DEĞME MANİFOLDLAR

Evrim ŞAHİN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Ekim-2007

DEĞME MANİFOLDLAR

Hazırlayan

Evrim ŞAHİN

DUMLUPINAR ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Ahmet YILDIZ

Ekim - 2007

KABUL VE ONAY SAYFASI

Evrim ŞAHİN'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "DEĞME MANİFOLDLAR" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

05/10/2007

Üye : Doç. Dr. Cengiz MURATHAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mine TURAN

Üye : Yrd.Doç. Dr. Ahmet YILDIZ (Danışman)

Fen Bilimleri Enstitüsün Yönetim Kurulu'nun ....../...../…..... gün ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. M. Sabri ÖZYURT
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DEĞME MANİFOLDLAR

Evrim ŞAHİN

Matematik Bölümü Yüksek Lisans Tezi 2007
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ahmet YILDIZ

ÖZET

Bu tezin amacı Değme manifoldlarda bazı eğrilik şartlarını çalışmaktır. Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar ve sonuçları içermektedir. İkinci bölüm bir nullity şartını sağlayan değme metrik manifoldlar ile ilgili tanımlar, teoremler ve sonuçları içermektedir. Üçüncü bölüm orijinal çalışmalarımızdan oluşmaktadır.

Birinci bölümde Riemann eğrilik tensörü, Einstein manifold, Weyl-conformal eğrilik tensörü, Projektif eğrilik tensörü, hemen hemen değme metrik manifoldlar gibi temel kavramlar tanıtılmıştır.

İkinci bölümde nullity vektör uzayı tanımları, bu tanımlarla ilgili temel teorem ve önermeler verilmiştir.

Son bölümde değme manifoldlarda eğrilik şartları ve değme metrik manifoldlarda Genelleştirilmiş C-Bochner eğrilik tensörü eşitlikleri ve teoremleri verilmiştir. Verilen tüm bu bilgiler ışığında yazılan teoremler ispatlanmış ve sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Hemen Hemen Değme Metrik manifold, Riemann Eğrilik Tensörü, Sasakian Manifold.

CONTACT MANIFOLDS

Evrim ŞAHİN

Department of Mathematics MSc Thesis 2007
Supervisor: Asist. Prof. Dr. Ahmet YILDIZ

SUMMARY

The aim of this thesis is to study some curvature conditions on Contacts manifolds. The thesis has three chapters.

First chapter contains some fundamental definitions and results which will be used in other chapters. Second chapter contains some fundamental definitions,theorems and results about Sasakian and Trans-Sasakian manıfolds. Chapter three contains original works.

In the first chapter the we introduce basic definitions such as, Riemannian curvature tensor, Einstein manifold, Weyl Conformal curvature tensor, projective curvature tensor and almost contact metric manifolds.

In the second chapter the definitions of nullity basic theorems and propositions which are connected with these definitions have been given.

In the last chapter some curvature conditions and equations which are used to provide these curvature conditions about Generalized C- Bochner curvature tensor. Under the light of these given information, the written theorems have been proved and results have been obtained.

Keywords: Almost contact metric manifold, Riemannian curvature tensor, Trans-Sasakian manifold.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek çalışmanın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Ahmet YILDIZ’ a ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen aileme, arkadaşım Muazzez ÇETİNTÜRK'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

SUMMARY v

TEŞEKKÜR vi

SİMGELER DİZİNİ viii

1.1.TEMEL KAVRAMLAR 1

1.2. HEMEN HEMEN DEĞME METRİK MANİFOLDLARI 9

1.3. HEMEN HEMEN DEĞME MANİFOLDLARIN TORSİON TENSÖRÜ 11

1.4. K-DEĞME MANİFOLDLARI 15

1.5. SASAKİAN MANİFOLDLAR 17

1.6.*M(c)* SASAKİAN UZAY FORMU 18

2. BİR NULLİTY ŞARTINI SAĞLAYAN DEĞME METRİK MANİFOLDLAR 20

3.1. DEĞME METRİK MANİFOLDLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ *C*- BOCHNER EĞRİLİK TENSÖRÜ 28

3.2. $B(\xi, X). C=0$ ‘ı SAĞLAYAN $N(k)$- DEĞME METRİK MANİFOLDLARI 33

3.3. $C(\xi, X). B=0$ ‘ı SAĞLAYAN $N(k)$- DEĞME METRİK MANİFOLDLARI 35

3.4 . $B(\xi, X). P=0$ ‘ı SAĞLAYAN $N(k)$- DEĞME METRİK MANİFOLDLARI 39

3.5. $B(\xi, X).R = 0$ ı SAĞLAYAN $N(k)$- DEĞME METRİK MANİFOLDLARI 40

3.6. $R(\xi, X).B = 0$ ‘ ı SAĞLAYAN $N(k)$- DEĞME METRİK MANİFOLDLARI 42

KAYNAKLAR DİZİNİ 44

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklamalar**
R	Reel Sayılar Cümlesi
M	Manifold
g	Metrik Tensör
C^{∞}	Diferansiyellenebilme
$[,]$	Lie Parantez Operatörü
$T_P(M)$	p noktasında teğet uzay
$T_P^{\perp}(M)$	p noktasında normal uzay
$\chi(M)$	M nin teğet vektör alanlarının uzayı
$\chi^{\perp}(M)$	M nin normal vektör alanlarının uzayı
∇	M üzerindeki afin koneksiyon
$\widetilde{\nabla}$	$\overline{M}$ üzerindeki afin koneksiyon
D	Normal Koneksiyon
R	M nin Riemann Eğrilik Tensörü
$\overline{R}$	$\overline{M}$ nin Riemann Eğrilik Tensörü
A_{ξ}	Şekil Operatörü
B	İkinci Temel Form
τ	Skaler Eğrilik
S	Ricci Tensörü
C	Weyl-Conformal Eğrilik Tensörü
$\overline{C}$	Weyl-Concircular eğrilik Tensörü
P	Projektif Eğrilik Tensörü
Q	Ricci Operatörü
η	1-form
ϕ	(1, 1) tipinde tensör alanı
N_F	F nin Nijenhuis Torsiyon Tensörü

1.1.TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar tanıtılmıştır.

Tanım 1.1.1: *M* bir diferensiyellenebilir (C^{∞}) manifold olsun. *M* üzerindeki C^{∞} vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve *M* den *R* ye C^{∞} fonksiyonların uzayı $C^{\infty}(M, R)$ olmak üzere, *M* üzerinde;

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M, R)$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik, 2-lineer *g* Riemann metriği ile birlikte *M* ye bir **Riemann manifoldu** adı verilir ve (*M, g*) şeklinde gösterilir (Kobayashi and Nomizu, 1963).

M manifoldunun herhangi iki *p* ve *q* noktası için *M* üzerinde bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabilirse *M* ye **bağlantılı manifold** adı verilir. *M* bağlantılı ve temel grubu sadece birim elemandan oluşuyor ise *M* ye **basit bağlantılı** dır denir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.1.2: *M* bir diferensiyellenebilir manifold ve *M* üzerindeki C^{∞} vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere;

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \xrightarrow{2-\text{lineer}} \chi(M)$$

$$(X, Y) \longrightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y$$

dönüşümü $\forall f, g \in C^{\infty}(M, R)$, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

i) $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

ii) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

özeliklerini sağlarsa, ∇ ya M üzerinde bir **Afin Koneksiyon** adı verilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.1.3: *(M, g)* bir Riemann manifoldu ve ∇ da *M* üzerinde tanımlanan bir afin koneksiyon olsun. O zaman $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere; ∇ dönüşümü;

i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (Koneksiyonun sıfır torsiyon özeliği),

ii) $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Koneksiyonun metrikle bağdaşması özeliği)

şartlarını sağlıyorsa, ∇ ya M üzerinde **sıfır torsiyonlu Riemann Koneksiyon** veya M nin **Levi-Civita Koneksiyonu** adı verilir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 1.1.4: M bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere;

$$\nabla : \chi(M) x \chi(M) \xrightarrow{2-lineer} \chi(M)$$

$$(X, Y) \longrightarrow \nabla(X,Y) = \nabla_X Y$$

biçiminde tanımlanan ∇ operatörü, M nin bir U bölgesi üzerinde tanımlı olup her bir C^∞ $X, Y \in \chi(U)$ vektör alan çiftine U üzerinde $\nabla_X Y$ ile ifade edilen üçüncü bir C^∞ vektör alanı karşılık getirir. Bu karşılık gelme aşağıdaki özellikleri sağladığında ∇ ya **Lineer Koneksiyon** (veya **kovaryant türev**) adı verilir (O' Neill 1983).

$\forall X, Y, Z \in \chi(M)$, $\forall f \in C^\infty(M, R)$ olmak üzere

i) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$,

ii) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$,

iii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

iv) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ dir.

Tanım 1.1.5: (M, g) bir Riemann manifoldu, ∇ de M üzerindeki Levi–Civita koneksiyonu olsun.

$$R : \chi(M) x \chi(M) x \chi(M) \to \chi(M)$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \qquad (1.1)$$

ile tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde bir (1, 3)-tensör alanıdır ve M nin **Riemann eğrilik tensörü** olarak adlandırılır. Ayrıca $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$ tensörüne M nin **Riemann-Christoffel eğrilik tensörü** adı verilir.

Her $X, Y, Z, V, W \in \chi(M)$ için Riemann eğrilik tensörü R aşağıdaki özelliklere sahiptir;

i) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z,$ (1.2)

ii) $g(R(X, Y)V, W) = -g(R(X, Y)W, V),$ (1.3)

iii) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0,$ (1.4)

iv) $g(R(X, Y)V, W) = g(R(V, W)X, Y)$ (1.5)

(O'Neill 1983).

Tanım 1.1.6: *(M, g)* bir Riemann manifoldu olsun. T_pM tanjant uzayının iki boyutlu altuzayı Π olmak üzere $V, W \in \Pi$ tanjant vektörleri için Q fonksiyonu;

$$Q(V, W) = g(V, V)g(W, W) - g(V, W)^2$$

biçiminde tanımlansın. $Q(V, W) \neq 0$ olmak üzere;

$$K(V, W) = \frac{g(R(V,W)W,V)}{Q(V,W)} \tag{1.6}$$

olup buna Π nin **kesitsel eğriliği** denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 1.1.7: *(M, g)* n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları olsunlar.

$$S : \chi(M) \times \chi(M) \to R$$

$$(X, Y) \to S(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X)Y, e_i) \tag{1.7}$$

şeklinde tanımlı (0,2) tipindeki S tensör alanına, M üzerinde **Ricci eğrilik tensörü** adı verilir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.1.8: *(M, g)* n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için;

$$S(X, Y) = \lambda g(X,Y) \tag{1.8}$$

olacak biçimde M üzerinde bir λ fonksiyonu var ise yani M nin Ricci tensörü S, metrik tensör g nin bir katı ise M ye **Einstein manifoldu** adı verilir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.1.9: (M, g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots , e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere;

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i) \tag{1.9}$$

değerine M nin **skalar eğriliği** adı verilir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.1.10: M n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için M nin **Weyl conformal eğrilik tensör alanı;**

$$C(X, Y)Z = R(X, Y)Z + \frac{1}{n-2}[S(X, Z)Y - S(Y, Z)X + g(X, Z)QY$$

$$-g(Y, Z)QX] - \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(X, Z)Y - g(Y, Z)X] \tag{1.10}$$

ile tanımlanır. Burada Q Ricci operatörüdür (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.1.11: $c = 0$ ise M manifoldu **conformal flat** olarak adlandırılır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.1.12: Sabit eğrilikli, tam, bağlantılı manifoldlara **uzay form** denir. n-boyutlu bir M uzay formu $M^n(c)$ ile gösterilir. Eğer,

$=0$ ise $(c) = E^n$ Öklid Uzayı

$c =$ — ise $(c) = S^n(r)$ küresi

$c =$ — ise $(c) = H^n(r)$ Hiperbolik Uzayı

dır (Chen, 1973).

