AĞIRLIKLI LORENTZ UZAYLARINDA
GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖTELEME OPERATÖRÜ İLE
ELDE EDİLEN RİESZ POTANSİYELLERİNİN
SINIRLILIĞI

Mehmet KARAKELEK

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Eylül - 2007

AĞIRLIKLI LORENTZ UZAYLARINDA
GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖTELEME OPERATÖRÜ İLE
ELDE EDİLEN RİESZ POTANSİYELLERİNİN
SINIRLILIĞI

Hazırlayan
Mehmet KARAKELEK

Dumlupınar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman
Yrd. Doç. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

Eylül - 2007

KABUL ve ONAY SAYFASI

Mehmet KARAKELEK ’in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı Ağırlıklı Lorentz Uzaylarında Genelleştirilmiş Öteleme Operatörü ile Elde Edilen Riesz Potansiyellerinin Sınırlılığı başlıklı bu çalışması jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

…../…../…..

Üye	:	Doç.Dr.Ayhan ŞERBETÇİ
Üye	:	Yrd.Doç.Dr.Ahmet YILDIZ
Üye	:	Yrd.Doç.Dr.İsmail EKİNCİOĞLU (Danışman)

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun …../…../….. gün ve ……….. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr.M.Sabri ÖZYURT

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

AĞIRLIKLI LORENTZ UZAYLARINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖTELEME OPERATÖRÜ İLE ELDE EDİLEN RİESZ POTANSİYELLERİNİN SINIRLILIĞI

Mehmet KARAKELEK
Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi 2007
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde genel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. İkinci bölümde adi öteleme ve genelleştirilmiş öteleme tanıtılmış ve genelleştirilmiş ötelemenin bazı özellikleri verilmiştir. Üçüncü bölümde genelleştirilmiş öteleme operatörü ile elde edilen Riesz potansiyellerinden bahsedilerek bazı teorem ve sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak, dördüncü bölümde Ağırlıklı Lorentz Uzaylarında $I_{\alpha,\gamma}$ *B*-Riesz potansiyeli için Hardy-Littlewood-Sobolev tipi eşitsizliği ispat edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ağırlıklı Lorentz Uzayı, Lorentz Uzayları, Riesz Dönüşümleri, Riesz Potensiyelleri.

RIESZ POTENTIALS
GENERATED WITH GENERALIZED SHIFT OPERATOR AND
THE BOUNDEDNESS OF RIESZ POTENTIAL
IN WEIGHTED LORENTZ SPACE

Mehmet KARAKELEK
Department of Mathematics, MSc. Thesis 2007
Thesis Supervisor: Assoc.Prof.Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

SUMMARY

This thesis consists of four chapters. The first chapter was devoted to the fundamental concepts and theorems. In the second chapter, Ordinary and generalized shift is introduced some properties of generalized shift are given. In the third chapter, the Riesz potential generated by the generalized shift operator is given. Some theorems and results related to the Riesz potantial were obtained. Finally, in the fourth chapter, Hardy-Littlewood-Sobolev inequality is proved for the $I_{\alpha,\gamma}$ B-Riesz Potential in the weighted Lorentz Spaces.

Keywords: Lorentz Space, Riesz Transform and Riesz Potential, Weighted Lorentz Space.

TEŞEKKÜR

Matematik alanında bilgi sahibi olmamı sağlayan değerli hocalarıma, tez çalışmamda her türlü desteği sağlayan Yrd. Doç. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU' na, tez arkadaşlarım Ahmet COŞKUN ve Şahin SAĞLAM'a, ayrıca bugüne kadar maddi manevi hiçbir desteği esirgemeyen, bana devamlı destek olan aileme ;

sonsuz teşekkürler…

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklamalar**
$\mathbb{R}^n$	Euclid uzayı
S^{n-1}	Birim küre
A_p	Ağırlıklı Muckenhoupt sınıfı
w	Ağırlık fonksiyonu
p.v.	Esas değer
L_{pw}	Ağırlıklı uzay
T	Singüler integral operatörü
$L_p(\mathbb{R}_n)$	Lebesque uzayı
$W_p(T_p)$	Singüler operatörler için ağırlık uzayı
$W_p(M_p)$	Maksimal operatörler için ağırlık uzayı
C^∞	Sonsuz mertebeden sürekli fonksiyonlar
$W_p(g_\Omega)$	g_Ω için L^p ağırlıklarınının sınıfı
$\Gamma(n)$	Gamma fonksiyonu
R_j	Riesz dönüşümü
$L_{loc}(\mathbb{R}^n)$	Lokalintegrallenebilirfonksiyonlarsınıfı
B_t	Bessel operatörü
$T_y f(x)$	Adi öteleme operatörü
$\mathbb{R}_n^+$	n- boyutlu yarı uzayında genelleştirilmiş öteleme
$\Delta = \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} + B_{x_n}$	Laplace –Bessel operatörü
F_B	Fourier-Bessel dönüşümü
$K_j(x)$	Riesz dönüşümünün çekirdekleri
I_α	Riesz Potansiyeli

GİRİŞ

$L_{p,q,\gamma}(R_+^n)$ - Lorentz uzayı,

$$\| f \|_{p,q,\gamma} = \begin{cases} \left(\int\limits_{R_+^n}^{\infty} \left(t^{1/p} f_\gamma^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} dr \right)^{1/q} \\ \sup\limits_{R_+^n} t^{1/p} f_\gamma^*(t), \ 0 < p < \infty, \ q = \infty \end{cases}$$

fonksiyoneli sonlu olacak biçimde tüm $f : R_+^n \to C$ ölçülebilir fonksiyonların sınıflarının cümlesi olarak tanımlanır [1] , burada f_γ^* fonksiyonu f nin azalan γ-yeniden düzenlemesidir (γ-rearrangement) , yani $\lambda_{f,\gamma}(s) = \left| \left\{ x \in R_+^n : \left| f(x) \right| > s, \ s \geq 0 \right\} \right|_\gamma$ f nin γ-dağılım fonksiyonu olmak üzere $t \geq 0$ için $f_\gamma^*(t) = \inf \left\{ s : \lambda_{f,\gamma}(s) \leq t \right\}$ dir. $L_{p,q,\gamma}(R_+^n)$-Lorentz uzayı $1 \leq q \leq p < \infty$ veya $p = q = \infty$ durumunda bir normlu uzaydır, bu uzay $L_{p,\gamma}$ uzayının bir genelleştirmesidir, $q = p$ durumunda $L_{p,\gamma}(R_+^n)$ ile $L_{p,q,\gamma}(R_+^n)$ çakışır. Diğer taraftan kesirli integral operatörleri harmonik analizin önemli konularındandır ve özellikle kısmi türevli denklemler teorisi ile matematiksel fizikte birçok uygulamaları vardır. Bu çalışmada $B = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x} \frac{d}{dx}$ Bessel diferensiyel operatörü ile yakından ilgili olan

$$T^y f(x) = \Gamma((\gamma+1)/2) \left[\Gamma(\gamma/2) \sqrt{\pi} \right]^{-1} \int\limits_0^\pi f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2} \right) \sin^{\gamma-1} \alpha \, d\alpha$$

genelleştirilmiş öteleme operatörü tarafından üretilen

$$\left(I_{B_1}^\alpha f \right)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} f(y) T^y |x|^{\alpha-n-\gamma} y_n^\gamma dy$$

B-Riesz potansiyelinin $L_{p,q,\gamma}(R_+^n)$ - Lorentz uzaylarındaki sınırlılığı araştırılacaktır.

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{\gamma}{x} \frac{\partial}{\partial x_n}, \ \gamma > 0,$$

Laplace-Bessel diferensiyel operatörü tarafından üretilen integral operatörler B. Muckenhoupt ve E.M. Stein, I.A. Kipriyanov, K. Trimeche, L. Lyakhov, K. Stempak, A.D. Gadjiev ve I.A. Aliev, A. Şerbetçi ve I. Ekincioğlu, V.S. Guliyev gibi birçok matematikçi tarafından çalışılmaktadır.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde genel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir. İkinci bölümde adi öteleme ve genelleştirilmiş ötelemeden bahsedilmiş ve genelleştirilmiş ötelemenin bazı özellikleri verilmiştir.Üçüncü bölümde ise genelleştirilmiş öteleme operatörü ile elde edilen Riesz potansiyellerinden bahsedilerek bazı teorem ve sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak, dördüncü bölümde Ağırlıklı Lorentz Uzaylarında $I_{\alpha,\gamma}$ B-Riesz potansiyeli için Hardy-Littlewood-Sobolev tipi eşitsizliği ispat edilmiştir.

1.TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar, lemmalar ve teoremlerden oluşmaktadır.

Tanım 1.1.1. (Öklid uzayı): $\mathbb{R}^n = \{x : x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., n\}$ şeklinde tanımlanan uzaya Öklid uzayı denir.

Tanım 1.1.2. : $\mathbb{R}^n$ uzayının her kompakt alt cümlesi üzerinde integrallenebilen fonksiyonlara Lokal integrallenebilirdir denir ve bu fonksiyonların sınıfı $\mathrm{L}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.3. (Radial fonksiyon): Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu için $f(x) = f(|\,x\,|)$ oluyorsa f ye radial fonksiyonu denir [2].

Tanım 1.1.4. (Karekteristik Fonksiyon): Bir A cümlesinin χ_A karakteristik fonksiyonu

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.1.5. (Gamma Fonksiyonu): $\Gamma(n)$ sembolü ile gösterilen ve

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

bağıntısıyla tanımlanan fonksiyona Gamma fonksiyonu denir.

Tanım 1.1.6. (Destek-Support): Bir f fonksiyonunun desteği, $Suppf = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ olarak tanımlanır.

Tanım 1.1.7. : Görüntü kümesi sonlu elemandan meydana gelen bir φ fonksiyonuna basit fonksiyon denir.

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{A_k} \quad , \int_E \chi_A dx = |A| \quad \text{ve} \int_E \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{A_k} dx = \sum_{k=1}^{n} c_k \,|A_k|$$

dir.

Tanım 1.1.8. : $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}\left((\alpha, +\infty)\right) = \left\{x \in X : f(x) > \alpha\right\} \in \mathcal{A}$$

olmasıdır.

Tanım 1.1.9. (Ağırlık Fonksiyonu): Hemen hemen her yerde lokal integrallenebilen $\omega : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir.

Tanım 1.1.10. : $1 \leq p < \infty$ olmak üzere; $L^p = L^p(\mathbb{R}^n) = \{ f : \int |f(x)|^p \, dx < \infty \}$ uzayına p. mertebeden Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonların uzayı denir. $L^p = L^p(\mathbb{R}^n)$ normu da,

$$\|f\|_p = \left(\int_{R^n} |f(x)|^p \right)^{1/p} < \infty \quad 1 \leq p < \infty$$

şeklinde tanımlanır [3].

