TRANS-SASAKİAN MANİFOLDLAR

Muazzez ÇETİNTÜRK

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Ekim - 2007

TRANS-SASAKİAN MANİDOLDLAR

Muazzez ÇETİNTÜRK

DUMLUPINAR ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ahmet YILDIZ

Ekim - 2007

KABUL VE ONAY SAYFASI

Muazzez ÇETİNTÜRK'ün YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "TRANS SASAKİAN MANİFOLDLAR" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

05/10/2007

Üye : Doç. Dr. Cengiz MURATHAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mine TURAN

Üye : Yrd.Doç. Dr. Ahmet YILDIZ (Danışman)

Fen Bilimleri Enstitüsün Yönetim Kurulu'nun ....../...../…..... gün ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. M. Sabri ÖZYURT
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TRANS-SASAKİAN MANİFOLDLAR

Muazzez ÇETİNTÜRK

Matematik Bölümü Yüksek Lisans Tezi 2007
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ahmet YILDIZ

ÖZET

Bu tezin amacı Trans-Sasakian manifoldlarda bazı eğrilik şartlarını çalışmaktır. Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar ve sonuçları içermektedir. İkinci bölüm Sasakian ve Trans-Sasakian manifoldlar ile ilgili tanımlar, teoremler ve sonuçları içermektedir. Üçüncü bölüm orijinal çalışmalarımızdan oluşmaktadır.

Birinci bölümde Riemann eğrilik tensörü, Einstein manifold, Weyl-conformal eğrilik tensörü, Projektif eğrilik tensörü, hemen hemen değme metrik manifoldlar gibi temel kavramlar tanıtılmıştır.

İkinci bölümde Sasakian manifold, Sasakian uzay formu, Trans-Sasakian manifold tanımları, bu tanımlarla ilgili temel teorem ve önermeler verilmiştir.

Son bölümde Trans-Sasakian manifoldlarda Riemann eğrilik tensörü, Projektif eğrilik tensörü, Weyl-conformal eğrilik tensörü ile ilgili bazı eğrilik şartları ve bu eğrilik şartlarını sağlamamızda kullandığımız eşitlikler verilmiştir. Verilen tüm bu bilgiler ışığında yazılan teoremler ispatlanmış ve sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Einstein manifold**,** Hemen hemen değme metrik manifold, Projektif eğrilik tensörü, Riemann eğrilik tensörü, Sasakian manifold, Trans-Sasakian manifold, Weyl-conformal eğrilik tensörü.

TRANS-SASAKIAN MANIFOLDS

Muazzez ÇETİNTÜRK

Department of Mathematics MSc Thesis 2007
Supervisor: Asist. Prof. Dr. Ahmet YILDIZ

SUMMARY

The aim of this thesis is to study some curvature conditions on Trans-Sasakian manifolds. The thesis has three chapters.

First chapter contains some fundamental definitions and results which will be used in other chapters. Second chapter contains some fundamental definitions,theorems and results about Sasakian and Trans-Sasakian manıfolds. Chapter three contains original works.

In the first chapter the we introduce basic definitions such as, Riemannian curvature tensor, Einstein manifold, Weyl Conformal curvature tensor, projective curvature tensor and almost contact metric manifolds.

In the second chapter the definitions of Sasakian manifold, Sasakian space form, Trans-Sasakian manifold and teh basic theorems and propositions which are connected with these definitions have been given.

In the last chapter some curvature conditions and equations which are used to provide these curvature conditions about Riemann curvature tensor, projective curvature tensor, Weyl-conformal curvature tensor on Trans-Sasakian manifolds are given. Under the light of these given information, the written theorems have been proved and results have been obtained.

Keywords: Almost contact metric manifold, Einstein manifold, Riemannian curvature tensor, Sasakian Manifold, Trans-Sasakian manifold, Weyl-conformal curvature tensor.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek çalışmanın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Ahmet YILDIZ’ a ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen aileme, arkadaşlarım Esra, Fatih ve Evrim’e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklamalar**
R	Reel Sayılar Cümlesi
M	Manifold
g	Metrik Tensör
C^{∞}	Diferansiyellenebilme
$[,]$	Lie Parantez Operatörü
$T_P(M)$	p noktasında teğet uzay
$T_P^{\perp}(M)$	p noktasında normal uzay
$\chi(M)$	M nin teğet vektör alanlarının uzayı
$\chi^{\perp}(M)$	M nin normal vektör alanlarının uzayı
∇	M üzerindeki afin koneksiyon
$\widetilde{\nabla}$	$\overline{M}$ üzerindeki afin koneksiyon
D	Normal Koneksiyon
R	M nin Riemann Eğrilik Tensörü
$\overline{R}$	$\overline{M}$ nin Riemann Eğrilik Tensörü
A_{ξ}	Şekil Operatörü
B	İkinci Temel Form
τ	Skaler Eğrilik
S	Ricci Tensörü
C	Weyl-Conformal Eğrilik Tensörü
$\overline{C}$	Weyl-Concircular eğrilik Tensörü
P	Projektif Eğrilik Tensörü
Q	Ricci Operatörü
$\imath$	1-form
ϕ	(1, 1) tipinde tensör alanı
N_F	F nin Nijenhuis Torsiyon Tensörü

1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar tanıtılmıştır.

Tanım 1.1.1: M bir diferensiyellenebilir (C^{∞}) manifold olsun. M üzerindeki C^{∞} vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den $\mathbf{R}$ ye C^{∞} fonksiyonların uzayı $C^{\infty}(M, \mathbf{R})$ olmak üzere, M üzerinde;

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M, \mathbf{R})$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik, 2-lineer g Riemann metriği ile birlikte M ye bir **Riemann manifoldu** adı verilir ve (M, g) şeklinde gösterilir (Kobayashi and Nomizu, 1963).

M manifoldunun herhangi iki p ve q noktası için M üzerinde bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabilirse M ye **bağlantılı manifold** adı verilir. M bağlantılı ve temel grubu sadece birim elemandan oluşuyor ise M ye **basit bağlantılı** dır denir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.1.2: M bir diferensiyellenebilir manifold ve M üzerindeki C^{∞} vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\xrightarrow{2-\text{lineer}} \chi(M) \\ (X, Y) &\longrightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü $\forall f, g \in C^{\infty}(M, \mathbf{R})$, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

i) $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$

ii) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

özeliklerini sağlarsa, ∇ ya M üzerinde bir **Afin Koneksiyon** adı verilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.1.3: (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan bir afin koneksiyon olsun. O zaman $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere; ∇ dönüşümü;

i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (Koneksiyonun sıfır torsiyon özeliği),

ii) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Koneksiyonun metrikle bağdaşması özeliği) şartlarını sağlıyorsa, ∇ ya M üzerinde **sıfır torsiyonlu Riemann Koneksiyon** veya M nin **Levi-Civita Koneksiyonu** adı verilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.1.4: M bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere;

$$\nabla : \chi(M) x \chi(M) \xrightarrow{2-lineer} \chi(M)$$
$$(X, Y) \longrightarrow \nabla(X,Y) = \nabla_X Y$$

biçiminde tanımlanan ∇ operatörü, M nin bir U bölgesi üzerinde tanımlı olup her bir C^{∞} X, $Y \in \chi(U)$ vektör alan çiftine U üzerinde $\nabla_X Y$ ile ifade edilen üçüncü bir C^{∞} vektör alanı karşılık getirir. Bu karşılık gelme aşağıdaki özellikleri sağladığında ∇ ya **Lineer Koneksiyon** (veya **kovaryant türev**) adı verilir (O' Neill 1983).

$\forall X,Y, Z \in \chi(M)$, $\forall f \in C^{\infty}(M, \mathbf{R})$ olmak üzere;

i.) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$,

ii.) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$,

iii.) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

iv.) $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f) Y$

dir.

Tanım 1.1.5: (M, g) bir Riemann manifoldu, ∇ de M üzerindeki Levi–Civita koneksiyonu olsun.

$$R : \chi(M) x \chi(M) x \chi(M) \to \chi(M)$$
$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{1.1}$$

ile tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde bir (1, 3)-tensör alanıdır ve M nin **Riemann eğrilik tensörü** olarak adlandırılır. Ayrıca $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$ tensörüne M nin **Riemann-Christoffel eğrilik tensörü** adı verilir.

Her $X, Y, Z, V, W \in \chi(M)$ için Riemann eğrilik tensörü R aşağıdaki özelliklere sahiptir;

i.) $R(X, Y)Z = - R(Y, X)Z,$ (1.2)

ii.) $g(R(X, Y)V, W) = - g(R(X, Y)W, V),$ (1.3)

iii.) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0,$ (1.4)

iv.) $g(R(X, Y)V, W) = g(R(V, W)X, Y)$ (1.5)

(O'Neill 1983).

Tanım 1.1.6: *(M, g)* bir Riemann manifoldu olsun. T_pM tanjant uzayının iki boyutlu altuzayı Π olmak üzere $V, W \in \Pi$ tanjant vektörleri için Q fonksiyonu;

$$Q(V, W) = g(V, V)g(W, W) - g(V, W)^2$$

biçiminde tanımlansın. $Q(V, W) \neq 0$ olmak üzere;

$$K(V,W) = \frac{g(R(V,W)W,V)}{Q(V,W)} \tag{1.6}$$

olup buna Π nin **kesitsel eğriliği** denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.1.7: : *(M, g)* m-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $\chi(M)$ in bir bazı olsun.

$$Q : \chi(M) - \chi(M)$$

$$X \to Q(X) = -\sum_{i=1}^{n} R(X_i, X)X_i$$

biçiminde tanımlanan Q operatörüne M nin **Ricci Operatörü** denir.

Tanım 1.1.7: *(M, g)* m-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları olsunlar

$$S : \chi(M) \times \chi(M) \to \mathbf{R}$$

$$(X, Y) \to S(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X)Y, e_i) \tag{1.7}$$

şeklinde tanımlı (0,2) tipindeki S tensör alanına, M üzerinde **Ricci eğrilik tensörü** adı verilir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.1.8: *(M, g)* m-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için;

$$S(X, Y) = \lambda g(X,Y) \tag{1.8}$$

olacak biçimde M üzerinde bir λ fonksiyonu var ise yani M nin Ricci tensörü S, metrik tensör g nin bir katı ise M ye **Einstein manifoldu** adı verilir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.1.9: (M, g) m-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere;

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i) \tag{1.9}$$

değerine M nin **skalar eğriliği** adı verilir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.1.10: M $(2m+1)$-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için M nin **Weyl projektif eğrilik tensör alanı;**

$$P(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{2m}[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y] \tag{1.10}$$

ile tanımlanır. Burada Q Ricci operatörüdür (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.1.11: M $(2m+1)$-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için M nin **Weyl conformal eğrilik tensör alanı;**

$$C(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \frac{1}{2m-1}[S(X,Z)Y - S(Y,Z)X + g(X,Z)QY$$

$$- g(Y,Z)QX] - \frac{\tau}{2m(2m-1)}[g(X,Z)Y - g(Y,Z)X] \tag{1.11}$$

ile tanımlanır. Burada Q Ricci operatörüdür (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.1.12: $C = 0$ ise M manifoldu **conformal flat** olarak adlandırılır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.1.13: M $(2m+1)$-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için M nin **Weyl concircular eğrilik tensör alanı;**

$$\overline{C}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{\tau}{2m(2m-1)}[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \tag{1.12}$$

ile tanımlanır. Burada Q Ricci operatörüdür (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.1.14: Sabit eğrilikli, tam, bağlantılı manifoldlara **uzay form** denir. $(2m+1)$-boyutlu bir M uzay formu $M^{2m+1}(c)$ ile gösterilir. Eğer

$$c = 0 \; ise \quad M^{2m+1}(c) = \mathbf{E}^n \;\; Öklid\, uzayı$$
$$c = \frac{1}{r^2} \quad ise \quad M^{2m+1}(c) = S^n(r) \;\; küresi$$
$$c = -\frac{1}{r^2} \quad ise \quad M^{2m+1}(c) = H^n(r) \;\; Hiperbolik\, uzay$$

dır (Chen, 1973).

Tanım 1.1.15 : Eğer $c \in M$ ise, D_σ, $T_\sigma M$ de ν vektörlerinin grubu olsun. Öyle ki inextendible geodezik γ_ν, [0,1] de tanımlanır. c üzerinde M nin üsse ait haritası

$$\exp_\sigma : D_\sigma - M$$

fonksiyonudur öyle ki $\forall\, \nu \in D_\sigma$ için $\exp_\sigma(\nu) = \gamma_\nu(1)$ dir[1].

Tanım 1.1.16 : $L : T_\sigma(M) \to T_{\bar\sigma}(\overline{M})$ bir lineer izometri olsun ve U, M üzerinde c nin bir normal komşuluğu olsun öyle ki $\exp_{\bar\sigma}$, $L(\exp_\sigma^{-1}(U))$ grubunda tanımlanır. O zaman

$$\phi_L = \exp_{\bar\sigma} \;\; L \;\; \exp_\sigma^{-1} : U \to M$$

haritasına U üzerinde L nin **kutupsal koordinatı** denir[1].

Kısaca $\forall\, \nu \in U \subset T_\sigma(M)$ için $\phi_L : \exp_\sigma(\nu) - \exp_{\bar\sigma}(L_\nu)$ dir.

Kutupsal haritalar yeterince küçük U için daima bulunur ve aşağıdaki ilk iki özellik gösterir ki, eğer biz izometrinin var olduğunu araştırırsak, c , L nin kutupsal haritası olmalıdır.

Yardımcı Teorem 1.1.1 : Yukarıdaki gösterim ile

i.) ϕ_L radyal geodezikleri radyal geodeziklere götürür. Açıkça, eğer $\nu \in T_o(M)$ ise, o zaman $\phi_L \;\; \gamma_\nu = \gamma_{L\nu}$ dir.

ii.) c üzerinde ϕ nin diferansiyel haritası L dir.

iii.) Eğer U yeterince küçük ise o zaman ϕ_L, M de c nin bir normal komşuluğu üzerinde bir diffeomorfizmdir.

iv.) Eğer M tam ise, ϕ_L, c nin her normal komşuluğunda tanımlanır[1].

Sonuç 1.1.1 : Bir yarı-Riemann manifold üzerinde aşağıdaki durumlar denktir.

i.) M lokal simetriktir.

ii.)Eğer $L : T_P(M) - T_q(M)$ bir lokal simetrik ise eğriliği korur, o zaman p ve q nun normal komşuluklarının bir ϕ izometrisi vardır öyle ki $d\phi_p = L$ dir.

iii.) M nin her p noktasında lokal geodezik ξ_p bir izometriktir[1].

Tanım 1.1.17 : Bir yarı-Riemann uzay simetriği, bağlantılı bir yarı-Riemann manilfold M dir, öyle ki $\forall p \in M$ için $T_P(M)$ üzerinde tek bir izometri $\xi_p : M - M$ ile diferansiyel harita –id vardır.

İzometri ξ_p ye p de M nin global simetrisi denir. ξ_p, p de lokal geodezik simetrinin M nin tümüne genişletildiğinde tektir. Böylece ikincisi bir izometridir. Yukarıdaki sonuçtan simetrik, lokal simetriği kapsar[1].

Örnek 1.1.1 :

1. R^m simetriktir, her p noktası için harita $p + x - p - x$ bir izometridir.
2. S^m küresi simetriktir, her p için p ve –p aracılığıyla R^{m+1} de, S^m genel öklidyen anlamda dizi çevresinde simetriktir.
3. Gerçekte her bağlantılı hiperkuadrik, simetriktir[1].

Tanım 1.1.18: *M* $m \geq 2$ boyutlu C^{∞}sınıfından bağlantılı bir Riemann manifoldu olsun. *M* üzerinde tanımlı (0,2)-tipinde bir simetrik tensör alanı A olmak üzere Λ_A endomorfizmi

$$\Lambda_A : \quad \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M) \tag{1.13}$$

$$(X \Lambda_A Y)Z = A(Y,Z)X - A(X,Z)Y \tag{1.14}$$

biçiminde tanımlanır.Eğer A=g alınırsa son denklem

$$(X \Lambda_g Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y \tag{1.15}$$

biçimine indirgenir.Bundan sonra $(X \Lambda_g Y)$ yerine kısaca $X \Lambda Y$ kullanılacaktır[2].