Tanım 1.1.13 : Eğer $o \in M$ ise, D_o, T_oM de v vektörlerinin grubu olsun. Öyle ki inextendible geodezik γ_v, [0,1] de tanımlanır. o üzerinde M nin üsse ait haritası

$$\exp_o : D_o - M$$

fonksiyonudur öyle ki $\forall\, v \in D_o$ için $\exp_o(v) = \gamma_v(1)$ dir[1].

Tanım 1.1.14 : $L : T_o(M) \to T_{\bar{o}}(\overline{M})$ bir lineer izometri olsun ve U, M üzerinde o nin bir normal komşuluğu olsun öyle ki $\exp_{\bar{o}}$, $L(\exp_o{}^{-1}(U))$ grubunda tanımlanır. O zaman

$$\phi_L = \exp_{\bar{o}} \quad L \quad \exp_o{}^{-1} : U \to M$$

haritasına U üzerinde L nin **kutupsal koordinatı** denir[1]. Kısaca ,

$$\forall\, v \in U \subset T_o(M) \text{ için } \phi_L : \exp_o(v) - \exp_{\bar{o}}(L_v) \qquad \text{dir.}$$

Kutupsal haritalar yeterince küçük U için daima bulunur ve aşağıdaki ilk iki özellik gösterir ki, eğer biz izometrinin var olduğunu araştırırsak, o , L nin kutupsal haritası olmalıdır.

Yardımcı Teorem 1.1.1 : Yukarıdaki gösterim ile

1. ϕ_L radyal geodezikleri radyal geodeziklere götürür. Açıkça, eğer $v \in T_o(M)$ ise, o zaman $\phi_L \quad \gamma_v = \gamma_{Lv}$ dir.

2. o üzerinde ϕ nin diferansiyel haritası L dir.

3. Eğer U yeterince küçük ise o zaman ϕ_L, M de o nin bir normal komşuluğu üzerinde bir diffeomorfizmdir.

4. Eğer M tam ise, ϕ_L, o nin her normal komşuluğunda tanımlanır[1].

Sonuç 1.1.1: Bir yarı-Riemann manifold üzerinde aşağıdaki durumlar denktir.

1. M lokal simetriktir.

2. Eğer $L: T_P(M) \to T_q(M)$ bir lokal simetrik ise eğriliği korur, o zaman p ve q nun normal komşuluklarının bir ϕ izometrisi vardır öyle ki $d\phi_p = L$ dir.

3. *M* nin her *p n*oktasında lokal geodezik ξ_p bir izometriktir[1].

Tanım 1.1.15 : Bir yarı-Riemann uzay simetriği, bağlantılı bir yarı-Riemann manilfold M dir, öyle ki $\forall p \in M$ için $T_P(M)$ üzerinde tek bir izometri $\xi_p : M - M$ ile diferansiyel harita –id vardır.

İzometri ξ_p ye p de M nin global simetrisi denir. ξ_p, p de lokal geodezik simetrinin M nin tümüne genişletildiğinde tektir. Böylece ikincisi bir izometridir. Yukarıdaki sonuçtan simetrik, lokal simetriği kapsar[1].

Örnek 1.1.1:

1. R^m simetriktir, her p noktası için harita $p + x - p - x$ bir izometridir.

2. S^m küresi simetriktir, her p için p ve –p aracılığıyla R^{m+1} de, S^m genel öklidyen anlamda dizi çevresinde simetriktir.

3. Gerçekte her bağlantılı hiperkuadrik, simetriktir[1].

Tanım 1.1.16: *M* n$\geq$2 boyutlu C^∞sınıfından bağlantılı bir Riemann manifoldu olsun. *M* üzerinde tanımlı (0,2)-tipinde bir simetrik tensör alanı A olmak üzere Λ_A endomorfizmi

$$\Lambda_A : \quad \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M) \tag{1.11}$$

$$(X \Lambda_A Y)Z = A(Y,Z)X - A(X,Z)Y \tag{1.12}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer *A=g* alınırsa son denklem

$$(X \Lambda_g Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y \tag{1.13}$$

biçimine indirgenir.Bundan sonra $(X \Lambda_g Y)$ yerine kısaca $X \Lambda Y$ kullanılacaktır[2].

M üzerinde $(0,k)$-tipinde $(k\geq 1)$ bir T tensör alanı ve $(0,2)$-tipinde bir simetrik A tensör alanı verildiğinde $R.T$ ve $Q(A,T)$ tensörleri sırası ile ;

$$(R.T)(X_1,X_2,...,X_k;X,Y)= -T(R(X,Y)X_1,X_2,...,X_k)-...$$

$$-T(X_1,X_2,...,R(X,Y)X_k) \tag{1.14}$$

ve

$$Q(A,T)(X_1,X_2,...,X_k;X,Y)=-T((X\Lambda_A Y)X_1,X_2,...,X_k)-...$$

$$-T(X_1,X_2,...,(X\Lambda_A Y)X_k) \tag{1.15}$$

biçiminde tanımlanır [3].

Böylece (1.14) ve (1.15) denklemlerinde $T=R$ ve $A=g$ alndığında

$$(R.R)\ (X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-R(R(X,Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-...$$

$$-R(X_1,X_2,\ X_3,R(X,Y)X_4) \tag{1.16}$$

$$Q(g,R)\ (X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-R((X\Lambda_g Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-...$$

$$-R(X_1,X_2,\ X_3,R(X\Lambda_g Y)X_4) \tag{1.17}$$

$T=R$ ve $A=g$ alındığında

$$(R.C)\ (X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-C(R(X,Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-...$$

$$-C(X_1,X_2,\ X_3,R(X,Y)X_4) \tag{1.18}$$

$$Q(g,C)\ (X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-C((X\Lambda_g Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-...$$

$$-C(X_1,X_2,X_3,R(X\Lambda_g Y)X_4) \tag{1.19}$$

$T=S$ ve $A=g$ alındığında

$$(R.S)\ (X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-S(R(X,Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-...$$

$$-S(X_1,X_2,X_3,R(X,Y)X_4) \tag{1.20}$$

$$Q(g,C)\ (X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-C((X\Lambda_g Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-\ldots$$

$$-C(X_1,X_2,X_3,R(X\Lambda_g Y)X_4) \tag{1.21}$$

ve ayrıca $A=S,\ T=R$ için (1.15) denkleminden ,

$$Q(S,R)\ (X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-R((X\Lambda_S Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-\ldots$$

$$-R(X_1,X_2,X_3,R(X\Lambda_S Y)X_4) \tag{1.22}$$

olarak elde edilir. Eğer M nin her p noktası için bundan başka ,

Eğer $R.R=0$ ise M ye semisimetriktir denir[4].

Eğer $R.S=0$ ise M ye Ricci-semisimetriktir denir[4].

Eğer $R.C=0$ ise M ye Weyl-semisimetriktir denir[4].

Tanım1.1.17: $n\geq 3$ boyutlu bir *(M,g)* Riemann manifoldu için eğer M nin her noktasında *R.R* ve *Q(g,R)* tensörleri lineer bağımlı ise M ye pseudosimetriktir denir.

Yani , M'nin pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart,

$$_R = \{ p\in M : q(g,r)\neq 0\}$$

kümesi üzerinde $R = L_R Q(g,R)$ olmasıdır. L_R , U_R üzerine bir fonksiyondur.

Tanım1.1.18: $n\geq 3$ boyutlu bir *(M,g)* Riemann manifoldu için eğer M nin her noktasında *R.S* ve *Q(g,R)* tensörleri lineer bağımlı ise M ye Ricci- pseudosimetriktir manifold denir.

Yani , M'nin Ricci-pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart,

$$U_S = \{ p \quad M : S - \quad \overline{g} \neq 0 \}$$

kümesi üzerinde $S = L_S Q(g,S)$ olmasıdır. L_S , U_S üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.

Tanım1.1.19: $n\geq 4$ boyutlu bir *(M,g)* Riemann manifoldu için eğer M nin her noktasında *R.C* ve *Q(g,C)* tensörleri lineer bağımlı ise M ye Weyl- pseudosimetriktir manifold denir.

Yani , *M*'nin Weyl-pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart

$$U_C = \{p \in M : p \in M \ de\, C \neq 0\}$$

kümesi üzerinde $C = L_C Q(g,C)$ olmasıdır. L_C, U_C üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.

Tanım1.1.20: Eğer *R.R* ve *Q(S,R)* tensörleri lineer bağımlı ise yani *R.R=LQ(S,R)* ise *M* ye Genelleştirilmiş Ricci-pseudosimetriktir denir.

Yukarıda numaralı tanımlarda tanımlanan eğrilik şartları için aşağıdaki kapsama bağıntıları geçerlidir.

$$R.R = 0 \quad R.S = 0$$
$$R.R = 0 \quad R.C = 0$$
$$R.S = 0 \quad R.S = L_S Q(g,S)$$
$$R.R = 0 \quad R.R = L_R Q(g,R)$$
$$R.C = 0 \quad R.C = L_C Q(g,C)$$
$$R.R = L_R Q(g,R) \quad R.S = L_S Q(g,S)$$
$$R.R = L_R Q(g,R) \quad R.C = L_C Q(g,C)$$

Eğer *M* semisimetrik olmayan fakat pseudosimetrik bir manifold ise *M* ye proper pseudosimetrik,Ricci-semisimetrik olmayan fakat Ricci-pseudosimetrik manifold ise *M* ye proper Ricci-pseudosimetrik,Weyl-semisimetrik olmayan fakat Weyl-pseudosimetrik bir manifold ise *M* ye proper Weyl-pseudosimetriktir denir.

1.2. HEMEN HEMEN DEĞME METRİK MANİFOLDLARI

Tanım 1.2.1: *M* bir *(2n+1)*-boyutlu manifold, ϕ, ξ, η da *M* üzerinde, sırası ile, (1,1)-tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve bir 1-form olsun. Eğer ϕ, ξ, η için, *M* üzerinde herhangi bir vektör alanı *X* olmak üzere;

$$\eta(\xi)=1$$

(1.11)

ve

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi \qquad (1.12)$$

özellikleri sağlanıyor ise o zaman (ϕ, ξ, η) ya M üzerinde bir **hemen hemen değme yapısı** denir. M bu yapı ile bir **hemen hemen değme manifoldu** olarak adlandırılır (Yano and Kon, 1984).

Teorem 1.2.1: (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı için;

i) $\phi\xi=0$ (1.13)

ii) $\eta(\phi X)=0$ (1.14)

iii) $rank\ \phi=2n$ (1.15)

dir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.2.2: Hemen hemen değme manifoldu M verilsin. M üzerinde hemen hemen değme yapısı (ϕ, ξ, η) olsun. M üzerinde bir g Riemann metriği;

$$\eta(X)=g(X,\xi)$$

(1.16)

$$g(\phi X,\phi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y) \tag{1.17}$$

şartlarını sağlıyor ise g metriğine M üzerinde **hemen hemen değme metrik,** (ϕ,ξ,η,g) yapısına da **hemen hemen değme metrik yapısı,** (ϕ, ξ, η, g) yapısı ile M ye de **hemen hemen değme metrik manifoldu** denir (Yano and Kon, 1984)

Sonuç 1.2.1: $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifoldu M ile hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) verilsin. Böylece,

$$g(\phi X, Y)=-g(X, \phi Y) \tag{1.18}$$

dir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.2.3: $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M verilsin. Herbir η 1-formu için $\eta\wedge(d\eta)^n \neq 0$ şartı sağlanır ise η ya M nin **değme yapısı** ve M ye de **değme manifoldu** denir (Yano and Kon, 1984).

Teorem 1.2.2: $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M verilsin. M nin bir değme yapısı η verildiğinde;

$$g(X, \phi Y) = d\eta(X, Y)$$

(1.19)

olacak şekilde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) vardır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.2.4: M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) için;

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y)$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) nın **2.temel formu** denir (Yano and Kon, 1984).

1.3. HEMEN HEMEN DEĞME MANİFOLDLARIN TORSİON TENSÖRÜ

Tanım 1.3.1: V bir reel vektör uzayı olmak üzere;

$$J : V \longrightarrow V$$

lineer dönüşümü;

$$J^2 = -I$$

şartını sağlıyor ise J ye V üzerinde bir **kompleks yapı** denir.

