FİNSLER UZAYLARI

Nejla ULUS

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Şubat 2008

FİNSLER UZAYLARI

Nejla ULUS

DUMLUPINAR ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Yrd.Doç.Dr. A.Funda YALINIZ

Şubat-2008

KABUL ve ONAY SAYFASI

Nejla ULUS’un YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı FİNSLER UZAYLARI başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

…../…../2008

Üye: Doç. Dr. Ziya AKÇA

Üye: Yrd. Doç. Dr. A.Funda YALINIZ

Üye: Yrd. Doç. Dr. Mine TURAN

Fen Bilimleri Enstitüsünün Yönetim Kurulu'nun ....../...../2008 gün ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

. Prof. Dr. M. Sabri ÖZYURT

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

FİNSLER UZAYLARI

Nejla ULUS
Matematik Bölümü Yüksek Lisans Tezi 2008
Tez Danışmanı:Yrd.Doç.Dr.A.Funda YALINIZ

ÖZET

Birinci bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavram ve sonuçlar verilmiştir.

İkinci bölümde metrik uzaylar , normlu uzaylar , minkowski normu ve Riemann metriği tanımları , bu tanımlarla ilgili örnek ve önermeler verilmiştir.

Üçüncü bölümde Finsler Geometrisi , Finsler yapısı , Legendre transformasyonu tanımlanmış , Randers ve Quartic metriği örnekleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde geodezikler önce Riemann uzayında daha sonra da Finsler uzayında ele alınmıştır. Finsler manifoldunda bir eğrinin varyasyonu , geodezik katsayılar ve geodezik spray gibi tanımlar yapılmıştır.

Beşinci bölümde, Finsler uzayında Lineer olmayan konneksiyon, $T(TM\setminus\{0\})$ ve $T^*(TM\setminus\{0\})$'ın yatay ve dikey ayrışımları, yatay ve dikey ayrışımın iki ilavesi olan sasaki metrik ve hemen hemen kompleks yapı tanımlanmış ve bu tanımlar ile ilgili bazı önermeler ispatlanmıştır.

Altıncı bölümde, konneksiyonlar ve kovaryant türev kavramları, önce Riemann uzayında sonra da Finsler uzayında ayrı ayrı ele alınmıştır. Bu bölümde Chern-Rund konneksiyonu, Hashiguchi konneksiyonu örneklerde verilmiştir.

Yedinci bölümde, eğriliklerin Riemann uzayında ve Finsler uzayındaki tanımları yapılmış, bazı önermeler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Finsler geometrisi, Lineer olmayan konneksiyon, Legendre transformasyonu, Randers metriği .

FINSLER SPACES

Nejla ULUS
Department of Mathematics M.S. Thesis 2008
Supervisor: Asist.Prof.Dr. A.Funda YALINIZ

SUMMARY

In the first chapter, some fundamental definitions and results which will be used in other chapters have been given.

In the second chapter, the definitions of metric space, normed space, minkowski norm and Riemannian metric and then propositions and examples which are connected with these definitions have been given.

In the third chapter, Finslerian geometry, Finslerian structure, Legendre transformation have been defined and then the examples of Randers and Quartic metrics have been given.

In the fourth chapter, geodesics have been taken up firstly in Riemann space and later in Finsler space. In Finsler manifold, the definitions such as a variation of a curve, geodesic coefficient and geodesic spray have been given.

In the fifth chapter, in Finsler space, non-lineer connection, horizontal and vertical decompositions of $T(TM \setminus \{0\})$ and $T^*(TM \setminus \{0\})$, sasaki metric and almost complex structure which are applications of the horizontal-vertical decomposition for $T(TM \setminus \{0\})$ have been introduced and some propositions which are connected with these definitions have been proved.

In the sixth chapter, Connections and Covariant derivative have been taken up firstly in Riemann Space and later in Finsler space. In this chapter, the examples of Chern-Rund Connections, Hashiguchi Connection, Berwald and Cartan Connection have been given.

In the seventh chapter, the definitions of curvatures in Riemann and Finsler space have been defined, some propositions have been given.

Keywords: Finsler space , non-lineer connection , Legendre transformation , Randers metric.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek çalışmanın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. A. Funda YALINIZ'a ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devamı)

SİMGELER DİZİNİ

<u>**Simgeler**</u>	<u>**Açıklamalar**</u>
M	C^{∞} manifold
T_pM	M 'nin bir p noktasındaki tanjant uzayı
T_p^*M	M 'nin bir p noktasındaki kotanjant uzayı
TM	M üzerindeki tanjant demeti
T^*M	M üzerindeki kotanjant demeti
$\Gamma(TM)$	Tanjant demetinin düzgün kesit uzayı
$T(TM)$	Double tanjant demeti
$\chi(M)$	M üzerindeki düzgün vektör alanlarının uzayı
$T_s^r(p;M)$	M 'nin p noktasındaki (r,s)-tipindeki tensör uzayı
$T_s^r(M)$	M üzerinde (r,s)-tipinde tensör demeti
F	Finsler metriği
(M,F)	Finsler manifoldu
D_c	c eğrisinin teğeti
$L(c)$	c eğrisinin uzunluğu
H	c eğrisinin varyasyonu
G^i	Finsler manifoldunda geodezik katsayılar
G	Finsler manifoldunda geodezik spray
N_j^i	Finsler manifoldunda Non-lineer konneksiyon
$\mathcal{V}\,TM$	Dikey tanjant demeti
$\mathcal{H}\,TM$	Yatay tanjant demeti
$\dfrac{\delta}{\delta x^i}$	$\mathcal{H}\,TM$ deki yatay vektör
$\dfrac{\partial}{\partial y^i}$	$\mathcal{V}\,TM$ deki dikey vektör
VT^*M	Dikey kotanjant (kovektör) demeti
HT^*M	Yatay kotanjant (kovektör) demeti

SİMGELER DİZİNİ (devamı)

Simgeler	**Açıklamalar**
dx^i	Yatay kovektör
δy^i	Dikey kovektör
C_{ijk}	Cartan tensörü
G^i_{jk}	Berwald konneksiyonu
Γ_{ijk}	Chern-Rund konneksiyonu
L_{ijk}	Landsberg katsayıları
R^m_{ijk}	Eğrilik katsayıları
$L : T^*M \to TM$	Legendre transformasyonu
$\hat{g}$	Sasaki metrik
N	Nijenhuis tensörü
$W_i^{\ j}$	D konneksiyon matrisinin bileşenleri
T^k_{ij}	Torsiyon tensörü
Γ^k_{ij}	Christoffel sembolleri

1.TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 1.1. V, n-boyutlu reel vektör uzayı olsun.

$$F : V \to \Re$$

fonksiyonu, $\forall \alpha, \beta \in V$ ve $\forall a, b \in \Re$ için

$$F(a\alpha + b\beta) = aF(\alpha) + bF(\beta)$$

şartını sağlıyorsa F ye bir **lineer fonksiyonel** denir. Lineer fonksiyonellerin cümlesini

$$Hom(V, R) = \{F | F : V \to R\}$$

şeklinde gösterelim. $Hom(V, R)$ cümlesi üzerinde,

$$+ : Hom(V, R) \times Hom(V, R) \to Hom(V, R)$$

$$(F, G) \to F + G$$

$\ni$ $\forall \alpha \in V$ için

$$(F + G)(\alpha) = F(\alpha) + G(\alpha)$$

$$\cdot : R \times Hom(V, R) \to Hom(V, R)$$

$$(\lambda, F) \to (\lambda \cdot F)$$

$\ni$ $\forall \alpha \in V$ için

$$(\lambda, F)(\alpha) = \lambda \cdot F(\alpha)$$

işlemlerini tanımladığımızda $(Hom(V, R), +, \cdot)$ üçlüsü bir vektör uzayı olur.

$Hom(V, R)$ vektör uzayına V vektör uzayının kovektör uzayı veya dual uzayı denir ve

$$V^* = Hom(V, R)$$

şeklinde gösterilir.

V^* ın elemanlarının herbirine bir kovektör denir[1].

Tanım 1.2. α eğrisinin hız vektör alanı T, eğri boyunca paralel ise, yani kendi kendine paralel ise α eğrisine M üzerinde bir **geodezik eğri** adı verilir.

$$D_T T = 0$$

olacağından

$$D_{T^i \frac{\partial}{\partial x_i}}\left(T^j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = 0$$

$$T^i D_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\left(T^j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = 0$$

$$T^i\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(T^j\right)\frac{\partial}{\partial x_j} + T^j D_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$$

$$T^i\left[\frac{\partial T^k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j} + T^j \Gamma_{ji}^k \frac{\partial}{\partial x_k}\right] = 0 \qquad , \qquad T^k = \frac{dx_k}{dt}$$

$$\left[\frac{\partial T^j}{\partial x_i}\cdot T^i + \Gamma_{ji}^k T^j T^i\right]\frac{\partial}{\partial x_k} = 0$$

$$\frac{\partial T^k}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i}{dt} + \Gamma_{ji}^k\cdot\frac{dx_j}{dt}\cdot\frac{dx_i}{dt} = 0$$

$$\frac{dT^k}{dt} + \Gamma_{ji}^k\frac{dx_j}{dt}\cdot\frac{dx_i}{dt} = 0$$

veya

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \Gamma_{ji}^k\frac{dx_j}{dt}\cdot\frac{dx_i}{dt} = 0 \quad , \quad 1 \le k \le m$$

bulunur[1].

Tanım 1.3: Diferensiyellenebilir bir manifold M ve bir $P \in M$ noktası verilmiş olsun. $P \in M$ noktasının M deki komşuluklarının cümlesi $U(P) = \{U, V, ...\}$ olsun.

$$C^\infty(M,R) = \{f \mid \ f : U \to R\ ,\ f \in (C^\infty, U), U \in U(P)\}$$

cümlesini ele alalım. Bu cümlede

$$\oplus : C^{\infty}(M,R) \times C^{\infty}(M,R) \to C^{\infty}(M,R)$$

$$(f,g) \to f+g$$

işlemi,

$$f : U \to R \text{ ve } g : V \to R \;, \qquad U,V \in U(P)$$

olmak üzere

$$f+g : U \cap V \to R$$

$$q \to (f+g)(q) = f(q) + g(q)$$

şeklinde tanımlansın.

Ayrıca $C^{\infty}(M,R)$ cümlesinde

$$(\cdot) : R \times C^{\infty}(M,R) \to C^{\infty}(M,R)$$

$$(\lambda, f) \to \lambda \cdot f$$

dış işlemide

$$U \in U(P) \to R$$

$$q \to (\lambda f)(q) = \lambda \cdot f(q)$$

olarak tanımlarsak

$$\{C^{\infty}(M,R), \oplus, R, +, \cdot, \otimes\}$$

6-lısı bir reel vektör uzayı olur.

$\{x_1, ..., x_n\}$ sistemi $C^{\infty}(M,R)$ vektör uzayının bir bazıdır[2].

Tanım 1.4. Bir

$$\vec{V}_p : C^{\infty}(M,R) \to R$$

dönüşümü için

$$(i)\ \vec{V}_p(\lambda f+\mu g)=\lambda\cdot\vec{V}_p[f]+\mu\vec{V}_p[g]\ ,\ \forall\lambda,\mu\in R\ ,\ \forall f,g\in C^{\infty}(M,R)$$

$$(ii)\ \vec{V}_p[f\cdot g]=\vec{V}_p[f]\cdot g(p)+f(p)\cdot\vec{V}_p[g]$$

aksiyomları sağlanıyorsa, $\vec{V}_p$ fonksiyonuna M nin P noktasındaki bir **tanjant vektörü** denir[2].

Tanım 1.5: M manifoldunun bir $P\in M$ noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesini

$$T_M(P)=\left\{\vec{V}_p\ \middle|\ \vec{V}_p : C^{\infty}(M,R)\to R\right\}$$

ile gösterelim. Bu cümlede toplama işlemini

$$(+):T_M(P)\times T_M(P)\to T_M(P)$$

$$\left(\vec{V}_p,\vec{W}_p\right)\to\vec{V}_p+\vec{W}_p : C^{\infty}(M,R)\to R$$

$$\left(\vec{V}_p+\vec{W}_p\right)[f]=\vec{V}_p[f]+\vec{W}_p[f]\ ,\ \ \forall f\in C^{\infty}(M,R)$$

olarak tanımlarsak $(T_M(P),(+))$ ikilisi bir Abel grubu olur. Ayrıca

$$(\cdot):R\times T_M(P)\to T_M(P)$$

$$\left(\lambda,\vec{V}_p\right)\to\lambda\cdot\vec{V}_p : C^{\infty}(M,R)\to R$$

$$\left(\lambda\cdot\vec{V}_p\right)[f]=\lambda\vec{V}_p[f]\ ,\ \forall f\in C^{\infty}(M,R)$$

dış işlemide bu Abel grubunu $\Re$ üzerinde bir vektör uzayı yapar. Bu uzay $\{T_M(P),(+),\Re,\cdot,(\cdot)\}$ ile gösterilip M nin $P\in M$ noktasındaki **tanjant uzayı** adını alır[2].

$P\in M$ nin bir U açık komşuluğu üzerinde bir lokal koordinat sistemi $\{x_1,...,x_n\}$ olsun.

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p : C^\infty(M,R) \to R$$

$$f \to \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p \quad , \quad 1 \le i \le n$$

olarak tanımlanan $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ fonksiyonu M nin P deki bir tanjant vektörüdür. Buradan

$$\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right)[x_j] = \left.\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right|_p = \delta_{ij}$$

olduğundan $\{x_1,...,x_n\}$ in duali $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},...,\frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ dir ve

$$T_M(P) = S_p\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p,...,\left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p\right\}$$

dir[2].