M üzerinde (0,k)-tipinde ($k \geq 1$) bir T tensör alanı ve (0,2)-tipinde bir simetrik A tensör alanı verildiğinde R.T ve Q(A,T) tensörleri sırası ile ;

$$(R.T)(X_1,X_2,\ldots,X_k;X,Y) = -T(R(X,Y)X_1,X_2,\ldots,X_k) - \ldots$$

$$-T(X_1,X_2,\ldots,R(X,Y)X_k) \tag{1.16}$$

ve

$$Q(A,T)(X_1,X_2,\ldots,X_k;X,Y)=-T((X\wedge_A Y)X_1,X_2,\ldots,X_k)-\ldots$$

$$-T(X_1,X_2,\ldots,(X\wedge_A Y)X_k) \tag{1.17}$$

biçiminde tanımlanır [3].

Böylece (1.16) ve (1.17) denklemlerinde T=R ve A=g alndığında

$$(R.R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-R(R(X,Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-\ldots$$

$$-R(X_1,X_2,X_3,R(X,Y)X_4) \tag{1.18}$$

$$Q(g,R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-R((X\wedge_g Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-\ldots$$

$$-R(X_1,X_2,X_3,R(X\wedge_g Y)X_4) \tag{1.19}$$

T=C ve A=g alındığında

$$(R.C)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-C(R(X,Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-\ldots$$

$$-C(X_1,X_2,X_3,R(X,Y)X_4) \tag{1.20}$$

$$Q(g,C)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-C((X\wedge_g Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-\ldots$$

$$-C(X_1,X_2,X_3,R(X\wedge_g Y)X_4) \tag{1.21}$$

T=S ve A=g alındığında

$$(R.S)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-S(R(X,Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-\ldots$$

$$-S(X_1,X_2,X_3,R(X,Y)X_4) \tag{1.22}$$

$$Q(g,S)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-S((X\wedge_g Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-\ldots$$

$$-S(X_1,X_2,X_3,R(X\wedge_g Y)X_4) \tag{1.23}$$

ve ayrıca A=S, T=R için (1.17) denkleminden

$$Q(S,R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-R((X\wedge_S Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-\ldots$$

$$-R(X_1,X_2,X_3,R(X\wedge_S Y)X_4) \tag{1.24}$$

olarak elde edilir. Eğer *M* nin her p noktası için bundan başka ,

Eğer R.R=0 ise *M* ye *semisimetriktir* denir[4].

Eğer R.S=0 ise *M* ye *Ricci-semisimetriktir* denir[5].

Eğer R.C=0 ise *M* ye Weyl-semisimetriktir denir[5].

Tanım1.1.19: $m \geq 3$ boyutlu bir *(M,g)* Riemann manifoldu için eğer *M* nin her noktasında R.R ve Q(g,R) tensörleri lineer bağımlı ise *M* ye **pseudosimetriktir** denir.

Yani, *M*'nin pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart, $U_R = \{p \in M : Q(g,R) \neq 0\}$ kümesi üzerinde $R.R = L_R Q(g,R)$ olmasıdır. L_R ,U_R üzerine bir fonksiyondur.

Tanım1.1.20: $m \geq 3$ boyutlu bir *(M,g)* Riemann manifoldu için eğer *M* nin her noktasında R.S ve Q(g,R) tensörleri lineer bağımlı ise *M* ye **Ricci- pseudosimetrik manifold** denir.

Yani ,*M*'nin Ricci-pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart, $U_S = \{p \in M : S - \frac{\kappa}{n} g \neq 0\}$ kümesi üzerinde $R.S = L_S Q(g,S)$ olmasıdır. L_S ,U_S üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.

Tanım1.1.21: $m \geq 4$ boyutlu bir *(M,g)* Riemann manifoldu için eğer *M* nin her noktasında R.C ve Q(g,C) tensörleri lineer bağımlı ise *M* ye **Weyl- pseudosimetriktir manifold** denir.

Yani ,*M*'nin Weyl-pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart, $U_C = \{p \in M : p \in M$ de $C \neq 0\}$ kümesi üzerinde $R.C = L_C Q(g,C)$ olmasıdır. L_C ,U_C üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.

Tanım1.1.22: Eğer R.R ve Q(S,R) tensörleri lineer bağımlı ise yani

R.R=LQ(S,R) ise *M* ye **Genelleştirilmiş Ricci-pseudosimetriktir** denir.

Yukarıda numaralı tanımlarda tanımlanan eğrilik şartları için aşağıdaki kapsama bağıntıları geçerlidir.

$$R.R = 0 \subset R.S = 0$$
$$R.R = 0 \subset R.C = 0$$
$$R.S = 0 \subset R.S = L_S Q(g,S)$$
$$R.R = 0 \subset R.R = L_R Q(g,R)$$
$$R.C = 0 \subset R.C = L_C Q(g,C)$$
$$R.R = L_R Q(g,R) \subset R.S = L_S Q(g,S)$$
$$R.R = L_R Q(g,R) \subset R.C = L_C Q(g,C)$$

Eğer *M* semisimetrik olmayan fakat pseudosimetrik bir manifold ise *M* ye proper pseudosimetrik,Ricci-semisimetrik olmayan fakat Ricci-pseudosimetrik manifold ise *M* ye proper Ricci-pseudosimetrik,Weyl-semisimetrik olmayan fakat Weyl-pseudosimetrik bir manifold ise *M* ye proper Weyl-pseudosimetriktir denir.

Tanım1.1.23: Bir *(M,g)* $m \geq 3$ boyutlu diferansiyellenebilir manifoldu için eğer

$$(\nabla_X S)(Y,Z) = \alpha(X)S(Y,Z) \tag{1.25}$$

olacak şekilde bir $\alpha(X)$ 1-formu var ise *M* ye Ricci Rekürent denir.

$$(\nabla_X S)(Y,Z) = \alpha(X)S(Y,Z) + \beta(X)g(Y,Z) \tag{1.26}$$

olacak biçimde $\alpha(X)$ ve $\beta(X)$ 1-formları var ise *M* ye genelleştirilmiş Ricci Rekürent denir.S nin kovaryant türevi ∇S

$$(\nabla_X S)(Y,Z) + \nabla_Y S(X,Z) + (\nabla_Z S)(X,Y) = 0 \tag{1.27}$$

ile tanımlanır.Eğer;

$$(\nabla_X S)(Y,Z) + \nabla_Y S(X,Z) + (\nabla_Z S)(X,Y) = 0 \tag{1.28}$$

ise *M* ye dairesel paralel Ricci tensöre sahiptir denir.

Bundan başka g metrik tensörünün türevi

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = \nabla_X g(y,Z) - g(\nabla_X Y,Z) - g(Y,\nabla_X Z) \tag{1.29}$$

ile ifade edilir.

1.1. Hemen Hemen Değme Metrik Manifoldları

Tanım 1.2.1: *M* bir *(2m+1)*-boyutlu manifold, ϕ, ξ, η da *M* üzerinde, sırası ile, (1,1)-tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve bir 1-form olsun. Eğer ϕ, ξ, η için, *M* üzerinde herhangi bir vektör alanı *X* olmak üzere;

$$\eta(\xi)=1 \tag{1.30}$$

ve

$$\phi^2 X=-X+\eta(X)\xi \tag{1.31}$$

özellikleri sağlanıyor ise o zaman (ϕ, ξ, η) ya *M* üzerinde bir **hemen hemen değme yapısı** denir. *M* bu yapı ile bir **hemen hemen değme manifoldu** olarak adlandırılır (Yano and Kon, 1984).

Teorem 1.2.1: *(ϕ, ξ, η)* hemen hemen değme yapısı için;

i) $\phi\xi=0$ (1.32)

ii) $\eta(\phi X)=0$ (1.33)

iii) $rank\ \phi=2n$ (1.34)

dir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.2.2: Hemen hemen değme manifoldu *M* verilsin. *M* üzerinde hemen hemen değme yapısı (ϕ, ξ, η) olsun. *M* üzerinde bir *g* Riemann metriği;

$$\eta(X)=g(X,\xi)$$

(1.35)

$$g(\phi X,\phi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y) \tag{1.36}$$

şartlarını sağlıyor ise g metriğine *M* üzerinde **hemen hemen değme metrik,** *(ϕ,ξ,η,g)* yapısına da **hemen hemen değme metrik yapısı,** *(ϕ, ξ, η, g)* yapısı ile M ye de **hemen hemen değme metrik manifoldu** denir (Yano and Kon, 1984).

Sonuç 1.2.1: *(2m+1)*-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifoldu *M* ile hemen hemen değme metrik yapısı *(ϕ, ξ, η, g)* verilsin. Böylece,

$$g(\phi X, Y)=-g(X, \phi Y) \tag{1.37}$$

dir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.2.3: *(2m+1)*-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M verilsin. Herbir η 1-formu için $\eta\wedge(d\eta)^n \neq 0$ şartı sağlanır ise η ya M nin **değme yapısı** ve M ye de **değme manifoldu** denir (Yano and Kon, 1984).

Teorem 1.2.2: (*2m+1*)-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M verilsin. M nin bir değme yapısı η verildiğinde;

$$g(X, \phi Y) = d\eta(X, Y) \tag{1.38}$$

olacak şekilde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) vardır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.2.4: M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) için;

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y)$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) nın **2.temel formu** denir (Yano and Kon, 1984).

1.2. Hemen Hemen Değme Manifoldların Torsion Tensörü

Tanım 1.3.1: V bir reel vektör uzayı olmak üzere;

$$J : V \longrightarrow V$$

lineer dönüşümü;

$$J^2 = -I$$

şartını sağlıyor ise J ye V üzerinde bir **kompleks yapı** denir.

(*2m*+1)-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M verilsin. Bu manifold üzerinde hemen hemen değme yapısı (ϕ, ξ, η) olsun. Reel bir doğruyu $\boldsymbol{R}$ ile göstererek $M\times\boldsymbol{R}$ çarpım manifoldunu gözönüne alalım. $M\times\boldsymbol{R}$ üzerinde herhangi bir vektör alanı;

$$(X, f\frac{d}{dt})$$

şeklindedir. Burada X, M ye teğet bir vektör alanı, t $\boldsymbol{R}$ nin bir koordinatı ve f $M\times\boldsymbol{R}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.

$M\times\mathbf{R}$ nin tanjant uzayındaki bir J lineer dönüşümü;

$$J\left(X, f\frac{d}{dt}\right) = \left(\phi X\right) - f.\xi,\ \eta(X)\frac{d}{dt}) \tag{1.39}$$

ile tanımlanır (Yano and Kon, 1984).

Sonuç 1.3.1: Yukarıdaki şekilde tanımlanan J dönüşümü $M\times\mathbf{R}$ üzerinde bir **hemen hemen kompleks yapı** dır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.3.2: M bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere M üzerinde (1,1)-tipinde bir tensör alanı F olsun. $\forall X,\ Y\in\chi(M)$ için;

$$N_F(X,Y) = F^2[X,Y] + [FX,FY] - F[FX,Y] - F[X,FY]$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alanına F nin **Nijenhuis torsion tensörü** denir.

$F=J$ hemen hemen kompleks yapı olması halinde de,

$$\begin{aligned} N_J(X,Y) &= J^2[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] \\ &= -[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] \end{aligned} \tag{1.40}$$

dir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.3.3: Hemen hemen kompleks manifoldu $(M,\ J)$ verilsin. $N_J = 0$ ise J dönüşümüne **integrallenebilirdir** denir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.3.4: Eğer $M\times\mathbf{R}$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise $(\phi,\ \xi,\ \eta)$ hemen hemen değme yapısına **normaldir** denir (Yano and Kon, 1984).

Örnek 1.3.1: E^4 Kaehler manifoldunun 3-boyutlu bir reel hiperküresi S^3 olsun. E^4 de S^3 ün bir birim normali C olmak üzere E^4 ün hemen hemen kompleks tensör alanı J,

$$J : E^4 \longrightarrow E^4$$

$$JC=-\xi$$

biçiminde tanımlansın. O zaman ξ, S^3 üzerinde bir birim vektör alanı olur. Yani $\xi\in\chi(S^3)$ dir. S^3 e teğet her bir X vektör alanı için $\eta(X)=g(X,\xi)$ olmak üzere η 1-formu iyi tanımlıdır. Üstelik $\eta(\xi)=1$ dir. Diğer yandan,

$JX = \phi X + \eta(X)C$

eşitliği ile ϕ lineer dönüşümünü tanımlayalım. Buna göre $\forall p=(p_1, p_2, p_3, p_4) \in S^3$ için;

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yapısı yardımı ile;

$$J(C(p)) = J(p_1, p_2, p_3, p_4) = (-p_3, -p_4, p_1, p_2) = -\xi$$

elde edilir (Yano and Kon, 1984). Burada;

$$\xi = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

dir. Şimdi $g(X, \xi)\xi$ için;

$$g(X, \xi)\xi = < \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$g(X, \xi)\xi = (x_1 p_3 + x_2 p_4 - x_3 p_1 - x_4 p_2) \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece;

$$\lambda = (x_1 p_3 + x_2 p_4 - x_3 p_1 - x_4 p_2)$$

olmak üzere;

$$g(X, \xi)\xi = \lambda\xi$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca,

$\phi(\phi X)= J(\phi X)-\eta(\phi X)C$

$\phi(\phi X)=J(JX-\eta(X)C)-\eta(JX-\eta(X)C)C$

$$=J(\begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_4 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix})\text{-}g(JX\text{-}\eta(X)C,\ \xi)C$$

$$= \begin{bmatrix} -x_1 + \lambda p_3 \\ -x_2 + \lambda p_4 \\ -x_3 - \lambda p_1 \\ -x_4 - \lambda p_2 \end{bmatrix} - < \begin{bmatrix} -x_3 - \lambda p_1 \\ -x_4 - \lambda p_2 \\ -x_1 - \lambda p_3 \\ -x_2 - \lambda p_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\lambda p_3 - [(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2]p_1 \\ -\lambda p_4 - [(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2]p_2 \\ -\lambda p_1 - [(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2]p_3 \\ -\lambda p_2 - [(x_3 - \lambda p_1)p_3 + (x_4 - \lambda p_2)p_4 + (x_1 + \lambda p_3)p_1 + (x_2 + \lambda p_4)p_2]p_4 \end{bmatrix}$$

dir. O zaman

$$\phi(\phi X) = - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan,

$$\phi^2 X=-X+\eta(X)\xi$$

elde edilir. Bununla birlikte,

$$\phi\xi = J\xi-\eta(\xi)C$$

olduğundan,

$$\phi\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = 0$$

bulunur. Böylece;

$\eta(\phi X) = g(\phi X, \xi)$

$\quad = g(JX - \eta(X)C, \xi)$

$\quad = 0$

olduğu da açıkça görülebilir.

Sonuç olarak (ϕ, ξ, η, g) yapısı S^3 üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı oluşturur.

1.3. K-Değme Manifoldları

Tanım 1.4.1: M diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere;

$$\varphi : \mathbf{R} \times M \xrightarrow{C^\infty} M$$

$$(t, p) \longrightarrow \varphi_t(p)$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyor ise φ ye M nin **diferensiyellenebilir bir 1-parametreli grubu** adı verilir.

i) $\forall t \in \mathbf{R}$ için

$\varphi_t : M \longrightarrow M$

$p \longrightarrow \varphi_t(p)$ bir diffeomorfizm

ii) $\forall t, s \in \mathbf{R}$ ve $p \in M$ için

$\varphi_{t+s}(p) = \varphi_t(\varphi_s(p))$

dir (Kobayashi and Nomizu, 1963).