$(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M verilsin. Bu manifold üzerinde hemen hemen değme yapısı (ϕ, ξ, η) olsun. Reel bir doğruyu R ile göstererek $M\times R$ çarpım manifoldunu gözönüne alalım. $M\times R$ üzerinde herhangi bir vektör alanı;

$$(X, f\frac{d}{dt})$$

şeklindedir. Burada X, M ye teğet bir vektör alanı, t R nin bir koordinatı ve f $M\times R$ üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.

$M\times R$ nin tanjant uzayındaki bir J lineer dönüşümü;

$$J\,(X, f\frac{d}{dt}) = (\phi X) - f.\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}) \qquad (1.20)$$

ile tanımlanır (Yano and Kon, 1984).

Sonuç 1.3.1: Yukarıdaki şekilde tanımlanan J dönüşümü $M\times R$ üzerinde bir **hemen hemen kompleks yapı** dır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.3.2: M bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere M üzerinde (1,1)-tipinde bir tensör alanı F olsun. $\forall X, Y\in\chi(M)$ için;

$$N_F(X,Y)=F^2[X,Y]+[FX,FY]-F[FX,Y]-F[X,FY]$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alanına F nin **Nijenhuis torsion tensörü** denir.

$F=J$ hemen hemen kompleks yapı olması halinde de,

$$N_J(X,Y)=J^2[X,Y]+[JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY]$$

$$=-[X,Y]+[JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY] \qquad (1.21)$$

dir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.3.3: Hemen hemen kompleks manifoldu (M, J) verilsin. $N_J = 0$ ise J dönüşümüne **integrallenebilirdir** denir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.3.4: Eğer $M\times R$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısına **normaldir** denir (Yano and Kon, 1984).

Örnek 1.3.1: E^4 Kaehler manifoldunun 3-boyutlu bir reel hiperküresi S^3 olsun. E^4 de S^3 ün bir birim normali C olmak üzere E^4 ün hemen hemen kompleks tensör alanı J

$$J : E^4 \longrightarrow E^4$$

$$JC=-\xi$$

biçiminde tanımlansın. O zaman ξ, S^3 üzerinde bir birim vektör alanı olur. Yani $\xi\in\chi(S^3)$ dir. S^3 e teğet her bir X vektör alanı için $\eta(X)=g(X,\xi)$ olmak üzere η 1-formu iyi tanımlıdır. Üstelik $\eta(\xi)=1$ dir. Diğer yandan,

$$JX=\phi X+\eta(X)C$$

eşitliği ile ϕ lineer dönüşümünü tanımlayalım. Buna göre $\forall p=(p_1, p_2, p_3, p_4)\in S^3$ için;

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yapısı yardımı ile;

$$J(C(p))=J(p_1, p_2, p_3, p_4) =(-p_3, -p_4, p_1, p_2)= - \xi$$

elde edilir (Yano and Kon, 1984). Burada;

$$\xi = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

dir.

Şimdi $g(X, \xi)\xi$ için;

$$g(X, \xi)\xi = < \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$g(X, \xi)\xi = (x_1 p_3 + x_2 p_4 - x_3 p_1 - x_4 p_2) \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece;

$$\lambda=(x_1 p_3 + x_2 p_4 - x_3 p_1 - x_4 p_2)$$

olmak üzere;

$$g(X,\xi)\xi=\lambda\xi$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca,

$$\phi(\phi X)=J(\phi X)-\eta(\phi X)C$$

$$\phi(\phi X)=J(JX-\eta(X)C)-\eta(JX-\eta(X)C)C$$

$$=J(\begin{bmatrix}-x_3\\-x_4\\x_1\\x_2\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{bmatrix})-g(JX-\eta(X)C,\xi)C$$

$$=\begin{bmatrix}-x_1+\lambda p_3\\-x_2+\lambda p_4\\-x_3-\lambda p_1\\-x_4-\lambda p_2\end{bmatrix}-<\begin{bmatrix}-x_3-\lambda p_1\\-x_4-\lambda p_2\\-x_1-\lambda p_3\\-x_2-\lambda p_4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}p_3\\p_4\\-p_1\\-p_2\end{bmatrix}>\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-x_1\\-x_2\\-x_3\\-x_4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\lambda p_3-\left[(x_3-\lambda p_1)p_3+(x_4-\lambda p_2)p_4+(x_1+\lambda p_3)p_1+(x_2+\lambda p_4)p_2\right]p_1\\-\lambda p_4-\left[(x_3-\lambda p_1)p_3+(x_4-\lambda p_2)p_4+(x_1+\lambda p_3)p_1+(x_2+\lambda p_4)p_2\right]p_2\\-\lambda p_1-\left[(x_3-\lambda p_1)p_3+(x_4-\lambda p_2)p_4+(x_1+\lambda p_3)p_1+(x_2+\lambda p_4)p_2\right]p_3\\-\lambda p_2-\left[(x_3-\lambda p_1)p_3+(x_4-\lambda p_2)p_4+(x_1+\lambda p_3)p_1+(x_2+\lambda p_4)p_2\right]p_4\end{bmatrix}$$

dir. O zaman

$$\phi(\phi X)=-\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}p_3\\p_4\\-p_1\\-p_2\end{bmatrix}$$

olduğundan,

$$\phi^2X=-X+\eta(X)\xi$$

elde edilir. Bununla birlikte,

$$\phi\xi=J\xi-\eta(\xi)C$$

olduğundan,

$$\phi\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = 0$$

bulunur. Böylece;

$\eta(\phi X)=g(\phi X, \xi)$

$= g(JX-\eta(X)C, \xi) = 0$olduğu da açıkça görülebilir.

Sonuç olarak (ϕ, ξ, η, g) yapısı S^3 üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı oluşturur.

1.4. K-DEĞME MANİFOLDLARI

Tanım 1.4.1: M diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere;

$$\varphi : R\times M \xrightarrow{C^\infty} M$$

$$(t, p) \longrightarrow \varphi_t(p)$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyor ise φ ye M nin **diferensiyellenebilir bir 1-parametreli grubu** adı verilir.

i) $\forall t\in R$ için

$$\varphi_t : M \longrightarrow M$$

$$p \longrightarrow \varphi_t(p) \quad \text{bir diffeomorfizm}$$

ii) $\forall t,\ s\in R$ ve $p\in M$ için

$$\varphi_{t+s}(p) = \varphi_t(\varphi_s(p))$$

dir (Kobayashi and Nomizu, 1963).

Tanım 1.4.2: M üzerinde bir vektör alanı X ve φ_t ise X ile genelleştirilmiş lokal dönüşümlü bir 1-parametreli grubu olsun. X vektör alanına göre bir K tensör alanının X yönünde $L_X K$ **Lie türevi,**

$$(L_X K)_X = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,[K_X - (\varphi_t K)_X]$$

şeklinde tanımlanır (Kobayashi and Nomizu, 1963).

Tanım 1.4.3: M Riemann metriği g olan bir Riemann manifoldu ve M üzerinde bir vektör alanı X verilsin. M nin her bir noktasının bir komşuluğunda X ile meydana gelen lokal dönüşümlerin lokal 1-parametreli grubu lokal izometrilerden oluşuyor ise X vektör alanı **Killing vektör alanı** adı verilir. Böylece X bir Killing vektör alanıdır $\Leftrightarrow$ $L_X g = 0$ dır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.4.4: Değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan $(2n+1)$-boyutlu bir M manifoldu **değme metrik manifold** olarak adlandırılır (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.4.5: $(2n+1)$-boyutlu değme metrik manifoldu M verilsin. Eğer (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısında verilen ξ vektör alanı g ye göre bir Killing vektör alanı ise o zaman M üzerinde değme yapı **K-değme yapısı** ve M ye de **K-değme manifoldu** adı verilir (Yano and Kon, 1984).

Önerme 1.4.1: Bir değme metrik manifoldu M olsun. O zaman M bir K-değme manifoldudur $\Leftrightarrow$

$$\nabla_X \xi = -\phi X \tag{1.22}$$

dir (Yano and Kon, 1984).

Teorem 1.4.1: $(2n+1)$-boyutlu bir Riemann manifoldu M nin bir K-değme manifoldu olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır.

i) M bir ξ birim Killing vektör alanına sahiptir.

ii) M nin her bir noktasında ξ yı kapsayan düzlem kesitleri için kesitsel eğriliği 1 e eşittir (Yano and Kon, 1984).

1.5. SASAKİAN MANİFOLDLAR

Tanım 1.5.1: M, değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan $(2n+1)$-boyutlu bir değme metrik manifoldu olsun. **Eğer *M* nin değme metrik yapısı normal ise, *M* Sasakian yapıya sahiptir** denir. Bazan Sasakian manifold **normal değme metrik manifold** olarak da adlandırılır (Yano and Kon, 1984).

Teorem 1.5.1: M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) bir Sasakian yapıdır $\Leftrightarrow$ $\forall X, Y \in \chi(M)$ için;

$$(\nabla_X \phi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X \tag{1.23}$$

dir (Yano and Kon, 1984). Burada;

$$\nabla_X(\phi Y) = (\nabla_X \phi)Y + \phi \nabla_X Y$$

dir.

Sonuç 1.5.1: M bir Sasakian manifold ise M nin bir Riemann eğrilik tensörü R olmak üzere;

$$R(X,Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y \tag{1.24}$$

dir (Yano and Kon, 1984).

Teorem 1.5.2: M $(2n+1)$-boyutlu bir Riemann manifoldu olmak üzere M üzerinde bir birim Killing vektör alanı ξ verilsin. Ayrıca M nin eğrilik tensörü R olmak üzere M Sasakian manifolddur $\Leftrightarrow$

$$R(X, \xi)Y = -g(X, Y)\xi + \eta(Y)X \tag{1.25}$$

dir (Yano and Kon, 1984).

Uyarı : Bir Sasakian manifoldu bir K-değme manifolddur fakat tersi sadece boy $M = 3$ olması halinde geçerlidir (Yano and Kon, 1984).

Sonuç 1.5.2: M bir Sasakian manifold olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve ξ bir birim Killing vektör alanı olmak üzere;

$$R(X, \xi)Y = -(\nabla_X \phi)Y \tag{1.26}$$

dir (Yano and Kon, 1984).

Sonuç 1.5.3: M, değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan $(2n+1)$-boyutlu bir Sasakian manifold olsun. Bu takdirde;

$$R(X, Y)\phi Z = \phi R(X, Y)Z + g(\phi X, Z)Y - g(Y, Z)\phi X$$
$$+g(X, Z)\phi Y - g(\phi Y, Z)X \tag{1.27}$$

dır (Yano and Kon, 1984).

Sonuç 1.5.4: M bir Sasakian manifold olmak üzere;

$$R(X, Y)Z = -\phi R(X, Y)\phi Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$
$$-g(\phi Y, Z)\phi X + g(\phi X, Z)\phi Y \tag{1.28}$$

dır (Yano and Kon, 1984).

1.6.*M(c)* SASAKİAN UZAY FORMU

Önerme 1.6.1: (M, g) Riemann manifoldu sabit k eğrilikli bir manifold olsun. O zaman $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için;

$$R(X, Y)Z = k(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) \tag{1.29}$$

dir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.6.1: M bir Sasakian manifold olsun. Böylece $p \in M$ deki T_pM tanjant uzayında ξ ya dik bir X birim vektörü $\{X, \phi X\}$ ortonormal olacak şekilde var ise $\{X, \phi X\}$ düzlemine T_pM nin **ϕ–kesitseli** denir. Ayrıca,

$$K(X, \phi X) = g(R(X, \phi X)\phi X, X)$$

şeklinde tanımlanan ifadeye M nin bir **ϕ–kesitsel eğriliği** adı verilir (Yano and Kon, 1984).

