pi f(x'-y',\sqrt{x_n^2+y_n^2-2x_ny_n\cos\theta})\sin^{2\upsilon}\theta d\theta$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 1.17 (Klasik Riesz Dönüşümü): $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda,

$$R_j f(x) = c_n \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|y|\geq\varepsilon} f(x-y)\frac{y_j}{|y|^{n+1}}dy \qquad \left(j=1,2,3,...,n\right)$$

biçiminde tanımlanan dönüşüme f fonksiyonunun klasik Riesz dönüşümü denir.

Burada $c_n = \pi^{\frac{-(n+1)}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})$ dir [3].

Tanım 1.18 : T_x^y genelleştirilmiş öteleme operatörü olsun. Bu durumda $f(x)\in Z_+$ ise,

$$\left(R_j f\right)\left(x\right) = c_\upsilon\left(n,\upsilon\right)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\substack{0<\varepsilon<|x| \\ 0<x_n<\infty}}\frac{x_j}{\left|x\right|^{n+2\upsilon}}T_x^y f\left(x\right)x_n^{2\upsilon}dx$$

$$c_\upsilon(n,\upsilon) = 2^{\frac{n+2\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{n+2\nu}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{-1},$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme f fonksiyonunun genelleştirilmiş öteleme ile elde edilen Riesz dönüşümü denir.

Tanım 1.19 : $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ bir ölçü uzayı olsun. $\lambda_f : [0,\infty) \to [0,\infty]$ olmak üzere ;

$$\lambda_f(\sigma) = \lambda\left(\left\{x \in \Omega : \left|f(x)\right| > \sigma\right\}\right), \sigma \geq 0$$

şeklinde tanımlanan ifadeye f nin dağılım fonksiyonu adı verilir.

Tanım 1.20 : f fonksiyonun azalan yeniden düzenlenmesi $f^* : [0,\infty) \to [0,\infty]$ fonksiyonu $f^*(t) = \inf\left\{\sigma \geq 0 : \lambda_f(\sigma) \leq t\right\}$, $t > 0$ şeklinde tanımlanır. Burada $\inf \varnothing = \infty$ kabul edilir.

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖTELEME OPERATÖRÜ

M. Levitan bir çalışmasında $(0,\infty)$ üst yarı uzayında $\mathbb{R}^+$ ötelemesinin var olduğunu göstermiştir [4]. Daha sonra Bessel diferensiyel operatörleri ile ilişkisini inceleyerek bu ötelemenin $(0,\infty)$ aralığındaki noktaları yine bu aralıktaki noktalara dönüştüğünü göstermiştir. Kipriyanov, $\mathbb{R}_n^+$ n- boyutlu yarı uzayında genelleştirilmiş ötelemeyi tanımlamıştır. Çalışmalarında, bu ötelemenin $(n-1)$ değişkene göre adi ve n. değişkene göre $\mathbb{R}^+$ daki öteleme olarak ele almış, daha sonra Fourier–Bessel operatörü ile ilişkisini incelemiştir [5]. $\mathbb{R}^+$ ve $\mathbb{R}$ ötelemeleri bu bölümde verilmiştir.

2.1. Adi Öteleme

Tanım 2.1.1 : $T_y f(x) = f(x+y)$ ile gösterilen x nokrasını $x+y$ nokrasına öteleyen operatöre $\mathbb{R}$ de adi öteleme denir. Adi öteleme $(-\infty,\infty)$ aralığında tanımlıdır. Dolayısıyla $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dir. Bu şekildeki adi öteleme,

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \;,\quad u(x,y) = f(x)$$

başlangıç değer probleminin çözümünün değerlerine bağlıdır.

2.2. Genelleştirilmiş Öteleme

Şimdi $\mathbb{R}^+$ daki ötelemeyi inceleyelim. B_t Bessel operatörü olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathrm{B_x u} &= \mathrm{B_y u} \\ \mathrm{u(x,0)} &= \mathrm{f(x)} \\ \mathrm{u_y(x,0)} &= 0 \end{aligned}$$

başlangıç değer probleminin yani,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\upsilon+1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2\upsilon+1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.2.1}$$

denkleminin,

$$u\big|_{y=0} = f(x)\,,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü,

$$u(x,y)=T_x^y f(x)=\frac{\Gamma(2\upsilon+1)}{2^{2\upsilon-1}\Gamma^2(\upsilon+\frac{1}{2})}\int_0^{\pi} f(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta})\sin^{2\upsilon}\theta d\theta$$

şeklindedir. Bu formülde θ' yi $\pi-\theta$' ye dönüştürüp Γ fonksiyonlarına ait olan ,

$$\frac{\Gamma^2(a)}{\Gamma(2a)}=\frac{1}{2^{2a-1}}\frac{\Gamma(a)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(a+\frac{1}{2})}$$

formülünü kullanırsak bu durumda,

$$T_x^y f(x)=\frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(\upsilon+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi} f(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta})\sin^{2\upsilon}\theta d\theta$$

elde edilir. Bu öteleme $(0,\infty)$ aralığında tanımlıdır. Bu ötelemeye $\mathbb{R}^+$ daki öteleme denir. Bu ifade de $T_x^0 f(x)=f(x)$ olduğu aşikardır. Ayrıca eğer $f(x)$ fonksiyonunun sürekli türevi varsa bu durumda,

$$\frac{\partial}{\partial y}T_x^y f(x)\Big|_{y=0}=0 \tag{2.2.2}$$

dir. $f(x)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden sürekli türevi varsa bu durumda $T_x^y f(x)$, (2.2.1) denkleminin çözümüdür ve (2.2.2) başlangıç koşulları elde edilebilir.

Ayrıca $x=(x',x_n)$, $y=(y',y_n)$, $x,y\in R^n$, $x'=(x_1,x_2,...x_{n-1})$, $y'=(y_1,y_2,...y_{n-1})$ ve

$$\Delta=\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}+B_{x_n}$$

Laplace –Bessel operatörü olmak üzere,

$$\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}+\frac{2\upsilon+1}{x_n}\frac{\partial u}{\partial x_n}=\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\partial^2 u}{\partial y_l^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2}+\frac{2\upsilon+1}{y_n}\frac{\partial u}{\partial y_n}$$

denkleminin yukarıda verilen başlangıç koşulları altındaki çözümü,

$$T_x^y f(x)=\frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(\upsilon+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi} f(x'-y',\sqrt{x_n^2+y_n^2-2x_ny_n\cos\theta})\sin^{2\upsilon}\theta d\theta$$

şeklindedir. Bu operatöre genelleştirilmiş öteleme operatörü denir. Şimdi T^y operatörünün özelliklerini verelim. T^y operatörünün özellikleri adi ötelemenin özelliklerine benzerdir.

1. Lineerlik özelliği : $T_x^y\left\{af(x)+bg(x)\right\}=aT_x^y f(x)+bT_x^y g(x)$ dir. Bu eşitliği şu şekilde gösterebiliriz.

$$T_x^y\left\{af(x)+bg(x)\right\}=T_x^y\left\{(af+bg)(x)\right\}$$

$$=\frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(\upsilon+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi}(af+bg)\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right]\sin^{2\upsilon}\theta d\theta$$

$$=\frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(\upsilon+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\left\{\int_0^{\pi}af\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right]\right.$$

$$\left.+\int_0^{\pi}bg\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right]\right\}\sin^{2\upsilon}\theta d\theta$$

$$=\frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(\upsilon+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}a\int_0^{\pi}f\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right]\sin^{2\upsilon}\theta d\theta$$

$$+\frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(\upsilon+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}b\int_0^{\pi}g\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right]\sin^{2\upsilon}\theta d\theta$$

$$=aT_x^y f(x)+bT_x^y g(x)$$

bulunur.

2.Pozitiflik Özelliği : Eğer $f(x)\geq 0$ ise $T_x^y f(x)\geq 0$ dır.

$$T_x^y f(x)=\frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(\upsilon+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi}f\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right]\sin^{2\upsilon}\theta d\theta$$

ele alalım. $f\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right]\geq 0$ ve $\sin\theta$, $0\leq\theta\leq\pi$ aralığında pozitif olduğundan yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı da pozitiftir. O halde, $T_x^y f(x)\geq 0$ dir.

3. $T_x^y(1)=1$ dir.

$$T_x^y f(x)=\frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(\upsilon+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi}f\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right]\sin^{2\upsilon}\theta d\theta$$

eşitliğinde $f\left(x\right)=1$ alınırsa,

$$T_x^y(1) = \frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(\upsilon+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi}\sin^{2\upsilon}\theta d\theta$$

elde edilir,

$$\int_0^{\pi}\sin^{2\upsilon}\theta d\theta = \frac{\Gamma(\upsilon+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\upsilon+1)}$$

formülü de yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa,

$$T_x^y(1) = \frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(\upsilon+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}.\frac{\Gamma(\upsilon+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\upsilon+1)} = 1$$

sonucu elde edilir.

4. Eğer $x \geq a$, $f(x) \equiv 0$ ise bu durumda $|x-y| \geq a$ için $T_x^y f(x) \equiv 0$ olur.

5. T^y **operatörü süreklidir:** Eğer $f_n(x)$ fonksiyonlar dizisi her sonlu aralıkta $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsak ise, bu durumda iki değişkenli fonksiyonlar dizisi $T_x^y f_n(x)$ her bir sonlu bölgede $T_x^y f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar.

6. T^y **operatörü sınırlıdır:**

$$\left|T_x^y f(x)\right| = \left| \frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(\upsilon+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi} f\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right]\sin^{2\upsilon}\theta d\theta\right|$$

$$\leq \frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(\upsilon+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi}\left| f\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right]\right|\sin^{2\upsilon}\theta d\theta$$

$$\leq \sup_{x\geq 0}\frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(\upsilon+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi}\left| f\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right]\right|\sin^{2\upsilon}\theta d\theta$$

$$\leq \sup_{x\geq 0}\left|f(x)\right|\frac{\Gamma(\upsilon+1)}{\Gamma(\upsilon+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi}\sin^{2\upsilon}\theta d\theta$$

elde edilir. Buradan, $\left|T_x^y f(x)\right| \leq T_x^y \left|f(x)\right| \leq \sup_{x\geq 0}\left|f(x)\right|$ olur.

7. T^y **Operatörünün Yer Değiştirme Özelliği :** $T_x T_y f(x) = T_y T_x f(x)$ dir.

8. Değişme Özelliği : $T_x^y T_x^z f(x) = T_x^z T_x^y f(x)$ dir.

9. Eşlenik Özelliği : Eğer sürekli $f(x)$ fonksiyonu için $\int\limits_0^\infty x^{2p+1} \left| f(x) \right| dx < \infty$ ve $g(x)$, tüm $x \geq 0$ için sürekli sınırlı fonksiyon ise,

$$\int\limits_0^\infty T_x^y f(x).g(x) x^{2p+1} dx = \int\limits_0^\infty f(x) T_x^y g(x) x^{2p+1} dx$$

olur.

İspat : Kabul edelim ki $f(x)$ fonksiyonu sonlu bir aralıkta ikinci mertebeden türevlenebilir ise $f(x) = 0$, $g(x) = J_p(\sqrt{\lambda} x)$, $(\lambda \leq 0)$ dır.

$$K(y) = \int\limits_0^\infty T_x^y f(x) J_p(\sqrt{\lambda} x) x^{2p+1} dx$$

olsun. Şimdi $K(y)$ fonksiyonuna $B_x = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2p+1}{x}\frac{d}{dx}$ operatörünü uygulayalım. Bu durumda,

$$\int\limits_0^\infty B_x(T_x^y f(x)) g(x) x^{2p+1} dx = \int\limits_0^\infty \left[\frac{d^2}{dx^2} T_x^y f(x) + \frac{2p+1}{x}\frac{d}{dx} T_x^y f(x) \right] g(x) x^{2p+1} dx$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{d^2}{dx^2} T_x^y f(x) g(x) x^{2p+1} dx + \int\limits_0^\infty \frac{2p+1}{x}\frac{d}{dx} T_x^y f(x) g(x) x^{2p+1} dx$$

$$= I_1 + I_2$$

olur. Eşitliğin sağındaki birinci integrali hesaplayalım.

$$I_1 = \int\limits_0^\infty \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} T_x^y f(x) \right) g(x) x^{2p+1} dx$$

$$dv = \frac{\partial}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial x} T_x^y f(x) \right) dx \text{ ve } u = g(x) x^{2p+1}$$

olarak kısmi integrasyon uygulanırsa bu durumda,

$$I_1 = \frac{\partial}{\partial x} T_x^y f(x) g(x) x^{2p+1} \Big|_0^\infty - \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} T_x^y f(x) \frac{\partial}{\partial x} (g(x) x^{2p+1}) dx$$

$$= -\int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} T_x^y f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x} x^{2p+1} dx - \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} T_x^y f(x) g(x) \frac{2p+1}{x} x^{2p+1} dx$$

elde edilir. O halde,

$$I_1 + I_2 = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} T_x^y f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x} x^{2p+1} dx$$

olur. Buna kısmi integrasyon uygularsak sonuç olarak,

$$\int_0^\infty B_x (T_x^y f(x)) g(x) x^{2p+1} dx = \int_0^\infty T_x^y f(x) B_x g(x) x^{2p+1} dx$$

bulunur.

10. $T_x^{-y} f(x) = T_x^y f(x)$ dir.

11. $\int\limits_{R^n} T^y f(x) x_n^{2p} dx = \int\limits_{R^n} f(x) x_n^{2p} dx$ dir.

3. RİESZ DÖNÜŞÜMLERİ

3.1. Klasik Riesz Dönüşümleri

$\mathbb{R}^n$ de tanımlı bir f fonksiyonunun klasik Riesz dönüşümleri;

$$R_j f(x) = c_n \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|y| \geq \varepsilon} f(x-y) \frac{y_j}{|y|^{n+1}} dy, \qquad (j = 1,2,\ldots,n) \tag{3.1.1}$$

şeklinde tanımlanan dönüşümledir. $K_j(x) = \dfrac{\Omega_j(x)}{|x|^n}$ Riesz dönüşümü çekirdekleri olup burada,

$$\Omega_j(x) = c_n x_j |x|^{-1} \tag{3.1.2}$$

ve

$$c_n = \pi^{-(n+1)/2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \tag{3.1.3}$$

dir. Ayrıca $\Omega_j(x)$, her bir $j = 1,2,\ldots,n$ için sıfırıncı mertebeden homojen ve tek bir fonksiyon olup S üzerinde ortalama değeri sıfırdır. Fakat $x = 0$ noktasında süreksiz ve S üzerinde düzgündür. Burada her Ω_j, R_j ile çakışan bir çarpım operatörü biçiminde tanımlanır ki, bu operatörün sembolü,

$$\sigma_j = -\pi i c_n \int_{S^+} y'_j dy' \tag{3.1.4}$$

ile verilir. σ_j değerini hesaplamak için j sabit ve $y'_j = y' x_j$ alalım. $\mathbb{R}^n$ de herhangi bir $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormal bazı için $y' = \sum_{k=1}^{n} (y' e_k) e_k$ olduğundan $y'_j = \sum_{k=1}^{n} (y' e_k)(e_k x_j)$ yazılır.

