AĞIRLIKLI LORENTZ UZAYLARINDA GENELLEŞMİŞ
ÖTELEME İLE ELDE EDİLEN RIESZ-BESSEL DÖNÜŞÜMLERİ
VE BAZI KLASİK OPERATÖRLERİN SINIRLILIĞI

Şahin SAĞLAM

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Eylül 2007

AĞIRLIKLI LORENTZ UZAYLARINDA GENELLEŞMİŞ
ÖTELEME İLE ELDE EDİLEN RIESZ-BESSEL
DÖNÜŞÜMLERİ VE BAZI KLASİK OPERATÖRLERİN
SINIRLILIĞI

Şahin SAĞLAM

Dumlupınar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisans Üstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

Kütahya 2007

KABUL ve ONAY SAYFASI

Şahin SAĞLAM'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı AĞIRLIKLI LORENTZ UZAYLARINDA GENELLEŞMİŞ ÖTELEME İLE ELDE EDİLEN RIESZ-BESSEL DÖNÜŞÜMLERİ VE BAZI KLASİK OPERATÖRLERİN SINIRLILIĞI başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

…. / …. / 2007

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nejat EKMEKÇİ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Erhan ATA

Üye : Yrd. Doç. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU (Danışman)

Fen Bilimleri Enstitüsünün Yönetim Kurulunun ..../........../........... gün ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. M. Sabri ÖZYURT

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

AĞIRLIKLI LORENTZ UZAYLARINDA GENELLEŞMİŞ ÖTELEME İLE ELDE EDİLEN RIESZ-BESSEL DÖNÜŞÜMLERİ VE BAZI KLASİK OPERATÖRLERİN SINIRLILIĞI

Şahin SAĞLAM
Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2007
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, temel kavramlara ve bazı teoremlere ayrıldı. İkinci bölümde, Genelleşmiş öteleme verildi. Üçüncü bölümde genelleşmiş öteleme operatörü ile elde edilen yüksek mertebeden Riesz dönüşümleri ele alındı. Dördüncü bölümde Ağırlıklı Lorentz uzayları ve bu uzaylarda klasik Riesz dönüşümünün sınırlılığı verildi. Son bölümde ağırlıklı Lorentz uzaylarında bazı klasik operatörlerin sınırlılığı incelendi.

Anahtar Kelimeler: Ağırlıklı Lorentz Uzayları, Calderon Zygmund operatörü, Genelleşmiş Öteleme Operatörü, Kesirli İntegral Operatörü, Riesz Dönüşümleri.

RIESZ-BESSEL TRANSFORMATIONS OBTAINED THROUGH GENERALIZED SHIFT IN WEIGHTED LORENTZ SPACE AND THE BOUNDEDNESS OF SOME CLASSICAL OPERATORS

Şahin SAĞLAM
Mathematics Department, M. S. Thesis, 2007
Thesis Supervisor: Asist. Prof. İsmail EKİNCİOĞLU

SUMMARY

This present thesis is consisted of five chapters. In the first chapter, it has been mentioned about the basic concepts and some theorems. In the second chapter, the generalized shift has been given. Moreover, it has been focused on the high order Riesz transformations obtained through generalized shift operator in the third chapter. Then, 'Weighted Lorentz Spaces' and the boundedness of classical Riesz transformations on these spaces have been clarified in the fourth chapter. Finally, in the last chapter, the boundedness of some classical operators on the Weighted Lorentz Spaces have been analyzed.

Keywords: Calderon Zygmund operator, Fractional Integral Operator, Generalized Shift Operator, Riesz transformations, Weighted Lorentz Spaces.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamda bana her konuda destek olan değerli hocam Yrd. Doç. Dr. İsmail Ekincioğlu’na başta olmak üzere, arkadaşlarım Ahmet Coşkun ve Mehmet Karakelek’e, bugüne kadar desteğini ve sevgilerini esirgemeyen aileme ve beni lisansüstü eğitim almam için teşvik eden, her aşamada destek olan eşime teşekkürler.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklamalar**
$\mathbb{R}^n$	Euclid uzayı
S^{n-1}	Birim küre
A_p	Ağırlıklı Muckenhoupt sınıfı
w	Ağırlık fonksiyonu
p.v.	Esas değer
L_{pw}	Ağırlıklı uzay
T	Singüler integral operatörü
$L_p(\mathbb{R}_n)$	Lebesque uzayı
$W_p(T_p)$	Singüler operatörler için ağırlık uzayı
$W_p(M_p)$	Maksimal operatörler için ağırlık uzayı
C^∞	Sonsuz mertebeden sürekli fonksiyonlar
$W_p(g_\Omega)$	g_Ω için L^p ağırlıklarının sınıfı
$\Gamma(n)$	Gamma fonksiyonu
R_j	Riesz dönüşümü
$L_{loc}(\mathbb{R}^n)$	Lokal integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı
B_t	Bessel operatörü
$T_y f(x)$	Adi öteleme operatörü
$\mathbb{R}_n^+$	n- boyutlu yarı uzayında genelleşmiş öteleme
$\Delta = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} + B_{x_n}$	Laplace –Bessel operatörü
F_B	Fourier-Bessel dönüşümü
$K_j(x)$	Riesz dönüşümünün çekirdekleri

GİRİŞ

Bu tezde, Ağırlıklı Lorentz uzaylarında Calderon Zygmund operatörü ve integral operatörlerinin sınırlılığı ve genelleşmiş öteleme ile elde edilen Riesz-Bessel dönüşümleri incelenmiştir. Bunun için önce,

$$T_x^y f(x) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi} f(x'-y', \sqrt{x_n^2+y_n^2-2x_ny_n\cos\theta})\sin^{2p}\theta d\theta$$

genelleşmiş öteleme operatörü verilmiştir. Bu operatör $\mathbb{R}^n$ 'de son değişkene göre elde edilen genelleşmiş öteleme operatörüdür. Daha sonra bu operatöre bağlı

$$\left(R_B^{(m)}f\right)(x) = c_m\left(n,\upsilon_1\right)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\substack{0<\varepsilon<|x| \\ 0<x_n<\infty}} \frac{P_m(x)}{|x|^{m+n+2\upsilon_1}} T_x^y f(x) x_n^{2\upsilon_2}dx,$$

Riesz-Bessel dönüşümü verilmiştir. Burada $c_m(n,\nu_1) = 2^{\frac{n+2\nu_1}{2}}\Gamma\left(\frac{m+n+2\nu_1}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\right]^{-1}$ dir.

Bu çalışmada verilen Riesz- Bessel dönüşümü son bir değişkene göre elde edilen Riesz dönüşümüdür. Daha sonra Ağırlıklı Lorentz uzayları tanımlanmıştır. (X,υ), ölçü uzay olsun. $1\le p\le\infty$ ve $1\le s\le\infty$ için $L_\upsilon^{ps} = L^{ps}(\mathrm{X},d\upsilon)$ Lorentz uzayı, $\|f\|_{L^{ps}(\mathrm{X},d\upsilon)}<\infty$ olduğunda tüm υ ölçülebilir f fonksiyonlarının uzayıdır. Burada, eğer $1\le p\le\infty$ ve $1\le s<\infty$ ise

$$\|f\|_{L^{ps}(\mathrm{X},d\upsilon)} = \left(s\int_0^\infty\left(\upsilon\left\{x\in\mathrm{X};|f(x)|>r\right\}\right)^{s/p} r^{s-1}dr\right)^{1/s}$$

ve eğer $1\le p<\infty$ ve $s=\infty$ ise $\|f\|_{L^{ps}(\mathrm{X},d\upsilon)} = \sup_{r>0} r\left(\left\{x\in\mathrm{X};|f(x)|>r\right\}\right)^{1/p}$ dir. Eğer $1<p<\infty$ ve $1\le s\le\infty$ veya $p=s=1$, $p=s=\infty$ ise bu durumda $L^{ps}(\mathrm{X},d\upsilon)$ $\|.\|_{L^{ps}(\mathrm{X},d\upsilon)}$ normuna denk normlu bir Banach Uzayı'dır. $\mathrm{X}=\mathbb{R}^n$ ve υ ölçümünün Lebesgue ölçümüne göre mutlak sürekli olduğunu kabul edeceğiz. Yani $d\upsilon=\omega(x)dx$ dir. $L_\omega^{ps} = (\mathbb{R}^n,\omega dx)$ uzayına ω ağırlıklı Lorentz uzayı diyelim. Bu durumda Klasik Riesz döşümü denilen yani adi ötelemeye bağlı

$$R_jf(x) = c_n\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|y|\ge\varepsilon} f(x-y)\frac{y_j}{|y|^{n+1}}dy \qquad \left(j=1,2,3,...,n\right)$$

Riesz dönüşümünün, kenarları koordinat eksenlerine paralel olan tüm $Q \subset \mathbb{R}^n$ küpler olmak üzere L_{ω}^{ps} den L_{ω}^{ps}'ye sınırlı olduğunu veren teoremler verilmiştir. Son kısımda Ağırlıklı Lorentz uzaylarında Calderon Zygmund operatörü ve integral operatörlerinin sınırlılığı incelenmiştir.

1. Temel Kavramlar

Bu bölüm, sonraki bölümlerde geçen bazı temel teorem, tanım ve lemmalar ile birlikte kısa bilgilerden oluşmaktadır.

Tanım 1.1 (Öklid Uzayı): $\mathbb{R}^n = \{x : x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2,...,n\}$ biçiminde tanımlanan uzaya Öklid uzayı denir.

Tanım 1.2 (Yarıçap Fonksiyonu): Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu için, $f\left(x\right) = f(|\,x\,|)$ ise $f(x)$ fonksiyonuna yarıçap (radial) fonksiyonu denir [1].

Tanım 1.3 : $1 \le p < \infty$ olmak üzere; $L^p = L^p(\mathbb{R}^n) = \{f : \int \left|f(x)\right|^p dx < \infty\}$ uzayına p. mertebeden Lebesque anlamında integrallenebilen fonksiyon uzayı denir. $L^p = L^p(\mathbb{R}^n)$ normu da,

$$\|f\|_p = \left(\int_{R^n} \left|f(x)\right|^p \right)^{1/p} < \infty \quad , 1 \le p < \infty$$

şeklinde tanımlanır [2].

Tanım 1.4 (Hölder Eşitsizliği): $f \in L^p, g \in L^q$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$\left| \int f(x) g(x) dx \right| \le \|f\|_p \, \|g\|_q$$

eşitsizliğine Hölder eşitsizliği denir.

Tanım 1.5 (Minkowsky eşitsizliği): $f \in L^p, g \in L^q$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_q$$

eşitsizliğine Minkowsky eşitsizliği denir.

Tanım 1.6 : $\mathbb{R}_n^+ = \left\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_n \ge 0\right\}$ olsun. $1 \le p \le \infty$ ve $\upsilon > 0$ olmak üzere $L_{p\upsilon}$ ağırlıklı uzayı,

$$L_{p\upsilon} = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}^n} \left|f(x)\right|^p x_n^{2\upsilon} dx < \infty \right\}$$

ve normu

$$\|f\|_{p\upsilon} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p x_n^{2\upsilon} dx \right)^{1/p} < \infty$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.7 : $\mathbb{R}^n$ uzayının her kompakt alt cümlesi üzerinde integrallenebilen fonksiyona Lokal integrallenebilirdir denir ve $L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

Tanım 1.8 (Karekteristik Fonksiyon): Bir A cümlesinin karakteristik fonksiyonu

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve χ_A ile gösterilir.

Tanım 1.9 (Gamma Fonksiyonu): $\Gamma(n)$ sembolü ile gösterilen ve

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

bağıntısıyla tanımlanan fonksiyona Gamma fonksiyonu denir.

Tanım 1.10 (Klasik Riesz Dönüşümü): $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ olsun.

$$R_j f(x) = c_n \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|y| \geq \varepsilon} f(x-y) \frac{y_j}{|y|^{n+1}} dy \qquad (j = 1, 2, 3, ..., n)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme f fonksiyonunun klasik Riesz dönüşümü denir. Burada $c_n = \pi^{\frac{-(n+1)}{2}} \Gamma(\frac{n+1}{2})$ dir.[3]

Tanım 1.11: Lokal integrallenebilen pozitif w fonksiyonları

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right)^{1/p} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-p'/p} dx \right)^{1/p'} < \infty \qquad (A_p)$$

eşitsizliğini sağlarsa bu sınıfa (A_p) ağırlık sınıfı denir.

Tanım 1.12 (Destek-Support): Bir f fonksiyonunun desteği, $Suppf = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ olarak tanımlanır.

Tanım 1.13: Görüntü kümesi sonlu elemandan meydana gelen bir φ fonksiyonuna basit fonksiyon denir.

$$\varphi=\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{A_k} \ , \ \int_E \chi_A dx = |A| \ \text{ ve } \int_E \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{A_k} dx = \sum_{k=1}^{n} c_k |A_k|$$

dir.

Tanım 1.14: $(X,\mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}\left((\alpha,+\infty)\right)=\left\{x \in X : f(x)>\alpha\right\} \in \mathcal{A} \qquad \text{dır.}$$

Tanım 1.15 (Ağırlık Fonksiyonu): Hemen hemen her yerde lokal integrallenebilen $\omega : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir.

Tanım 1.16 (Adi Öteleme): $T_y f(x)=f(x-y)$ ile gösterilen, x noktasını $x-y$ noktasına öteleyen operatöre $\mathbb{R}$ de adi öteleme denir. Adi öteleme $(-\infty,\infty)$ aralığında tanımlı olup $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dir.

Tanım 1.17 ($\mathbb{R}^+$ Ötelemesi): $T_y f(x)=f(x-y)$ adi öteleme ve $x', y' \in \mathbb{R}_{n-1}$ ve $c_\upsilon = \dfrac{\Gamma\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\upsilon)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$ olmak üzere $\mathbb{R}^+$ ötelemesi,

$$T_x^y f(x)=c_\upsilon \int_0^\pi f\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right](\sin\alpha)^{2\upsilon-1}\, d\alpha$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.18: $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\Delta=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

operatörüne $\mathbb{R}^n$ de Laplace operatörü denir.

Tanım 1.19: G, $\mathbb{R}^n$ nin açık irtibatlı alt cümlesi, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $u(x)$, G de tanımlı bir fonksiyon olmak üzere,

$$\Delta u=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}=0$$

denklemine Laplace denklemi denir. Bu denklemin çözümlerine de Harmonik fonksiyonlar denir.

Tanım 1.20: $\nu > 0$, $r > 0$ olmak üzere,

$$B_r = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\nu}{r}\frac{d}{dr}$$

şeklinde ifade edilen B_r operatörüne Bessel operatörü denir.

Tanım 1.21: $\mathbb{R}_n^+ = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_n \geq 0\}$ ve $\nu > 0$ olmak üzere Laplace- Bessel operatörü,

$$\Delta_{B_k} := \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} + \sum_{l=1}^{k} \frac{2\nu_l}{x_{n-l+1}} \frac{\partial}{\partial x_{n-l+1}} \quad , \quad 1 \leq k < n$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 1.22: $\nu > -1$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere Bessel fonksiyonu,

$$J_\nu(br) = \left[2^\nu \Gamma(\nu+1)\right]^{-1} (br)^\nu j_\nu(br)$$

şeklinde tanımlanır ve burada j adi Bessel fonksiyonu olup,

$$j_{\nu-\frac{1}{2}}(br) = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi e^{ibr\cos\alpha} (\sin\alpha)^{2\nu\text{-}1} d\alpha$$

biçimindedir.

Tanım 1.23: $\varphi(\mathrm{x}) \in \mathrm{Z}_+\left(\mathbb{R}_n^+\right)$ olmak üzere,

$$\left(p.v.f, \varphi\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\substack{0<\varepsilon<|x| \\ 0 \leq x_n < \infty}} f(x)\varphi(x) x_n^{2\nu} dx$$

ifadesine $f(x)$ in esas değeri denir.

Tanım 1.24: φ $(\mathrm{x}) \in$ $Z_+\left(\mathbb{R}_n^+\right)$ ve $x^k, y^k \in \mathbb{R}_{n-k}$ olmak üzere,

$$\left(F_B \varphi\right)(y) = c_\nu \int\limits_{R_n^k} \varphi(x) e^{-i(x^k y^k)} \prod_{l=1}^{k} j_{\nu_l - \frac{1}{2}} (x_{n-k+l} y_{n-k+l}) x_{n-k+l}^{2\nu_l} dx$$

operatörüne Fourier-Bessel operatörü denir. Burada, $c_\nu = (2\pi)^{-\frac{n-k}{2}} 2^{-|\nu| + \frac{k}{2}} \left(\prod_{l=1}^{k} \Gamma(\nu_l + \frac{1}{2}) \right)^{-1}$ dir.

Tanım 1.25: $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ olsun.

$$R_j f(x) = c_n \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|y|\geq\varepsilon} \frac{y_j \mathrm{T}_y^x f(x)}{|y|^{n+2|\nu|+1}}\, y_n^{2\upsilon} dy \qquad (j=1,2,3,...,n)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme f fonksiyonunun genelleşmiş öteleme ile elde edilen Riesz dönüşümü denir. Burada $c_{\upsilon_j} = \pi^{\frac{-1}{2}} \dfrac{\Gamma\left(\upsilon+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\upsilon)}$ ‘dir.

Tanım 1.26: $1 \leq$ p$<\infty$ ve $1 \leq s \leq \infty$ veya $p = s = 1$ olsun. Eğer

$$\sup_Q \|x_Q\|_{L_w^{ps}} \|x_Q / w\|_{L_w^{p'q'}} |Q|^{-1} < \infty$$

ise $w:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ağırlık fonksiyonu A_{ps} ye aittir. Burada supremum koordinat eksenlerine paralel kenarlı küpler üzerinden alınmıştır. $(Q \subset \mathbb{R}^n)$

$\int w(x)\,dx \left(\int_Q w^{\frac{-1}{p-1}}(x)\,dx\right)^{p-1} = \|x_Q\|_{L_w^{pp}}^p \|x_Q / w\|_{L_w^{p'q'}}^p$ dir. Yani A_{pp}, A_p Muchenhoupt sınıfı ile aynıdır.

Tanım 1.27 . T_x^y genelleşmiş öteleme operatörü olsun. Bu durumda $f(x) \in Z_+$ ise,

$$\left(R_B^{(m)} f\right)(x) = c_m(n,\upsilon_1) \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\substack{0<\varepsilon<|x| \\ 0<x_n<\infty}} \frac{P_m(x)}{|x|^{m+n+2\upsilon_1}} T_x^y f(x)\, x_n^{2\upsilon 1} dx$$

$$c_m(n,\nu_1) = 2^{\frac{n+2\nu_1}{2}} \Gamma\left(\frac{m+n+2\nu_1}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\right]^{-1}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme f fonksiyonunun genelleşmiş öteleme ile elde edilen Riesz Bessel dönüşümü denir.

2. Genelleşmiş Öteleme Operatörü

2.1. Genelleşmiş Öteleme Operatörü

M. Levitan 1951 yılında bir çalışmasında $(0,\infty)$ üst yarı uzayında $\mathbb{R}^+$ nın ötelemesinin var olduğunu makalesinde göstermiştir [4]. Daha sonra Bessel diferensiyel operatörleri ile ilişkisini inceleyerek bu ötelemenin $(0,\infty)$ aralığındaki noktaların yine bu aralıktaki noktalara dönüştüğünü göstermiştir. I. Kipriyanov $\mathbb{R}_n^+$ n- boyutlu yarı uzayında genelleşmiş ötelemeyi tanımlamıştır. Çalışmalarında, bu ötelemenin $(n-1)$ değişkene göre adi ve n. değişkene göre $\mathbb{R}^+$ da ki öteleme olarak ele almış, daha sonra Fourier–Bessel operatörü ile ilişkisini incelemiştir [5]. $\mathbb{R}^+$ ve $\mathbb{R}$ ötelemeleri bu bölümde verilmiştir.