Tanım 1.6.2: *M* bir Sasakian manifold olmak üzere *M* nin ϕ–kesitsel eğriliği *c=sbt* ise *M* bir **Sasakian uzay formu** olarak adlandırılır ve *M(c)* şeklinde gösterilir (Verstraelen ve Vrancken, 1988).

Teorem 1.6.1: *M(c)* Sasakian uzay formunun *R* eğrilik tensörü; $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z = {} & \frac{1}{4}(c+3)[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \\ & -\frac{1}{4}(c-1)[\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X \\ & +g(X, Z)\eta(Y)\xi - g(Y, Z)\eta(X)\xi \\ & +g(\phi Y, Z)\phi X - g(\phi X, Z)\phi Y + 2g(\phi X, Y)\phi Z] \end{aligned} \tag{1.30}$$

dir (Yano and Kon, 1984).

2. BİR NULLİTY ŞARTINI SAĞLAYAN DEĞME METRİK MANİFOLDLAR

Tanım 2.1.1: (M, g) bir Riemann manifoldu ve M nin eğrilik tensör alanı R olsun. $p\in M$ için;

$$E_{0p} = \{X\in T_pM : R(X, Y)Z = 0, \ \forall Y, Z \in T_pM\}$$

uzayına R eğrilik tensörünün **sıfırlık (nullity) vektör uzayı** adı verilir (Boeckx, et al, 1996).

Tanım 2.1.2: (M, ϕ, ξ, η, g) $(2n+1)$-boyutlu bir değme metrik manifold olmak üzere. L ve R, sırası ile, Lie türevi ve eğrilik tensörü olsun. Böylece;

$$l: \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$X \longrightarrow lX = R(X, \xi)\xi \tag{2.1}$$

ve

$$h: \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$X \longrightarrow \quad hX = \frac{1}{2}(L_\xi\phi)X \tag{2.2}$$

biçiminde tanımlanan l ve h lineer dönüşümleri self-adjoint tir (Blair, et al., 1995).

Önerme 2.1.1: Tanım 2.1.1 de tanımlanan h ve l tensörleri aşağıdaki özellikleri sağlarlar (Blair, et al., 1995).

i) $h\xi=0,$ (2.3)

ii) $l\xi = 0,$ (2.4)

iii) $izh = izh\phi = 0,$ (2.5)

iv) $h\phi = -\phi h.$ (2.6)

Açıklama: Önerme 2.1.1. den de görüldüğü gibi h, ϕ ile anti-komutatif olduğundan, h nın λ özdeğerine karşılık gelen özvektörü X ise, $-\lambda$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü ϕX dir. Böylece h lineer dönüşümüne karşılık gelen matris formu aşağıdaki gibidir.

$$h = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \lambda_n & & & & \\ & & & & -\lambda_1 & & & \\ & & & & & -\lambda_2 & & \\ & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & -\lambda_n & \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Burada, $\lambda_i = \sqrt{1-k}$, $1 \leq i \leq$ n dir (Tanno, 1988).

Önerme 2.1.2: $M^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ bir değme metrik manifoldunda g ye göre ∇ Riemann koneksiyonu;

i) $\nabla_X \xi = -\phi X - \phi h X,$ (2.7)

ii) $\nabla_\xi \phi = 0,$ (2.8)

iii) $\phi l \phi - l = 2(h^2 + \phi^2),$ (2.9)

iv) $\nabla_\xi h = \phi - \phi l - \phi h^2,$ (2.10)

v) $g(R(\xi,X)Y,Z) = g((\nabla_X\phi)Y,Z) + g((\nabla_Z\phi h)Y - (\nabla_Y\phi h)Z, X),$ (2.11)

vi) $2(\nabla_{hX}\phi)Y = -R(\xi,X)Y - \phi R(\xi,X)\,\phi Y + \phi\, R(\xi,\phi X)\,Y - R(\xi,\phi X)\,\phi Y$

$+ 2g(X + hX, Y)\,\xi - 2\eta(Y)(X + hX).$ (2.12)

özelliklerini sağlar (Blair, et.al., 1995).

$(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir değme metrik manifoldu olsun.

$$\tilde{\eta} = \eta, \qquad \tilde{\xi} = \frac{1}{a}\xi, \qquad \tilde{\phi} = \phi, \qquad \tilde{g} = ag + a(a-1)\eta \otimes \eta \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlanan yeni yapı tensörlerini göz önüne alalım. Bu şekildeki yapıya **D_a-homotetik bozulma** adı verilir. Burada a pozitif sabittir. Böylece $M^{2n+1}(\tilde{\phi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$ da bir değme metrik manifolddur (Blair, et.al., 1995).

Sonuç 2.1.1: $(M^{2n+1}\phi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ bir değme metrik manifoldunda D_a-homotetik bozulma oluştuğunda;

i) $\widetilde{h} = \dfrac{1}{a}h$ (2.14)

ii)

$$
\begin{aligned}
a\widetilde{R}(X,Y)\widetilde{\xi} &= R(X,Y)\xi \\
&\quad -(a-1)\left[(\nabla_X\phi)Y-(\nabla_Y\phi)X+\eta(X)(Y+hY)-\eta(Y)(X+hX)\right] \\
&\quad +(a-1)^2\left[\eta(Y)X-\eta(X)Y\right]
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

dir (Blair, et.al., 1995).

Diğer taraftan bir flat Riemann manifoldun tanjant küre demeti $R(X,Y)\xi = 0$ şartını sağlayan değme metrik yapıya sahiptir (Blair, 1976). Ayrıca (Olszak, 1979) ve (Tanno, 1988) dan $R(X,Y)\xi = 0$ şartını sağlayan bir değme metrik manifoldu için;

$$(\nabla_X\phi)Y = g(X + hX, Y)\xi - \eta(Y)(X + hX) \tag{2.16}$$

eşitliği vardır.

$(M^{2n+1}\phi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ manifoldu $R(X,Y)\xi = 0$ şartını sağlayan bir değme metrik manifoldu olsun. (2.13) ve (2.16) denklemlerini kullanarak (2.15) denkleminden;

$$\widetilde{R}(X,Y)\widetilde{\xi} = \frac{a^2-1}{a^2}(\widetilde{\eta}(Y)X-\widetilde{\eta}(X)Y)+\frac{2(a-1)}{a}(\widetilde{\eta}(Y)\widetilde{h}X-\widetilde{\eta}(X)\widetilde{h}Y)$$

elde edilir (Blair, et.al., 1995). Bu eşitlik bize,

$$R(X,Y)\xi = k(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + \mu(\eta(Y)hX - \eta(X)hY) \tag{2.17}$$

şartını sağlayan değme manifoldlar için bir sınıflandırma problemini ortaya çıkarır. Daha genel bir ifade ile (2.17) eşitliği D_a-homotetik bozulma altında invaryant kalır (Blair, et.al., 1995).

Tanım 2.1.3: Bir $(M^{2n+1},\phi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ değme metrik manifoldunun (k,μ)-nullity distribüsyonu;

$$N(k,\mu): p \rightarrow N_p(k,\mu) = \{Z \in T_pM \,/\, R(X,\ Y)Z = k\ [g(Y,\ Z)X - g(X,\ Z)Y]$$

$$+ \ \mu\, [g(Y, Z)hX - g(X, Z)hY]\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $(k, \mu) \in R^2$ dir (Blair, et.al., 1995).

Yardımcı Teorem 2.1.1: (k, μ)-nullity distribüsyonuna ait bir ξ vektör alanı ile birlikte (M, ϕ, ξ, η, g) değme metrik manifoldu olsun. O zaman; $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $k, \mu \in R$ olmak üzere,

$$i)(\nabla_x h)Y = [(1-k)g(x,\phi Y) - g(x, h\phi Y)]\xi + \eta(Y)h(\phi X + \phi hX) - \mu\eta(X)\phi hY, \quad (2.18)$$

$$ii) Q\xi = 2nk\xi, \quad (2.19)$$

$$iii) Q\phi - \phi Q = 2(2(n-1)+\mu)h\phi \quad (2.20)$$

dir.(Blair,et al.1995)

Yardımcı Teorem 2.1.2: (k, μ)-nullity distribüsyonuna ait bir ξ vektör alanı ile birlikte (M, ϕ, ξ, η, g) $(2n+1)$-boyutlu değme metrik manifoldu olsun. O zaman $X, Y \in \chi(M)$ de vektör alanları olmak üzere;

i) $[l\phi - \phi l] = 2\mu h\phi,$ (2.21)

ii) $h^2 = (k-1)\phi^2$, $k \leq 1$ ve $k=1$ ancak ve ancak M^{2n+1} Sasakiandır. (2.22)

iii) $R(\xi,X)Y = k(g(X,Y)\,\xi - \eta(Y)X) + \mu(g(hX,Y)\,\xi - \eta(Y)hX),$ (2.23)

iv) $(\nabla_X\phi)Y = g(X + hX, Y)\,\xi - \eta(Y)X)(X + hX),$ (2.24)

v) $(\nabla_X h)Y - (\nabla_Y h)X = (1-k)[2g(X, \phi Y)\,\xi + \eta(X)\,\phi Y - \eta(Y)\,\phi X]$

$$+ (1-\mu)[\eta(X)\,\phi hY - \eta(Y)\,\phi hX] \quad (2.25)$$

dir (Blair, et.al., 1995).

Yardımcı Teorem 2.1.3: (k, μ)-nullity distribüsyonuna ait bir ξ vektör alanı ile birlikte (M, ϕ, ξ, η, g) $(2n+1)$-boyutlu değme metrik manifoldu olsun. Bu takdirde $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ vektör alanları için;

$$R(X,Y)\phi Z - \phi R(X,Y)Z = \{(1-k)[\eta(X)\,g(\phi Y,Z) - \eta(Y)\,g(\phi X,Z)]$$
$$+(1-\mu)[\eta(X)\,g(\phi hY,Z) - \eta(Y)\,g(\phi hX,Z)]\}\,\xi$$
$$-g(Y+hY,Z)\,(\phi X+\phi hX) + g(X+hX,Z)\,(\phi Y+\phi hY)$$
$$-g(\phi Y+\phi hY,Z)\,(X+hX) + g(\phi X+\phi hX,Z)\,(Y+hY)$$
$$-\eta(Z)\{(1-k)[\eta(X)\,\phi Y - \eta(Y)\,\phi X]$$
$$+(1-\mu)[\eta(X)\phi hY - \eta(Y)\phi hX]\} \tag{2.26}$$

dir (Blair, et.al., 1995).

Yardımcı Teorem 2.1.4: (k, μ)-nullity distribüsyonuna ait bir ξ vektör alanı ile birlikte (M, ϕ, ξ, η, g) $(2n+1)$-boyutlu değme metrik manifoldu olsun. Bu takdirde $\forall\, X, Y, Z, W \in \chi(M)$ vektör alanları için;

$$g(\phi R(\phi X,\phi Y)Z,\phi W) = g(R(X,Y)Z,W)$$
$$+\eta(Y)\{(1-k)[\eta(Z)\,g(W,X) - \eta(W)\,g(Z,X)]$$
$$+(1-\mu)[\eta(Z)\,g(hW,X) - \eta(W)\,g(hZ,X)]\}$$
$$+\eta(X)\{(1-k)[\eta(Z)\,g(W,Y) - \eta(W)\,g(Z,Y)]$$
$$+(1-\mu)[\eta(Z)\,g(hW,Y) - \eta(W)\,g(hZ,Y)]\}$$
$$+g(X,\phi Z+\phi hZ)\,g(W+hW,\phi Y)$$
$$-g(X,\phi W+\phi hW)\,g(Z+hZ,\phi Y)$$
$$-g(X,W+hW)\,g(Z+hZ,Y)$$
$$+g(X,Z+hZ)\,g(W+hW,Y) \tag{2.27}$$

dir (Blair, et.al., 1995).