Ayrıca $e_k = x'$ olduğunda,

$$y'_j = (y'x')x'j' + \sum_{k \neq j} c_k (y' e_k) \tag{3.1.5}$$

yazılır. Burada, $c_k = e_k x_j$ dir. (3.1.5) ifadesini $S^+(x)$ üzerinde integrallersek,

$$\sigma_j(x) = -\pi i c_n x'_j \int (x'y') dy' - \pi i c_n \sum_{k \neq j} c_k \int (y' e_k) dy'$$

elde edilir. Burada sağdaki birinci integral $\mathbb{R}^{n-1}$ de birim kürenin hacmi olan Ω_{n-1} değerine eşittir ve diğer integraller sıfırdır. Bu nedenle $n > 1$ için,

$$w_n = 2\pi^{n/2} \left(\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-1} \text{ ve } \Omega_n = \pi^{n/2} \left(\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)\right)^{-1}$$

olup (2.11) ifadesinden her $j = 1,2,\ldots,n$ için,

$$\sigma_j = -\pi i c_n x_j' \Omega_{n-1} = -ix_j' \tag{3.1.6}$$

olur. (3.1.6) ifasesinden, Hilbert dönüşümünün $\left(H^2 = -I\right)$ özelliğine benzer, bir özellik olarak Riesz dönüşümleri için de aşağıdaki sonuç çıkarılabilir. Yani I birim operatör olmak üzere $H^2 = -I$ dır.

Gerçekten her $f \in L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ fonksiyonu için elde edilen her $R_j f$, $L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ dedir ve $\left(R_j f\right)^{\wedge}\left(x\right) = -ix_j\left|x\right|^{-1}\hat{f}(x)$ ile $R_j^2 f = R_j\left(R_j f\right)$ eşitliklerinden,

$$\left(R_j^2 f\right)^{\wedge}(x) = -x_j^2\left|x\right|^{-2} \tag{3.1.7}$$

elde edilir. Böylece,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} R_j^2 f\right)^{\wedge}(x) = -\hat{f}(x) \tag{3.1.8}$$

olur ki (3.1.8) ifadesi $L^2\left(R^n\right)$ de $\sum R_j^2 = -1$ gibi yorumlanabilir. Ayrıca (3.1.6) ve Parseval teoreminden, $\sum_{j=1}^{n}\left\|R_j f\right\|_2^2 = \|f\|_2^2$ olur.

3.2. Genelleştirilmiş Öteleme Operatörleri İle Elde Edilen Riesz Dönüşümleri

Riesz dönüşümleri Singüler İntegraller teorisinde önemli bir yer teşkil eder. Klasik Riesz dönüşümleri,

$$\left(R_j f\right)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} c_n \int_{|y|\geq\varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(x-y)dy$$

incelendiğinde bu dönüşümün $f(x-y)$ adi ötelemeye bağlı olduğu görülmektedir. Ancak bu öteleme yerine başka bir öteleme tanımlanabilir mi ? problemi [6] incelemiş ve sonra [7] bu çalışmayı genelleştirerek Riesz-Bessel dönüşümlerini tanımlamıştır. Bu çalışmalarda ele alınan genelleştirilmiş öteleme (n-1) tane adi öteleme, bir tanesi $\mathbb{R}^+$ ötelemesi olmak üzere tanımlanan genelleştirilmiş ötelemeye bağlı Riesz-Bessel dönüşümleri tanımlanmıştır. Biz genelleştirilmiş öteleme operatörü ile elde edilen Riesz dönüşümünü yani,

$$c_{\upsilon}(n,\upsilon)=2^{\frac{n+2\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{n+2\nu}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{-1} \text{ olmak üzere,}$$

$$\left(R_j f\right)(x)=c_{\upsilon}\left(n,\upsilon\right)\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\substack{0<\varepsilon<|x| \\ 0<x_n<\infty}}\frac{x_j}{|x|^{n+2\upsilon}}T_x^y f\left(x\right)x_n^{2\upsilon}dx$$

dönüşümünün sınırlılığını inceleyeceğiz [8].

4. AĞIRLIKLI LORENTZ UZAYLAR

Tanım 4.1: $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lebesgue anlamında integrallenebilen bir fonksiyon ve $\lambda_f(\sigma) = \left(\left\{x : \left|f(x)\right| > \sigma\right\}\right)$ dağılım fonksiyonu olmak üzere $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$ aralığında f fonksiyonunun azalan rearrangementi $t > 0$ için $f^*(t) = \inf\left\{\sigma : \lambda_f(\sigma) \le t\right\}$ olsun. Buna göre w, $\mathbb{R}^+$ da bir ağırlık fonksiyon yani negatif olmayan lokal integrallenebilen bir fonksiyon ve $0 < p < \infty$ ise,

$$L^p(\mathbb{R}^n, w) = \left\{ f : \|f\|_{L^p(w)} \simeq \left(\int_0^\infty \left(f^*(t)\right)^p w(t)dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\} \tag{4.1}$$

fonksiyonların sınıfına $L^p(w)$ klasik Lorentz uzayı denir. Eğer $0 < p, q < \infty$ ise

$$L^{pq}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \|f\|_{L^{pq}(x)} = \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\} \tag{4.2}$$

fonksiyonlar uzayına ağırlıklı Lorentz uzayı denir. $q = \infty$ alınırsa

$$L_w^{p\infty}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \|f\|_{L_w^{p\infty}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f_w^*(t) < \infty \right\} \tag{4.3}$$

uzayına zayıf ağırlıklı Lorentz uzayı denir.

w, $\mathbb{R}^+$ uzayında ağırlıklı fonksiyon olsun. Yani $\mathbb{R}^+$ negatif olmayan lokal integrallenebilir fonksiyonlar olsun. w ağırlık fonksiyonu için, $W(r) = \int_0^r w(t)dt < \infty$, $0 \le r < \infty$ yazılır. $\|f\|_{L_x^p(w)} = \|f^*\|_{L^p(w)}$ olmasını dikkate alalım. Bunlar önceki tanımlamalardan ortaya çıkar. $0 < p, q < \infty$ için,

$$L_x^{pq}(w) = \left\{ f \in M(x) : \|f\|_{L_x^{pq}(w)} = \|f^*\|_{L^{pq}(w)} < \infty \right\}$$

olur.

(X, υ), pozitif ve σ-toplamsal ölçümlü bir uzay olsun. $1 \le p \le \infty$ ve $1 \le s \le \infty$ için $L_\upsilon^{ps} = L^{ps}(\mathrm{X}, d\upsilon)$ Lorentz uzayı, $\|f\|_{L^{ps}(\mathrm{X}, d\upsilon)} < \infty$ olduğunda tüm υ ölçülebilir f fonksiyonlarının uzayıdır. Burada, eğer $1 \le p \le \infty$ ve $1 \le s < \infty$ ise bu durumda,

$$\|f\|_{L^{ps}(X,d\upsilon)} = \left(s\int_0^{\infty} \left(\upsilon\{x \in X; |f(x)| > r\} \right)^{s/p} r^{s-1} dr \right)^{1/s}$$

olur, eğer $1 \le p < \infty$ ve $s = \infty$ ise,

$$\|f\|_{L^{ps}(X,d\upsilon)} = \sup_{r>0} r\left(\{x \in X; |f(x)| > r\} \right)^{1/p}$$

dir. Eğer $1 < p < \infty$ ve $1 \le s \le \infty$ ya da $p = s = 1$, $p = s = \infty$ ise bu durumda $L^{ps}(X, d\upsilon)$, $\|.\|_{L^{ps}(X,d\upsilon)}$ normuna denk bir normlu Banach Uzayı' dır.

$X = \mathbb{R}^n$ ve υ ölçümünün Lebesgue ölçümüne göre mutlak sürekli olduğunu kabul edeceğiz. Yani $d\upsilon = \omega(x)dx$ olarak alacağız.

$L_\omega^{ps} = (\mathbb{R}^n, \omega dx)$ uzayına ω ağırlıklı Lorentz uzayı diyelim. Bu durumda $\|\chi_E\|_{L_\omega^{ps}} = (\omega E)^{1/p}$ sonucu elde edilir. Ayrıca eğer $p = s$ ise bu durumda $L_\omega^{ps} \subset L^p(\omega)$ ağırlıklı uzaydır. p sabiti ve $s_2 \le s_1$ için $L_\omega^{ps_2} \subset L_\omega^{ps_1}$ elde edilir. Buradan $\|f\|_{L_\omega^{ps_1}} \le \|f\|_{L_\omega^{ps_2}}$ olur.

Lorentz uzaylar üzerinde aşağıdaki ifadeler verebiliriz [9,10].

Önerme 4.1: $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, $\frac{1}{s} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}$ olsun. Bu durumda her $f_1 \in L_w^{p_1 s_1}$ ve $f_2 \in L_\omega^{p_2 s_2}$ için,

$$\|f_1 f_2\|_{L_\omega^{ps}} \le c\|f_1\|_{L_\omega^{p_1 s_1}} \|f_2\|_{L_\omega^{p_2 s_2}} \tag{4.4}$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti vardır.

(4.4) eşitsizliği Lorentz uzaylarında Hölder eşitsizliğinin bir varyasyonudur.

Önerme 4.2: Her $f \in L_w^{ps}$ için,

$$c^{-1}\|f\|_{L_\omega^{ps}} \le \sup\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)h(y)\omega(y)dy \right| \le c\|f\|_{L_\omega^{ps}} \tag{4.5}$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti vardır. Burada supremum $L_\omega^{p_1 s_1}$ uzayında kapalı birim yuvar üzerinde alınmıştır. Eğer $s < \infty$ ise bu durumda, $L_\omega^{p_1 s_1}$, L_ω^{ps} uzayının duali olduğundan (4.5) eşitsizliği görülür. Eğer $s = \infty$ ise bu durumda (4.5) ifadesindeki birinci eşitsizlik yani,

$$c^{-1}\|f\|_{L_\omega^{ps}} \le \sup\left| \int_{R^n} f(y)h(y)\omega(y)dy \right|$$

eşitsizliği bir karakteristik fonksiyonun çarpımı olarak h fonksiyonunun uygun bir seçimiyle elde edilebilir. İkinci eşitsizlik ise (4.4) ifadesinden elde edilir.

Önerme 4.3: $1 \le p \le \infty$ ve ξ pozitif bir sabit olmak üzere $\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{Ej}(x) \le \xi$ olacak şekilde $\{E_j\}$, $\mathbb{R}^n$ in ölçülebilir alt kümelerinin bir dizisi olsun. Bu durumda her $f \in L_w^{ps}$ için,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\| \chi_{E_j} f \right\|_{L_\omega^{ps}}^{p} \le \xi \left\| f \right\|_{L_\omega^{ps}}^{p} \tag{4.6}$$

dir.

İspat: $\beta = \dfrac{p}{s} \ge 1$ olsun. Minkowsky eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\| \chi_{E_j} f \right\|_{L_\omega^{ps}}^{p} \right)^{1/p} &= \left\| s\int_0^{\infty} \left(\omega\left\{ x \in E_j ; \left| f(x) \right| > r \right\} \right)^{1/\beta} r^{s-1} dr \right\|_{\ell^\beta} \\
&\le s\int_0^{\infty} \left\| \left(\omega\left\{ x \in E_j ; \left| f(x) \right| > r \right\} \right)^{1/\beta} \right\|_{\ell^\beta} r^{s-1} dr \\
&= s\int_0^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \omega\left\{ x \in E_j ; \left| f(x) \right| > r \right\} \right)^{1/\beta} r^{s-1} dr \\
&\le s\int_0^{\infty} \left(\xi\omega\left\{ x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j ; \left| f(x) \right| > r \right\} \right)^{s/p} r^{s-1} dr \\
&= \xi^{s/p} \left\| f \right\|_{L_\omega^{ps}}^{s}
\end{aligned}$$

olur.

Tanım 4.2: Ya $1 < p < \infty$ ve $1 \le s \le \infty$ ya da $p = s = 1$ olsun. Bu durumda eğer,

$$\sup_Q \left\| \chi_Q \right\|_{L_\omega^{ps}} \left\| \chi_Q / \omega \right\|_{L_\omega^{p's'}} \left| Q \right|^{-1} < \infty \tag{4.7}$$

ise $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ ağırlık fonksiyonu A_{ps} sınıfına aittir. Burada supremum, koordinat eksenlerine paralel kenarlı tüm $Q \subset R^n$ küpleri üzerinde alınmıştır.

$$\int_Q \omega(x)dx \left(\int_Q \omega^{-1/(p-1)}(x)dx \right)^{p-1} = \left\| \chi_Q \right\|_{L_\omega^{pp}}^{p} \left\| \chi_Q \big/ \omega \right\|_{L_\omega^{P'P'}}^{P}$$

olduğunu görmek kolaydır. Yani A_{PP} sınıfı A_P sınıfıyla çakışır.

Önerme 4.4: $\omega \in A_{ps}$ olsun. Eğer, ya $p = p_1$, $1 \le s_1 \le s$ ya da $p < p_1$ ve $1 \le s_1 \le \infty$ ise bu durumda $\omega \in A_{p_1 s_1}$ olur.

İspat: $p = p_1$ ve $s_1 \le s$ olsun. Bu durumda $s_1' \ge s'$ olur ve buradan,

$\left\|\chi_Q / \omega\right\|_{L_\omega^{p's_1'}} \le \left\|\chi_Q / \omega\right\|_{L_\omega^{p's'}}$ olur. Bu $p = p_1$ ve $s_1 \le s$ için $A_{ps} \subset A_{ps_1}$ olduğunu gösterir. Şimdi $p < p_1$, $1 \le s_1 \le \infty$ ve $\omega \in A_{ps}$ olsun.

p_0, $\dfrac{1}{p_1'} = \dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{p_0}$ şeklinde tanımlayalım. (4.4) ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned}
\left\|\chi_Q\right\|_{L_\omega^{p_1\infty}} \left\|\chi_Q / \omega\right\|_{L_\omega^{p_1'1}} &\le c\left\|\chi_Q\right\|_{L_\omega^{p_1\infty}} \left\|\chi_Q\right\|_{L_\omega^{p_0 s}} \left\|\chi_Q / \omega\right\|_{L_\omega^{p's'}} \\
&\le c|Q|\left\|\chi_Q\right\|_{L_\omega^{p_1\infty}} \left\|\chi_Q\right\|_{L_\omega^{p_0 s}} \left\|\chi_Q\right\|_{L_\omega^{ps}}^{-1} \\
&= c|Q|(\omega Q)^{1/p_1 + 1/p_0 - 1/p} \\
&= c|Q|
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\omega \in A_{p\infty}$ olur ve ispatın ilk kısmında her $1 \le s_1 \le \infty$ için $w \in A_{p_1 s_1}$ elde edilir.

Önerme 4.5: Bir ağırlıklı ω fonksiyonunun A_{p_1} sınıfına ait olması için gerek ve yeter koşul; her Q küpleri ve her $E \subset Q$ ölçülebilir kümeleri için;

$$\frac{|E|}{|Q|} \le c_1 \left(\frac{\omega E}{\omega Q}\right)^{1/p} \tag{4.8}$$

olacak şekilde bir $c_1 > 0$ pozitif sayısının var olmasıdır.