Tanım 1.6: Bir $\vec{V}_p \in T_M(P)$ tanjant vektörü için $\vec{V}_p(x_i) = V_i$ olmak üzere $(V_1,...,V_n)$ n-lisine $\vec{V}_p$ tanjant vektörünün $\{x_1,...,x_n\}$ koordinat sistemine göre, bileşenleri denir ve dolayısıyla

$$\vec{V}_p : C^\infty(M,R) \to R$$

dönüşümü için

$$\vec{V}_p = \sum_{i=1}^{n} V_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \quad , \quad V_i = \vec{V}_p[x_i]$$

yazılabilir.

$P \in M$ noktasındaki iki farklı lokal koordinat sistemi $\{x_1,...,x_n\}$ ve $\{\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_n\}$ olsun. O zaman

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p ,\dots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p \right\} \text{ ve } \left\{ \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1}\right|_p ,\dots, \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_n}\right|_p \right\}$$

sistemleri $T_M(P)$ için birer baz olurlar[2].

Tanım 1.7: $T_M(P)$ nin $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \right\}$ ve $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}\right|_p \right\}$ gibi iki bazı arasında

$$\begin{bmatrix} \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1}\right|_p \\ \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}\right|_p \\ \vdots \\ \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_n}\right|_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_1}(p) & \frac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}_1}(p) & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \tilde{x}_1}(p) \\ \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_2}(p) & \frac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}_2}(p) & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \tilde{x}_2}(p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_n}(p) & \frac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}_n}(p) & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \tilde{x}_n}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p \\ \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_p \\ \vdots \\ \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p \\ \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_p \\ \vdots \\ \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial x_1}(p) \\ \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_2}(p) & \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial x_2}(p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_n}(p) & \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial x_n}(p) & \cdots & \frac{\partial \tilde{x}_n}{\partial x_n}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1}\right|_p \\ \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2}\right|_p \\ \vdots \\ \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_n}\right|_p \end{bmatrix}$$

yani

$$\left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}\right|_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p$$

ve

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{x}_j}{\partial x_i} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_j}\right|_p$$

bağıntıları vardır[2].

Tanım 1.8: M bir n-boyutlu manifold, M de bir P noktasındaki iki lokal koordinat sistemi $\{x_i\}$ ve $\{\widetilde{x}_i\}$ olsun. Bir $\vec{V}_p \in T_M(P)$ tanjant vektörünün bu iki koordinat sistemine göre bileşenleri, sırası ile , $\{y_i\}$ ve $\{\widetilde{y}_i\}$ ise

$$\begin{bmatrix} \widetilde{y}_1 \\ \widetilde{y}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \widetilde{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \widetilde{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \widetilde{x}_1}{\partial x_2} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \frac{\partial \widetilde{x}_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \widetilde{x}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \widetilde{x}_2}{\partial x_2} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \frac{\partial \widetilde{x}_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial \widetilde{x}_1}{\partial x_n} & \frac{\partial \widetilde{x}_n}{\partial x2} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \frac{\partial \widetilde{x}_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \widetilde{x}_1} & \frac{\partial \widetilde{x}_1}{\partial x_2} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \frac{\partial x_1}{\partial \widetilde{x}_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \widetilde{x}_1} & \frac{\partial \widetilde{x}_2}{\partial x_2} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \frac{\partial x_2}{\partial \widetilde{x}_n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial x_n}{\partial \widetilde{x}_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \widetilde{x}_2} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \frac{\partial x_n}{\partial \widetilde{x}_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{y}_1 \\ \widetilde{y}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \widetilde{y}_n \end{bmatrix}$$

dir[2].

Tanım 1.9 : M bir manifold olsun. Eğer M üzerinde bir $P \in M$ noktası için

$$g : M \to L(T_M(P) \times T_M(P), \Re)$$

$$P \to g_p : T_M(P) \times T_M(P) \to \Re$$

şeklinde simetrik, pozitif tanımlı bir bilineer form tanımlanmış ise g ye M de **Riemann metriği** denir.

Eğer bir M manifoldunun $\forall P \in M$ noktasının bir U komşuluğu üzerinde g formu C^r sınıfından (yani g nin $g_{ij} : U \to \Re$ bileşenleri C^r sınıfından) iseler g Riemann metriğine C^r **sınıfındandır** denir.

Bir Riemann metriği verildiğinde bir $\vec{V}_p \in T_M(P)$ tanjant vektörünün boyu

$$g_p\left(\vec{V}_p, \vec{V}_p\right) = \left\|\vec{V}_p\right\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p) dx_i\big|_p\left(\vec{V}_p\right) dx_i\big|_p\left(\vec{V}_p\right)$$

olarak tanımlanır. Eğer $\vec{V}_p$ nin $\{x_i\}$ koordinat sistemine göre bileşenleri $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ ise

$$g_p\left(\vec{V}_p, \vec{V}_p\right) = \left\|\vec{V}_p\right\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p) V_i V_j$$

dir ve dolayısıyla Riemann metriği literatürde ekseriya

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i dx_j$$

notasyonu ile görülmektedir[2].

Tanım 1.10: Bir M manifoldu üzerinde bir g Riemann metriği tanımlanmış ise bu (M, g) ikilisine bir **Riemann manifoldu** denir.

Tanım 1.11: M bir Riemann manifoldu ve φ de M üzerinde diferensiyellenebilir bir eğri, yani

$$\varphi : (a,b) \to M$$

olsun. φ eğrisinin $\varphi(t)$ noktasındaki tanjant vektörü $\vec{V}_t$ olsun. O zaman

$$(a,b) \to \Re$$

$$t \rightarrow \left\| \vec{V}_t \right\|$$

olarak tanımlanan fonksiyon sürekli bir fonksiyondur. $a < c < d < b$ olmak üzere

$$L(\varphi; c, d) = \int_c^d \left\| \vec{V}_t \right\| dt = \int_c^d \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(t) V_i V_j} \, dt$$

ifadesine φ eğrisinin $\varphi(c)$ ile $\varphi(d)$ noktaları arasındaki **uzunluğu** denir. Bir diferensiyellenebilir

$$\varphi : [a, b] \rightarrow M$$

eğrisi için $(a', b') \subset [a, b]$ olmak üzere $\forall t \in [a, b]$ için $\varphi(t) = \alpha(t)$ olacak şekilde bir diğer diferensiyellenebilir

$$\alpha : (a', b') \rightarrow M$$

eğrisi vardır.

$$L(\varphi) = L(\alpha; a, b)$$

yazılır ve $L(\varphi)$ ye φ eğrisinin **uzunluğu** denir. Eğer φ parça parça diferensiyellenebilir bir eğri ise φ kapak intervaller üzerinde tanımlanan sonlu sayıda diferensiyellenebilir eğrilerin bir toplamıdır ve φ nin uzunluğu bir diferensiyellenebilir eğrilerin uzunluklarının toplamı olarak tanımlanır[2].

Tanım 1.12: $\forall P \in E^n$ noktasında tanımlı olan $T_{E^n}(P)$ tanjant uzayının dual uzayına bu $P \in E^n$ noktasında E^n in kotanjant uzayı denir ve

$$T^*_{E^n}(P) = \{\phi_p \mid \phi_p : T_{E^n}(P) \rightarrow \Re\}$$

şeklinde gösterilir. $\forall \phi_p \in T^*_{E^n}(P)$ vektörüne de E^n in P noktasındaki bir **kovektörü** denir[2].

Tanım 1.13: Bir

$$\phi : E^n \rightarrow \bigcup_{P \in E^n} T^*_{E^n}(P)$$

dönüşümü için

$$\prod : \bigcup_{P \in E^n} T^*_{E^n}(P) \rightarrow E^n$$

$$\phi_p \rightarrow P$$

şeklinde tanımlanan $\prod$ dönüşümü ile

$$\prod \circ \phi = I : E^n \rightarrow E^n$$

bağıntısını sağlıyorsa ϕ ye E^n üzerinde **1-form** denir. Bu son tanıma göre $\phi(P) = \phi_P$ dersek $\phi_p \in T^*_{E^n}(P)$ dir ve dual uzayın tanımı gereğince

$$\phi_p : T_{E^n}(P) \xrightarrow{lineer} \Re$$

şeklinde bir fonksiyoneldir[2].

Tanım 1.14: $f : E^n \xrightarrow{C^\infty} \Re$

fonksiyonu verildiğinde f in diferensiyeli $\forall V_P \in T_{E^n}(P)$ için $df\left(\vec{V}_p\right) = \vec{V}_p[f]$

şeklinde bir 1-formdur.

$\forall f \in C^\infty(E^n, \Re)$ için

$$df : E^n \rightarrow \cup T_{E^n}(P)$$

$$P \rightarrow df\,|_p$$

fonksiyonu $\forall P \in E^n$ noktasında

$$df\,|_p : T_{E^n}(P) \rightarrow \Re$$

$$V_p \rightarrow df\left(\vec{V}_p\right) = \vec{V}_p[f]$$

şeklindedir[2].

Tanım 1.15: E^n üzerindeki koordinat fonksiyonları $x_1,...,x_n$ olduğuna göre $dx_1,...,dx_n$ 1-formları E^n üzerindeki 1-formların vektör uzayının bir bazını oluşturur. Böylece $T_{E^n}(P)$ nin bir $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p ,..., \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p \right\}$ ortonormal bazı için

$$dx_i = \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p \right) = \delta_{ij}$$

dir[2].

Tanım 1.16: M **,** n-boyutlu bir manifold olsun. $x \in M$ noktasında bir **lineer çatı** diye, $T_x M$ tanjant uzayının herhangi bir sıralı bazına denir. Böylece $T_x M$ nin bir sıralı bazı U_x şeklinde gösterilmek üzere,

$$LM = \{ U_x \mid x \in M \text{ ve } U_x, \ x \text{ noktasında Lineer çatı } \}$$

tanımlayalım.

$$\prod : LM \to M$$

$$U_x \to \prod(U_x) = x \in M$$

bir izdüşüm fonksiyonu olur. $\left(\prod^2 = \prod\right)$

LM üzerinde $GL(n,\Re)$ nin

$$LM \times GL(n,\Re) \to LM$$

$$(U_x, A) \to U_x A$$

etkisini

$$U_x A = (x, x_1,...,x_n), \quad A = \lfloor a_{ij} \rfloor \text{ olmak üzere}$$

$$U_x A = \left(x; \sum_{j=1}^{n} a_{j1} X_j, \sum_{j=1}^{n} a_{j2} X_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{jn} X_j \right)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu etki bir serbest etkidir. Gerçekten de eğer bir U_x için

$$U_x A = U_x \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{jk} X_j = X_k \quad , \quad k = 1,2,\dots,n$$

$$\Rightarrow \; a_{jk} = \delta_{jk} \qquad \Rightarrow \; A = I_n$$

olup etki serbesttir. Şimdi LM üzerinde bir C^∞ yapı tanımlayalım.

$x \in M$ noktasının $U \subset M$ açık komşuluğu üzerinde $\{x_1,\dots,x_n\}$ lokal koordinat sistemi verilsin. U_x, x noktasında bir lineer çatı ise $U_x = (x; X_1, X_2, \dots, X_n)$,

$$X_j = \sum_{j=1}^{n} X_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad , \quad 1 \le i \le n$$

yazılabilir. Böylece, U_x çatısı $[X_{ij}] \in \Re_n^n$ singüler olmayan matrisini tek türlü belirler. Böylece

$$\prod : LM \to M$$
$$U_x \to x$$

izdüşüm fonksiyonu yardımıyla $\prod^{-1}(U) \approx U \times GL(n,\Re)$ yazılabilir. Burada; $U_y \in \prod^{-1}(U)$ elemanı $U_y = (y; Y_1,\dots,Y_n)$ olmak üzere, $(y,[Y_{ij}])$ elemanına karşılık tutulmuştur ve bu karşılık tutma $1:1$ örtendir. LM de

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n, X_{11}, X_{21}, \dots, X_{nn}\}$$

yi $\prod^{-1}(U)$ üzerinde lokal koordinat sistemi seçerek LM yi diferensiyellenebilir bir manifold yapısına kavuşturalım. Bu yapıya göre,

$$LM \times GL(n,\Re) \to LM$$
$$(U_x, A) \to U_x A$$

bir sağ serbest etki olur. Böylece $LM(M, GL(n,\Re))$ asli lif demeti elde edilir. Bu lif demetine M üzerinde lineer çatıların **asli lif demeti** denir[3].

Örnek 1.17: $\Re^n$ üzerinde $GL(n,\Re)$ nin

$$\Re^n \times GL(n,\Re) \to \Re^n$$

$$(\xi, A) \rightarrow A\xi$$

etkisini;

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ . \\ . \\ . \\ \xi_n \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$$ olmak üzere

$$A\xi = [a_{ij}] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ . \\ . \\ . \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\xi_j \\ . \\ . \\ . \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\xi_j \end{bmatrix}$$ olarak tanımlayalım.

Bu etki bir sol (serbest) etkidir. Buna göre,

$$(LM \times \Re^n) \times GL(n, \Re) \rightarrow LM \times \Re^n$$

$$((U_x, \xi), A) \rightarrow (U_x A, A^{-1}\xi)$$

etkisi yardımıyla,

$$TM = (LM \times \Re^n) / GL(n, \Re)$$

tanımlayalım. TM , LM ile birleştirilmiş standart fibre'si $\Re^n$ olan bir asli lif demetidir.