Tanım 1.4.2: M üzerinde bir vektör alanı X ve φ_t ise X ile genelleştirilmiş lokal dönüşümlü bir 1-parametreli grubu olsun. X vektör alanına göre bir K tensör alanının X yönünde $L_X K$ **Lie türevi,**

$$(L_X K)_X = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [K_X - (\varphi_t K)_X]$$

şeklinde tanımlanır (Kobayashi and Nomizu, 1963).

Tanım 1.4.3 : M Riemann metriği g olan bir Riemann manifoldu ve M üzerinde bir vektör alanı X verilsin. M nin her bir noktasının bir komşuluğunda X ile meydana gelen lokal dönüşümlerin lokal 1-parametreli grubu lokal izometrilerden oluşuyor ise X vektör alanı **Killing**

vektör alanı adı verilir. Böylece X bir Killing vektör alanıdır $\Leftrightarrow$ $L_X g = 0$ dır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.4.4: Değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan $(2m+1)$-boyutlu bir M manifoldu **değme metrik manifold** olarak adlandırılır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.4.5: $(2m+1)$-boyutlu değme metrik manifoldu M verilsin. Eğer (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısında verilen ξ vektör alanı g ye göre bir Killing vektör alanı ise o zaman M üzerinde değme yapı **K-değme yapısı** ve M ye de **K-değme manifoldu** adı verilir (Yano and Kon, 1984).

Önerme 1.4.1: Bir değme metrik manifoldu M olsun. O zaman M bir K-değme manifoldudur $\Leftrightarrow$

$$\nabla_X \xi = -\phi X \tag{1.41}$$

dir (Yano and Kon, 1984).

Teorem 1.4.1: $(2m+1)$-boyutlu bir Riemann manifoldu M nin bir K-değme manifoldu olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır.

i-) M bir ξ birim Killing vektör alanına sahiptir.

ii-) M nin her bir noktasında ξ yı kapsayan düzlem kesitleri için kesitsel eğriliği 1 e eşittir (Yano and Kon, 1984).

2. SASAKİAN MANİFOLDLAR

Tanım 1.5.1: M, değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan $(2n+1)$-boyutlu bir değme metrik manifoldu olsun. **Eğer *M* nin değme metrik yapısı normal ise, *M* Sasakian yapıya sahiptir** denir. Bazan Sasakian manifold **normal değme metrik manifold** olarak da adlandırılır (Yano and Kon, 1984).

Teorem 1.5.1: M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) bir Sasakian yapıdır $\Leftrightarrow$ $\forall X, Y \in \chi(M)$ için;

$$(\nabla_X \phi) Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X \tag{1.42}$$

dir (Yano and Kon, 1984). Burada;

$$\nabla_X(\phi Y) = (\nabla_X \phi) Y + \phi \nabla_X Y$$

dir.

Sonuç 1.5.1: M bir Sasakian manifold ise M nin bir Riemann eğrilik tensörü R olmak üzere;

$$R(X, Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y \tag{1.43}$$

dir (Yano and Kon, 1984).

Teorem 1.5.2: M $(2n+1)$-boyutlu bir Riemann manifoldu olmak üzere M üzerinde bir birim Killing vektör alanı ξ verilsin. Ayrıca M nin eğrilik tensörü R olmak üzere M Sasakian manifolddur $\Leftrightarrow$

$$R(X, \xi)Y = -g(X, Y)\xi + \eta(Y)X \tag{1.44}$$

dir (Yano and Kon, 1984).

Uyarı : Bir Sasakian manifoldu bir K-değme manifolddur fakat tersi sadece boy $M = 3$ olması halinde geçerlidir (Yano and Kon, 1984).

Sonuç 1.5.2: M bir Sasakian manifold olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve ξ bir birim Killing vektör alanı olmak üzere;

$$R(X, \xi)Y = -(\nabla_X \phi) Y \tag{1.45}$$

dir (Yano and Kon, 1984).

Sonuç 1.5.3: *M*, değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan $(2m+1)$-boyutlu bir Sasakian manifold olsun. Bu takdirde;

$$R(X, Y)\phi Z = \phi R(X, Y)Z + g(\phi X, Z)Y - g(Y, Z)\phi X$$
$$+g(X, Z)\phi Y - g(\phi Y, Z)X \quad (1.46)$$

dır (Yano and Kon, 1984).

Sonuç 1.5.4: *M* bir Sasakian manifold olmak üzere;

$$R(X, Y)Z = -\phi R(X, Y)\phi Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$
$$-g(\phi Y, Z)\phi X + g(\phi X, Z)\phi Y \quad (1.47)$$

dır (Yano and Kon, 1984).

2.1. $M(c)$ Sasakian Uzay Formu

Önerme 1.6.1: (M, g) Riemann manifoldu sabit c eğrilikli bir manifold olsun. O zaman $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için;

$$R(X, Y)Z = c(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) \quad (1.48)$$

dir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.6.1: *M* bir Sasakian manifold olsun. Böylece $p \in M$ deki T_pM tanjant uzayında ξ ya dik bir X birim vektörü $\{X, \phi X\}$ ortonormal olacak şekilde var ise $\{X, \phi X\}$ düzlemine T_pM nin **ϕ–kesitseli** denir. Ayrıca

$$K(X, \phi X) = g(R(X, \phi X)\phi X, X)$$

şeklinde tanımlanan ifadeye *M* nin bir **ϕ–kesitsel eğriliği** adı verilir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.6.2: *M* bir Sasakian manifold olmak üzere *M* nin ϕ–kesitsel eğriliği $c = sbt$ ise *M* bir **Sasakian uzay formu** olarak adlandırılır ve $M(c)$ şeklinde gösterilir (Verstraelen ve Vrancken, 1988).

Teorem 1.6.1: $M(c)$ Sasakian uzay formunun *R* eğrilik tensörü; $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{4}(c+3)[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y]$$

$$-\frac{1}{4}(c-1)[\eta(X)\eta(Z)Y-\eta(Y)\eta(Z)X$$
$$+g(X,Z)\eta(Y)\xi-g(Y,Z)\eta(X)\xi$$
$$+g(\phi Y,Z)\phi X-g(\phi X,Z)\phi Y+2g(\phi X,Y)\phi Z] \qquad (1.49)$$

dir (Yano and Kon, 1984).

2.2. Trans-Sasakian Manifoldlar

[6] de, S. Tanno otomorfizm grupları maximum boyuta sahip olan bağlantılı hemen hemen değme metrik manifoldları sınıflandırmıştır. Böyle bir manifoldda, ξ yı içeren düzlem kesitlerinin kesit eğriliği sabittir ve bu sabite c diyelim. Tanno bu tip manifoldların üç sınıfa ayrılabileceğini gösterdi:

(1) $c > 0$ ile, homojen normal değme Riemannian manifoldlar

(2) Eğer $c = 0$ ise, sabit holomorfik kesit eğrilikli bir Kaehler manifoldu ile bir çember veya bir doğrunun global riemann çarpımlarıdır.

(3) Eğer $c < 0$ ise, $R\times_f C$ bir warped çarpım uzayıdır.

(1) deki sınıfandırılan manifoldlar bir Sasakian yapı kabul edilerek karakterize edilmiştir. Kenmotsu ([7]) (3) sınıfındaki manifoldların diferansiyel geometrik özelliklerini karakterize etmiştir; yapı şu anda Kenmotsu yapı olarak bilinmektedir. Genelde, bu yapılar Sasakian değildir([8]).

Bir hemen hemen Hermitian manifoldların ([9]) Gray-Hervella sınılandırmasında, W_4 bir sınıf olarak ortaya çıkar, bu Hermitian manifoldlar lokal konformal Kaehler manifoldları ([10]) ile yakın ilişkilendirilebilir. M manifoldu üzerinde bir almost değme metrik yapı eğer $M\times R$ çarpım manifoldu W_4 sınıfına ait ise, bir trans-Sasakian yapı olarak adlandırılır ([11]). $C_6\oplus C_5$ ([12], [8]) sınıfı, (α, β) tipli trans-Sasakian yapıları içerir:

(0, 0), (0, β) ve (α, 0) tipindeki trans-Sasakian yapıları sırasıyla, cosimplektik ([13]), β-Kenmotsu ([7]) ve α-Sasakian ([7]) olarak adlandırırız. ([14]) de ispat edildi ki, trans-Sasakian yapılar genelleştirilmiş quasi-Sasakiandır ([4]). Bu nedenle, trans-Sasakian yapılar aynı zamanda genelleştirilmiş quasi-Sasakian yapılarının geniş bir sınıfını sağlar.

(φ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik yapısı ile bir hemen hemen değme metrik manifold M olsun, φ , (1, 1) tipinde bir tensör alanı, ξ bir vektör alanı, η, 1-form ve g Riemannian metrik olmak üzere, her X, Y Є TM için,

$$\phi^2 = -I + \eta \otimes \xi\,,\ \eta(\xi) = 1,\ \ \phi\xi = 0\,,\ \ \eta \ \ \phi = 0 \tag{1.50}$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{1.51}$$

$$g(\phi X, Y) = -\,g(X, \phi Y),\ \eta(X) = g(X,\xi) \tag{1.52}$$

sağlanır.

Eğer *(M×R, J, G)*, W_4 sınıfına ait ise ([9]) M üzerinde bir (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısına bir trans-Sasakian yapı denir ([11]), *M×R* üzerinde *J* hemen hemen komplex yapı olduğunda

$$J(X, fd/\ dt)\ = (\ \phi X - \ f\xi, \eta(X)\, fd/\ dt)$$

tarafından tanımlanır. Burada M üzerinde tüm X vectör alanları, f , M ×R üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve G, M×R üzerinde çarpım metriğidir. Bu ([15]) den M üzerinde bazı α ve β diferansiyellenebilir fonksiyonları için

$$(\nabla_X \phi)Y = \alpha(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X) + \beta(g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X) \tag{1.53}$$

şekli ile ifade edilebilir. Böylece (α, β) tipindeki trans-Sasakian yapı tanımlanır. Formül (1.36) dan

$$\nabla_X \xi = -\,\alpha\phi X + \beta(X - \eta(X)\xi) \tag{1.54}$$

$$(\nabla_X \eta)Y = -\,\alpha g(\phi X, Y) + \beta g(\phi X, \phi Y) \tag{1.55}$$

ifadeleri bulunur.

Yardımcı Teorem 1.7.1 : Bir trans-Sasakian manifoldda R eğrilik tensorü olmak üzere,

$$R(X,Y)\xi = (\alpha^2 - \beta^2)(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + 2\alpha\beta(\eta(Y)\phi X - \eta(X)\phi Y)$$
$$+ (Y\alpha)\phi X - (X\alpha)\phi Y + (Y\beta)\phi^2 X - (X\beta)\phi^2 Y$$

dir [5].

Teorem 1.7.1 : Bir trans-Sasakian manifoldda,

$$R(\xi, X)\xi = (\alpha^2 - \beta^2 - \xi\beta)(\eta(X)\xi - X) \tag{1.56}$$

$$2\alpha\beta - \ \xi\alpha = 0 \tag{1.57}$$

dir [5].

Önerme 1.7.1: Bir (2m + 1)-boyutlu trans-Sasakian manifoldda, S Ricci eğriliği ve Q Ricci operatör olduğunda,

$$S(X,\xi) = (2m(\alpha^2 - \beta^2) - \xi\beta)\eta(X) - (2m-1)X\beta - (\phi X)\alpha \tag{1.58}$$

$$Q\xi = (2m(\alpha^2 - \beta^2) - \xi\beta) - (2m-1)grad\beta + \phi(grad\alpha) \tag{1.59}$$

dir [5].

Uyarı 1.7.1: Eğer *(2m+1)*-boyutlu trans-Sasakian manifold *(α, β)* tipinde ise; $\phi(grad\alpha) = (2m-1)grad\beta$ olduğunda

$$\xi\beta = grad(\xi, grad\beta) = \frac{1}{2m-1} g(\xi, \phi(grad\alpha)) = 0$$

buluruz ve buradan

$$S(X,\xi) = 2m(\alpha^2 - \beta^2)\eta(X) \tag{1.60}$$

$$Q\xi = 2m(\alpha^2 - \beta^2)\xi \tag{1.61}$$

$$R(\xi, X)\xi = (\alpha^2 - \beta^2)(\eta(X)\xi - X)$$

(1.62)

dir [5].

Uyarı 1.7.2: *g(R(ξ, Y)X, Z) = g(R(X, Z)ξ, Y)* de (7) yi kullanarak.

$$R(\xi, X)Y = (\alpha^2 - \beta^2)(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X) + 2\alpha\beta(g(\phi X,Y)\xi - \eta(X)\phi Y)$$
$$+ (X\alpha)\phi Y + g(\phi X, Y)grad\alpha + (X\beta)(Y - \eta(Y)\xi) - g(\phi X, \phi Y)(grad\beta)$$

ifadesini yazabiliriz[5].

3. TRANS-SASAKİAN MANİFOLDLARDA BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI

Buradan sonra trans-Sasakian manifold için elde ettiğimiz bazı eğrilik şartlarını $\phi(grad\alpha) = \dfrac{1}{2m-1} grad\beta$ şartı altında inceleyeceğiz.

Teorem 1.3.1: Bir M^{2m+1} *(2m+1)*-boyutlu trans-Sasakian manifoldunda $R \cdot S = 0$, $(\alpha^2 - \beta^2 \neq 0)$ olması için gerek ve yeter şart M nin bir Einstein manifoldu olmasıdır.

İspat:

M^{2m+1} *(2m+1)*-boyutlu trans-Sasakian manifold olsun. $R \cdot S = 0$ eşitliği $\forall X, Y, U, V \in \chi(M)$ için,

$$(R(X,Y) \cdot S)(U,V) = R(X,Y)S(U,V) - S(R(X,Y)U,V) - S(U,R(X,Y)V) = 0 \tag{3.1}$$

yazılır. Bu denklemden

$$(R(X,Y) \cdot S)(U,V) = - S(R(X,Y)U,V) - S(U,R(X,Y)V) = 0 \tag{3.2}$$

elde edilir. (3.2) denklemi

$$S(R(X,Y)U,V) + S(U,R(X,Y)V) = 0 \tag{3.3}$$

şeklinde yazılabilir. (3.3) de $X = U = \xi$ alalım. Bu durumda

$$S(R(\xi,Y)\xi,V) + S(\xi,R(\xi,Y)V) = 0 \tag{3.4}$$

olur. (1.3), (1.52), (1.60), (1.62) ifadelerini (3.4) de kullanırsak

$$\begin{aligned} S(R(\xi,Y)\xi,V) &= S((\alpha^2 - \beta^2)(\eta(Y)\xi - Y),V) \\ &= (\alpha^2 - \beta^2)[\eta(Y)S(\xi,V) - S(Y,V)] \\ &= (\alpha^2 - \beta^2)[2m(\alpha^2 - \beta^2)\eta(Y)\eta(V) - S(Y,V)] \\ &= 2m(\alpha^2 - \beta^2)^2 \eta(Y)\eta(V) - (\alpha^2 - \beta^2)S(Y,V) \end{aligned} \tag{3.5}$$

ve

$$\begin{aligned} S(\xi,R(\xi,Y)V) &= 2m(\alpha^2 - \beta^2)\,\eta(R(\xi,Y)V) \\ &= 2m(\alpha^2 - \beta^2)\; g(R(\xi,Y)V,\xi) \\ &= -2m(\alpha^2 - \beta^2)\; g(R(\xi,Y)\xi,V) \\ &= -2m(\alpha^2 - \beta^2)\; g((\alpha^2 - \beta^2)(\eta(Y)\xi - Y),V) \end{aligned}$$

$$= -2m(\alpha^2-\beta^2)^2\,[\eta(Y)g(\xi,V) - g(Y,V)]$$

$$= -2m(\alpha^2-\beta^2)^2\,\eta(Y)\eta(V) + 2m(\alpha^2-\beta^2)^2\,g(Y,V) \qquad (3.6)$$

eşitliklerini elde ederiz. (3.5) ve (3.6) yı (3.4) de yazarsak

$$\begin{aligned} S(R(\xi,Y)\xi,V) + S(\xi,R(\xi,Y)V) &= 2m(\alpha^2-\beta^2)^2\,\eta(Y)\eta(V) - (\alpha^2-\beta^2)S(Y,V) \\ &\quad - 2m(\alpha^2-\beta^2)^2\,\eta(Y)\eta(V) + 2m(\alpha^2-\beta^2)^2\,g(Y,V) \\ &= -(\alpha^2-\beta^2)S(Y,V) + 2m(\alpha^2-\beta^2)^2\,g(Y,V) = 0 \qquad (3.7) \end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$-(\alpha^2-\beta^2)[S(Y,V) - 2m(\alpha^2-\beta^2)g(Y,V)] = 0 \qquad (3.8)$$

elde edilir. (3.8) den $\alpha^2-\beta^2 \neq 0$ olduğundan

$$S(Y,V) = 2m(\alpha^2-\beta^2)g(Y,V) \qquad (3.8a)$$

dır. Dolayısıyla $R\cdot S = 0$ olduğunda manifold Einstein manifolddur.