2.2. Adi Öteleme

Tanım 2.2.1 : $T_y f(x) = f(x+y)$ ile gösterilen x nokrasını $x+y$ noktasına öteleyen operatöre $\mathbb{R}$ ' de adi öteleme denir.

Adi öteleme $(-\infty,\infty)$ aralığında tanımlıdır. Dolayısıyla $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dir. Bu şekildeki adi öteleme

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

$$u(x,y) = f(x)$$

başlangıç değer probleminin çözümünün değerleri adi ötelemeye bağlıdır.

2.3. Genelleşmiş Öteleme

Şimdi $\mathbb{R}^+$ da ki ötelemeyi inceleyelim. B_t Bessel operatörü olmak üzere,

$$\begin{aligned} B_x u &= B_y u \\ u(x,0) &= f(x) \\ u_y(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

başlangıç değer probleminin yani,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2p+1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2p+1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.2.1}$$

denkleminin,

$$u\big|_{y=0} = f(x), \ \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = 0$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü

$$u(x,y) = T_x^y f(x) = \frac{\Gamma(2p+1)}{2^{2p-1}\Gamma^2(p+\frac{1}{2})} \int_0^\pi f(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta})\sin^{2p}\theta d\theta$$

şeklindedir. Bu formülde θ' yi $\pi-\theta'$ ye dönüştürürsek ve Γ fonksiyonlarına ait olan ,

$$\frac{\Gamma^2(a)}{\Gamma(2a)} = \frac{1}{2^{2a-1}} \frac{\Gamma(a)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(a+\frac{1}{2})}$$

formülünü kullanırsak bu durumda,

$$T_x^y f(x) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi f(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta})\sin^{2p}\theta d\theta$$

elde edilir. Bu öteleme $(0,\infty)$ aralığında tanımlıdır. Bu ötelemeye $\mathbb{R}^+$ da ki öteleme denir. Bu ifade de $T_x^0 f(x) = f(x)$ olduğu aşikârdır. Ayrıca eğer $f(x)$ fonksiyonunun sürekli türevi varsa bu durumda,

$$\frac{\partial}{\partial y} T_x^y f(x)\Big|_{y=0} = 0 \tag{2.2.2}$$

dir. Ve $f(x)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden sürekli türevi varsa bu durumda $T_x^y f(x)$, (2.2.1) denkleminin çözümüdür. Ve (2.2.2) başlangıç koşulları elde edilebilir. Ayrıca $x=(x',x_n), y=(y',y_n), \ x,y \in R^n$ ve $x'=(x_1,x_2,...x_{n-1})$, $y'=(y_1,y_2,...y_{n-1})$ ve

$$\Delta = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} + B_{x_n}$$

Laplace –Bessel operatörü olmak üzere,

$$\sum_{l=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + \frac{2p+1}{x_n}\frac{\partial u}{\partial x_n} = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial y_l^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2} + \frac{2p+1}{y_n}\frac{\partial u}{\partial y_n}$$

denkleminin yukarıda verilen başlangıç koşulları altındaki çözümü ,

$$T_x^y f(x) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi f(x'-y', \sqrt{x_n^2+y_n^2-2x_ny_n\cos\theta})\sin^{2p}\theta d\theta$$

şeklindedir. Bu operatöre genelleşmiş öteleme operatörü denir.

Şimdi T^y operatörünün özelliklerini verelim. T^y operatörünün özellikleri adi ötelemenin özelliklerine benzerdir.

1. Lineerlik özelliği :

$$T_x^y\left\{af(x)+bg(x)\right\}=aT_x^y f(x)+bT_x^y g(x)$$

dir. Bu eşitliği şu şekilde gösterebiliriz.

$$T_x^y\left\{af(x)+bg(x)\right\}=T_x^y\left\{(af+bg)(x)\right\}$$

$$=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi}(af+bg)\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right]\sin^{2p}\theta d\theta$$

$$=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\left\{\int_0^{\pi}af\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right]\right.$$

$$\left.+\int_0^{\pi}bg\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right]\right\}\sin^{2p}\theta d\theta$$

$$=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}a\int_0^{\pi}f\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right]\sin^{2p}\theta d\theta$$

$$+\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}b\int_0^{\pi}g\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right]\sin^{2p}\theta d\theta$$

$$=aT_x^y f(x)+bT_x^y g(x)$$

bulunur.

2.Pozitiflik Özelliği : Eğer $f(x)\geq 0$ ise $T_x^y f(x)\geq 0$ dır.

$$T_x^y f(x)=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi}f\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right]\sin^{2p}\theta d\theta$$

ele alalım. $f\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right]\geq 0$ ve $\sin\theta$,$0\leq\theta\leq\pi$ aralığında pozitif olduğundan yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı da pozitiftir. O halde,

$$T_x^y f(x)\geq 0$$

dir.

3. $T_x^y(1) = 1$ dir.

$$T_x^y f(x) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{\pi} f\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right] \sin^{2p}\theta d\theta$$

eşitliğinde $f(x) = 1$ alınırsa,

$$T_x^y(1) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{\pi} \sin^{2p}\theta d\theta$$

elde edilir ve

$$\int_0^{\pi} \sin^{2p}\theta d\theta = \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(p+1)}$$

formülü de yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa,

$$T_x^y(1) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} . \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(p+1)} = 1$$

sonucu elde edilir

4. Eğer $x \geq a$, $f(x) = 0$ ise bu durumda $|x-y| \geq a$ için $T_x^y f(x) = 0$ dır.

5. T^y **operatörü süreklidir:** Eğer $f_n(x)$ fonksiyonlar dizisi her sonlu aralıkta $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsak ise, bu durumda iki değişkenli fonksiyonlar dizisi $T_x^y f_n(x)$ her bir sonlu bölgede $T_x^y f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar.

6. T^y **operatörü sınırlıdır:**

$$\left|T_x^y f(x)\right| = \left| \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{\pi} f\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right] \sin^{2p}\theta d\theta \right|$$

$$\leq \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{\pi} \left| f\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right]\right| \sin^{2p}\theta d\theta$$

$$\leq \sup_{x\geq 0} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{\pi} \left| f\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right]\right| \sin^{2p}\theta d\theta$$

$$\leq \sup_{x\geq 0} |f(x)| \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{\pi} \sin^{2p}\theta d\theta$$

elde edilir. Buradan,

$$\left|T_x^y f(x)\right| \leq T_x^y \left|f(x)\right| \leq \sup_{x\geq 0}\left|f(x)\right|$$

olur.

7. T^y **Operatörünün Yer Değiştirme Özelliği :** $T_x T_y f(x) = T_y T_x f(x)$ 'dir.

8. Değişme Özelliği : $T_x^y T_x^z f(x) = T_x^z T_x^y f(x)$ 'dir.

9. Eşlenik Özelliği: Eğer sürekli $f(x)$ fonksiyonu için

$$\int_0^{\infty} x^{2p+1}\left|f(x)\right| dx < \infty$$

ve $g(x)$, tüm $x \geq 0$ için sürekli sınırlı fonksiyon ise,

$$\int_0^{\infty} T_x^y f(x).g(x) x^{2p+1} dx = \int_0^{\infty} f(x) T_x^y g(x) x^{2p+1} dx$$

olur.

İspat : Kabul edelim ki $f(x)$ fonksiyonu sonlu bir aralıkta ikinci mertebeden türevlenebilir ise $f(x)=0$ dır. Ve $g(x) = J_p(\sqrt{\lambda}x)$, $(\lambda \leq 0)$ dır.

$$K(y) = \int_0^{\infty} T_x^y f(x) J_p(\sqrt{\lambda}x) x^{2p+1} dx$$

olsun. Şimdi $K(y)$ fonksiyonuna $B_x = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2p+1}{x}\frac{d}{dx}$ operatörünü uygulayalım. Bu durumda,

$$\int_0^{\infty} B_x(T_x^y f(x)) g(x) x^{2p+1} dx = \int_0^{\infty} \left[\frac{d^2}{dx^2} T_x^y f(x) + \frac{2p+1}{x}\frac{d}{dx} T_x^y f(x)\right] g(x) x^{2p+1} dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} T_x^y f(x) g(x) x^{2p+1} dx$$

$$+\int_0^\infty \frac{2p+1}{x}\frac{d}{dx}T_x^y f(x)g(x)x^{2p+1}dx = I_1 + I_2$$

olur. Eşitliğin sağındaki birinci integrali hesaplayalım.

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}T_x^y f(x)\right)g(x)x^{2p+1}dx$$

$$dv = \frac{\partial}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial x}T_x^y f(x)\right)dx \qquad \text{ve} \qquad u = g(x)x^{2p+1}$$

olarak kısmi integrasyon uygulanırsa bu durumda,

$$I_1 = \frac{\partial}{\partial x}T_x^y f(x)g(x)\,x^{2p+1}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}T_x^y f(x)\frac{\partial}{\partial x}(g(x)x^{2p+1})dx$$

$$= -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}T_x^y f(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x}x^{2p+1}dx - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}T_x^y f(x)g(x)\frac{2p+1}{x}x^{2p+1}dx$$

elde edilir O halde ,

$$I_1 + I_2 = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}T_x^y f(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x}x^{2p+1}dx$$

olur. Buna kısmi integrasyon uygularsak sonuç olarak,

$$\int_0^\infty B_x(T_x^y f(x))g(x)x^{2p+1}dx = \int_0^\infty T_x^y f(x)B_x g(x)x^{2p+1}dx$$

bulunur.

10. $T_x^{-y} f(x) = T_x^y f(x)$ ‘dir.

11. $\int_{\mathbb{R}^n} T^y f(x)x_n^{2p}dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)x_n^{2p}dx$ ’dir.

3. Riesz Dönüşümleri

3.1. Klasik Riesz Dönüşümleri

$\mathbb{R}^n$ de tanımlı bir f fonksiyonunun Riesz dönüşümleri;

$$R_j f(x) = c_n \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int f(x-y) \frac{y_j}{|y|^{n+1}} dy \qquad (j = 1,2,\ldots,n) \tag{3.1.1}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlardır. $K_j(x) = \dfrac{\Omega_j(x)}{|x|^n}$ Riesz dönüşümü çekirdekleri olup burada,

$$\Omega_j(x) = c_n x_j |x|^{-1} \tag{3.1.2}$$

ve

$$c_n = \pi^{-(n+1)/2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \tag{3.1.3}$$

dir. Ayrıca $\Omega_j(x)$, her bir $j = 1,2,\ldots,n$ için sıfırıncı mertebeden homojen ve tek bir fonksiyon olup S üzerinde ortalama değeri sıfırdır. Fakat $x = 0$ ' da süreksiz ve S üzerinde düzgündür.

3.2. Genelleşmiş Öteleme Operatörleri İle Elde Edilen Riesz Dönüşümleri

Singüler İntegraller teorisinde önemli bir yer teşkil eden Riesz dönüşümleri ikinci bölümde ele alınmıştır. Klasik Riesz dönüşümleri incelendiğinde yani,

$$\left(R_j f\right)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} c_n \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(x-y) dy$$

gözönüne alındığında bu dönüşümün $f(x-y)$ adi ötelemeye bağlı olduğu görülmektedir. Ancak bu öteleme yerine başka bir öteleme tanımlanabilir mi ? problemi [6] incelemiş ve sonra [7] bu çalışmayı genelleştirerek Riesz-Bessel dönüşümlerini tanımlamıştır. Bu çalışmalarda ele alınan genelleşmiş öteleme; (n-k) tane adi öteleme, k tane $\mathbb{R}^+$ ötelemesi olmak üzere tanımlanan genelleşmiş ötelemeye bağlı Riesz-Bessel dönüşümleri tanımlanmıştır.

B_t Bessel operatörü olsun. $\mathbb{R}_n^k = \left\{x : x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), x_n \geq 0\right\}$ S_+^k Schwarz $\left(S_+^1 = S_+\right)$ uzayı ve $S_+^{k'}$ onun duali olsun. $1 \leq p < \infty$ ve $v_1 > 0, v_2 > 0, \ldots, v_k > 0$ için, $L_{p,v}$ uzayını aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$L_{p,v}=L_{p,v}\left(\mathbb{R}_n^k\right)=\left\{f:\|f\|_{p,v}=\left(\int_{\mathbb{R}_n^k}|f(x)|^p\left(\prod_{l=1}^{k}x_{n-l+1}^{2v_l}\right)dx\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\right\}$$

Ayrıca $v_1>0,v_2>0,...,v_k>0$, $v=(v_1,v_2,...,v_k)$,$|v|=v_1+...+v_k$ parametreleri için ,

$$\Delta_{B_k}:=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}+\sum_{l=1}^{k}\frac{2v_l}{x_{n-l+1}}\frac{\partial}{\partial x_{n-l+1}}\quad,\quad 1\le k<n$$

Δ_{B_k} Laplace-Bessel operatörünü şeklinde tanımlayalım. S_+^k uzayında Fourier-Bessel dönüşümünü aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$\left(F_{Bk}\varphi\right)(y):=c_\upsilon\int_{\mathbb{R}_n^k}\varphi(x)e^{-x^k y^k}\left(\prod_{l=1}^{k}J_{\upsilon_l-\frac{1}{2}}\left(x_{n-l+1}y_{n-l+1}\right)x_{n-l+1}^{2\upsilon_l}\right)dx$$

$$c_\upsilon=\left[(2\pi)^{\frac{n-k}{2}}\prod_{l=1}^{k}2^{\upsilon_l-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\upsilon_l+\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}$$

Burada $x^k y^k=\langle x^k,y^k\rangle=x_1y_1+...+x_{n-k}y_{n-k}$ 'dır.

Diğer yandan, $\left(F_{B_k}^{-1}\varphi\right)(y)=\left(F_{B_k}\varphi\right)^{-1}$

özelliği geçerlidir. Ayrıca buradaki her bir $J_{\upsilon_l-\frac{1}{2}}\left(x_{n-l+1}.y_{n-l+1}\right)$ ifadesi ikinci bölümde belirtildiği gibi,

$$-B_{y_{n-l+1}}Z=x_{n-l+1}^2Z\quad,\quad Z(0)=1\quad,\quad Z_{n-l+1}^{'}(0)=0$$

başlangıç değer probleminin çözümüdür.

$x=\left(x^k,x_{n-k+1},x_{n-k+2},...,x_n\right)$, $y=\left(y^k,y_{n-k+1},y_{n-k+2},...,y_n\right)$, $x,y\in\mathbb{R}_n^k$ olmak üzere genelleşmiş öteleme operatörünü,

$$T_{x_{n-k+1},...,x_n}^{y}\varphi(x):=\left[\prod_{l=1}^{k}\frac{\Gamma\left(\upsilon_l+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\upsilon_l)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right]\int_0^\pi...\int_0^\pi\varphi\left(x^k-y^k,\sqrt{x_{n-k+1}^2+y_{n-k+1}^2-2x_{n-k+1}y_{n-k+1}\cos\alpha k},\right.$$

$$\left....,\sqrt{x_n^2+y_n^2-2x_ny_n\cos\alpha 1}\right)\left(\prod_{l=1}^{k}\sin^{2\upsilon_l-1}\alpha_l d\alpha_l\right)$$

şeklinde tanımlarız. $T_{x_{n-k+1},...,x_n}^{y}$ operatörü aşağıdaki konvolüsyon operatörünü oluşturur.

$$\left(f*\varphi\right)(x)=c_{\upsilon}\int_{\mathbb{R}_n^k} f(x)\left[T^{y}_{x_{n-k+1},\dots,x_n}\varphi\left(x\right)\right]\left(\prod_{l=1}^{k} y_{n-l+1}^{2\upsilon_l}\right)dy$$

Bundan sonra bu konvolüsyon operatörünü B_k konvolüsyon operatörü olarak adlandıracağız. Fourier-Bessel dönüşümünün tanımından ve genelleşmiş ötelemenin özelliklerinden B_k konvolüsyon operatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. $f*\varphi=\varphi*f$

2. $F_{B_k}\left(f*\varphi\right)=F_{B_k}f\ F_{B_k}\varphi$

3. $\|f*\varphi\|_{\gamma,\upsilon}\leq\|f\|_{p,\upsilon}\|\varphi\|_{q,\upsilon}$, $1\leq p,q\leq\infty$, $\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}-1$

bu Young eşitsizliği olarak bilinir.

Teorem 3.2.1: Eğer $P_k(x)=P_k(x_1,x_2,...x_{n-k},x_{n-k+1}^2,x_{n-k+2}^2,...,x_{n-1}^2,x_n^2)$ $(1\leq k\leq n)$ polinomu, $\Delta_B P_{\mathrm{k}}(\mathrm{x})=0$ olacak şekilde Laplace- Bessel denklemlerini sağlayan k mertebeli bir homojen polinom ise bu durumda F_B Fourier-Bessel dönüşümlerini göstermek üzere,

$$F_B\left(P_k(x)e^{-|x|^2}\right)(y)=2^{-(k+|\nu|+\frac{n}{2})}i^kP_k(y)e^{\frac{-|y|^2}{4}}$$

dır. Burada $|\nu|=\nu_1+\nu_2+...+\nu_k$ dır.

İspat: Önce $x^k,y^k\in R_{n-k}$ ve $x^k.y^k=x_1y_1+x_2y_2+...+x_{n-k}y_{n-k}$ olmak üzere $e^{-\alpha|x|^2}$'nin Fourier-Bessel dönüşümünü bulalım.

$$F_B\left(e^{-\alpha|x|^2}\right)(y)=c_\nu\int_{R_n^k}e^{-\alpha|x|^2-i(x^k.y^k)}\prod_{l=1}^{k}j_{\nu_l-\frac{1}{2}}(x_{n-k+l}y_{n-k+l})x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

$$=c_\nu\int_{R_{n-k}}e^{-\alpha|x^k|^2-i(x^k.y^k)}dx^k\int_0^\infty e^{-\alpha x_{n-k+1}^2}j_{\nu_1-\frac{1}{2}}(x_{n-k+1}y_{n-k+1})x_{n-k+1}^{2\nu_1}dx_{n-k+1}\int_0^\infty...$$

$$...\int_0^\infty e^{-\alpha x_n^2}j_{\nu_k-\frac{1}{2}}(x_ny_n)x_n^{2\nu_k}dx_n \qquad (3.2.1)$$

Burada,

$$c_\nu=c_{\nu_1}c_{\nu_2}...c_{\nu_k}=(2\pi)^{-\frac{n-k}{2}}.2^{-|\nu|+\frac{k}{2}}\left(\prod_{l=1}^{k}\Gamma\left(\nu_l+\frac{1}{2}\right)\right)^{-1}$$

dır. Şimdi bu integralleri hesaplamak için aşağıdaki eşitlikleri göz önüne alalım.

i) $x^k, y^k \in R_{n-k}$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere,

$$\int_{R_{n-k}} e^{-\alpha|x^k|^2 - i(x^k.y^k)} dx^k = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{n-k}{2}} e^{-\frac{|y^k|^2}{4\alpha}} \tag{3.2.2}$$

ii) $\nu > -1$ ve $\alpha > 0$ ve $J_\nu(sa)$ Bessel fonksiyonu ise bu durumda,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha s^2} s^{\nu+1} J_\nu(sa)ds = \frac{(sa)^\nu}{(2\alpha)^{\nu+1}} e^{-\frac{a^2}{4\alpha}} \tag{3.2.3}$$

ve burada,

$$J_\nu(sa) = \left[2^\nu \Gamma(\nu+1)\right]^{-1} (sa)^\nu j_\nu(sa)$$

olduğundan,

$$J_{\nu_l - \frac{1}{2}}(sa) = \left[2^{\nu_l - \frac{1}{2}} \Gamma(\nu_l + \frac{1}{2})\right]^{-1} (sa)^{\nu_l - \frac{1}{2}} j_{\nu_l - \frac{1}{2}}(sa)$$

yazılır. Burada $l = 1,2,\ldots,k$ olmak üzere $s = x_{n-k+l}$, $a = y_{n-k+l}$ seçersek (3.2.1) deki integralleri kolayca hesap ederiz.