$LM \times \Re^n$ üzerine $GL(n, \Re)$ nin etkisi altında herhangi bir (U_x, ξ) elemanının denklik sınıfı,

$$[(U_x, \xi)] = \{(U_x A, A^{-1}\xi) \mid A \in GL(n, \Re)\}$$

dir. Eğer $(V_x, h) \in LM \times \Re^n$ elemanı göz önüne alınırsa

$U_x = (x; X_1, X_2, ..., X_n)$, $V_x = (x; Y_1, ..., Y_n)$ iki baz olup

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} X_j \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

eşitlikleri bir tek $A = \lfloor a_{ij} \rfloor \in GL(n, \Re)$ yi belirler. Böylece, $V_x = U_x A$ olacak şekildeki A regüler matrisi biriciktir.

$x \in M$ noktasındaki fibre;

$$\prod_{TM}^{-1}(x) = \{[(U_x, \xi)] \mid U_x \in LM, \xi \in \Re^n\}$$

olup, $T_x M$ ile eşlenebilir. Bu eşleme, $U_x \in LM$ için

$$(x, X_1, X_2, ..., X_n) = U_x : \Re^n \to T_x M$$

$$e_i \to U_x(e_i) = X_i \ , \ 1 \leq i \leq n$$

lineer izomorfizmi altında, ξ nın resmi $U_x(\xi)$'den ibarettir[3].

2.METRİK UZAYLAR

2.1. Normlu Uzaylar

Bu bölümde geometrik sonlu boyutlu normlu uzaylar kısaca gözden geçirilmiştir. Aksi belirtilmedikçe tüm vektör uzayları gerçel ve sonlu boyutludur.

Tanım 2.1.1: X vektör uzayı üzerinde bir **norm** , aşağıdaki özellikleri sağlayan

$$\|.\| : X \to [0, \infty)$$

şeklinde bir dönüşümdür.

1) Eğer $\|x\|=0$ ise x=0 dır.

2) Eğer t bir gerçel sayı ise $\|tx\| = |t| \, \|x\|$;

3) X vektör uzayındaki herhangi iki x ve y vektörü için

$$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| .$$

Eğer (X, $\|.\|$) bir sonlu boyutlu normlu uzay ise ,

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \le 1 \}$$

cümlesi X de bir birim küre gösterir. B_X , boş olmayan iç kısmıyla birlikte bir kompakt, konveks cümledir[4].

Örnek 2.1.1: $p \ge 1$ gerçel sayısı için

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p \right)^{1/p} \quad , \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Re^n$$

fonksiyonu $\Re^n$ üzerinde bir normdur. $(\Re^n, \|.\|_p)$, $1 \le p \le \infty$ normlu uzayı ℓ_p^n ile gösterilir[4].

Örnek 2.1.2: $f : [0,1] \to \Re$ şeklindeki integrallenebilir fonksiyonların uzayı

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)| \, dx < \infty$$

koşulunu sağlayan bir normlu uzaydır ve L_1 ($[0,1]$, dx) ile gösterilir[4].

2.2. Metrik Uzaylar

Bir metrik uzay, bir metrikle donatılmış noktaların kümesidir. Bir metrikle, cümledeki iki nokta arasındaki uzaklığı ölçeriz. M cümlesi üzerinde

$$d : \mathrm{MxM} \to \Re$$

şeklinde tanımlı dönüşüm aşağıdaki özelliklere sahip ise **simetrik metriktir** denir:

1) $\forall p,q \in M$ için $d(p,q) \geq 0$ 'dır ve $\mathrm{d}(p,q)=0 \Leftrightarrow p=q$ dur.

2) $\forall p,q,r \in M$ için $\mathrm{d}(p,q) \leq d(p,r)+d(r,q)$ dur.

3) $\forall p,q \in M$ için $\mathrm{d}(p,q)=\mathrm{d}(q,p)$ dir.

$$\Re^n = \{ \ (x^i) = (x^1,...,x^n) \ | \ x^i \in \Re \, , \ i=1,...,n \ \}$$

n-boyutlu reel vektör uzayı olsun. $\Re^n$ üzerinde **kanonik öklidyen norm** şu şekilde tanımlıdır:

$$\|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y^i)^2} \ , \quad \mathrm{y}=(y^i) \in \Re^n$$

$\Re^n$ üzerindeki simetrik metrik ise

$$\mathrm{d}_E : \Re^n x \Re^n \to [0,\infty)$$

$$(u,v) \to d_E(u,v) = \|v-u\|$$

şeklinde tanımlıdır, buradaki d_E ye kanonik öklidyen metrik diyeceğiz. Daha açık söylersek, $(\Re^n, \|.\|)$ ya da $(\Re^n, d_E)$ çiftine **kanonik öklidyen uzay** diyeceğiz. Öklidyen uzaylar metrik uzayların en basitidir.

V sonlu boyutlu bir reel vektör uzayı ve $\langle , \rangle$ de V üzerinde bir iç çarpım olsun.

$$\|y\| = \sqrt{\langle y, y \rangle} \ , \mathrm{y} \in V$$

dir. V üzerinde bir d metriği alalım. O zaman

$$\mathrm{d}(u,v) = \|v-u\| \ , \ u,v \in V$$

dir. Buradaki $\|.\|$ ve d'ye, sırası ile, V üzerinde **öklidyen norm** ve **öklidyen metrik** denir[5].

Örnek 2.2.1: Sıkı konveks bir $\Omega \subset \Re^n$ cümlesi üzerinde $\forall p, q, r \in \Omega$ için

$$\mathrm{d}_k : \Omega x \Omega \to [0, \infty)$$

$$(p,q) \to d_k(p,q) = \frac{1}{2}\{d(p,q) + d(q,p)\}$$

şeklinde tanımlı d_k metriğine **Klein metriği** denir. Gerçekten de

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_k(p,q) &= \frac{1}{2}\{d(p,q) + d(q,p)\} \\
&\le \frac{1}{2}\{d(p,r) + d(r,q) + d(q,r) + d(r,p)\} \\
&\le \frac{1}{2}\{d(p,r) + d(r,p)\} + \frac{1}{2}\{d(q,r) + d(r,q)\} \\
&\le d_k(p,r) + d_k(r,q)
\end{aligned}$$

olup, d_k metrik olma şartını sağlar[5].

2.3. Riemann Metriği

M bir m-boyutlu C^∞ manifold ve u^i , $1 \le i \le m$, de bir $U \subset M$ açık alt cümlesinin lokal koordinat sistemi olsun. T_pM ve $T_p{}^*M$, sırasıyla , M' nin bir p noktasındaki tanjant ve kotanjant uzaylarını göstersinler. M üzerindeki tanjant ve kotanjant demetleri de $TM = \bigcup_{P \in M} T_p M$, $T^* M = \bigcup_{P \in M} T_P{}^* M$ olur. M'nin p noktasındaki (r,s)-tipindeki tensör uzayı

$$\mathrm{T}_s^r(p;M) = \underbrace{T_P M \otimes \ldots \otimes T_p M}_{r} \otimes \underbrace{T_P{}^* M \otimes \ldots \otimes T_p{}^* M}_{s}$$

dir, burada r, kovaryantlık, s de kontravaryantlıktır. M üzerinde (r,s)-tipinde tensör demeti

$$T_s^r(M) = \bigcup_{p \in M} T_s^r(p,M)$$

dir. $T(M)$ ve $T^{*}(M)$ in U üzerindeki lokal koordinat sistemleri, sırası ile, $\left\{\frac{\partial}{\partial u^{i}}, 1 \leq i \leq m\right\}$, ve $\left\{du^{i}\ ,\ 1 \leq i \leq m\right\}$ dir. O halde X bir tanjant vektör ise lokal koordinatlar cinsinden $X = \sum_{i=1}^{m} x^{i} \frac{\partial}{\partial u^{i}}$ yazılırken, Z bir kotanjant vektör ise lokal koordinatlar cinsinden $Z = \sum_{i=1}^{m} z_{i} du^{i}$ şeklinde yazılır[6].

G, $(0,2)$-tipinde pozitif tanımlı simetrik bir tensör alanı ise bu,

$$G : T_{p}M \times T_{p}M \to \Re$$

$$(x, y) \to G(X,Y) = G(Y,X)$$

olması demektir. Pozitif tanımlılıktan da $X \neq 0$ için $G(X,X) > 0$ dır. G'yi (U, u^{i}) lokal koordinat sistemine göre

$$G = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}(u) du^{i} \otimes du^{j}$$

şeklinde yazabiliriz, burada $g_{ij} = g_{ji}$ dir.

$\forall X, Y \in T_{p}M$ için $X = \sum_{i=1}^{m} x^{i} \frac{\partial}{\partial u^{i}}$ ve $Y = \sum_{j=1}^{m} y^{j} \frac{\partial}{\partial u^{j}}$ olmak üzere

$$G(X,Y) = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} du^{i} \otimes du^{j} \left(\sum_{k=1}^{m} x^{k} \frac{\partial}{\partial u^{k}}, \sum_{l=1}^{m} y^{l} \frac{\partial}{\partial u^{l}} \right)$$

$$= \sum_{\substack{i,j=1 \\ k,l=1}}^{m} g_{ij} x^{k} . \underbrace{du^{i}\left(\frac{\partial}{\partial u^{k}}\right)}_{\delta_{k}^{i}} y^{l} \underbrace{du^{j}\left(\frac{\partial}{\partial u^{l}}\right)}_{\delta_{l}^{j}}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} x^{i} y^{j}$$

Buradaki

$$G = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} du^i \otimes du^j$$

Riemann metriğidir. g_{ij} ’ler Riemann metriğinin matris formunun bileşenleridir[6].

Tanım 2.3.1: M, m-boyutlu bir C^∞ manifold olsun. M üzerinde bir G Riemann metriği tanımlıysa (M,G) ikilisine **Riemann manifoldudur** denir[6].

2.4. Minkowski Normu

Tanım 2.4.1: V vektör uzayı üzerindeki bir **Minkowski normu** $F : V \to [0,\infty)$ şeklinde pozitif tanımlı bir fonksiyon olup aşağıdaki şartları sağlar:

M1) F, V\{0} üzerinde C^∞ ’dur.

M2) F, 1’inci dereceden homojendir, yani $\forall\lambda$>0 ve $\forall y \in V$ için

$$F(\lambda y) = \lambda F(y)$$

dir.

M3) $\forall y \in V \setminus \{0\}$ için,

$$g_y : V \times V \to \Re$$

$$(u,v) \to \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\left[F^2(y + su + tv)\right]_{s=t=0}$$

şeklinde tanımlı g_y simetrik bilineer formu pozitif tanımlıdır. F bir Minkowski normu olmak üzere (V,F) ikilisine bir **Minkowski uzayıdır** denir[7].

Özellikler:

1. V üzerinde bir minkowski normunun birim küresine **indicatrix** denir.

2. $u,v \in V$ için $g_y(u,v) = g_{ij}(y)u^i.v^j$ dir, burada

$$g_{ij}(y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}(y)$$

olup, g_y bilineerdir.

3. $F(X)=\|X\|$, V üzerinde seçilmiş bir baza göre öklidyen norm olsun. Bu demektir ki, her sonlu boyutlu vektör uzayı en az bir F Minkowski normuna sahiptir.

4. Kabul edelimki $u,v\in V$, $y\in V\setminus\{0\}$ olsun. O zaman

$$i)g_{\lambda y}(u,v)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\left[F^2(\lambda y+su+tv)\right]_{t=s=0}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\left[F^2(y+su+tv)\right]_{t=s=0}$$

$$=g_y(u,v)$$

dir.

$$ii)g_y(y,u)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\left[F^2(y+sy+tu)\right]_{s=t=0}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[F^2(y+tu)\right]_{s=t=0}$$

$$=\frac{1}{2}F^2(u)$$

dur.

$$iii)g_y(y,y)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\left[F^2(y+sy+ty)\right]_{s=t=0}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[F^2(y+ty)\right]_{s=t=0}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[F^2((1+t)y)\right]_{s=t=0}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[(1+t)^2F^2(y)\right]_{s=t=0}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2(1+t)\cdot F^2(y)\Big|_{s=t=0}$$

$$= F^2(y)$$

dir.

5. $F(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$.

Gerçektende $F(0) = 2F(0)$ ise $F(0) = 0$ dır.

Diğer yönden $y \neq 0$ için $F(y) = 0$ ise $F^2(y) = g(y, y)$ olduğundan ve g_y pozitif tanımlı olduğundan bu imkansızdır.

6. Kabul edelimki V üzerinde herhangi bir norm $\|.\|$ olsun. O zaman $S_E = \{v \in V : \|v\| = 1\}$ kompakttır. Eğer $m = \min\{F(v) : v \in S_E\}$ ve $M = \max\{F(v) : v \in S_E\}$ ise o zaman

$$m\|v\| \leq F(v) \leq M\|v\| \quad , \quad v \in V$$

ve $0 < m \leq M < \infty$ dur.

7. F, V üzerinde süreklidir. Ayrıca $V \setminus \{0\}$ üzerinde C^∞ olduğundanda burada da süreklidir[7].

Önerme 2.4.1: $\forall v, w \in V$ için,

$$F(v + w) \leq F(v) + F(w)$$

dir[7].