Yardımcı Teorem 2.1.5: (k, μ)-nullity distribüsyonuna ait bir ξ vektör alanı ile birlikte (M, ϕ, ξ, η, g) $(2n+1)$-boyutlu değme metrik manifoldu olsun. Bu takdirde $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ vektör alanları için;

$$
\begin{aligned}
\phi R(\phi X, \phi Y)\phi Z + R(X, Y)Z = \eta(X)\{k[g(Y, Z)\xi - \eta(Z)Y] \\
+ (2-\mu)[\eta(Z)hY - g(hZ, Y)\xi]\} \\
- \eta(Y)\{k[g(X, Z)\xi - \eta(Z)X] \\
+ (2-\mu)[\eta(Z)hX - g(hZ, X)\xi]\} \\
+ 2\{g(Y, Z)hX + g(hZ, Y)X \\
- g(Z, X)hY - g(hZ, X)Y\}
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

dir (Blair, et.al., 1995).

Tanım 2.1.4 : Bir M değme metrik manifoldu için;

$$Q = aId + b\eta\otimes\xi \tag{2.29}$$

eşitliği var ise **η-Einstein** olarak adlandırılır. Burada Q Ricci operatörü, a ve b M üzerinde C^{∞} fonksiyonlardır (Papantinuo, 1992).

Yardımcı Teorem 2.1.6: (M, η, ξ, ϕ, g) $(2n+1)$-boyutlu (k, μ)-değme metrik manifoldu olsun $(n > 1)$. M nin her bir noktasının ϕ-kesitsel eğriliği her noktadaki ϕ-kesitselin seçiminden bağımsız ise o zaman ϕ-kesitsel eğriliği M üzerinde sabittir ve eğrilik tensörü;

$$
\begin{aligned}
g(\widetilde{R}(X, Y)Z, W) = \frac{1}{4}(c+3)\{g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)\} \\
+ \frac{c+3-4k}{4}\{\eta(X)\eta(Z)g(Y, W) - \eta(Y)\eta(Z)g(X, W) \\
+ \eta(Y)\eta(W)g(X, Z) - \eta(X)\eta(W)g(Y, Z)\} \\
+ \frac{c-1}{4}\{2g(X, \phi Y)g(\phi Z, W) + g(X, \phi Z)g(\phi Y, W) - g(Y, \phi Z)g(\phi X, W)\}
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1}{2}\{g(\widetilde{h}X, Z)g(\widetilde{h}Y, W) - g(\widetilde{h}Y, Z)g(\widetilde{h}X, W) + 2g(X, Z)g(\widetilde{h}Y, W)$$

$$-2g(Y, Z)g(\widetilde{h}X, W) - 2\eta(X)\eta(Z)g(\widetilde{h}Y, W) + 2\eta(Y)\eta(Z)g(\widetilde{h}X, W)$$

$$+2g(\widetilde{h}X, Z)g(Y, W) - 2g(\widetilde{h}Y, Z)g(X, W) + 2g(\widetilde{h}Y, Z)\eta(X)\eta(W)$$

$$-2g(\widetilde{h}X, Z)\eta(Y)\eta(W) - g(\phi\widetilde{h}X, Z)g(\phi\widetilde{h}Y, W) + g(\phi\widetilde{h}Y, Z)g(\phi\widetilde{h}X, W)\}$$

$$+\mu\{\eta(Y)\eta(Z)g(\widetilde{h}X, W) - \eta(X)\eta(Z)g(\widetilde{h}Y, W)$$

$$+\eta(X)\eta(W)g(\widetilde{h}Y, Z) - \eta(Y)\eta(W)g(\widetilde{h}X, Z)\} \tag{2.30}$$

dir (Koufogiorgos, 1996). Daha fazlası, eğer $k \neq 1$ ise $\mu = k + 1$ ve $c = -2k-1$ dir.

Önerme 2.1.3: ξ karekteristik vektör alanı (k, μ)-nullity distribüsyonuna ait ise

$$R(X\ Y)\xi = k[\eta(Y)X - \eta(X)Y] + \mu[\eta(Y)hX - \eta(X)hY] \tag{2.31}$$

dir (Blair, et al., 1995).

Teorem 2.1.1: (M, ϕ, ξ, η, g) $(2n+1)$-boyutlu bir değme metrik manifold olmak üzere $\forall$ $X, Y \in \chi(M)$ vektör alanları için $R(X, Y)\xi = 0$ şartı sağlanır ise lokal olarak $M^{2n+1} = E^{n+1}(0) \times S^n(4)$ dir (Blair, 1976).

Yardımcı Teorem 2.1.7: (k, μ)-nullity distribüsyonuna ait bir ξ vektör alanı ile birlikte (M, ϕ, ξ, η, g) $(2n+1)$-boyutlu değme metrik manifoldunda Q Ricci operatörü $\forall X \in \chi(M)$ için $k<1$ olmak üzere;

$$QX = [2(n-1)-n\mu]X + [2(n-1) + \mu]hX + [2(1-n) + n(2k+\mu)]\eta(X)\xi, \quad n \geq 1 \tag{2.32}$$

ile verilir (Blair, et al., 1995).

Teorem 2.1.2: (M, ϕ, ξ, η, g) aşağıdaki şartlarla verilen $(2n+1)$-boyutlu bir değme metrik manifold olsun. Eğer,

i) $C(\xi, X) . S = 0,$

ii) $R(X\,Y)\xi = k[\eta(Y)X - \eta(X)Y] + \mu[\eta(Y)hX - \eta(X)hY]\,,\ \forall (k,\mu) \in R^2$

şartları sağlanıyor ise M değme metrik manifoldu ya

i) $E^{n+1}(0) \times S^n(4)$ e lokal izometriktir veya,

ii) Bir η-Einstein manifoldu

dur (Murathan veYıldız, 2000).

Tanım 2.1.5: (M, g) basit bağlantılı bir Riemann manifoldu olsun. $\forall x \in M$ için;

$$S_x : M \longrightarrow M$$

dönüşümü için,

$$\begin{aligned} (S_x)_* : T_xM &\xrightarrow{\text{izometrik}} T_{S(x)}M \\ V &\longrightarrow -V \end{aligned}$$

olacak şekilde türev dönüşümü var ise (M, g) bir simetrik uzaydır (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.3: (M, g) simetrik uzay ise $\nabla R=0$ dır (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.4: $\nabla R=0$ ise $R.R=0$ dır (O'Neill, 1983).

3.1. DEĞME METRİK MANİFOLDLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ *C*- BOCHNER EĞRİLİK TENSÖRÜ

Bu bölümde ilk olarak (k,μ)–nullity dağılımından elde edilen *N(k)*-değme metrik manifoldu tanımlanmıştır.Daha sonra değme metrik manifoldlar üzerinde tanımlanan Genelleştirilmiş *C*-Bochner eğrilik tensörü verilerek,bu tensör yardımı ile *N(k)*-değme metrik manifoldu üzerinde bazı eğrilik şartları verilmiştir.

[5] de Blair,Koufogiorgos ve Papantoniou (ϕ, ξ, η, g) değme metrik yapısı ile bir M değme metrik manifoldu üzerinde yeni bir sınıf tanımlamışlardır. *M* nin eğrilik tensörü *R,*

$$R(X,Y)\xi = (kI+\mu h)\, R_o(X,Y)\xi \qquad X, Y \in TM$$

eşitliğini sağlar. Burada $(k,\mu)\in R^2$, $h=\frac{1}{2}(L_\xi\phi)$ ve R_0 tensörü

$$R_o(X,Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y \quad X,Y,Z \in TM$$

ile verilir.

Tanım 3.1 : (k,μ) sınıfına ait bir değme Riemannian manifold bir (k,μ)-manifold olarak adlandırırlır.

Sasakian olmayan (k,μ)-manifoldların karakteristik örnekleri bire eşit olmayan sabit kesit eğrilikli Riemannian manifoldların tanjant küre demetidir.

Diğer yandan Bochner eğrilik tensörü olarak bilinen ve tamamen biçimsel olarak düşünülen Weyl conformal eğrilik tensörünün bir Kaehler benzeri S.Bochner tarafından tanıtılmıştır. Bochner eğrilik tensörünün geometrik anlamı D. Blair [6] tarafından verilmiştir.Boothby-Wang fibrasyonu kullanılarak [7] M.Matsumoto ve G.Chuman, Bochner eğrilik tensöründen *C*-Bochner eğrilik tensörünü elde etmişlerdir. Ayrıca bir Sasakian manifoldda *C*-Bochner eğrilik tensörünü tanımlayarak çeşitli özelliklerine çalışmışlardır.

[5] de *M* nin değme metrik manifoldu üzerinde (k,μ) -nullity koşulunu ele alındı. Bir *M* değme manifoldunun (k,μ) – nullity dağılımı $(k,\mu) \in R^2$ ve $k\leq 1$ olmak üzere her $X, Y \in TM$ için bir

$N(k, \mu): p \rightarrow Np\ (k,\mu) = \{Z\ \epsilon TpM\ |R(X,Y)Z= (kI+\mu h)\ R_o(X,Y)Z\}$

yazılabilir.

(k,μ) değme metrik manifoldunda *Q* Ricci operatörü olmak üzere;

(2.19) – (2.25) eşitlikleri göz önüne alınarak bir *(k, μ)* – değme metrik manifoldunda aşağıdaki eşitliklerin sağlandığı kolayca görülebilir.

$$trh^2 = 2n(1-k), \tag{3.1}$$

$$S(X,\phi Y) + S(\phi X,Y) = 2(2(n-1)+\mu)g(h\phi X,Y) \tag{3.2}$$

$$S(\phi X,\phi Y) = S(X,Y) - 2nk\eta(X)\eta(Y) - 2(2(n-1)+\mu)g(h,X,Y), \tag{3.3}$$

$$Q\phi + \phi Q = 2\varphi Q + 2(2(n-1)+\mu)h\phi \tag{3.4}$$

$$\phi Q\phi = 2(2(n-1)+\mu)h - Q + 2nk\eta\otimes\xi, \tag{3.5}$$

$$S(\phi X,\xi) = 0 \tag{3.6}$$

$$tr(Q\phi) = tr(\phi Q) = 0. \tag{3.7}$$

Eğer $\mu=0$ ise, *N(k,μ)* – nullity dağılımı

$$N(k): p \rightarrow Np(k) = \{Z \in T_pM : R(X,Y)Z = kR_O(X,Y)Z\}, \tag{3.8}$$

ile tanımlanan bir *M* Riemannian manifoldu *N(k)* ile gösterilen*, k*-nullity dağılımına indirgenir. [15] Burada *k* bir sabittir. *ξ Є N(k)* ise bir *M* değme metrik manifoldu bir *N(k)* – değme metrik manifoldu olarak adlandırılır.Böylece *N(k)*-değme metrik manifoldu (2.17) ve (2.23) denklemlerinden,

$$R(X,Y)\xi = kR_o(X,Y)\xi, \tag{3.9}$$

$$R(\xi,X)Y = kR_0(\xi,X)Y, \tag{3.10}$$

elde edilir. *k=1* ise *N(k)* -değme metrik manifoldu Sasakiandır, *k=0* ise *N(k)*- değme metrik manifoldu $E^{n+1}\ X\ S^n$ *(4)* e lokal olarak izometriktir.

Eğer $k<1$ ise skaler eğrilik $\tau = 2n(2n-2+k)$ dir.

Tanım 3.2: Bir *N(k)*- değme metrik manifoldu *M* olsun.*M* üzerinde Weyl eğrilik tensörü ve Projektif eğrilik tensörü,sırası ile ,

$$C(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{2n-1}\begin{bmatrix} g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY \\ +S(Y,Z)X - S(X,Z)Y \end{bmatrix}$$

$$+\frac{\tau}{2n(2n-1)}\left[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right] \tag{3.11}$$

$$P(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{2n}\left[S(Y,Z)X - S(X,Y)W.\right] \tag{3.12}$$

dir.