Tanım 1.1.11. (Hölder Eşitsizliği): $f \in L^p$, $g \in L^q$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$\left| \int f(x) g(x) dx \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

eşitsizliğine Hölder eşitsizliği denir.

Tanım 1.1.12. (Minkowsky eşitsizliği): $f, g \in L^p$ olmak üzere ,

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

eşitsizliğine Minkowsky eşitsizliği denir.

Tanım 1.1.13. : $\mathbb{R}_n^+ = \{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_n \geq 0 \}$ olsun. $1 \leq p \leq \infty$ ve $\gamma > 0$ olmak üzere $L_{p\gamma}$ ağırlıklı uzayı,

$$L_{p\gamma} = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, x_n^{2\gamma} dx < \infty \right\}$$

ve normu

$$\|f\|_{p\gamma} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p x_n^{2\gamma} dx \right)^{1/p} < \infty$$

şeklinde tanımlanır [4].

Tanım 1.1.14. (Adi Öteleme): $T_y f(x) = f(x-y)$ ile gösterilen, x noktasını x-y noktasına öteleyen operatöre $\mathbb{R}$ de adi öteleme denir. Adi öteleme $(-\infty,\infty)$ aralığında tanımlı olup $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dir.

Tanım1.1.15. ($\mathbb{R}^+$ Ötelemesi): $T_y f(x) = f(x-y)$ adi öteleme ve $x', y' \in \mathbb{R}_{n-1}$ ve

$$c_\gamma = \frac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\gamma)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

olmak üzere $\mathbb{R}^+$ ötelemesi,

$$T_x^y f(x) = c_\gamma \int_0^\pi f\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}\right](\sin\alpha)^{2\gamma-1}\,d\alpha$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.1.16. (Klasik Riesz Dönüşümü): $f:\mathbb{R}^n \to C$ bir fonksiyon olsun.

$$R_j f(x) = c_n \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|y|\geq\varepsilon} f(x-y)\frac{y_j}{|y|^{n+1}}dy \quad \text{(j=1,2,3,...,n)}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme f fonksiyonunun klasik Riesz dönüşümü denir. Burada $c_n = \pi^{\frac{-(n+1)}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})$ dir [5].

Tanım 1.1.17. (Genelleştirilmiş Öteleme İle Elde Edilen Riesz Dönüşümü): $f:\mathbb{R}^n \to C$ bir fonksiyon olsun.

$$R_j f(x) = c_n \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|y|\geq\varepsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+2\gamma+1}} T^y f(x)\, y_n^{2\gamma} dy \quad (j = 1,2,3,...,n)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme f fonksiyonunun genelleştirilmiş öteleme ile elde edilen Riesz dönüşümü denir. Burada $c_{\gamma_j} = \pi^{\frac{-1}{2}}\dfrac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\gamma)}$ dir.

Tanım1.1.18. (Riesz Potansiyeli): I^α ile gösterilen Riesz potansiyeli aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\left(I^{\alpha} f\right)(x)=c(\alpha)\int_{\mathbb{R}_n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy$$

Burada $f\in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $c(\alpha)=\left[\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}2^{\alpha}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}\right]^{-1}$ dir.

Tanım 1.1.19. : (Ω,Σ,μ) bir ölçü uzayı olsun. $\mu_f:[0,\infty)\to[0,\infty]$ olmak üzere ;

$$\mu_f(\lambda)=\mu\left(\left\{x\in\Omega:|f(x)|>\lambda\right\}\right),\lambda\geq 0$$

şeklinde tanımlanan ifadeye f nin dağılım fonksiyonu adı verilir.

Tanım 1.1.20. : f fonksiyonun azalan yeniden düzenlenmesi $f^*:[0,\infty)\to[0,\infty]$ fonksiyonu

$$f^*(t)=\inf\left\{\lambda\geq 0:\mu_f(\lambda)\leq t\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\inf\varnothing=\infty$ kabul edilir.

Teorem 1.1.21. : m Lebesgue ölçüsü olmak üzere $f^*(t)=m_{\mu_f}(t),t\geq 0$ dır.

Teorem 1.1.22. : Aşağıdaki özellikler sağlanır.

i-) $f^*(t)\geq\lambda \iff \mu_f(\lambda)>t$.

ii-) f ve f^* eş ölçülebilir, yani $\forall\ \lambda\geq 0$ için

$$\mu\left(\left\{x\in\Omega:|f(x)|>\lambda\right\}\right)=m\left(\left\{t>0: f^*(t)>\lambda\right\}\right)$$

dir. Burada m Lebesgue ölçüsüdür.

Teorem 1.1.23. : $\forall t_1,t_2\geq 0$ için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır

$$(f+g)^*(t_1+t_2)\leq f^*(t_1)+g^*(t_2)$$

ve

$$(fg)^*(t_1+t_2)\leq f^*(t_1)g^*(t_2)$$

dir. Özel olarak $\forall t\geq 0$ için

$$(f+g)^*(t)\leq f^*(t/2)+g^*(t/2)$$

ve

$$(fg)^*(t)\leq f^*(t/2)g^*(t/2)$$

dir.

Lemma 1.1.24. :

$$\int_{\Omega} |f(x)|\, d\mu = \int_0^{\infty} \mu_f(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} f^*(t)\, dt \text{ ve } \sup_{\lambda>0} \lambda \mu_f(\lambda) = \sup_{t>0} t f^*(t)$$

dir.

Teorem 1.1.25. : $0 < p < \infty$ olsun. O zaman

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p\, d\mu = p\int_0^{\infty} \lambda^{p-1} \mu_f(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} f^*(t)^p\, dt$$

ve

$$\sup_{\lambda>0} \lambda \mu_f(\lambda)^{1/p} = \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t)$$

dir.

Lemma 1.1.26. : $\mu(\mathrm{A}) \le a$ olacak şekilde $\forall A \in \Sigma$ için

$$\int_A |f(x)| d\mu \le \int_0^a f^*(t) dt$$

dir.

Teorem 1.1.27. (Hardy-Littlewood): $\int_{\Omega} |f(x)g(x)|\, d\mu \le \int_0^{\infty} f^*(t) g^*(t) dt$ eşitsizliği sağlanır [6,7].

Tanım 1.1.28. : $f^{**} : (0,\infty) \to [0,\infty]$ fonksiyonu

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s) ds$$

ile tanımlanır.

Teorem 1.1.29. : *f,* Ω da tanımlanan Σ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

i-) f^{**} , $(0,\infty)$ da azalan ve süreklidir.

ii-) $\forall t > 0$ için $f^*(t) \le f^{**}(t)$ dir.

Tanım 1.1.30. : (Ω, Σ, μ) bir σ -sonlu ölçülebilir uzay ve $0 < p \le \infty$, $0 < q \le \infty$ olsun. Bu durumda $L_{p,q}$ Lorentz uzayı, $\|f\|_{p,q} < \infty$ olacak şekilde Σ -ölçülebilir tüm *f* fonksiyonlarının sınıfıdır. Burada,

$$\| f \|_{p,q} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t)^q \right) \frac{dt}{t} \right)^{1/q} & \text{eğer } 0 < p < \infty, 0 < q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) & \text{eğer } 0<p \leq \infty, q=\infty \end{cases}$$

dir.

Teorem 1.1.31. : $L_{p,q}$ Lorentz uzayı bir lineer uzaydır ve $\|.\|_{p,q}$ fonksiyoneli de bir yarı-normdur.

Teorem 1.1.32. : $\|.\|_{p,q}$ fonksiyonelinin bir norm olması için gerek ve yeter koşul $1 \leq q \leq p$ ya da $p = q = \infty$ olmasıdır.

Tanım 1.1.33. : $\forall f \in L_{p,q}$ için , $\|.\|^*$ fonksiyoneli ;

$$\| f \|_{pq}^* = \begin{cases} \left(\int_0^\infty t^{1/p} f^{**}(t) \frac{dt}{t} \right)^{1/q} & \text{eğer } 0 < p < \infty, 0 < q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^{**}(t) & \text{eğer } 0<p \leq \infty, q=\infty \end{cases}$$

dir.

Teorem 1.1.34. : Eğer $1 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$ ya da $p = q = \infty$ ise, o zaman $\|.\|_{pq}^*$, $L_{p,q}$ uzayında bir normdur ve böylece $\left(L_{p,q}, \|.\|_{pq}^* \right)$ da normlu uzay olur. Ayrıca, $\|.\|_{p,q}$ ve $\|.\|_{pq}^*$ normları eşdeğerdir:

$$\| f \|_{pq} \leq \| f \|_{pq}^* \leq \frac{p}{p-1} \| f \|_{pq} .$$

2.GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖTELEME OPERATÖRÜ

B.M. Levitan 1951 yılında bir çalışmasında $(0,\infty)$ üst yarı uzayında R^{+} ötelemesinin varlığını göstermiştir [8]. Daha sonra Bessel diferensiyel operatörleri ile ilişkisini inceleyerek bu ötelemenin $(0,\infty)$ aralığındaki noktaları yine bu aralıktaki noktalara dönüştüğünü göstermiştir. I. Kipriyanov 1967 yılında $\mathbb{R}_{+}^{n}$ n- boyutlu yarı uzayında genelleştirilmiş ötelemeyi tanımlamıştır [9]. Çalışmalarında, bu ötelemenin (n-1) değişkene göre adi ve n. değişkene göre R^{+} öteleme olarak ele almış, daha sonra Fourier–Bessel operatörü ile ilişkisini incelemiştir. R^{+} ve R ötelemeleri bu bölümde verilmiştir.

2.1. Adi Öteleme

Tanım 2.1.1 : $T_{y}f(x)=f(x+y)$ ile gösterilen x noktasını $x+y$ noktasına öteleyen operatöre $\mathbb{R}$ ' de adi öteleme denir.

Adi öteleme $(-\infty,\infty)$ aralığında tanımlıdır dolayısıyla $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tanımlıdır. Bu şekildeki adi öteleme,

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y},$$

$$u(x,y)=f(x)$$

başlangıç değer probleminin çözümüdür.