İspat: $p > 1$, $\omega \in A_{p1}$ ve $E \subset Q$ olsun. Bu durumda (4.4) ifadesinden,

$$\begin{aligned}
|E| = \int_E \frac{\omega(x)}{\omega(x)} dx &\le c\left\|\chi_Q / \omega\right\|_{L_\omega^{p'\infty}} \left\|\chi_E\right\|_{L_\omega^{p1}} \\
&\le c_2 |Q| \frac{\left\|\chi_E\right\|_{L_\omega^{p1}}}{\left\|\chi_Q\right\|_{L_\omega^{p1}}} \\
&= c_2 |Q| \left(\frac{\omega E}{\omega Q}\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

elde edilebilir. Şimdi (4.8) eşitsizliği sağlansın ve $E = \left\{x \in Q; \omega(x) < 1/y\right\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
y\omega E &= \int_E y\omega(x) dx \\
&\le \int_E \frac{\omega(x)}{\omega(x)} dx
\end{aligned}$$

$$\leq |E|$$
$$\leq c_1 |Q| \left(\frac{\omega E}{\omega Q} \right)^{1/p}$$

olur. Eğer $p > 1$ ise, $wE \leq c_1^{p'} |Q|^{-p'} y^{-p'} (wQ)^{-p'/p}$ olur. Yani $w \in A_{p_1}$ dir. Eğer $p = 1$ ise bu durumda her $y < \|\chi_Q / \omega\|_{L_\omega^{\infty\infty}}$, $\omega E > 0$ için $y \leq c_3 \frac{|Q|}{\omega Q}$ elde edilir. Burada $\omega \in A_{11}$ diğer bir ifadeyle $\omega \in A_1$ dir. Önerme 4.4 ve 4.5 ' in her bir $\omega \in A_{ps}$ için dubbling şartını sağladığını görebiliriz. Her $Q \in R^n$ küpleri için $\omega(2Q) \leq c\omega Q$, olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti vardır. Burada $2Q$ ve Q; Q küpünün uzun iki kenarı ile çakışık bir küptür.

Önerme 4.6: A_p sınıfı A_{p1} sınıfının bir öz alt kümesidir.

Bunu görmek kolaydır. Çünkü önerme 4.5' ten $A_p \subset A_{P1}$ elde edilir. Diğer taraftan, $\omega(x) = |x|^{n(p-1)}$ fonksiyonu A_{p1} sınıfına aittir. Fakat A_p sınıfına ait değildir.

Önerme 4.7: $w \in A_{ps}$, $1 < p < \infty$, $1 < s \leq \infty$ olsun. Bu durumda $1 < p_1 < p$, $s_1 > 1$ ve $\omega \in A_{p_1 s_1}$ olacak şekilde p_1 ve s_1 mevcuttur.

Önerme 4.8: $1 < p < \infty$ ve $1 < s \leq \infty$ olsun. $\omega \in A_p$ olması için gerek ve yeter koşul bir w fonksiyonunun A_{ps} sınıfına ait olmasıdır.

Önerme 4.4 ve 4.7' den görülür ki, aslında $\omega \in A_{p_1 s_1}$ olacak biçimde $p_1 < p$, $1 \leq s_1 < \infty$ p_1 ve s_1 sayıları vardır. Önerme 4.4' ten ω fonksiyonu her $s_0 \in [1, \infty)$ için A_{ps_0} sınıfına aittir . Aynı zamanda $A_{pp} = A_p$ dir. Eğer $\omega \in A_p$ ise benzer bir yolla $\omega \in A_{ps}$ olduğu görülür.

Önerme 4.9: $\omega \in A_p$ olsun. Bu durumda her Q küpleri ve her β, $0 < \beta < 1$ değeri için,

$$\omega Q \leq \left(\frac{c}{1-\beta} \right)^p \omega \{ x \in Q; 1/\omega(x) > \beta |Q| / (\omega Q) \}$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti vardır.

İspat: $E = \{ x \in Q; 1/\omega(x) > \beta |Q| / (\omega Q) \}$ ve $\overline{E} = Q / E$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{|\bar{E}|}{\beta|Q|} = \frac{1}{\omega Q}\int_{\bar{E}} \frac{\omega Q}{\beta|Q|}dx \leq \frac{1}{\omega Q}\int_{\bar{E}} \omega(x)dx = \frac{\omega\bar{E}}{\omega Q} \leq 1$$

olur. Bundan dolayı,

$$|E| = |Q| - |\bar{E}| \geq (1-\beta)|Q|$$

olur. Önerme (4.5)' den

$$\frac{\omega E}{\omega Q} \geq \left(\frac{1}{c}\frac{|E|}{|Q|}\right)^p \geq \left(\frac{1-\beta}{c}\right)^p$$

elde edilir.

Önerme 4.10: $1 < p < \infty$, $1 \leq s \leq p$ ve $\omega \in A_{ps}$ olsun. Bu durumda her Q küpleri ve herhangi $\lambda \geq \left| \|Q\| / (\omega Q) \right|$ değeri için, $\|\chi_{E_\lambda}/\omega\|_{L_\omega^{p's'}} \leq c_0\lambda(\omega E_{\beta\lambda})^{1/p'}$ olacak şekilde $c_0 > 0$ ve β, $0 < \beta < 1$ sabitleri vardır. Burada $E_\lambda = \{x \in Q; 1/\omega(x) > \lambda\}$ dir.

İspat: $\lambda \geq \frac{|Q|}{\omega Q} = \frac{1}{\omega Q}\int_Q \left(\omega(x)\right)^{-1}\omega(x)dx$ olarak göz önüne alalım. $\omega(x)dx$ ölçümü dubbling şartını sağlar. Bundan dolayı Calderon Zygmund ayrışımını kullanabiliriz ve sonuç olarak Q da bulunan örtüşmeyen $\{Q_k\}_{k\geq 1}$ küplerin bir dizisini elde ederiz. Öyle ki hemen hemen her $x \in Q \big/ \bigcup_{k\geq 1} Q_k$ ve $1 \big/ \omega(x) \leq \lambda$ için,

$$\lambda < \frac{1}{\omega Q_k}\int_{Q_k}\left(\omega(x)\right)^{-1}\omega(x)dx = \frac{|Q_k|}{\omega Q_k} < c\lambda, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

dir. $f \in L_\omega^{ps}$ fonksiyonu $\|f\|_{L_\omega^{ps}} \leq 1$ ifadesini sağlasın. Önerme 4.1 ve 4.3 ' e dayanarak;

$$\begin{aligned}\int_{R^n} \chi_{E_\lambda}(x)(\omega(x))^{-1} f(x)\omega(x)dx &\leq \sum_{k\geq 1}\left|\int_{Q_k}(\omega(x))^{-1} f(x)dx\right| \\ &\leq c\sum_{k\geq 1}\|f\chi_{Q_k}\|_{L_\omega^{ps}} \left\|\chi_{Q_k}\big/\omega\right\|_{L_\omega^{p's'}}\end{aligned}$$

$$\le c\sum_{k\ge 1}\left\| f\chi_{Q_k}\right\|_{L^{ps}_{\omega}} |Q_k|(\omega Q_k)^{-1/p}$$

$$\le c\sum_{k\ge 1}\left\| f\chi_{Q_k}\right\|_{L^{ps}_{\omega}} \frac{|Q_k|}{\omega Q_k}(\omega Q_k)^{1/p'}$$

$$\le c\sum_{k\ge 1}\left\| f\chi_{Q_k}\right\|_{L^{ps}_{\omega}} \lambda(\omega Q_k)^{1/p'}$$

$$\le c\lambda\left(\sum_{k\ge 1}\left\| f\chi_{Q_k}\right\|^{p}_{L^{ps}_{\omega}}\right)^{1/p}\left(\sum_{k\ge 1}\omega Q_k\right)^{1/p'}$$

$$\le c\lambda\left\| f\right\|_{L^{ps}_{\omega}}\left(\sum_{k\ge 1}\omega Q_k\right)^{1/p'}$$

$$\le c\lambda\left(\sum_{k\ge 1}\omega Q_k\right)^{1/p'}$$

elde edilir.

Önerme 4.4 ' e göre $\omega \in A_{ps}$ olmasından dolayı $\omega \in A_{p1}$ olur. Önerme 4.9' dan

$$\int_{R^n}\chi_{E_\lambda}(x)(\omega(x))^{-1}f(x)\omega(x)dx \;\le\; c\lambda\left(\sum_{k\ge 1}c(\beta)\omega\left\{x\in Q_k;\ {}^{1}\!/\!_{\omega(x)}>\beta|Q_k|/(\omega Q_k)\right\}\right)^{1/p'}$$

$$\le\; c\lambda\left(\omega\left\{x\in Q;\ {}^{1}\!/\!_{\omega(x)}>\beta\lambda\right\}\right)^{1/p'}$$

elde edilir. Sonuç olarak f fonksiyonunun supremumu L^{ps}_{ω} uzayının birim yuvarları üzerinden alınarak istenilen eşitsizlik elde edilir.

Önerme 4.11: $1<s\le p<\infty$ ve $\omega\in A_{ps}$ olsun. Bu durumda her Q küpleri için;

$$\left\|{}^{\chi_Q}\!/\!_{\omega}\right\|^{s_1'}_{L^{p_1's_1'}_{\omega}}\le c\left(\frac{|Q|}{\omega Q}\right)^{\delta}\left\|{}^{\chi_Q}\!/\!_{\omega}\right\|^{s'}_{L^{p's'}_{\omega}}$$

olacak şekilde $c>0$ ve $\delta>0$ sabitleri vardır. Burada $p_1'=p'+\dfrac{p'\delta}{s}$ ve $s_1'=s'+\delta$ eşitsizlikleri vardır.

İspat: Q keyfi bir küp olsun ve $E_\lambda=\left\{x\in Q;\ {}^{1}\!/\!_{\omega(x)}>\lambda\right\}$ alalım. Açıkça her $\delta>0$ için;

$$\int_{o}^{\infty}\left\|{}^{\chi_{E_\lambda}}\!/\!_{\omega}\right\|^{s'}_{L^{p's'}_{\omega}}\lambda^{\delta-1}d\lambda=\int_{o}^{|Q|/(\omega Q)}\left\|{}^{\chi_{E_\lambda}}\!/\!_{\omega}\right\|^{s'}_{L^{p's'}_{\omega}}\lambda^{\delta-1}d\lambda+\int_{|Q|/(\omega Q)}^{\infty}\left\|{}^{\chi_{E_\lambda}}\!/\!_{\omega}\right\|^{s'}_{L^{p's'}_{\omega}}\lambda^{\delta-1}d\lambda \qquad (4.9)$$

olur. (4.9)' eşitliğinin sağ tarafı sınırlandırılabilir. İlk olarak;

$$\int_{o}^{|Q|/(\omega Q)} \left\| \chi_{E_\lambda} \big/ \omega \right\|_{L_\omega^{p's'}}^{s'} \lambda^{\delta-1} d\lambda \ \leq \left\| \chi_{Q} \big/ \omega \right\|_{L_\omega^{p's'}}^{s'} \int_{o}^{|Q|/(\omega Q)} \lambda^{\delta-1} d\lambda = \frac{1}{\delta}\left(\frac{|Q|}{\omega Q}\right)^{\delta} \left\| \chi_{Q} \big/ \omega \right\|_{L_\omega^{p's'}}^{s'}$$

olur. Ayrıca $\dfrac{s'}{p'} = \dfrac{s'}{p_1'}$ için;

$$\int_{|Q|/(\omega Q)}^{\infty} \left\| \chi_{E_\lambda} \big/ \omega \right\|_{L_\omega^{p's'}}^{s'} \lambda^{\delta-1} d\lambda \ \leq \ c_o \int_{|Q|/(\omega Q)}^{\infty} \left(\omega\{x \in Q; 1/\omega(x) > \beta\lambda\}\right)^{s'/p'} \lambda^{\delta+s'-1} d\lambda$$

$$\leq \ c\beta \int_{o}^{\infty} \left(\omega\{x \in Q; 1/\omega(x) > \lambda\}\right)^{s_1'/p_1'} \lambda^{s_1'-1} d\lambda$$

$$\leq \ \frac{c}{s_1'} \left\| \chi_Q / \omega \right\|_{L_\omega^{p_1's_1'}}^{s_1'}$$

vardır. (4.9) ifadesinin sol tarafına Fubini teoremini uygularsak;

$$\int_{o}^{\infty} \left\| \chi_{E_\lambda} \big/ \omega \right\|_{L_\omega^{p's'}}^{s'} \lambda^{\delta-1} d\lambda = \int_{o}^{\infty} s' \int_{o}^{\infty} \left(\omega\left\{ x \in E_\lambda ;\ 1\big/\omega(x) > r \right\} \right)^{s'/p'} r^{s'-1} dr \lambda^{\delta-1} d\lambda$$

$$= \int_{o}^{\infty} s' \int_{o}^{\infty} \left(\omega\left\{ x \in Q;\ 1\big/\omega(x) > \lambda,\ 1\big/\omega(x) > r \right\} \right)^{s'/p'} r^{s'-1} dr \lambda^{\delta-1} d\lambda$$

$$= s' \int_{o}^{\infty} \int_{o}^{\lambda} \left(\omega\{x \in Q; 1/\omega(x) > \lambda, 1/\omega(x) > r\}\right)^{s'/p'} r^{s'-1} dr \lambda^{\delta-1} d\lambda$$

$$+ s' \int_{o}^{\infty} \int_{\lambda}^{\infty} \left(\omega\left\{ x \in Q;\ 1\big/\omega(x) > \lambda,\ 1\big/\omega(x) > r \right\} \right)^{s'/p'} r^{s'-1} dr \lambda^{\delta-1} d\lambda$$

$$= s' \int_{o}^{\infty} \int_{0}^{\lambda} \left(\omega\left\{ x \in Q;\ 1\big/\omega(x) > \lambda \right\} \right)^{s'/p'} r^{s'-1} dr \lambda^{\delta-1} d\lambda$$

$$+ s' \int_{o}^{\infty} \int_{\lambda}^{\infty} \left(\omega\left\{ x \in Q;\ 1\big/\omega(x) > r \right\} \right)^{s'/p'} r^{s'-1} dr \lambda^{\delta-1} d\lambda$$

$$= \int_{o}^{\infty} \left(\omega\{x \in Q; 1/\omega(x) > \lambda,\}\right)^{s'/p'} \lambda^{s'+\delta-1} d\lambda$$

$$+ s' \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{r} \left(\omega\{x \in Q; 1/\omega(x) > r\}\right)^{s'/p'} r^{s'-1} \lambda^{\delta-1} d\lambda dr$$

$$= \int_{o}^{\infty} \left(\omega\{x \in Q; 1/\omega(x) > \lambda\}\right)^{s'/p'} \lambda^{s_1'-1} d\lambda$$

$$+\frac{s'}{\delta}\int_{o}^{\infty}\left(\omega\{x\in Q;1/\omega(x)>r\}\right)^{s'/p'} r^{s'+\delta-1}dr$$

$$=\frac{1}{s_1'}\left\|\chi_Q/\omega\right\|_{L_\omega^{p_1's_1'}}^{s_1'}+\frac{s'}{\delta}\int_{0}^{\infty}\left(\omega\{x\in Q;1/\omega(x)>r\}\right)^{s_1'/p_1'} r^{s_1'-1}dr$$

$$=\frac{1}{s_1'}\left\|\chi_Q/\omega\right\|_{L_\omega^{p_1's_1'}}^{s_1'}+\frac{s'}{\delta s_1'}\left\|\chi_Q/\omega\right\|_{L_\omega^{p_1's_1'}}^{s_1'}$$

$$=\frac{1}{\delta}\left\|\chi_Q/\omega\right\|_{L_\omega^{p_1's_1'}}^{s_1'}$$

elde edilir. (4.9) ifadesinden,

$$\frac{1}{\delta}\ \leq\ \left\|\chi_Q/\omega\right\|_{L_\omega^{p_1'q_1'}}^{s_1'}\ \leq\ \frac{c}{s_1'}\left\|\chi_Q/\omega\right\|_{L_\omega^{p_1'q_1'}}^{s_1'}+\frac{1}{\delta}\left(\frac{|Q|}{\omega Q}\right)^{\delta}\left\|\chi_Q/\omega\right\|_{L_\omega^{p_1'q_1'}}^{s_1'}$$

yazılır buradan,

$$\left(\frac{1}{\delta}-\frac{c}{s'+\delta}\right)\left\|\chi_Q/\omega\right\|_{L_\omega^{p_1's_1'}}^{s_1'}\ \leq\ \frac{1}{\delta}\left(\frac{|Q|}{\omega Q}\right)^{\delta}\left\|\chi_Q/\omega\right\|_{L_\omega^{p's'}}^{s'}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $\frac{1}{\delta}-\frac{c}{(s'+\delta)}>0$ olması için yeterince küçük $\delta>0$ seçmek yeterlidir ve ispat tamamlanmış olur.