Önerme 3.1: Bir *N(k)*-değme metrik manifoldunda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$C(X,Y)\xi = \left[k - \frac{2nk}{2n-1} + \frac{\tau}{2n(2n-1)}\right]\left[\eta(Y)X - \eta(X)Y\right]$$

$$-\frac{1}{2n-1}\left[\eta(Y)QX - \eta(X)QY\right], \tag{3.13}$$

$$C(\xi,Y)\xi = \left[k - \frac{2nk}{2n-1} + \frac{\tau}{2n(2n-1)}\right]\left[\eta(Y)\xi - Y\right]$$

$$-\frac{2nk}{2n-1}\eta(Y)\xi + \frac{1}{2n-1}QY, \tag{3.14}$$

$$\eta(C(X,Y)\xi) = 0, \tag{3.15}$$

$$P(X,Y)\xi = 0, \tag{3.16}$$

Yardımcı Teorem 3.1 Bir M^{2n+1} Sasakian olmayan *(k, μ)*- manifoldunda *Q* Ricci operatörü

$$Q = (2(n-1) - n\mu)I + (2(n-1) + \mu)h + (2(1-n) + n(2k+\mu))\eta \otimes \xi, \tag{3.17}$$

dir. $\forall\ X,Y \in \chi(M)$ için, *S* Ricci tensörü ve τ skaler eğriliği

$$S(X,Y)=\begin{bmatrix}(2(n-1)-n\mu)g(X,Y)+(2(n-1)+\mu)g(hX,Y)\\+(2(1-n)+n(2k+\mu))\eta(Y)\end{bmatrix}, \tag{3.18}$$

$$\tau=2n(2(n-1)+k-n\mu). \tag{3.19}$$

ile verilmiştir. **:** [5]

Teorem 3.1: *$R(X,Y)\xi=0$* ı sağlayan bir M^{2n+1} bağlantılı metrik manifoldu $n>1$ için $E^{n+1}\,X\,S^{n}$ *(4)* e yerel olarak izometriktir ve $n=1$ için flattir. ([5], [9]):

Teorem 3.2: 5 ve 5 ten büyük boyutlu bir *N(k)* -değme metrik manifoldu Einstein ise kesinlikle Sasakiandır. [8]

Tanım 3.3: *a* ve *b* manifold üzerinde düzgün fonksiyonlar olmak üzere *Q* Ricci operatörü

$$Q=aI+b\eta\otimes\xi, \tag{3.20}$$

ifadesini sağlarsa bir *M* değme metrik manifoldunun η – Einstein olduğu söylenir. Özellikle *b=0* ise *M* Einstein manifoldudur.

Shaikh ve Baishya Genelleştirilmiş *C*-Bochner eğrilik tensörünü,

$$\mathrm{B(X,Y)Z}=\begin{bmatrix}
\mathrm{R(X,Y)Z+g(\phi Y,hZ)h\phi X-g(\phi X,hZ)h\phi Y}\\
+\dfrac{1}{\mathrm{m}+4}\left\{\dfrac{\mathrm{m}}{2}+\alpha+\dfrac{\mathrm{trh}^2}{\mathrm{m}+2}\right\}\begin{bmatrix}\mathrm{g(X,Z)\eta(Y)\xi-g(Y,Z)\eta(X)\xi-\eta(Y)\eta(Z)X}\\ +\mathrm{\eta(X)\eta(Z)Y}\end{bmatrix}\\
-\dfrac{1}{\mathrm{m}+4}\left\{\alpha+\mathrm{m}+\dfrac{\mathrm{trh}^2}{\mathrm{m}+2}\right\}\left[\mathrm{g(\phi X,Z)\phi Y-g(\phi Y,Z)\phi X+2g(\phi X,Y)\phi Z}\right]\\
-\dfrac{1}{\mathrm{m}+4}\left\{\alpha-4+\dfrac{\mathrm{trh}^2}{\mathrm{m}+2}\right\}\left[\mathrm{g(X,Z)Y-g(Y,Z)X}\right]+\dfrac{1}{2(\mathrm{m}+4)}\begin{bmatrix}\mathrm{g(X,Z)QY}\\ \mathrm{-g(Y,Z)QX-s(Y,Z)X}\end{bmatrix}\\
\mathrm{+S(X,Z)Y-g(X,Z)\phi Q\phi Y+g(Y,Z)\phi Q\phi X-S(\phi Y,\phi Z)X}\\
\mathrm{+S(\phi X,\phi Z)Y-S(\phi Y,Z)\phi X+S(Y,\phi Z)\phi X+S(\phi X,Z)\phi Y}\\
\mathrm{-S(X,\phi Z)\phi Y+2S(X,\phi Y)\phi Z+g(\phi X,Z)(\phi Q+Q\phi)Y}\\
\mathrm{-g(\varphi Y,Z)(\phi Q+Q\phi)X+2g(\phi X,Y)(\phi Q+Q\phi)Z-\eta(X)\eta(Z)QY}\\
\mathrm{+\eta(Y)\eta(Z)QX+\eta(X)\eta(Z)\phi Q\phi Y-\eta(Y)\eta(Z)\phi Q\phi X}\\
\mathrm{+S(Y,Z)\eta(X)\xi-S(X,Z)\eta(Y)\xi+S(\phi Y,\phi Z)\eta(X)\xi-S(\phi X,\phi Z)\eta(Y)\xi]}
\end{bmatrix}$$

(3.21)

şeklinde tanımlamışlardır. Burada Q Ricci Operatörü, $\alpha = \frac{\tau + m}{m+2}$ ve $m=2n$ dir. Eğer manifold Sasakian ise o zaman $h=0$, $Q\phi = \phi Q$, $trh^2 = 0$ dir.

$$S(\phi X, \phi Y) = S(X,Y) - m\eta(X)\eta(Y)$$

olacağından (3.26) da verilen Genelleştirilmiş *C*-Bochner eğrilik tensörü Matsumato ve Chuman tarafından Sasakian manifold üzerinde tanımlanan Genelleştirilmiş *C*-Bochner eğrilik tensörüne indirgenir.

Önerme 3.2: M^{2n+1} bir değme metrik manifold olsun. *M* de Genelleştirilmiş *C*-Bochner eğrilik tensörü M^{2n+1} deki $\forall$ X,Y,Z vektör alanları için aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$i) B(X,Y)Z = -B(Y,Z)X,$$

$$ii) B(X,Y)Z + B(Y,Z)X + B(Z,X)Y = 0,$$

$$iii) g(B(X,Y)Z,W) = -g(B(X,Y)W,Z),$$

$$iv) g(B(X,Y)Z,W) = g(B(Z,W)X,Y)$$

Önerme 3.3: M^{2n+1} bir değme metrik manifold olsun. *M* de Genelleştirilmiş *C*-Bochner eğrilik tensörü *B* için,

$$B(X,Y)\xi = \left(\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)} I + \mu h\right) R_0(X,Y)\xi, \tag{3.22}$$

$$B(\xi,X)Y = R_0\left(\xi, \left(\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)} I \mu h\right)X\right)Y = -B(X,\xi)Y, \tag{3.23}$$

$$B(\xi,X)\xi = \frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}(\eta(X)\xi - X) - \mu hX = -B(X,\xi)\xi \tag{3.24}$$

$$\eta(B(X,Y)\xi) = 0, \tag{3.25}$$

$$\eta(B(\xi,X)Y) = \frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}(g(X,Y) - \eta(X)) + \mu g(hX,Y) \tag{3.26}$$

3.2. *B (ξ , X). C=0* ‘ı SAĞLAYAN *N (k)*- DEĞME METRİK MANİFOLDLARI

Teorem 3.3: M^{2n+1} *(n>1)* bir *N(k)* değme metrik manifoldu ve M^{2n+1} in Genelleştirilmiş *C*-Bochner eğrilik tensörü *B* olsun. *M* üzerinde *B(ξ, X). C=0* sağlanıyor ise *M* ya Sasakian dır ya da Einstein manifoldudur [10].

İspat: *M* üzerinde *B (ξ, X). C=0* şartı sağlansın.Tanımdan ,

$$(B(\xi,X)C)(Y,Z)W = B(\xi,X)C(Y,Z)W - C(B(\xi,X)Y,Z$$

$$-C(Y,B(\xi,X)Z)W - C(Y,Z)B(\xi,X)W$$

yazarız. (3.23) den,

$$\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}\begin{bmatrix} g(X,C(Y,Z)W)\xi - \eta(C(Y,Z)W)X - g(X,Y)C(\xi,Z)W \\ +\eta(Y)C(X,Z)W - g(X,Z)C(Y,\xi + \eta(Z)C(Y,X)\xi \\ -\eta(X,W)C(Y,Z)\xi + \eta(W)C(Y,Z)X \end{bmatrix} = 0 \tag{3.27}$$

dır. Denklem (3.27) de *W=ξ* ve *m=2n* için,

$$\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}\begin{bmatrix} g(X,C(Y,Z)\xi)\xi - g(X,Y)C(\xi,Z)\xi + \eta(Y)C(X,Z)\xi \\ -g(X,Z)C(Y,\xi)\xi + \eta(Z)C(Y,X)\xi - \eta(X)C(Y,Z)\xi + C(Y,Z)\xi \end{bmatrix} = 0 \tag{3.28}$$

$$\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}\begin{bmatrix} g(X,R(Y,Z)\xi)\xi - g(X,Y)R(\xi,Z)\xi + \eta(Y)R(X,Z)\xi - g(X,Z)R(Y,\xi)\xi \\ +\eta(Z)R(Y,X)\xi - \eta(X)R(Y,Z)\xi + R(Y,Z)X - \frac{1}{2n-1}[\eta(Z)g(X,QY)\xi \\ -\eta(Y)g(X,QZ)\xi + 2nk\eta(Z)g(X,Y)\xi - 2nk\eta(Y)g(X,Z)\xi - 2nkg(X,Y)\eta(Z)\xi \\ +g(X,Y)QZ - 2nkg(X,Y)\eta(Z)\xi + 2nkg(X,Y)Z + \eta(Y)\eta(Z)QX \\ -\eta(Y)\eta(X)QZ + 2nk\eta(Y)\eta(Z)X - 2nk\eta(Y)\eta(X)Z - g(X,Z)QY \\ +2nkg(X,Z)\eta(Y)\xi - 2nkg(X,Z)Y + 2nkg(X,Z)\eta(Y)\xi + \eta(Z)\eta(X)QY \\ +2nk\eta(Z)\eta(X)Y - \eta(Z)\eta(Y)QX - 2nk\eta(Z)\eta(Y)X - \eta(X)\eta(Z)QY \\ +\eta(X)\eta(Y)QZ - 2nk\eta(X)\eta(Z)Y + 2nk\eta(X)\eta(Y)Z + g(Z,X)QY \\ -g(Y,X)QZ + S(Z,X)Y - S(Y,X)Z] + \frac{\tau}{2n(2n-1)}[\eta(Z)g(X,Y)\xi \\ -\eta(Y)g(X,Z)\xi - \eta(Z)g(X,Y)\xi + g(X,Y)Z + \eta(Z)\eta(Y)X - \eta(X)\eta(Y)Z \\ -g(X,Z)Y + g(X,Z)\eta(Y)\xi + \eta(Z)\eta(X)Y - \eta(Z)\eta(Y)X - \eta(Z)\eta(X)Y \\ +\eta(X)\eta(Y)Z + g(Z,X)Y - g(Y,X)Z] \end{bmatrix} = 0 \tag{3.29}$$

elde ederiz.