$\int_0^\infty e^{-\alpha s^2} J_{\nu_l - \frac{1}{2}}(sa) s^{2\nu_l} ds$ integralinde J yerine j cinsinden değerini yazıp (3.2.3) eşitliğini kullanırsak,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha s^2} s^{2\nu_l} j_{\nu_l - \frac{1}{2}}(sa)ds = \frac{\Gamma\left(\nu_l + \frac{1}{2}\right)}{2.\alpha^{\nu_l + \frac{1}{2}}} e^{-\frac{a^2}{4\alpha}} \tag{3.2.4}$$

elde edilir. Şimdi (3.2.2) ve (3.2.3) eşitliklerini (3.2.1) de yerine yazarsak,

$$F_B\left(e^{-\alpha|x|^2}\right)(y) = c_\nu \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{n-k}{2}} e^{-\frac{|y^k|^2}{4\alpha}} \prod_{l=1}^{k} \frac{\Gamma\left(\nu_l + \frac{1}{2}\right)}{2\alpha^{\nu_l + \frac{1}{2}}} e^{-\frac{a^2}{4\alpha}}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n-k}{2}} 2^{-|\nu| + \frac{k}{2}} \left(\prod_{l=1}^{k} \Gamma\left(\nu_l + \frac{1}{2}\right)\right)^{-1} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{n-k}{2}} e^{-\frac{|y^k|^2}{4\alpha}} \prod_{l=1}^{k} \frac{\Gamma\left(\nu_l + \frac{1}{2}\right)}{2\alpha^{\nu_l + \frac{1}{2}}} e^{-\frac{y_{n-k+l}^2}{4\alpha}}$$

$$= (2\alpha)^{-\frac{n+2|\nu|}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4\alpha}}$$

bulunur. Burada, $y=(y_1,y_2,\dots,y_{n-k},y_{n-k+1},\dots,y_n)=(y^k,y_{n-k+1},\dots,y_n)$ dır.

Eğer $\alpha\to 1$ ve $y\to -2y$ alınırsa bu durumda,

$$F_B\left(e^{-\alpha|x|^2}\right)(y)=(2)^{-\frac{n+2|\nu|}{2}}e^{-|y|^2}$$

olur. Burada $|\nu|=\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_k$ dir. O halde buradan aşağıdaki eşitliği kolayca elde edebiliriz.

$$F_B\left(e^{-\alpha|x|^2}\right)(y)=c_\nu\int\limits_{R_n^k}e^{-|x|^2+2i(x^ky^k)}\prod_{l=1}^{k}j_{\nu_l-\frac{1}{2}}(x_{n-k+l}2y_{n-k+l})x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

$$=c_\nu\int\limits_{R_{n-k}}e^{-\left|x^k\right|^2+2i(x^ky^k)}dx^k\int_0^\infty e^{-x_{n-k+1}^2}j_{\nu_1-\frac{1}{2}}(x_{n-k+1}2y_{n-k+1})x_{n-k+1}^{2\nu_1}dx_{n-k+1}$$

$$\cdots\int_0^\infty e^{-x_n^2}j_{\nu_k-\frac{1}{2}}(x_n2y_n)x_n^{2\nu_k}dx_n$$

Burada, $x^ky^k=x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_{n-k}y_{n-k}$ dir. Şimdi yukarıdaki integralleri hesap etmek için, $l=1,2,\dots,k$, $s=x_{n-k+l}$, $a=y_{n-k+l}$ olmak üzere

$$I_l=\int_0^\infty e^{-s^2}j_{\nu_l-\frac{1}{2}}(2as)s^{2\nu_l}ds$$

seçelim. (3.2.4) eşitliğinde $\alpha\to 1$, $s\to 2s, a\to 2a$ alırsak,

$$I_l=\frac{\Gamma(\nu_l+\frac{1}{2})}{2}e^{-a^2}=\frac{\Gamma(\nu_l+\frac{1}{2})}{2}e^{-y_{n-k+l}^2} \qquad (3.2.5)$$

olur. Ayrıca, $I'=\int\limits_{R_{n-k}}e^{-\left|x^k\right|^2+2i(x^ky^k)}dx^k$ olarak seçelim ve (3.2.2) yi kullanalım. Bu durumda,

$$I'=\pi^{\frac{n-k}{2}}e^{-\left|y^k\right|^2} \qquad (3.2.6)$$

olur. O halde (3.2.5) ve (3.2.6) kullanılarak,

$$\int\limits_{R_n^k}e^{-|x|^2+2i(x^ky^k)}\prod_{l=1}^{k}j_{\nu_l-\frac{1}{2}}(x_{n-k+l}2y_{n-k+l})x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

$$=\prod_{l=1}^{\mathrm{k}}\frac{\Gamma(\nu_l+\frac{1}{2})}{2}e^{-y_{n-k+l}^k}\pi^{\frac{n-k}{2}}e^{-\left|y^k\right|^2}$$

$$=\frac{\prod_{l=1}^{k}\Gamma(\nu_l+\frac{1}{2})}{2^k}e^{-|y|^2}\pi^{\frac{n-k}{2}} \tag{3.2.7}$$

elde edilir. Bu (3.2.7) ifadesine aşağıdaki diferansiyel operatörünü uygularsak,

$$P_k\left(\frac{\partial}{\partial t_1},\frac{\partial}{\partial t_2},\ldots,\frac{\partial}{\partial t_{n-k-1}},\frac{\partial}{\partial t_{n-k}},B_{t_{n-k+1}},\ldots,B_{t_n}\right)\quad(1\le k\le n)$$

(3.2.7) eşitliğini,

$$\int_{R_n^k}P_k(x)e^{-|x|^2+2i(x^ky^k)}\prod_{l=1}^{k}j_{\nu_l-\frac{1}{2}}(x_{n-k+l}2y_{n-k+l})x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

$$=\phi(\mathrm{t})\frac{\prod_{l=1}^{k}\Gamma(\nu_l+\frac{1}{2})}{2^k}e^{-|t|^2}\pi^{\frac{n-k}{2}} \tag{3.2.8}$$

biçiminde elde ederiz. Burada $\phi(\mathrm{t})$ herhangi bir polinomdur. Bu son eşitlikte,

$$j_{\nu-\frac{1}{2}}(\mathrm{r})=\frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi}e^{ir\cos\alpha}(\sin\alpha)^{2\nu-1}d\alpha \tag{3.2.9}$$

kullanılarak $\phi(\mathrm{t})$ polinomu,

$$\phi(\mathrm{t})=2^{\mathrm{k}}\left[\pi^{\frac{n-k}{2}}\prod_{l=1}^{k}\Gamma(\nu_l+\frac{1}{2})\right]^{-1}\frac{\prod_{l=1}^{k}\Gamma(\nu_l+\frac{1}{2})}{k\Gamma(\frac{1}{2})\prod_{l=1}^{k}\Gamma(\nu_l)}\int_{R_n^k}P_k(x)e^{|t|^2-|x|^2+2i(x^kt^k)}$$

$$\cdot\left(\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\prod_{l=1}^{k}e^{2ix_{n-k+l}t_{n-k+l}}(\sin\alpha_l)^{2\nu_l-1}d\alpha_l\right)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

$$=2^{\mathrm{k}}\left[\pi^{\frac{n-k}{2}}\prod_{l=1}^{k}\Gamma(\nu_l+\frac{1}{2})\right]^{-1}\int_{R_n^k}P_k(x)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx\frac{\prod_{l=1}^{k}\Gamma(\nu_l+\frac{1}{2})}{k\Gamma(\frac{1}{2})\prod_{l=1}^{k}\Gamma(\nu_l)}$$

$$\cdot\left(\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}e^{-(x^k-it^k(}\prod_{l=1}^{k}e^{-(x_{n-k+l}^2+i^2t_{n-k+l}^2-2ix_{n-k+l}t_{n-k+l}\cos\alpha_l)}(\sin\alpha_l)^{2\nu_l-1}d\alpha_l\right)$$

biçiminde elde edilir. Şimdi ise T_x^y genelleşmiş öteleme operatörünü tanımlayalım.

$x^k,y^k\in R_{n-k}$, $x=(x^k,x_{n-k+1},\ldots,x_n)$, $\mathrm{y}=(y^k,y_{n-k+1},\ldots,y_n)$ ve

$$c_\nu = \frac{\prod_{l=1}^{k}\Gamma(\nu_l+\frac{1}{2})}{k\Gamma(\frac{1}{2})\prod_{l=1}^{k}\Gamma(\nu_l)} \quad \text{olmak üzere,}$$

$$T_x^y\varphi(x) = c_\nu\int_0^\pi\cdots\int_0^\pi \varphi\Big(x^k - y^k, \sqrt{x_{n-k+1}^2 + y_{n-k+1}^2 - 2x_{n-k+1}y_{n-k+1}\cos\alpha_1},\ldots$$

$$\ldots,\sqrt{x_n^2 + y_n^2 - 2x_n y_n\cos\alpha_k}\Big)\prod_{l=1}^{k}(\sin\alpha_l)^{2\nu_l-1}d\alpha_l$$

dir. Bu takdirde,

$$\phi(\text{t})=2^{\text{k}}\left[\pi^{\frac{n-k}{2}}\prod_{l=1}^{k}\Gamma(\nu_l+\frac{1}{2})\right]^{-1}\int_{R_n^k}P_k(x)\Big(T_{x_{n-k+1},\ldots,x_n}^{-it}e^{-|x|^2}\Big)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}.dx$$

olur. Bu son eşitlikte $t \to -\text{i}t$ alırsak,

$$\phi(\text{-}it)=2^{\text{k}}\left[\pi^{\frac{n-k}{2}}\prod_{l=1}^{k}\Gamma(\nu_l+\frac{1}{2})\right]^{-1}\int_{R_n^k}\Big(T_{x_{n-k+1},\ldots,x_n}^{-t}P_k(x)\Big)e^{-|x|^2}\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}.dx$$

olarak elde ederiz.

Eğer $x = r\theta\Big(0<r<\infty, \theta\in S^+ = \big\{|x|=1, x_{n-k+1},\ldots,x_n \ge 0\big\}\Big)$ ise bu durumda,

$$\phi(\text{-}it)=2^{\text{k}}\left[\pi^{\frac{n-k}{2}}\prod_{l=1}^{k}\Gamma(\nu_l+\frac{1}{2})\right]^{-1}\int_{R_n^k}\Big(T_{r\theta_{n-k+1},\ldots,r\theta_n}^{-t}P_k(r\theta)\Big)e^{-r^2|\theta|^2}\prod_{l=1}^{k}\theta_{n-k+l}^{2\nu_l}\left(\prod_{l=1}^{k}r^{2\nu_l}\right)r^{n-1}dr$$

$$=2^{\text{k}}\left[\pi^{\frac{n-k}{2}}\prod_{l=1}^{k}\Gamma(\nu_l+\frac{1}{2})\right]^{-1}\int_0^\infty r^{2|\nu|+n-1}\left(\int_{S^+}T_{r\theta_{n-k+1},\ldots,r\theta_n}^{-t}P_k(r\theta)\prod_{l=1}^{k}\theta_{n-k+l}^{2\nu_l}\right)e^{-r^2}dr \tag{3.2.10}$$

elde edilir. Şimdi, $\int_0^\infty r^{2|\nu|+n-1}e^{-r^2}dr$ integralini hesap edelim.

$$\int_0^\infty r^{2|\nu|+n-2}e^{-r^2}rdr = \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{\frac{1}{2}(2|\nu|+n-2)}e^{-u}du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty u^{|\nu|+\frac{n}{2}-1}e^{-u}du \tag{3.2.11}$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma\left(|\nu|+\frac{n}{2}\right)$$

Bu son eşitlik ile birlikte (3.2.10)' a ortalama değer teoremini uygularsak,

$$\phi(\text{-}it)=\frac{2}{\Gamma(|\nu|+\frac{n}{2})}P_k(t)\int_0^\infty r^{2|\nu|+n-1}e^{-r^2}dr$$

olup, buradan

$$\phi(\text{-}it)=\frac{2}{\Gamma(|\nu|+\frac{n}{2})}P_k(t)\frac{\Gamma(|\nu|+\frac{n}{2})}{2}$$

$\phi(\text{-}it)=P_k(t)$ elde edilir. Burada $t \to it$ alırsak $\phi(t)=P_k(it)$ olur.

Fourier-Bessel dönüşümü tanımından,

$$F_B\left(P_k(x)e^{-|x|^2}\right)(t)=c_\nu\int_{\mathbb{R}_n^k}P_k(x)e^{-|x|^2+2i(x^k t^k)}\prod_{l=1}^k j_{\nu_l-\frac{1}{2}}(x_{n-k+l}2t_{n-k+l})x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

olup bu eşitlik, (3.2.8) kullanılması ile

$$F_B\left(P_k(x)e^{-|x|^2}\right)(t)=c_\nu\phi(t)\frac{\prod_{l=1}^k\Gamma(\nu_l+\frac{1}{2})}{2^{\mathrm{k}}}\pi^{\frac{n-k}{2}}e^{-|t|^2}$$

olarak elde edilir. Burada ,

$$c_\nu=(2\pi)^{-\frac{n-k}{2}}2^{-|\nu|+\frac{k}{2}}\frac{1}{\prod_{l=1}^k\Gamma(\nu_l+\frac{1}{2})} \quad \text{ve} \quad \phi(t)=P_k(it)=i^{\mathrm{k}}P_k(\mathrm{t})$$

değerlerini yerine yazarsak,

$$F_B\left(P_k(x)e^{-|x|^2}\right)(t)=2^{-(|\nu|+\frac{n}{2})}i^{\mathrm{k}}P_k(\mathrm{t})e^{-|t|^2}$$

olur ki burada $t \to \frac{t}{2}$ dönüşümü ile,

$$F_B\left(P_k(x)e^{-|x|^2}\right)(t)=2^{-(|\nu|+k+\frac{n}{2})}i^{\mathrm{k}}P_k(\mathrm{t})e^{-\frac{|t|^2}{4}}$$

bulunur. Böylece teorem ispat edilmiş olur.

Lemma 3.2.2: Eğer $\int_{S^+}f\left(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n\right)\prod_{l=1}^k\theta_{n-k+l}^{2\nu_l}dS^+=0$ ise bu durumda $\varepsilon\to 0$ ve

$$\left(v.p.f,\varphi\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\substack{0<\varepsilon<|x|\\ 0\le x_n<\infty\\ .\\ .\\ 0\le x_{n-k+1}<\infty}} f(x)\varphi(x)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx \qquad \varphi\in \mathrm{Z}_+$$

olmak üzere,

$$\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2|\nu|-\varepsilon}}\to v.p.\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2|\nu|}}$$

dir.

İspat: İspat için φ (x) $\in$ $Z_+\left(\mathbb{R}_n^+\right)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{R_n}\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2|\nu|-\varepsilon}}\varphi(x)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx=\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{|x|\ge\alpha}\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2|\nu|}}\varphi(x)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

olduğunu gösterelim.

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n}\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2|\nu|-\varepsilon}}\varphi(x)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx=\int\limits_{|x|\le 1}\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2|\nu|-\varepsilon}}\left[\varphi(x)-\varphi(0)\right]\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

$$+\int\limits_{|x|\ge 1}\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2|\nu|-\varepsilon}}\varphi(x)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

eşitliğinin $\varepsilon\to 0$ için limitini alırsak,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}_n}\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2|\nu|-\varepsilon}}\varphi(x)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx=\int\limits_{|x|\le 1}\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2|\nu|}}\left[\varphi(x)-\varphi(0)\right]\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

$$+\int\limits_{|x|\ge 1}\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2|\nu|}}\varphi(x)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

olur. Burada sağ taraftaki birinci integrali hesaplayalım.

$$\int\limits_{|x|\le 1}\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2|\nu|}}\left[\varphi(x)-\varphi(0)\right]\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx=\int\limits_{|x|\le 1}\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2|\nu|}}\varphi(x)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

$$-\varphi(0)\int\limits_{|x|\le 1}\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2|\nu|}}\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

olmak üzere her iki tarafın $\alpha\to 0$ için limitini alırsak, sağdaki ikinci integralin sıfır olduğu görülür. Çünkü;

$$\lim_{\alpha\to 0}\varphi(0)\int\limits_{\alpha\le|x|\le 1}\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2|\nu|}}\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx=\varphi(0)\int_{\alpha}^{1}\int\limits_{R_{n-1}}\frac{f(\theta)}{r^{n+2|\nu|}}\prod_{l=1}^{k}\theta_{n-k+l}^{2\nu_l}\mathrm{d}\theta\mathrm{dr}$$

$$=\varphi(0)\int_{\alpha}^{1}\frac{1}{r^{n+2|\nu|}}\left\{\int\limits_{R_{n-1}}f(\theta)\prod_{l=1}^{k}\theta_{n-k+l}^{2\nu_l}\mathrm{d}\theta\right\}dr$$

$$=\varphi(0)\int_{\alpha}^{1}\frac{1}{r^{n+2|\nu|}}\left\{\int\limits_{S^+}f(\theta)\prod_{l=1}^{k}\theta_{n-k+l}^{2\nu_l}dS^+\right\}dr$$

$$=0$$

dır. Çünkü hipotezden $\int\limits_{S^+}f(\theta)\prod_{l=1}^{k}\theta_{n-k+l}^{2\nu_l}dS^+=0$ idi. Dolayısıyla,

$$\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{\alpha\le|x|\le 1}\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2|\nu|}}\left[\varphi(x)-\varphi(0)\right]\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx=\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{\alpha\le|x|\le 1}\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2|\nu|}}\varphi(x)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

olup buradan,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}_n}\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2|\nu|-\varepsilon}}\varphi(x)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx=\lim_{\alpha\to 0}\int_{\alpha\le|x|\le 1}\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2|\nu|}}\varphi(x)\cdot$$

$$\cdot\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx+\int_{|x|\ge 1}\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2|\nu|}}\varphi(x)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\int_{|x|\ge\alpha}\frac{f\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{n+2|\nu|}}\varphi(x)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

elde edilir ki ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.3 : P_k k mertebeli bir homojen polinom olsun. Bu durumda,

$$F_B\left(v.p.\frac{P_k(x)}{|x|^{k+n+2|\nu|}}\right)=2^{-\frac{n+2|\nu|}{2}}i^k\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+n+2|\nu|}{2}\right)}\frac{P_k(y)}{|y|^k}$$

dir.