Tersine M manifoldu bir Einstein manifoldu ise $R\cdot S = 0$ bulunur. (3.8a) denklemini (3.4) de yerine yazdığımızda $R\cdot S = 0$ elde ederiz.

Teorem 1.3.2: Bir M^{2m+1} (2m+1)-boyutlu trans-Sasakian manifoldunda $P\cdot S = 0$, $(\alpha^2-\beta^2 \neq 0)$ olması için gerek ve yeter şart M nin bir Einstein manifoldu olmasıdır.

İspat:

M^{2m+1} *(2m+1)*-boyutlu trans-Sasakian manifold olsun. $P\cdot S = 0$ eşitliği $\forall X,Y,U,V \in \chi(M)$ için,

$$(P(X,Y)\cdot S)(U,V) = P(X,Y)S(U,V) - S(P(X,Y)U,V) - S(U,P(X,Y)V) = 0 \qquad (3.9)$$

yazılır. Bu denklemden

$$(P(X,Y)\cdot S)(U,V) = -S(P(X,Y)U,V) - S(U,P(X,Y)V) = 0 \qquad (3.10)$$

elde edilir. (3.10) denklemi

$$S(P(X,Y)U,V) + S(U,P(X,Y)V) = 0 \qquad (3.11)$$

şeklinde yazılabilir. (3.11) de (1.10) eşitliğini kullanalım

$$S(P(X,Y)U,V) + S(U,P(X,Y)V) = S(R(X,Y)U - \frac{1}{2m}[S(Y,U)X - S(X,U)Y],V) \quad (3.12)$$

$$+ S(U,R(X,Y)V - \frac{1}{2m}[S(Y,V)X - S(X,V)Y])$$

$$= S(R(X,Y)U,V) - \frac{1}{2m}S(Y,U)S(X,V) + \frac{1}{2m}S(X,U)S(Y,V)$$

$$+ S(U,R(X,Y)V) - \frac{1}{2m}S(Y,V)S(U,X) - \frac{1}{2m}S(X,V)S(U,Y)$$

S simetrik olduğundan (3.12) de gerekli sadeleştirmeler yapılırsa;

$$S(P(X,Y)U,V) + S(U,P(X,Y)V) = S(R(X,Y)U,V) + S(U,R(X,Y)V) = 0 \quad (3.13)$$

elde edilir. (3.13) de $X = U = \xi$ alalım. Bu durumda

$$S(R(\xi,Y)\xi,V) + S(\xi,R(\xi,Y)V) = 0 \quad (3.14)$$

olur. (3.5) ve (3.6) yı (3.14) de yazarsak,

$$S(R(\xi,Y)\xi,V) + S(\xi,R(\xi,Y)V) = 2m(\alpha^2 - \beta^2)^2\,\eta(Y)\eta(V) - (\alpha^2 - \beta^2)S(Y,V)$$

$$- 2m(\alpha^2 - \beta^2)^2\,\eta(Y)\eta(V) + 2m(\alpha^2 - \beta^2)^2 g(Y,V)$$

$$= -(\alpha^2 - \beta^2)S(Y,V) + 2m(\alpha^2 - \beta^2)^2 g(Y,V) = 0 \quad (3.15)$$

olur. Buradan,

$$-(\alpha^2 - \beta^2)[S(Y,V) - 2m(\alpha^2 - \beta^2)g(Y,V)] = 0 \quad (3.16)$$

elde eldir. (3.16) dan $\alpha^2 - \beta^2 \neq 0$ olduğundan

$$S(Y,V) = 2m(\alpha^2 - \beta^2)g(Y,V) \quad (3.16a)$$

dır. Dolayısıyla $P \cdot S = 0$ olduğunda manifold Einstein manifolddur.

Tersine M manifoldu bir Einstein manifoldu ise $P \cdot S = 0$ bulunur. (3.16a) denklemini (3.11) de yerine yazdığımızda $P \cdot S = 0$ elde ederiz.

Teorem 1.3.3: Bir M^{2m+1} *(2m+1)*-boyutlu trans-Sasakian manifoldunda $R \cdot P = 0$, $(\alpha^2 - \beta^2 \neq 0)$ olması için gerek ve yeter şart M nin bir Einstein manifoldu olmasıdır.

İspat:

M^{2m+1} $(2m+1)$-boyutlu trans-Sasakian manifold olsun. $R\cdot P=0$ eşitliği $\forall X,Y,U,V \in \chi(M)$ için,

$$(R(X,Y)\cdot P)(U,V)Z = R(X,Y)P(U,V)Z - P(R(X,Y)U,V)Z$$
$$- P(U,R(X,Y)V)Z - P(U,V)R(X,Y)Z = 0 \qquad (3.17)$$

yazılır. (1.10) eşitliğini (3.17) de kullanalım.

$$R(X,Y)P(U,V)Z - P(R(X,Y)U,V)Z - P(U,R(X,Y)V)Z - P(U,V)R(X,Y)Z$$
$$= R(X,Y)(R(U,V)Z - \frac{1}{2m}[S(V,Z)U - S(U,Z)V])$$
$$- R(R(X,Y)U,V)Z + \frac{1}{2m}[S(V,Z)R(X,Y)U - S(R(X,Y)U,Z)V]$$
$$- R(U,R(X,Y)V)Z + \frac{1}{2m}[S(R(X,Y)V,Z)U - S(U,Z)R(X,Y)V]$$
$$- R(U,V)R(X,Y)Z + \frac{1}{2m}[S(V,R(X,Y)Z)U - S(U,R(X,Y)Z)V] \qquad (3.18)$$
$$= R(X,Y)R(U,V)Z - \frac{1}{2m}S(V,Z)R(X,Y)U + \frac{1}{2m}S(U,Z)R(X,Y)V$$
$$- R(R(X,Y)U,V)Z + \frac{1}{2m}S(V,Z)R(X,Y)U - \frac{1}{2m}S(R(X,Y)U,Z)V$$
$$- R(U,R(X,Y)V)Z + \frac{1}{2m}S(R(X,Y)V,Z)U - \frac{1}{2m}S(U,Z)R(X,Y)V$$
$$- R(U,V)R(X,Y)Z + \frac{1}{2m}S(V,R(X,Y)Z)U - \frac{1}{2m}S(U,R(X,Y)Z)V$$
$$= R(X,Y)R(U,V)Z - R(R(X,Y)U,V)Z - \frac{1}{2m}S(R(X,Y)U,Z)V$$
$$- R(U,R(X,Y)V)Z + \frac{1}{2m}S(R(X,Y)V,Z)U - R(U,V)R(X,Y)Z$$
$$+\frac{1}{2m}S(V,R(X,Y)Z)U - \frac{1}{2m}S(U,R(X,Y)Z)V = 0 \qquad (3.19)$$

ifadesini elde ederiz. (3.19) dan

$$R(X,Y)R(U,V)Z - R(R(X,Y)U,V)Z - R(U,R(X,Y)V)Z - R(U,V)R(X,Y)Z$$
$$-\frac{1}{2m}S(R(X,Y)U,Z)V + \frac{1}{2m}S(R(X,Y)V,Z)U + \frac{1}{2m}S(V,R(X,Y)Z)U$$

$$-\frac{1}{2m}S(U,R(X,Y)Z)V=0 \tag{3.20}$$

elde ederiz. (3.20) de $X = U = \xi$ alırsak

$$R(\xi,Y)R(\xi,V)Z - R(R(\xi,Y)\xi,V)Z - R(\xi,R(\xi,Y)V)Z - R(\xi,V)R(\xi,Y)Z$$

$$-\frac{1}{2m}S(R(\xi,Y)\xi,Z)V+\frac{1}{2m}S(R(\xi,Y)V,Z)\xi+\frac{1}{2m}S(V,R(\xi,Y)Z)\xi$$

$$-\frac{1}{2m}S(\xi,R(\xi,Y)Z)V=0 \tag{3.21}$$

ifadesini buluruz. (3.21) eşitliğinin her iki tarafına W ile iç çarpım uygularsak,

$$g(R(\xi,Y)R(\xi,V)Z,W) - g(R(R(\xi,Y)\xi,V)Z,W) - g(R(\xi,R(\xi,Y)V)Z,W)$$

$$-g(R(\xi,V)R(\xi,Y)Z,W)-\frac{1}{2m}S(R(\xi,Y)\xi,Z)g(V,W)+\frac{1}{2m}S(R(\xi,Y)V,Z)g(\xi,W)$$

$$+\frac{1}{2m}S(V,R(\xi,Y)Z)g(\xi,W)-\frac{1}{2m}S(\xi,R(\xi,Y)Z)g(V,W)=0 \tag{3.22}$$

ifadesini buluruz. (3.22) de $W = \xi$ alalım.

$$g(R(\xi,Y)R(\xi,V)Z,\xi) - g(R(R(\xi,Y)\xi,V)Z,\xi) - g(R(\xi,R(\xi,Y)V)Z,\xi)$$

$$-g(R(\xi,V)R(\xi,Y)Z,\xi)-\frac{1}{2m}S(R(\xi,Y)\xi,Z)g(V,\xi)+\frac{1}{2m}S(R(\xi,Y)V,Z)g(\xi,\xi)$$

$$+\frac{1}{2m}S(V,R(\xi,Y)Z)g(\xi,\xi)-\frac{1}{2m}S(\xi,R(\xi,Y)Z)g(V,\xi)=0 \tag{3.23}$$

Şimdi (1.52), (1.52), (1.60), (1.62) eşitliklerini kullanarak (3.23) de geçen (3.24), (3.25), (3.25), (3.27) eşitliklerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
g(R(\xi,Y)R(\xi,V)Z,\xi) &= -g(R(\xi,Y)\xi,R(\xi,V)Z)\\
&=-(\alpha^2-\beta^2)g(\eta(Y)\xi-Y,R(\xi,V)Z)\\
&=-(\alpha^2-\beta^2)[\eta(Y)g(\xi,R(\xi,V)Z)-g(Y,R(\xi,V)Z)\\
&=-(\alpha^2-\beta^2)[-\eta(Y)g(Z,R(\xi,V)\xi)-g(Y,R(\xi,V)Z)\\
&=-(\alpha^2-\beta^2)[-(\alpha^2-\beta^2)\eta(Y)g(Z,\eta(V)\xi-V)-g(Y,R(\xi,V)Z)]\\
&= \begin{aligned}[t]&-(\alpha^2-\beta^2)[-(\alpha^2-\beta^2)\eta(Y)\eta(V)\eta(Z)\\ &+(\alpha^2-\beta^2)\eta(Y)g(Z,V)-g(Y,R(\xi,V)Z)]\end{aligned}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

(1.52), (1.52), (1.60), (1.62) eşitliklerini (3.22) de kullanırsak,

$$
\begin{aligned}
g(R(R(\xi,Y)\xi,V)Z,\xi) &= -g(R(R(\xi,Y)\xi,V)\xi,Z) \\
&= -(\alpha^2-\beta^2)g(R(\eta(Y)\xi-Y,V)\xi,Z) \\
&= -(\alpha^2-\beta^2)[\eta(Y)g(R(\xi,V)\xi,Z)-g(R(Y,V)\xi,Z)] \\
&= -(\alpha^2-\beta^2)[(\alpha^2-\beta^2)\eta(Y)g(\eta(V)\xi-V,Z)-g(R(Y,V)\xi,Z)] \\
&= \begin{array}{l} -(\alpha^2-\beta^2)[(\alpha^2-\beta^2)\eta(Y)\eta(V)\eta(Z) \\ -(\alpha^2-\beta^2)\eta(Y)g(V,Z)-g(R(Y,V)\xi,Z)] \end{array}
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

(3.25) i elde ederiz. (1.52), (1.52), (1.60), (1.62) eşitliklerini (3.23) de kullanırsak

$$
\begin{aligned}
g(R(\xi,R(\xi,Y)V)Z,\xi) &= -g(R(\xi,R(\xi,Y)V)\xi,Z) \\
&= -(\alpha^2-\beta^2)g(\eta(R(\xi,Y)V)\xi-R(\xi,Y)V,Z) \\
&= -(\alpha^2-\beta^2)[g(R(\xi,Y)V,\xi)g(\xi,Z)-g(R(\xi,Y)V,Z)] \\
&= -(\alpha^2-\beta^2)[-g(R(\xi,Y)\xi,V)g(\xi,Z)-g(R(\xi,Y)V,Z)] \\
&= -(\alpha^2-\beta^2)[-(\alpha^2-\beta^2)g(\eta(Y)\xi-Y,V)\eta(Z)-g(R(\xi,Y)V,Z)] \\
&= \begin{array}{l} -(\alpha^2-\beta^2)[-(\alpha^2-\beta^2)\eta(Y)\eta(V)\eta(Z) \\ +(\alpha^2-\beta^2)g(Y,V)-g(R(\xi,Y)V,Z)] \end{array}
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

(3.26) yı elde ederiz. (1.52), (1.52), (1.60), (1.62) eşitliklerini (3.23) de kullanırsak

$$
\begin{aligned}
g(R(\xi,V)R(\xi,Y)Z,\xi) &= -g(R(\xi,V)\xi,R(\xi,Y)Z) \\
&= -(\alpha^2-\beta^2)g(\eta(V)\xi-V,R(\xi,Y)Z) \\
&= -(\alpha^2-\beta^2)[\eta(V)g(\xi,R(\xi,Y)Z)-g(V,R(\xi,Y)Z)] \\
&= -(\alpha^2-\beta^2)[-\eta(V)g(Z,R(\xi,Y)\xi)-g(V,R(\xi,Y)Z)] \\
&= -(\alpha^2-\beta^2)[-(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)g(Z,\eta(Y)\xi-Y)-g(V,R(\xi,Y)Z)] \\
&= \begin{array}{l} -(\alpha^2-\beta^2)[-(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)\eta(Y)\eta(Z) \\ +(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)g(Z,Y)-g(V,R(\xi,Y)Z)] \end{array}
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