2.2. Genelleştirilmiş Öteleme:

Şimdi R^{+} da ki ötelemeyi inceleyelim. $B_{t}=\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}+\frac{2\gamma+1}{t}\frac{\partial}{\partial t}$ Bessel operatörü olmak üzere,

$$\begin{aligned} B_{x}u &= B_{y}u \\ u(x,0) &= f(x) \\ u_{y}(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

başlangıç değer probleminin yani,

$$\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}+\frac{2\gamma+1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}}+\frac{2\gamma+1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.2.1}$$

denkleminin,

$$u\big|_{y=0}=f(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü

$$u(x,y)=T^y f(x)=\frac{\Gamma(2\gamma+1)}{2^{2\gamma-1}\Gamma^2(\gamma+\frac{1}{2})}\int_0^{\pi} f(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta})\sin^{2\gamma}\theta d\theta$$

şeklindedir. Bu formülde $\theta,\ \pi$ yi $\pi-\theta'$ ye dönüştürür ve Γ fonksiyonlarına ait olan

$$\frac{\Gamma^2(\gamma)}{\Gamma(2\gamma)}=\frac{1}{2^{2\gamma-1}}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\gamma+\frac{1}{2})}$$

formülünü kullanırsak, bu durumda

$$T^y f(x)=\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi} f(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta})\sin^{2\gamma}\theta d\theta$$

elde ederiz. Bu öteleme $(0,\infty)$ aralığında tanımlıdır. Bu ötelemeye R^+ daki genelleştirilmiş öteleme denir. $T^0 f(x)=f(x)$ olduğu aşikardır. Ayrıca eğer f(x) fonksiyonunun sürekli türevi varsa bu durumda,

$$\frac{\partial}{\partial y}T^y f(x)\Big|_{y=0}=0 \tag{2.2.2}$$

dir. Eğer f(x) fonksiyonunun ikinci mertebeden sürekli türevi varsa bu durumda $T^y f(x)$, (2.2.1) denkleminin çözümüdür ve (2.2.2) başlangıç koşulu sağlanır. Ayrıca $x=(x',x_n),\ y=(y',y_n),\ x,y\in R_+^n$ ve $x'=(x_1,x_2,...x_{n-1})$, $y'=(y_1,y_2,...y_{n-1})$ ve

$$\Delta_B=\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}+B_{x_n}$$

Laplace –Bessel operatörü olmak üzere,

$$\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}+\frac{2\gamma+1}{x_n}\frac{\partial u}{\partial x_n}=\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\partial^2 u}{\partial y_l^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2}+\frac{2\gamma+1}{y_n}\frac{\partial u}{\partial y_n}$$

denkleminin yukarıda verilen başlangıç koşulları altındaki çözümü,

$$T^y f(x)=\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\pi} f(x'-y',\sqrt{x_n^2+y_n^2-2x_n y_n\cos\theta})\sin^{2\gamma}\theta d\theta$$

şeklindedir. Bu operatöre genelleştirilmiş öteleme operatörü denir. Şimdi T^y operatörünün özelliklerini verelim. T^y operatörünün özellikleri adi ötelemenin özelliklerine benzerdir.

1. Lineerlik özelliği : $T^y\left\{af(x)+bg(x)\right\}=aT^y f(x)+bT^y g(x)$ dir. Gerçekten

$$T^y\left\{af(x)+bg(x)\right\}=T^y\left\{(af+bg)(x)\right\}$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^\pi (af+bg)\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right]\sin^{2\gamma}\theta d\theta$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\left\{\int_0^\pi af\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right]\right.$$

$$\left.+\int_0^\pi bg\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right]\right\}\sin^{2\gamma}\theta d\theta$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}a\int_0^\pi f\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right]\sin^{2\gamma}\theta d\theta$$

$$+\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}b\int_0^\pi g\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right]\sin^{2\gamma}\theta d\theta$$

$$=aT^y f(x)+bT^y g(x)$$

bulunur.

2.Pozitiflik Özelliği : Eğer $f(x)\geq 0$ ise $T^y f(x)\geq 0$ dır.

$$T^y f(x)=\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^\pi f\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right]\sin^{2\gamma}\theta d\theta$$

ele alalım. $f\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right]\geq 0$ ve $\sin\theta$,$0\leq\theta\leq\pi$ aralığında pozitif olduğundan yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı da pozitiftir. O halde,

$$T^y f(x)\geq 0$$

dir.

3. $T^y(1)=1$ dir.

$$T^y f(x)=\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^\pi f\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right]\sin^{2\gamma}\theta d\theta$$

eşitliğinde $f\left(x\right)=1$ alınırsa,

$$T^{y}(1)=\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_{0}^{\pi}\sin^{2\gamma}\theta d\theta$$

elde edilir ve

$$\int_{0}^{\pi}\sin^{2\gamma}\theta d\theta=\frac{\Gamma(\gamma+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\gamma+1)}$$

formülü de yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa,

$$T^{y}(1)=\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}.\frac{\Gamma(\gamma+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\gamma+1)}=1$$

sonucu elde edilir

4. Eğer $x\geq a$, $f(x)\equiv 0$ ise bu durumda $\left|x-y\right|\geq a$ için $T^{y}f(x)\equiv 0$ dır.

5. T^{y} **operatörü süreklidir:** Eğer $f_{n}(x)$ fonksiyonlar dizisi her sonlu aralıkta $f\left(x\right)$ fonksiyonuna düzgün yakınsak ise, bu durumda iki değişkenli fonksiyonlar dizisi $T^{y}f_{n}(x)$ her bir sonlu bölgede $T_{x}^{y}f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar.

6. T^{y} **operatörü sınırlıdır:**

$$\begin{aligned}\left|T^{y}f(x)\right| &= \left|\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_{0}^{\pi}f\left[\sqrt{x^{2}+y^{2}-2xy\cos\theta}\right]\sin^{2\gamma}\theta d\theta\right| \\ &\leq \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_{0}^{\pi}\left|f\left[\sqrt{x^{2}+y^{2}-2xy\cos\theta}\right]\right|\sin^{2\gamma}\theta d\theta \\ &\leq \sup_{x\geq 0}\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_{0}^{\pi}\left|f\left[\sqrt{x^{2}+y^{2}-2xy\cos\theta}\right]\right|\sin^{2\gamma}\theta d\theta \\ &\leq \sup_{x\geq 0}\left|f(x)\right|\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_{0}^{\pi}\sin^{2\gamma}\theta d\theta\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\left|T^y f(x)\right| \leq T^y \left| f(x)\right| \leq \sup_{x\geq 0}\left| f(x)\right|$$

olur.

7. T^y Operatörünün Yer Değiştirme Özelliği : $T^x T^y f(x) = T^y T^x f(x)$ dir.

8. Değişme Özelliği : $T_z^y T^z f(x) = T_x^z T^y f(x)$ dir.

9. Eşlenik Özelliği : Eğer sürekli $f(x)$ fonksiyonu için

$$\int_0^\infty x^{2\gamma+1}\left| f(x)\right| dx < \infty$$

ve $g(x)$, tüm $x \geq 0$ için sürekli sınırlı fonksiyon ise,

$$\int_0^\infty T^y f(x).g(x)x^{2\gamma+1}dx = \int_0^\infty f(x)T^y g(x)x^{2\gamma+1}dx$$

olur.

İspat : Kabul edelim ki $f(x)$ fonksiyonu sonlu bir aralıkta ikinci mertebeden türevlenebilir ise $f(x)=0$ dır ve $g(x) = J_p(\sqrt{\lambda}x)$, $(\lambda \leq 0)$ dır.

$$K(y) = \int_0^\infty T^y f(x) J_\gamma(\sqrt{\lambda}x)x^{2\gamma+1}dx$$

olsun. Şimdi $K(y)$ fonksiyonuna $B_x = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\gamma+1}{x}\frac{d}{dx}$ operatörünü uygulayalım. Bu durumda,

$$\int_0^\infty B_x(T_x^y f(x))g(x)x^{2\gamma+1}dx = \int_0^\infty \left[\frac{d^2}{dx^2}T^y f(x) + \frac{2\gamma+1}{x}\frac{d}{dx}T^y f(x)\right] g(x)x^{2\gamma+1}dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{d^2}{dx^2}T_x^y f(x)g(x)x^{2\gamma+1}dx$$

$$+\int_0^\infty \frac{2\gamma+1}{x}\frac{d}{dx}T_x^y f(x)g(x)x^{2\gamma+1}dx = I_1 + I_2$$

olur. Eşitliğin sağındaki birinci integrali hesaplayalım.

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}T^y f(x)\right) g(x)x^{2\gamma+1}dx$$

$$dv = \frac{\partial}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial x}T^y f(x)\right)dx \qquad \text{ve} \qquad u = g(x)x^{2\gamma+1}$$

olarak kısmi integrasyon uygulanırsa bu durumda,

$$I_1 = \frac{\partial}{\partial x}T^y f(x)g(x)\,x^{2\gamma+1}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}T^y f(x)\frac{\partial}{\partial x}(g(x)x^{2\gamma+1})dx$$

$$= -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}T^y f(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x}x^{2\gamma+1}dx - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}T^y f(x)g(x)\frac{2\gamma+1}{x}x^{2\gamma+1}dx$$

elde edilir. O halde,

$$I_1 + I_2 = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}T^y f(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x}x^{2\gamma+1}dx$$

olur. Buna kısmi integrasyon uygularsak sonuç olarak,

$$\int_0^\infty B_x(T^y f(x))g(x)x^{2\gamma+1}dx = \int_0^\infty T^y f(x)B_x g(x)x^{2\gamma+1}dx$$

bulunur.

10. $T^{-y} f(x) = T^y f(x)$

dir.

11. $\int_{\mathbb{R}^n} T^y f(x)x_n^{2\gamma}dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)x_n^{2\gamma}dx$

dir.

3.GENELLEŞTİRİLMİŞ ÖTELEME OPERATÖRÜ İLE ELDE EDİLEN RİESZ POTANSİYELLERİ

3.1. Genelleştirilmiş Öteleme Operatörü İle Elde Edilen Riesz Potansiyelleri

A. Hacıyev ve I. Aliyev 1988 yılında yayınladıkları makalelerinde ilk n-1 değişkene göre adi, son değişkene göre genelleştirilmiş öteleme operatörü ile Riesz potansiyellerini tanımlamış ve önemli özelliklerini incelemişlerdir [10].

Bu bölümde A. Hacıyev ve I. Aliyev tarafından verilen

$$\left(I_{B_1}^{\alpha} f\right)(x) = c(\alpha) \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y) T^y |x|^{\alpha-n-2\gamma} y_n^{2\gamma} dy$$

Riesz potansiyelini ele alacağız ve sonra bu potansiyelin özelliklerini inceleyeceğiz.