İspat. Teoremin ispatını yapmak için ilk önce ispatta kullanacağımız aşağıdaki eşitliği göstererek başlayalım. Her $\alpha>0$ için,

$$F_B\left[f(\alpha x)\right](t)=\alpha^{-n-2|\nu|}F_B\left[f(x)\right](\frac{t}{\alpha})$$

dir. Bu eşitliği elde etmek için Fourier-Bessel dönüşüm tanımını kullanalım. O halde,

$$\left(F_B\varphi\right)(y)=c_\nu\int_{R_n^k}\varphi(x)e^{-i(x^k y^k)}\prod_{l=1}^{k}j_{\nu_l-\frac{1}{2}}(x_{n-k+l}y_{n-k+l})x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

olup aynı şekilde,

$$F_B\left(f(\alpha x)\right)(t)=c_\nu\int_{R_n^k}f(\alpha x)e^{-i(x^k t^k)}\prod_{l=1}^{k}j_{\nu_l-\frac{1}{2}}(x_{n-k+l}t_{n-k+l})x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

olur. Burada $x\to\dfrac{x}{\alpha}$ dönüşümü yapılırsa,

$$F_B\big(f(\alpha x)\big)(t) = c_\nu \int_{R_n^k} f(x) e^{-i(x^k \frac{t^k}{\alpha})} \prod_{l=1}^{k} j_{\nu_l - \frac{1}{2}}(x_{n-k+l} \frac{t_{n-k+l}}{\alpha}) x_{n-k+l}^{2\nu_l} \alpha^{-2\nu_l} \frac{dx}{\alpha}$$

$$= \alpha^{-n-2|\nu|} F_B\left[f(x)\right](\frac{t}{\alpha})$$

olur. Burada $dx = \alpha^{-n} dx$ ve $|\nu| = \nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_k$ dir. Ayrıca Teorem 3.2.1' den

$$F_B\left(P_k(x) e^{-\alpha|x|^2}\right)(y) = (2\alpha)^{-(k+|\nu|+\frac{n}{2})} i^k e^{-\frac{|y|^2}{4\alpha}} P_k(y)$$

yazılır. Eğer $\varphi \in Z_+$ ise bu durumda,

$$\int_{R_n^k} P_k(x) e^{-\alpha|x|^2} \varphi(x) \prod_{l=1}^{k} x_{n-k+l}^{2\nu_l} dx = (2\alpha)^{-(k+|\nu|+\frac{n}{2})} i^k \int_{R_n^k} P_k(x) e^{\frac{-|x|^2}{4\alpha}} \varphi(x) \prod_{l=1}^{k} x_{n-k+l}^{2\nu_l} dx$$

olur. Bu ifadenin her iki tarafını $\alpha^{\frac{k+n+2|\nu|-\varepsilon-2}{2}}$ ile çarpıp α 'ya göre 0' dan ∞ ' a kadar integral alırsak,

$$\int_0^\infty \left[\int_{R_n^k} P_k(x) e^{-\alpha|x|^2} \alpha^{\frac{k+n+2|\nu|-\varepsilon-2}{2}} \varphi(x) \prod_{l=1}^{k} x_{n-k+l}^{2\nu_l} dx \right] d\alpha$$

$$= \int_0^\infty \left((2\alpha)^{-(k+|\nu|+\frac{n}{2})} i^k \alpha^{\frac{k+n+2|\nu|-\varepsilon-2}{2}} \right) \left(\int_{R_n^k} P_k(x) e^{\frac{-|x|^2}{4\alpha}} \varphi(x) \prod_{l=1}^{k} x_{n-k+l}^{2\nu_l} dx \right) d\alpha \tag{3.2.12}$$

olur. Şimdi yukarıdaki integralleri hesap edelim.

$\int_0^\infty e^{-\alpha|x|^2} \alpha^{\frac{k+n+2|\nu|-\varepsilon}{2}-1} d\alpha$ integralinde $\alpha|x|^2 = u$ dersek,

$$\int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{|x|^2}\right)^{\frac{k+n+2|\nu|-\varepsilon}{2}-1} \frac{du}{|x|^2} = \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{k+n+2|\nu|-\varepsilon}{2}-1} |x|^{-(k+n+2|\nu|-\varepsilon-2)} |x|^{-2} du$$

$$= \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{k+n+2|\nu|-\varepsilon}{2}-1} |x|^{-(k+n+2|\nu|-\varepsilon)} du$$

$$= \Gamma\left(\frac{k+n+2|\nu|-\varepsilon}{2}\right) |\nu|^{-(k+n+2|\nu|-\varepsilon)}$$

bulunur. Böylece (3.2.12) ifadesinin sol tarafı,

$$\Gamma\left(\frac{k+n+2|\nu|-\varepsilon}{2}\right)\int_{R_n^k}\frac{P_k(x)}{|x|^{+(k+n+2|\nu|-\varepsilon)}}\varphi(x)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx \qquad (3.2.13)$$

olarak elde edilir. Şimdi (3.2.12) ifadesinin sağ tarafını hesaplayalım.

$$\int_0^\infty\left((2\alpha)^{-(k+|\nu|+\frac{n}{2})}i^k\alpha^{\frac{k+n+2|\nu|-\varepsilon-2}{2}}\right)\left(\int_{R_n^k}P_k(x)e^{\frac{-|\nu|^2}{4\alpha}}\varphi(x)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx\right)d\alpha$$

$$=\int_0^\infty\int_{R_n^k}(2)^{-(k+|\nu|+\frac{n}{2})}i^k\alpha^{-\frac{k+\varepsilon+2}{2}}P_k(x)e^{\frac{-|x|^2}{4\alpha}}\varphi(x)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dxd\alpha$$

$$=(2)^{-(k+|\nu|+\frac{n}{2})}\int_0^\infty\int_{R_n^k}i^k\alpha^{-\frac{k+\varepsilon+2}{2}}P_k(x)e^{\frac{-|\nu|^2}{4\alpha}}\varphi(x)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dxd\alpha$$

$$=(2)^{-(k+|\nu|+\frac{n}{2})}\int_\infty^0\left(\frac{1}{4\alpha}\right)^{\frac{-(k+\varepsilon+2)}{2}}e^{-\alpha|x|^2}\left(\frac{-1}{4\alpha^2}\right)d\alpha\int_{R_n^k}i^kP_k(x)\varphi(x)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

$$=-2^{-(k+|\nu|+\frac{n}{2})}2^{k+\varepsilon+2}2^{-2}\int_\infty^0\alpha^{\frac{k+\varepsilon}{2}-1}e^{-\alpha|x|^2}d\alpha\int_{R_n^k}i^kP_k(x)\varphi(x)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

$$=-2^{-|\nu|-\frac{n}{2}+\varepsilon}\int_\infty^0\left(\frac{u}{|x|^2}\right)^{\frac{k+\varepsilon}{2}-1}e^{-u}|x|^{-2}du\int_{R_n^k}i^kP_k(x)\varphi(x)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

$$=2^{-|\nu|-\frac{n}{2}+\varepsilon}\int_0^\infty u^{\frac{k+\varepsilon}{2}-1}e^{-u}|x|^{-k-\varepsilon}du\int_{R_n^k}i^kP_k(x)\varphi(x)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

$$=2^{-|\nu|-\frac{n}{2}+\varepsilon}|x|^{-k-\varepsilon}\Gamma\left(\frac{k+\varepsilon}{2}\right)\int_{R_n^k}i^kP_k(x)\varphi(x)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

bulunur. O halde sağ taraftaki integral,

$$\int_0^\infty\int_{R_n^k}\left[(2\alpha)^{-(k+|\nu|+\frac{n}{2})}i^k\alpha^{\frac{k+n+2|\nu|-\varepsilon-2}{2}}P_k(x)e^{\frac{-|x|^2}{4\alpha}}\varphi(x)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx\right]d\alpha$$

$$=2^{-|\nu|-\frac{n}{2}+\varepsilon}\Gamma\left(\frac{k+\varepsilon}{2}\right)i^k\int_{R_n^k}\frac{P_k(x)}{|x|^{k+\varepsilon}}\varphi(x)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla,

$$\Gamma\left(\frac{k+n+2|\nu|-\varepsilon}{2}\right)\int\limits_{R_n^k}\frac{P_k(x)}{|x|^{(k+n+2|\nu|-\varepsilon)}}\varphi(x)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

$$=2^{\frac{-(2|\nu|+n)}{2}+\varepsilon}\Gamma\left(\frac{k+\varepsilon}{2}\right)i^k\int\limits_{R_n^k}\frac{P_k(x)}{|x|^{k+\varepsilon}}\varphi(x)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

bulunur. Buradan,

$$\int\limits_{R_n^k}\frac{P_k(x)}{|x|^{(k+n+2|\nu|-\varepsilon)}}\varphi(x)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

$$=2^{\frac{-(2|\nu|+n)}{2}+\varepsilon}i^k\frac{\Gamma\left(\frac{k+\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+n+2|\nu|-\varepsilon}{2}\right)}\int\limits_{R_n^k}\frac{P_k(x)}{|x|^{k+\varepsilon}}\varphi(x)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

olur. O halde,

$$F_B\left(\frac{P_k(x)}{|x|^{k+n+2|\nu|-\varepsilon}}\right)(y)=2^{-\frac{n+2|\nu|}{2}+\varepsilon}i^k\frac{\Gamma\left(\frac{k+\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+n+2|\nu|-\varepsilon}{2}\right)}\frac{P_k(y)}{|y|^{k+\varepsilon}}$$

sonucu elde edilir. Lemma 3.2.2 yi bu sonuca uygularsak,

$$F_B\left(v.p.\frac{P_k(x)}{|x|^{k+n+2|\nu|-\varepsilon}}\right)(y)=2^{-\frac{n+2|\nu|}{2}}i^k\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+n+2|\nu|}{2}\right)}\frac{P_k(y)}{|y|^{k}}$$

elde edilir. Dolayısıyla teoremin ispatı tamamlanır.

Şimdi Riesz-Bessel dönüşümleri diyeceğimiz, genelleşmiş öteleme operatörleri ile elde edilen Riesz dönüşümlerini verelim.

Tanım 3.2.4: T_x^y genelleşmiş öteleme operatörü olsun. Bu durumda $f(x)\in Z_+$ ise,

$$\left(R_B^{(k)}f\right)(\xi)=c_k(n,\nu_1,\nu_2,...,\nu_k)\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\substack{0<\varepsilon<|x| \\ 0<x_{n-k+1}<\infty \\ \vdots \\ 0<x_n<\infty}}\frac{P_k(x)}{|x|^{k+n+2|\nu|}}T_\xi^x f(\xi)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme k. mertebeden Riesz-Bessel dönüşümü denir. Burada,

$c_k(n,\nu_1,\nu_2,...,\nu_k)=2^{\frac{2|\nu|+n}{2}}\Gamma\left(\frac{k+n+2|\nu|}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right]^{-1}$ dir. $P_k(x)$ ise, k. mertebeden homogen polinom ve $\Delta_B P_k=0$ dır. Teorem 3.2.3 e göre,

$$F_B\left(R_B^{(k)}f\right)(\xi)=i^k\frac{P_k(x)}{|\xi|^k}F_Bf(\xi) \tag{3.2.14}$$

yazabiliriz. Başka bir ifade ile $R_B^{(k)}$ dönüşümüne karşılık gelen çarpan $i^kP_k(x)|\xi|^{-k}$ dir. Şimdi bir mertebeli Riesz-Bessel dönüşümlerini ele alalım. Bunların sayısı n-k tanedir. $j=1,2,\ldots,n-k$ olmak üzere,

$$\left(R_{B_j}f\right)(\xi)=c_1(n,\nu_1,\nu_2,...,\nu_k)\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\substack{0<\varepsilon<|x|\\ 0<x_{n-k+1}<\infty\\ \cdot\\ \cdot\\ 0<x_n<\infty}}\frac{x_j}{|x|^{1+n+2|\nu|}}T_\xi^x f(\xi)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx \tag{3.2.15}$$

şeklinde olup burada,

$$c_m(n,\nu_1,\nu_2,...,\nu_k)=2^{\frac{2|\nu|+n}{2}}\Gamma\left(\frac{1+n+2|\nu|}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

dir. Ayrıca bu dönüşümlerden başka k tane iki mertebeli Riesz-Bessel dönüşümlerini de,

$$\left(R_{B_j}^{(2)}f\right)(\xi)=c_2(n,\nu_1,\nu_2,...,\nu_k)\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\substack{0<\varepsilon<|x|\\ 0<x_{n-k+1}<\infty\\ \cdot\\ \cdot\\ 0<x_n<\infty}}\frac{P_k(x)}{|x|^{2+n+2|\nu|}}T_\xi^x f(\xi)\prod_{l=1}^{k}x_{n-k+l}^{2\nu_l}dx \tag{3.2.16}$$

şeklinde tanımlayabiliriz [8].

4. Ağırlıklı Lorentz Uzayları

Tanım 4.1: $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue anlamında integrallenebilen bir fonksiyon ve $\lambda_f(\sigma)=\left|\left\{x:|f(x)|>\sigma\right\}\right|$ dağılım fonksiyon olmak üzere $\mathbb{R}^+=\left(0,\infty\right)$ aralığında f fonksiyonunun azalan rearrangementi $t>0$ için $f^*(t)=\inf\left\{\sigma:\lambda_f(\sigma)\le t\right\}$ olsun. Buna göre w, $\mathbb{R}^+$'da bir ağırlık fonksiyon yani negatif olmayan lokal integrallenebilen bir fonksiyon ve $0<p<\infty$ ise,

$$L^p(\mathbb{R}^n,w)=\|f\|_{L^p(w)}\simeq\left(\int_0^\infty\left(f^*(t)\right)^p w(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}<\infty \tag{4.1}$$

fonksiyonların sınıfına $L^p\left(w\right)$ klasik Lorentz uzayı denir. Eğer $0<p,q<\infty$ ise

$$L^{pq}(\mathbb{R}^n)=\left\{f:\|f\|_{L^{pq}(x)}=\left(\int_0^\infty\left[t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right]^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}<\infty\right\} \tag{4.2}$$

Fonksiyonlar uzayına ağırlıklı Lorentz uzayı denir. $r=\infty$ alınırsa

$$L_w^{p\infty}(\mathbb{R}^n)=\left\{f:\|f\|_{p\infty w}=\sup_{t>0}t^{\frac{1}{p}}f_w^*(t)<\infty\right\} \tag{4.3}$$

uzayına zayıf ağırlıklı Lorentz uzayı denir.

w, $\mathbb{R}^+$'da ağırlıklı fonksiyon olsun. Yani $\mathbb{R}^+$ negatif olmayan lokal integrallenebilir fonksiyonlar olsun. w ağırlık fonksiyonu için, $W(r)=\int_0^r w(t)dt<\infty\,,0\le r<\infty$ yazılır. $\|f\|_{L_x^p(w)}=\left\|f^*\right\|_{L^p(w)}$ olmasını dikkate alalım. Bunlar önceki tanımlamalardan ortaya çıkar. $0<p,q<\infty$ için,

$$L_x^{pq}(w)=\left\{f\in M(x):\|f\|_{L_x^{pq}(w)}=\left\|f^*\right\|_{L^{pq}(w)}<\infty\right\}$$

olur.

(X,υ),pozitif ve σ-toplamsal ölçümlü bir uzay olsun. $1\le p\le\infty$ ve $1\le s\le\infty$ için $L_\upsilon{}^{ps}=L^{ps}(\mathrm{X},d\upsilon)$ Lorentz uzayı, $\|f\|_{L^{ps}(\mathrm{X},d\upsilon)}<\infty$ olduğunda tüm υ ölçülebilir f fonksiyonlarının uzayıdır. Burada, eğer $1\le p\le\infty$ ve $1\le s<\infty$ ise

$$\|f\|_{L^{ps}(X,d\upsilon)} = \left(s\int_0^\infty \left(\upsilon\left\{x\in X; |f(x)|>r\right\}\right)^{s/p} r^{s-1}dr \right)^{1/s}$$

ve eğer $1\le p<\infty$ ve $s=\infty$ ise

$$\|f\|_{L^{ps}(X,d\upsilon)} = \sup_{r>0} r\left(\left\{x\in X; |f(x)|>r\right\}\right)^{1/p}$$

dir.

Eğer $1<p<\infty$ ve $1\le s\le\infty$ veya $p=s=1$, $p=s=\infty$ ise bu durumda $L^{ps}(X,d\upsilon)$ $\|.\|_{L^{ps}(X,d\upsilon)}$ normuna denk bir normlu Banach Uzayı'dır.

$X=\mathbb{R}^n$ ve υ ölçümünün Lebesgue ölçümüne göre mutlak sürekli olduğunu kabul edeceğiz. Yani $d\upsilon=\omega(x)dx$ olarak alacağız.

$L^{ps}_\omega=(\mathbb{R}^n,\omega dx)$ uzayına ω ağırlıklı Lorentz uzayı diyelim. Bu durumda $\|\chi_E\|_{L^{ps}_\omega}=(\omega E)^{1/p}$ sonucu elde edilir. Ayrıca eğer $p=s$ ise bu durumda $L^{ps}_\omega\subset L^p(\omega)$ ağırlıklı uzaydır. p sabiti ve $s_2\le s_1$ için $L^{ps_2}_\omega\subset L^{ps_1}_\omega$ elde edilir. Buradan $\|f\|_{L^{ps_1}_\omega}\le\|f\|_{L^{ps_2}_\omega}$ olur.

Lorentz uzayları üzerinde aşağıdaki ifadeler verebiliriz [9,10].

Önerme 4.2: $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2},\ \dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{s_1}+\dfrac{1}{s_2}$ olsun. Bu durumda her $f_1\in L^{p_1s_1}_\omega$ ve $f_2\in L^{p_2s_2}_\omega$ için

$$\|f_1f_2\|_{L^{ps}_\omega}\le c\|f_1\|_{L^{p_1s_1}_\omega}\|f_2\|_{L^{p_2s_2}_\omega} \tag{4.4}$$

olacak şekilde bir c>0 sabiti vardır.
(4.4) eşitsizliği Lorentz uzaylarında Hölder eşitsizliğinin bir varyasyonudur.

Önerme 4.3: Her $f\in L^{ps}_\omega$ için,

$$c^{-1}\|f\|_{L^{ps}_\omega}\le\sup\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(y)h(y)\omega(y)dy\right|\le c\|f\|_{L^{ps}_\omega} \tag{4.5}$$

olacak şekilde bir c>0 sabiti vardır. Burada supremum $L^{p's'}_\omega$ uzayında kapalı birim yuvar üzerinde alınmıştır.

Eğer $s<\infty$ ise bu durumda, $L_{\omega}^{p's'}$ nün L_{ω}^{ps} nin duali olduğundan (4.5) eşitsizliği görülür. Eğer $s=\infty$ ise bu durumda (4.5) teki birinci eşitsizlik yani

$$c^{-1}\|f\|_{L_{\omega}^{ps}} \leq \sup\left|\int_{R^n} f(y)h(y)\omega(y)dy\right|$$

eşitsizliği bir karakteristik fonksiyonun çarpımı olarak h fonksiyonunun uygun bir seçimiyle elde edilebilir. İkinci eşitsizlik ise (4.4) den elde edilir.

Önerme 4.4: 1≤p≤∞ ve ξ pozitif bir sabit olmak üzere $\sum_{j=1}^{\infty}\chi Ej(x)\leq\xi$ olacak şekilde $\{E_j\}$, $\mathbb{R}^n$ in ölçülebilir alt kümelerinin bir dizisi olsun. Bu durumda her $f\in L_{\omega}^{ps}$ için

$$\sum_{j=1}^{\infty}\|\chi E_j f\|_{L_{\omega}^{ps}}^{p} \leq \xi\|f\|_{L_{\omega}^{ps}}^{p} \tag{4.6}$$

dir.

İspat: $\beta = p/s \geq 1$ olsun. Minkowsky eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|\chi E_j f\|_{L_{\omega}^{ps}}^{p}\right)^{1/p} &= \left\| s\int_0^{\infty}\left(\omega\left\{x\in E_j;|f(x)|>r\right\}\right)^{1/\beta} r^{s-1}dr\right\|_{\ell^{\beta}} \\
&\leq s\int_0^{\infty}\left\|\left(\omega\left\{x\in E_j;|f(x)|>r\right\}\right)^{1/\beta}\right\|_{\ell^{\beta}} r^{s-1}dr \\
&= s\int_0^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\omega\left\{x\in E_j;|f(x)|>r\right\}\right)^{1/\beta} r^{s-1}dr \\
&\leq s\int_0^{\infty}\left(\xi\omega\left\{x\in\bigcup_{j-1}^{\infty}Ej;|f(x)|>r\right\}\right)^{s/p} r^{s-1}dr \\
&= \xi^{s/p}\|f\|_{L_{\omega}^{ps}}^{s}
\end{aligned}$$

olur.