Önerme 4.7' nin İspatı: Önerme 4.4' den dolayı $1<s\leq p$ olduğunu kabul edebiliriz. Önerme 4.11' den p_1' ve s_1' alalım. Bu durumda $p_1'>p'$ olur ve sonuç olarak $p_1<p$ ve

$$\left\|\chi_Q\right\|_{L_\omega^{p_1s_1}}\left\|\chi_Q/\omega\right\|_{L_\omega^{ps}\,p_1's_1'}\ \leq\ \left\|\chi_Q\right\|_{L_\omega^{p_1s_1}}\left(c\left(\frac{|Q|}{\omega Q}\right)^{s_1'-s'}\left\|\chi_Q/\omega\right\|_{L_\omega^{p's'}}^{s'}\right)^{1/s_1'}$$

$$\leq\ c(\omega Q)^{1/p_1}\left(\left(\frac{|Q|}{\omega Q}\right)^{s_1'-s'}\left\|\chi_Q/\omega\right\|_{L_\omega^{ps}}^{-s'}|Q|^{s'}\right)^{1/s_1'}$$

$$=c|Q|(\omega Q)^{1/p_1+s'/s_1'-1-s'/(ps_1')}$$

$$=c|Q|$$

elde edilir. Burada $\frac{1}{p_1}-1+\frac{s'}{s_1'}-\frac{s'}{s_1'p}=-\frac{1}{p_1'}+\frac{s_1'}{s_1'p_1'}=0$ dir. O halde $\omega\in A_{p_1s_1}$ olur.

Şimdi ağırlıklı Lorentz uzaylarında birinci mertebeli Riesz dönüşümünün sınırlılığını veren teoremi verelim.

Teorem 4.1: $1 \leq p < \infty$ ve $1 \leq s \leq \infty$ olsun. $\left\|R_j f\right\|_{L_w^{ps}} \leq c\left\|f\right\|_{L_w^{ps}}$ olacak şekilde bir c sayısı varsa $w \in A_{ps}$ dir.

Sonuç 4.2: $1 < p < \infty$ ve $1 < s \leq \infty$ alalım. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) R_j operatörü L_w^{ps} üzerinde sınırlıdır.

(ii) R_j operatörü L_w^{ps} uzayından $L_w^{p\infty}$ uzayına sınırlıdır.

(iii) $w \in A_{ps}$.

Sonuç 4.3: $1 \leq p < \infty$ için aşağıdaki durumlar denktir.

(i) R_j operatörü L_w^{p1} uzayından $L_w^{p\infty}$ uzayına sınırlıdır.

(ii) $Q \subset \mathbb{R}^n$ ve tüm ölçülebilir $E \subset Q$ kümeleri için,

$$\frac{|E|}{|Q|} \leq c\left(\frac{wE}{wQ}\right)^{1/p}$$

şartını sağlayan bir $c > 0$ sabiti vardır.

(iii) $w \in A_{p_1}$.

5. AĞIRLIKLI LORENTZ UZAYLARDA KLASİK OPERATÖRLERİN SINIRLILIĞI

$u(.), v(.), w_1(.), w_2(.)$, $n \in N^*, \mathbb{R}^n$ uzayında negatif olmayan lokal integrallenebilir ağırlık fonksiyonlar ve T klasik operatör olsun. Bu kısımda amaç $f(.)$ fonksiyonları için T operatörünün $L_v^{rs}(w_1)$ ağırlıklı uzayından $L_u^{pq}(w_2)$ uzayına sınırlı olduğunu göstermektir. Yani;

$$\left\| w_2 (Tf)(.) \right\|_{L_w^{pq}} \leq C \left\| w_1(.) f(.) \right\|_{L_w^{rs}} \tag{5.1}$$

olduğunu göstermektir [11]. Burada $C > 0$ değeri n, p, q, r, s ve ağırlık fonksiyonuna bağlı bir sabittir.

$1 \leq p < \infty$ ve $1 \leq q < \infty$ için;

$$\left\| g(.) \right\|_{L_u^{pq}}^q = q \int_0^\infty \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n ; |g(y) > \lambda|\}} u(y)\, dy \right)^{\frac{q}{p}} \lambda^{q-1} d\lambda$$

ve $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ için;

$$\left\| g(.) \right\|_{L_u^{p\infty}} = \sup_{\lambda > 0} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n ; |g(y) > \lambda|\}} u(y)\, dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

olduğunu hatırlayalım. Burada $1 < r,\ s,\ p,\ q < \infty$ biçimindedir. (5.1) ifadesindeki gömme operatörünü $T : L_v^{rs}(w_1) \to L_u^{pq}(w_2)$ biçiminde tanımlayalım. Göz önüne alınan klasik operatör bir kesirli maksimal operatör, kesirli integral operatör ya da bir Calderon-Zygmund operatördür [12]. $0 \leq \alpha < n$ aralığındaki M_α , α mertebeli kesirli maksimal operatör,

$$(M_\alpha f)(x) = \sup \left\{ |Q|^{\frac{\alpha}{n}-1} \int_Q \left| f(y)\, dy \right| ; Q\ küp\ , x \in Q \right\}$$

biçiminde tanımlanır. Burada Q kenarı koordinat eksenine paralel bir küptür. Bu nedenle $M = M_0$ Hardy-Littlewood maximal operatör olarak bilinir. $0 < \alpha < n$ için I_α kesirli integral operatörü;

$$(I_\alpha f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha - n} f(y)\, dy$$

şeklinde verelim. Hilbert dönüşümü;

$$(Hf)(x)=P.V.\int_{\mathbb{R}^1}\frac{f(y)}{x-y}dy=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon}\frac{f(y)}{x-y}dy$$

Calderon-Zygmund operatörünün özel bir halidir.

$M:L_v^{rs}(1)\to L_u^{pq}(1)$ operatörünün sınırlılığı bazı matematikçiler tarafından incelenmiştir ([13,14]). Bununla beraber $0\le\alpha<n,\ M_\alpha:L_v^{rs}(1)\to L_u^{pq}(1)$ operatörü için $v(.),\ u(.)$ ağırlıkları üzerinde gerek ve yeter şartları oluşturmaya çalışılmış ancak bulanamamıştır [13]. Bu kısımda sınırlılık için yeterlilik şartı bulunacaktır. Ağırlıklı fonksiyonları için bulunacak bu şart aynı zamanda bir gerekliliktir. $M_\alpha:L_v^{rs}(w_1)\to L_u^{pq}(w_2)$ deki ağırlık Lebesque hali için birlikte ele alınmayabilir örnek olarak aşağıdaki ifade,

$\|f(.)\|_{L_u^{pp}}=\|u^{1/p}(.)f(.)\|_{L_1^{pp}}$ verilebilir.

Her $R>0$ değerleri için,

$$\sup_{R<|y|\le 64R}w(y)\le c\inf_{R<|z|\le 64R}w(z)$$

ise sabit bir $c>0$ değeri için $w(.)$ ağırlık fonksiyonu sabit olur. Son şart $w(.)\in A$ olmasını tanımlar. Eğer $\alpha\in\mathbb{R}$ ve $\beta\ge 0$ için $w(.)=|x|^\alpha\ln^\beta(e+|x|)$ sağlanırsa bu durumda $w(.)\in A$ olur. $w(.)\in A$ ağırlık fonksiyonlarının geniş sınıfı $t>0$ için,

$w(64t)\le Cw(t)\left(w(t)\le Cw(64t)\right)$ şartını sağlayan azalmayan (yada artmayan) yarıçapa bağlı $w(.)$ fonksiyonları tarafından oluşturulur. Aşağıdaki Lemma 5.1' in ispatında, $M_\alpha:L_v^{rs}(1)\to L_u^{pq}(1)$ ifadesi dolaylı olarak $H:L_v^{rs}(1)\to L_u^{pq}(w)$ olmasını gerektirir ve $w(x)=|x|^{\alpha-n}\ (Hf)(x)=\int_{|y|<|x|}f(y)dy$ olur. Bu çalışmada kolaylık için her zaman $w_1(.)\in A$, $w_2\in A$ olarak kabul edilecek.

Aşağıdaki Lemma 5.1' de, $M_\alpha:L_v^{rs}(1)\to L_u^{pq}(1)$ operatörünün sınırlılığı dolaylı olarak tüm $R>0$ değerleri için,

$$\left\|(R+|cdot|)^{\alpha-n}\right\|_{L_u^{pq}}\left\|\frac{1}{v(.)}\chi_{|.|<R}(.)\right\|_{L_v^{\frac{r}{r-1}\frac{s}{s-1}}}\le C \tag{5.2}$$

ve hemen hemen her $x,\ \dfrac{\alpha}{n}+\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{r}=0$ için,

$$|x|^{n\left[\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right]}\left(u(x)\right)^{\frac{1}{p}} \leq c\left(v(x)\right)^{\frac{1}{r}} \tag{5.3}$$

olmasını gerektirir. Burada $\chi_E(.)$ ölçülebilir E sınıfının karekteristik fonksiyonu olarak tanımlanır. (5.3) noktasal yakınsaklık eşitsizliği olarak alındığında bahsedilen şart $w(.), u(.)$ ağırlıkları için kolayca görülebilir. Bilinen standart şartların aksine (5,2) eşitsizliği, ne M_α operatörünün kendisine ne de keyfi küplere göre ifade edilir. Bu şart orijin merkezli küreler üzerinde integral alınarak gösterilebilir ki bunlar yarıçapa bağlı fonksiyonlar (bu ağırlıklar daha kullanışlıdır) için uygundur. Dolayısıyla (5.2) ve (5.3) şartlarından $M_\alpha : L_v^{rs}(1) \to L_u^{pq}(1)$ olduğu görülür. Aynı zamanda klasik Lebesque uzaylarında bu problem test edildiğinde bunun yalnızca bu iki şarttan oluşturulan gömme için mantıklı olmadığı görülür. Kaba ifadeyle Teorem 5.1' de $\max(r,s) \leq \min(p,q)$ için hem (5.2) ve hem de (5.3)' den daha güçlü şartlar olduğunda $M_\alpha : L_v^{rs}(1) \to L_u^{pq}(1)$ olduğu ispat edilecektir. Sonuçta Lebesque hali için yani $(i.e., r = s, p = q)$ için bu sonuçlar yeniden elde edilir.

Amacımız $T : L_v^{rs}(w_1) \to L_u^{pq}(w_2)$ i. e., operatörlerini incelemektir. Yani $f(.)$ fonksiyonları için,

$$\left\| w_2(.)(Tf)(.) \right\|_{L_u^{pq}} \leq C \left\| w_1(.) f(.) \right\|_{L_v^{rs}}$$

olduğunu göstermektir. Burada T klasik operatör ve $w_1(.), w_2(.) \in A$ ağırlıkları yukarıdaki gibi tanımlanır. Gerçekten, bahsedilen sınırlılık r, s, p, q ve ağırlık fonksiyonları üzerinde yapılacak kısıtlamalarla yapılmak zorundadır. Kolaylık için $T = M_\alpha$ hali göz önüne alınacaktır.

Lemma 5.1 : $0 \leq \alpha < n$ olsun. Kabul edelim ki $M_\alpha : L_v^{rs}(w_1) \to L_u^{pq}(w_2)$ dir. Bu durumda, her Q küpleri için,

$$|Q|^{\frac{\alpha}{n}} \left\| w_2(.) \chi_Q(.) \right\|_{L_u^{pq}} \leq C_1 \left\| w_1(.) \chi_Q(.) \right\|_{L_v^{rs}} \tag{5.4}$$

dir. Sonuç olarak, eğer $w_1(.) = w_2(.)$ ise bu durumda $\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \leq \frac{\alpha}{n}$ olur. Diğer taraftan, her Q küpleri için,

$$\left\| \frac{1}{v(.)\, w_1(.)} \chi_Q(.) \right\|_{L_v^{\frac{r}{r-1}\frac{s}{s-1}}} < \infty \tag{5.5}$$

dir.

$u(.),v(.)$ ağırlık fonksiyonları her $R>0$ değerleri için,

$$\left\| w_2(.)\left(R+|.|\right)^{\alpha-n}\right\|_{L_v^{\frac{r}{r-1}\frac{s}{s-1}}} \left\| \frac{1}{v(.)\,w_1(.)}\chi_{\{|.|<R\}}(.)\right\|_{L_v^{\frac{r}{r-1}\frac{s}{s-1}}} \le C_2 \tag{5.6}$$

Wheeden-Muckenhoupt şartını sağlar. $1<r<\dfrac{n}{\alpha},\dfrac{1}{r^*}=\dfrac{1}{r}-\dfrac{\alpha}{n}$ olsun. Eğer $p=r^*$ ise bu durumda, hemen hemen her x için,

$$w_2(x)|x|^{n\left[\frac{1}{p}-\frac{1}{r^*}\right]}\left(u(x)\right)^{\frac{1}{p}} \le c w_1(x)\left(v(x)\right)^{\frac{1}{r}} \tag{5.7}$$

ifadesi sağlanır. Eğer $u(.),v(.)\in A$ ise bu eşitsizlik $p\neq r^*$ için de sağlanır. Bu ifadedeki $u(.),v(.)$ ağırlıkları (5.5) şartını sağladığı kabul edilmektedir. Sonra (5.4)' den, $0\le\alpha<n, 1<r<\dfrac{\alpha}{n}$ için $M_\alpha : L_v^{rs}(1)\to L_u^{pq}(1)$ olduğu gösterilir ve sadece $p\le r^*$ için aşikar olmayan anlam vardır. Bu sonuç ve diğer özelliklerden,

$$1<r<\frac{n}{\alpha},\ p\le r^*,\ \max(r,s)\le\min(p,q) \tag{5.8}$$

olduğu kabul edilecektir.

M_α ile birlikte $\max(r,s)=p<q$ sağlandığı zaman, aşağıdaki ifade her $N\in\mathbb{Z}$ için sağlandığı kabul edilir,

$$\sum_{m=-\infty}^{N-1}\left\| w_2(.)\chi_{\{2^m<|x|\le 2^{m+1}\}}(.)\right\|_{L_u^{pq}}^p \le C\left\| w_2(.)\chi_{\{|x|<2^N\}}(.)\right\|_{L_u^{pq}}^p \tag{5.9}$$

Benzer olarak eşitsizlik $q<p$ olduğu zaman daima sağlanır (bknz lemma 5.2). $p<q$ için (5.9) ifadesi $w_2(.)=1$ halindeki ağırlık fonksiyonları ya da kuvvet ağırlıklar için doğrudur (bknz önerme 5.2).

(5.7)' den daha kuvvetli şart aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$w_2(x)|x|^{n\left[\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right]}\left(\sup_{4^{-1}|x|<|z|<4|x|} u(z)\right)^{\frac{1}{p}} \le c w_1(x)\left(v(x)\right)^{\frac{1}{r}} \qquad \text{h.h. her } x \text{ için} \tag{5.10}$$

ya da,

$$w_2(x)|x|^{n\left[\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right]}\left(u(x)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sup_{4^{-1}|x|<|z|<4|x|} v(z)\right)^{-\frac{1}{r}} \le c w_1(x) \qquad \text{h.h. her } x \text{ için} \tag{5.10*}$$

Teorem 5.1 : ($0 \le \alpha < n,\ M_\alpha$ kesirli maksimal operatör): **(A)** $M_\alpha : L_v^{rs}(w_1) \to L_u^{pq}(w_2)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (5.6) Wheeden-muckenhoupt şartı sağlanır.