(3.29) da gerekli sadeleştirmeler yapılınca ,

$$\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}\begin{bmatrix} g(X,R(Y,Z)\xi)\xi-g(X,Y)R(\xi,Z)\xi+\eta(Y)R(X,Z)\xi-g(X,Z)R(Y,\xi)\xi \\ +\eta(Z)R(Y,X)\xi-\eta(X)R(Y,X)\xi+R(Y,Z)X-\frac{1}{2n-1}[\eta(Z)S(X,Y)\xi \\ -\eta(Y)R(X,Z)\xi-2nkg(X,Y)\eta(Z)\xi+2nkg(X,Y)Z-2nkg(X,Z)Y \\ +2nkg(X,Z)\eta(Y)\xi+S(Z,X)Y-S(Y,X)Z] \end{bmatrix}=0$$

(3.30)

buluruz. (3.9) ve (3.10) dan,

$$\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}\begin{bmatrix} kg(X,\eta(Z)Y-\eta(Y)Z)\xi-kg(X,Y)(\eta(Z)\xi-Z)+k\eta(Y)(\eta(Z)X \\ -\eta(X)Z)-kg(X,Z)(Y-\eta(Y)\xi+k\eta(Z)(\eta(X)Y-\eta(Y)X) \\ -k\eta(X)(\eta(Z)Y-\eta(Y)Z+kg(Z,X)Y-kg(Y,X)Z \\ -\frac{1}{2n-1}[\eta(Z)S(X,Y)\xi-\eta(Y)R(X,Z)\xi-2nkg(X,Y)\eta(Z)\xi \\ +2nkg(X,Y)Z-2nkg(X,Z)Y+2nkg(X,Z)\eta(Y)\xi+S(Z,X)Y \\ -S(Y,X)Z] \end{bmatrix}=0 \quad (3.31)$$

ve

$$\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}\begin{bmatrix} k\eta(Z)g(X,Y)\xi-k\eta(Y)g(X,Z)\xi-k\eta(Z)g(X,Y)\xi+kg(X,Y)Z \\ +k\eta(Y)\eta(Z)X-k\eta(Y)\eta(X)Z-kg(X,Z)Y+k\eta(Y)g(X,Z)\xi \\ +k\eta(Z)\eta(X)Y-k\eta(Y)\eta(Z)X+kg(Z,X)Y-kg(Y,X)Z \\ -\frac{1}{2n-1}[\eta(Z)S(X,Y)\xi-\eta(Y)R(X,Z)\xi-2nkg(X,Y)\eta(Z)\xi \\ +2nkg(X,Y)Z-2nkg(X,Z)Y+2nkg(X,Z)\eta(Y)\xi+S(Z,X)Y \\ -S(Y,X)Z] \end{bmatrix}=0 \quad (3.32)$$

dir. (3.32) de gerekli sadeleştirmeler yapılınca,

$$\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2n-1}[\eta(Z)S(X,Y)\xi-\eta(Y)R(X,Z)\xi \\ -2nkg(X,Y)\eta(Z)\xi+2nkg(X,Y)Z-2nkg(X,Z)Y \\ +2nkg(X,Z)\eta(Y)\xi+S(Z,X)Y-S(Y,X)Z] \end{bmatrix}=0 \quad (3.33)$$

dir. (3.33) denklemi düzenlenirse,

$$\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{m-1}\{S(X,Z)\eta(Y)\xi-S(X,Y)\eta(Z)\xi+S(X,Y)Z-S(X,Z)Y \\ +\frac{mk}{m-1}\{g(X,Y)\eta(Z)\xi-g(X,Z)\eta(Y)\xi+g(X,Z)Y-g(X,Y)Z\}\end{array}\right]=0 \qquad (3.34)$$

ifadesini elde ederiz. (3.34) denklemini U ile iç çarpım yapalım. Böylece,

$$\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}\left[\begin{array}{l}\left[\frac{1}{m-1}\left[\begin{array}{l}S(X,Z)\eta(Y)\eta(U)-S(X,Y)\eta(Z)\eta(U)+S(X,Y)g(Z,U) \\ -S(X,Z)g(Y,U)]\end{array}\right]\right. \\ +\frac{mk}{m-1}\left[\begin{array}{l}g(X,Y)\eta(Z)\eta(U)-g(X,Z)\eta(Y)\eta(U)+g(X,Z)g(Y,U) \\ -g(X,Y)g(Z,U)\end{array}\right]\end{array}\right]=0 \qquad (3.35)$$

elde ederiz.

$\{e_i : i=1, \ldots\ldots, m+1\}$ tanjant uzayının her bir noktasında bir ortonormal baz olsun (3.35) de $X=e_i=Z$ alırsak $1\leq i\leq m/2$, $k=1$ için Sasakiandır veya

$$S(Y,U)=(-m^2k+\tau)g(Y,U)-(-mk-m^2k+\tau)\eta(Y)\eta(U) \qquad (3.36)$$

dir. Dolayısıyla M bir $\eta-$Einsten manifoldudur .

3.3. *C (ξ , X). B=0* ‘ı SAĞLAYAN *N (k)-* DEĞME METRİK MANİFOLDLARI

Teorem 3.5: M^{2n+1} *(n>1)* bir *N(k)* değme metrik manifoldu olsun. Genelleştirilmiş *C*-Bochner eğrilik tensörü *C(ξ, X). B=0* ı sağlıyorsa M^{2n+1} e Sasakian manifoldudur.

İspat: M^{2n+1} *(n>1)* bir *N(k)* değme metrik manifoldu olsun.*M* üzerinde *C(ξ, X). B=0* şartı sağlansın. $\forall X,Y,Z,W\in\chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}(C(\xi,X)B)(Y,Z)W &= C(\xi,X)B(Y,Z)W-B(C(\xi,X)Y,Z)W \\ &\quad -B(Y,C(\xi,X)Z)W-B(Y,Z)C(\xi,X)W \\ &= 0\end{aligned} \qquad (3.37)$$

dır.(3.37) de $W=\xi$ yazalım.

$$(C(\xi,X)B)(Y,Z)W = C(\xi,X)B(Y,Z)\xi - B(C(\xi,X)Y,Z)\xi$$

$$-B(Y,C(\xi,X)Z)\xi - B(Y,Z)C(\xi,X)\xi$$

$$= 0 \qquad (3.38)$$

(3.22) ve (3.23) kullanılarak

$$\begin{bmatrix} \frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}C(\xi,X)R_0(Y,Z)\xi - \frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}R_0(C(\xi,X)Y,Z) \\ -\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}R_0(Y,C(\xi,X)Z)\xi - B(Y,Z)(R(\xi,X)X \\ -\frac{1}{2n-1}[g(X,\xi)Q\xi - g(\xi,\xi)QX + S(X,\xi)\xi - S(\xi,\xi)X] \\ +\frac{\tau}{2n(2n-1)}[g(X,\xi)\xi - g(\xi,\xi)X] \end{bmatrix} = 0$$

(3.39)

elde edilir.Diğer yandan (3.9) denklemini (3.39) da kullanırsak,

$$\begin{bmatrix} \frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}C(\xi,X)(\eta(Z)Y - \eta(Y)Z) - \frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}(\eta(Z)C(\xi,X)Y \\ -\eta(C(\xi,X)Y)Z) - \frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}(\eta(C(\xi,X)Z)Y - \eta(Y)C(\xi,X)Z) \\ -kB(Y,Z)(\eta(X)\xi - X) - \frac{1}{2n-1}[-2nk\eta(X)B(Y,Z)\xi + B(Y,Z)QX \\ -2nkB(Y,Z)\xi + 2nk\eta(X)B(Y,Z)X] + \frac{\tau}{2n(2n-1)}[-\eta(X)B(Y,Z)\xi \\ +B(Y,Z)X] \\ \end{bmatrix} = 0 \qquad (3.40)$$

elde ederiz.

$$\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}\left[\begin{array}{l} g(R(\xi,X)Y-\frac{1}{2n-1}[g(X,Y)Q\xi-g(\xi,Y)QX+S(X,Y)\xi-S(\xi,Y)X] \\ +\frac{\tau}{2n(2n-1)}[g(X,Y)\xi-g(\xi,Y)X],\xi)Z-g(R(\xi,X)Z \\ -\frac{1}{2n-1}[g(X,Z)Q\xi-g(\xi,Z)QX+S(X,Z)\xi-S(\xi,Z)X] \\ +\frac{\tau}{2n(2n-1)}[g(X,Z)\xi-g(\xi,Z)X],\xi)Y-k\eta(X)R_0(Y,Z)\xi \\ +\frac{k}{\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}}B(Y,Z)X-\frac{1}{2n-1}[-4nk\eta(X)R_0(Y,Z)\xi \\ +\frac{1}{\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}}B(Y,Z)QX+\frac{2nk}{\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}}B(Y,Z)X \\ +\frac{\tau}{2n(2n-1)}[-\eta(X)R_0(Y,Z)\xi+\frac{1}{\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}}B(Y,Z)X] \end{array}\right]=0 \quad (3.41)$$

elde edilir. (3.10) kullanılarak,

$$\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}\left[\begin{array}{l} kg(X,Y)Z-k\eta(X)\eta(Y)Z-kg(X,Z)Y+k\eta(Z)\eta(X)Y \\ -k(X)\eta(Z)Y+k\eta(X)\eta(Y)Z \\ -\frac{1}{2n-1}[2nkg(X,Y)Z-2nk\eta(Y)\eta(X)Z+S(X,Y)Z \\ -2nk\eta(Y)\eta(X)Z-2nkg(X,Z)Y+2nk\eta(Z)\eta(X)Y-S(X,Z)Y \\ +2nk\eta(Z)\eta(X)Y-4nk\eta(Z)\eta(X)Y+4nk\eta(X)\eta(Y) \\ +\frac{1}{\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}}B(Y,Z)QX+\frac{2nk}{\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}}B(Y,Z)X \\ +\frac{\tau}{2n(2n-1)}[g(X,Y)Z-\eta(Y)\eta(X)Z-g(X,Z)Y+\eta(Z)\eta(X)Z \\ -\eta(Z)\eta(X)Y+\eta(Y)\eta(X)Z+\frac{1}{\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}}B(Y,Z)X \end{array}\right]=0 \quad (3.42)$$

elde edilir . (3.42) de gerekli sadeleştirmeler yapılınca,

$$\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}\left[\begin{array}{l} kg(X,Y)Z-kg(X,Z)Y-\frac{1}{2n-1}[2nkg(X,Y)Z+S(X,Y)Z \\ -2nkg(X,Z)Y-S(X,Z)Y+\frac{1}{\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}}B(Y,Z)QX \\ +\frac{2nk}{\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}}B(Y,Z)X]+\frac{\tau}{2n(2n-1)}[g(X,Y)Z-g(X,Z)Y \\ +\frac{1}{\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}}B(Y,Z)X \end{array}\right]=0 \qquad (3.43)$$

elde edilir. (3.43) denklemini U ile iç çarpım yaparsak,

$$\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}\left[\begin{array}{l} kg(X,Y)g(Z,U)-kg(X,Z)g(Y,U)-\frac{1}{2n-1}[2nkg(X,Y)g(Z,U) \\ +S(X,Y)g(Z,U)-2nkg(X,Z)g(Y,U)-S(X,Z)g(Y,U) \\ +\frac{1}{\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}}g(B(Y,Z)QX,U)+\frac{2nk}{\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}}g(B(Y,Z)X,U)] \\ +\frac{\tau}{2n(2n-1)}[g(X,Y)g(Z,U)-g(X,Z)g(Y,U) \\ +\frac{1}{\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}}g(B(Y,Z)X,U) \end{array}\right]=0 \qquad (3.44)$$

dir. (3.44) de $Y=\xi$ yazalım.

$$\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}\left[\begin{array}{l} kg(X,\xi)g(Z,U)-kg(X,Z)g(\xi,U)-\frac{1}{2n-1}[2nkg(X,\xi)g(Z,U) \\ +S(X,\xi)g(Z,U)-2nkg(X,Z)g(\xi,U)-S(X,Z)g(\xi,U) \\ +\frac{1}{\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}}g(B(\xi,Z)QX,U)+\frac{2nk}{\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}}g(B(\xi,Z)X,U)] \\ +\frac{\tau}{2n(2n-1)}[g(X,\xi)g(Z,U)-g(X,Z)g(\xi,U)+\frac{1}{\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}}g(B(\xi,Z)X,U) \end{array}\right]=0$$

(3.45)

dir. (3.22) den,

$$\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}\left[\begin{array}{l} kg(Z,U)\eta(X)-kg(X,Z)\eta(U)-\frac{1}{2n-1}[4nkg(Z,U)\eta(X)+S(X,\xi)g(Z,U) \\ -2nkg(X,Z)\eta(U)-S(X,Z)\eta(U)+S(X,Z)\eta(U)-2nkg(Z,U)\eta(X) \\ +2nkg(Z,X)\eta(U)-g(Z,U)\eta(X)] \\ \end{array}\right]=0 \tag{3.46}$$

(3.46) da gerekli sadeleştirmeler yapılınca,

$$\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}\left[kg(Z,U)\eta(X)-kg(X,Z)\eta(U)\right]=0 \tag{3.47}$$

dir. Buradan,

$$kg(Z,U)\eta(X)-kg(X,Z)\eta(U)=0$$

dır. Ya da,

$$\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}=0$$

dır. Bu ifade $k=1$ için Sasakiandır.