Tanım 4.5: Ya $1<p<\infty$ ve $1\leq s\leq\infty$ veya $p=s=1$ olsun. Bu durumda eğer

$$\sup_{Q}\|\chi Q\|_{L_{\omega}^{ps}}\|\chi Q/\omega\|_{L_{\omega}^{p's'}}|Q|^{-1}<\infty \tag{4.7}$$

ise $\omega:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1$ ağırlık fonksiyonu A_{ps} sınıfına aittir. Burada supremum, koordinat eksenlerine paralel kenarlı tüm $Q\subset\mathbb{R}^n$ küpleri üzerinde alınmıştır.

$$\int_Q \omega(x)dx \left(\int_Q \omega^{-1/(p-1)}(x)dx \right)^{p-1} = \|\chi Q\|^p_{L^{pp}_\omega} \left\| \chi Q \big/ \omega \right\|^P_{L^{P'P'}_\omega}$$

olduğunu görmek kolaydır. Yani A_{PP} , A_P sınıfıyla çakışır.

Önerme 4.6: $\omega \in A_{ps}$ olsun. Eğer ya $p = p_1$ ve $1 \le s_1 \le s$ veya $p < p_1$ ve $1 \le s_1 \le \infty$ ise bu durumda $\omega \in A_{p_1 s_1}$ olur.

İspat: $p = p_1$ ve $s_1 \le s$ olsun. Bu durumda $s_1' \ge s'$ dir ve bundan dolayı

$$\|\chi Q / \omega\|_{L^{p's_1'}_\omega} \le \|\chi Q / \omega\|_{L^{p's'}_\omega}$$

olur.

Bu $p = p_1$ ve $s_1 \le s$ için $A_{ps} \subset A_{ps_1}$ olduğunu gösterir. Şimdi $p < p_1$, $1 \le s_1 \le \infty$ ve $\omega \in A_{ps}$ olsun.

p_0 , $\quad 1\big/p_1' = 1\big/p' + 1\big/p_0$ şeklinde tanımlayalım. (4.4)'yi kullanarak

$$\begin{aligned}
\|\chi Q\|_{L^{p_1\infty}_\omega} \|\chi Q / \omega\|_{L^{p_1'1}_\omega} &\le c \|\chi Q\|_{L^{p_1\infty}_\omega} \|\chi Q\|_{L^{p_0 s}_\omega} \|\chi Q / \omega\|_{L^{p's'}_\omega} \\
&\le c |Q| \|\chi Q\|_{L^{p_1\infty}_\omega} \|\chi Q\|_{L^{p_0 s}_\omega} \|\chi Q\|^{-1}_{L^{ps}_\omega} \\
&= c |Q| (\omega Q)^{1/p_1 + 1/p_0 - 1/p} \\
&= c |Q|
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\omega \in A_{p\infty}$ olur ve ispatın ilk kısmında her $1 \le s_1 \le \infty$ için $\omega \in A_{p_1 s_1}$ elde edilir.

Önerme 4.7: Bir ağırlıklı ω fonksiyonunun A_{p_1} 'e ait olması için gerek ve yeter koşul; her Q küpleri ve her $E \subset Q$ ölçülebilir kümeleri için;

$$\frac{|E|}{|Q|} \le c_1 \left(\frac{\omega E}{\omega Q} \right)^{1/p} \tag{4.8}$$

olacak şekilde bir $c_1 > 0$ pozitif sayısının var olmasıdır.

İspat: $p > 1$, $\omega \in A_{P1}$ ve $E \subset Q$ olsun. Bu durumda (4.4) den

$$|E| = \int_E \frac{\omega(x)}{\omega(x)} dx \le c \|\chi Q / \omega\|_{L_\omega^{p'\infty}} \|\chi E\|_{L_\omega^{p1}}$$

$$\le c_2 |Q| \frac{\|\chi E\|_{L_\omega^{p1}}}{\|\chi Q\|_{L_\omega^{p1}}}$$

$$= c_2 |Q| \left(\frac{\omega E}{\omega Q} \right)^{1/p}$$

elde edilebilir. Şimdi (4.8) eşitsizliği sağlansın ve

$$E = \left\{ x \in Q; \omega(x) < \frac{1}{y} \right\}.$$

olsun. Bu durumda

$$y\omega E = \int_E y\omega(x) dx \le \int_E \frac{\omega(x)}{\omega(x)} dx = |E|$$

$$\le c_1 |Q| \left(\frac{\omega E}{\omega Q} \right)^{1/p}$$

olur. Eğer $p > 1$ ise,

$$\text{wE } \le c_1^{p'} |Q|^{-p'} y^{-p'} (\omega Q)^{-p'/p}$$

olur. Yani $\omega \in Ap_1$ dir. Eğer $p = 1$ ise bu durumda her

$$y < \|\chi Q / \omega\|_{L_\omega^{\infty\infty}},$$

$\omega E > 0$ için

$$y \le c_3 \frac{|Q|}{\omega Q}$$

elde edilir. Burada $\omega \in A_{11}$ diğer bir ifadeyle $\omega \in A_1$ dir. Önerme 4.4 ve 4.5'in her bir $\omega \in A_{ps}$ için dubbling şartını sağladığını görebiliriz. Her $Q \in R^n$ küpleri için $\omega(2Q) \le c\omega Q$, olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti vardır. Burada $2Q$, Q ve Q'nun uzun iki kenarı ile çakışık bir küptür.

Önerme 4.8: A_p sınıfı A_{p1}' in bir öz alt kümesidir.

Bunu görmek kolaydır. Çünkü önerme 4.5' ten $A_p \subset A_{p1}$ elde edilir. Diğer taraftan, $\omega(x) = |x|^{n(p-1)}$ fonksiyonu A_{p1}' e aittir. Fakat A_p' ye ait değildir.

Önerme 4.9: $w \in A_{ps}$, $1 < p < \infty$, $1 < s \le \infty$ olsun. Bu durumda $1 < p_1 < p,\ s_1 > 1$ ve $\omega \in A_{p_1 s_1}$ olacak şekilde p_1 ve s_1 mevcuttur.

Önerme 4.10: $1 < p < \infty$ ve $1 < s \le \infty$ olsun. $\omega \in A_p$ olması için gerek ve yeter koşul bir ω fonksiyonunun A_{ps} ye ait olmasıdır.

Önerme 4.4 ve 4.7 den görülür ki, aslında $\omega \in A_{p_1 s_1}$ olacak şekilde $p_1 < p$, $1 \le s_1 < \infty$ şeklinde p_1 ve s_1 sayıları vardır. Önerme 4.4' den ω fonksiyonu her $s_0 \in [1,\infty)$ için A_{ps_0} 'a aittir. Aynı zamanda $A_{pp} = A_p$ dir. Eğer $\omega \in A_p$ ise benzer bir yolla $\omega \in A_{ps}$ olduğu elde edilir.

Önerme 4.11: $\omega \in A_p$ olsun. Bu durumda her Q küpleri ve her β, $0 < \beta < 1$ için

$$\omega Q \le \left(\frac{c}{1-\beta}\right)^p \omega\left\{x \in Q; 1/\omega(x) > \beta|Q|/(\omega Q)\right\}$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti vardır.

İspat: $E = \left\{x \in Q; 1/\omega(x) > \beta|Q|/(\omega Q)\right\}$ ve $\overline{E} = Q / E$ olsun. Bu durumda

$$\frac{\left|\overline{E}\right|}{\beta|Q|} = \frac{1}{\omega Q}\int_{\overline{E}} \frac{\omega Q}{\beta|Q|}dx \le \frac{1}{\omega Q}\int_{\overline{E}} \omega(x)dx = \frac{\omega\overline{E}}{\omega Q} \le 1$$

olur. Bundan dolayı

$$|E| = |Q| - \left|\overline{E}\right| \ge (1-\beta)|Q|$$

olur. Önerme (4.5)'e göre

$$\frac{\omega E}{\omega Q} \ge \left(\frac{1}{c}\frac{|E|}{|Q|}\right)^p \ge \left(\frac{1-\beta}{c}\right)^p$$

elde edilir.

Önerme 4.12: $1 < p < \infty$, $1 \le s \le p$ ve $\omega \in A_{ps}$ olsun. Bu durumda her Q küpleri ve herhangi $\lambda \ge \left| |Q| \big/ (\omega Q) \right|$ için

$$\left\|\chi E_\lambda / \omega\right\|_{L_\omega^{p's'}} \le c_0 \lambda (\omega E_{\beta\lambda})^{1/p'}$$

olacak şekilde $c_0 > 0$ ve β, $0 < \beta < 1$ sabitleri vardır. Burada

$$E_\lambda = \{x \in Q; 1/\omega(x) > \lambda\}$$

dir.

İspat: $\lambda \geq \dfrac{|Q|}{\omega Q} = \dfrac{1}{\omega Q}\int\limits_Q (\omega(x))^{-1}\,\omega(x)dx$

olarak göz önüne alalım. $\omega(x)dx$ ölçümü dubbling şartını sağlar. Bundan dolayı Calderon Zygmund ayrışımını kullanabiliriz ve sonuç olarak Q da bulunan örtüşmeyen $\{Q_k\}_{k\geq 1}$ küplerin bir dizisini elde ederiz. Öyle ki hemen hemen her $x \in Q \Big/ \bigcup\limits_{k\geq 1} Q_k$ ve $1\big/\omega(x) \leq \lambda$ için

$$\lambda < \frac{1}{\omega Q_k}\int\limits_{Q_k} (\omega(x))^{-1}\omega(x)dx = \frac{|Q_k|}{\omega Q_k} < c\lambda, \qquad k = 1,2,...$$

dir. $f \in L_\omega^{ps}$ fonksiyonu $\|f\|_{L_\omega^{ps}} \leq 1$ i sağlasın. Önerme 4.1 ve 4.3 e dayanarak;

$$\begin{aligned}
\int\limits_{R^n} \chi_{E_\lambda}(x)(\omega(x))^{-1} f(x)\omega(x)dx &\leq \sum_{k\geq 1}\left|\int\limits_{Q_k}(\omega(x))^{-1} f(x)dx\right| \leq c\sum_{k\geq 1}\|f\chi_{Q_k}\|_{L_\omega^{ps}}\left\|\chi_{Q_k}\big/\omega\right\|_{L_\omega^{p's'}} \\
&\leq c\sum_{k\geq 1}\|f\chi_{Q_k}\|_{L_\omega^{ps}}|Q_k|(\omega Q_k)^{-1/p} \leq c\sum_{k\geq 1}\|f\chi_{Q_k}\|_{L_\omega^{ps}}\frac{|Q_k|}{\omega Q_k}(\omega Q_k)^{1/p'} \\
&\leq c\sum_{k\geq 1}\|f\chi_{Q_k}\|_{L_\omega^{ps}}\lambda(\omega Q_k)^{1/p'} \leq c\lambda\left(\sum_{k\geq 1}\|f\chi_{Q_k}\|_{L_\omega^{ps}}^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k\geq 1}\omega Q_k\right)^{1/p'} \\
&\leq c\lambda\|f\|_{L_\omega^{ps}}\left(\sum_{k\geq 1}\omega Q_k\right)^{1/p'} \leq c\lambda\left(\sum_{k\geq 1}\omega Q_k\right)^{1/p'}
\end{aligned}$$

elde edilir. Önerme 4.4' e göre $\omega \in A_{ps}$ den $\omega \in A_{p1}$ olur. Önerme 4.9' dan

$$\begin{aligned}
\int\limits_{R^n} \chi_{E_\lambda}(x)(\omega(x))^{-1} f(x)\omega(x)dx &\leq c\lambda\left(\sum_{k\geq 1} c(\beta)\omega\left\{x \in Q_k;\ 1\big/\omega(x) > \beta|Q_k|/(\omega Q_k)\right\}\right)^{1/p'} \\
&\leq c\lambda\left(\omega\left\{x \in Q;\ 1\big/\omega(x) > \beta\lambda\right\}\right)^{1/p'}
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak f fonksiyonunun supremumu L_ω^{ps} nin birim yuvarları üzerinden alınarak istenilen eşitsizlik elde edilir.

Önerme 4.13: $1 < s \leq p < \infty$ ve $\omega \in A_{ps}$ olsun. Bu durumda her Q küpleri için;

$$\left\|\chi_Q\big/\omega\right\|_{L_\omega^{p_1's_1'}}^{s_1'} \leq c\left(\frac{|Q|}{\omega Q}\right)^{\delta}\left\|\chi_Q\big/\omega\right\|_{L_\omega^{p's'}}^{s'}$$

olacak şekilde $c > 0$ ve $\delta > 0$ sabitleri vardır. Burada $p_1' = p' + {p'\delta}/{s}$ ve $s_1' = s' + \delta$ eşitsizlikleri vardır.

İspat: Q keyfi bir küp olsun ve $E_\lambda = \left\{ x \in Q;\ {1}/{\omega(x)} > \lambda \right\}$ alalım. Açıkça her $\delta > 0$ için;

$$\int_o^\infty \left\| {\chi_{E_\lambda}}/{\omega} \right\|_{L_\omega^{p's'}}^{s'} \lambda^{\delta-1} d\lambda = \int_o^{|Q|/(\omega Q)} \left\| {\chi_{E_\lambda}}/{\omega} \right\|_{L_\omega^{p's'}}^{s'} \lambda^{\delta-1} d\lambda + \int_{|Q|/(\omega Q)}^\infty \left\| {\chi_{E_\lambda}}/{\omega} \right\|_{L_\omega^{p's'}}^{s'} \lambda^{\delta-1} d\lambda \tag{4.9}$$

olur. (4.9) nin sağ tarafı sınırlandırılabilir. İlk olarak;

$$\int_o^{|Q|/(\omega Q)} \left\| {\chi_{E_\lambda}}/{\omega} \right\|_{L_\omega^{p's'}}^{s'} \lambda^{\delta-1} d\lambda \le \left\| {\chi_Q}/{\omega} \right\|_{L_\omega^{p's'}}^{s'} \int_o^{|Q|/(\omega Q)} \lambda^{\delta-1} d\lambda$$
$$= \frac{1}{\delta} \left(\frac{|Q|}{\omega Q} \right)^\delta \left\| {\chi_Q}/{\omega} \right\|_{L_\omega^{p's'}}^{s'}$$

olur. Ayrıca ${s'}/{p'} = {s_1'}/{p_1'}$ için;

$$\int_{|Q|/(\omega Q)}^\infty \left\| {\chi_{E_\lambda}}/{\omega} \right\|_{L_\omega^{p's'}}^{s'} \lambda^{\delta-1} d\lambda \le c_o \int_{|Q|/(\omega Q)}^\infty \left(\omega\{ x \in Q; 1/\omega(x) > \beta\lambda \} \right)^{s'/p'} \lambda^{\delta+s'-1} d\lambda$$
$$\le c\beta \int_o^\infty \left(\omega\{ x \in Q; 1/\omega(x) > \lambda \} \right)^{s_1'/p_1'} \lambda^{s_1'-1} d\lambda$$
$$\le \frac{c}{s_1'} \left\| \chi_Q/\omega \right\|_{L_\omega^{p_1's_1'}}^{s_1'}$$

vardır. (4.9) nin sol tarafına Fubini teoremini uygulayarak;

$$\int_o^\infty \left\| \chi_{E_\lambda} \big/ \omega \right\|_{L_\omega^{p's'}}^{s'} \lambda^{\delta-1} d\lambda = \int_o^\infty s' \int_o^\infty \left(\omega\left\{ x \in E_\lambda;\ 1\big/\omega(x) > r \right\} \right)^{s'/p'} r^{s'-1} dr \lambda^{\delta-1} d\lambda$$

$$= \int_o^\infty s' \int_o^\infty \left(\omega\left\{ x \in Q;\ 1\big/\omega(x) > \lambda,\ 1\big/\omega(x) > r \right\} \right)^{s'/p'} r^{s'-1} dr \lambda^{\delta-1} d\lambda$$

$$= s' \int_o^\infty \int_o^\lambda \left(\omega\{ x \in Q; 1/\omega(x) > \lambda, 1/\omega(x) > r \} \right)^{s'/p'} r^{s'-1} dr \lambda^{\delta-1} d\lambda$$

$$+ s' \int_o^\infty \int_\lambda^\infty \left(\omega\left\{ x \in Q;\ 1\big/\omega(x) > \lambda,\ 1\big/\omega(x) > r \right\} \right)^{s'/p'} r^{s'-1} dr \lambda^{\delta-1} d\lambda$$

$$= s' \int_o^\infty \int_0^\lambda \left(\omega\left\{ x \in Q;\ 1\big/\omega(x) > \lambda \right\} \right)^{s'/p'} r^{s'-1} dr \lambda^{\delta-1} d\lambda$$

$$+ s' \int_o^\infty \int_\lambda^\infty \left(\omega\left\{ x \in Q;\ 1\big/\omega(x) > r \right\} \right)^{s'/p'} r^{s'-1} dr \lambda^{\delta-1} d\lambda$$

$$= \int_o^\infty \left(\omega\{ x \in Q; 1/\omega(x) > \lambda, \} \right)^{s'/p'} \lambda^{s'+\delta-1} d\lambda$$

$$+ s' \int_0^\infty \int_0^r \left(\omega\{ x \in Q; 1/\omega(x) > r \} \right)^{s'/p'} r^{s'-1} \lambda^{\delta-1} d\lambda dr$$

$$= \int_o^\infty \left(\omega\{ x \in Q; 1/\omega(x) > \lambda \} \right)^{s'/p'} \lambda^{s_1'-1} d\lambda$$

$$+ \frac{s'}{\delta} \int_o^\infty \left(\omega\{ x \in Q; 1/\omega(x) > r \} \right)^{s'/p'} r^{s'+\delta-1} dr$$

$$= \frac{1}{s_1'} \left\| \chi_Q / \omega \right\|_{L_\omega^{p_1's_1'}}^{s_1'} + \frac{s'}{\delta} \int_0^\infty \left(\omega\{ x \in Q; 1/\omega(x) > r \} \right)^{s_1'/p_1'} r^{s_1'-1} dr$$

$$= \frac{1}{s_1'} \left\| \chi_Q / \omega \right\|_{L_\omega^{p_1's_1'}}^{s_1'} + \frac{s'}{\delta s_1'} \left\| \chi_Q / \omega \right\|_{L_\omega^{p_1's_1'}}^{s_1'}$$

$$= \frac{1}{\delta} \left\| \chi_Q / \omega \right\|_{L_\omega^{p_1's_1'}}^{s_1'}$$

elde edilir. (4.9) den

$$\frac{1}{\delta} \le \left\| \chi_Q / \omega \right\|_{L_\omega^{p_1'q_1'}}^{s_1'} \le \frac{c}{s_1'} \left\| \chi_Q / \omega \right\|_{L_\omega^{p_1'q_1'}}^{s_1'} + \frac{1}{\delta} \left(\frac{|Q|}{\omega Q} \right)^\delta \left\| \chi_Q / \omega \right\|_{L_\omega^{p_1'q_1'}}^{s_1'}$$

olur ve

$$\left(\frac{1}{\delta} - \frac{c}{s'+\delta} \right) \left\| \chi Q / \omega \right\|_{L_\omega^{p_1's_1'}}^{s_1'} \le \frac{1}{\delta} \left(\frac{|Q|}{\omega Q} \right)^\delta \left\| \chi Q / \omega \right\|_{L_\omega^{p's'}}^{s'}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Şimdi $1/\delta - c/(s'+\delta) > 0$ olması için yeterince küçük $\delta > 0$ seçmek yeterlidir ve ispat tamamlanmış olur.