(3.27) yi elde ederiz. (3.5), (3.6), (3.24), (3.25), (3.26), (3.27) yı (3.23) ifadesinde yerine yazarsak

$$
\begin{aligned}
&(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)\eta(V)\eta(Z)-(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)g(Z,V)+(\alpha^2-\beta^2)g(Y,R(\xi,V)Z) \\
&+(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)\eta(V)\eta(Z)-(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)g(V,Z)-(\alpha^2-\beta^2)g(R(Y,V)\xi,Z)
\end{aligned}
$$

$$-(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)\eta(V)\eta(Z)+(\alpha^2-\beta^2)^2 g(Y,V)\eta(Z)-(\alpha^2-\beta^2)g(R(\xi,Y)V,Z)$$
$$-(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(V)\eta(Y)\eta(Z)+(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(V)g(Z,Y)-(\alpha^2-\beta^2)g(V,R(\xi,Y)Z)$$
$$-\frac{1}{2m}\eta(V)[2m(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)\eta(Z)-(\alpha^2-\beta^2)S(Y,Z)]+\frac{1}{2m}S(R(\xi,Y)V,Z)$$
$$+\frac{1}{2m}S(V,R(\xi,Y)Z)-\frac{1}{2m}\eta(V)[-2m(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)\eta(Z)+2m(\alpha^2-\beta^2)^2 g(Y,Z)]$$
$$=0 \tag{3.28}$$

buluruz. (3.28) de (1.3) eşitliğini kullanalım ve gerekli sadeleştirmeleri yaparsak

$$-2(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)g(Z,V)+(\alpha^2-\beta^2)g(Y,R(\xi,V)Z)-(\alpha^2-\beta^2)g(R(Y,V)\xi,Z)$$
$$+(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Z)g(Y,V)+\frac{1}{2m}(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)S(Y,Z)+\frac{1}{2m}S(R(\xi,Y)V,Z)$$
$$+\frac{1}{2m}S(V,R(\xi,Y)Z)=0 \tag{3.29}$$

ifadesini elde ederiz. (3.29) da $Z=\xi$ alalım.

$$-2(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)g(\xi,V)+(\alpha^2-\beta^2)g(Y,R(\xi,V)\xi)-(\alpha^2-\beta^2)g(R(Y,V)\xi,\xi)$$
$$+(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(\xi)g(Y,V)+\frac{1}{2m}(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)S(Y,\xi)+\frac{1}{2m}S(R(\xi,Y)V,\xi)$$
$$+\frac{1}{2m}S(V,R(\xi,Y)\xi)=0 \tag{3.30}$$

(1.50), (1.52), (1.60), (1.62), (3.5), (3.6) ve $g(R(X,Y)\xi,\xi)=0$ eşitliklerini (3.30) da kullanırsak

$$-2(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)\eta(V)+(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(V)\eta(Y)-(\alpha^2-\beta^2)^2 g(Y,V)$$
$$+(\alpha^2-\beta^2)^2 g(Y,V)+(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(V)\eta(Y)-(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)\eta(V)$$
$$+(\alpha^2-\beta^2)^2 g(Y,V)+(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)\eta(V)-\frac{1}{2m}(\alpha^2-\beta^2)S(V,Y)=0$$

buluruz. Buradan

$$-(\alpha^2-\beta^2)[\frac{1}{2m}S(Y,V)-(\alpha^2-\beta^2)g(Y,V)]=0 \tag{3.31}$$

elde edilir. (3.31) de $\alpha^2-\beta^2\neq 0$ olduğundan,

$$S(Y,V)=2m(\alpha^2-\beta^2)g(Y,V)] \tag{3.31a}$$

dır. Dolayısıyla $R{\cdot}P=0$ olduğunda manifold Einstein manifolddur.

Tersine M manifoldu bir Einstein manifoldu ise $R{\cdot}P = 0$ bulunur. (3.31a) denklemini (3.19) de yerine yazdığımızda $R{\cdot}P = 0$ elde ederiz.

Teorem 1.3.6: Bir M^{2m+1} (2m+1)-boyutlu trans-Sasakian manifoldunda $P{\cdot}R = 0$, $(\alpha^2-\beta^2\neq 0)$ olması için gerek ve yeter şart M nin bir Einstein manifoldu olmasıdır.

İspat:

M^{2m+1} *(2m+1)*-boyutlu trans-Sasakian manifold olsun. $P{\cdot}R = 0$ eşitliği $\forall X,Y,U,V\in\chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}(P(X,Y)\cdot R)(U,V)Z &= P(X,Y)R(U,V)Z - R(P(X,Y)U,V)Z\\ &\quad - R(U,P(X,Y)V)Z - R(U,V)P(X,Y)Z\end{aligned} \tag{3.32}$$

yazabiliriz. (1.10) eşitliğini (3.32) de kullanır ve gerekli hesaplamaları yaparsak

$$\begin{aligned}
&P(X,Y)R(U,V)Z - R(P(X,Y)U,V)Z - R(U,P(X,Y)V)Z - R(U,V)P(X,Y)Z\\
&= R(X,Y)R(U,V)Z-\frac{1}{2m}[S(Y,R(U,V)Z)X-S(X,R(U,V)Z)Y]\\
&-R(R(X,Y)U-\frac{1}{2m}[S(Y,U)X-S(X,U)Y],V)Z\\
&-R(U,R(X,Y)V-\frac{1}{2m}[S(Y,V)X-S(X,V)Y])Z\\
&-R(U,V)\{R(X,Y)Z-\frac{1}{2m}[S(Y,Z)X-S(X,Z)Y]\}\\
&= R(X,Y)R(U,V)Z-\frac{1}{2m}S(Y,R(U,V)Z)X+\frac{1}{2m}S(X,R(U,V)Z)Y\\
&-R(R(X,Y)U,V)Z+\frac{1}{2m}S(Y,U)R(X,V)Z-\frac{1}{2m}S(X,U)R(Y,V)Z\\
&-R(U,R(X,Y)V)Z+\frac{1}{2m}S(Y,V)R(U,X)Z-\frac{1}{2m}S(X,V)R(U,Y)Z\\
&-R(U,V)R(X,Y)Z+\frac{1}{2m}S(Y,Z)R(U,V)X-\frac{1}{2m}S(X,Z)R(U,V)Y
\end{aligned} \tag{3.33}$$

ifadesini elde ederiz. Şimdi $X=U=Z=\xi$ alalım.

$$
\begin{aligned}
&= R(\xi,Y)R(\xi,V)\xi - \frac{1}{2m}S(Y,R(\xi,V)\xi)\xi + \frac{1}{2m}S(\xi,R(\xi,V)\xi)Y \\
&- R(R(\xi,Y)\xi,V)\xi + \frac{1}{2m}S(Y,\xi)R(\xi,V)\xi - \frac{1}{2m}S(\xi,\xi)R(Y,V)\xi \\
&- R(\xi,R(\xi,Y)V)\xi + \frac{1}{2m}S(Y,V)R(\xi,\xi)\xi - \frac{1}{2m}S(\xi,V)R(\xi,Y)\xi \\
&- R(\xi,V)R(\xi,Y)\xi + \frac{1}{2m}S(Y,\xi)R(\xi,V)\xi - \frac{1}{2m}S(\xi,\xi)R(\xi,V)Y
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

ifadesini elde ederiz. (1.52), (1.60), (1.62) ifadelerini (3.34) de kullanırsak

$$
\begin{aligned}
&= (\alpha^2-\beta^2)R(\xi,Y)(\eta(V)\xi - V) - \frac{1}{2m}(\alpha^2-\beta^2)S(Y,\eta(V)\xi - V)\xi \\
&+ \frac{1}{2m}(\alpha^2-\beta^2)S(\xi,\eta(V)\xi - V)Y - (\alpha^2-\beta^2)R(\eta(Y)\xi - Y,V)\xi \\
&+ (\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)(\eta(V)\xi - V) - (\alpha^2-\beta^2)R(Y,V)\xi - (\alpha^2-\beta^2)(\eta(R(\xi,Y)V)\xi \\
&- R(\xi,Y)V) - (\alpha^2-\beta^2)^2\eta(V)(\eta(Y)\xi - Y) - (\alpha^2-\beta^2)R(\xi,V)(\eta(Y)\xi - Y) \\
&+ (\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)(\eta(V)\xi - V) - (\alpha^2-\beta^2)R(\xi,V)Y
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

buluruz. (3.35) de gerekli hesaplamaları yaparsak

$$
\begin{aligned}
&= (\alpha^2-\beta^2)\eta(V)R(\xi,Y)\xi - (\alpha^2-\beta^2)R(\xi,Y)V - \frac{1}{2m}(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)S(Y,\xi)\xi \\
&+ \frac{1}{2m}(\alpha^2-\beta^2)S(Y,V)\xi + \frac{1}{2m}(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)S(\xi,\xi)Y - \frac{1}{2m}(\alpha^2-\beta^2)S(\xi,V)Y \\
&- (\alpha^2-\beta^2)\eta(Y)R(\xi,V)\xi + (\alpha^2-\beta^2)R(Y,V)\xi + (\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)\eta(V)\xi \\
&- (\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)V - (\alpha^2-\beta^2)R(Y,V)\xi - (\alpha^2-\beta^2)\eta(R(\xi,Y)V)\xi \\
&+ (\alpha^2-\beta^2)R(\xi,Y)V - (\alpha^2-\beta^2)^2\eta(V)\eta(Y)\xi + (\alpha^2-\beta^2)^2\eta(V)Y \\
&- (\alpha^2-\beta^2)\eta(Y)R(\xi,V)\xi + (\alpha^2-\beta^2)R(\xi,V)Y + (\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)\eta(V)\xi \\
&- (\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)V - (\alpha^2-\beta^2)R(\xi,V)Y
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

ifadesini elde ederiz. (1.52), (1.60), (1.62) ifadelerini (3.36) da kullanırsak

$$
\begin{aligned}
&= (\alpha^2-\beta^2)^2\eta(V)\eta(Y)\xi - (\alpha^2-\beta^2)^2\eta(V)Y - (\alpha^2-\beta^2)R(\xi,Y)V \\
&- (\alpha^2-\beta^2)^2\eta(V)\eta(Y)\xi + \frac{1}{2m}(\alpha^2-\beta^2)S(Y,V)\xi + (\alpha^2-\beta^2)^2\eta(V)Y \\
&- (\alpha^2-\beta^2)^2\eta(V)Y - (\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)\eta(V)\xi + (\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)V \\
&+ (\alpha^2-\beta^2)R(Y,V)\xi + (\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)\eta(V)\xi - (\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)V \\
&- (\alpha^2-\beta^2)R(Y,V)\xi + (\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)\eta(V)\xi - (\alpha^2-\beta^2)^2 g(Y,V)\xi \\
&+ (\alpha^2-\beta^2)R(\xi,Y)V - (\alpha^2-\beta^2)^2\eta(V)\eta(Y)\xi + (\alpha^2-\beta^2)^2\eta(V)Y \\
&- (\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)\eta(V)\xi + (\alpha^2-\beta^2)\eta(Y)V + (\alpha^2-\beta^2)R(\xi,V)Y \\
&+ (\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)\eta(V)\xi - (\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)V - (\alpha^2-\beta^2)R(\xi,V)Y
\end{aligned} \tag{3.37}
$$

ifadesini buluruz. (3.37) de gerekli sadeleştirmeleri yaparsak

$$= \frac{1}{2m}(\alpha^2-\beta^2)S(Y,V)\xi - (\alpha^2-\beta^2)^2 g(Y,V)\xi \tag{3.38}$$

elde ederiz. (3.32) ve (3.38) ifadelerinden

$$(P(\xi,Y)\cdot R)(\xi,V)\xi = \frac{1}{2m}(\alpha^2-\beta^2)S(Y,V)\xi - (\alpha^2-\beta^2)^2 g(Y,V)\xi \tag{3.39}$$

yazabiliriz. (3.39) da her iki tarafa W ile iç çarpım uygularsak

$$
\begin{aligned}
g((P(\xi,Y)\cdot R)(\xi,V)\xi,W) = &\frac{1}{2m}(\alpha^2-\beta^2)S(Y,V)g(\xi,W) \\
&- (\alpha^2-\beta^2)^2 g(Y,V)g(\xi,W)
\end{aligned} \tag{3.40}
$$

yazabiliriz. (3.40) da $W=\xi$ alırsak

$$
\begin{aligned}
g((P(\xi,Y)\cdot R)(\xi,V)\xi,\xi) = &\frac{1}{2m}(\alpha^2-\beta^2)S(Y,V)g(\xi,\xi) \\
&- (\alpha^2-\beta^2)^2 g(Y,V)g(\xi,\xi)
\end{aligned} \tag{3.41}
$$

ifadesini elde ederiz. (1.50), (1.52) ifadelerini (3.41) de yazarsak ve $g(P(X,Y)\xi,\xi)=0$ sonucunu kullanırsak

$$\frac{1}{2m}(\alpha^2-\beta^2)[S(Y,V)-(\alpha^2-\beta^2)2mg(Y,V)] = 0 \tag{3.42}$$

ifadesini elde ederiz. (3.42) de $\alpha^2-\beta^2 \neq 0$ olduğundan,

$$S(Y,V) = 2m(\alpha^2 - \beta^2)g(Y,V) \tag{3.42a}$$

dir. Dolayısıyla $P\cdot R = 0$ olduğunda manifold Einstein manifolddur.

Tersine M bir Einstein manifoldu ise $P\cdot R = 0$ bulunur. (3.42a) denklemini (3.33) de yerine yazdığımızda $P\cdot R = 0$ elde ederiz.

Teorem 1.3.4: Bir M^{2m+1} *(2m+1)*-boyutlu trans-Sasakian manifoldunda $P\cdot \overline{C} = 0$, $(\alpha^2 - \beta^2 \neq 0)$ olması için gerek ve yeter şart M nin bir Einstein manifoldu olması veya M nin $\tau = 2m(2m+1)(\alpha^2 - \beta^2)$ skaler eğriliğine sahip olmasıdır.

İspat:

M^{2m+1} *(2m+1)*-boyutlu trans-Sasakian manifold olsun. $P\cdot \overline{C} = 0$ eşitliği $\forall X,Y,U,V \in \chi(M)$ için,

$$P(X,Y)\overline{C}(U,V)Z - \overline{C}(P(X,Y)U,V)Z - \overline{C}(U,P(X,Y)V)Z - \overline{C}(U,V)P(X,Y)Z = 0 \tag{3.43}$$

yazılabilir. (1.10) ve (1.12) eşitliklerini (3.43) de kullanıp gerekli hesaplamaları yaparsak

$$\begin{aligned}
&P(X,Y)\overline{C}(U,V)Z - \overline{C}(P(X,Y)U,V)Z - \overline{C}(U,P(X,Y)V)Z - \overline{C}(U,V)P(X,Y)Z \\
&= P(X,Y)\{R(U,V)Z - \frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(V,Z)U - g(U,Z)V]\} \\
&- R(P(X,Y)U,V)Z + \frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(V,Z)P(X,Y)U - g(P(X,Y)U,Z)V] \\
&- R(U,P(X,Y)V)Z + \frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(P(X,Y)V,Z)U - g(U,Z)P(X,Y)V] \\
&- R(U,V)P(X,Y)Z + \frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(V,P(X,Y)Z)U - g(U,P(X,Y)Z)V] = 0
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}
&P(X,Y)R(U,V)Z - R(P(X,Y)U,V)Z - R(U,P(X,Y)V)Z - R(U,V)P(X,Y)Z \\
&- \frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(V,Z)P(X,Y)U - g(U,Z)P(X,Y)V - g(V,Z)P(X,Y)U + g(P(X,Y)U,Z)V \\
&- g(P(X,Y)V,Z)U + g(U,Z)P(X,Y)V - g(V,P(X,Y)Z)U + g(U,P(X,Y)Z)V] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P(X,Y)R(U,V)Z - R(P(X,Y)U,V)Z - R(U,P(X,Y)V)Z \\
&- R(U,V)P(X,Y)Z - \frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(P(X,Y)U,Z)V \\
&- g(P(X,Y)V,Z)U - g(V,P(X,Y)Z)U + g(U,P(X,Y)Z)V] = 0
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$
\begin{aligned}
&R(X,Y)R(U,V)Z-\frac{1}{2m}[S(Y,R(U,V)Z)X-S(X,R(U,V)Z)Y]\\
&-R(R(X,Y)U-\frac{1}{2m}[S(Y,U)X-S(X,U)Y],V)Z\\
&-R(U,R(X,Y)V-\frac{1}{2m}[S(Y,V)X-S(X,V)Y])Z\\
&-R(U,V)\{R(X,Y)Z-\frac{1}{2m}[S(Y,Z)X-S(X,Z)Y]\\
&-\frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(R(X,Y)U-\frac{1}{2m}[S(Y,U)X-S(X,U)Y],Z)V\\
&-g(R(X,Y)V-\frac{1}{2m}[S(Y,V)X-S(X,V)Y],Z)U\\
&-g(V,R(X,Y)Z-\frac{1}{2m}[S(Y,Z)X-S(X,Z)Y])U\\
&+g(U,R(X,Y)Z-\frac{1}{2m}[S(Y,Z)X-S(X,Z)Y])V]=0
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

$$
\begin{aligned}
&R(X,Y)R(U,V)Z-\frac{1}{2m}S(Y,R(U,V)Z)X+\frac{1}{2m}S(X,R(U,V)Z)Y\\
&-R(R(X,Y)U,V)Z+\frac{1}{2m}S(Y,U)R(X,V)Z-\frac{1}{2m}S(X,U)R(Y,V)Z\\
&-R(U,R(X,Y)V)Z+\frac{1}{2m}S(Y,V)R(U,X)Z-\frac{1}{2m}S(X,V)R(U,Y)Z\\
&-R(U,V)R(X,Y)Z+\frac{1}{2m}S(Y,Z)R(U,V)X-\frac{1}{2m}S(X,Z)R(U,V)Y\\
&-\frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(R(X,Y)U,Z)V-\frac{1}{2m}S(Y,U)g(X,Z)V+\frac{1}{2m}S(X,U)g(Y,Z)V\\
&-g(R(X,Y)V,Z)U+\frac{1}{2m}S(Y,V)g(X,Z)U-\frac{1}{2m}S(X,V)g(Y,Z)U\\
&-g(V,R(X,Y)Z)U+\frac{1}{2m}S(Y,Z)g(V,X)U-\frac{1}{2m}S(X,Z)g(V,Y)U\\
&+g(U,R(X,Y)Z)V-\frac{1}{2m}S(Y,Z)g(U,X)V+\frac{1}{2m}S(X,Z)g(U,Y)V=0
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