İspat: 1.Hal: $w \neq \lambda v \quad (\lambda \geq 0)$ olsun.

$$g_y(u, v + w) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\left[F^2(y + su + t(v + w))\right]_{s=t=0}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t}\left[F^2(u + t(v + w))\right]_{s=t=0}$$

$$= \frac{1}{2}F^2(v + w) \tag{2.1}$$

$$g_y(u, v) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\left[F^2(y + su + tv)\right]_{s=t=0}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[F^2(u+tv)\right]_{s=t=0}$$

$$= \frac{1}{2}F^2(v) \qquad (2.2)$$

$$g_y(u,w) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\left[F^2(y, su+tw)\right]_{s=t=0}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[F^2(u+tw)\right]_{s=t=0}$$

$$= \frac{1}{2}F^2(w) \qquad (2.3)$$

g_y simetrik bilineer form olduğundan aşağıdaki eşitlik mevcuttur.

$$g_y(u, v+w) = g_y(u,v) + g_y(u,w) \qquad (2.4)$$

$(2.1), (2.2)$ ve (2.3) de bulunan değerleri (2.4) de yerine yazarsak

$$\frac{1}{2}F^2(v+w) = \frac{1}{2}F^2(v) + \frac{1}{2}F^2(w)$$

ya da

$$F^2(v+w) = F^2(v) + F^2(w)$$

$$\leq F^2(v) + F^2(w) + 2F(v)\cdot F(w)$$

$$\leq (F(v)+F(w))^2$$

ya da

$$F(v+w) \leq F(v) + F(w)$$

bulunur.

2.Hal: $\lambda \geq 0, w = \lambda v$ olsun.

$$F(v+w) = F(v+\lambda v)$$

$$= F((1+\lambda)v)$$

$$= (1+\lambda)F(v)$$

$$= F(v) + \lambda F(v)$$

$$= F(v) + F(\lambda v)$$

$$= F(v) + F(w)$$

olduğundan eşitlik sağlanır.

Önerme 2.4.2: $\forall y, v \in V, y \neq 0$ için

$$g_y(y,v) \leq F(y)F(v) \tag{2.5}$$

dir[7].

İspat: 1.Hal: $v \neq \lambda y$ $(\lambda \geq 0)$ olsun.

g_y simetrik bilineer form olduğundan $\forall y, v \in V$ için

$$g_y(y,v) = g_y(v,y) \text{ dir.}$$

$$g_y(y,v) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\left[F^2(y + sy + tv)\right]_{s=0,t=0}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[F^2(y + tv)\right]_{s=0,t=0}$$

$$= \frac{1}{2}F^2(v) \tag{2.6}$$

ve

$$g_y(v,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\left[F^2(y + sv + ty)\right]_{s=t=0}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[F^2(v + ty)\right]_{s=t=0}$$

$$= \frac{1}{2} F^2(y) \tag{2.7}$$

olduklarından ve $g_y(y,v) = g_y(v,y)$ eşitliğinden

$$F^2(v) = F^2(y)$$

ya da

$$F(v) = F(y)$$

dir.

$$g_y(y,v) = \frac{1}{2} F^2(v) = \frac{1}{2} F(v)F(v) = \frac{1}{2} F(v)F(y)$$

ve

$$g_y(y,v) \le 2 \cdot \frac{1}{2} F(v)F(y)$$

$$g_y(y,v) \le F(v)F(y)$$

olur.

2.Hal: $v = \lambda y \quad (\lambda \ge 0)$ olsun.

$$g_y(y,v) = g_y(v,y) = g_y(\lambda y, y) = \lambda g_y(y,y)$$

ve

$$g_y(y,y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \left[F^2(y + sy + ty) \right]_{s=t=0}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[F^2(y + ty) \right]_{t=0}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[(1+t)^2 F^2(y) \right]_{t=0} = F^2(y)$$

olduklarından

$$g_y(y,v) = \lambda \cdot F^2(y) = \lambda \cdot F(y)F(y)$$

$$= F(\lambda y)F(y)$$

$$= F(v)F(y)$$

olur. Eşitlik hali sağlanır.

Önerme 2.4.3: Kabul edelimki $v, y \in V \setminus \{0\}$ ve $\forall w \in V$ için

$$g_v(v,w) = g_y(y,w)$$

olsun. O zaman $v = y$ ’dir [7].

İspat:

$$g_v(v,w) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\left[F^2(v + sv + tw)\right]_{s=t=0}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[F^2(v + tw)\right]_{s=t=0}$$

$$= \frac{1}{2}F^2(w)$$

ve

$$g_y(y,w) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\left[F^2(y + sy + tw)\right]_{s=t=0}$$

$$= \frac{1}{2}F^2(w)$$

Kabul edelimki $w = v$ ve $w = y$ olsun. O zaman

$$F^2(v) = g_v(v,v) = g_y(y,y) = F^2(y)$$

ya da $F(v) = F(y)$ ya da Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden,

$$g_v(v,y) = F(v) \cdot F(y)$$

olup, $v = y$ ’dir.

Örnek 2.4.1: $\Re^2$ üzerinde

$$F(u,v)=\{u^4+3cu^2v^2+v^4\}^{1/4} \quad , \quad (u,v)\in \Re^2$$

fonksiyonunu düşünelim[5].

$$g_{11}=\frac{1}{2}\left[F^2\right]_{uu} \quad , \quad g_{12}=\frac{1}{2}\left[F^2\right]_{uv}=g_{21} \quad \text{ve} \quad g_{22}=\frac{1}{2}\left[F^2\right]_{vv} \quad \text{olduğundan}$$

$$g_{11}=\frac{2u^6+9cu^4v^2+6u^2v^4+3cv^6}{2F^6(u,v)}$$

$$g_{12}=\frac{(9c^2-4)u^3v^3}{2F^6(u,v)}=g_{21}$$

$$g_{22}=\frac{3cu^6+2v^6+9cu^2v^4+6u^4v^2}{2F^6(u,v)}$$

bulunur.

$$\det(g_{ij})=g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21}$$

$$=\frac{6cu^4+3(4-3c^2)u^2v^2+6cv^4}{4F^4(u,v)}$$

dir.

$$g_{11}>0 \quad \text{ve} \quad g_{22}>0 \Leftrightarrow c>0 \text{ 'dır.}$$

$c>0$ olsun. O zaman

$$\det(g_{ij})=\frac{6c(u^4+2\delta u^2v^2+v^4)}{4F^4(u,v)} \quad , \quad \delta=\frac{4-3c^2}{4c}$$

$u^2=x$ ve $v^2=y$ dersek

$$x^2+2\delta xy+y^2=(x-y)^2+2(\delta+1)xy$$

bu polinomun pozitif olması için $(\delta+1)>0$ ya da $\delta>-1$ olması gerekir. $((u,v)\neq(0,0)\, için)$

$$\delta=\frac{4-3c^2}{4c}>-1 \Rightarrow 4-3c^2>-4c$$

$$3c^2 - 4c - 4 < 0$$

$$\Delta = 16 + 48 = 64 \qquad \sqrt{\Delta} = 8$$

$$c_{1,2} = \frac{4 \mp 8}{6} \qquad c_1 = 2 \ , \ c_2 = -\frac{2}{3}$$

$\delta > -1 \Rightarrow 0 < c < 2$ olmalıdır.

g_{ij} pozitif tanımlıdır $\Leftrightarrow 0 < c < 2$ dir.

M3 şartının sağlanabilmesi için $0 < c < 2$ olması gerekir.

$\forall y = (u, v) \in \Re^2$ ve $\lambda > 0$ için

$$\begin{aligned} F(\lambda y) = F(\lambda u, \lambda v) &= (\lambda u)^4 + 3c(\lambda u)^2(\lambda v)^2 + (\lambda v)^4 \\ &= \left[\lambda^4 u^4 + 3c\lambda^4 u^2 v^2 + \lambda^4 v^4\right]^{1/4} \\ &= \lambda\left[u^4 + 3cu^2v^2 + v^4\right]^{1/4} \\ &= \lambda F(u, v) \\ &= \lambda F(y) \end{aligned}$$

olduğundan $(M2)$ pozitif homojenlik şartı sağlanır. $(M1)$'in sağlandığıda açıktır.

Örnek 2.4.2: $\Re^2$ üzerinde

$$F_{\lambda,k}(p,q) = \sqrt{p^2 + q^2 + \lambda\left(p^{2k} + q^{2k}\right)^{\frac{1}{k}}}$$

fonksiyonunu alalım[8].

$$g_{11} = \frac{1}{2}\left[F^2\right]_{pp} = \frac{1}{2}\left[2p + \lambda \cdot \left(p^{2k} + q^{2k}\right)^{\frac{1}{k}-1} \cdot p^{2k-1}\right]_p$$

$$= 1 + \lambda\left(\frac{1-k}{k}\right)\left(p^{2k} + q^{2k}\right)^{\frac{1}{k}-2} \cdot 2kp^{2(2k-1)} + \lambda \cdot \left(p^{2k} + q^{2k}\right)^{\frac{1-k}{k}}(2k-1)p^{2(k-1)}$$

$$= 1 + \lambda \cdot (1-k)\left(p^{2k} + q^{2k}\right)^{\frac{1-2k}{k}} .2.p^{2(2k-1)} + \lambda\left(p^{2k} + q^{2k}\right)^{\frac{1-k}{k}}(2k-1)p^{2(k-1)}$$

$$= 1 + \left(p^{2k} + q^{2k}\right)^{\frac{1-2k}{k}} p^{2k-2}\left[2\lambda(1-k)p^{2k-2} + \lambda\left(p^{2k} + q^{2k}\right)(2k-1)\right]$$

$$g_{22} = \frac{1}{2}\left[F^2\right]_{qq} = 1 + \left(p^{2k} + q^{2k}\right)^{\frac{1-2k}{k}} q^{2k-2}\left[2\lambda(1-k)q^{2k-2} + \lambda\left(p^{2k} + q^{2k}\right)(2k-1)\right]$$

$$g_{12} = \frac{1}{2}\left[F^2\right]_{pq} = \left[\frac{\lambda(1-k)}{k}\left(p^{2k} + q^{2k}\right)^{\frac{1}{k}-2}.2q^{2k-1}.k.p^{2k-1}\right]$$

$$= 2\lambda(1-k)\left(p^{2k} + q^{2k}\right)^{\frac{1-2k}{k}}.(p.q)^{2k-1}$$

$$\det\left[g_{ij}\right] = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$$

$$= 1 + \left(p^{2k} + q^{2k}\right)^{\frac{1-2k}{k}} q^{2k-2}\lambda\left[2(1-k)q^{2k-2} + (2k-1)\left(p^{2k} + q^{2k}\right)\right]$$

$$+ \left(p^{2k} + q^{2k}\right)^{\frac{1-2k}{k}} p^{2k-2}\lambda\left[2(1-k)p^{2k-2} + \left(p^{2k} + q^{2k}\right)(2k-1)\right]$$

$$+ \left(p^{2k} + q^{2k}\right)^{\frac{2(1-2k)}{2}}(p.q)^{2k-2} \cdot \lambda^2\left[4(1-k)^2(qp)^{2k-2} + \right.$$

$$\left. 2(2k-1)(1-k)q^{2k-2}\left(p^{2k} + q^{2k}\right)\right]$$

$$+ 2(1-k)(2k-1)\left(p^{2k} + q^{2k}\right)p^{2k-2} + (2k-1)^2\left(p^{2k} + q^{2k}\right)^2$$

$$- 4\lambda^2(1-k)^2\left(p^{2k} + q^{2k}\right)^{2\left(\frac{1-2k}{k}\right)}.(p.q)^{2(2k-1)}$$

$$= \lambda^2\left(p^{2k} + q^{2k}\right)^{2\left(\frac{1-2k}{k}\right)}(p.q)^{2k-2}\left[-4(1-k)^2(pq)^{2k-2} + 4(1-k)^2(pq)^{2k-2} + \right.$$

$$\left. 2(2k-1)(1-k)\left(p^{2k} + q^{2k}\right)\left(p^{2k-2} + q^{2k-2}\right) + (2k-1)^2\left(p^{2k} + q^{2k}\right)^2\right]$$

$$+ \lambda\left(p^{2k+}q^{2k}\right)^{\left(\frac{1-2k}{k}\right)}\left[2(1-k)q^{2(2k-2)} + (2k-1)\left(p^{2k} + q^{2k}\right)q^{2k-2} + \right.$$

$$\left. 2(1-k)p^{2(2k-2)} + (2k-1)\left(p^{2k} + q^{2k}\right)p^{2k-2}\right]$$

$$= \lambda^2\left(p^{2k} + q^{2k}\right)^{\frac{2(1-2k)}{k}}(p.q)^{2k-2}\left[2(1-k)(2k-1)\left(p^{2k} + q^{2k}\right)\left(p^{2k-2} + q^{2k-2}\right)\right.$$

$$\left. + (2k-1)^2\left(p^{2k} + q^{2k}\right)^2\right]$$

$$+\lambda\left(p^{2k}+q^{2k}\right)^{\frac{1-2k}{k}}\left[(2k-1)\left(p^{2k}+q^{2k}\right)\left(p^{2k-2}+q^{2k-2}\right)+\right.$$

$$\left.2(1-k)\left(p^{2(2k-2)}+q^{2(2k-2)}\right)\right]$$

$\lambda\in[0,\infty)$ için , $k\in\{1,....\}$ olmak üzere $\lfloor g_{ij}\rfloor$ matrisi pozitif tanımlı olduğundan M3 şartı sağlanır.

$$y=(p,q) \text{ için } F_{\lambda,k}(\lambda y)=F_{\lambda,k}(\lambda(p,q))$$

$$=\sqrt{(\lambda p)^2+(\lambda q)^2+\lambda\left((\lambda p)^{2k}+(\lambda q)^{2k}\right)^{1/k}}$$

$$=\sqrt{\lambda^2\left(p^2+q^2+\lambda.\left(p^{2k}+q^{2k}\right)\right)^{1/k}}$$

$$=|\lambda|\sqrt{p^2+q^2+\lambda\left(p^{2k}+q^{2k}\right)^{1/k}}$$

$$=|\lambda|F_{\lambda,k}(p,q)$$

olduğundan M2 şartı da sağlanır, M1 şartının sağlandığı açıktır. Böylece $F_{\lambda,k}$ bir Minkowski metriğidir.

Özel olarak $\lambda=0$ durumunda ise Riemann metriği olur.