B_t Bessel operatörü olsun. $\mathbb{R}_+^n = \left\{x : x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right), x_n > 0\right\}$, S_+ Schwarz uzayı ve $S_+^{'}$ onun duali olsun. $1 \le p < \infty$ ve $\gamma > 0$ için, $L_{p,\gamma}$ uzayının aşağıdaki şekilde tanımlandığını biliyoruz:

$$L_{p,\gamma} = L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right) = \left\{ f : \| f \|_{p,\gamma} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} | f(x)|^p x_n^{2\gamma} dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Ayrıca, $\gamma > 0$ parametresi için ,

$$\Delta_{B_1} := \sum_{l=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} + \frac{2\gamma}{x_n} \frac{\partial}{\partial x_n}$$

Δ_{B_1} Laplace-Bessel operatörü olsun ve S_+ uzayında Fourier-Bessel dönüşümünü aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$\left(F_{B_1}\varphi\right)(y) := c_\gamma \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi(x) e^{-x^k y^k} J_{\gamma-\frac{1}{2}}\left(x_n y_n\right) x_n^{2\gamma} dx$$

$$c_\gamma = \left[\left(2\pi\right)^{\frac{n-1}{2}} 2^{\gamma-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\gamma + \frac{1}{2}\right) \right]^{-1}$$

Burada $x^k y^k = \langle x^k, y^k \rangle = x_1 y_1 + ... + x_{n-1} y_{n-1}$ dir. Diğer yandan, $\left(F_{B_1}^{-1}\varphi\right)(y) = \left(F_{B_1}\varphi\right)^{-1}$ özelliği geçerlidir. Ayrıca buradaki her bir $J_{\gamma-\frac{1}{2}}\left(x_n . y_n\right)$ ifadesi ikinci bölümde belirtildiği gibi,

$$-B_{y_n} Z = x_n^2 Z \quad , \quad Z(0) = 1 \quad , \quad Z_n^{'}(0) = 0$$

başlangıç değer probleminin çözümüdür.

$x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$, $y=\left(y_1,y_2,...,y_n\right)$, $x,y\in\mathbb{R}_+^n$ olmak üzere genelleştirilmiş öteleme operatörünü,

$$T^y\varphi(x):=\left[\frac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\gamma)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right]\int_0^\pi ...\int_0^\pi \varphi\left(x\ -y\ ,\sqrt{x_n^2+y_n^2-2x_ny_n\cos\alpha_1}\left(\sin^{2\gamma-1}\alpha_1 d\alpha_1\right)\right.$$

şeklinde tanımlarız. $T_{x_n}^y$ operatörü aşağıdaki konvolüsyon operatörünü oluşturur.

$$\left(f*\varphi\right)(x)=c_\gamma\int_{\mathbb{R}_+^n} f(x)\left[T_{x_n}^y\varphi\left(x\right)\right]\left(y_n^{2\gamma}dy\right)$$

Bundan sonra bu konvolüsyon operatörünü B_1 konvolüsyon operatörü olarak adlandıracağız. Fourier-Bessel dönüşümünün tanımından ve genelleştirilmiş ötelemenin özelliklerinden B_k konvolüsyon operatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir [11].

1. $f*\varphi=\varphi*f$
2. $F_{B_1}\left(f*\varphi\right)=F_{B_1}f\ F_{B_1}\varphi$
3. $\|f*\varphi\|_{\gamma,\gamma}\le\|f\|_{p,\gamma}\|\varphi\|_{q,\gamma}$, $1\le p,q\le\infty$, $\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1$

bu eşitsizlik Young eşitsizliği olarak bilinir.

Lemma 3.1.1.: $0<\alpha<n+2\gamma$ olmak üzere,

$$F_{B_1}\left(|x|^{-\alpha}\right)=C\left(n,\alpha,\gamma\right)|x|^{\alpha-n-2\gamma}$$

eşitliği dağılım anlamında geçerlidir.

3.2.Genelleştirilmiş Öteleme Operatörü İle Elde Edilen Riesz Potansiyeli

$$c(\alpha)=\left\{2^{\alpha-1}\pi^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{\Gamma\left(\gamma+\frac{n-\alpha}{2}\right)}\frac{1}{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}\right\}^{-1}\quad ,\quad 0<\alpha<n+2\gamma$$

olmak üzere aşağıdaki B_k konvolüsyon tipli integral operatörünü ele alalım.

$$\left(I_{B_1}^\alpha f\right)\left(x\right)=c\left(\alpha\right)\int_{\mathbb{R}_n} f(y)T^y|x|^{\alpha-n-2\gamma}y_n^{2\gamma}dy$$

$I_{B_1}^{\alpha}$ operatörüne, genelleştirilmiş öteleme operatörü ile ilgili Riesz Potansiyeli diyelim. Laplace-Bessel operatörünün negatif kesirli kuvvetlerini Fourier-Bessel dönüşümü yardımıyla aşağıdaki şekilde yazabiliriz [4].

$$F_{B_1}\left[\left(-\Delta_{B_1}\right)^{\frac{-\beta}{2}} f\right](x) = |x|^{-\beta}\left(F_{B_1} f\right)(x), \quad f \in S_+^1, \quad 0<\beta<n+2\gamma$$

Önce $\left(-\Delta_{B_1}\right)$ nın Fourier-Bessel dönüşümüne bakalım.

$$F_{B_1}\left[\left(-\Delta_{B_1}\right) f\right](x) = c_\gamma \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-ixy}\left(-\frac{\partial^2 f(y)}{\partial y_1^2} - B_{y_n} f(y)\right) J_{\gamma-\frac{1}{2}}\left(x_n y_n\right) y_n^{2\gamma} dy$$

$$= -c_\gamma \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-ixy}\left(\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}\right)\left(J_{\gamma-\frac{1}{2}}\left(x_n.y_n\right) y_n^{2\gamma} dy\right)$$

$$-c_\gamma \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-ixy}\left(B_{y_n} f\right)\left(J_n\left(x_n.y_n\right) y_n^{2\gamma} dy\right) = I_1 + I_2$$

Buradaki I_1 ifadesine iki kez kısmı integrasyon uygular ve $f \in S_+^1$ olduğunu dikkate alırsak,

$$I_1 = \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2\right) \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y) e^{-ixy}\left(J_{\gamma-\frac{1}{2}}\left(x_n.y_n\right) y_n^{2\gamma} dy\right)$$

eşitliğini elde ederiz. I_2 ifadesinde B_{y_n} için hesaplama yapalım. Diğerleri de aynı metotla yapılacaktır.

$$-c_\gamma \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-ixy} B_{y_n} f(y)\left(J_n\left(x_n.y_n\right) y_n^{2\gamma} dy\right)$$

$$= -c_\gamma \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-ixy} \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y_n^2} J_{\gamma_1-\frac{1}{2}}\left(x_n.y_n\right) y_n^{2\gamma} dy$$

$$-c_\gamma \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-ixy} \frac{2\gamma}{y_n} \frac{\partial f(y)}{\partial y_n}\left(J_{\gamma_1-\frac{1}{2}}\left(x_n.y_n\right) y_n^{2\gamma} dy\right)$$

Burada son ifadenin sağ tarafındaki birinci terim için , y_n koordinatına göre,

$$\frac{\partial^2 f(y)}{\partial y_n^2} dy_n = d\gamma \Rightarrow \frac{\partial f(y)}{\partial y_n} = \gamma$$

$$J_{\gamma-\frac{1}{2}}\left(x_n.y_n\right) y_n^{2\gamma} = u \Rightarrow$$

$$\left(\frac{2\gamma}{y_n} J_{\gamma-\frac{1}{2}}\left(x_n.y_n\right) + \frac{\partial J_{\gamma-\frac{1}{2}}\left(x_n.y_n\right)}{\partial y_n} \right) y_n^{2\gamma} dy_n = du$$

dönüşümleri altında kısmi integrasyon uygulanırsa, ikinci terim bu dönüşümden gelen terimle sadeleşir ve ,

$$= c_\gamma \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-ixy} \frac{\partial f}{\partial y_n} \frac{\partial J_{\gamma-\frac{1}{2}}\left(x_n.y_n\right)}{\partial y_n} \left(J_{\gamma-\frac{1}{2}}\left(x_n.y_n\right) y_n^{2\gamma} dy \right)$$

sonucu elde edilir. Yukarıdaki metodu tekrar uygularsak, Bessel operatörünün tanımından,

$$= c_\gamma \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-ixy} f(y) \left[B_{y_n} J_{\gamma-\frac{1}{2}}\left(x_n.y_n\right) \right] \left(J_{\gamma-\frac{1}{2}}\left(x_n.y_n\right) y_n^{2\gamma} dy \right)$$

ifadesini yazarız. Diğer taraftan,

$$\int_0^\infty f(y) B_{y_n} J_{\gamma-\frac{1}{2}}\left(x_n.y_n\right) y_n^{2\gamma} dy_n = -x_n^2 \int_0^\infty f(y) J_{\gamma-\frac{1}{2}}\left(x_n.y_n\right) y_n^{2\gamma} dy_n$$

olduğunu biliyoruz. Bu özelliği kullanarak,

$$= x_n^2 c_\gamma \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-ixy} f(y) \left(J_{\gamma-\frac{1}{2}}\left(x_n.y_n\right) y_n^{2\gamma} dy \right)$$

ifadesini elde ederiz. Bu metodu diğer terimler için de tek tek uygularsak,

$$I_2 = \left(x_n^2\right) c_\gamma \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-ixy} f(y) \left(J_{\gamma-\frac{1}{2}}\left(x_n.y_n\right) y_n^{2\gamma} dy \right)$$

yazarız.

I_1 ve I_2 den,

$$F_{B_1}\left[\left(-\Delta_{B_1}\right) f\right](x) = |x|^2 \left(F_{B_1} f\right)(x)$$

demektir. $\beta > 0$ olmak üzere,

$$F_{B_1}\left[\left(-\Delta_{B_1}\right)^{\frac{\beta}{2}} f\right](x)=|x|^{\beta}\left(F_{B_1} f\right)(x), \quad f \in S_{+}^{1} \ , \quad 0<\beta<n+2\gamma$$

yazarız.

Ayrıca , yine Laplace-Bessel operatörünün negatif kesirli kuvvetlerini,

$$F_{B_1}\left[\left(-\Delta_{B_1}\right)^{\frac{-\beta}{2}} f\right](x)=|x|^{-\beta}\left(F_{B_1} f\right)(x) \quad f \in S_{+}^{1}, \ 0<\beta<n+2\gamma$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Şimdi genelleştirilmiş öteleme operatörü ile elde edilen Riesz potansiyelinin elde edilişini veren önemli bir teoremi verebiliriz.

Teorem 3.2.1. : Eğer, $0<\alpha<n+2\gamma$ ise, keyfi bir $f \in S_{+}^{k}$ için,

$$I_{B_k}^{\alpha} f(x)=\left(-\Delta_{B_k}\right)^{\frac{-\alpha}{2}} f(x)$$

dir.