Önerme 4.9'un ispatı: Önerme 4.4 den dolayı $1 < s \le p$ olduğunu kabul edebiliriz. Önerme 4.11 den p_1' ve s_1' alalım. Bu durumda $p_1' > p'$ olur ve sonuç olarak $p_1 < p$ ve

$$\begin{aligned}\|\chi_Q\|_{L_\omega^{p_1 s_1}} \|\chi_Q/\omega\|_{L_\omega^{ps}\, p_1' s_1'} &\le \|\chi_Q\|_{L_\omega^{p_1 s_1}} \left(c\left(\frac{|Q|}{\omega Q}\right)^{s_1'-s'} \|\chi_Q/\omega\|_{L_\omega^{p's'}}^{s'} \right)^{1/s_1'} \\ &\le c(\omega Q)^{1/p_1} \left(\left(\frac{|Q|}{\omega Q}\right)^{s_1'-s'} \|\chi_Q/\omega\|_{L_\omega^{ps}}^{-s'} |Q|^{s'} \right)^{1/s_1'} \\ &= c|Q|(\omega Q)^{1/p_1 + s'/s_1' - 1 - s'/(ps_1')} = c|Q|\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\dfrac{1}{p_1} - 1 + \dfrac{s'}{s_1'} - \dfrac{s'}{s_1' p} = -\dfrac{1}{p_1'} + \dfrac{s_1'}{s_1' p_1'} = 0$ dir. O halde $\omega \in A_{p_1 s_1}$ olur.

Şimdi ağırlıklı Lorentz uzaylarında klasik Riesz dönüşümünün sınırlılığını veren teoremi verelim.

Teorem 4.15: $1 \le p < \infty$ ve $1 \le s \le \infty$ olsun.

$$\|R_j f\|_{L_w^{p\infty}} \le c\|f\|_{L_w^{p\infty}}$$

olacak şekilde bir c sayısı varsa $w \in A_{ps}$ ' dir.

Teorem 4.16: $1 < p < \infty$ ve $1 < s \le \infty$ alalım. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) R_j operatörü L_w^{ps} üzerinde sınırlıdır.

(ii) R_j operatörü L_w^{ps} den $L_w^{p\infty}$ ye sınırlıdır.

(iii) $w \in A_{ps}$.

Teorem 4.17: $1 \le p < \infty$ için aşağıdaki durumlar denktir.

(i) R_j operatörü L_w^{p1} den $L_w^{p\infty}$ ye sınırlıdır.

(ii) $Q \subset \mathbb{R}^n$ ve tüm ölçülebilir $E \subset Q$ kümeleri için

$$\frac{|E|}{|Q|} \le c\left(\frac{wE}{wQ}\right)^{1/p}$$

şartını sağlayan bir $c > 0$ sabiti vardır.

(iii) $w \in A_{p_1}$

Teorem 4.18: $1 \leq p < \infty$ ve $1 \leq s \leq \infty$ olsun.

$$\left\| R_j f \right\|_{L_w^{p\infty}} \leq c \left\| f \right\|_{L_w^{p\infty}}$$

olacak şekilde bir c sayısı varsa $w \in A_{ps}$ ' dir.

5. Ağırlıklı Lorentz Uzaylarda Klasik Operatörlerinin Sınırlılığı

$u(.), v(.), w_1(.), w_2(.)$ $n \in N^*, \mathbb{R}^n$ de negatif olmayan lokal integrallenebilir ağırlık fonksiyonlar ve T klasik operatör olsun. Bu kısımda amaç $f(.)$ fonksiyonları için T operatörünün $L_v^{rs}(w_1)$ ağırlıklı uzayından $L_u^{pq}(w_2)$ uzayına sınırlı olduğunda göstermektir. Yani;

$$\left\| w_2 (Tf)(.) \right\|_{L_u^{pq}} \le C \left\| w_1(.) f(.) \right\|_{L_v^{rs}} \tag{5.1}$$

olduğunu göstermektir [11]. Burada $C > 0$ n, p, q, r, s ve ağırlık fonksiyonuna bağlı bir sabittir.

$1 \le p < \infty$ ve $1 \le q < \infty$ için;

$$\left\| g(.) \right\|_{L_u^{pq}}^q = q \int_0^\infty \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n ; |g(y) > \lambda|\}} u(y) dy \right)^{\frac{q}{p}} \lambda^{q-1} d\lambda$$

ve $1 \le p < \infty \; ve \; 1 \le q < \infty$ için;

$$\left\| g(.) \right\|_{L_u^{p\infty}} = \sup_{\lambda > 0} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n ; |g(y) > \lambda|\}} u(y) dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

olduğunu hatırlayalım. Burada $1 < r, s, p, q < \infty$ dir. (5.1)' deki gömme operatörünü $T : L_v^{rs}(w_1) \to L_u^{pq}(w_2)$ biçiminde tanımlayalım. Göz önüne alınan klasik operatör bir kesirli integral operatör ya da bir Calderon-Zygmund operatördür [12]. $0 < \alpha < n$ için I_α kesirli integral operatör;

$$(I_\alpha f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{\alpha - n} f(y) dy$$

şeklinde verelim.

$M : L_v^{rs}(1) \to L_u^{pq}(1)$ operatörün sınırlılığı bazı matematikçiler tarafından incelenmiştir. ([13],[14]) Bununla beraber [13]'de Kokilashvili ve Krbec $0 \le \alpha < n,$ $M_\alpha : L_v^{rs}(1) \to L_u^{pq}(1)$ operatörü için $v(.), u(.)$ ağırlıkları üzerinde gerek ve yeter şartları oluşturmaya çalışmışlar ancak bulamamışlardır. Bu kısımda sınırlılık için yeterlilik şartı bulunacaktır. Ağırlıklı fonksiyonları için bulunacak bu şart aynı zamanda bir gerekliliktir.

$M_\alpha : L_v^{rs}(w_1) \to L_u^{pq}(w_2)$ 'deki ağırlık Lebesque hali için birlikte ele alınmayabilir, örnek olarak $\|f(.)\|_{L_u^{pp}} = \|u^{1/p}(.)f(.)\|_{L_1^{pp}}$ verilebilir. Her $R>0$ değerleri için,

$$\sup_{R<|y|\le 64R} w(y) \le c \inf_{R<|z|\le 64R} w(z)$$

ise sabit bir $c>0$ değeri için $w(.)$ ağırlık fonksiyonu sabit olur. Son şart $w(.)\in A$ olduğunu tanımlar. Eğer $\alpha\in\mathbb{R}$ *ve* $\beta\ge 0$ için $w(.)=|x|^\alpha \ln^\beta(e+|x|)$ sağlanırsa bu durumda $w(.)\in A$ olur. $w(.)\in A$ ağırlık fonksiyonlarının geniş sınıfı $t>0$ için $w(64t)\le Cw(t)\,(w(t)\le Cw(64t))$ şartını sağlayan azalmayan (yada artmayan) yarıçapa bağlı $w(.)$ fonksiyonları tarafından oluşturulur. Aşağıdaki Lemma 1' in ispatında, $M_\alpha : L_v^{rs}(1)\to L_u^{pq}(1)$ ifadesi dolaylı olarak $H : L_v^{rs}(1)\to L_u^{pq}(w)$ olmasını gerektirir ve $w(x)=|x|^{\alpha-n}\ (Hf)(x)=\int\limits_{|y|<|x|} f(y)\,dy$ 'dir. Bu çalışmada kolaylık için her zaman $w_1(.)\in A$, $w_2\in A$ olarak kabul edilir.

Aşağıdaki Lemma 5.1 'de, $M_\alpha : L_v^{rs}(1)\to L_u^{pq}(1)$ operatörünün sınırlılığı dolaylı olarak tüm $R>0$ değerleri için

$$\left\|(R+|cdot|)^{\alpha-n}\right\|_{L_u^{pq}} \left\|\frac{1}{v(.)}\chi_{|.|<R}(.)\right\|_{L_v^{\frac{r}{r-1}\frac{s}{s-1}}} \le C \tag{5.2}$$

ve hemen hemen her x, $\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{p}-\frac{1}{r}=0$ için,

$$|x|^{n\left[\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right]}\left(u(x)\right)^{\frac{1}{p}} \le c\left(v(x)\right)^{\frac{1}{r}} \tag{5.3}$$

olmasını gerektirir. Burada $\chi_E(.)$ ölçülebilir E sınıfının karakteristik fonksiyonu olarak tanımlanır. (5.3) noktasal yakınsak eşitsizliği olarak alındığında bahsedilen şart $w(.)$, $u(.)$ ağırlıkları için kolayca görülebilir. Bilinen standart şartların aksine (5.2), ne M_α operatörünün kendisine nede keyfi küple ifade edilir. ([14],[13]). Bu şart orijin merkezli küreler üzerinde integral alınarak gösterilebilir ki bunlar yarıçapa bağlı fonksiyonlar (bu ağırlıklar daha kullanışlıdır) için uygundur. Dolayısıyla (5.2) ve (5.3) şartlarından $M_\alpha : L_v^{rs}(1)\to L_u^{pq}(1)$

olduğu görülür. Aynı zamanda klasik Lebesque uzaylarında bu problem test edildiğinde bunun yalnızca bu iki şarttan oluşturulan gömme için mantıklı olmadığı görülür.

Kaba ifadeyle Teorem 2'de [11] $\max(r,s) \le \min(p,q)$ için hem (5.2) ve hem de (5.3) 'den daha güçlü şartlar olduğunda $M_\alpha : L_v^{rs}(1) \to L_u^{pq}(1)$ olduğu ispat edilecekti. Sonuçta Lebesque hali için yani $(i.e.,\ r=s, p=q)$ için bu sonuçlar yeniden elde edilir.

Amacımız $T : L_v^{rs}(w_1) \to L_u^{pq}(w_2), i.e.$ operatörlerini incelemektir. Yani $f(.)$ fonksiyonları için,

$$\left\| w_2(.)(Tf)(.) \right\|_{L_u^{pq}} \le C \left\| w_1(.) f(.) \right\|_{L_v^{rs}}$$

olduğunu göstermektir. Burada T klasik operatör ve $w_1(.), w_2(.) \in A$ ağırlıkları yukarıdaki gibi tanımlanır. Gerçekten, bahsedilen sınırlılık r,s,p,q ve ağırlık fonksiyonları üzerinde yapılacak kısıtlamalarla yapılmak zorundadır. Kolaylık için $T = M_\alpha$ hali göz önüne alınacaktır.

Lemma 5.1 : $0 \le \alpha < n$ olsun. Kabul edelim ki $M_\alpha : L_v^{rs}(w_1) \to L_u^{pq}(w_2)$ dir. Bu durumda, her Q küpleri için

$$|Q|^{\frac{\alpha}{n}} \left\| w_2(.)\chi_Q(.) \right\|_{L_u^{pq}} \le C_1 \left\| w_1(.)\chi_Q(.) \right\|_{L_v^{rs}} \tag{5.4}$$

dir. Sonuç olarak, eğer $w_1(.) = w_2(.)$ ise bu durumda $\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \le \frac{\alpha}{n}$ dir. Diğer taraftan, her Q küpleri için,

$$\left\| \frac{1}{v(.)\, w_1(.)} \chi_Q(.) \right\|_{L_v^{\frac{r}{r-1}\frac{s}{s-1}}} < \infty \tag{5.5}$$

dir. $u(.), v(.)$ ağırlık fonksiyonları her $R > 0$ değerleri için,

$$\left\| w_2(.)(R + |.|)^{\alpha-n} \right\|_{L_v^{\frac{r}{r-1}\frac{s}{s-1}}} \left\| \frac{1}{v(.)\, w_1(.)} \chi_{\{|.|<R\}}(.) \right\|_{L_v^{\frac{r}{r-1}\frac{s}{s-1}}} \le C_2 \tag{5.6}$$

Wheeden-Muckenhoupt şartını sağlar. $1 < r < \frac{n}{\alpha}, \frac{1}{r^*} = \frac{1}{r} - \frac{\alpha}{n}$ olsun. Eğer $p = r^*$ ise bu durumda, hemen hemen her x için,

$$w_2(x)|x|^{n\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{r^*}\right]} (u(x))^{\frac{1}{p}} \le c w_1(x) (v(x))^{\frac{1}{r}} \tag{5.7}$$

ifadesi sağlanır. Eğer $u(.),v(.)\in A$ ise bu eşitsizlik $p\neq r^*$ için de sağlanır. Bu ifadedeki $u(.),v(.)$ ağırlıkları (5.5) şartını sağladığı kabul edilmektedir. Sonra (5.4) 'den, $0\le\alpha<n,\ 1<r<\dfrac{\alpha}{n}$ için $M_\alpha : L_v^{rs}(1)\to L_u^{pq}(1)$ olduğu gösterilir ve sadece $p\le r^*$ için aşikar olmayan anlam vardır. Bu sonuç ve diğer özelliklerden,

$$1<r<\frac{n}{\alpha},\ p\le r^*,\ \max(r,s)\le\min(p,q) \tag{5.8}$$

olduğu kabul edilecektir.

M_α ile birlikte $\max(r,s)=p<q$ sağlandığı zaman, aşağıdaki ifade her $N\in\mathbb{Z}$ için sağlandığı kabul edilir,

$$\sum_{m=-\infty}^{N-1}\left\|w_2(.)\chi_{\{2^m<|x|\le 2^{m+1}\}}(.)\right\|_{L_u^{pq}}^p\le C\left\|w_2(.)\chi_{\{|x|<2^N\}}(.)\right\|_{L_u^{pq}}^p \tag{5.9}$$

Benzer olarak eşitsizlik $q<p$ olduğu zaman daima sağlanır (bknz lemma 5.2). $p<q$ için (5.9) ifadesi $w_2(.)=1$ halindeki ağırlık fonksiyonları yada kuvvet ağırlıklar için doğrudur (bknz Önerme 5.6).

(5.7) 'den daha kuvvetli şart aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$w_2(x)|x|^{n\left[\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right]}\left(\sup_{4^{-1}|x|<|z|<4|x|}u(z)\right)^{\frac{1}{p}}\le cw_1(x)\left(v(x)\right)^{\frac{1}{r}}\quad \text{h.h. her } x \text{ için} \tag{5.10}$$

ya da

$$w_2(x)|x|^{n\left[\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right]}\left(u(x)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sup_{4^{-1}|x|<|z|<4|x|}v(z)\right)^{-\frac{1}{r}}\le cw_1(x)\quad \text{h.h. her } x \text{ için} \tag{5.11}$$

Teorem 5.2: ($0<\alpha<n,\ I_\alpha$ kesirli integral operatör) :

i) Kabul edelim ki $I_\alpha : L_v^{rs}(w_1)\to L_u^{pq}(w_2)$ olsun. Bu durumda Hardy

$$\left(\left\|w_2(.)|.|^{\alpha-n}\chi_{\{|.|>R\}}(.)\right\|_{L_u^{pq}}\left\|\frac{1}{v(.)w_1(.)}\chi_{\{|.|<R\}}(.)\right\|_{L_v^{\frac{r}{r-1}\frac{s}{s-1}}}\le H\right)$$

şartı sağlanır ve bunun dual versiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$\left\|\frac{1}{v(.)w_1(.)}|.|^{\alpha-n}\chi_{\{|.|>R\}}(.)\right\|_{L_v^{\frac{r}{r-1}\frac{s}{s-1}}}\left\|w_2(.)\chi_{\{|.|<R\}}(.)\right\|_{L_u^{pq}}\le H^* \tag{5.12}$$

ii) Tersi için, (5.8) kısıtlamasının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda (5.10) (ya da (5.11)) noktasal eşitsizlikleri sağlandığında hem ([11] s181 (1.9)) ve hem de (5.12) şartları $I_\alpha : L_v^{rs}(w_1) \to L_u^{pq}(w_2)$ olmasını gerektirir.

Uyarı 5.3: ([11] s181 uyarı 3) (2) 'deki gibi Teorem 5.2 ve Lemma 5.1'den hem $u(.)$ *ya da* $v(.)$ sabit olduğunda (5.8) kısıtlaması ile ([11] s181 (1.9)), (5.12) ve (5.7) şartları $I_\alpha : L_v^{rs}(w_1) \to L_u^{r^*q}(w_2)$ olmasını karakterize ettiğini görebiliriz. Daha sonra T, Calderon-Zygmund operatörler için ağırlıklı eşitsizlikler göz önüne alınacak. Her bir T bir lineer operatör olup $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ üzerinde $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ den $L_{loc}^1(\mathbb{R}^n, dx)$'e sınırlıdır. Her $f \in L_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu ve hemen hemen her $x \neq \operatorname{supp} f$ için;

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) dy$$

şeklinde ifade edilir. $K(x,y)$ çekirdeği $\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n ; x \neq y\}$ üzerinde sürekli fonksiyon tanımlar ve bütün $x \neq y$ değerleri için $2|x-x'| \leq |x-y|$ olduğunda

$$|K(x,y) - K(x',y)| + |K(y,x) - K(y,x')| \leq C\left(\frac{|x-x'|}{|x-y|}\right)^\varepsilon |x-y|^{-n}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada $C > 0$ ve $\varepsilon \in]0,1]$ değerleri sabitlerdir. Bu operatörler bazı matematikçiler tarafından ele alındı [15] ve $1 < p < \infty$ için her bir L^p uzayında sınırlı olduğu bilinmektedir.

Şimdi bu operatörlerin ağırlıklı Lorentz uzaylarında sınırlı olabilmesi için yeterli şartları verelim.

Teorem 5.4 (Calderon Zygmund operatör T). $s \leq r \leq q$ olsun. Bu durumda (5.10) noktasal eşitsizlik sağlandığında, ([11] s181 (1.9)) ve (5.12) ($\alpha = 0, p = r$) şartları $T : L_v^{rs}(w_1) \to L_u^{rq}(w_2)$ olmasını gerektirir.

Hilbert dönüşümü için yukarıdaki bazı şartlar aynı zamanda gerekli şartlardır.

Önerme 5.5 : $v > 0$ için $v(.) \in RD_{v,r,s}(w_1)$ olduğunda $0 \leq \alpha < n$ için ([11] s181 (1.8)) Muckenhoupt şartı, ([11] s181 (1.9)) Hardy şartını sağlar. $1 \leq \varepsilon < \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)p$ için $u(.) \in D_{\varepsilon,p,q}(w_2)$ ise bu ifadeler doğrudur.

Önerme 5.6: $w(x)=|x|^{\beta-n}, w_1(x)=|x|^{\beta_1-n}, w_2(x)=|x|^{\beta_2-n}, u(x)=|x|^{\gamma-n}$,

$v(x)=|x|^{\delta-n}$ olsun. Burada $\beta,\beta_1,\beta_2,\gamma,\delta$ negatif olmayan reel sayılar olmak üzere;

(A) Eğer $0<(\beta-n)+\frac{1}{p}\gamma$ ise bu durumda, her $R>0$ için,

$$\left\|w(.)\chi_{|.|<R}(.)\right\|_{L_u^{pq}} \approx R^{(\beta-n)+\frac{1}{p}\gamma} \approx \left(\frac{1}{R^n}\int_{|y|<R} w(y)\,dy\right)\left(\int_{|y|<R} u(y)\,dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

dir.

(B) (5.9) extra kabulü $w_2(.)=w(.)$ için sağlanır.