(3.47) den aşağıdaki ifadeyi buluruz.

$$
\begin{aligned}
&R(X,Y)R(U,V)Z - R(R(X,Y)U,V)Z - R(U,R(X,Y)V)Z - R(U,V)R(X,Y)Z \\
&-\frac{1}{2m}[S(Y,R(U,V)Z)X - S(X,R(U,V)Z)Y - S(Y,U)R(X,V)Z + S(X,U)R(Y,V)Z \\
&-S(Y,V)R(U,X)Z + S(X,V)R(U,Y)Z - S(Y,Z)R(U,V)X + S(X,Z)R(U,V)Y] \\
&-\frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(R(X,Y)U,Z)V - g(R(X,Y)V,Z)U - g(V,R(X,Y)Z)U \\
&+g(U,R(X,Y)Z)V - \frac{1}{2m}S(Y,U)g(X,Z)V + \frac{1}{2m}S(X,U)g(Y,Z)V \\
&+\frac{1}{2m}S(Y,V)g(X,Z)U - \frac{1}{2m}S(X,V)g(Y,Z)U + \frac{1}{2m}S(Y,Z)g(V,X)U \\
&-\frac{1}{2m}S(X,Z)g(V,Y)U - \frac{1}{2m}S(Y,Z)g(U,X)V + \frac{1}{2m}S(X,Z)g(U,Y)V = 0
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

ifadesini elde ederiz. (3.48) de $X=U=\xi$ alırsak

$$
\begin{aligned}
&R(\xi,Y)R(\xi,V)Z - R(R(\xi,Y)\xi,V)Z - R(\xi,R(\xi,Y)V)Z - R(\xi,V)R(\xi,Y)Z \\
&-\frac{1}{2m}[S(Y,R(\xi,V)Z)\xi - S(\xi,R(\xi,V)Z)Y - S(Y,\xi)R(\xi,V)Z + S(\xi,\xi)R(Y,V)Z \\
&-S(Y,V)R(\xi,\xi)Z + S(\xi,V)R(\xi,Y)Z - S(Y,Z)R(\xi,V)\xi + S(\xi,Z)R(\xi,V)Y] \\
&-\frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(R(\xi,Y)\xi,Z)V - g(R(\xi,Y)V,Z)\xi - g(V,R(\xi,Y)Z)\xi \\
&+g(\xi,R(\xi,Y)Z)V - \frac{1}{2m}S(Y,\xi)g(\xi,Z)V + \frac{1}{2m}S(\xi,\xi)g(Y,Z)V \\
&+\frac{1}{2m}S(Y,V)g(\xi,Z)\xi - \frac{1}{2m}S(\xi,V)g(Y,Z)\xi + \frac{1}{2m}S(Y,Z)g(V,\xi)\xi \\
&-\frac{1}{2m}S(\xi,Z)g(V,Y)\xi - \frac{1}{2m}S(Y,Z)g(\xi,\xi)V + \frac{1}{2m}S(\xi,Z)g(\xi,Y)V = 0
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

ifadesini elde ederiz. (1.3), (1.52), (1.60), (1.62), (3.6) ifadelerini (3.49) da kullanırsak

$$
\begin{aligned}
&R(\xi,Y)R(\xi,V)Z - R(R(\xi,Y)\xi,V)Z - R(\xi,R(\xi,Y)V)Z - R(\xi,V)R(\xi,Y)Z \\
&-\frac{1}{2m}[S(Y,R(\xi,V)Z)\xi + 2m(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(V)\eta(Z)Y - 2m(\alpha^2-\beta^2)^2 g(V,Z)Y \\
&-2m(\alpha^2-\beta^2)\eta(Y)R(\xi,V)Z + 2m(\alpha^2-\beta^2)R(Y,V)Z + 2m(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)R(\xi,Y)Z \\
&-(\alpha^2-\beta^2)S(Y,Z)\eta(V)\xi + (\alpha^2-\beta^2)S(Y,Z)V + 2m(\alpha^2-\beta^2)\eta(Z)R(\xi,V)Y] \\
&-\frac{\tau}{2m(2m+1)}[(\alpha^2-\beta^2)\eta(Y)\eta(Z)V - (\alpha^2-\beta^2)g(Y,Z)V - \frac{1}{2m}S(Y,V)\eta(Z)\xi \\
&+(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)g(Y,Z)\xi - \frac{1}{2m}S(Y,Z)\eta(V)\xi + (\alpha^2-\beta^2)\eta(Z)g(V,Y)\xi \\
&+\frac{1}{2m}S(Y,Z)V - (\alpha^2-\beta^2)\eta(Z)\eta(Y)V] = 0
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

elde ederiz. (3.50) eşitliğinin her iki tarafına W ile iç çarpım uygularsak

$$
\begin{aligned}
& g(R(\xi,Y)R(\xi,V)Z,W) - g(R(R(\xi,Y)\xi,V)Z,W) - g(R(\xi,R(\xi,Y)V)Z,W) \\
& - g(R(\xi,V)R(\xi,Y)Z,W) - \frac{1}{2m}[S(Y,R(\xi,V)Z)g(\xi,W) + 2m(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(V)\eta(Z)g(Y,W) \\
& - 2m(\alpha^2-\beta^2)^2 g(V,Z)g(Y,W) - 2m(\alpha^2-\beta^2)\eta(Y)g(R(\xi,V)Z,W) \\
& + 2m(\alpha^2-\beta^2)g(R(Y,V)Z,W) + 2m(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)g(R(\xi,Y)Z,W) \\
& - (\alpha^2-\beta^2)S(Y,Z)\eta(V)g(\xi,W) + (\alpha^2-\beta^2)S(Y,Z)g(V,W) \\
& + 2m(\alpha^2-\beta^2)\eta(Z)g(R(\xi,V)Y,W)] - \frac{\tau}{2m(2m+1)}[(\alpha^2-\beta^2)\eta(Y)\eta(Z)g(V,W) \\
& - (\alpha^2-\beta^2)g(Y,Z)g(V,W) - \frac{1}{2m}S(Y,V)\eta(Z)g(\xi,W) + (\alpha^2-\beta^2)\eta(V)g(Y,Z)g(\xi,W) \\
& - \frac{1}{2m}S(Y,Z)\eta(V)g(\xi,W) + (\alpha^2-\beta^2)\eta(Z)g(V,Y)g(\xi,W) + \frac{1}{2m}S(Y,Z)g(V,W) \\
& - (\alpha^2-\beta^2)\eta(Z)\eta(Y)g(V,W) = 0
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

ifadesini buluruz. (3.51) de $W=\xi$ alalım.

$$
\begin{aligned}
& g(R(\xi,Y)R(\xi,V)Z,\xi) - g(R(R(\xi,Y)\xi,V)Z,\xi) - g(R(\xi,R(\xi,Y)V)Z,\xi) \\
& - g(R(\xi,V)R(\xi,Y)Z,\xi) - \frac{1}{2m}[S(Y,R(\xi,V)Z)g(\xi,\xi) + 2m(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(V)\eta(Z)g(Y,\xi) \\
& - 2m(\alpha^2-\beta^2)^2 g(V,Z)g(Y,\xi) - 2m(\alpha^2-\beta^2)\eta(Y)g(R(\xi,V)Z,\xi) \\
& + 2m(\alpha^2-\beta^2)g(R(Y,V)Z,\xi) + 2m(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)g(R(\xi,Y)Z,\xi) \\
& - (\alpha^2-\beta^2)S(Y,Z)\eta(V)g(\xi,\xi) + (\alpha^2-\beta^2)S(Y,Z)g(V,\xi) \\
& + 2m(\alpha^2-\beta^2)\eta(Z)g(R(\xi,V)Y,\xi)] - \frac{\tau}{2m(2m+1)}[(\alpha^2-\beta^2)\eta(Y)\eta(Z)g(V,\xi) \\
& - (\alpha^2-\beta^2)g(Y,Z)g(V,\xi) - \frac{1}{2m}S(Y,V)\eta(Z)g(\xi,\xi) + (\alpha^2-\beta^2)\eta(V)g(Y,Z)g(\xi,\xi) \\
& - \frac{1}{2m}S(Y,Z)\eta(V)g(\xi,\xi) + (\alpha^2-\beta^2)\eta(Z)g(V,Y)g(\xi,\xi) + \frac{1}{2m}S(Y,Z)g(V,\xi) \\
& - (\alpha^2-\beta^2)\eta(Z)\eta(Y)g(V,\xi) = 0
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

(1.3), (1.52), (1.60), (1.62), (3.24), (3.25), (3.26), (3.27) ifadelerini (3.52) de kullanırsak

$$
\begin{aligned}
& (\alpha^2-\beta^2)g(Y,R(\xi,V)Z) - \frac{1}{2m}S(Y,R(\xi,V)Z) \\
& + \frac{\tau}{2m(2m+1)}[-\frac{1}{2m}S(Y,V)\eta(Z) + (\alpha^2-\beta^2)\eta(Z)g(Y,V)] = 0
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

ifadesini elde ederiz. Şimdi (3.53) de $Z=\xi$ alalım.

$$(\alpha^2-\beta^2)g(Y,R(\xi,V)\xi)-\frac{1}{2m}S(Y,R(\xi,V)\xi)$$
$$+\frac{\tau}{2m(2m+1)}[-\frac{1}{2m}S(Y,V)\eta(\xi)+(\alpha^2-\beta^2)\eta(\xi)g(Y,V)]=0 \tag{3.54}$$

elde ederiz. (1.52), (1.62) ve (3.23) ü (3.54) de kullanırsak

$$[(\alpha^2-\beta^2)-\frac{\tau}{2m(2m+1)}][\frac{1}{2m}S(Y,V)-(\alpha^2-\beta^2)g(Y,V)]=0 \tag{3.55}$$

elde edilir. (3.55) de $\alpha^2-\beta^2\neq 0$ olduğunda, ya M, $\tau=2m(2m+1)(\alpha^2-\beta^2)$ skaler eğriliğine sahiptir ya da

$$S(Y,V)=2m(\alpha^2-\beta^2)g(Y,V) \tag{3.55a}$$

dir. Dolayısıyla $P\cdot\overline{C}=0$ olduğunda manifold Einstein manifolddur.

Tersine M bir Einstein manifoldu ise $P\cdot\overline{C}=0$ bulunur. (3.55a) denklemini (3.43) de yerine yazdığımızda $P\cdot\overline{C}=0$ elde ederiz.

Teorem: : Bir M^{2m+1} (2m+1)-boyutlu trans-Sasakian manifoldunda $\overline{C}\cdot P=0$, ($\alpha^2-\beta^2\neq 0$) olması için gerek ve yeter şart M nin bir Einstein manifoldu olması veya M nin $\tau=2m(2m+1)(\alpha^2-\beta^2)$ skaler eğriliğine sahip olmasıdır.

İspat:

M^{2m+1} *(2m+1)*-boyutlu trans-Sasakian manifold olsun. $\overline{C}\cdot P=0$ eşitliği $\forall X,Y,U,V\in\chi(M)$ için,

$$(\overline{C}(X,Y)\cdot P)(U,V)Z=\overline{C}(X,Y)P(U,V)Z-P(\overline{C}(X,Y)U,V)Z$$
$$-P(U,\overline{C}(X,Y)V)Z-P(U,V)\overline{C}(X,Y)Z \tag{3.56}$$

ifadesini yazabiliriz. (1.10) ve (1.12) eşitliklerini (3.56) da kullanır ve gerekli hesaplamaları yaparsak

$$
\begin{aligned}
&= R(X,Y)P(U,V)Z - \frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(Y,P(U,V)Z)X - g(X,P(U,V)Z)Y] \\
&- P(R(X,Y)U - \frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(Y,U)X - g(X,U)Y],V)Z \\
&- P(U,R(X,Y)V - \frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(Y,V)X - g(X,V)Y]Z \\
&- P(U,V)\{R(X,Y)Z - \frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y]\}
\end{aligned} \tag{3.57}
$$

$$
\begin{aligned}
&= R(X,Y)P(U,V)Z \text{ - } P(R(X,Y)U,V)Z \text{ - } P(U,R(X,Y)V)Z \text{ - } P(U,V)R(X,Y)Z \\
&- \frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(Y,P(U,V)Z)X - g(X,P(U,V)Z)Y - g(Y,U)P(X,V)Z + g(X,U)P(Y,V)Z \\
&- g(Y,V)P(U,X)Z + g(X,V)P(U,Y)Z - g(Y,Z)P(U,V)X + g(X,Z)P(U,V)Y]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= R(X,Y)\{R(U,V)Z - \frac{1}{2m}[S(V,Z)U - S(U,Z)V]\} \\
&- R(R(X,Y)U,V)Z + \frac{1}{2m}[S(V,Z)R(X,Y)U - S(R(X,Y)U,Z)V] \\
&- R(U,R(X,Y)V)Z + \frac{1}{2m}[S(R(X,Y)V,Z)U - S(U,Z)R(X,Y)V] \\
&- R(U,V)R(X,Y)Z + \frac{1}{2m}[S(V,R(X,Y)Z)U - S(U,R(X,Y)Z)V] \\
&- \frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(Y,R(U,V)Z - \frac{1}{2m}[S(V,Z)U - S(U,Z)V])X \\
&- g(X,R(U,V)Z - \frac{1}{2m}[S(V,Z)U - S(U,Z)V])Y \\
&- g(Y,U)\{R(X,V)Z - \frac{1}{2m}[S(V,Z)X - S(X,Z)V]\} \\
&+ g(X,U)\{R(Y,V)Z - \frac{1}{2m}[S(V,Z)Y - S(Y,Z)V]\} \\
&- g(Y,V)\{R(U,X)Z - \frac{1}{2m}[S(X,Z)U - S(U,Z)X]\} \\
&+ g(X,V)\{R(U,Y)Z - \frac{1}{2m}[S(Y,Z)U - S(U,Z)Y]\} \\
&- g(Y,Z)\{R(U,V)X - \frac{1}{2m}[S(V,X)U - S(U,X)V]\} \\
&+ g(X,Z)\{R(U,V)Y - \frac{1}{2m}[S(V,Y)U - S(U,Y)V]\}
\end{aligned} \tag{3.58}
$$