Sonuç 3.2.1. : Eğer $0<\alpha,\beta$ ve $\alpha+\beta<2\gamma$ olmak üzere, I_{B_1} nın yarı grup özelliği, $I_{B_1}^{\alpha} I_{B_1}^{\beta}=I_{B_1}^{\alpha+\beta}$ şeklindedir.

Sonuç 3.2.2. :

$$2<\alpha<n+2\gamma \ \text{ ve } \ f \in S_{+}^{1} \quad \text{ise;}$$

$$\left(-\Delta_{B_1}\right) I_{B_1}^{\alpha} f=I_{B_1}^{\alpha-2} f=I_{B_1}^{\alpha}\left(-\Delta_{B_1} f\right)$$

dır.

Sonuç 3.2.1. yardımıyla,

$$\int_{\mathbb{R}_{+}^{n}} |y|^{\alpha-n-2\gamma} T_{x_n}^{y}\left(|x|^{\beta-n-2\gamma}\left(y_n^{2\gamma} dy\right)\right)=\frac{c(\alpha) c(\beta)}{c(\alpha+\beta)}$$

yazabiliriz. Gerçekten,

$$\left(I_{B_1}^{\alpha} f\right)(x)=c(\alpha) \int_{\mathbb{R}_n} f(y) T_{x_n}^{y}\left(|x|^{\alpha-n-2\gamma}\right)\left(y_n^{2\gamma} dy\right)$$

ifadesinde f yerine δ Dirac fonksiyonunu kullanırsak, Dirac fonksiyonunun integral altındaki özelliğinden;

$$\left(I_{B_1}^{\alpha}\delta\right)(x)=c(\alpha)\int_{\mathbb{R}_+^n}\delta(y)T_{x_n}^{y}\left(|x|^{\alpha-n-2\gamma}\right)\left(y_n^{2\gamma}dy\right)$$

$$\left(I_{B_1}^{\alpha}\delta\right)(x)=c(\alpha)\left(|x|^{\alpha-n-2\gamma}\right)$$

$$I_{B_1}^{\beta}\left(I_{B_1}^{\alpha}\delta\right)(x)=I_{B_1}^{\beta}\left(c(\alpha)\left(|x|^{\alpha-n-2\gamma}\right)\right)$$

$$\left(I_{B_1}^{\beta}\left(I_{B_1}^{\alpha}\delta\right)\right)(x)=c(\alpha)c(\beta)\int_{\mathbb{R}_+^n}|y|^{\alpha-n-2\gamma}\,T_{x_n}^{y}\left(|x|^{\beta-n-2\gamma}\right)\left(y_n^{2\gamma}dy\right)$$

eşitliğini yazarız. I_{B_1} potansiyelinin yapısını göz önüne alarak,

$$I_{B_1}^{\alpha+\beta}\left(\delta(x)\right)=c(\alpha+\beta)\int_{\mathbb{R}_n}\delta(y)T_{x_n}^{y}\left(|x|^{\alpha+\beta-n-2\gamma}\right)\left(y_n^{2\gamma}dy\right)$$

$$I_{B_1}^{\alpha+\beta}\left(\delta(x)\right)=c(\alpha+\beta)\left(|x|^{\alpha+\beta-n-2\gamma}\right)$$

buluruz. Son bulduğumuz iki ifadeyi ve I_{B_1} potansiyelinin yarı grup özelliğini kullanarak $|x|=1$ alırsak;

$$\int_{\mathbb{R}_+^n}|y|^{\alpha-n-2\gamma}\,T_{x_n}^{y}\left(|x|^{\beta-n-2\gamma}\right)\left(y_n^{2\gamma}dy\right)=\frac{c(\alpha)c(\beta)}{c(\alpha+\beta)}$$

eşitliğini elde ederiz.

Ayrıca $\gamma_{\vartheta}(f)(x)=f(\vartheta)>0$ ile tanımlanan γ_{ϑ} genişleme operatörünü göz önüne alırsak, $I_{B_1}^{\alpha}$ operatörü için aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz.

$$\gamma_{\vartheta^{-1}}\left[I_{B_1}^{\alpha}\gamma_{\vartheta}f\right](x)=\gamma_{\vartheta^{-1}}\left[c(\alpha)\int_{\mathbb{R}_+^n}f(\vartheta y)T_{x_n}^{y}\left(|x|^{\alpha-n-2\gamma}\right)\left(y_n^{2\gamma}dy\right)\right]$$

$$=\gamma_{\vartheta^{-1}}\left[c(\alpha)\int_{\mathbb{R}_+^n}f(y)T_{x_n}^{\frac{y}{\vartheta}}\left(|x|^{\alpha-n-2\gamma}\right)\vartheta^{-n-2\gamma}\left(y_n^{2\gamma}dy\right)\right]$$

$$=c(\alpha)\int_{\mathbb{R}_+^n}f(y)T_{\frac{x_n}{\vartheta}}^{\frac{y}{\vartheta}}\left(|x|^{\alpha-n-2\gamma}\right)\vartheta^{-n-2\gamma}\left(y_n^{2\gamma}dy\right)$$

$$\gamma_{\vartheta^{-1}}\left[I_{B_1}^{\alpha}\gamma_{\vartheta}f\right](x)=\vartheta^{-\alpha}I_{B_1}^{\alpha}f(x)$$

$$\|\gamma_{\vartheta}f\|_{p,\gamma}=\left(\int_{\mathbb{R}_n}\left|f(\vartheta x)\right|^{p}\left(x_n^{2\gamma}dx\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|\gamma_{\vartheta}f\|_{p,\gamma}=\vartheta^{\frac{-n-2\gamma}{p}}\|f\|_{p,\gamma}$$

4.AĞIRLIKLI LORENTZ UZAYLARINDA B-RİESZ POTANSİYELLERİNİN SINIRLILIĞI

Bu bölümde fonksiyonların γ-yeniden düzenlemesini ve buna bağlı olarak $L_{p,q,\gamma}$ Lorentz uzaylarını tanımlayacağız. $L_{p,q,\gamma}$ Lorentz uzaylarında B-konvolüsyonu için yeniden düzenlemeye bağlı bir eşitsizlik ispat edeceğiz [12]. Sonra bu eşitsizlik yardımıyla $I_{\alpha,\gamma}$ B-Riesz potansiyeli için Hardy-Littlewood-Sobolev tipi eşitsizliği ispat edeceğiz [13].

4.1. Ağırlıklı Lorentz Uzayları

$E \subset \mathbb{R}^n_+$ herhangi bir ölçülebilir bir küme ve $\left|E\right|_\gamma = \int\limits_E x_n^\gamma \, dx$ olsun. Kabul edelim ki $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyondur. Bu durumda f nin $\left[0,\infty\right)$ da γ-azalan yeniden düzenlemesi

$$f_\gamma^*(t) = \inf\left\{s > 0 : f_{*,\gamma}(s) \le t\right\}, \left(t \ge 0\right)$$

ile tanımlanır, burada $f_{*,\gamma}$, f nin

$$f_{*,\gamma}(s) = \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n_{k,+} : \left|f(x)\right| > s\right\}\right|_\gamma \quad (s \ge 0)$$

ile tanımlı γ-dağılım fonksiyonudur.

Fonksiyonların γ-yeniden düzenlemesinin bazı özellikleri aşağıdaki gibi verilebilir.

1-)Eğer $0 < p < \infty$ ise o zaman

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left|f(x)\right|^p x_n^\gamma dx = \int\limits_0^\infty \left(f_\gamma^*\left(t\right)\right)^p dt \tag{3}$$

2-) $\forall t > 0$ için,

$$\sup_{\left|E\right|_\gamma = t} \int\limits_E \left|f(x)\right| \left(x'\right)^\gamma dx = \int\limits_0^t f_\gamma^*(s) ds \tag{4}$$

3-)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left|f(x)g(x)\right| x_n^\gamma dx \le \int\limits_0^\infty f_\gamma^*(t) g_\gamma^*(t) dt \tag{5}$$

$WL_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$ ile

$$\left\|f\right\|_{WL_{p,\gamma}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f_\gamma^*(t) < \infty \quad , \quad 1 \le p < \infty$$

olacak biçimde tüm ölçülebilir f fonksiyonlarının zayıf $L_{p,\gamma}$ uzayını göstereceğiz.

$f_\gamma^{**}:(0,\infty)\to[0,\infty]$ fonksiyonu $f_\gamma^{**}(t)=\frac{1}{t}\int\limits_0^t f_\gamma^{*}(s)ds$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.1.1. : Eğer $0<p,q<\infty$ ise, o zaman $L_{p,q,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)=L_{p,q}\left(\mathbb{R}_+^n, x_n^\gamma dx\right)$ Lorentz uzayı tüm ölçülebilir f fonksiyonlarının sınıflarının kümesidir öyle ki f nin sonlu yarı-normu

$$\|f\|_{p,q,\gamma}\equiv\|f\|_{L_{p,q,\gamma}}=\left(\int\limits_0^\infty\left(t^{1/p}f_\gamma^{*}(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}<\infty$$

şeklinde verilir. Eğer $0<p\le\infty, q=\infty$ ise, o zaman $L_{p,\infty,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)=WL_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ dir.

Eğer $1\le q\le p$ veya $\mathrm{p}=q=\infty$ ise, o zaman $\|f\|_{p,q,\gamma}$ bir normdur. Eğer $\mathrm{p}=q=\infty$ ise, o zaman $L_{\infty,\infty,\gamma}\left(\mathbb{R}_{k,+}^n\right)$ uzayı $L_{\infty,\gamma}\left(\mathbb{R}_{k,+}^n\right)$ ile gösterilir.

$1<p,q<\infty$ olduğunda, $L_{p,q,\gamma}$ Lorentz uzayı üzerinde diğer bir yarı-norm

$$\|f\|_{(p,q),\gamma}=\left(\int\limits_0^\infty\left(t^{1/p}f_\gamma^{**}(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

ile tanımlanır.

Eğer $1<p\le\infty$ ve $1\le q\le\infty$ ise, o zaman

$$\|f\|_{p,q,\gamma}\le\|f\|_{(p,q),\gamma}\le p'\|f\|_{p,q,\gamma}$$

Buradan $\|f\|_{p,q,\gamma}$ ile $\|f\|_{(p,q),\gamma}$ yarı-normları birbirine denktir.

Lemma 4.1.2. : $1\le p\le\infty$, $f\in L_{p,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)$ olsun. O zaman $\forall y\in\mathbb{R}_+^n$ için;

$$\left\|T^y f(x)\right\|_{L_{p,\gamma}}\le\|f\|_{L_{p,\gamma}}$$

dir.