3.FİNSLER GEOMETRİSİ

n-boyutlu bir $M = M^n$ diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde metrik yapıları düşünelim. Aksi söylenmedikçe diferensiyellenebilirliğin anlamı C^∞-diferensiyellenebilirliktir. M'nin tanjant demetini TM ile gösterelim.

$$\tau : TM \to M \text{ ve } T_xM = \tau^{-1}(x), \; \forall x \in M$$

M üzerindeki düzgün vektör alanlarının uzayını da $\chi(M)$ ile gösterelim. $\Gamma(TM)$, tanjant demetinin düzgün kesit uzayıdır. TM nin T^oM sıfır kesiti $0_x \in T_xM$ sıfır vektörlerinin birleşimidir. M 'nin kotanjant demetini T^*M ile gösterelim.

Eğer M 'nin koordinatları $(x^1, x^2, ..., x^n)$ ise T_xM 'nin bazı $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(x) = \partial_i(x), 1 \le i \le n\right\}$ olup TM deki baz $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i, 1 \le i \le n\right\}$ olur. Bu koordinat sistemi için, tanjant demeti,

$\sum_{i=1}^{n} y^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(x) \in T_xM$ tanjant vektörüne bağlı olarak $(x, y) = (x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n)$

kanonik koordinatları ile verilebilir. Bir $V \in \chi(M)$ vektör alanı

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} v^i(x)\partial_i(x)$$

şeklinde yazılabilir.

$f : M \to \Re$ şeklindeki diferensiyellenebilir fonksiyonların bir reel vektör uzayı $\Im(M) = C^\infty(M)$ ile gösterilir. Bir çok lineer dönüşüm

$$A : \chi(M) \times ... \times \chi(M) \to \Im(M)$$

olsun. Eğer herbir bileşen $\Im(M)$ vektör uzayına göre lineer ise A, M 'de $(0, k)$**-tipinde tensör alanıdır** denir. Bir

$$A : \chi(M) \times ... \times \chi(M) \to \chi(M)$$

çok lineer dönüşümü eğer aynı şartı sağlarsa $(1,k)$-tensör alanı olarak adlandırılır. M manifoldu üzerindeki bir $A,(0,k)$**-tipindeki tensör alanı simetriktir** denir, eğer $\forall x \in M$ için

$$A_x : T_xM \times ... \times T_xM \to \Re$$

kısıtlaması simetrik ise, yani

$$A_x\left(X_{\sigma(1)},...,X_{\sigma(k)}\right) = A_x\left(X_1,...,X_k\right) \qquad \text{ise } \left(\forall X_1,...,X_k \in T_xM \text{ ve } \sigma \in \delta_k \text{ için}\right)$$

M de bir vektör alanı X ve $f \in \Im(M)$ olsun. $p \in M$ için, $\gamma(0) = p$ ve $\gamma^{'}(0) = X_p$ şartlarını sağlayan

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$

düzgün eğrisi için $\left.\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\right|_{t=0} \left(f(\gamma(t))\right)$ eşitliği γ 'nın seçilişinden bağımsızdır. p değiştikçe, bu M de yeni bir fonksiyon tanımlar ve f 'in X yönündeki Lie türevi olarak adlandırılır ve $X(f) = Xf$ olarak yazılır. Üstelik $Xf(p)$ için $df(p)X$ 'dir.

$$\tau : TM \to M$$

dönüşümü, double tanjant demetinin diferensiyelini verir.

$$\tau_* : TTM \to TM \ , \ \forall X \in T_xM \text{ için}$$

$T_X(TM)$ uzayı $X \in TM$ de double tanjant uzayı olarak adlandırılır ve 2n boyutludur. Buradaki n , M nin boyutudur.

$$Y : (-\varepsilon, \varepsilon) \to T_xM \subset TM \ , \ Y(0) = X$$

dikey eğrisinin $Y^{'}(0)$ tanjant vektörü , $T_X(TM)$ nin dikey tanjant uzayı olarak adlandırılan ve

$$T_X^V(TM) = T_X(T_xM)$$

ile gösterilen seçilmiş n-boyutlu bir alt uzayını gerer. Böylece

$$T_X^V(TM) = \ker\left(d\tau : T_X(TM) \to T_xM\right) \text{ ve } T^V TM \subset TTM \text{ dir.}$$

$Y \in T_xM$ tanjant vektörü verilsin.

$$\overline{Y}:T_xM \to T(T_xM)=T_xM\times T_xM$$

$$X\to \overline{Y}(X)=(X,Y)$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlarsak M deki her vektör alanı ile TM de bir birleştirilmiş dikey vektör alanı bulabiliriz. (Yani T^VTM nin bir kesitini).

Eğer,

$$F:U\subset TM\to\Re$$

fonksiyonu verilmişse bu fonksiyonun $\overline{Y}$ ye göre Lie türevi

$$\overline{Y}F(V)=\left(\frac{d}{dt}\right)[F(V+tY)]_{t=0}$$

ile verilir. TM deki $(x,y)=(x^1,...,x^n,y^1,...,y^n)$ kanonik koordinatların bir seti cinsinden her koordinat fonksiyonuna eşdeğer olan F için $\overline{\frac{\partial}{\partial x^i}}F=\frac{\partial}{\partial y^i}F$ dir, böylece $\overline{\frac{\partial}{\partial x^i}}=\frac{\partial}{\partial y^i}$ olur[9].

3.1.Finsler Yapısı

Tanım 3.1.1: Bir (M,F) Finsler manifoldu, F finsler metriği ile tanımlanmış diferensiyellenebilir bir M manifoldudur. M üzerindeki bir **Finsler metriği**

$$F:TM\to\Re$$

şeklinde sürekli bir dönüşümdür ve bu dönüşüm T^0M sıfır kesiti dışında C^∞ olup şu üç şartı sağlar:

F1) F pozitif olarak homojendir. Yani $\forall X\in TM$ tanjant vektörü ve $\forall\mu\in\Re$ pozitif sayısı için

$$F(\mu X)=\mu F(X)$$

dir.

F2) $F(X)=0\Rightarrow X=0$ ’dır.

F3) Legendre şartını sağlar: Yani $\forall V\in T_xM \quad (V\neq 0)$

$$g_V : T_xM \times T_xM \to \Re$$

$$g_V(X,Y) = \langle X,Y\rangle_V = \frac{1}{2}\overline{XY}F^2(V) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\left[F^2(V + sX + tY)\right]_{s=0,t=0}$$

şeklinde tanımlı simetrik bilineer form pozitif tanımlıdır[9].

Sonuçlar:

1) TM deki $(x,y) = (x^1,...,x^n,y^1,...,y^n)$ kanonik koordinatların bir seti cinsinden

$$g_{ij}(x,y) = g_{(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}(x,y)$$

dir.

O halde Legendre şartından $g_{ij}(x,y)_{1\le i,j\le n}$ simetrik matrisinin $y \neq 0$ için pozitif tanımlı olduğu çıkartılabilir.

2) $\forall \mu > 0$ için $F(\mu X) = \mu F(X)$ olduğundan

$$\begin{aligned} g_V(V,V) = \langle V,V\rangle_V &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\left[F^2(V + sV + tV)\right]_{s=0,t=0} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}F^2(V + tV)\Big|_{t=0} \\ &= F^2(V) \end{aligned}$$

bulunur. Koordinatlar cinsinden;

$$\frac{1}{2}y^i y^j \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j}F^2(x,y) = F^2(x,y)$$

dir[9].

Tanım 3.1.2: Bir (M,F) Finsler manifoldu üzerinde **Legendre transformasyonu** aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$L_F : TM \to T^*M$$

$$V \to L_F(V) : TM \to \Re$$

$$(W) \to L_F(V)(W) = g_V(V,W)$$

$L_F(V)$ yi, g_V metriğine göre V ye dual bir 1-form olarak görebiliriz[9].

Örnek 3.1.1: Bir α Riemann metriği ile bir β diferensiyel 1-formu verilsin. $\forall X \in T_x M$ için

$$\beta(X) = \alpha(X,\xi)$$

eşitliğini sağlayan bir ξ vektör alanı vardır. O zaman, ξ vektörüne, α 'ya göre β 'ya dualdir deriz.

$$\|\beta\| = \|\xi\| = \sqrt{\alpha(\xi,\xi)}$$

tanımlayalım. Eğer $\|\beta\| \leq 1$ ise

$$F(X) = \sqrt{\alpha(X,X)} + \beta(X)$$

$$= \sqrt{\alpha(X,X)} + \alpha(X,\xi)$$

bir finsler metriği tanımlar. Bu tip Finsler metriğine **Randers Metriği** denir.

$$X \neq 0 \text{ için } \|X\| = \sqrt{\alpha(X,X)} > 0$$

olup,

$$F(X) = \|X\| + \alpha(X,\xi)$$

$$= \|X\|\left(1 + \alpha\left(\frac{X}{\|X\|},\xi\right)\right)$$

$$\geq \|X\|(1 - \|\xi\|)$$

$0 < \|\xi\| < 1$ olduğundan

$F(X) > 0$ 'dır. $F(X) = 0 \Rightarrow \|X\| = 0 \Rightarrow X = 0$ dır. Tanım 2.1.1. deki F2 şartı sağlanır[9].

Örnek 3.1.2: $\Re^2$ de tanımlı $F(x,y;u,v)=\left(u^4+v^4\right)^{1/4}$ fonksiyonu bir **Quartic metriğidir.**

$$F(x,y;\lambda u,\lambda v)=\left((\lambda u)^4+(\lambda v)^4\right)^{1/4}$$

$$=\lambda\left(u^4+v^4\right)^{1/4}$$

$$=\lambda F(x,y;u,v)$$

olduğundan pozitif homojenlik şartı $(M2)$ sağlanır. Şimdi $(M3)$'ün sağlandığını gösterelim:

$$g_{11}=\frac{1}{2}\left[F^2\right]_{uu}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial u\partial u}\left[F^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{2}\left(u^4+v^4\right)^{-\frac{1}{2}}.4u^3\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}\left[\left(u^4+v^4\right)^{-1/2}u^3\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left(u^4+v^4\right)^{-\frac{3}{2}}.4u^6+\left(u^4+v^4\right)^{-\frac{1}{2}}3u^2$$

$$g_{11}=-2\frac{u^6}{\left(u^4+v^4\right)^{3/2}}+\frac{3u^2}{\left(u^4+v^4\right)^{1/2}}$$

benzer şekilde

$$g_{22}=\frac{1}{2}\left[F^2\right]_{vv}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial v\partial v}\left[F^2\right]$$

$$=-2\frac{v^6}{\left(u^4+v^4\right)^{3/2}}+\frac{3v^2}{\left(u^4+v^4\right)^{1/2}}$$

$$g_{12}=\frac{1}{2}\left[F^2\right]_{uv}=\frac{1}{2}\left[F^2\right]_{vu}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}\left[F^2\right]$$

$$g_{12}=g_{21}=\frac{\partial}{\partial v}\left[\left(u^4+v^4\right)^{-1/2}u^3\right]=-\frac{u^3}{2}\left(u^4+v^4\right)^{-3/2}.4v^3$$

$$g_{12} = g_{21} = -2\frac{u^3v^3}{\left(u^4+v^4\right)^{3/2}}$$

bulunur.

$$\det\left[g_{ij}\right] = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$$

olduğundan

$$\det\left[g_{ij}\right] = 4\frac{u^6v^6}{\left(u^4+v^4\right)^3} - 6\frac{u^6v^2}{\left(u^4+v^4\right)^2} - 6\frac{u^2v^6}{\left(u^4+v^4\right)^2} + 9\frac{u^2v^2}{\left(u^4+v^4\right)} - 4\frac{u^6v^6}{\left(u^4+v^4\right)^3}$$

veya

$$\det\left[g_{ij}\right] = 9\frac{u^2v^2}{\left(u^4+v^4\right)} - 6u^2v^2\frac{\left(u^4+v^4\right)}{\left(u^4+v^4\right)^2}$$

veya

$$\det\left[g_{ij}\right] = \frac{3u^2v^2}{\left(u^4+v^4\right)} \quad \text{olur.}$$

$(u,v) \neq (0,0)$ için $\left[g_{ij}\right]$ matrisi pozitif tanımlıdır. Eğer $u = 0, v \neq 0$ ise

$g_{11} = 0, g_{22} = -\frac{2v^6}{v^6} + \frac{3v^2}{v^2}$, $g_{22} = 1, g_{12} = 0 = g_{21}$ olacağından

$$g_{ij}(x,y;0,v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{olur.}$$

4. GEODEZİKLER

4.1. Riemann Uzayında Geodezikler

C, M üzerinde

$$C:[a,b]\subset\Re\to M \tag{4.1}$$

$$t\to C(t)=u^i(t)$$

şeklinde tanımlı diferensiyellenebilir bir eğri olsun, buradaki $\{u^i\}$, lokal koordinat sistemini gösterir. C'nin uzunluğu

$$L(C)=\int_a^b\sqrt{g_{ij}\frac{du^i}{dt}\cdot\frac{du^j}{dt}}\,dt \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlıdır[6].

Tanım 4.1.1: C, M üzerinde yukarıdaki gibi tanımlı bir eğri ve $X(t)=X^i(t)\frac{\partial}{\partial u^i}$ bir tanjant vektör alanı olsun. $X(t)$, C eğrisi boyunca paraleldir denir eğer, C deki tanjant vektörü yönündeki kovaryant türevi sıfır ise yani,

$$0=D_{\frac{du}{dt}}X=D_{\frac{du^i}{dt}\frac{\partial}{\partial u^i}}X(t)=\frac{du^i}{dt}D_{\frac{\partial}{\partial u^i}}X^j(t)\cdot\frac{\partial}{\partial u^j}$$

$$=\frac{du^i}{dt}dX^j\frac{\partial}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial u^j}+\frac{du^i}{dt}X^j\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial u^k}$$

$$=\left(\frac{dX^i}{dt}+X^k\Gamma_{ik}^j\frac{du^i}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial u^j}$$

Buradan $X(t)$ için C eğrisi boyunca paralellik şartını

$$\frac{dX^i}{dt}+X^k\Gamma_{ik}^j\frac{du^i}{dt}=0 \tag{4.3}$$

olarak yazabiliriz[6].