(C) $0\le\alpha<n, 0<(\beta_2-n)+\frac{1}{p}\gamma \; ve \; (\beta_1-n)\frac{1}{p}\delta<n$ olsun. Bu durumda (5.7) noktasal eşitsizliği ve ([11] s181 (1.8)) Muckenhoupt şartının sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\alpha+(\beta_2-n)+\frac{1}{p}\gamma=(\beta_1-n)\frac{1}{r}\delta \tag{5.13}$$

dir. Bununla beraber, $v=\frac{r}{r-1}\frac{1}{n}\left[(n-\beta_1)+\left(n-\frac{1}{r}\delta\right)\right]>0$ için $v(.)\in RD_{v,r,s}(w_1)$, olduğundan bu durumda Önerme 5.5 'den (5.6) Wheeden şartı (5.13) ifadesine denk olur.

(5.10) noktasal eşitsizliği $M_\alpha : L_v^{rs}(w_1)\to L_u^{rq}(w_2)$ için bir gereklilik şartı olduğu durumu bu kısmın sonu olacaktır.

Bunun için iki ağırlık şartı verelim. Bu nedenle $C>0 \; ve \; N\in N^*$ için $u(.)\in H$ yazılabilir.

$$\sup_{4^{-1}|x|<|y|<4|x|} u(y)\le C|x|^{-n}\int_{2^{-N}|x|<|y|<2^N|x|} u(y)\,dy \tag{5.14}$$

ve $v(.)\in \tilde{H}(r',s'), r'=\frac{r}{r-1}, s'=\frac{s}{s-1}$ olduğu zaman

$$|x|^n\left[\frac{1}{v(x)}\right]^{r'} v(x)\le C\left\|\frac{1}{v(.)}\chi_{2^{-N}|x|<|.|<2^N|x|}(.)\right\|_{L_u^{r's'}}^{r'}$$

ifadesi sağlanır.

Önerme 5.7 : $u(.)\in H \; ve \; v(.)\in \tilde{H}(r',s')$ olduğunda ([11] s181 (1.8)) Muckenhoupt şartı (5.10) noktasal eşitsizliği sağlar.

Bu sonuçta $w_1(.)\, ve\, w_2(.)$ için sabitlilik şartı $N \geq 3$ için $\sup\limits_{R<|y|\leq 2^{2N}R} w(y) \leq c \inf\limits_{R<|z|\leq 2^{2N}R} w(z)$ olduğunda alınmıştır.

Sonuç 5.8 : $u(.) \in H, v(.) \in \tilde{H}(r', s')$ olsun. Bu durumda;

- [11] Teorem 2 'deki $w_2(x)|x|^{n\left[\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right]}\left(\sup\limits_{4^{-1}|x|<|z|<4|x|} u(z)\right)^{\frac{1}{p}} \leq c w_1(x)(v(x))^{\frac{1}{r}}$,

$w_2(x)|x|^{n\left[\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right]}(u(x))^{\frac{1}{p}}\left(\sup\limits_{4^{-1}|x|<|z|<4|x|} v(z)\right)^{-\frac{1}{r}} \leq c w_1(x)$ (h.h. her x) için şartlarından vazgeçilebilir.

- Teorem 5.2 ve 5.3 'de (5.10) (ya da (5.11)) şartı ([11] s181 (1.8)) Muckenhoupt şartı tarafından yeniden oluşturulabilir.

Uyarı 5.9 :

1) (5.14) özeliği ağırlık fonksiyonlarının geniş bir sınıfı için sağlanır. Örneğin $w(.) \in A$ olduğunda $w(.)$, (5.14) sağlar. (5.14) şartı her radial ve monoton ağırlık için doğrudur. (5.14) in sağlanması $w(.)$ in monoton olmasını gerektirmez.($w(x) = |x|^{\delta-n}\chi_{|x|-1}(x) + |x|^{\gamma-n}\chi_{|x|>1}(x)$ dir).

2) Eğer $v^{1-r'}(.)$, (5.14) şartını sağlarsa $v(.) \in \tilde{H}(r', r')$ şartı sağlanır. Her $r\, ve\, s$ için olduğunda $C > 0$ beraber aşağıdaki ifade sağlanır,

$$|x|^{-n} \int\limits_{2^{-N}|x|<|y|<2^{N}|x|} v(y)\,dy \leq c v(x) \tag{5.15}$$

olacak şekilde $C > 0$ var olduğunda $v(.) \in \tilde{H}(r', s')$ elde edilir. Gerçekten Hölder eşitsizliği ve (5.15) kullanılarak $c(x, N) = \{2^{-N}|x| < |y| < 2^{N}|x|\}$ için,

$$|x|^{\frac{n}{r'}}\left[\frac{1}{v(x)}\right]v^{\frac{1}{r'}}(x)\approx\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{v(y)}\chi_{c(x,N)}v(y)\,dy\right)\times\left(|x|^n v(x)\right)^{-\frac{1}{r}}$$

$$\leq c_1\left\|\frac{1}{v(.)}\chi_{c(x,N)}(.)\right\|_{L_v^{r's'}}\left(\int_{c(x,N)}v(z)\,dz\right)^{\frac{1}{r}}\times\left(|x|^n v(x)\right)^{-\frac{1}{r}}$$

$$\leq c_2\left\|\frac{1}{v(.)}\chi_{c(x,N)}(.)\right\|_{L_v^{r's'}}$$

elde edilir. Her hangi bir Muckenhoupt A_1 ağırlıklı $v(.)$ fonksiyonu (5.15) şartını sağlar. Bu ifade $v(.)\in A$ için doğru olur.

3) Teorem 2 ([11]), Önerme 5.7 ve Uyarı 5.9(2) aşağıdaki ifadeleri verir. (5.8) ve (5.9) kestirimleri ile birlikte hem $u(.)$ hem de $v(.)$ sabit olduğunda (5.6) Wheeden-Muckenhoupt şartı $M_\alpha : L_v^{rs}(w_1)\to L_u^{pq}(w_2)$ olmasını verir. Benzer olarak eğer $u(.),v(.)$ sabit ise bu durumda $I_\alpha : L_v^{rs}(w_1)\to L_u^{pq}(w_2)$ olması için gerek ve yeter şart hem ([11] s181 (1.8) ve (1.9)) ve hem de (5.12) şartları sağlanır.

Esas sonuçlarımızın ispatı için gerekli bazı Lemmaları verelim.

Lemma 5.2: Sabit $C>0$ sabiti için, $\sum_k \chi_{E_k}(.)\leq C\chi_{\bigcup E_k}(.)$ olduğunu kabul edelim. Burada E_k ölçülebilir kümelerdir.

i) Bu durumda tüm $f(.)$ fonksiyonları için, $\max(r,s)\leq\lambda$ olduğunda

$$\sum_k\left\|f(.)\chi_{E_k}(.)\right\|_{L_w^{rs}}^{\lambda}\leq c_1\left\|f(.)\chi_{\bigcup E_k}(.)\right\|_{L_w^{rs}}^{\lambda}$$

dir.

ii) Bir C ye bağlı olan $c>0$ sabiti için, $0<\gamma\leq\min(p,q)$ olduğundan

$$\sum_k\left\|f(.)\chi_{E_k}(.)\right\|_{L_u^{pq}}^{\gamma}\leq c\sum_k\left\|f(.)\chi_{E_k}(.)\right\|_{L_u^{pq}}^{\gamma}\ \text{dir.}$$

Aynı zamanda, sonuçların ispatı ağırlıklı Lorentz uzaylardaki genelleşmiş Hardy tür operatörlerin sınırlılığına bağlıdır. Bunu da bazı matematikçiler çalışmıştır [16]. Hardy tür operatörleri kabuller altında aşağıdaki forma sahiptir,

$$(Hf)(x) = (H_{a,b}f)(x) = a(x) \int_{|y|\le|x|} f(y)b(y)\,dy$$

ve

$$(H^*g)(x) = (H^*_{a,b}g)(x) = b(x) \int_{|x|\le|y|} g(y)a(y)\,dy.$$

Burada $a(.)$ *ve* $b(.)$ ölçülebilir negatif olmayan fonksiyonlardır. Burada aşağıdaki ifadeler kabul edildi.

$$r = s = 1 \text{ ya da } 1 < r < \infty \text{ ve } 1 \le s \le \infty,$$
$$p = q = 1 \text{ ya da } 1 < p < \infty \text{ ve } 1 \le q \le \infty.$$

Lemma 5.3 : r, s, p, q yukarıdaki gibi ve $\max(r,s) \le \min(p,q)$ olsun. Bu durumda her $f(\cdot) \ge 0$ için

$$\left\| (\mathcal{H}f)(\cdot) \right\|_{L_u^{pq}} \le C \left\| f(\cdot) \right\|_{L_v^{rs}}$$

olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{R>0} \left\| a(\cdot)\,\chi_{R<|\cdot|}(\cdot) \right\|_{L_u^{pq}} \left\| \frac{1}{v(\cdot)} b(\cdot)\,\chi_{|\cdot|<R}(\cdot) \right\|_{L_v^{\frac{r}{r-1}\frac{s}{s-1}}} < \infty$$

olmasıdır. Benzer olarak, $g(\cdot) \ge 0$ değerleri için

$$\left\| (\mathcal{H}^*g)(\cdot) \right\|_{L_u^{pq}} \le C \left\| g(\cdot) \right\|_{L_v^{rs}}$$

olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{R>0} \left\| b(\cdot)\,\chi_{|\cdot|<R}(\cdot) \right\|_{L_u^{pq}} \left\| \frac{1}{v(\cdot)} a(\cdot)\,\chi_{R<|\cdot|}(\cdot) \right\|_{L_v^{\frac{r}{r-1}\frac{s}{s-1}}} < \infty$$

olmasıdır. $0 \le \alpha < n,\ M_\alpha$ maksimal operatör için ağırlıklı eşitsizlikleri elde edebilmek için aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 5.4 : $0 < \lambda \le \min(p,q)$ olsun. Bu durumda sabit $C > 0$ ve her $f(\cdot) \ge 0$ için:

$$\left\| w_2(\cdot)(M_\alpha f)(\cdot) \right\|_{L_u^{pq}}^{\lambda} \le C\left(S_1^\lambda + S_2^\lambda + S_3^\lambda \right),$$

olur. Burada,

$$S_1^\lambda = \left\| w_2(\cdot) \left| \cdot \right|^{\alpha-n} \left(\int_{|y|\le|\cdot|} f(y)dy \right) \right\|_{L_u^{pq}}^\lambda ,$$

$$S_2^\lambda = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\| w_2(\cdot) \left(M_\alpha f \chi_{G_k} \right)(\cdot)\, \chi_{E_k}(\cdot) \right\|_{L_u^{pq}}^\lambda ,$$

$$S_3^\lambda = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left[2^{(\alpha-n)m} \left(\int_{E_m} f(y)dy \right) \right]^\lambda \left\| w_2(\cdot)\, \chi_{|x|<2^m}(\cdot) \right\|_{L_u^{pq}}^\lambda$$

ve,

$$E_k = \left\{ 2^k < |x| \le 2^{k+1} \right\}, G_k = \left\{ 2^{k-1} < |x| \le 2^{k+2} \right\}$$

dir. Diğer yandan Calderon-Zeygmund ve her hangi bir Kesirli integral operatörler için benzer ifadeler elde edilebilir. T_α, $(0 \le \alpha < n)$ lineer operatörü $C_c^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ den $L_{loc}^1\left(\mathbb{R}^n, dx\right)$ ye aşağıdaki gibi tanımlayalım, Her $f(\cdot) \in L_c^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ için,

$$\left(T_\alpha f\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_\alpha(x,y) f(y)dy \qquad \text{h.h.her } \ x \notin \operatorname{supp} f$$

dir. Burada $K_s(x,y)$ çekirdeği her $x \ne y$ değerleri için, $\left|K_\alpha(x,y)\right| \le C\left|x-y\right|^{(\alpha-n)}$ ifadesini sağlar. Burada $\left(T_\alpha f\right)(\cdot)$, kompakt desteğe sahip her sınırlı fonksiyonlar için hemen hemen her yerde iyi tanımlıdır. $0 < \alpha < n$ durumu için T_α kesirli integral operatörü I_α olur.

Lemma 5.5 : $0 \le \alpha < n \; ve \; 0 < \lambda \le \min(p,q)$ olsun. Bu durumda sabit $C > 0$ ve her $f \in C_c^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ fonksiyonları için:

$$\left\| w_2(\cdot)(T_\alpha f)(\cdot) \right\|_{L_u^{pq}}^\lambda \le C(S_1^\lambda + S_2^\lambda + S_3^\lambda)$$

olur. Burada,

$$S_1^\lambda = \left\| w_2(\cdot) \left| \cdot \right|^{\alpha-n} \left(\int_{|y|\le|\cdot|} f(y)dy \right) \right\|_{L_u^{pq}}^\lambda ,$$

$$S_2^\lambda = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\| w_2(\cdot) \left(T_\alpha f \chi_{G_k} \right)(\cdot)\, \chi_{E_k}(\cdot) \right\|_{L_u^{pq}}^\lambda ,$$

$$S_3^\lambda = \left\| w_2(\cdot) \left(\int_{|\cdot|\le|y|} \left|f(y)\right| \left|y\right|^{\alpha-n} dy \right) \right\|_{L_u^{pq}}^\lambda$$

dir ve E_k, G_k ‘de Lemma 4 deki gibi tanımlanır.

Teorem 5.2 ve 5.4 in ispatı: Teorem 5.2 ‘nin **ii)** kısmı ve teorem 5.4 ‘ün ispatını verelim. Kabul edelim ki, $I_\alpha : L_v^{rs}(w_1) \to L_u^{pq}(w_2)$ dir. $\left(M_\alpha f\right)(\cdot) \le c\left(s,n\right)\left(I_\alpha f\right)(\cdot)$ biçiminde tanımlandığında $M_\alpha : L_v^{rs}(w_1) \to L_u^{pq}(w_2)$ olarak elde edilir ve (5.6) şartının gereklilik kısmı, ([11] s181 (1.9)) Hardy şartını sağlar. Diğer yandan $I_\alpha : L_v^{rs}(w_1) \to L_u^{pq}(w_2)$ ifadesinin $I_\alpha : L_u^{p'q'}(\frac{1}{uw_2}) \to L_v^{r's'}(\frac{1}{vw_2})$ 'e denk olduğunu dikkate alalım. Burada $p' = \frac{p}{p-1}$, $q' = \frac{q}{q-1}, \ldots$ biçimindedir. Dolayısıyla (5.12) dual şartı, $M_\alpha : L_u^{p'q'}(\frac{1}{uw_2}) \to L_v^{r's'}(\frac{1}{vw_2})$ dan aşağıdaki gibi elde edilir. Teorem 5.2 'nin **ii)** kısmı ve teorem 5.4 'ü elde etmek için, ([11] s181(1.9)), (5.12) ve (5.10) hipotezini kullanılarak $0 \le \alpha < n$ için $T_\alpha : L_v^{rs}(w_1) \to L_u^{pq}(w_2)$ türevini almak yeterlidir. Teorem 5.2 'nin ispatındaki gibi ve Lemma 5.5 ve ten dolayı bu problem $C\left\|w_1(\cdot)f(\cdot)\right\|_{L_v^{rs}}^{\lambda}$ den elde edilen her $S_1^\lambda, S_2^\lambda, S_3^\lambda$ kestirimlerine indirgenebilir. Burada $C > 0$ değeri $\alpha, n, p, q, r, s, u(\cdot), v(\cdot), w_1(\cdot), w_2(\cdot)$ ve λ 'e bağlı sabit bir değerdir ve λ, $\max(r,s) \le \lambda \le \min(p,q)$ aralığındadır. Lemma 5.3 ve ([11] s181 (1.9)) Hardy şartı kullanılarak Teorem 5.2 'nin ispatındaki gibi S_1^λ ifadesi ortaya çıkarılabilir. Aynı zamanda S_2^λ kestirimi de Teorem 5.2 'nin ([11]) ispatındaki gibi elde edilir. Gerçekten, $\alpha > 0$ için $I_\alpha : L_1^{rs}(1) \to L_1^{r^*s}(1)$ olur ([13] teorem 6.3.3 s191) burada $1 < r < \infty, 1 \le s \le \infty$ ve $\frac{1}{r^*} = \frac{1}{r} - \frac{\alpha}{n}$ dir ve diğer yandan $\alpha = 0$ için $T_\alpha : L_1^{rs}(1) \to L_1^{rs}(1)$ interpolation aracılığıyla bulunabilir.

S_3^λ için bulunan ifade $\mathcal{H}^* : L_v^{rs} \to L_u^{rq}$ denktir. Burada $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}_{a,b}^*, b(x) = w_2(x),\ a(y) = \frac{1}{w_1(y)}\left|y\right|^{\alpha-n}$ dir. Lemma 5.3 den $\mathcal{H}^*$ operatörünün sınırlılığı dual Hardy (5.12) şartına denktir.

Önerme 5.5 'nin ispatı: Muckenhoupt ([11] s181 (1.8)) şartından Hardy ([11] s181 (1.9)) şartına elde etmek için, ilk olarak $v(\cdot) \in RD_{\nu,r,s}(w_1),\ \nu > 0$ durumun göz önüne alalım. $0 < \theta \le \min(p,q)$ olmak üzere Lemma 5.2 uygulanarak

$$\left\|w_2(\cdot)\left|\cdot\right|^{\alpha-n}\chi_{\{|\cdot|>R\}}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}^{\theta}\left\|\frac{1}{v(\cdot)w_1(\cdot)}\chi_{\{|\cdot|>R\}}(\cdot)\right\|_{L_v^{\frac{r}{r-1}\frac{s}{s-1}}}^{\theta} \le c_1\sum_{k\ge 0}\left\|w_2(\cdot)\left|\cdot\right|^{\alpha-n}\chi_{\{2^k R<|\cdot|\le 2^{k+1}R\}}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}^{\theta}$$

$$\times\left\|\frac{1}{v(\cdot)w_1(\cdot)}\chi_{\{|\cdot|<2^{-(k+1)}2^{k+1}R\}}(\cdot)\right\|_{L_v^{\frac{r}{r-1}\frac{s}{s-1}}}^{\theta}$$

$$\le c_2\sum_{k\ge 0}2^{-n\nu\theta k(1-\frac{1}{r})}(2^{k+1}R)^{\alpha-n}\left(\left\|w_2(\cdot)\chi_{\{|\cdot|\le 2^{k+1}R\}}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}\times\left\|\frac{1}{v(\cdot)w_1(\cdot)}\chi_{\{|\cdot|<2^{(k+1)}R\}}(\cdot)\right\|_{L_v^{\frac{r}{r-1}\frac{s}{s-1}}}\right)^{\theta}$$

$$\le c_3A^{\theta}$$

elde edilir.

$u(\cdot)\in D_{\varepsilon,p,q}(w_2)$, $1\le\varepsilon\le\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)p$ ve yukarıdaki gibi seçilen θ için,

$$\begin{aligned}\left\|w_2(\cdot)\left|\cdot\right|^{\alpha-n}\chi_{\{|\cdot|>R\}}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}^{\theta} &\le c_4\sum_{k\ge0}\left\|w_2(\cdot)\left|\cdot\right|^{\alpha-n}\chi_{\{2^kR<|\cdot|\le2^{k+1}R\}}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}^{\theta}\\ &\le c_5 2R^{(\alpha-n)\theta}\sum_{k\ge0}2^{k(\alpha-n)\theta}\left\|w_2(\cdot)\chi_{\{|\cdot|\le2^{k+1}R\}}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}^{\theta}\\ &\le c_6R^{(\alpha-n)\theta}\sum_{k\ge0}2^{-kn\theta\left[\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)-\frac{1}{p}\varepsilon\right]}\left\|w_2(\cdot)\chi_{\{|\cdot|<R\}}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}^{\theta}\\ &\le c_7\left(R^{(\alpha-n)}\left\|w_2(\cdot)\chi_{\{|\cdot|<R\}}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}\right)^{\theta}\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikten ([11] s181 (1.8)) şartı, ([11] s181 (1.9)) şartını verdiği görülür. Aşağıda Lemma 5.2, 5.4, 5.5 ispatlanacaktır.