İspat:

$$T^y f(x)=C_\gamma\int\limits_0^\pi f\left(x'-y',\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}\right)\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha$$

ve

$$C_\gamma = \left(\int_0^\pi \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha \right)^{-1} = \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2} \right)}{\Gamma(\gamma)\sqrt{\pi}}$$

$p = 1$ için ispatlayalım.

$$\begin{aligned}
\left\| T^y f(x) \right\|_{L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \left| T^y f(x) \right| x_n^\gamma dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^n} \left| c_\gamma \int_0^\pi f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2} \right) \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha \right| x_n^\gamma dx \\
&\leq c_\gamma \int_{\mathbb{R}_+^n} \int_0^\pi \left| f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2} \right) \right| \sin^{\gamma-1} \alpha x_n^\gamma d\alpha dx
\end{aligned}$$

dir. Şimdi integrasyon sırasını değiştirelim:

$$\begin{aligned}
&= c_\gamma \int_0^\pi \int_{\mathbb{R}_+^n} \left| f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2} \right) \right| \sin^{\gamma-1} \alpha x_n^\gamma d\alpha dx \\
&= \underbrace{c_\gamma \int_0^\pi \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha}_{1} \underbrace{\int_{\mathbb{R}_+^n} \left| f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2} \right) \right| x_n^\gamma dx}_{\| f \|_{L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}} \\
&= \| f \|_{L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}
\end{aligned}$$

$p = 1$ için;

$$\left\| T^y f(.) \right\|_{L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \leq \| f \|_{L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}$$

elde edilir.

$p = \infty$ için $\left\| T^y f(.) \right\|_{L_{\infty,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \leq \| f \|_{L_{\infty,\gamma}\left(\mathbb{R}_+^n\right)}$ olduğunu gösterelim.

$$\left\| T^y f(.) \right\|_{L_\infty\left(\mathbb{R}_+^n\right)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}_+^n} \left| T^y f(x) \right|$$

$$\begin{aligned}
\left| T^y f(x) \right| &= \left| c_\gamma \int_0^\pi f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2} \right) \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha \right| \\
&\leq c_\gamma \int_0^\pi \left| f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos\alpha + y_n^2} \right) \right| \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha \\
&\leq c_\gamma \int_0^\pi \| f \|_{L_\infty\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha
\end{aligned}$$

$$= \| f \|_{L_\infty\left(\mathbb{R}_+^n\right)} \cdot \underbrace{c_\gamma \int_0^\pi \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha}_{1} = \| f \|_{L_\infty\left(\mathbb{R}_+^n\right)}$$

elde edilir. $1 < p < \infty$ için;

$$\left.\begin{array}{l} \left\| T^y f(.) \right\|_{L_{1,\gamma}} \le \| f \|_{L_{1,\gamma}} \\ \left\| T^y f(.) \right\|_{L_\infty} \le \| f \|_{L_\infty} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{interpolasyon teoreminden}} \left\| T^y f(.) \right\|_{L_{p,\gamma}} \le \| f \|_{L_{p,\gamma}}$$

elde edilir.

Lemma 4.1.3. : $A = \left(A', A_n\right) \subset \mathbb{R}_+^n$ herhangi bir ölçülebilir küme, $A' = A_1 \times ... \times A_{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $A_n \subset (0,\infty)$ olsun. Bu durumda herhangi bir $y \in \mathbb{R}_+^n$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\int_A T^y g(x) x_n^\gamma dx = C_\gamma \int_{(y,0)+\overline{A}} g\left(z', \sqrt{z_n^{\,2} + z_{n+1}^2}\right) d\mu\left(z, z_{n+1}\right), \tag{6}$$

Burada $m = \sup A_n$ olmak üzere $\overline{A} = \left(\left(-m, m\right) \times \left[0, m\right)\right) \times A'$ve $d\mu\left(z, z_{n+1}\right) = z_{n+1}^{\gamma-1}\, dz\, dz_{n+1}$ dir.

Lemma 4.1.3. ün ispatı ;

$$z' = x',\ z_n = x_n \cos\alpha, z_{n+1} = x_n \sin\alpha, (0 \le \alpha < \pi) \tag{7}$$

değişken değiştirmesi ile kolayca elde edilir.

Lemma 4.1.4. : $1 \le r \le s \le \infty$ ve γ, ω $\left(0,\infty\right)$ aralığında pozitif ve hemen hemen her yerde ölçülebilir iki fonksiyon olsun. O zaman φ fonksiyonundan bağımsız bir C sabiti vardır öyle ki;

$$\left(\int_o^\infty \left(\int_0^t \varphi(\tau) d\tau \right)^s \omega(t) dt \right)^{1/s} \le C \left(\int_0^\infty \varphi(t)^r \gamma(t) dt \right)^{1/r} \tag{8}$$

dir. Ancak ve ancak eğer;

$$K = \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty \omega(\tau) d\tau \right)^{1/s} \left(\int_0^t \gamma\left(\tau\right)^{1-r'} d\tau \right)^{1/r'} < \infty \tag{9}$$

Burada $r + r' = rr'$ dir. Üstelik, eğer (8) deki en iyi C sabiti ve (9) da tanımlanan K ifadesi

$$K \le C \le k(r,s) K \tag{10}$$

Burada (10) daki $k(r,s)$ sabiti farklı formlarda da yazılabilir. Örneğin ([4] e bakınız.)

$$k(r,s)=r^{1/s}(r')^{1/r'} \quad \text{veya} \quad k(r,s)=s^{1/s}(s')^{1/r'} \quad \text{veya} \quad k(r,s)=(1+s/r')^{1/s}(1+r'/s)^{1/r'}$$

Lemma 4.1.5. : $1\le r\le s\le\infty$ ve γ,ω $(0,\infty)$ aralığında pozitif ve hemen hemen her yerde ölçülebilir iki fonksiyon olsun. O zaman φ fonksiyonundan bağımsız bir C sabiti vardır öyle ki;

$$\left(\int_0^\infty\left(\int_t^\infty \varphi(\tau)d\tau\right)^s \omega(t)dt\right)^{1/s} \le C\left(\int_0^\infty \varphi(t)^r\gamma(t)dt\right)^{1/r} \tag{11}$$

Ancak ve ancak eğer ;

$$K_1=\sup_{t>0}\left(\int_0^t \omega(\tau)d\tau\right)^{1/s}\left(\int_t^\infty \gamma(\tau)^{1-r'}d\tau\right)^{1/r'}<\infty$$

Zaten, (11) deki en iyi C sabiti , $K_1\le C\le k(r,s)K_1$ eşitsizliğini sağlar. 4.1.3 ve 4.1.4. lemmaları hatırlarsak, $1\le r=s<\infty$ için B. Muckenhoupt ile, $r<s$ için de J.S. Bradley, V.M. Kokilashvili [14] , V.G. Mazya ile ispatlanmış olur.

Genelleştirilmiş öteleme $T^y f$ ile f fonksiyonunun γ -yeniden düzenlemesi arasındaki ilişki aşağıda verilmektedir.

Lemma 4.1.6. : Herhangi ölçülebilir bir küme $A\subset\mathbb{R}_+^n$ ve $y\in\mathbb{R}_+^n$ için aşağıdaki eşitlik verilebilir.

$$\sup_{|A|_\gamma=t}\int_A \mathrm{T}^y\left|f(x)\right|x_n^\gamma dx=C_\gamma\int_0^t f_\gamma^*(s)ds \tag{12}$$

İspat: Lemma 4.1.3.'den

$$\int_A \mathrm{T}^y\left|f(x)\right|(x_n^\gamma dx=C_\gamma\int_{(y,0)+\overline{A}}\left|\overline{f}(z,z_{n+1})\right|d\mu\left(z,z_{n+1}\right) \tag{13}$$

Burada $\overline{f}(z,z_{n+1})=f\left(z',\sqrt{z_n^2+z_{n+1}^2}\right)$ dir. $\overline{f}(z,z_{n+1})$ fonksiyonu için (4) eşitliğinin benzeri

$$\sup_{\mu(\overline{A})=t}\int_{\overline{A}}\left|\overline{f}\left(z,z_{n+1}\right)\right|d\mu\left(z,z_{n+1}\right)=\int_0^t\left(\overline{f}\right)_\mu^*(s)ds \tag{14}$$

doğrudur. Burada $\left(\overline{f}\right)_\mu^*(s)=\inf\left\{t>0:\mu\left(\left\{\left(z,z_{n+1}\right):\left|\overline{f}\left(z,z_{n+1}\right)\right|>t\right\}\right)\le s\right\}$,

$\mu\left(\left(y,0\right)+\overline{A}\right)=\left|A\right|_\gamma$ ve $\left(\overline{f}\right)_\mu^*(s)=_\mu^*(s)$ dir. (13) ve (14). eşitliklerden

$$\sup_{|A|_\gamma = t} \int_A T^y \left| f(x) \right| x_n^\gamma dx = C_\gamma \sup_{\mu(\overline{A})=t} \int_{(y,0)+\overline{A}} \left| \overline{f}\left(z, z_{n+1}\right) \right| d\mu\left(z, z_{n+1}\right)$$

$$= C_\gamma \int_0^t \left(\overline{f}\right)_\mu^* (s) ds = C_\gamma \int_0^t f_\gamma^*(s) ds$$

Bu sonuçla Lemma 4.1.6. ispatlanmış olur.