(B) Tersi için (5.8) ve (5.9)' nın sağlandığını kabul edelim. Bu durumda (5.10) (ya da (5.10*)) noktasal yakınsama eşitsizliği sağlandığında (5.6) şartı,

$M_\alpha : L_v^{rs}(w_1) \to L_u^{pq}(w_2)$ olmasını gerektirir.

Uyarı 5.1 : (1) $M = M_0$ Hardy-Littlewood maximal operatörü için, $M : L_v^{rs}(w_1) \to L_u^{pq}(w_2)$ gömme operatörü ile ilgilidir. Çünkü (5.8)' den $\alpha = 0, r^* = r = p$ ve $s \le r = p < q$ yazılır. $0 < \alpha < n, M_\alpha$, Lebesque hali i.e., $p = q,\ r = s$ için (1.5) kısıtlaması $r \le p \le r^*$ eşitsizliğini verir.

(2) Teorem 5.1 ve lemma 5.1 aşağıdaki sonuçları verir.

(5.8), (5.9) kısıtlamaları ile hem (5.6) ve hem de (5.7) şartları, $u(.)$ ya da $v(.)$ sabit olduğunda sağlanıyorsa, $M_\alpha : L_v^{rs}(w_1) \to L_u^{r^*q}(w_2)$ operatörünü karakterize eder. Benzer olarak eğer $p \ne r^*$ ve hem $u(.), v(.)$ sabit ise bu durumda $M_\alpha : L_v^{rs}(w_1) \to L_u^{pq}(w_2)$ olması için gerek ve yeter şart (5.6) ve (5.7) şartlarının sağlanmasıdır. Gerçekten, (5.7) şartı aşağıdaki önerme 5.3 ve uyarı 5.2' ye karşılık getirilebilir.

(3) Her $R > 0$ için (5.6) Wheeden-Muckenhoupt şartı hem

$$R^{\alpha-n} \left\| w_2(.)\,\chi_{\{|.|<R\}}(.) \right\|_{L_u^{pq}} \left\| \frac{1}{v(.)\,w_1(.)}\,\chi_{\{|.|<R\}}(.) \right\|_{L_v^{\frac{r}{r-1}\frac{s}{s-1}}} \le A \tag{5.11}$$

ve hem de

$$\left\| w_2(.)\,|.|^{\alpha-n}\,\chi_{\{|.|>R\}}(.) \right\|_{L_u^{pq}} \left\| \frac{1}{v(.)\,w_1(.)}\,\chi_{\{|.|<R\}}(.) \right\|_{L_v^{\frac{r}{r-1}\frac{s}{s-1}}} \le H \tag{5.12}$$

eşitsizliklerine denktir. Son eşitsizlik aynı zamanda ağırlıklı Lorentz uzaylarda bazı Hardy tür operatörlerin sınırlılığını göstermek için kullanışlıdır (bknz lemma5.3).

(5.10) , (ya da 5.10*) şartı Wheeden-Littlewood şartı aracılığıyla elde edilebilir. Bunun için gerekli bazı esas sonuçları aşağıda verelim.

Teorem 5.2 (Hilbert transform H) : Kabul edelim ki $H : L_v^{rs}(w_1) \to L_u^{rq}(w_2)$ dir. Bu durumda (5.12) ve (5.7) ($\alpha = 0,\ r^* = r = p$) şartları sağlanır.

$\alpha \geq 0$ için (5.11) Muckenhoupt şartının (5.12) Hardy eşitsizliğini sağladığını ortaya çıkaran bir sonuçla ilgileneceğiz. Bunun için bize bazı ağırlıklı şartlar gerekli olacaktır. Böylece $c > 0$ değeri, $v > 0,\ v(.) \in RD_{v,r,s}(w_1)$ ve her $0 < \lambda \leq 1,\ R > 0$ için,

$$\left\| \frac{1}{v(.)w_1(.)} \chi_{\{|.|<R\}}(.) \right\|_{L_v^{\frac{r}{r-1}\frac{s}{s-1}}} \leq c\lambda^{nv\left(1-\frac{1}{r}\right)} \left\| \frac{1}{v(.)w_1(.)} \chi_{\{|.|<R\}}(.) \right\|_{L_v^{\frac{r}{r-1}\frac{s}{s-1}}}$$

olur. Benzer olarak,

$$\left\| w_2(.)\chi_{\{|.|<\lambda R\}}(.) \right\|_{L_u^{pq}} \leq c\lambda^{n\varepsilon\frac{1}{p}} \left\| w_2(.)\chi_{\{|.|<R\}}(.) \right\|_{L_u^{pq}}.$$

olduğunda her $\lambda \geq 1,\ R > 0$ için, $u(.) \in D_{\varepsilon,p,q}(w_2), \varepsilon \geq 1$ olur.

Önerme 5.1 : $v > 0$ için $v(.) \in RD_{v,r,s}(w_1)$ olduğunda $0 \leq \alpha < n$ için (5.11) Muckenhoupt şartı, (5.12) Hardy şartını sağlar. $1 \leq \varepsilon < \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)p$ için $u(.) \in D_{\varepsilon,p,q}(w_2)$ ise bu ifadeler doğrudur.

Önerme5.2: $w(x) = |x|^{\beta-n}, w_1(x) = |x|^{\beta_1-n}, w_2(x) = |x|^{\beta_2-n}, u(x) = |x|^{\gamma-n}, v(x) = |x|^{\delta-n}$ olsun. Burada $\beta, \beta_1, \beta_2, \gamma, \delta$ negatif olmayan reel sayılar olmak üzere;

(A) Eğer $0 < (\beta - n) + \frac{1}{p}\gamma$ ise bu durumda, her $R > 0$ için,

$$\left\| w(.)\chi_{|.|<R}(.) \right\|_{L_u^{pq}} \approx R^{(\beta-n)+\frac{1}{p}\gamma} \approx \left(\frac{1}{R^n} \int_{|y|<R} w(y)\,dy \right) \left(\int_{|y|<R} u(y)\,dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

dir.

(B) (5.9) ekstra kabulü $w_2(.) = w(.)$ için sağlanır.

(C) $0 \leq \alpha < n, 0 < (\beta_2 - n) + \frac{1}{p}\gamma$ ve $(\beta_1 - n)\frac{1}{p}\delta < n$ olsun. Bu durumda (5.7) noktasal eşitsizliği ve (5.11) Muckenhoupt şartının sağlanması için gerek ve yeter şart,

$$\alpha + (\beta_2 - n) + \frac{1}{p}\gamma = (\beta_1 - n)\frac{1}{r}\delta \tag{5.13}$$

olmasıdır. Bununla beraber, $v = \frac{r}{r-1}\frac{1}{n}\left[(n - \beta_1) + \left(n - \frac{1}{r}\delta\right)\right] > 0$ için $v(.) \in RD_{v,r,s}(w_1)$, olduğundan bu durumda önerme 5.1' den (5.6) Wheeden şartı (5.13) ifadesine denk olur.

(5.10) noktasal eşitsizliği $M_\alpha : L_v^{rs}\left(w_1\right) \to L_u^{rq}\left(w_2\right)$ için bir gereklilik şartı olduğu durumu bu kısmın sonu olacaktır.

Bunun için iki ağırlık şartı verelim. Bu nedenle $C>0$ ve $N \in N^*$ için $u(.) \in H$ yazılabilir.

$$\sup_{4^{-1}|x|<|y|<4|x|} u(y) \leq C|x|^{-n} \int_{2^{-N}|x|<|y|<2^N|x|} u(y)\,dy \tag{5.14}$$

ve $v(.) \in \tilde{H}\left(r', s'\right)$, $r' = \dfrac{r}{r-1}$, $s' = \dfrac{s}{s-1}$ olduğu zaman,

$$|x|^n \left[\frac{1}{v(x)}\right]^{r'} v(x) \leq C \left\| \frac{1}{v(.)} \chi_{2^{-N}|x|<|.|<2^N|x|}(.) \right\|_{L_u^{r's'}}^{r'}$$

ifadesi sağlanır.

Önerme 5.3 : $u(.) \in H$ ve $v(.) \in \tilde{H}\left(r', s'\right)$ olduğunda (5.11) Muckenhoupt şartı (5.10) noktasal eşitsizliği sağlar.

Bu sonuçta $w_1(.)$ ve $w_2(.)$ için sabitlik şartı $N \geq 3$ için $\sup\limits_{R<|y|\leq 2^{2N} R} w(y) \leq c \inf\limits_{R<|z|\leq 2^{2N} R} w(z)$ olduğunda ele alınmıştır.

Sonuç 5.1 : $u(.) \in H, v(.) \in \tilde{H}\left(r', s'\right)$ olsun. Bu durumda, teorem 5.1' de (5.10) (ya da (5.10*)) şartından vazgeçilebilir.

Uyarı 5.2 : (1) (5.14) özeliği ağırlık fonksiyonlarının geniş bir sınıfı için sağlanır. Örneğin $w(.) \in A$ olduğunda $w(.)$, (5.14) ifadesini sağlar. (5.14) şartı her radial ve monoton ağırlık fonksiyonu için doğrudur. (5.14)' in sağlanması $w(.)$ in monoton olmasını gerektirmez. $w(x) = |x|^{\delta-n} \chi_{|x|-1}(x) + |x|^{\gamma-n} \chi_{|x|>1}(x)$ dir.

(2) Eğer $v^{1-r'}(.)$, (5.14) şartını sağlarsa $v(.) \in \tilde{H}\left(r', r'\right)$ şartı sağlanır. Her r ve s için $C>0$ değeriyle beraber aşağıdaki ifade sağlanır,

$$|x|^{-n} \int_{2^{-N}|x|<|y|<2^N|x|} v(y)\,dy \leq cv(x) \tag{5.15}$$

yukarıdaki şekilde $C>0$ değeri varsa $v(.) \in \tilde{H}\left(r', s'\right)$ elde edilir. Gerçekten Hölder eşitsizliği ve (5.15) kullanılarak $c(x, N) = \left\{2^{-N}|x| < |y| < 2^N|x|\right\}$ için,

$$|x|^{\frac{n}{r'}}\left[\frac{1}{v(x)}\right]v^{\frac{1}{r'}}(x)\approx\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{v(y)}\chi_{c(x,N)}v(y)\,dy\right)\times\left(|x|^n v(x)\right)^{-\frac{1}{r}}$$

$$\leq c_1\left\|\frac{1}{v(.)}\chi_{c(x,N)}(.)\right\|_{L_v^{r's'}}\left(\int_{c(x,N)}v(z)\,dz\right)^{\frac{1}{r}}\times\left(|x|^n v(x)\right)^{-\frac{1}{r}}$$

$$\leq c_2\left\|\frac{1}{v(.)}\chi_{c(x,N)}(.)\right\|_{L_v^{r's'}}$$

elde edilir. Her hangi bir Muckenhoupt A_1 ağırlıklı $v(.)$ fonksiyonu (5.15) şartını sağlar. Bu ifade $v(.)\in A$ için doğru olur.

(3) Teorem 5.1 önerme 5.3 ve uyarı 5.2 (2) aşağıdaki ifadeleri verir. (5.8) ve (5.9) kestirimleri ile beraber hem $u(.)$ hem de $v(.)$ ağırlıkları sabit olduğunda (5.6) Wheeden-Muckenhoupt şartı $M_\alpha : L_v^{rs}(w_1)\to L_u^{pq}(w_2)$ olmasını gerektirir. Benzer olarak eğer, $u(.), v(.)$ sabit ise bu durumda $I_\alpha : L_v^{rs}(w_1)\to L_u^{pq}(w_2)$ olması için gerek ve yeter şart (5.11), (5.12) şartlarının sağlanmasıdır.

Bu kısımda lemma 5.1 ispat edicek ve sonuçlarımızın ispatı için gerekli bazı lemmaları vereceğiz.

Lemma 5.2 : $C>0$ sabiti için, $\sum_k \chi_{E_k}(.)\leq C\chi_{\bigcup E_k}(.)$ olduğunu kabul edelim. Burada E_k ölçülebilir kümelerdir.

(A) Bu durumda tüm $f(.)$ fonksiyonları için, $\max(r,s)\leq\lambda$ olduğunda,

$$\sum_k\left\|f(.)\chi_{E_k}(.)\right\|_{L_w^{rs}}^{\lambda}\leq c_1\left\|f(.)\chi_{\bigcup E_k}(.)\right\|_{L_w^{rs}}^{\lambda}$$

dir.

(B) Bir C değerine bağlı olan $c>0$ sabiti için, $0<\gamma\leq\min(p,q)$ olmasından,

$$\sum_k\left\|f(.)\chi_{E_k}(.)\right\|_{L_u^{pq}}^{\gamma}\leq c\sum_k\left\|f(.)\chi_{E_k}(.)\right\|_{L_u^{pq}}^{\gamma}$$

olur.

Aynı zamanda, sonuçların ispatı ağırlıklı Lorentz uzaylardaki genelleştirilmiş Hardy tür operatörlerin sınırlılığına bağlıdır. Bunu da bazı matematikçiler çalışmıştır [15]. Hardy tür operatörleri kabuller altında aşağıdaki forma sahiptir,

$$(Hf)(x)=(H_{a,b}f)(x)=a(x)\int_{|y|\le|x|} f(y)b(y)\,dy$$

ve

$$\left(H^{*}g\right)(x)=\left(H^{*}_{a,b}g\right)(x)=b(x)\int_{|x|\le|y|} g(y)a(y)\,dy.$$

Burada $a(.)$ ve $b(.)$ ölçülebilir negatif olmayan fonksiyonlardır. Burada aşağıdaki ifadeler kabul edildi,

$r=s=1$ ya da $1<r<\infty$ ve $1\le s\le\infty$,

$p=q=1$ ya da $1<p<\infty$ ve $1\le q\le\infty$.

Lemma 5.3 : r,s,p,q yukarıdaki gibi ve $\max(r,s)\le\min(p,q)$ olsun. Bu durumda her $f(\cdot)\ge 0$ için,

$$\left\|(\mathcal{H}f)(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}\le C\left\|f(\cdot)\right\|_{L_v^{rs}}$$

olması için gerek ve yeter şart,

$$\sup_{R>0}\left\|a(\cdot)\,\chi_{R<|\cdot|}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}\left\|\frac{1}{v(\cdot)}b(\cdot)\,\chi_{|\cdot|<R}(\cdot)\right\|_{L_v^{\frac{r}{r-1}\frac{s}{s-1}}}<\infty$$

olmasıdır. Benzer olarak, $g(\cdot)\ge 0$ değerleriyle beraber,

$$\left\|\left(\mathcal{H}^{*}g\right)(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}\le C\left\|g(\cdot)\right\|_{L_v^{rs}}$$

olması için gerek ve yeter şart,

$$\sup_{R>0}\left\|b(\cdot)\,\chi_{|\cdot|<R}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}\left\|\frac{1}{v(\cdot)}a(\cdot)\,\chi_{R<|\cdot|}(\cdot)\right\|_{L_v^{\frac{r}{r-1}\frac{s}{s-1}}}<\infty$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. $0\le\alpha<n$, M_α maksimal operatör için ağırlıklı eşitsizlikleri elde edebilmek amacıyla aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 5.4 : $0<\lambda\le\min(p,q)$ olsun. Bu durumda sabit $C>0$ ve her $f(\cdot)\ge 0$ için:

$$\left\|w_2(\cdot)\left(M_\alpha f\right)(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}^{\lambda}\le C\left(S_1^{\lambda}+S_2^{\lambda}+S_3^{\lambda}\right),$$

olur. Burada,

$$S_1^\lambda = \left\| w_2(\cdot) \left| \cdot \right|^{\alpha-n} \left(\int_{|y|\le|\cdot|} f(y)dy \right) \right\|_{L_u^{pq}}^\lambda ,$$

$$S_2^\lambda = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\| w_2(\cdot) \left(M_\alpha f \chi_{G_k} \right)(\cdot)\, \chi_{E_k}(\cdot) \right\|_{L_u^{pq}}^\lambda ,$$

$$S_3^\lambda = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left[2^{(\alpha-n)m} \left(\int_{E_m} f(y)dy \right) \right]^\lambda \left\| w_2(\cdot)\, \chi_{|x|<2^m}(\cdot) \right\|_{L_u^{pq}}^\lambda$$

ve

$$E_k = \left\{ 2^k < |x| \le 2^{k+1} \right\}, G_k = \left\{ 2^{k-1} < |x| \le 2^{k+2} \right\}$$

dir. Diğer yandan Calderon-Zeygmund ve her hangi bir kesirli integral operatör için benzer ifadeler elde edilebilir. T_α, $(0 \le \alpha < n)$ lineer operatörünü $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ den $L_{loc}^1(\mathbb{R}^n, dx)$ ye aşağıdaki gibi tanımlayalım, her $f(\cdot) \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ için,

$$\left(T_\alpha f\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\alpha(x,y) f(y)dy \text{ h. h. her } x \notin \operatorname{supp} f$$

dir. Burada $K_s(x,y)$ çekirdeği her $x \ne y$ değerleri için, $\left|K_\alpha(x,y)\right| \le C\left|x-y\right|^{(\alpha-n)}$ ifadesini sağlar.