Tanım 4.1.2: (4.1) deki gibi tanımlanmış diferensiyellenebilir $C(t)$ eğrisi **geodeziktir** denir eğer, tanjant vektörleri $C(t)$ boyunca paralel iseler. Ya da $C(t)$ eğrisinin geodezik olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{d^2u^i}{dt^2}+\Gamma^j_{ik}\frac{du^i}{dt}\cdot\frac{du^k}{dt}=0 \tag{4.4}$$

olmasıdır.

$C(t)$, M üzerinde diferensiyellenebilir bir eğri olduğundan M Riemann manifoldunun geodeziğidir denir[6].

4.2. Finsler Uzayında Geodezikler

M bir manifold olsun. O zaman M üzerinde bir eğri

$$c:(a,b)\rightarrow M$$

ve $\forall t\in(a,b)$ için $(DC)_t\neq 0$, şeklinde tanımlı düzgün bir dönüşümdür. Böyle bir eğri ,

$$\hat{c}:(a,b)\rightarrow TM\setminus\{0\}$$

$$t\rightarrow \widehat{C}(t)=(DC)(t)$$

şeklinde tanımlı bir kanonik lift'e sahiptir, buradaki DC , C'nin teğetini gösterir. Eğer M , F Finsler normuyla birlikte bir Finsler manifoldu ise C eğrisinin uzunluğu

$$L(c)=\int_a^b F\circ\widehat{c}(t)dt \tag{4.1}$$

şeklinde, enerji de

$$E(c)=\frac{1}{2}\int_a^b F^2\circ\widehat{c}(t)dt \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlıdır[7].

$F\circ\widehat{c}=1$ eşitliğini sağlayan bir c eğrisine **path-uzunluğuyla parametrelendirilmiştir**, denir.

Tanım 4.2.1: Farzedelim ki $c:(a,b)\to M$ bir eğri olsun. O zaman c nin bir varyasyonu bir $\varepsilon > 0$ sayısı için aşağıdaki koşulları sağlayan

$$H:(-\varepsilon,\varepsilon)\times[a,b]\to M$$

$$(s,t)\to H(s,t)=c_s(t)$$

şeklinde sürekli bir dönüşümdür.

1. H, $(-\varepsilon,\varepsilon)\times(a,b)$ üzerinde düzgündür ve $c_s(.)=H(s,.)$'dir.

2. H, her $i=1,...,k$ için $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[t_{i-1},t_i]$ de C^∞ dur.

3. $c_0(t)=c(t)$, $\forall t\in[a,b]$ dir.

4. $c_s(a)$, $c_s(b)\in M$, $s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ 'a bağlı olmayan sabitlerdir.

Tanım 4.2.2: Bir Finsler manifoldu üzerindeki c eğrisi **geodeziktir** denir eğer L, c de sabit ise, yani c'nin her c_s varyasyonu için

$$\left.\frac{d}{ds}L(c_s)\right|_{s=0}=0$$

ise.

Tanım 4.2.3: $V(t)=V^i(t)\left.\frac{d}{dx^i}\right|_{c(t)}=\frac{\partial H}{\partial s}(0,t)$ vektör alanına H **'nin varyasyon alanı** denir.

$c_s(t)=H(s,t)$'nin uzunluğu da

$$L(s)=\int_a^b F(\hat{c}_s(t))dt$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}F\left(\frac{\partial H}{\partial t}(s,t)\right)dt$$

ile tanımlıdır.

Bir eğrinin geodezik olma şartını veren önerme'yi ispatlamak için, TM üzerindeki vektörlerle yani $T(TM)$ deki elemanlarla çalışmamız gereklidir. Bunun için onların transformasyon kurallarını çıkartarak işe başlayalım. Öncelikle, eğer (x^i) ve $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x)$'ler bir $x \in M$ noktası civarında lokal koordinatlar iseler o zaman

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\right|_x \tag{4.3}$$

Burada $\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}$ 'ler x için x^i lokal koordinatlarından hesaplanmış , (x^i) koordinatlarını $(\tilde{x}^i)$ koordinatlarına dönüştüren dönüşümün Jakobiyenidir.

Sonra (x^i, y^i), $(\tilde{x}^i, \tilde{y}^i)$'leri $y \in T_xM$ civarındaki standart lokal koordinatlar olarak düşünelim. Yani, $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x)$, $\tilde{y}^i = \tilde{y}^i(x, y)$ ve y^i 'ler $\frac{\partial}{\partial x^i}$ bazına göre koordinatlardır.

$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_y$, $\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_y$, $\left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\right|_y$, $\left.\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^i}\right|_y \in T(TM \setminus \{0\})$ vektörleri transformasyon kurallarını sağlar:

(4.3) denkleminden $\tilde{y}^r = \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^s} \cdot y^s$ yazabiliriz. Bunu aşağıdaki eşitlikte yerine yazarsak;

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_y = \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^i} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^r}\right|_y + \frac{\partial \tilde{y}^r}{\partial x^i} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^r}\right|_y$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_y = \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^i} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^r}\right|_y + \frac{\partial^2 \tilde{x}^r}{\partial x^i \partial x^s} \cdot y^s \cdot \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^r}\right|_y \tag{4.4}$$

buluruz. Yine (4.3) denkleminden

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_y = \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^i} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^r}\right|_y \tag{4.5}$$

dir.

Önerme 4.2.1: Farzedelim ki

$$f : TM \setminus \{0\} \rightarrow \Re$$

düzgün bir fonksiyon olsun. O zaman düzgün bir $c:(a,b)\to M$ eğrisi için

$$L(c_s)=\int_a^b f\circ\widehat{c}_s(t)dt$$

şeklinde tanımlı L dönüşümü c nin her c_s varyasyonu için sabittir ancak ve ancak $\forall t\in(a,b)$ için , $\widehat{c}(t)$ civarında

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}\circ\widehat{c}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y^i}\circ\widehat{c}\right)=0 \qquad (4.6)$$

olacak şekilde lokal koordinatlar vardır. Üstelik (4.6) şartı lokal koordinatlardan bağımsızdır.

İspat: Farzedelim ki c bir eğri ve $a=t_1<\ldots<t_n=b$ c'nin bir bölüntüsü olsun. Üstelik $H(s,t)=c_s(t)$ c'nin bir varyasyonu olsun ve (t_i,t_{i+1}) bölüntüsü H ile bir koordinat haritasına haritalansın. L dönüşümü c nin her c_s varyasyonu için sabit olduğundan

$$\frac{d}{ds}(L(c_s))\Big|_{s=0}=0$$

olmalıdır. Eğer $K:c\to\int_a^b f\circ\hat{c}(t)dt$ şeklinde tanımlı bir dönüşüm ise, o zaman

$$\frac{d}{ds}K(c_s)\Big|_{s=0}=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left[\frac{\partial f}{\partial x^i}\circ\widehat{c}(t)\cdot\frac{\partial H^i}{\partial s}(0,t)+\frac{\partial f}{\partial y^i}\circ\widehat{c}(t)\cdot\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}H^i(0,t)\right]dt$$

ya da

$$0=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left[\frac{\partial f}{\partial x^i}\circ\widehat{c}(t)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y^i}\circ\widehat{c}(t)\right)\right]\frac{\partial H^i}{\partial s}(0,t)dt$$

olup buradan

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}\circ\widehat{c}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y^i}\circ\widehat{c}\right)=0$$

elde edilir.

$C:(a,b)\to M$ sabit bir eğri ise c'nin (a,b) nin her alt grubuna kısıtlaması da sabittir. Böylece farzedebiliriz ki c, bir koordinat haritasında kapsanır ve iddia yukarıdaki hesaplamalardan çıkar.

Tanım 4.2.4: Finsler manifoldunda geodezik katsayılar

$$G^i(y)=\frac{1}{4}g^{ik}(y)\left(2\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}-\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}\right)y^j y^l \quad , \quad y\in TM\setminus\{0\} \tag{4.7}$$

şeklinde lokal olarak tanımlı fonksiyonlardır.

Tanım 4.2.5: Finsler manifoldu üzerindeki $G\in \chi(TM\setminus\{0\})$ geodezik sprayı

$$G\big|_y = y^i\cdot\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_y - 2G^i(y)\cdot\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_y \tag{4.8}$$

şeklinde lokal tanımlıdır ve G^i ler aşağıdaki transformasyon kuralına uyarlar.

$$\widetilde{G}^r = \frac{\partial\widetilde{x}^r}{\partial x^i}G^i - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\widetilde{x}^r}{\partial x^i\partial x^s}\cdot y^i y^s \tag{4.9}$$

5.YATAY VE DİKEY AYRIŞIMLAR

Pek çok yönden, Finsler geometrisi Riemann geometrisi için bir analoktur. Bununla beraber, tipik bir farklılık Finsler geometrisi objelerinin TM üzerinde olmasına karşılık Riemann geometrisinde bu objelerin M üzerinde olmasıdır. Örneğin, Finsler geometrisinde eğrilik $TM \setminus \{0\}$ üzerinde bir tensör iken Riemann geometrisinde M üzerinde bir tensördür. Bu sebeple TM üzerindeki vektörleri ve ko-vektörleri, yani $T(TM \setminus \{0\})$ ve $T^*(TM \setminus \{0\})$'ın elemanlarını bilmemiz gerekir. Bu bölümde $T(TM \setminus \{0\})$ ve $T^*(TM \setminus \{0\})$ daki yatay-dikey ayrışımı tanımlayacağız. Bu ayrışım, lokal koordinatlardaki hesaplamaları büyük ölçüde basitleştirecektir. Üstelik, Finsler metriğine uygun yapıları da verecektir. Örneğin, bir geodeziğin teğeti bir yatay vektör olacaktır. Üstelik, F'in türevi bir dikey ko-vektör olacaktır. Yatay-dikey ayrışımın bazı ilaveleri de verilmiştir.

Yatay-dikey ayrışımı tanımlamak için , lineer olmayan konneksiyonlara , yani $TM \setminus \{0\}$ üzerinde bazı yapılara ihtiyaç vardır.

Tanım 5.1: Bir M manifoldu üzerindeki lineer olmayan koneksiyon aşağıdaki transformasyon kurallarını sağlayan $TM \setminus \{0\}$ üzerinde lokal olarak tanımlı N^i_j 1-homojen fonksiyonların bir koleksiyonudur.

$$\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \tilde{N}^h_j = \frac{\partial \tilde{x}^h}{\partial x^j} N^j_i - \frac{\partial^2 \tilde{x}^h}{\partial x^i \partial x^j} \cdot y^j$$

Geodezik spray için katsayılar G^i olmak üzere

$$N^i_j = \frac{\partial G^i}{\partial y^j} \tag{5.1}$$

olsun. O zaman N^i_j'ler 1-homojendir. (4.9) daki

$$\tilde{G}^h = \frac{\partial \tilde{x}^h}{\partial x^j} \cdot G^j - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{x}^h}{\partial x^j \partial x^s} \cdot y^j y^s$$

denkleminin diferensiyelini alırsak, N^i_j'lerin lineer olmayan bir koneksiyonun sabitleri olduğunu görebiliriz.

$$\frac{\partial}{\partial y^i}\widetilde{G}^h = \frac{\partial \widetilde{x}^h}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial}{\partial y^i}G^j - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \widetilde{x}^h}{\partial x^j \partial x^s}\frac{\partial}{\partial y^i}\left(y^j y^s\right)$$

$$= \frac{\partial \widetilde{x}^h}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial G^j}{\partial y^i} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \widetilde{x}^h}{\partial x^j \partial x^s}\cdot\left(\underbrace{\frac{\partial y^j}{\partial y^i}}_{\delta_i^j}\cdot y^s + y^j\underbrace{\frac{\partial y^s}{\partial y^i}}_{\delta_i^s}\right)$$

burada $\frac{\partial G^j}{\partial y^i} = N_i^j$ olduğunu kullanırsak

$$\frac{\partial}{\partial y^i}\widetilde{G}^h = \frac{\partial \widetilde{x}^h}{\partial x^j}\cdot N_i^j - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \widetilde{x}^h}{\partial x^j \partial x^s}\left(\delta_i^j\cdot y^s + y^j\cdot\delta_i^s\right)$$

$$= \frac{\partial \widetilde{x}^h}{\partial x^j}N_i^j - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \widetilde{x}^h}{\partial x^i \partial x^j}\left(2y^j\right)$$

$$= \frac{\partial \widetilde{x}^h}{\partial x^j}N_i^j - \frac{\partial^2 \widetilde{x}^h}{\partial x^i \partial x^j}\cdot y^j$$

olur, burada denklem (4.5)’i kullanarak bulduğumuz

$$\frac{\partial}{\partial y^i}\widetilde{G}^h = \frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial \widetilde{G}^h}{\partial \widetilde{y}^j} = \frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^i}\cdot\widetilde{N}_j^h$$

eşitliğini de sol taraftaki yerine yazarsak

$$\frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^i}\widetilde{N}_j^h = \frac{\partial \widetilde{x}^h}{\partial x^j}N_i^j - \frac{\partial^2 \widetilde{x}^h}{\partial x^i \partial x^j}\cdot y^j$$

buluruz. Böylece Tanım (5.1) deki gibi eşitliği elde etmiş oluruz.