$$
\begin{aligned}
&= R(X,Y)R(U,V)Z - \frac{1}{2m}S(V,Z)R(X,Y)U + \frac{1}{2m}S(U,Z)R(X,Y)V \\
&- R(R(X,Y)U,V)Z + \frac{1}{2m}S(V,Z)R(X,Y)U - \frac{1}{2m}S(R(X,Y)U,Z)V \\
&- R(U,R(X,Y)V)Z + \frac{1}{2m}S(R(X,Y)V,Z)U - \frac{1}{2m}S(U,Z)R(X,Y)V \\
&- R(U,V)R(X,Y)Z + \frac{1}{2m}S(V,R(X,Y)Z)U - \frac{1}{2m}S(U,R(X,Y)Z)V \\
&- \frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(Y,R(U,V)Z)X - \frac{1}{2m}S(V,Z)g(Y,U)X + \frac{1}{2m}S(U,Z)g(Y,V)X \\
&- g(X,R(U,V)Z)Y + \frac{1}{2m}S(V,Z)g(X,U)Y - \frac{1}{2m}S(U,Z)g(X,V)Y \\
&- g(Y,U)R(X,V)Z + \frac{1}{2m}g(Y,U)S(V,Z)X - \frac{1}{2m}g(Y,U)S(X,Z)V \\
&+ g(X,U)R(Y,V)Z - \frac{1}{2m}g(X,U)S(V,Z)Y + \frac{1}{2m}g(X,U)S(Y,Z)V \\
&- g(Y,V)R(U,X)Z + \frac{1}{2m}g(Y,V)S(X,Z)U - \frac{1}{2m}g(Y,V)S(U,Z)X \\
&+ g(X,V)R(U,Y)Z - \frac{1}{2m}g(X,V)S(Y,Z)U + \frac{1}{2m}g(X,V)S(U,Z)Y \\
&- g(Y,Z)R(U,V)X + \frac{1}{2m}g(Y,Z)S(V,X)U - \frac{1}{2m}g(Y,Z)S(U,X)V \\
&+ g(X,Z)R(U,V)Y - \frac{1}{2m}g(X,Z)S(V,Y)U + \frac{1}{2m}g(X,Z)S(U,Y)V]
\end{aligned} \tag{3.59}
$$

ifadesini elde ederiz. (3.59) da gerekli sadeleştirmeleri yaparsak

$$
\begin{aligned}
&= R(X,Y)R(U,V)Z - R(R(X,Y)U,V)Z - R(U,R(X,Y)V)Z - R(U,V)R(X,Y)Z \\
&- \frac{1}{2m}[S(R(X,Y)U,Z)V - S(R(X,Y)V,Z)U - S(V,R(X,Y)Z)U + S(U,R(X,Y)Z)V] \\
&- \frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(Y,R(U,V)Z)X - g(X,R(U,V)Z)Y - g(Y,U)R(X,V)Z \\
&+ g(X,U)R(Y,V)Z - g(Y,V)R(U,X)Z + g(X,V)R(U,Y)Z - g(Y,Z)R(U,V)X \\
&+ g(X,Z)R(U,V)Y - \frac{1}{2m}g(Y,U)S(X,Z)V + \frac{1}{2m}g(X,U)S(Y,Z)V \\
&+ \frac{1}{2m}g(Y,V)S(X,Z)U - \frac{1}{2m}g(X,V)S(Y,Z)U + \frac{1}{2m}g(Y,Z)S(V,X)U \\
&- \frac{1}{2m}g(Y,Z)S(U,X)V - \frac{1}{2m}g(X,Z)S(V,Y)U + \frac{1}{2m}g(X,Z)S(U,Y)V]
\end{aligned} \tag{3.60}
$$

ifadesini elde ederiz. Şimdi (3.60) da $X=U=Z=\xi$ alalım.

$$
\begin{aligned}
&= R(\xi,Y)R(\xi,V)\xi - R(R(\xi,Y)\xi,V)\xi - R(\xi,R(\xi,Y)V)\xi - R(\xi,V)R(\xi,Y)\xi \\
&-\frac{1}{2m}[S(R(\xi,Y)\xi,\xi)V - S(R(\xi,Y)V,\xi)\xi - S(V,R(\xi,Y)\xi)\xi + S(\xi,R(\xi,Y)\xi)V] \\
&-\frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(Y,R(\xi,V)\xi)\xi - g(\xi,R(\xi,V)\xi)Y - g(Y,\xi)R(\xi,V)\xi \\
&+ g(\xi,\xi)R(Y,V)\xi - g(Y,V)R(\xi,\xi)Z + g(\xi,V)R(\xi,Y)\xi - g(Y,\xi)R(\xi,V)\xi \\
&+ g(\xi,\xi)R(\xi,V)Y - \frac{1}{2m}g(Y,\xi)S(\xi,\xi)V + \frac{1}{2m}g(\xi,\xi)S(Y,\xi)V \\
&+\frac{1}{2m}g(Y,V)S(\xi,\xi)\xi - \frac{1}{2m}g(\xi,V)S(Y,\xi)\xi + \frac{1}{2m}g(Y,\xi)S(V,\xi)\xi \\
&-\frac{1}{2m}g(Y,\xi)S(\xi,\xi)V - \frac{1}{2m}g(\xi,\xi)S(V,Y)\xi + \frac{1}{2m}g(\xi,\xi)S(\xi,Y)V]
\end{aligned}
\tag{3.61}
$$

ifadesini buluruz. (1.3), (1.52), (1.60), (1.62), (3.5), (3.6) ifadelerini (3.61) de yazarsak

$$
\begin{aligned}
&= -(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(V)Y + 2(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)V + (\alpha^2-\beta^2)R(Y,V)\xi \\
&+ (\alpha^2-\beta^2)R(\xi,V)Y - \frac{1}{2m}(\alpha^2-\beta^2)S(V,Y)\xi \\
&-\frac{\tau}{2m(2m+1)}[2(\alpha^2-\beta^2)\eta(Y)V + R(Y,V)\xi \\
&-(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)Y + R(\xi,V)Y - \frac{1}{2m}S(V,Y)\xi]
\end{aligned}
\tag{3.62}
$$

elde ederiz. (3.62) de gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$
\begin{aligned}
&= [(\alpha^2-\beta^2) - \frac{\tau}{2m(2m+1)}][2(\alpha^2-\beta^2)\eta(Y)V + R(Y,V)\xi \\
&-(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)Y + R(\xi,V)Y - \frac{1}{2m}S(V,Y)\xi]
\end{aligned}
\tag{3.63}
$$

ifadesini elde ederiz. (3.63) e W ile iç çarpım uygularsak

$$
\begin{aligned}
&= [(\alpha^2-\beta^2) - \frac{\tau}{2m(2m+1)}][2(\alpha^2-\beta^2)\eta(Y)g(V,W) + g(R(Y,V)\xi,W) \\
&-(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)g(Y,W) + g(R(\xi,V)Y,W) - \frac{1}{2m}S(V,Y)g(\xi,W)]
\end{aligned}
\tag{3.64}
$$

buluruz. Şimdi (3.64) de $W=\xi$ alalım.

$$[(\alpha^2-\beta^2)-\frac{\tau}{2m(2m+1)}][2(\alpha^2-\beta^2)\eta(Y)g(V,\xi)+g(R(Y,V)\xi,\xi)$$
$$-(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)g(Y,\xi)+g(R(\xi,V)Y,\xi)-\frac{1}{2m}S(V,Y)g(\xi,\xi)]=0 \tag{3.65}$$

(1.3), (1.52), (1.62) ifadelerini (3.65) de yazarsak

$$[(\alpha^2-\beta^2)-\frac{\tau}{2m(2m+1)}][(\alpha^2-\beta^2)g(V,Y)-\frac{1}{2m}S(V,Y)]=0 \tag{3.66}$$

ifadesini elde ederiz. (3.66) da $\alpha^2-\beta^2\neq 0$ olduğundan, ya M, $\tau=2m(2m+1)(\alpha^2-\beta^2)$ skaler eğriliğine sahiptir ya da

$$S(Y,V)=2m(\alpha^2-\beta^2)g(Y,V) \tag{3.66a}$$

dir. Dolayısıyla $\overline{C}\cdot P=0$ olduğunda manifold Einstein manifolddur.

Tersine M bir Einstein manifoldu ise $\overline{C}\cdot P=0$ bulunur. (3.66a) denklemini (3.59) da yerine yazdığımızda $\overline{C}\cdot P=0$ elde ederiz.

Teorem 1.3.5: Bir M^{2m+1} (2m+1)-boyutlu trans-Sasakian manifoldunda $P\cdot\overline{C}-\overline{C}\cdot P=0$, $(\alpha^2-\beta^2\neq 0)$ olması için gerek ve yeter şart M nin bir Einstein manifoldu olması veya M nin $\tau=2m(2m+1)(\alpha^2-\beta^2)$ skaler eğriliğine sahip olmasıdır.

İspat :

M^{2m+1} *(2m+1)*-boyutlu trans-Sasakian manifold olsun. $P\cdot\overline{C}-\overline{C}\cdot P=0$ eşitliği $\forall X,Y,U,V\in\chi(M)$ için,

$P\cdot\overline{C}-\overline{C}\cdot P=0$ sonucunu bulmak için (3.52) ve (3.60) ifadelerini kullanırız.

$$(P(X,Y)\cdot\overline{C})(U,V)Z-(\overline{C}(X,Y)\cdot P)(U,V)Z$$
$$=R(X,Y)R(U,V)Z\text{ - }R(R(X,Y)U,V)Z\text{ - }R(U,R(X,Y)V)Z\text{ - }R(U,V)R(X,Y)Z$$
$$-\frac{1}{2m}[S(Y,R(U,V)Z)X-S(X,R(U,V)Z)Y-S(Y,U)R(X,V)Z+S(X,U)R(Y,V)Z$$
$$-S(Y,V)R(U,X)Z+S(X,V)R(U,Y)Z-S(Y,Z)R(U,V)X+S(X,Z)R(U,V)Y]$$
$$-\frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(R(X,Y)U,Z)V-g(R(X,Y)V,Z)U-g(V,R(X,Y)Z)U$$
$$+g(U,R(X,Y)Z)V-\frac{1}{2m}S(Y,U)g(X,Z)V+\frac{1}{2m}S(X,U)g(Y,Z)V$$
$$+\frac{1}{2m}S(Y,V)g(X,Z)U-\frac{1}{2m}S(X,V)g(Y,Z)U+\frac{1}{2m}S(Y,Z)g(V,X)U$$
$$-\frac{1}{2m}S(X,Z)g(V,Y)U-\frac{1}{2m}S(Y,Z)g(U,X)V+\frac{1}{2m}S(X,Z)g(U,Y)V$$
$$-R(X,Y)R(U,V)Z+R(R(X,Y)U,V)Z+R(U,R(X,Y)V)Z+R(U,V)R(X,Y)Z$$
$$-\frac{1}{2m}[-S(R(X,Y)U,Z)V+S(R(X,Y)V,Z)U+S(V,R(X,Y)Z)U-S(U,R(X,Y)Z)V)]$$
$$-\frac{\tau}{2m(2m+1)}[-g(Y,R(U,V)Z)X+g(X,R(U,V)Z)Y+g(Y,U)R(X,V)Z$$
$$-g(X,U)R(Y,V)Z+g(Y,V)R(U,X)Z-g(X,V)R(U,Y)Z+g(Y,Z)R(U,V)X$$
$$-g(X,Z)R(U,V)Y+\frac{1}{2m}g(Y,U)S(X,Z)V-\frac{1}{2m}g(X,U)S(Y,Z)V \tag{3.67}$$
$$-\frac{1}{2m}g(Y,V)S(X,Z)U+\frac{1}{2m}g(X,V)S(Y,Z)U-\frac{1}{2m}g(Y,Z)S(V,X)U$$
$$+\frac{1}{2m}g(Y,Z)S(U,X)V+\frac{1}{2m}g(X,Z)S(V,Y)U-\frac{1}{2m}g(X,Z)S(U,Y)V]$$

S ve g simetrik olduğundan (3.67) de gerekli sadeleştirmeleri yapalım. $P\cdot\overline{C}-\overline{C}\cdot P=0$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2m}[S(Y,R(U,V)Z)X - S(X,R(U,V)Z)Y - S(Y,U)R(X,V)Z + S(X,U)R(Y,V)Z \\
&- S(Y,V)R(U,X)Z + S(X,V)R(U,Y)Z - S(Y,Z)R(U,V)X + S(X,Z)R(U,V)Y \\
&- S(R(X,Y)U,Z)V + S(R(X,Y)V,Z)U + S(V,R(X,Y)Z)U - S(U,R(X,Y)Z)V] \\
&-\frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(R(X,Y)U,Z)V - g(R(X,Y)V,Z)U - g(V,R(X,Y)Z)U \\
&+ g(U,R(X,Y)Z)V - 2\frac{1}{2m}S(Y,U)g(X,Z)V + 2\frac{1}{2m}S(X,U)g(Y,Z)V \\
&+ 2\frac{1}{2m}S(Y,V)g(X,Z)U - 2\frac{1}{2m}S(X,V)g(Y,Z)U + 2\frac{1}{2m}S(Y,Z)g(V,X)U \\
&- 2\frac{1}{2m}S(X,Z)g(V,Y)U - 2\frac{1}{2m}S(Y,Z)g(U,X)V + 2\frac{1}{2m}S(X,Z)g(U,Y)V \\
&- g(Y,R(U,V)Z)X + g(X,R(U,V)Z)Y + g(Y,U)R(X,V)Z - g(X,U)R(Y,V)Z \\
&+ g(Y,V)R(U,X)Z - g(X,V)R(U,Y)Z + g(Y,Z)R(U,V)X - g(X,Z)R(U,V)Y] = 0
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

ifadesini elde ederiz. (3.68) de $X=U=\xi$ yazarsak

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2m}[S(Y,R(\xi,V)Z)\xi - S(\xi,R(\xi,V)Z)Y - S(Y,\xi)R(\xi,V)Z + S(\xi,\xi)R(Y,V)Z \\
&- S(Y,V)R(\xi,\xi)Z + S(\xi,V)R(\xi,Y)Z - S(Y,Z)R(\xi,V)\xi + S(\xi,Z)R(\xi,V)Y \\
&- S(R(\xi,Y)\xi,Z)V + S(R(\xi,Y)V,Z)\xi + S(V,R(\xi,Y)Z)\xi - S(\xi,R(\xi,Y)Z)V] \\
&-\frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(R(\xi,Y)\xi,Z)V - g(R(\xi,Y)V,Z)\xi - g(V,R(\xi,Y)Z)\xi + g(\xi,R(\xi,Y)Z)V \\
&- 2\frac{1}{2m}S(Y,\xi)g(\xi,Z)V + 2\frac{1}{2m}S(\xi,\xi)g(Y,Z)V + 2\frac{1}{2m}S(Y,V)g(\xi,Z)\xi \\
&- 2\frac{1}{2m}S(\xi,V)g(Y,Z)\xi + 2\frac{1}{2m}S(Y,Z)g(V,\xi)\xi - 2\frac{1}{2m}S(\xi,Z)g(V,Y)\xi \\
&- 2\frac{1}{2m}S(Y,Z)g(\xi,\xi)V + 2\frac{1}{2m}S(\xi,Z)g(\xi,Y)V - g(Y,R(\xi,V)Z)\xi \\
&+ g(\xi,R(\xi,V)Z)Y + g(Y,\xi)R(\xi,V)Z - g(\xi,\xi)R(Y,V)Z + g(Y,V)R(\xi,\xi)Z \\
&- g(\xi,V)R(\xi,Y)Z + g(Y,Z)R(\xi,V)\xi - g(\xi,Z)R(\xi,V)Y] = 0
\end{aligned}
\tag{3.69}
$$

ifadesini elde ederiz. (3.69) da (1.3), (1.52), (1.60), (1.62), (3.5), (3.6) İfadelerini kullanırsak