3.4 . *B (ξ, X). P =0* ‘ı SAĞLAYAN *N (k)*- DEĞME METRİK MANİFOLDLARI

Teorem 3.6: M^{2n+1} bir *N(k)* -değme metrik manifoldu olsun. Genelleştirilmiş *C*-Bonchner eğrilik tensörü $B(\xi,X)P=0$ ı sağlarsa M^{2n+1} bir Sasakian manifoldudur ya da projektif flat manifolddur [10].

İspat: *M* üzerinde $B(\xi,X)P=0$ koşulunu sağlayan bu denklemden,

$$\begin{aligned} B(\xi,X),P(Y,Z)W &= B(\xi,X)P(Y,Z)W-P(B(\xi,X)Y,Z)W \\ &\quad -P(Y,B(\xi,X)Z)W-P(Y,Z)B(\xi,X)W \\ &=0 \end{aligned} \tag{3.48}$$

elde edilir. (3.7) den

$$\frac{(k-1)(m+8)}{(2m+4)}\begin{bmatrix} g(X,P(Y,Z)W)\xi-\eta(P(Y,Z)W)X \\ -g(X,Y)P(\xi,Z)W+\eta(Y)P(X,Z)W \\ -g(X,Z)P(Y,\xi)W+\eta(Z)P(Y,X)W \\ -g(X,W)P(Y,Z)\xi+\eta(W)P(Y,Z)X \end{bmatrix}=0 \tag{3.49}$$

dir. (3.49) $W=\xi$ alırsak (3.16) dan

$$\frac{(k-1)(m+8)}{(2m+4)}P(Y,Z)X=0$$

Buradan ,

$$k=1 \text{ veya } P(Y,Z)X=0$$

elde edilir. Böylece *M* ye Sasakian manifoldudur ya da projektif flattir denir

3.5. *B (ξ, X).R = 0* ı SAĞLAYAN *N (k)*- DEĞME METRİK MANİFOLDLARI

Teorem 3.7: M^{2n+1} *(n>1)* bir *N(k)* değme metrik manifold olsun. Genelleştirilmiş *C*-Bochner tensörü *B(*ξ*,X).R=0* ‘ı sağlarsa M^{2n+1} ,S^{2n+1} *(c)* küresine için lokal olarak izometriktir.

İspat: M^{2n+1} *(n>1)* bir *N(k)* değme metrik manifoldu olsun. *M* üzerinde *B(ξ, X). R=0* şartı sağlansın. $\forall X,Y,Z,W\in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}(B(\xi,X)R)(Y,Z)W &= B(\xi,X)R(Y,Z)W-R(B(\xi,X)Y,Z)W \\ &\quad -R(Y,B(\xi,X)Z)W-R(Y,Z)B(\xi,X)W \\ &= 0\end{aligned} \tag{3.50}$$

(3.50) eşitliğinde $Y=\xi$ yazalım,

$$\begin{aligned}(B(\xi,X)R)(Y,Z)W &= B(\xi,X)R(\xi,Z)W-R(B(\xi,X)\xi,Z)W \\ &\quad -R(\xi,B(\xi,X)Z)W-R(\xi,Z)B(\xi,X)W \\ &=0\end{aligned} \tag{3.51}$$

(3.8) ve (3.26) dan ,

$$\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}\begin{bmatrix} g(X,R(\xi,Z)W)\xi - g(R(\xi,Z)W,\xi)X - \eta(X)R(\xi,Z)W \\ +R(X,Z)W + \eta(Z)R(\xi,X)W - g(X,W)R(\xi,Z)\xi \\ +\eta(W)R(\xi,Z)X \end{bmatrix} = 0 \tag{3.52}$$

(3.52) eşitliğini ξ ile iç çarpım yaparsak,

$$\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}\begin{bmatrix} g(X,R(\xi,Z)W) - g(R(\xi,Z)W,\xi)\eta(X) - \eta(X)g(R(\xi,Z)W,\xi) \\ +g(R(X,Z)W,\xi) + \eta(Z)g(R(\xi,X)W,\xi) + \eta(W)g(R(\xi,Z)X,\xi) \end{bmatrix} = 0 \tag{3.53}$$

elde ederiz.

$$\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}\begin{bmatrix} g(X,R(\xi,Z)W)\xi - g(R(\xi,Z)W,\xi)X - \eta(X)R(\xi,Z)W \\ +R(X,Z)W + \eta(Z)R(\xi,X)W - g(X,W)R(\xi,Z)\xi \\ +g(\xi,W)R(\xi,Z)X \end{bmatrix} = 0 \tag{3.54}$$

ve

$$\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}\begin{bmatrix} R(X,Z)W + g(X,R(\xi,Z)W)\xi - g(R(\xi,Z)W,\xi)X \\ -\eta(X)R(\xi,Z)W + \eta(Z)R(\xi,X)W - g(X,W)R(\xi,Z)\xi \\ +\eta(W)R(\xi,Z)X \end{bmatrix} = 0 \tag{3.55}$$

(3.4) den,

$$\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}\begin{bmatrix} R(X,Z)W + kg(Z,W)\eta(X)\xi - k\eta(W)g(X,Z)\xi - kg(Z,W)X \\ +k\eta(W)k\eta(Z)X - kg(Z,W)\xi\eta(X) + k\eta(X)\eta(W)Z \\ +kg(X,W)\xi\eta(Z) - k\eta(W)\eta(Z)X - kg(X,W)\eta(Z)\xi + kg(X,W)Z \\ +kg(X,Z)\eta(W)\xi - k\eta(W)\eta(X)Z \end{bmatrix} = 0 \tag{3.56}$$

dir. (3.56) da gerekli sadeleştirmeler yapılınca,

$$\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}\left[R(X,Z)W + kg(X,W)Z - kg(Z,W)X\right] = 0 \tag{3.57}$$

dir. Buradan, ya

$$\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)} = 0$$

ya da,

$$R(X,Z)W - kg(Z,W)X + kg(X,W)Z = 0 \tag{3.58}$$

dır.

3.6. *R (ξ, X).B = 0* ‘ ı SAĞLAYAN *N (k)*- DEĞME METRİK MANİFOLDLARI

Teorem 3.8: M^{2n+1} *(n>1)* bir *N(k)* değme metrik manifold olsun. Genelleştirilmiş *C*-Bochner tensörü *R(ξ,X).B=0* ‘ı sağlarsa M^{2n+1}, $E^{n+1} \times S^n$ çarpım manifolduna lokal izometriktir.

İspat: M^{2n+1} *(n>1)* bir *N(k)* değme metrik manifoldu olsun. *M* üzerinde *R(ξ, X).B=0* şartı sağlansın. $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}(B(\xi,X)R)(Y,Z)W = {} & R(\xi,X)B(Y,Z)W - B(R(\xi,X)Y,Z)W \\ & - B(Y,R(\xi,X)Z)W - B(Y,Z)R(\xi,X)W \\ & = 0\end{aligned} \tag{3.59}$$

(3.59) da $Y=\xi$ yazalım.

$$\begin{bmatrix} R(\xi,X)B(\xi,Z)W - B(R(\xi,X)\xi,Z)W \\ -B(\xi,R(\xi,X)Z)W - B(\xi,Z)R(\xi,X)W \end{bmatrix} = 0 \tag{3.60}$$

$$\begin{bmatrix} R(\xi,X)\{R_0(\xi,\dfrac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}Z)W\} - B(k\eta(X)\xi - kX,Z)W \\ -R_0(\xi,\dfrac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}R(\xi,X)Z)W - R_0(\xi,\dfrac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}Z)R(\xi,X)W \end{bmatrix} = 0 \tag{3.61}$$

(3.7) den,

$$\begin{bmatrix} \dfrac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}\{g(Z,W)R(\xi,X)\xi - \eta(W)R(\xi,X)Z\} - k\eta(X)B(\xi,Z)W \\ +kB(X,Z)W - \dfrac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}g(R(\xi,X)Z,W)\xi \\ +\dfrac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}\eta(W)R(\xi,X)Z - \dfrac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}g(Z,R(\xi,X)Z,W)\xi \\ +\dfrac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}g(\xi,R(\xi,X)W)Z \end{bmatrix} = 0 \tag{3.62}$$

dir.

$$\left[\begin{array}{l} \frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}g(Z,W)R(\xi,X)\xi-\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}\eta(W)R(\xi,X)Z \\ -\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}k\eta(X)g(Z,W)\xi+\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}k\eta(X)\eta(W)Z+kB(X,Z)W \\ -\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}g(R(\xi,X)Z,W)\xi+\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}\eta(W)R(\xi,X)Z \\ -\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}g(Z,R(\xi,X)Z,W)\xi+\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}g(\xi,R(\xi,X)W)Z \end{array}\right]=0 \qquad (3.63)$$

(3.63) de gerekli sadeleştirmeler yapılınca,

$$\left[\begin{array}{l} \frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}kg(Z,W)\xi\eta(X)-\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}kg(Z,W)X-\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}kg(X,Z)\xi\eta(W) \\ +\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}k\eta(W)\eta(Z)X-\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}k\eta(X)g(Z,W)\xi+\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}k\eta(X)\eta(W)Z \\ +kB(X,Z)W-\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}k\eta(X)g(Z,W)\xi+\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}k\eta(Z)g(X,W)\xi \\ -\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}k\eta(W)g(X,Z)\xi-\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}k\eta(W)\eta(Z)X-\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}k\eta(Z)g(X,W)\xi \\ +\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}k\eta(W)g(X,Z)\xi+\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}kg(X,W)Z-\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}kg(X,W)Z \end{array}\right]=0$$

(3.64)

(3.64) te gerekli sadeleştirmeler yapılınca,

$$\left[kB(X,Z)W-\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}kg(Z,W)X+\frac{(k-1)(m+8)}{2(m+4)}kg(X,W)Z\right]=0 \qquad (3.65)$$

elde edilir. Buradan

k=0 ise $E^{n+1}\times S^{n}$ çarpım manifolduna lokal izometriktir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] O' Neill, B. Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, Inc. 1983

[2] Murathan C., Yıldız A., 2000, Contact Riemannian manifolds satisfying $C(\xi, X).S = 0$ and $\xi \in (k, \mu)$-nullity distribution, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1, V.49, 33-37

[3] O'Neill B., 1983, Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, New York, 468p.

[4] Kobayashi, S., Nomizu, K., 1963, Foundations of Differantial Geometry, 470p. Kon, M., Invariant Submanifolds of Normal Contact Metric Manifolds, Kodai Math. Sem. Rep., 25,. 25-34.

[5] Koufogiorgos T., 1996, Contact Riemannian manifolds with constant ϕ-sectional curvature, Geometry and Topology of Submanifolds VIII, World Scientific, ISBN 981-02-2776-0

[6] Blair D.E., Koufogiorgos T., Papantoniou B.J., 1995, Contact metric manifolds satisfying a nullity condition, Israel Journal of Mathematics 91, 189-214.

[7] Olzsak, Z., 1979, On Contact metric manifolds, The Tohoku Math. J. 31, 247-253.

[8] Boeckx E., Kowalski O., Vanhacke L., 1996, Riemannian manifolds of conullity two, World Scientific, ISBN 981-02-2768-X. 300p

[9] Papantoniou B.J., 1993, Contact Riemannian manifolds satisfying $R(\xi, X).R = 0$ and $\xi \in (k,\mu)$-nullity distribution, Yokohama Mathematical Journal, Vol. 40, 149-161.

[10] Yıldız A., Murathan C., Arslan K., Shaikh A.A., & Baishya K.K., On Generalized C-Bochner Curvature Tensor of A Contact Metric Manifold, March 2, 2007.