4.2. Ağırlıklı Lorentz Uzaylarında B-Riesz Potansiyellerinin Sınırlılığı

Teorem 4.2.1. f, g $\mathbb{R}_{k,+}^n$ da pozitif ölçülebilir iki fonksiyon olsun. O zaman $\forall t > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left(f \otimes g\right)_\gamma^{**}(t) \le C_\gamma \left(f_\gamma^{**}(t) \int_0^t g_\gamma^{**}(u) du + \int_t^\infty f_\gamma^*(u) g_\gamma^{**}(u) du \right) \qquad (1)$$

İspat: Ölçülebilir bir E_t, $t > 0$ kümesini seçelim öyle ki

$$\left\{ x \in \mathbb{R}_{k,+}^n : \left| f(x) \right| > f_\gamma^*(t) \right\} \subset E_t \subset \left\{ x \in \mathbb{R}_{k,+}^n : \left| f(x) \right| \ge f_\gamma^*(t) \right\}$$

$$f_1(x) = \left(f(x) - f_\gamma^*(t) \right)_{\chi_{E_t(x)}} \quad , \quad f_2(x) = f(x) - f_1(x)$$

olsun. $\mathbb{R}_+^n$ da $\left|A\right|_\gamma = t$ ölçülü herhangi bir A kümesi için

$$\int_A \left(g \otimes f_1\right)(x)(x')^\gamma dx = \int_{\mathbb{R}_{k,+}^n} f_1(y)(y')^\gamma dy \int_A \mathrm{T}^y g(x)(x')^\gamma dx$$

elde edilir. Bu nedenle, Lemma 4.1.6 dan

$$\int_A \left(g \otimes f_1\right)(x) x_n^\gamma dx \le C_\gamma \int_0^t g_\gamma^*(u) du \int_{\mathbb{R}_+^n} f_1(y) y_n^\gamma dy$$

$$\le C_\gamma \int_0^t g_\gamma^{**}(u) du \int_{\mathbb{R}_+^n} f_1(y) y_n^\gamma dy$$

$$= C_\gamma \left(\int_{E_t} f(y) y_n^\gamma dy - t f_\gamma^*(t) \right) \int_0^t g_\gamma^{**}(u) du$$

elde ederiz. Böylece (4)'ten

$$\left(g \otimes f_1\right)_\gamma^{**}(t) = \frac{1}{t} \sup_{|A|_\gamma = t} \int_A \left(g \otimes f_1\right)_\gamma (x) x_n^\gamma dx$$

$$\le C_\gamma \left(f_\gamma^{**}(t) - f_\gamma^*(t) \right) \int_0^t g_\gamma^{**}(u) du$$

Bundan sonra, $\left(g \otimes f_2\right)_\gamma^{**}(t)$ hesaplanır. Lemma 4.1.6. ve (4) eşitliği kullanılırsa,

$$\left(Tg(x)\right)_{\gamma}^{*}(s)\le\left(Tg(x)\right)_{\gamma}^{**}(s)=\frac{1}{s}\sup_{|A|_{\gamma}=s}\int_{A}T^{y}g(x)y_{n}^{\gamma}dy=C_{\gamma}g_{\gamma}^{**}(s) \qquad (15)$$

elde ederiz. Bu nedenle (5) ifadesinden,

$$\left(g\otimes f_{2}\right)(x)\le\int_{0}^{\infty}(f_{2})_{\gamma}^{*}(u)\left(Tg(x)\right)_{\gamma}^{*}(u)du$$

$$\le C_{k,\gamma}\int_{0}^{\infty}\left(f_{2}\right)_{\gamma}^{*}(u)g_{\gamma}^{**}(u)du=C_{k,\gamma}\left(f_{\gamma}^{*}(t)\int_{0}^{t}g_{\gamma}^{**}(u)du+\int_{t}^{\infty}f_{\gamma}^{*}(t)g_{\gamma}^{**}(u)du\right)$$

elde ederiz. (4)'den

$$\left(g\otimes f_{2}\right)_{\gamma}^{**}(t)\le C_{\gamma}\left(f_{\gamma}^{*}(t)\int_{0}^{t}g_{\gamma}^{**}(u)du+\int_{t}^{\infty}f_{\gamma}^{*}(u)g_{\gamma}^{**}(u)du\right)$$

elde edilir. O zaman (1) eşitliğine ulaşırız ki, teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.2 : $\left(I_{B_1}^{\alpha}f\right)(x)=\int_{\mathbb{R}_{+}^{n}}f(y)T^{y}|x|^{\alpha-n-\gamma}y_{n}^{\gamma}dy$ *B*-Riesz potansiyeli için

$$\left(I_{B_1}^{\alpha}f\right)_{\gamma}^{*}(t)\le\left(I_{B_1}^{\alpha}f\right)_{\gamma}^{**}(t)$$

$$\le A\left(t^{\frac{\alpha}{Q}-1}\int_{0}^{t}f_{\gamma}^{*}(s)ds+\int_{t}^{\infty}s^{\frac{\alpha}{Q}-1}f_{\gamma}^{*}(s)ds\right) \quad , \qquad (2)$$

eşitsizliği sağlanır, burada $A=C_{\gamma}\left(Q/\alpha\right)^{2}\omega\left(n,k,\gamma\right)^{(Q-\alpha)/Q}$ ve $\omega\left(n,k,\gamma\right)=|B(0,1)|_{\gamma}$, $0<\alpha<Q,\ \ (Q=n+\gamma)$ dir [15].

İspat: $K_{\alpha}(x)=\dfrac{1}{|x|^{\alpha-Q}}$ için,

$$\left(K_{\alpha}\right)_{\gamma}^{*}(t)=\left(\frac{A}{Qt}\right)^{1-\frac{\alpha}{Q}} \quad , \quad \left(K_{\alpha}\right)_{\gamma}^{**}(t)=\frac{Q}{\alpha}\left(K_{\alpha}\right)_{\gamma}^{*}(t)$$

ifadelerini elde ederiz. (1) eşitsizliği kullanılarak (2) eşitsizliğine ulaşılır. Buradan teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.3. (Lorentz uzaylarında B-Riesz potansiyeli için için Hardy-Littlewood-Sobelev teoremi).

1. $1<\alpha<Q/\alpha$, $1\le r\le s\le\infty$, $f\in L_{p,r,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ olsun. Bu durumda

$\left(I_{B_1}^{\alpha}f\right)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}_{+}^{n}} f(y)T^{y}|x|^{\alpha-n-\gamma}\,y_n^{\gamma}dy$ B-Riesz potansiyelinin $L_{p,r,\gamma}\left(\mathbb{R}_{k,+}^{n}\right)\to L_{q,s,\gamma}\left(\mathbb{R}_{k,+}^{n}\right)$ ye

sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{\alpha}{Q}$ olmasıdır. Burada $I_{B_1}^{\alpha}$ için

$$\left\|I_{B_1}^{\alpha}f\right\|_{L_{q,s,\gamma}}\le AK(p,q,r,s)\|f\|_{L_{p,r,\gamma}}$$

eşitsizliği sağlanır ve $K(p,q,r,s)=\left((p')^{\frac{1}{s}}\left(\dfrac{p's'}{r'}\right)^{\frac{1}{r'}}+\left(\dfrac{qr}{s}\right)^{\frac{1}{s}}q^{\frac{1}{r'}}\right)$, $p'=p/(p-1)$ dir.

2. Eğer $p=1$, $1\le r\le\infty$ $f\in L_{1,r,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ olsun. O zaman $I_{B_1}^{\alpha}f\in WL_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ ve $I_{\alpha,\gamma}f$ nin $L_{1,r,\gamma}\left(\mathbb{R}_{k,+}^{n}\right)\to WL_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_{k,+}^{n}\right)$ ye sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $1-1/q=\alpha/Q$ olmasıdır. Burada

$$\left\|I_{B_1}^{\alpha}f\right\|_{WL_{q,\gamma}}\le 2A\|f\|_{L_{1,r,\gamma}}\quad\text{dir.}$$

3. Eğer $p=\dfrac{Q}{\alpha}$ $r=1$ ve $f\in L_{\frac{Q}{\alpha},1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$, o zaman $I_{B_1}^{\alpha}f\in L_{\infty,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ ve

$$\left\|I_{B_1}^{\alpha}f\right\|_{L_{\infty,\gamma}}\le 2A\|f\|_{L_{\frac{Q}{\alpha},1,\gamma}}$$

dir [15,16,17].

İspat:

1-) $1<p<\dfrac{Q}{\alpha}$, $1\le r\le s\le\infty$, $f\in L_{p,r,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ ve $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{\alpha}{Q}$ olsun.(2) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\left\|I_{B_1}^{\alpha}f\right\|_{L_{q,s,\gamma}}&=\left\|\left(I_{B_1}^{\alpha}f\right)_{\gamma}^{*}(t)\,t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{s}}\right\|_{L_s(0,\infty)}\\&\le A_1\left(\int_0^{\infty}t^{s\left(\frac{\alpha}{Q}-1\right)+\frac{s}{q}-1}\left(\int_0^{t}f_{\gamma}^{*}(s)ds\right)^{s}dt\right)^{1/s}\\&+A\left(\int_0^{\infty}\left(\int_t^{\infty}s^{\frac{\alpha}{Q}-1}f_{\gamma}^{*}(s)ds\right)^{s}t^{\frac{s}{q}-1}dt\right)^{1/s}\end{aligned}$$

Lemma 4.1.4’ den

$$\left(\int_0^\infty t^{s\left(\frac{\alpha}{Q}-1\right)+\frac{s}{q}-1}\left(\int_0^t f_\gamma^*(\tau)\,d\tau\right)^s dt\right)^{1/s} \le C_1\left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f_\gamma^*(t)\right)^r \frac{dt}{t}\right)^{1/r}$$

eşitsizliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{t>0}\left(\int_t^\infty \tau^{s\left(\frac{\alpha}{Q}-1\right)+\frac{s}{q}-1}d\tau\right)^{1/s}\left(\int_0^t \tau^{\left(\frac{r}{p}-1\right)(1-r')}d\tau\right)^{1/r'}$$

$$= s^{-\frac{1}{s}}\left(1-\frac{\alpha}{Q}-\frac{1}{q}\right)^{-\frac{1}{s}}\left(\frac{p'}{r'}\right)^{\frac{1}{r'}}\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{Q}-1+\frac{1}{q}+1-\frac{1}{p}} < \infty \Leftrightarrow \frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{Q}$$

olmasıdır . Burada

$$\mathrm{C}_1 \le s^{-\frac{1}{s}}\left(1-\frac{\alpha}{Q}-\frac{1}{q}\right)^{-\frac{1}{s}}\left(\frac{p'}{r'}\right)^{\frac{1}{r'}} s^{1/s}(s')^{1/r'} = (p')^{\frac{1}{s}}\left(\frac{p's'}{q'}\right)^{\frac{1}{r'}}$$

dir. Ayrıca, Lemma 4.1.5 'ten

$$\left(\int_0^\infty\left(\int_t^\infty \tau^{\frac{\alpha}{Q}-1} f_\gamma^*(\tau)d\tau\right)^s t^{\frac{s}{q}-1}dt\right)^{1/s} \le C_2\left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f_\gamma^*(t)\right)^r \frac{dt}{t}\right)^{1/r}$$

eşitsizliğin geçerliliği için gerek ve yeter koşul;

$$\sup_{t>0}\left(\int_0^t \tau^{\frac{s}{q}-1}d\tau\right)^{1/s}\left(\int_t^\infty \tau^{\left(\frac{\alpha}{Q}-1\right)r'-\frac{r'}{p}+\frac{r'}{r}}d\tau\right)^{1/r'}$$

$$=\left(\frac{q}{s}\right)^{\frac{1}{s}}(r')^{-\frac{1}{r'}}\left(\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{Q}\right)^{-\frac{1}{r'}}\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{Q}-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} < \infty \Leftrightarrow \frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{Q}$$

Burada

$$\mathrm{C}_2 \le \left(\frac{q}{s}\right)^{\frac{1}{s}}(r')^{-\frac{1}{r'}}\left(\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{Q}\right)^{-\frac{1}{r'}} r^{1/s}(r')^{1/r'} = \left(\frac{qr}{s}\right)^{\frac{1}{s}} q^{\frac{1}{r'}}$$

dir. Bu eşitsizlikler ve (3) eşitliği kullanılarak;

$$\left\|I_{B_1}^\alpha f\right\|_{L_{q,s,\gamma}} \le A\left(C_1+C_2\right)\left\|f\right\|_{L_{p,r,\gamma}}$$

elde edilir.