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2m}[S(Y,R(\xi,V)Z)\xi+2m(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(V)\eta(Z)Y-2m(\alpha^2-\beta^2)^2 g(V,Z)Y \\
&-2m(\alpha^2-\beta^2)\eta(Y)R(\xi,V)Z+2m(\alpha^2-\beta^2)R(Y,V)Z+2m(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)R(\xi,Y)Z \\
&-(\alpha^2-\beta^2)S(Y,Z)\eta(V)\xi+2(\alpha^2-\beta^2)S(Y,Z)V+2m(\alpha^2-\beta^2)\eta(Z)R(\xi,V)Y \\
&+S(R(\xi,Y)V,Z)\xi+S(V,R(\xi,Y)Z)\xi-2m(\alpha^2-\beta^2)^2 g(Y,Z)V] \\
&-\frac{\tau}{2m(2m+1)}[-g(R(\xi,Y)V,Z)\xi-g(V,R(\xi,Y)Z)\xi+(\alpha^2-\beta^2)g(Y,Z)V \\
&+2\frac{1}{2m}S(Y,V)\eta(Z)\xi-(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)g(Y,Z)\xi+2\frac{1}{2m}S(Y,Z)\eta(V)\xi \\
&-2(\alpha^2-\beta^2)\eta(Z)g(V,Y)\xi-2\frac{1}{2m}S(Y,Z)V-g(Y,R(\xi,V)Z)\xi \\
&-(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)\eta(Z)Y+(\alpha^2-\beta^2)g(V,Z)Y+\eta(Y)R(\xi,V)Z \\
&-R(Y,V)Z-\eta(V)R(\xi,Y)Z-\eta(Z)R(\xi,V)Y]=0
\end{aligned}
\tag{3.70}
$$

elde ederiz. (3.70) eşitliğinin her iki tarafına W ile iç çarpım uygularsak

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2m}[S(Y,R(\xi,V)Z)g(\xi,W)+2m(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(V)\eta(Z)g(Y,W) \\
&-2m(\alpha^2-\beta^2)^2 g(V,Z)g(Y,W)-2m(\alpha^2-\beta^2)\eta(Y)g(R(\xi,V)Z,W) \\
&+2m(\alpha^2-\beta^2)g(R(Y,V)Z,W)+2m(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)g(R(\xi,Y)Z,W) \\
&-(\alpha^2-\beta^2)S(Y,Z)\eta(V)g(\xi,W)+2(\alpha^2-\beta^2)S(Y,Z)g(V,W) \\
&+2m(\alpha^2-\beta^2)\eta(Z)g(R(\xi,V)Y,W)+S(R(\xi,Y)V,Z)g(\xi,W) \\
&+S(V,R(\xi,Y)Z)g(\xi,W)-2m(\alpha^2-\beta^2)^2 g(Y,Z)g(V,W)] \\
&-\frac{\tau}{2m(2m+1)}[-g(R(\xi,Y)V,Z)g(\xi,W)-g(V,R(\xi,Y)Z)g(\xi,W) \\
&+(\alpha^2-\beta^2)g(Y,Z)g(V,W)+2\frac{1}{2m}S(Y,V)\eta(Z)g(\xi,W) \\
&-(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)g(Y,Z)g(\xi,W)+2\frac{1}{2m}S(Y,Z)\eta(V)g(\xi,W) \\
&-2(\alpha^2-\beta^2)\eta(Z)g(V,Y)g(\xi,W)-2\frac{1}{2m}S(Y,Z)g(V,W) \\
&-g(Y,R(\xi,V)Z)g(\xi,W)-(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)\eta(Z)g(Y,W) \\
&+(\alpha^2-\beta^2)g(V,Z)g(Y,W)+\eta(Y)g(R(\xi,V)Z,W) \\
&-g(R(Y,V)Z,W)-\eta(V)g(R(\xi,Y)Z,W)-\eta(Z)g(R(\xi,V)Y,W)]=0
\end{aligned}
\tag{3.71}
$$

buluruz. Şimdi (3.71) de $W=\xi$ yazalım.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2m}[S(Y,R(\xi,V)Z)g(\xi,\xi)+2m(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(V)\eta(Z)g(Y,\xi)\\
&-2m(\alpha^2-\beta^2)^2 g(V,Z)g(Y,\xi)-2m(\alpha^2-\beta^2)\eta(Y)g(R(\xi,V)Z,\xi)\\
&+2m(\alpha^2-\beta^2)g(R(Y,V)Z,\xi)+2m(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)g(R(\xi,Y)Z,\xi)\\
&-(\alpha^2-\beta^2)S(Y,Z)\eta(V)g(\xi,\xi)+2(\alpha^2-\beta^2)S(Y,Z)g(V,\xi)\\
&+2m(\alpha^2-\beta^2)\eta(Z)g(R(\xi,V)Y,\xi)+S(R(\xi,Y)V,Z)g(\xi,\xi)\\
&+S(V,R(\xi,Y)Z)g(\xi,\xi)-2m(\alpha^2-\beta^2)^2 g(Y,Z)g(V,\xi)]\\
&-\frac{\tau}{2m(2m+1)}[-g(R(\xi,Y)V,Z)g(\xi,\xi)-g(V,R(\xi,Y)Z)g(\xi,\xi)\\
&+(\alpha^2-\beta^2)g(Y,Z)g(V,\xi)+2\frac{1}{2m}S(Y,V)\eta(Z)g(\xi,\xi)\\
&-(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)g(Y,Z)g(\xi,\xi)+2\frac{1}{2m}S(Y,Z)\eta(V)g(\xi,\xi)\\
&-2(\alpha^2-\beta^2)\eta(Z)g(V,Y)g(\xi,\xi)-2\frac{1}{2m}S(Y,Z)g(V,\xi)\\
&-g(Y,R(\xi,V)Z)g(\xi,\xi)-(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)\eta(Z)g(Y,\xi)\\
&+(\alpha^2-\beta^2)g(V,Z)g(Y,\xi)+\eta(Y)g(R(\xi,V)Z,\xi)\\
&-g(R(Y,V)Z,\xi)-\eta(V)g(R(\xi,Y)Z,\xi)-\eta(Z)g(R(\xi,V)Y,\xi)]=0
\end{aligned}
\tag{3.72}
$$

buluruz. (3.72) de (1.3), (1.50), (1.52), (1.60), (1.62), ifadelerini kullanırsak,

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2m}[S(Y,R(\xi,V)Z)+2m(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(V)\eta(Z)\eta(Y)\\
&-2m(\alpha^2-\beta^2)^2 g(V,Z)\eta(Y)+2m(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)\eta(V)\eta(Z)\\
&-2m(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)g(V,Z)+2m(\alpha^2-\beta^2)g(R(Y,V)Z,\xi)\\
&-2m(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(V)\eta(Y)\eta(Z)+2m(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(V)g(Y,Z)\\
&-(\alpha^2-\beta^2)S(Y,Z)\eta(V)+2(\alpha^2-\beta^2)S(Y,Z)\eta(V)\\
&-2m(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Z)\eta(V)\eta(Y)+2m(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Z)g(V,Y)\\
&+S(R(\xi,Y)V,Z)+S(V,R(\xi,Y)Z)-2m(\alpha^2-\beta^2)^2 g(Y,Z)\eta(V)]\\
&-\frac{\tau}{2m(2m+1)}[-g(R(\xi,Y)V,Z)-g(V,R(\xi,Y)Z)+(\alpha^2-\beta^2)g(Y,Z)\eta(V)\\
&+2\frac{1}{2m}S(Y,V)\eta(Z)-(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)g(Y,Z)+2\frac{1}{2m}S(Y,Z)\eta(V)\\
&-2(\alpha^2-\beta^2)\eta(Z)g(V,Y)-2\frac{1}{2m}S(Y,Z)\eta(V)-g(Y,R(\xi,V)Z)\\
&-(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)\eta(Z)\eta(Y)+(\alpha^2-\beta^2)g(V,Z)\eta(Y)-(\alpha^2-\beta^2)\eta(Y)\eta(V)\eta(Z)\\
&+(\alpha^2-\beta^2)\eta(Y)g(V,Z)-g(R(Y,V)Z,\xi)+(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)\eta(Y)\eta(Z)\\
&-(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)g(Y,Z)+(\alpha^2-\beta^2)\eta(Z)\eta(V)\eta(Y)-(\alpha^2-\beta^2)\eta(Z)g(V,Y)]\\
&=0
\end{aligned}
\tag{3.73}
$$

(3.73) de (1.3) ifadesini kullanırsak ve gerekli sadeleştirmeleri yaparsak

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2m}[S(Y,R(\xi,V)Z)-4m(\alpha^2-\beta^2)^2 g(V,Z)\eta(Y)+2m(\alpha^2-\beta^2)g(R(Y,V)Z,\xi)\\
&+(\alpha^2-\beta^2)S(Y,Z)\eta(V)+2m(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Z)g(V,Y)+S(R(\xi,Y)V,Z)+S(V,R(\xi,Y)Z)]\\
&-\frac{\tau}{2m(2m+1)}[+2\frac{1}{2m}S(Y,V)\eta(Z)-3(\alpha^2-\beta^2)\eta(Z)g(V,Y)-g(Y,R(\xi,V)Z)\\
&+2(\alpha^2-\beta^2)g(V,Z)\eta(Y)-g(R(Y,V)Z,\xi)-(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)g(Y,Z)]=0
\end{aligned}
\tag{3.74}
$$

elde ederiz. (3.74) de $Z=\xi$ yazalım.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2m}[S(Y,R(\xi,V)\xi)-4m(\alpha^2-\beta^2)^2 g(V,\xi)\eta(Y)+2m(\alpha^2-\beta^2)g(R(Y,V)\xi,\xi)\\
&+(\alpha^2-\beta^2)S(Y,\xi)\eta(V)+2m(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(\xi)g(V,Y)+S(R(\xi,Y)V,\xi)+S(V,R(\xi,Y)\xi)]\\
&-\frac{\tau}{2m(2m+1)}[2\frac{1}{2m}S(Y,V)\eta(\xi)-3(\alpha^2-\beta^2)\eta(\xi)g(V,Y)-g(Y,R(\xi,V)\xi)\\
&+2(\alpha^2-\beta^2)g(V,\xi)\eta(Y)-g(R(Y,V)\xi,\xi)-(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)g(Y,\xi)]=0
\end{aligned}
\tag{3.75}
$$

buluruz. (3.75) de (1.52), (1.60), (1.62), (3.5), (3.6) ifadelerini kullanırsak

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2m}[2m(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(V)\eta(Y)-(\alpha^2-\beta^2)S(Y,V)-4m(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(V)\eta(Y)\\
&+2m(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)\eta(V)+2m(\alpha^2-\beta^2)^2 g(V,Y)-2m(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(Y)\eta(V)\\
&+2m(\alpha^2-\beta^2)^2 g(Y,V)+2m(\alpha^2-\beta^2)^2\eta(V)\eta(Y)-(\alpha^2-\beta^2)S(V,Y)]\\
&-\frac{\tau}{2m(2m+1)}[2\frac{1}{2m}S(Y,V)-3(\alpha^2-\beta^2)g(V,Y)-(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)\eta(Y)\\
&+(\alpha^2-\beta^2)g(Y,V)+2(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)\eta(Y)-(\alpha^2-\beta^2)\eta(V)\eta(Y)]=0
\end{aligned}
\tag{3.76}
$$

ifadesini elde ederiz. (3.76) da gerekli sadeleştirmeleri yaparsak

$$
\begin{aligned}
&2\frac{1}{2m}(\alpha^2-\beta^2)S(Y,V)-2(\alpha^2-\beta^2)^2 g(V,Y)\\
&-\frac{\tau}{2m(2m+1)}[2\frac{1}{2m}S(Y,V)-2(\alpha^2-\beta^2)g(V,Y)]=0
\end{aligned}
\tag{3.77}
$$

buluruz. (3.77) den

$$
[2\frac{1}{2m}S(Y,V)-2(\alpha^2-\beta^2)g(V,Y)][(\alpha^2-\beta^2)-\frac{\tau}{2m(2m+1)}]=0 \tag{3.78}
$$

ifadesini elde ederiz. (3.78) de $\alpha^2-\beta^2\neq 0$ olduğundan, ya M, $\tau=2m(2m+1)(\alpha^2-\beta^2)$ skaler eğriliğine sahiptir ya da

$$
S(Y,V)=2m(\alpha^2-\beta^2)g(Y,V) \tag{3.78a}
$$

dir. Dolayısıyla $P \cdot \overline{C} - \overline{C} \cdot P = 0$ olduğunda manifold Einstein manifolddur.

Tersine M bir Einstein manifoldu ise $P(\xi, X) \cdot \overline{C} - \overline{C}(\xi, X) \cdot P = 0$ bulunur. (3.78a) denklemini (3.69) da yerine yazdığımızda $P(\xi, X) \cdot \overline{C} - \overline{C}(\xi, X) \cdot P = 0$ elde ederiz.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] O' Neill, B. Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, Inc. 1983

[2] I. Mihai, A. A. Shaikh and U. C. De, On Lorentzian para-Sasakian Manifolds

[3] K. Matsumoto and I. Mihai, On a certain transformation in a Lorentzian para-Sasakian manifold, Tensor, N. S., 47(1988), 189-197.

[4] R. S. Mishra, Almost contact metric manifolds, Monograph 1, Tensor Society of India, Lucknow, (1991).

[5] U. C. De and M. M. Tripathi, Ricci Tensor in 3-dimensional Trans-Sasakian Manifolds, Kyungpook Math. J., 43(2003), 247-255.

[6] S. Tanno, The automorphism groups of almost contact Riemannian manifolds, Tohoku Math. J., 21(1969), 21-38.

[7] K. Kenmotsu, A class of almost contact Riemannian manifolds, Tohoku Math. J., 24(1972), 93-103.

[8] J. C. Marrero and D. Chinea, On trans-Sasakian manifolds, Proceedings of the XIVth Spanish-Portuguese Conference on Mathematics, Vol. I-III (Spanish) (Puerto de la Cruz, 1989), 655-659, Univ. La Laguna, La Laguna, 1990.

[9] A. Gray and L. M. Hervella, The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants, Ann. Mat. Pura Appl., 123(4)(1980), 35-58.

[10] S. Dragomir and L. Ornea, Locally conformal Kaehler geometry, Progress in Mathematics 155, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1998.

[11] J. A. Oubina, New classes of contact metric structures, Publ. Math. Debrecen, 32(3-4) (1985), 187-193.

[12] J. C. Marrero, The local structure of trans-Sasakian manifolds, Ann. Mat. Pura Appl., 162(4)(1992), 77-86.

[13] D. E. Blair, Contact manifolds in Riemannian geometry, Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 509(1976), 146.

[14] M. M. Tripathi, Trans-Sasakian manifolds are generalized quasi-Sasakian, Nepali Math. Sci. Rep., 18(1-2)(1999-2000), 11-14.

[15] D. E. Blair and J. A. Oubina, Conformal and related changes of metric on the productof two almost contact metric manifolds, Publications Matematiques, 34(1990), 199-207.

[16] M. C. Chaki, and B. Gupta, On Conformally Symmetric Spaces, Indian J. Math., 5(1963), 113-123.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devamı)

[17] K. Matsumoto, On Lorentzian paracontact manifolds, Bull. of Yamagata Univ. Nat. Sci., 12(2)(1989), 151-156

[18] J. S. Kim, R. Prasad and M. M. Tripathi, On generalized Ricci-recurrent trans-Sasakian manifolds, J. Korean Math. Soc., 39(6)(2002), 953-961.15

[19] D. Chinea and C. Gonzales, Curvature relations in trans-Sasakian manifolds, Proceedings of the XIIth Portuguese-Spanish Conference on Mathematics, Vol. II(Portuguese) (Braga, 1987), 564-571, Univ. Minho, Braga, 1987.

[20] D. Janssens and L. Vanhacke, Almost contact structures and curvature tensors, Kodai Math. J., 4(1981), 1-27.