Burada $\left(T_\alpha f\right)(\cdot)$ operatörünün kompakt desteğe sahip sınırlı her fonksiyonlar için hemen hemen her yerde iyi tanımlı olduğu kabul edilmiştir. $0 < \alpha < n$ durumu için T_α kesirli integral operatörü I_α operatörü olur.

Lemma 5.5 : $0 \le \alpha < n$ ve $0 < \lambda \le \min(p,q)$ olsun. Bu durumda sabit $C > 0$ değeri ve her f, $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonları için:

$$\left\| w_2(\cdot)(T_\alpha f)(\cdot) \right\|_{L_u^{pq}}^\lambda \le C(S_1^\lambda + S_2^\lambda + S_3^\lambda)$$

sağlanır. Burada,

$$S_1^\lambda = \left\| w_2(\cdot) \left| \cdot \right|^{\alpha-n} \left(\int_{|y|\le|\cdot|} f(y)dy \right) \right\|_{L_u^{pq}}^\lambda ,$$

$$S_2^\lambda = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\| w_2(\cdot) \left(T_\alpha f \chi_{G_k} \right)(\cdot)\, \chi_{E_k}(\cdot) \right\|_{L_u^{pq}}^\lambda ,$$

$$S_3^\lambda = \left\| w_2(\cdot) \left(\int_{|\cdot|\le|y|} \left| f(y) \right| \left| y \right|^{\alpha-n} dy \right) \right\|_{L_u^{pq}}^\lambda$$

ve E_k, G_k lemma 5.4' deki gibi tanımlanır.

Teorem 5.1' in ispatı: Esas problem B kısmının ispatıdır. $\max(r,s) \le \min(p,q)$ (bknz (5.8)) alındığında $\max(r,s) \le \lambda \le \min(p,q)$ olacak şekilde bir $\lambda > 0$ değeri bulunabilir.

Lemma 5.4' ün ilgili kısmından $\alpha,\ n,\ p,\ q,\ r,\ s,\ u(\cdot), v(\cdot), w_1(\cdot), w_2(\cdot)$ değerlerine bağlı sabit $C > 0$ değeri için $S_1^\lambda, S_2^\lambda, S_3^\lambda$ in ifadeleri $C\|w_1(\cdot)f(\cdot)\|_{L_v^{rs}}^\lambda$ tarafından elde edilir.

S_1^λ in elde edilmesi. $g(\cdot) = w_1(\cdot)f(\cdot)$ olarak alındığında,

$$\left\| w_2(\cdot)|\cdot|^{\alpha-n}\left(\int_{|y|\le|\cdot|}\frac{1}{w_1(y)}g(y)dy\right)\right\|_{L_u^{pq}} \le C\|g(\cdot)\|_{L_v^{rs}}$$

olur. Benzer eşitsizlik $\mathcal{H}: L_v^{rs} \to L_u^{pq}$ olduğunda da göz önüne alınabilir. Burada $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{a,b}$, $a(x) = w_2(x)|x|^{\alpha-n}$ ve $b(y) = \frac{1}{w_1(y)}$ değerlerinden elde edilen bir Hardy tür operatördür. Lemma 5.3' ün ilgili kısmından $\mathcal{H}$ operatörünün sınırlılığının her $R > 0$ için,

$$\sup_{R>0}\|a(\cdot)\chi_{R<|\cdot|}(\cdot)\|_{L_u^{pq}}\left\|\frac{b(\cdot)}{v(\cdot)}\chi_{|\cdot|<R}(\cdot)\right\|_{L_v^{\frac{r}{r-1}\frac{s}{s-1}}} < \infty$$

ya da,

$$\|w_2(\cdot)|\cdot|^{\alpha-n}\chi_{R<|\cdot|}(\cdot)\|_{L_u^{pq}}\left\|\frac{1}{v(\cdot)w_1(\cdot)}\chi_{|\cdot|<R}(\cdot)\right\|_{L_v^{\frac{r}{r-1}\frac{s}{s-1}}} < C$$

ifadesine denk olduğu görülür. Bu bir (5.12) Hardy şartı olup (5.6) Muckenhoupt şartlarının bir sonucudur.

S_3^λ ün ifadesi. Burada (5.11) Muckenhoupt şartı (aynı zamanda (5.6) şartının birleşimi) kullanılır. Hölder eşitsizliği ve (5.11)' den,

$$\begin{aligned}
S_3^\lambda &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left[2^{(\alpha-n)m}\left(\int_{E_m} f(y)dy\right)\right]^\lambda \|w_2(\cdot)\chi_{|\cdot|<2^m}(\cdot)\|_{L_u^{pq}}^\lambda \\
&\le C^\lambda \sum_{m\in\mathbb{Z}}\Bigg[2^{(\alpha-n)m}\|w_2(\cdot)\chi_{|\cdot|<2^m}(\cdot)\|_{L_u^{pq}} \times \\
&\quad \times \left\|\frac{1}{v(\cdot)w_1(\cdot)}\chi_{|\cdot|<2^m}(\cdot)\right\|_{L_v^{\frac{r}{r-1}\frac{s}{s-1}}}\Bigg]^\lambda \|w_1(\cdot)(f\chi_{E_m})(\cdot)\|_{L_u^{rs}}^\lambda \\
&\le (CA)^\lambda \sum_{m\in\mathbb{Z}}\|w_1(\cdot)(f\chi_{E_m})(\cdot)\|_{L_v^{rs}}^\lambda \qquad \text{lemma 5.2 (A)' dan} \\
&\le (C'A)^\lambda \|w_1(\cdot)f(\cdot)\|_{L_v^{rs}}^\lambda
\end{aligned}$$

elde edilir.

S_2^λ nin ifadesi. S_2^λ elde etmek için,

$$\left\| w_2(\cdot)\left(M_\alpha f \chi_{G_k}\right)(\cdot)\,\chi_{E_k}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}} \le C\left\| w_1(\cdot)\left(f\chi_{G_k}\right)(\cdot)\right\|_{L_v^{rs}} \tag{5.16}$$

almak yeterlidir. Gerçekten, $\sum_k \chi_{G_k}(\cdot) \le 3$ ve $\max(r,s)\le\lambda$ alındığında Lemma 5.2 (A) kısmından:

$$S_2^\lambda \le C^\lambda \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\| w_1(\cdot)\left(f\chi_{G_k}\right)(\cdot)\right\|^\lambda_{L_u^{rs}} \le (cC)^\lambda \left\| w_1(\cdot) f(\cdot)\right\|^\lambda_{L_u^{rs}}$$

olur. (5.16) ifadesini elde etmek için $M_\alpha : L_1^{rs}(1)\to L_1^{r^*s}(1)$ (bknz [13], Teorem 5.2.2, s. 155) ifadesi kullanılır. Burada $1<r<\infty,\ 1\le s\le\infty$ ve $\frac{1}{r^*}=\frac{1}{r}-\frac{\alpha}{n}$ dir. Lorentz uzayların aşağıdaki üç özelliği de kullanıldı: Her ölçülebilir E sınıfı için;

$$\left\|\chi_E(\cdot)\right\|_{L_w^{ps}} = \left(\int_E w(y)dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

olur. p sabiti ve $s_2\le s_1$ için;

$$\|f\|_{L^{ps_1}} \le \|f\|_{L^{ps_2}}$$

olur.

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\ ve\ \frac{1}{s}=\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2} \quad \text{için} \quad \|f_1 f_2\|_{L^{ps}} \le c\|f_1\|_{L^{p_1s_1}}\|f_2\|_{L^{p_2s_2}}$$

dir.

Kolaylık için, $\mathsf{W}_{1,k}=\sup\limits_{x\in G_k} w_1(x),\ \mathsf{W}_{2,k}=\sup\limits_{y\in E_k} w_2(y),\ \mathsf{U}_k=\sup\limits_{z\in E_k} u(z)$ sınıflarını ele alalım. $w_1(\cdot),\ w_2(\cdot)\in\mathcal{A}$ olduğunu ve (5.10) şartının sağlandığını kabul edelim. Hesaplamalar sonucunda (5.16) ifadesini aşagıdaki hale getiririz.

$$\begin{aligned}\mathsf{T}_k &= \left\| w_2(\cdot)\left(M_\alpha f\chi_{G_k}\right)(\cdot)\chi_{E_k}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}\\ &\le \left\| w_2(\cdot)\left(M_\alpha f\chi_{G_k}\right)(\cdot)\chi_{E_k}(\cdot)\right\|_{L_u^{ps}}\end{aligned}$$

(burada $s\le q$ olarak alındığında $\max(r,s)\le\min(p,q)$ olur)

$$\le c_0 \mathsf{W}_{2,k}\mathsf{U}_k^{\frac{1}{p}} \left\|\left(M_\alpha f\chi_{G_k}\right)(\cdot)\chi_{E_k}(\cdot)\right\|_{L^{ps}}$$

$$\le c_1 \mathsf{W}_{2,k}\mathsf{U}_k^{\frac{1}{p}} \left\|\left(M_\alpha f\chi_{G_k}\right)(\cdot)\right\|_{L^{r^*s}} \times \left\|\chi_{E_k}(\cdot)\right\|_{L^{\tilde{r}\infty}}$$

$$\left(\frac{1}{\tilde{r}}=\frac{1}{p}-\frac{1}{r^*}=\frac{1}{p}+\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{r}\right)$$

$$\le c_2 2^{nk\left[\frac{1}{p}+\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{r}\right]} \mathrm{W}_{2,k} \mathrm{U}_k^{\frac{1}{\mathrm{p}}} \left\| \left(f \chi_{G_k} \right)(\cdot) \right\|_{L^{rs}}$$

$$(M_\alpha : L_1^{rs}(1) \to L_1^{r*s}(1))$$

$$\approx c_2 2^{nk\left[\frac{1}{p}+\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{r}\right]} \mathrm{W}_{2,k} \mathrm{U}_k^{\frac{1}{\mathrm{p}}} \left[\sum_j 2^{js} \left(\int_{G_k \cap \{ f(\cdot) > 2^j \}} dx \right)^{\frac{s}{r}} \right]^{\frac{1}{s}}$$

$$= c_2 \left[\sum_j 2^{js} \left(\int_{G_k \cap \{ f(\cdot) > 2^j \}} \left[2^{nk\left[\frac{1}{p}+\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{r}\right]} \mathrm{W}_{2,k} \mathrm{U}_k^{\frac{1}{\mathrm{p}}} \right]^r dx \right)^{\frac{s}{r}} \right]^{\frac{1}{s}}$$

$$\le c_3 \left[\sum_j 2^{js} \left(\int_{G_k \cap \{ f(\cdot) > 2^j \}} \left[|x|^{n\left[\frac{1}{p}+\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{r}\right]} w_2(x) \times \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \times \left(\sup_{4^{-1}|x|<|z|<4|x|} u(z) \right)^{\frac{1}{p}} \right]^r dx \right)^{\frac{s}{r}} \right]^{\frac{1}{s}}$$

olur. Burada $\mathrm{W}_{2,k} \le \sup\limits_{(4^{-1}|x|)<|z|<16(4^{-1}|x|)} w_2(y) \le c w_2(x)$ olduğunda $w_2(\cdot) \in \mathcal{A}$ dir). (5.10) dan,

$$\le c_4 \left[\sum_j 2^{js} \left(\int\limits_{G_k \bigcap \{ f(.) > 2^j \}} \left(w_1(x) \right)^r v(x) dx \right)^{\frac{s}{r}} \right]^{\frac{1}{s}}$$

$$\le c_4 \left[\sum_j \mathrm{W}_{1,k}^{s} 2^{js} \left(\int\limits_{G_k \bigcap \{ f(.) > 2^j \}} v(x) dx \right)^{\frac{s}{r}} \right]^{\frac{1}{s}}$$

$$\le c_5 \left[\sum_j 2^{(j+N_k)s} \left(\int\limits_{G_k \bigcap \{ 2^{N_k} f(.) > 2^{(j+N_k)} \}} v(x) dx \right)^{\frac{s}{r}} \right]^{\frac{1}{s}}$$