5.1. $T(TM \setminus \{0\})$’ın Ayrışımı

(4.4) denklemi gösteriyor ki $S_p\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_y : i = 1,\ldots,n\right\}$ alt vektör uzayı lokal koordinatlar cinsindendir. Bu yüzden $T(TM \setminus \{0\})$ da $\frac{\partial}{\partial x^i}$ yönleri hakkında bir şey söylenemez. Buna rağmen , M manifoldu lineer olmayan N_j^i koneksiyonu ile donatıldığında

$$\left.\frac{\delta}{\delta x^i}\right|_y = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_y - N_i^k(y)\left.\frac{\partial}{\partial y^k}\right|_y \in T(TM \setminus \{0\}) \tag{5.2}$$

dir, burada $\left.\frac{\delta}{\delta x^i}\right|_y = \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^i} \cdot \left.\frac{\delta}{\delta \tilde{x}^r}\right|_y$ 'dir.

Böylece $T_y(TM \setminus \{0\})$ 2n-boyutlu vektör uzayı iki tane n-boyutlu alt uzaya sahiptir. Bu alt uzaylar

$\mathcal{V}_y TM = S_p\left\{\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_y\right\}$ ve $\mathcal{H}_y TM = S_p\left\{\left.\frac{\delta}{\delta x^i}\right|_y\right\}$ olup, lokal koordinatlardan bağımsızdırlar. O halde

$$T(TM \setminus \{0\}) = \mathcal{V}TM \oplus \mathcal{H}TM$$

dir. $\mathcal{V}\,TM$ deki vektörler **dikey vektörler** ve $\mathcal{H}\,TM$ deki vektörler de **yatay vektörler** olarak adlandırılırlar.

Aşağıdaki örnek gösteriyor ki geodeziklerin teğeti her zaman yatay vektördür. Böylece, yatay vektörler, dikey vektörlere göre daha çok önem taşır.

Örnek 5.1.1: Geodezik spray için G^i katsayıları 2-homojen olduğundan $2G^i = y^j \cdot \frac{\partial G^i}{\partial y^j} = y^j \cdot N_j^i$ dir. Bunu

$$G|_y = y^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_y - 2G^i(y)\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_y$$

denkleminde yerine yazarsak

$$G|_y = y^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_y - y^j N_j^i \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_y$$

yani

$$G|_y = y^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_y - y^i N_i^j \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_y$$

$$= y^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_y - N_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_y \right)$$

$$= y^i \frac{\delta}{\delta x^i}\bigg|_y$$

olur. Böylece de $G(y)$, $\forall y \in TM \setminus \{0\}$ için yataydır.

5.2. $T^*(TM \setminus \{0\})$'ın Ayrışımı:

TM de, dx^i ve dy^i 1-formları aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$dx^i\Big|_y = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^r} \cdot d\tilde{x}^r\Big|_y \tag{5.3}$$

$$dy^i\Big|_y = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^r} d\tilde{y}^r\Big|_y + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \tilde{x}^r \partial \tilde{x}^s} \tilde{y}^r \cdot d\tilde{x}^s\Big|_y \tag{5.4}$$

Bu transformasyon kuralları (4.4) ve (4.5) den çıkartılabilir.

$$\delta y^i\Big|_y = d y^i\Big|_y + N_j^i(y) dx^j\Big|_y \tag{5.5}$$

olsun. Burada $\delta y^i\Big|_y = \dfrac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^r} \cdot \delta \tilde{y}^r\Big|_y$ 'dir.

Böylece 2n-boyutlu $T_y^*(TM \setminus \{0\})$ vektör uzayı $\mathcal{V}_y^* TM = S_p\left\{\delta y^i\big|_y\right\}$ ve $\mathcal{H}^* TM = S_p\left\{d x^i\big|_y\right\}$ şeklinde iki tane n-boyutlu alt uzaya sahiptir ve bu altuzaylar lokal koordinatlardan bağımsızdırlar. O zaman

$$T^*(TM \setminus \{0\}) = \mathcal{V}^* TM \oplus \mathcal{H}^* TM$$

dir. $\mathcal{V}^* TM$ deki kovektörler dikey kovektörler ve $\mathcal{H}^* TM$ deki kovektörler de yatay ko-vektörler olarak adlandırılırlar.

Önerme 5.2.2: Farzedelim ki $\dfrac{\delta}{\delta x^i}, \dfrac{\partial}{\partial y^i}, dx^i$ ve δy^i vektörleri (5.1) deki lineer olmayan koneksiyon ile tanımlı olsunlar. O zaman aşağıdaki eşitlikler vardır:

$$\left.\begin{aligned} dx^i\left(\frac{\delta}{\delta x^j}\right) &= \delta^i_j, \quad dx^i\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = 0 \\ \delta y^i\left(\frac{\delta}{\delta x^j}\right) &= 0, \quad \delta y^i\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = \delta^i_j \end{aligned}\right\} \qquad (5.6)$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta x^j}, \frac{\delta}{\delta x^k}\right] = \left(\frac{\delta N^m_j}{\delta x^k} - \frac{\delta N^m_k}{\delta x^j}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y^m} \qquad (5.7)$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right] = \left[\frac{\delta}{\delta x^j}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right] = \frac{\partial N^k_j}{\partial y^i} \cdot \frac{\partial}{\partial y^k} \qquad (5.8)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right] = 0 \qquad (5.9)$$

İspat: $dx^i \in \mathcal{H}^* TM \quad , \quad \delta y^i \in \mathcal{V}^* TM$

$$\frac{\delta}{\delta x^i} \in \mathcal{H}\, TM \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y^i} \in \mathcal{V}\, TM$$

olduklarından (5.6) daki eşitlikler aşikardır. (5.8) deki eşitliği gösterelim:

Lie operatörünün tanımından

$$\left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right] = \frac{\delta}{\delta x^i}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) - \frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x^i} - N^k_i \frac{\partial}{\partial y^k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) - \frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - N^k_i \frac{\partial}{\partial y^k}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) - \frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) - \left(N^k_i \frac{\partial}{\partial y^k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) + \frac{\partial}{\partial y^j}\left(N^k_i \frac{\partial}{\partial y^k}\right)$$

$$= -N^k_i \frac{\partial^2}{\partial y^k \partial y^j} + \frac{\partial N^k_i}{\partial y^j} \cdot \frac{\partial}{\partial y^k} + N^k_i \frac{\partial^2}{\partial y^j \partial y^k}$$

$$= \frac{\partial N^k_i}{\partial y^j} \cdot \frac{\partial}{\partial y^k} \qquad (*) \qquad \text{olur,}$$

benzer şekilde

$$\left[\frac{\delta}{\delta x^j},\frac{\partial}{\partial y^i}\right]=\frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)-\frac{\partial}{\partial y^i}\left(\frac{\delta}{\delta x^j}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x^j}-N_j^k\frac{\partial}{\partial y^k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)-\frac{\partial}{\partial y^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}-N_j^k\frac{\partial}{\partial y^k}\right)$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial x^j\partial y^i}-N_j^k\frac{\partial^2}{\partial y^k\partial y^i}-\frac{\partial^2}{\partial y^i\partial x^j}+\frac{\partial N_j^k}{\partial y^i}\cdot\frac{\partial}{\partial y^k}-N_j^k\frac{\partial^2}{\partial y^i\partial y^k}$$

$$=\frac{\partial N_j^k}{\partial y^i}\cdot\frac{\partial}{\partial y^k}\qquad(*)(*)$$

$(*)$ ve $(*)(*)$ dan (5.8) eşitliği bulunur.

Şimdi (5.7) deki eşitliği bulalım:

$$\left[\frac{\delta}{\delta x^j},\frac{\delta}{\delta x^k}\right]=\frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{\delta}{\delta x^k}\right)-\frac{\delta}{\delta x^k}\left(\frac{\delta}{\delta x^j}\right)$$

$$=\frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}-N_k^m\frac{\partial}{\partial y^m}\right)-\frac{\delta}{\delta x^k}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}-N_j^m\frac{\partial}{\partial y^m}\right)$$

$$=\frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)-\frac{\delta}{\delta x^j}\left(N_k^m\frac{\partial}{\partial y^m}\right)-\frac{\delta}{\delta x^k}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)+\frac{\delta}{\delta x^k}\left(N_j^m\frac{\partial}{\partial y^m}\right)$$

$$=\frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)-\frac{\delta}{\delta x^k}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)+\left(\frac{\delta}{\delta x^k}N_j^m-\frac{\delta}{\delta x^j}N_k^m\right)\frac{\partial}{\partial y^m}$$

$$-N_k^m\frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{\partial}{\partial y^m}\right)+N_j^m\frac{\delta}{\delta x^k}\left(\frac{\partial}{\partial y^m}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x^j}-N_j^m\frac{\partial}{\partial y^m}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial x^k}-N_k^m\frac{\partial}{\partial y^m}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

$$+\left(\frac{\delta}{\delta x^k}N_j^m-\frac{\delta}{\delta x^j}N_k^m\right)\frac{\partial}{\partial y^m}-N_k^m\left(\frac{\partial}{\partial x^j}-N_j^s\frac{\partial}{\partial y^s}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y^m}$$

$$+N_j^m\left(\frac{\partial}{\partial x^k}-N_k^s\frac{\partial}{\partial y^s}\right)\frac{\partial}{\partial y^m}$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial x^j\partial x^k}-\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^j}-N_j^m\frac{\partial^2}{\partial y^m\partial x^k}+N_k^m\frac{\partial^2}{\partial y^m\partial x^j}$$

$$+\left(\frac{\delta}{\delta x^k}N_j^m-\frac{\delta}{\delta x^j}N_k^m\right)\frac{\partial}{\partial y^m}-N_k^m\left(\frac{\partial}{\partial x^j}-N_j^s\frac{\partial}{\partial y^s}\right)\frac{\partial}{\partial y^m}$$

$$+N_j^m\left(\frac{\partial}{\partial x^k}-N_k^s\frac{\partial}{\partial y^s}\right)\frac{\partial}{\partial y^m}$$

veya

$$=\left(\frac{\delta}{\delta x^k}N_j^m-\frac{\delta}{\delta x^j}N_k^m\right)\frac{\partial}{\partial y^m}-N_j^m\frac{\partial^2}{\partial y^m\partial x^k}+N_k^m\frac{\partial^2}{\partial y^m\partial x^j}$$

$$-N_k^m\frac{\partial^2}{\partial x^j\partial y^m}+N_j^m\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial y^m}+\left(N_k^mN_j^s-N_j^mN_k^s\right)\frac{\partial^2}{\partial y^s\partial y^m}$$

olur, burada $N_k^mN_j^s-N_j^mN_k^s=0$ dır, çünkü

$$N_k^mN_j^s-N_j^mN_k^s=\frac{\partial G^m}{\partial y^k}\cdot\frac{\partial G^s}{\partial y^j}-\frac{\partial G^m}{\partial y^j}\frac{\partial G^s}{\partial y^k}=0$$

dır. Sonuç olarak

$$\left[\frac{\delta}{\delta x^j},\frac{\delta}{\delta x^k}\right]=\left(\frac{\delta}{\delta x^k}N_j^m-\frac{\delta}{\delta x^j}N_k^m\right)\frac{\partial}{\partial y^m}$$

bulunur.

Son olarak eşitlik (5.9)'u gösterelim:

$$\left[\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right]=\frac{\partial}{\partial y^i}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)-\frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial y^i\partial y^j}-\frac{\partial^2}{\partial y^j\partial y^i}$$

$$= 0$$

dır.

Önerme 5.2.3: Eğer $TM \setminus \{0\} \rightarrow \Re$ düzgün bir fonksiyon ise

$$df = \frac{\delta f}{\delta x^i} dx^i + \frac{\partial f}{\partial y^i} \cdot \delta y^i \tag{5.10}$$

dur.

5.3. Sasaki Metrik ve Hemen Hemen Kompleks Yapı

Farzedelimki M, bir F finsler metrikli manifold olsun. O zaman yatay-dikey ayrışımın iki ilavesi, $T(TM \setminus \{0\})$ için Sasaki metrik ve hemen hemen kompleks yapıdır.

Tanım 5.3.1: $$\hat{g} = g_{ij}(y) dx^i \otimes dx^j + g_{ij}(y) \delta y^i \otimes \delta y^j \tag{5.11}$$

olsun. O zaman $TM \setminus \{0\}$ daki $\hat{g}$ Riemann metriği **Sasaki metrik** olarak bilinir. $\hat{g}$ nin oluşturduğu **Legendre transformasyonu** ise

$$L : T(TM \setminus \{0\}) \rightarrow T^*(TM \setminus \{0\})$$

$$L\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right) = g_{ik} dx^k \quad , \quad L\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = g_{ik} \delta y^k$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 5.3.2: E çift boyutlu bir manifold olmak üzere her tanjant uzay için

$$J = TE \rightarrow TE$$

bir lineer dönüşüm olsun. Eğer $J^2 = -I$ ise J bir **hemen hemen kompleks yapıdır** denir.

Yatay-dikey ayrışımı kullanarak

$$J : T(TM \setminus \{0\}) \rightarrow T(TM \setminus \{0\})$$

hemen hemen kompleks yapısı

$$J\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial y^i} \quad , \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = -\frac{\delta}{\delta x^i} \tag{5.12}$$

olarak tanımlanabilir. O zaman $J^2 = -I$ olur ve J tanımdaki gibi lokal koordinatlardan bağımsızdır.

J dönüşümü Sasaki metriğine uygundur. Yani, $\forall X, Y \in T(TM \setminus \{0\})$ için

$$\hat{g}(X, Y) = \hat{g}(JX, JY)$$

dir.