Karşıt olarak, farz edelim ki $I_{B_1}^\alpha$ operatörü $L_{p,r,\gamma}\left(\mathbb{R}_{k,+}^n\right)\to L_{q,s,\gamma}\left(\mathbb{R}_{k,+}^n\right)$ ya sınırlı ve $1<p<Q/\alpha$ dır.

$t>0$ için $f_t(x) =: f(tx)$ diyelim. O zaman kolayca gösterebiliriz ki

$$\|f_t\|_{L_{p,r,\gamma}} = t^{-\frac{Q}{\alpha}} \|f\|_{L_{p,r,\gamma}} \quad , \quad I_{B_1}^{\alpha} f_t(x) = t^{-\alpha} I_{B_1}^{\alpha} f(tx)$$

ve

$$\left\| I_{B_1}^{\alpha} f_t \right\|_{L_{q,s,\gamma}} = t^{-\alpha-\frac{Q}{q}} \left\| I_{B_1}^{\alpha} f \right\|_{L_{q,s,\gamma}}$$

dir. $I_{B_1}^{\alpha}$ operatörü $L_{p,r,\gamma}\left(\mathbb{R}_{k,+}^{n}\right) \to L_{q,s,\gamma}\left(\mathbb{R}_{k,+}^{n}\right)$ ye sınırlı olduğundan

$$\left\| I_{B_1}^{\alpha} f \right\|_{L_{q,s,\gamma}} \le C \|f\|_{L_{p,r,\gamma}}$$

elde edilir, burada C, f den bağımsızdır. O zaman

$$\left\| I_{B_1}^{\alpha} f \right\|_{L_{q,s,\gamma}} = t^{\alpha+\frac{Q}{q}} \left\| I_{B_1}^{\alpha} f_t \right\|_{L_{q,s,\gamma}} \le C t^{\alpha+\frac{Q}{q}} \|f_t\|_{L_{p,r,\gamma}} = C t^{\alpha+\frac{Q}{q}-\frac{Q}{p}} \|f_t\|_{L_{p,r,\gamma}}$$

olur. Eğer $\frac{1}{p} < \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{Q}$ ise, o zaman $\forall f \in L_{p,r,\gamma}\left(\mathbb{R}_{k,+}^{n}\right)$ için, $t \to 0$ için, $\left\| I_{B_1}^{\alpha} f \right\|_{L_{q,s,\gamma}} = 0$ elde ederiz. Eğer $\frac{1}{p} > \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{Q}$ ise , o zaman $\forall f \in L_{p,r,\gamma}\left(\mathbb{R}_{k,+}^{n}\right)$ için, $t \to \infty$ için, $\left\| I_{B_1}^{\alpha} f \right\|_{L_{q,s,\gamma}} = 0$ elde ederiz. Bu nedenle $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{Q}$ olduğu açıktır.

2) $p=1,\ 1-\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{Q},\ 1 \le r \le \infty$ ve $f \in L_{1,r,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ olsun. (2) eşitsizliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}
\left\| I_{B_1}^{\alpha} f \right\|_{WL_{q,s,\gamma}} &= \sup_{t>0} t^{1/q} \left(I_{B_1}^{\alpha} f \right)_{\gamma}^{*}(t) \\
&\le A \sup_{t>0} t^{1/q} \left(t^{\frac{\alpha}{Q}-1} \int_0^t f_{\gamma}^{*}(s)ds + \int_t^{\infty} s^{\frac{\alpha}{Q}-1} f_{\gamma}^{*}(s)ds \right) \\
&= A \sup_{t>0} \int_0^t f_{\gamma}^{*}(s)ds + A \sup_{t>0} t^{1/q} \int_t^{\infty} s^{-1/q} f_{\gamma}^{*}(s)ds \\
&\le 2A \left\| f_{\gamma}^{*} \right\|_{L_{1(0,\infty)}} \\
&= 2A \|f\|_{L_{1,\gamma}}
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Karşıt olarak, $I_{B_1}^{\alpha}$ operatörü $L_{1,r,\gamma}\left(\mathbb{R}_{k,+}^{n}\right) \to WL_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_{k,+}^{n}\right)$ ya sınırlı olsun. Kolayca gösterilebilir ki,

$$\| f_t \|_{L_{1,r,\gamma}} = t^{-Q} \| f \|_{L_{1,r,\gamma}}$$

ve

$$\left\| I_{B_1}^{\alpha} f_t \right\|_{WL_{q,\gamma}} = t^{-\alpha-\frac{Q}{q}} \left\| I_{B_1}^{\alpha} f_t \right\|_{WL_{q,\gamma}}$$

dir.

$I_{B_1}^{\alpha}$ operatörünün $L_{1,r,\gamma}\left(\mathbb{R}_{k,+}^{n}\right) \to WL_{q,\gamma}\left(\mathbb{R}_{k,+}^{n}\right)$ a sınırlılığı ile

$$\left\| I_{B_1}^{\alpha} f_t \right\|_{WL_{q,\gamma}} \leq C \| f \|_{L_{1,r,\gamma}}$$

elde ederiz, burada C, f den bağımsızdır. O zaman

$$\left(I_{B_1}^{\alpha} f_t \right)_{*,\gamma}(\tau) = t^{-Q} \left(I_{B_1}^{\alpha} f_t \right)_{*,\gamma}\left(t^{\alpha} \tau \right)$$

$$\left\| I_{B_1}^{\alpha} f_t \right\|_{WL_{q,\gamma}} = t^{-\alpha-\frac{Q}{\alpha}} \left\| I_{B_1}^{\alpha} f_t \right\|_{WL_{q,\gamma}}$$

ve

$$\left\| I_{B_1}^{\alpha} f \right\|_{WL_{q,\gamma}} = t^{\alpha+\frac{Q}{q}} \left\| I_{B_1}^{\alpha} f_t \right\|_{WL_{q,\gamma}} \leq C t^{\alpha+\frac{Q}{q}} \| f_t \|_{L_{1,r,\gamma}} = C t^{\alpha+\frac{Q}{q}-Q} \| f \|_{L_{1,r,\gamma}}$$

olur.

Ayrıca, eğer $1 < \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{Q}$ ise, o zaman $\forall f \in L_{1,r,\gamma}\left(\mathbb{R}_{k,+}^{n}\right)$ için, $t \to 0$ için, $\left\| I_{B_1}^{\alpha} f \right\|_{WL_{q,\gamma}} = 0$ ifadesini elde ederiz. Eğer $1 > \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{Q}$ ise, o zaman $\forall f \in L_{1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{k,+}^{n}\right)$ için, $t \to \infty$ için, $\left\| I_{B_1}^{\alpha} f \right\|_{WL_{q,\gamma}} = 0$ ifadesini elde ederiz. Bu nedenle $1 = \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{Q}$ eşitliğini elde ederiz.

3) $p = \frac{Q}{\alpha}, r = 1, q = s = \infty$ ve $f \in L_{\frac{Q}{\alpha},1,\gamma}\left(\mathbb{R}_{+}^{n}\right)$ olsun. (2) eşitsizliğini kullanırsak;

$$\begin{aligned}
\left\| I_{B_1}^{\alpha} f \right\|_{L_{\infty,\gamma}} &= \sup_{t>0} \left(I_{B_1}^{\alpha} f \right)_{\gamma}^{*}(t) \\
&\leq A \sup_{t>0} \left(t^{\frac{\alpha}{Q}-1} \int_0^t f_{\gamma}^{*}(s)ds + \int_t^{\infty} s^{\frac{\alpha}{Q}-1} f_{\gamma}^{*}(s)ds \right) \\
&\leq 2A \int_0^{\infty} s^{\frac{\alpha}{Q}-1} f_{\gamma}^{*}(s)ds = 2A \| f \|_{L_{\frac{Q}{\alpha},1,\gamma}}
\end{aligned}$$

Böylece Teorem 4.2.3.'ün ispatı tamamlanmış olur.

KAYNAKLAR

[1] R. A. Hunt, On L(p,q) spaces, L'Enseignement Math. 12 (1966), 249-276.

[2] Samko, 1993, Harmonic Analysis, McGraw-Hill Book Company, New York.

[3] U. Neri, Singular Integrals, Springer Verlag, New York, 1971.

[4] E. M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Univ. Press, 1971.

[5] Sadoyky C. 1979, İnterpolation of Operators and Singular İntegrals, Pure and Applied Mathematics, Mercel Dekker İnc. New York.

[6] J. Bastero, M. Milman, and F.J. Ruiz, Rearrangement of Hardy-Littlewood maximal functions in Lorentz spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 128(2000), no. 1, 65–74.

[7] M. Carro and J. Soria, The Hardy-Littlewood maximal function and weighted Lorentz spaces, Preprint, 1993.

[8] M. Levitan, 1967, B. M. Uspehi Mat. Nauk.

[9] Kipriyanov, I.A., On Singular İntegrals Generated By The Generalized Shift Operator, II, Sibirsk. Mat. Zh., (1970).

[10] I.A. Aliev and A.D. Gadjiev, On classes of operators of potential types, generated by a generalized shift, Reports of enlarged Session of the Seminars of I.N. Vekua Inst. of Applied Mathematics, Tbilisi, 3(1988), 2, 21- 24.

[11] R. O'Neil, Convolution operators and L(p, q) spaces, Duke Math. J., 30(1963), 129-142.

[12] E. Kristiansson, Decreasing Rearrangement and Lorentz L(p, q) Spaces, Master Thesis, Lulea University of Technology. S-412 96 Gothenburg, 2002.

[13] V.S. Guliyev, Sobolev theorems for B–Riesz potentials, Dokl. RAN, 358(1998).

[14] V. Kokilashvili and M. Krbec,Weighted inequalities in Lorentz and Orlicz spaces, 2nd ed. World Scientific 57(1991).

[15] V.S. Guliyev, A. Şerbetçi, İ. Ekincioğlu, "Necessary and sufficient conditions for the boundedness of rough B-fractional integral operators in the Lorentz spaces". J. Math. Anal. Appl., in press.

[16] V.S. Guliyev, On maximal function and fractional integral, associated with the Bessel differential operator, Math. Inequal. Appl., 6(2003), 2, 317-330.

[17] V.S. Guliyev, A. Şerbetçi, İ. Ekincioğlu, "On boundedness of the generalized B-potential integral operators in the Lorentz spaces". Integral Transforms Spec. Funct., in pres.