$N_k \in \mathbb{Z}$, $2^{N_k} \le W_{1,k} < 2^{N_k+1}$ ve $w_1(.) \in A$

olduğunda $\mathrm{W}_{1,k} \le \sup\limits_{(8^{-1}|x|)<|z|<64(8^{-1}|x|)} w_1(z) \le c w_1(x)$ için

$$\le c_5 \left[\sum_j 2^{(j+N_k)s} \left(\int\limits_{G_k \bigcap \{ \mathrm{W}_{1,k} f(.) > 2^{(j+N_k)} \}} v(x) dx \right)^{\frac{s}{r}} \right]^{\frac{1}{s}}$$

$$\leq c_6 \left[\sum_j 2^{ls} \left(\int_{G_k \bigcap \{cw_1(.) f(.) > 2^l\}} v(x)\, dx \right)^{\frac{s}{r}} \right]^{\frac{1}{s}}$$

$$\leq c_7 \left\| w_1(.) \left(f \chi_{G_k}(.) \right) \right\|_{L_v^{rs}}$$

elde edilir. Şimdi (5.10) yerine (5.10*) şartını kullanarak aynı (5.16) yerel kestirimlerinin nasıl elde edildiğini gösterelim. Esas problem her $x \in G_k$ için, $2^{nk\left[\frac{1}{p}+\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{r}\right]} W_{2,k} U_k^{\frac{1}{p}} \leq C w_1(x) \left(v(x)\right)^{\frac{1}{r}}$ olacak şekilde bir $C > 0$ sabitinin var olmasıdır. Gerçekten bu eşitsizliğe göre daha önceki ifadelerde değişiklikler yaparak yandaki ifadeyi,

$$T_k = \left\| w_2(\cdot) \left(M_\alpha f \mathbf{1}_{G_k} \right)(\cdot) \mathbf{1}_{E_k}(\cdot) \right\|_{L_u^{pq}}$$

$$\leq c_2 \left[\sum_j 2^{js} \left(\int_{G_k \cap \{f(\cdot) > 2^j\}} \left[2^{nk\left[\frac{1}{p}+\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{r}\right]} W_{2,k} U_k^{\frac{1}{p}} \right]^r dx \right)^{\frac{s}{r}} \right]^{\frac{1}{s}}$$

$$\leq c_8 \left[\sum_j 2^{js} \left(\int_{G_k \cap \{f(\cdot) > 2^j\}} \left(w_1(x)\right)^r v(x) dx \right)^{\frac{s}{r}} \right]^{\frac{1}{s}}$$

$$\leq c_9 \left\| w_1(\cdot) f \mathbf{1}_{G_k}(\cdot) \right\|_{L_v^{rs}}$$

elde ederiz. Esas problemi ispat etmek için her $x \in G_k$, $z \in E_k$ değerleri için,

$$\frac{1}{\sup_{4^{-1}|z|<|y|<4|z|} \left[\frac{1}{v(y)} \right]} \leq v(x)$$

olduğunu göstermek gerekir. Bu eşitsizlik doğrudur. Çünkü $x \in G_k$, $z \in E_k$ için,

$$1 = v(x) \tfrac{1}{v(x)} \leq v(x) \sup_{4^{-1}|z|<|y|<4|z|} \left[\tfrac{1}{v(y)} \right] \quad \text{olur. Dolayısıyla,}$$

$$2^{nk\left[\frac{1}{p}+\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{r}\right]} W_{2,k} U_k^{\frac{1}{p}} \leq C_1 \sup_{z \in E_k} \left\{ |z|^{n\left[\frac{1}{p}+\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{r}\right]} W_{2,k} \left(u(z)\right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

$$\leq C_2 \sup_{z \in E_k} \left\{ |z|^{n\left[\frac{1}{p}+\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{r}\right]} w_2(z) \left(u(z)\right)^{\frac{1}{p}} \right\} \qquad (w_2(\cdot) \in \mathcal{A} \text{ alındığında})$$

$$\leq C_3 \sup_{z \in E_k} \left\{ w_1(z) \frac{1}{\sup_{4^{-1}|z|<|y|<4|z|} \left[\frac{1}{v(y)} \right]^{\frac{1}{r}}} \right\} \qquad ((5.10^*)\text{şartından})$$

$$\leq C_4 w_1(x) \sup_{z \in E_k} \left\{ \frac{1}{\sup_{4^{-1}|z|<|y|<4|z|} \left[\frac{1}{v(y)} \right]^{\frac{1}{r}}} \right\} \qquad (w_1(\cdot) \in \mathcal{A} \text{ alındığında})$$

$$\leq C_4 w_1(x)\left(v(x)\right)^{\frac{1}{r}}.$$

eşitsizliğinden esas nokta ortaya çıkar.

Teorem 5.2' nin ispatı: Kabul edelim ki $\mathcal{H}: L_v^{rs}(w_1) \to L_u^{rq}(w_2)$ olsun. Burada amaç $\alpha = 0,\ r^* = r = p$ için, (5.7) ve (5.12) şartlarını elde etmektir. İspattaki anahtar ifade, desteği I olan her $f(\cdot) \geq 0$ fonksiyonu ve x_I merkezli I aralığı için,

$$\left(\int_I f(y)dy\right)\left\| w_2(\cdot)\left(\left|\cdot - x_I\right| + |I|\right)^{-1}\right\|_{L_u^{rq}} \leq C\left\| w_1(\cdot)\left(f\chi_I\right)(\cdot)\right\|_{L_v^{rs}} \tag{5.17}$$

ifadesidir. Gerçekten, (5.17) ifadesi, $\left\|w_2(\cdot)\chi_I(\cdot)\right\|_{L_u^{rq}} \leq C'\left\|w_1(\cdot)\chi_I(\cdot)\right\|_{L_v^{rs}}$ eşitsizliğini ifade eder. Dolayısıyla $w_1(\cdot), w_2(\cdot) \in \mathcal{A}$ kullanılarak, yeteri kadar küçük $|I|$ uzunluğu ve merkezi $x \neq 0$ olan her I aralığı için,

$$w_2(x)\left(|I|^{-1}\int_I u(y)dy\right)^{\frac{1}{r}} \leq c w_1(x)\left(|I|^{-1}\int_I u(y)dy\right)^{\frac{1}{r}},$$

elde edilir. Daha sonra Lebesque differensiyelleme teoreminden,
$w_2(x)\left(u(x)\right)^{\frac{1}{r}} \leq c w_2(x)\left(v(x)\right)^{\frac{1}{r}}$ elde edilir ki bu ifade aynı zamanda (5.7) şartını verir. Diğer yandan, $I =]-R, R[\ \ (i.e\ x_I = 0)$ aralığı için (5.17) ifadesi kullanılarak, (5.12) şartı elde edilir. Çünkü,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{v(\cdot)w_1(\cdot)}\chi_{|\cdot|<R}(\cdot)\right\|_{L_v^{\frac{r}{r-1}\frac{s}{s-1}}}\left\|w_2(\cdot)\left(\left|\cdot\right| + R\right)^{-1}\right\|_{L_u^{rq}} &\leq c\left(\int_{|x|<R}\frac{1}{v(y)w_1(y)}g(y)v(y)dy\right)\left\|w_2(\cdot)\left(\left|\cdot\right| + R\right)^{-1}\right\|_{L_u^{rq}} \\
&\leq cC\left\|w_1(\cdot)\frac{1}{w_1(\cdot)}g(\cdot)\right\|_{L_v^{rs}} \\
&= C\left\|w_1(\cdot)\left(f\chi_I\right)(\cdot)\right\|_{L_v^{rs}} \quad . \\
&\leq cC
\end{aligned}$$

olur. Burada $\left\|g(\cdot)\right\|_{L_v^{rs}} \leq 1$ dır. Lemma 5.2 B kısmından, (5.17) eşitsizliği $N > 0$ için elde edilir;

$$\left(\int_I f(y)dy\right)\left\|w_2(\cdot)s_I(\cdot)\chi_{\ ]a+N,\infty[}\ (\cdot)\right\|_{L_u^{rq}} \leq C\left\|w_1(\cdot)\left(f\chi_I\right)(\cdot)\right\|_{L_v^{rs}}, \tag{5.18}$$

ve

$$\left(\int_I f(y)dy\right)\left\|w_2(\cdot)s_I(\cdot)\chi_{\ ]-\infty,a+N[}\ (\cdot)\right\|_{L_u^{rq}} \leq C\left\|w_1(\cdot)\left(f\chi_I\right)(\cdot)\right\|_{L_v^{rs}}, \tag{5.19}$$

doğru olur. Burada $s_I(x) = \left(\left|x - x_I\right| + |I|\right)^{-1}$ ve I, x_I merkezli herhangi bir aralıktır, $I = \left[a, a+R\right], R > 0$ şeklindedir. (5.18) ve (5.19) eşitsizlikleri $N > 0,\ N < R$ için,

$$\left(Hf\,\chi_{[a,a+N]}\right)(\cdot)\chi_{]a+N,\infty[}(\cdot) \geq cs_I(\cdot)\left(\int_I f(y)dy\right)\chi_{]a+N,\infty[}(\cdot) \tag{5.20}$$

ve

$$\left(Hf\,\chi_{[a+N,a+R]}\right)(\cdot)\chi_{]-\infty,a+N[}(\cdot) \geq cs_I(\cdot)\left(\int_I f(y)dy\right)\chi_{]-\infty,a+N[}(\cdot) \tag{5.21}$$

eşitsizliklerinin bir sonucudur. Dolayısıyla (5.17) eşitsizliğini elde etme problemi (5.20) ve (5.21) eşitsizliklrini elde etme problemine indirgenebilir.

$f(\cdot) \geq 0,\quad I = [a, a+R]$ aralığında destekli ve $Q = \int_I f(y)dy$ olsun. Bu durumda $\frac{1}{2}Q = \int_{[a,a+N]} f(y)\,dy$ olacak şekilde $0 < N < R$ alınabilir. Açık olarak, her $x \in \left]a+N, \infty\right[$ ve $y \in [a, a+N]$ değerleri için,

$0 < x - y = |x-y| \leq\ |x - x_I| + |I| = s_I^{-1}(x)$ olur. (5.20) eşitsizliği sağlanır. Çünkü,

$$\begin{aligned}
(Hf\,\chi_{[a,a+N]})(x)\chi_{]a+N,\infty[}(x) &\geq s_I(x)\left(\int_{[a,a+N]} f(y)\,dy\right)\chi_{]a+N,\infty[}(x) \\
&= s_I(x)\frac{1}{2}Q\chi_{]a+N,\infty[}(x) \\
&= s_I(x)\frac{1}{2}\left(\int_I f(y)dy\right)\chi_{]a+N,\infty[}(x)
\end{aligned}$$

olur. Eğer $\int_{[a+N,a+R]} f(y)\,dy = \int_{[a,a+R]} f(y)\,dy - \int_{[a,a+N]} f(y)\,dy = \frac{1}{2}Q$ ise (5.21) ifadesinin ispatı da benzer yolla gösterilir.

Önerme 5.1' nin ispatı: Muckenhoupt (5.11) şartından Hardy (5.12) şartına elde etmek için, ilk olarak $v(\cdot) \in RD_{\nu,r,s}(w_1),\ \nu > 0$ durumunu göz önüne alalım. $0 < \theta \leq \min(p,q)$ olmak üzere Lemma 5.2 uygulanarak,

$$\begin{aligned}
&\left\| w_2(\cdot)|\cdot|^{\alpha-n}\chi_{\{|\cdot|>R\}}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}^{\theta}\left\|\frac{1}{v(\cdot)w_1(\cdot)}\chi_{\{|\cdot|>R\}}(\cdot)\right\|_{L_v^{\frac{r}{r-1}\frac{s}{s-1}}}^{\theta} \leq c_1\sum_{k\geq 0}\left\| w_2(\cdot)|\cdot|^{\alpha-n}\chi_{\{2^kR<|\cdot|\leq 2^{k+1}R\}}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}^{\theta}\times\left\|\frac{1}{v(\cdot)w_1(\cdot)}\chi_{\{|\cdot|<2^{-(k+1)}2^{k+1}R\}}(\cdot)\right\|_{L_v^{\frac{r}{r-1}\frac{s}{s-1}}}^{\theta} \\
&\leq c_2\sum_{k\geq 0}2^{-n\nu\theta k(1-\frac{1}{r})}(2^{k+1}R)^{\alpha-n}\left(\left\| w_2(\cdot)\chi_{\{|\cdot|\leq 2^{k+1}R\}}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}\times\right. \\
&\left.\times\left\|\frac{1}{v(\cdot)w_1(\cdot)}\chi_{\{|\cdot|<2^{(k+1)}R\}}(\cdot)\right\|_{L_v^{\frac{r}{r-1}\frac{s}{s-1}}}\right)^{\theta} \\
&\leq c_3A^{\theta}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$u(\cdot) \in D_{\varepsilon,p,q}(w_2),\ 1 \le \varepsilon \le \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)p$ ve yukarıdaki gibi seçilen θ değeri için, yandaki ifadeler yazılabilir,

$$\begin{aligned}\left\| w_2(\cdot)\left|\cdot\right|^{\alpha-n} \chi_{\{|\cdot|>R\}}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}^{\theta} &\le c_4 \sum_{k\ge 0} \left\| w_2(\cdot)\left|\cdot\right|^{\alpha-n} \chi_{\{2^k R<|\cdot|\le 2^{k+1}R\}}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}^{\theta} \\ &\le c_5 2R^{(\alpha-n)\theta} \sum_{k\ge 0} 2^{k(\alpha-n)\theta} \left\| w_2(\cdot)\chi_{\{|\cdot|\le 2^{k+1}R\}}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}^{\theta} \\ &\le c_6 R^{(\alpha-n)\theta} \sum_{k\ge 0} 2^{-kn\theta\left[\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)-\frac{1}{p}\varepsilon\right]} \left\| w_2(\cdot)\chi_{\{|\cdot|<R\}}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}^{\theta} \\ &\le c_7 \left(R^{(\alpha-n)} \left\| w_2(\cdot)\chi_{\{|\cdot|<R\}}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}} \right)^{\theta}\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikten (5.11) şartının, (5.12) şartını verdiği görülür.

Aşağıda lemma 5.2, lemma 5.4 ve lemma 5.5 ispatlanacaktır

Lemma 5.2 nin ispatı: A kısmının ispatı $C=1$ alındığında [16]' deki gibidir. B kısmının ispat etmek için; $0<\gamma\le \min(p,q)$ olduğunu kabul edelim. $p=q$ ya da $q<p$ için burada anahtar $\|.\|_{L_u^{\frac{p}{\gamma}\frac{q}{\gamma}}}$ 'nin norm olmasına dayanmasıdır. Buradan,

$$\begin{aligned}\left\| f(.)\sum_k \chi_{E_k}(.)\right\|_{L_u^{pq}}^{\gamma} &= \left\| \left(f(.)\sum_k \chi_{E_k}(.)\right)^{\gamma}\right\|_{L_u^{\frac{p}{\gamma}\frac{q}{\gamma}}} \\ &\le c_1 \left\| f^{\gamma}(.)\sum_k \chi_{E_k}(.)\right\|_{L_u^{\frac{p}{\gamma}\frac{q}{\gamma}}} \\ &\le c_2 \sum_k \left\| f^{\gamma}(.)\chi_{E_k}(.)\right\|_{L_u^{\frac{p}{\gamma}\frac{q}{\gamma}}} \\ &= c_3 \sum_k \left\| f^{\gamma}(.)\chi_{E_k}(.)\right\|_{L_u^{pq}}^{\gamma}\end{aligned}$$

olur. Şimdi $p<q, \gamma\le p<q$ ya da $\dfrac{\gamma}{p}\le 1$ ve $1<\dfrac{q}{\gamma}$ durumunu göz önüne alalım. Böylece $\sum_j b_j^{\theta}\le 1$ ve $\theta=\dfrac{q}{\gamma-q}$ olmak üzere $\left(b_j\right)_j \in l^{\theta}$ reel değerli negatif olmayan dizisi için,

$$\left\| f(.)\sum_k \chi_{E_k}(.)\right\|_{L_u^{pq}}^{\gamma} \le c_4 \left[\sum_j 2^{jq} \left(\sum_k \int_{E_k \bigcap \{f(.)>2^j\}} u(y)\,dy \right)^{\frac{\gamma}{p}\times\frac{q}{\gamma}} \right]^{\frac{\gamma}{q}}$$

$$\le c_4\left[\sum_j\left[2^{j\gamma}\sum_k\left(\int\limits_{E_k\bigcap\{f(.)>2^j\}} u(y)\,dy\right)^{\frac{\gamma}{p}}\right]^{\frac{q}{\gamma}}\right]^{\frac{\gamma}{q}} \qquad \left(\frac{\gamma}{p}\le 1 \text{ olduğunda}\right)$$

$$\le c_4\sum_k\sum_j 2^{j\gamma} b_j\left(\int\limits_{E_k\bigcap\{f(.)>2^j\}} u(y)\,dy\right)^{\frac{\gamma}{p}}$$

$$\le c_4\sum_k\left[\sum_j 2^{jq}\left(\int\limits_{E_k\bigcap\{f(.)>2^j\}} u(y)\,dy\right)^{\frac{q}{p}}\right]^{\frac{\gamma}{q}}$$

$$\approx c_4\sum_k\left\|f(.)\,\chi_{E_k}(.)\right\|_{L_u^{pq}}^{\gamma}$$

elde edilir. Bu sonucun ilk kısmı daha önce gösterilmiştir [15]. İkinci kısım dual aracılığıyla gösterilebilir.