Lemma 5.2 nin ispatı: i) kısmının ispatı $C=1$ alındığında [17] ‘deki gibidir. **ii)** kısmının ispat etmek için; $0<\gamma\le\min(p,q)$ olduğunu kabul edelim. $p=q\ ya\,da\,q<p$ için burada anahtar $\|.\|_{L_u^{\frac{p}{\gamma}\frac{q}{\gamma}}}$ ‘nin norm olmasına dayanmasıdır. Buradan,

$$\left\|f(.)\sum_k\chi_{E_k}(.)\right\|_{L_u^{pq}}^{\gamma}=\left\|\left(f(.)\sum_k\chi_{E_k}(.)\right)^{\gamma}\right\|_{L_u^{\frac{p}{\gamma}\frac{q}{\gamma}}}\le c_1\left\|f^{\gamma}(.)\sum_k\chi_{E_k}(.)\right\|_{L_u^{\frac{p}{\gamma}\frac{q}{\gamma}}}$$

$$\le c_2\sum_k\left\|f^{\gamma}(.)\chi_{E_k}(.)\right\|_{L_u^{\frac{p}{\gamma}\frac{q}{\gamma}}}=c_3\sum_k\left\|f^{\gamma}(.)\chi_{E_k}(.)\right\|_{L_u^{pq}}^{\gamma}$$

olur. Şimdi $p<q,\gamma\le p<q\ ya\ da\ \dfrac{\gamma}{p}\le1\ ve\ 1<\dfrac{q}{\gamma}$ durumunu göz önüne alalım. Böylece

$\sum_j b_j^{\theta}\le1\ ve\ \theta=\dfrac{q}{\gamma-q}$ olmak üzere $\left(b_j\right)_j\in l^{\theta}$ reel değerli negatif olmayan dizisi için,

$$\left\|f(.)\sum_k\chi_{E_k}(.)\right\|_{L_u^{pq}}^{\gamma}\le c_4\left[\sum_j 2^{jq}\left(\sum_k\int_{E_k\cap\{f(.)>2^j\}}u(y)\,dy\right)^{\frac{\gamma}{p}\times\frac{q}{\gamma}}\right]^{\frac{\gamma}{q}}$$

$$\le c_4\left[\sum_j\left[2^{j\gamma}\sum_k\left(\int_{E_k\cap\{f(.)>2^j\}}u(y)\,dy\right)^{\frac{\gamma}{p}}\right]^{\frac{q}{\gamma}}\right]^{\frac{\gamma}{q}}\qquad\left(\frac{\gamma}{p}\le1\ olduğunda\right)$$

$$\leq c_4 \sum_k \sum_j 2^{j\gamma} b_j \left(\int_{E_k \bigcap \{f(.)>2^j\}} u(y)\,dy \right)^{\frac{\gamma}{p}}$$

$$\leq c_4 \sum_k \left[\sum_j 2^{jq} \left(\int_{E_k \bigcap \{f(.)>2^j\}} u(y)\,dy \right)^{\frac{q}{p}} \right]^{\frac{\gamma}{q}} \approx c_4 \sum_k \left\| f(.)\, \chi_{E_k}(.) \right\|_{L_u^{pq}}^{\gamma}$$

elde edilir. Bu sonucun ilk kısmı bazı matematikçiler tarafından ispatlanmıştır [16]. İkinci kısım dual aracılığıyla gösterilebilir.

Lemma 4 'ün ispatı: M_α alt toplamsal olduğundan, sabit $c > 0$ ve bütün $f(.) \geq 0$ için,

$$\left\| w_2(.)(M_\alpha f)(.) \right\|_{L_u^{pq}}^{\lambda} \leq c\left(P_1^\lambda + P_2^\lambda + P_3^\lambda \right)$$

ve

$$P_1^\lambda = \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_2(.)\left(M_\alpha f \chi_{\{|y|\leq 2^{k-1}\}} \right)(.)\, \chi_{E_k}(.) \right\|_{L_u^{pq}}^{\lambda},$$

$$P_2^\lambda = \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_2(.)\left(M_\alpha f \chi_{G_k} \right)(.)\, \chi_{E_k}(.) \right\|_{L_u^{pq}}^{\lambda},$$

$$P_3^\lambda = \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_2(.)\left(M_\alpha f \chi_{\{2^{k+2}<|y|\}} \right)(.)\, \chi_{E_k}(.) \right\|_{L_u^{pq}}^{\lambda},$$

olur. Buradan P_1^λ, P_3^λ ifadelerini elde edeceğiz.

P_1^λ in kestirimi: Anahtar her $x \in E_k$ için,

$$\left(M_\alpha f \chi_{\{|.|\leq 2^{k-1}\}} \right)(x) \leq c|x|^{(\alpha-n)} \left[\int_{\{|y|\leq|x|\}} f(y)\,dy \right] \tag{5.16}$$

Olduğunu göstermektir. Burada $c > 0$ yalnız $\alpha\ ve\ n$ e bağlı sabittir. Gerçekten, (5.16) kullanılarak,

$$P_1^{\lambda} \le c_1 \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_2(.)|.|^{\alpha-n} \left(\int_{|y|\le|.|} f(y)\,dy \right) \chi_{E_k}(.) \right\|_{L_u^{pq}}^{\lambda}$$

$$= c_1 \left\| w_2(.)|.|^{\alpha-n} \left(\int_{|y|\le|.|} f(y)\,dy \right) \right\|_{L_u^{pq}}^{\lambda} = c_1 S_1^{\lambda}$$

elde edilir. (5.16) eşitsizliğini elde etmek için; $x \in E_k, |y| \le 2^{k-1}$ için $|y| \le |x|$ alalım. Böylece $g(.) = f(.)\chi_{\{|y|\le 2^{k-1}\}}(.)$ 'nin desteğini $\{y : |y| \le |x|\} = \{|y| = |x|\}$ kümesi kapsar. Diğer yandan, $r \ge 2^{k+2}$ olduğundan $\int_{B(x,r)} g(y)\,dy$ ifadesi sıfıra yakınsamaz. Dolayısıyla reel r değeri için,

$$r^{\alpha-n} \int_{B(x,r)} g(y)\,dy \le c2^{k(\alpha-n)} \int_{B(x,r)} g(y)\,dy$$

$$\le c'|x|^{k(\alpha-n)} \int_{B(x,r)\bigcap \sup p\, g} g(y)\,dy \le c'|x|^{k(\alpha-n)} \int_{\{|y|\le|x|\}} f(y)\,dy;$$

olur bu yüzden (5.16) ispat edilmiş olur.

P_3^{λ} 'ün kestirimi: P_3^{λ} eşitsizliğini elde etmek için her $x \in E_k$ değeri için,

$$\left(M_{\alpha} f_{\{2^{k+2}\le|.|\}} \right)(x) \le c \sup_{l\ge 2} \left\{ d_{k+l}^{(\alpha-n)} \left(\int_{E_k+1} f(y)\,dy \right) \right\} \tag{5.17}$$

sağlandığını iddia edelim. Burada $d_{k+l} = 2^{k+l}$ $ve\; c = c(\alpha, n) > 0$ 'dir. Bu iddianın ispatı aşağıdadır.

İlk olarak $\lambda = p = q, \lambda \le q < p\; ve\; \lambda < p \le q$ durumlarını kabul edelim. Buradan,

$$\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(M_{\alpha} f \chi_{2^{k+2}<|.|} \right)(.)\chi_{E_k}(.) \right]^{\lambda} \le \sum_k \left(M_{\alpha} f \chi_{2^{k+2}<|.|} \right)^{\lambda}(.)\chi_{E_k}(.)$$

$$\le c \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\sup_{l\ge 2} \left\{ d_{k+l}^{(s-n)} \left(\int_{E_{k+l}} f(y)\,dy \right) \right\} \right]^{\lambda} \chi_{E_k}(.)$$

$$\le c \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[d_{k+l}^{(s-n)} \left(\int_{E_{k+l}} f(y)\,dy \right) \right]^{\lambda} \chi_{E_k}(.)$$

$$=c\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left[d_m^{(s-n)}\left(\int_{E_m} f(y)\,dy\right)\right]^{\lambda}\sum_{k=-\infty}^{m-2}\chi_{E_k}(.)$$

$$=c\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left[d_m^{(s-n)}\left(\int_{E_m} f(y)\,dy\right)\right]^{\lambda}\chi_{\{|.|<2^m\}}(.)$$

elde edilir. Yukarıdaki hipotezlerden $\|\cdot\|_{L_u^{\frac{p}{\lambda}\frac{q}{\lambda}}}$ ifadesinin norm olmasından,

$$\mathcal{P}_3^{\lambda}\le c^{\lambda}\left\|w_2(\cdot)^{\lambda}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left[d_m^{(s-n)}\left(\int_{E_m} f(y)dy\right)\right]^{\lambda}\chi_{\{|\cdot|<2^m\}}(\cdot)\right\|_{L_u^{\frac{p}{\lambda}\frac{q}{\lambda}}}$$

$$\le C\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left[d_m^{(s-n)}\left(\int_{E_m} f(y)dy\right)\right]^{\lambda}\left\|w_2(\cdot)\chi_{\{|\cdot|<2^m\}}(\cdot)\right\|^{\lambda}_{L_u^{\frac{p}{\lambda}\frac{q}{\lambda}}}$$

elde edilir. Şimdi $\lambda=p<q$ durumunu ele alalım. Bu temel ifade (5.9) 'nin hipotezidir. Buradan,

$$\mathcal{P}_3^{p}\le c\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\sup_{l\ge 2} d_{k+l}^{(s-n)}\left(\int_{E_{k+l}} f(y)dy\right)\right]w_2(\cdot)\chi_{E_k}(\cdot)\right\|^{p}_{L_u^{pq}}$$

$$\le C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[\sup_{l\ge 2} d_{k+l}^{(s-n)}\left(\int_{E_{k+l}} f(y)dy\right)\right]^{p}\left\|w_2(\cdot)\chi_{E_k}(\cdot)\right\|^{p}_{L_u^{pq}}$$

(Lemma 5.2 ‘nin ikinci kısmından $(\lambda=p\le\min(p,q))$ olsun)

$$\le C\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left[d_{k+l}^{(s-n)}\left(\int_{E_{k+l}} f(y)dy\right)\right]^{p}\left\|w_2(\cdot)\chi_{E_k}(\cdot)\right\|^{p}_{L_u^{pq}}$$

$$\le C\sum_{m}\left[d_m^{(s-n)}\left(\int_{E_m} f(y)dy\right)\right]^{p}\sum_{k=-\infty}^{m-2}\left\|w_2(\cdot)\chi_{E_k}(\cdot)\right\|^{p}_{L_u^{pq}}\quad ((5.9)\text{ 'dan})$$

$$\le C'\sum_{m}\left[d_m^{(s-n)}\left(\int_{E_m} f(y)dy\right)\right]^{p}\left\|w_2(\cdot)\chi_{\{|\cdot|<2^m\}}(\cdot)\right\|^{p}_{L_u^{pq}}$$

olur. Şimdi (5.17) iddiasını gösterebiliriz. Bunun için aşağıdaki ifadeyi kabul edelim,

$$\mathcal{S}=\sup_{l\ge 2}2^{(\alpha-n)(k+l)}\left[\int_{\{2^{k+l}<|y|\le 2^{k+l+1}\}} f(y)dy\right]<\infty .$$

$x\in E_k$ olsun. Bu iddia, $\int_{B(x,r)} f(y)\chi_{\{2^{k+2}<|y|\}}(y)dy$ sıfıra gitmediğinde

$$r^{\alpha-n}\int_{B(x,r)} f(y)\chi_{\{2^{k+2}<|y|\}}(y)dy\le c\mathcal{S}\tag{5.18}$$

olacak şekilde sabit $c>0$ değerini bulmak olur. $r>0$ ve $\int_{B(x,r)} f(y)\chi_{\{2^{k+2}<|y|\}}(y)dy\ne 0$ ifadesini göz önüne alalım. $B(x,r)\cap\left\{2^{k+m}<|y|\le 2^{k+m+1}\right\}\ne\varnothing$, ve

$B(x,r)\cap\{2^{k+m+1}<|y|\le 2^{k+m+2}\}=\varnothing$ olacak şekilde bir $m\ge 2$ tam sayısı vardır. $2^{k+m}-2^{k+1}<r\le 2^{k+m+1}$ ve $m\ge 2$ olduğundan $\frac{1}{2}2^{k+m}\le r<22^{k+m}$ yazılır. İlk ifade ile beraber,

$$\int_{B(x,r)} f(y)\chi_{\{2^{k+2}<|y|\}}(y)\,dy=\sum_{l=2}^{m}\int_{B(x,r)\cap\{2^{k+l}<|y|\le 2^{k+l+1}} f(y)\,dy$$

$$\le\sum_{l=2}^{m}\int_{\{2^{k+l}<|y|\le 2^{k+l+1}\}} f(y)dy\ \le\mathcal{S}\sum_{l=2}^{m}2^{(k+l)(n-\alpha)}$$

$$\le\mathcal{S}\frac{2^{2(n-\alpha)}}{2^{(n-\alpha)}-1}\times 2^{[k+(m-1)](n-\alpha)}=c(\alpha,n)\mathcal{S}r^{(n-\alpha)}$$

olur. Son eşitsizlikte (5.18) ‘ü gerektirir.

Lemma 5.5’ in ispatı: İlk olarak sabit $c>0$ için aşağıdaki ifadeler açıktır. Her $f(\cdot)\in C_c^\infty$ için,

$$\left\|w_2(\cdot)\left(T_\alpha f\right)(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}^{\lambda}\le c(\mathcal{P}_1^\lambda+\mathcal{P}_2^\lambda+\mathcal{P}_3^\lambda)$$

ile birlikte,

$$\mathcal{P}_1^\lambda=\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}w_2(\cdot)\left(T_\alpha f\chi_{\{|y|\le 2^{k-1}\}}\right)(\cdot)\,\chi_{E_k}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}^{\lambda},$$

$$\mathcal{P}_2^\lambda=\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}w_2(\cdot)\left(T_\alpha f\chi_{G_k}\right)(\cdot)\,\chi_{E_k}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}^{\lambda},$$

$$\mathcal{P}_3^\lambda=\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}w_2(\cdot)\left(T_\alpha f\chi_{\{2^{k+2}<|y|\}}\right)(\cdot)\,\chi_{E_k}(\cdot)\right\|_{L_u^{pq}}^{\lambda},$$

olur. Burada E_k,G_k lemma 5.4 ‘ün ispatındaki gibi tanımlandı. T_α üzerindeki şarttan,

$$\left(T_\alpha f\chi_{\{|\cdot|\le 2^{k-1}\}}\right)(\cdot),\ \left(T_\alpha f\chi_{G_k}\right)(\cdot),\ \left(T_\alpha f\chi_{\{2^{k+2}<|\cdot|\}}\right)(\cdot)$$

ifadesi iyi tanımlıdır.

Lemma 5.4 ‘ün ispatındaki gibi, $\mathcal{P}_1^\lambda$ hemen aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\left|\left(T_s f_{\{|\cdot|\le 2^{k-1}\}}\right)(x)\right|\le c(\alpha-n)|x|^{(\alpha-n)}\left[\int_{\{|y|\le|x|\}}|f(y)|dy\right]\ \text{her } x\in E_k\,.$$

Bu eşitsizliği elde etmek için $x\in E_k\ ve\,|y|\le 2^{k-1}$ için $|y|\le\frac{1}{2}|x|<|x|\ ve\ \frac{1}{2}|x|\le|x-y|$ olduğunu kabul edelim. Dolayısıyla K çekirdeği için verilen standart kestirimi kullanarak,

$$|K(x,y)|\le c|x-y|^{(\alpha-n)}\le c'|x|^{(s-n)}$$

elde edilir. $x,\left(f_{\{|y|\le 2^{k-1}\}}\right)(\cdot)$ fonksiyonunun desteğine ait olmadığından,

$$\left|\left(T_s f \chi_{\{|\cdot|\leq 2^{k-1}\}}(x)\right)\right| \leq \int_{\{|y|\leq 2^{k-1}\}} |K(x,y)||f(y)|dy$$
$$\leq C|x|^{(\alpha-n)}\left[\int_{\{|y|<|x|\}}|f(y)|dy\right]$$

elde edilir. Benzer olarak $\mathcal{P}_3$ için kestirim her $x\in E_k$ için,

$$\left|\left(T_s f_{\{2^{k+2}<|\cdot|\}}(x)\right)\right| \leq c(s,n)\left[\int_{\{|x|\leq|y|\}}|f(y)||y|^{(s-n)}\,dy\right]$$

eşitsizliğinin bir sonucudur. Gerçekten, $x\in E_k$, $2^{k+2}<|y|$ için $|x|<2|x|\leq|y|$, $\frac{1}{2}|y|\leq|x-y|$ olur. Diğer taraftan x, $\left(f\chi_{\{2^{k+2}<|y|\}}\right)(\cdot)$ fonksiyonunun desteğine ait olmadığından,

$$\left|\left(T_s f \chi_{\{2^{k+2}<|\cdot|\}}(x)\right)\right| \leq C\left[\int_{\{|x|<|y|\}}|f(y)||y|^{(s-n)}\,dy\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] Samko, 1993, Harmonic Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York.

[2] Neri U. 1971, Singular Integrals, Lecture Notes in Mathematics,Springer Verlag Berlin, New York.

[3] Sadoyky C. 1979, Interpolation of Operators and Singular Integrals, Pure and Applied Mathematics, Mercel Dekker Inc. New York

[4] M. Levitan, 1967, B. M. Uspehi Mat. Nauk.

[5] Kipriyanov, I.A., On Singular Integrals Generated By The Generalized Shift Operator, II, Sibirsk. Mat. Zh., (1970).

[6] Aliev, I.A. On Riesz Transformations Generated by Generalized Shift Operators. Izvestiya Acad of Azarbeydian, No:1, p. 7-13. (1987)

[7] Gadjiev, A. D. and Aliev, I. A. Proc. Seminars of The Inst. Agplied Math. Vol. 3, No: 2, Tebilisi

[8] Ekincioğlu İ. Genelleştirilmiş Öteleme Operatörü ile elde edilen Riesz Dönüşümleri, 1995 Ankara.

[9] G. G. Lorentz On the Theory of Spaces $\wedge$. Pasific J. Math. 1(1951).

[10] A. Hunt, On L(p,q) spaces. L'enseign. Math. 12 (1966), 249-294.

[11] Y. Rakotondratsımba, On The Boundedness Of Classical Operators On Weigted Lorentz Spaces.

[12] E.M.Stein, Fractional Integrals in n-Dimensional Euclidean spaces. J. Math. Mech.

[13] V. Kokilashvili and M. Krbec, Weighted Inequalities in Lorentz and Orlicz Spaces, 2nd ed. World Scientific 57 (1991).

[14] M. Carro and J. Soria, The Hardy-Littlewood Maximal Function and Weighted Lorentz Spaces, Preprint, 1993.

[15] R.Coifman and Y.Meyer, 1979, Au dela des operateurs pseudo-differentiels, 2nd ed. Asterisque 57.

[16] D. Edmunds, P. Gurka and L. Pick, Compactness of Hardy-type integral operators in weighted Banach function spaces. Studia Math. 109 (1994), No1, 73-90.

[17] E. Sawyer, Weighted Lebesque and Lorentz norm inequality for the Hardy operators. Trans. Amer. Math. Soc. 281 (1984), 329-337.