Lemma 5.4 ün ispatı: M_α alt toplamsal olduğundan, sabit $c>0$ ve bütün $f(.)\ge 0$ fonksiyonları için,

$$\left\|w_2(.)(M_\alpha f)(.)\right\|_{L_u^{pq}}^{\lambda}\le c\left(P_1^\lambda+P_2^\lambda+P_3^\lambda\right)$$

ve

$$P_1^\lambda=\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} w_2(.)\left(M_\alpha f\chi_{\{|y|\le 2^{k-1}\}}\right)(.)\,\chi_{E_k}(.)\right\|_{L_u^{pq}}^{\lambda}$$

$$P_2^\lambda=\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} w_2(.)\left(M_\alpha f\chi_{G_k}\right)(.)\,\chi_{E_k}(.)\right\|_{L_u^{pq}}^{\lambda}$$

$$P_3^\lambda=\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} w_2(.)\left(M_\alpha f\chi_{\{2^{k+2}<|y|\}}\right)(.)\,\chi_{E_k}(.)\right\|_{L_u^{pq}}^{\lambda}$$

olur. Burada P_1^λ, P_3^λ ifadelerini elde edeceğiz.

P_1^λ in kestirimi: Anahtar her $x\in E_k$ için,

$$\left(M_\alpha f\chi_{\{|.|\le 2^{k-1}\}}\right)(x)\le c|x|^{(\alpha-n)}\left[\int\limits_{\{|y|\le|x|\}} f(y)\,dy\right] \tag{5.20}$$

olduğunu göstermektir. Burada $c>0$ yalnız α ve n değerlerine bağlı sabittir. Gerçekten, (5.20) eşitsizliği kullanılarak,

$$P_1^{\lambda} \le c_1 \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_2(.)|.|^{\alpha-n} \left(\int_{|y|\le|.|} f(y)\,dy \right) \chi_{E_k}(.) \right\|_{L_u^{pq}}^{\lambda}$$

$$= c_1 \left\| w_2(.)|.|^{\alpha-n} \left(\int_{|y|\le|.|} f(y)\,dy \right) \right\|_{L_u^{pq}}^{\lambda}$$

$$= c_1 S_1^{\lambda}$$

elde edilir. (5.20) eşitsizliğini elde etmek için; $x\in E_k$, $|y|\le 2^{k-1}$ için $|y|\le|x|$ alalım. Böylece, $g(.)=f(.)\chi_{\{|y|\le 2^{k-1}\}}(.)$ ifadesinin desteği $\{y:|y|\le|x|\}=\{|y|=|x|\}$ kümesini kapsar. Diğer taraftan,

$r\ge 2^{k+2}$ olduğundan $\int_{B(x,r)} g(y)\,dy$ ifadesi sıfıra yakınsamaz. Dolayısıyla reel r değeri için,

$$r^{\alpha-n} \int_{B(x,r)} g(y)\,dy \le c 2^{k(\alpha-n)} \int_{B(x,r)} g(y)\,dy$$

$$\le c'|x|^{k(\alpha-n)} \int_{B(x,r)\bigcap \sup p\, g} g(y)\,dy$$

$$\le c'|x|^{k(\alpha-n)} \int_{\{|y|\le|x|\}} f(y)\,dy;$$

olur bu nedenle (5.20) ifadesi gösterilmiş olur.

P_3^{λ} ün kestirimi: P_3^{λ} eşitsizliğini elde ederken her $x\in E_k$ değeri için,

$$\left(M_{\alpha} f_{\{2^{k+2}\le|.|\}} \right)(x) \;\le\; c \sup_{l\ge 2} \left\{ d_{k+l}^{(\alpha-n)} \left(\int_{E_k+1} f(y)\,dy \right) \right\} \tag{5.21}$$

sağlandığını iddia edelim. Burada $d_{k+l}=2^{k+l}$ ve $c=c(\alpha,n)>0$ dir. Bu iddianın ispatı aşağıdadır.

İlk olarak $\lambda=p=q$, $\lambda\le q<p$ ve $\lambda<p\le q$ durumlarını kabul edelim. Buradan,

$$\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(M_{\alpha} f \chi_{2^{k+2}<|.|} \right)(.)\chi_{E_k}(.) \right]^{\lambda} \le \sum_{k} \left(M_{\alpha} f \chi_{2^{k+2}<|.|} \right)^{\lambda}(.)\chi_{E_k}(.)$$

$$\le c \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\sup_{l\ge 2} \left\{ d_{k+l}^{(s-n)} \left(\int_{E_{k+l}} f(y)\,dy \right) \right\} \right]^{\lambda} \chi_{E_k}(.)$$

$$\leq c\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[d_{k+l}^{(s-n)}\left(\int_{E_{k+l}} f(y)\,dy\right)\right]^{\lambda}\chi_{E_k}(.)$$

$$= c\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left[d_{m}^{(s-n)}\left(\int_{E_{m}} f(y)\,dy\right)\right]^{\lambda}\sum_{k=-\infty}^{m-2}\chi_{E_k}(.)$$

$$= c\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left[d_{m}^{(s-n)}\left(\int_{E_{m}} f(y)\,dy\right)\right]^{\lambda}\chi_{\{|.|<2^m\}}(.)$$

elde edilir. Yukarıdaki hipotezlerden $\|\cdot\|_{L_u^{\frac{p}{\lambda}\frac{q}{\lambda}}}$ ifadesinin norm olmasından dolayı,

$$\mathcal{P}_3^{\lambda}\leq c^{\lambda}\left\|w_2(\cdot)^{\lambda}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left[d_m^{(s-n)}\left(\int_{E_m} f(y)dy\right)\right]^{\lambda}\chi_{\{|\cdot|<2^m\}}(\cdot)\right\|_{L_u^{\frac{p}{\lambda}\frac{q}{\lambda}}}$$

$$\leq C\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left[d_m^{(s-n)}\left(\int_{E_m} f(y)dy\right)\right]^{\lambda}\left\|w_2(\cdot)\chi_{\{|\cdot|<2^m\}}(\cdot)\right\|_{L_u^{\frac{p}{\lambda}\frac{q}{\lambda}}}^{\lambda}$$

elde edilir. Şimdi $\lambda = p < q$ durumunu ele alalım. Bu temel ifade (5.9) ifadesinin hipotezidir. Buradan,

$$\mathcal{P}_3^{p}\leq c\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\sup_{l\geq 2} d_{k+l}^{(s-n)}\left(\int_{E_{k+l}} f(y)dy\right)\right]w_2(\cdot)\chi_{E_k}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}^{p}$$

$$\leq C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\sup_{l\geq 2} d_{k+l}^{(s-n)}\left(\int_{E_{k+l}} f(y)dy\right)\right]^{p}\left\|w_2(\cdot)\chi_{E_k}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}^{p}$$

(Lemma 5.2' nin ikinci kısmından $(\lambda = p \leq \min(p,q))$ olsun)

$$\leq C\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[d_{k+l}^{(s-n)}\left(\int_{E_{k+l}} f(y)dy\right)\right]^{p}\left\|w_2(\cdot)\chi_{E_k}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}^{p}$$

$$\leq C\sum_{m}\left[d_{m}^{(s-n)}\left(\int_{E_{m}} f(y)dy\right)\right]^{p}\sum_{k=-\infty}^{m-2}\left\|w_2(\cdot)\chi_{E_k}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}^{p} \qquad \text{((5.9) dan)}$$

$$\leq C'\sum_{m}\left[d_{m}^{(s-n)}\left(\int_{E_{m}} f(y)dy\right)\right]^{p}\left\|w_2(\cdot)\chi_{\{|\cdot|<2^m\}}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}^{p}$$

olur. Şimdi (5.21) iddiasını gösterebiliriz. Bunun için aşağıdaki ifadeyi kabul edelim,

$$\mathcal{S}=\sup_{l\geq 2} 2^{(\alpha-n)(k+l)}\left[\int_{\{2^{k+l}<|y|\leq 2^{k+l+1}\}} f(y)dy\right]<\infty .$$

$x\in E_k$ olsun. Bu iddia, $\int_{B(x,r)} f(y)\chi_{\{2^{k+2}<|y|\}}(y)dy$ sıfıra gitmediğinde,

$$r^{\alpha-n}\int_{B(x,r)} f(y)\chi_{\{2^{k+2}<|y|\}}(y)dy\leq c\mathcal{S} \tag{5.22}$$

olacak şekilde sabit $c>0$ değerinin olmasıdır. $r>0$ ve $\int_{B(x,r)} f(y)\chi_{\{2^{k+2}<|y|\}}(y)dy \neq 0$ ifadesini göz önüne alalım.

$B(x,r)\cap\{2^{k+m}<|y|\leq 2^{k+m+1}\}\neq\varnothing$ ve $B(x,r)\cap\{2^{k+m+1}<|y|\leq 2^{k+m+2}\}=\varnothing$ olacak şekilde bir $m\geq 2$ tam sayısı vardır. $2^{k+m}-2^{k+1}<r\leq 2^{k+m+1}$ ve $m\geq 2$ olduğundan $\frac{1}{2}2^{k+m}\leq r<22^{k+m}$ yazılır. İlk ifade ile beraber,

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,r)} f(y)\chi_{\{2^{k+2}<|y|\}}(y)\,dy &= \sum_{l=2}^{m}\int_{B(x,r)\cap\{2^{k+l}<|y|\leq 2^{k+l+1}} f(y)\,dy \\
&\leq \sum_{l=2}^{m}\int_{\{2^{k+l}<|y|\leq 2^{k+l+1}\}} f(y)dy \\
&\leq \mathcal{S}\sum_{l=2}^{m} 2^{(k+l)(n-\alpha)} \\
&\leq \mathcal{S}\frac{2^{2(n-\alpha)}}{2^{(n-\alpha)}-1}\times 2^{[k+(m-1)](n-\alpha)} \\
&= c(\alpha,n)\mathcal{S}r^{(n-\alpha)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlik (5.22) ifadesini gerektirir.

Lemma 5.5' in ispatı: İlk olarak sabit $c>0$ için aşağıdaki ifadeler açıktır: Her $f(\cdot)\in C_c^{\infty}$ için,

$$\left\|w_2(\cdot)(T_\alpha f)(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}^{\lambda} \leq c(\mathcal{P}_1^{\lambda}+\mathcal{P}_2^{\lambda}+\mathcal{P}_3^{\lambda})$$

ile birlikte,

$$\mathcal{P}_1^{\lambda} = \left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} w_2(\cdot)\left(T_\alpha f\chi_{\{|y|\leq 2^{k-1}\}}\right)(\cdot)\,\chi_{E_k}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}^{\lambda},$$

$$\mathcal{P}_2^{\lambda} = \left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} w_2(\cdot)\left(T_\alpha f\chi_{G_k}\right)(\cdot)\,\chi_{E_k}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}^{\lambda},$$

$$\mathcal{P}_3^{\lambda} = \left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} w_2(\cdot)\left(T_\alpha f\chi_{\{2^{k+2}<|y|\}}\right)(\cdot)\,\chi_{E_k}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}^{\lambda},$$

olur. Burada E_k, G_k lemma 5.4' ün ispatındaki gibi tanımlandı. T_α üzerindeki şarttan,

$$\left(T_\alpha f\chi_{\{|\cdot|\leq 2^{k-1}\}}\right)(\cdot),\ \left(T_\alpha f\chi_{G_k}\right)(\cdot),\ \left(T_\alpha f\chi_{\{2^{k+2}<|\cdot|\}}\right)(\cdot)$$

ifadesi iyi tanımlıdır. Lemma 5.4' ün ispatındaki gibi, $\mathcal{P}_1^{\lambda}$ hemen aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\left|\left(T_s f_{\{|\cdot|\leq 2^{k-1}\}}\right)(x)\right| \leq c(\alpha-n)|x|^{(\alpha-n)}\left[\int_{\{|y|\leq|x|\}}|f(y)|dy\right] \qquad \text{her } x\in E_k.$$

Bu eşitsizliği elde etmek için $x \in E_k$, $|y| \le 2^{k-1}$ için $|y| \le \frac{1}{2}|x| < |x|$ ve $\frac{1}{2}|x| \le |x-y|$ olduğunu kabul edelim. Dolayısıyla K çekirdeği için verilen standart kestirimi kullanarak,

$$\left|K(x,y)\right| \le c\left|x-y\right|^{(\alpha-n)} \le c'\left|x\right|^{(s-n)}$$

elde edilir. x, $\left(f_{\{|y|\le 2^{k-1}\}}\right)(\cdot)$ fonksiyonunun desteğine ait olmadığından,

$$\begin{aligned}\left|\left(T_s f \chi_{\{|\cdot|\le 2^{k-1}\}}(x)\right)\right| &\le \int_{\{|y|\le 2^{k-1}\}} \left|K(x,y)\right|\left|f(y)\right| dy \\ &\le C\left|x\right|^{(\alpha-n)}\left[\int_{\{|y|<|x|\}} \left|f(y)\right| dy\right]\end{aligned}$$

yazılabilir. Benzer olarak $\mathcal{P}_3$ için kestirim her $x \in E_k$ için,

$$\left|\left(T_s f_{\{2^{k+2}<|\cdot|\}}(x)\right)\right| \le c(s,n)\left[\int_{\{|x|\le|y|\}} \left|f(y)\right|\left|y\right|^{(s-n)} dy\right]$$

eşitsizliğinin bir sonucudur. Gerçekten, $x \in E_k, 2^{k+2} < |y|$ için $|x| < 2|x| \le |y|$, $\frac{1}{2}|y| \le |x-y|$ olur. Diğer taraftan x, $\left(f\chi_{\{2^{k+2}<|y|\}}\right)(\cdot)$ fonksiyonunun desteğine ait olmadığından,

$$\left|\left(T_s f \chi_{\{2^{k+2}<|\cdot|\}}(x)\right)\right| \le C\left[\int_{\{|x|<|y|\}} \left|f(y)\right|\left|y\right|^{(s-n)} dy\right]$$

eşitsizliğini yazarız, bu ifade bizim aradığımız ifadedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] Samko, 1993, Harmonic Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York.

[2] Neri U. 1971, Singular İntegrals, Lecture Notes İn Mathematics,Springer Verlag Berlin, New York.

[3] Sadoyky C. 1979, İnterpolation of Operators and Singular İntegrals, Pure and Applied Mathematics, Mercel Dekker İnc. New York

[4] M. Levitan, 1967, B. M. Uspehi Mat. Nauk.

[5] Kipriyanov, I.A., On Singular İntegrals Generated By The Generalized Shift Operator, II, Sibirsk. Mat. Zh., (1970).

[6] Aliev, I. A .On Riesz Transformations Generated by Generalized Shift Operators. Izvestiya Acad of Azarbeydian, No:1, p. 7-13. (1987)

[7] Gadjiev, A. D. and Aliev, I. A. Proc. Seminars of The Inst. Agplied Math. Vol. 3, No: 2, Tebilisi

[8] Ekincioğlu İ. Genelleştirilmiş öteleme operatörü ile elde edilen Riesz Dönüşümler, 1995 Ankara.

[9] G. G. Lorentz On the theory of spaces $\wedge$. Pasific J. Math. 1(1951).

[10] A. Hunt, On L(p,q) spaces. L’enseign. Math. 12 (1966), 249-294.

[11] Y. Rakotondratsımba, On The Boundedness Of Classical Operators On Weigted Lorentz Spaces.

[12] E.M.Stein, Fractional integrals in n-Dimensional Euclidean spaces. J. Math. Mech.

[13] V. Kokilashvili and M. Krbec, Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces, 2nd ed. World Scientific 57 (1991).

[14] M. Carro and J. Soria, The Hardy-Littlewood maximal function and weighted Lorentz spaces, Preprint, 1993.

[15] D. Edmunds, P. Gurka and L. Pick, Compactness of Hardy-type integral operators in weighted Banach function spaces. Studia Math. 109 (1994), No1, 73-90.

[16] E. Sawyer, Weighted Lebesque and Lorentz norm inequality for the Hardy operators. Trans. Amer. Math. Soc. 281 (1984), 329-337.