J hemen hemen kompleks yapısı ile birleştirilmiş **Nijenhuis tensörü** $\forall X, Y \in T(TM \setminus \{0\})$ için

$$N(X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y] \qquad (5.13)$$

şeklinde tanımlıdır.

Önerme 5.3.1: Her N, Nijenhuis tensörü şu özellikleri sağlar:

1. N, düzgün fonksiyonlar üzerinde bilineerdir.
2. N, anti-simetriktir.
3. $\forall X \in T(TM \setminus \{0\})$ için $N(X, JX) = 0$ 'dır.

İspat: 1. $\forall X, Y \in T(TM \setminus \{0\})$ ve $\forall f, g \in C^\infty$ için

$$N(fX, gY) = f \cdot gN(X, Y)$$

olduğunu göstermeliyiz. Bunun için

$$[fX, gY] = fX(g)Y - gY(f)X + f \cdot g[X, Y]$$

eşitliğini kullanacağız.

$$\begin{aligned} N(fX, gY) &= [J(fX), J(gY)] - J[J(fX), gY] - J[fX, J(gY)] - [fX, gY] \\ &= [f(JX), g(JY)] - J[f(JX), gY] - J[fX, g(JY)] - [fX, gY] \\ &= f(JX)(g)(JY) - g(JY)(f)(JX) + f \cdot g[JX, JY] \\ &- J(f(JX)(g)Y - gY(f)(JX) + f \cdot g[JX, Y]) \\ &- J((fX)(g)(JY) - g(JY)(f)X + f \cdot g[X, JY]) \end{aligned}$$

$$-\left(fX(g)Y - gY(f)X + f\cdot g[X,Y]\right)$$

$$= f(JX)(g)(JY) - g(JY)(f)(JX) + f\cdot g[JX,JY]$$

$$- fX(g)Y + gY(f)X - f\cdot g[X,Y]$$

$$- J\left(f(JX)(g)Y + fX(g)(JY) - gY(f)(JX)\right.$$

$$\left. - g(JY)(f)X + fg[JX,Y] + fg[X,JY]\right)$$

$$= f\cdot g\left([JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] - [X,Y]\right)$$

$$+ f(JX)(g)(JY) - g(JY)(f)(JX) - fX(g)Y + gY(f)X$$

$$- f(JX)(g)(JY) - fX(g)\left(J^2Y\right) + gY(f)\left(J^2X\right) + g(JY)(f)(JX)$$

$$= f\cdot gN(X,Y) - fX(g)Y + gY(f)X + fX(g)Y - gY(f)X$$

$$= f\cdot gN(X,Y)$$

bulunur.

2. N, anti-simetriktir; yani $\forall X,Y \in T(TM\setminus\{0\})$ için $N(X,Y) = -N(Y,X)$'dir. Gerçekten de (5.13) den

$$N(Y,X) = [JY,JX] - J[JY,X] - J[Y,JX] - [Y,X]$$

yazabiliriz, burada Lie operatörünün anti-simetrik olduğunu bildiğimizden

$$N(Y,X) = -[JX,JY] + J[X,JY] + J[JX,Y] + [X,Y]$$

ya da

$$= -\left([JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] - [X,Y]\right)$$

$$= -N(X,Y)$$

olur.

3. $\forall X \in T(TM\setminus\{0\})$ için $N(X,JX) = 0$ olduğunu gösterelim:

(5.13) de Y yerine JX alırsak

$$N(X,JX)=[JX,J(JX)]-J[JX,JX]-J[X,J(JX)]-[X,JX]$$

yada

$$=[JX,J^2X]-J[JX,JX]-J[X,J^2X]-[X,JX]$$

yada

$$=-[JX,X]-J[JX,JX]+J[X,X]-[X,JX]$$

yada

$$N(X,JX)=-[JX,X]-J[JX,JX]+J[X,X]+[JX,X]$$

olur, burada $[X,X]=0$ ve $[JX,JX]=0$ olması gerektiğinden de

$N(X,JX)=0$ elde edilir.

Önerme 5.3.2: (5.12) deki hemen hemen kompleks yapı için Nijenhuis tensörü aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$N\left(\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\delta}{\delta x^j}\right)=-\left[\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\delta}{\delta x^j}\right] \tag{5.14}$$

$$N\left(\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right)=J\left[\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\delta}{\delta x^j}\right] \tag{5.15}$$

$$N\left(\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right)=\left[\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\delta}{\delta x^j}\right] \tag{5.16}$$

İspat: İlk önce (5.14) eşitliğini gösterelim:

(5.13) deki N'nin tanımından

$$N\left(\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\delta}{\delta x^j}\right)=\left[J\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right),J\left(\frac{\delta}{\delta x^j}\right)\right]-J\left[J\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right),\frac{\delta}{\delta x^j}\right]-J\left[\frac{\delta}{\delta x^i},J\left(\frac{\delta}{\delta x^j}\right)\right]-\left[\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\delta}{\delta x^j}\right]$$

yazabiliriz. (5.12)deki J'nin tanımı kullanılarak da

$$N\left(\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\delta}{\delta x^j}\right)=\left[\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right]-J\left[\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\delta}{\delta x^j}\right]-J\left[\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right]-\left[\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\delta}{\delta x^j}\right]$$

buluruz. J 'nin lineerliğini ve (5.9) daki $\left[\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right]=0$ eşitliğini kullanarak

$$=J\left(\left[\frac{\delta}{\delta x^j},\frac{\partial}{\partial y^i}\right]-\left[\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right]\right)-\left[\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\delta}{\delta x^j}\right]$$

eşitliğini , (5.8) deki $\left[\frac{\delta}{\delta x^j},\frac{\partial}{\partial y^i}\right]=\left[\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right]$ eşitliğini kullanarak da

$$N\left(\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\delta}{\delta x^j}\right)=-\left[\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\delta}{\delta x^j}\right]$$

sonucunu buluruz.

Şimdi de (5.15) deki eşitliği gösterelim:

(5.13) deki N'nin tanımından

$$N\left(\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right)=\left[J\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right),J\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)\right]-J\left[J\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right),\frac{\partial}{\partial y^j}\right]$$

$$-J\left[\frac{\delta}{\delta x^i},J\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)\right]-\left[\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right]$$

yazabiliriz. (5.12) deki J hemen hemen kompleks yapısının tanımından da

$$=-\left[\frac{\partial}{\partial y^j},\frac{\delta}{\delta x^j}\right]+\left[\frac{\partial}{\partial y^j},\frac{\delta}{\delta x^i}\right]-J\left[\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right]+J\left[\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\delta}{\delta x^j}\right]$$

bulunur. (5.8) ve (5.9) daki eşitlikleri kullanarak da

$$N\left(\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right)=J\left[\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\delta}{\delta x^j}\right]$$

sonucuna ulaşırız.

Son olarak (5.16) daki eşitliği gösterelim:

(5.13) deki N'nin tanımından

$$N\left(\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right)=\left[J\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right),J\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)\right]-J\left[J\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right),\frac{\partial}{\partial y^j}\right]$$

$$-J\left[\frac{\partial}{\partial y^i},J\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)\right]-\left[\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right]$$

yazabiliriz. (5.12) deki J 'nin tanımı ve (5.9) daki $\left[\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right]=0$ eşitliğini kullanarak

$$=\left[\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\delta}{\delta x^j}\right]+J\left[\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right]+J\left[\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\delta}{\delta x^j}\right]$$

ya da

$$=\left[\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\delta}{\delta x^j}\right]+J\left(\left[\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right]-\left[\frac{\delta}{\delta x^j},\frac{\partial}{\partial y^i}\right]\right)$$

bulunur, burada da $\left[\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right]=\left[\frac{\delta}{\delta x^j},\frac{\partial}{\partial y^i}\right]$ eşitliğini kullanarak

$$N\left(\frac{\partial}{\partial y^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right)=\left[\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\delta}{\delta x^j}\right]$$

sonucuna ulaşırız.

6. KONNEKSİYONLAR

6.1. Riemann Konneksiyonu

Tanım 6.1.1: M bir m-boyutlu Riemann manifoldu olsun. M üzerindeki bir **afin konneksiyon** aşağıdaki özellikleri sağlayan

$$D : \Gamma(T(M)) \to \Gamma(T^*(M) \otimes T(M)) \tag{6.1}$$

şeklinde bir dönüşümdür:

1) $D\left(\frac{\partial}{\partial u^i} + \frac{\partial}{\partial u^j}\right) = D\frac{\partial}{\partial u^i} + D\frac{\partial}{\partial u^j}$

2) $D\left(f\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = df \otimes \frac{\partial}{\partial u^i} + fD\frac{\partial}{\partial u^i} \quad , \qquad \forall f \in C^\infty(M).$

Lokal olarak da

$$D\frac{\partial}{\partial u^i} = W_i^j \frac{\partial}{\partial u^j} \qquad \text{ve} \qquad Ddu^i = W_j^i du^j \tag{6.2}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $\Gamma(TM)$, sonsuz dereceden diferensiyellenebilir vektör alanlarının cümlesini gösterir. W_i^j 'lerde D konneksiyon matrisinin bileşenleri olup

$$W_i^j = \Gamma_{ik}^j du^k \tag{6.3}$$

şeklinde tanımlıdırlar, buradaki Γ_{ik}^j 'larda U üzerinde sonsuz dereceden diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. $X \in T(M)$ için, X 'in tam diferansiyeli

$$\begin{aligned} DX &= \left(dX^i + X^j W_j^i\right) \otimes \frac{\partial}{\partial u^i} \\ &= \left(\frac{\partial X^i}{\partial u^j} + X^k \Gamma_{kj}^i\right) du^j \otimes \frac{\partial}{\partial u^i} \end{aligned} \tag{6.4}$$

dir.

D afin konneksiyondur. $D_X \dfrac{\partial}{\partial u^i}$ ve $D_X du^i$, sırasıyla, $\dfrac{\partial}{\partial u^i}$ nin ve du^i nin $X \in T_p(M)$ vektör alanı boyunca kovaryant türevlerini gösterir. $D_X \dfrac{\partial}{\partial u^i}$ aşağıdaki özellikleri sağlar:

$\forall X, Y \in T(M)$ ve $f \in C^\infty(M)$ için

1) $D_{X+Y} \dfrac{\partial}{\partial u^i} = D_X \dfrac{\partial}{\partial u^i} + D_Y \dfrac{\partial}{\partial u^i}$

2) $D_{fX} \dfrac{\partial}{\partial u^i} = fD_X \dfrac{\partial}{\partial u^i}$

3) $D_X \left(\dfrac{\partial}{\partial u^i} + \dfrac{\partial}{\partial u^j} \right) = D_X \dfrac{\partial}{\partial u^i} + D_X \dfrac{\partial}{\partial u^j}$

4) $D_X \left(f \dfrac{\partial}{\partial u^i} \right) = (Xf) \dfrac{\partial}{\partial u^i} + fD_X \dfrac{\partial}{\partial u^i}$

$X^i = 1$ alırsak , $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial u^i}$ olduğundan

$$D_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^i} = W_i^k \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right) \frac{\partial}{\partial u^k} = \Gamma_{il}^k du^l \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right) \frac{\partial}{\partial u^k} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u^k} \tag{6.5}$$

ve

$$D_{\frac{\partial}{\partial u^j}} du^i = -W_k^i \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right) du^k = -\Gamma_{kl}^i du^l \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right) du^k = -\Gamma_{kj}^i du^k \tag{6.6}$$

buluruz, burada $du^l \left(\dfrac{\partial}{\partial u^j} \right) = \delta_j^l$ ve $W_i^k = \Gamma_{il}^k du^l$ olduğunu kullandık[6].

Tanım 6.1.2: T , aşağıdaki gibi tanımlı bir lineer dönüşüm olsun.

$$T : \Gamma(T(M)) \times \Gamma(T(M)) \to \Gamma(T(M)) \tag{6.7}$$

T lineer dönüşümünün tensör formunda lokal olarak yazılışı

$$T = T_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u^k} \otimes du^i \otimes du^j \tag{6.8}$$

şeklinde olup, Γ_{ij}^{k} 'ler konneksiyon katsayılarının bileşenleri ve $T_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k} - \Gamma_{ij}^{k}$ 'dir. Böylece $\forall X, Y \in T(M)$ için

$$T(X,Y) = D_X Y - D_Y X - [X,Y] \tag{6.9}$$

dir[6].

Tanım 6.1.3: M, G metrikli ve D afin konneksiyonlu bir Riemann manifoldu olsun. Eğer $T(X,Y)=0$ ise yani

$$D_X Y - D_Y X = [X,Y] \tag{6.10}$$

ise D 'ye **torsiyonsuz konneksiyon** denir[6].

Tanım 6.1.4: M, G metrikli ve D afin konneksiyonlu bir Riemann manifoldu olsun. Eğer

$$\begin{aligned} DG &= D\left(g_{ij} du^i \otimes du^j\right) \\ &= \left(dg_{ij} - W_i^k g_{kj} - W_j^k g_{ik}\right) \otimes du^i \otimes du^j \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6.11}$$

ise o zaman D 'ye **metrik-uyumlu konneksiyon** denir[6].

Teorem 6.1.1: (Riemann geometrisinin temel teoremi).

M **,** m boyutlu ve G metrikli bir Riemann manifoldu olsun. O zaman M manifoldu üzerinde metrik uyumlu ve torsiyonsuz bir tek D lineer konneksiyonu vardır. Bu konneksiyon Riemann konneksiyonu ya da Christoffel Levi-civita konneksiyonu olarak adlandırılır.

Riemann manifoldu üzerinde bir konneksiyon Christoffel Levi-civita konneksiyonu olarak alınabilir. Şimdi Γ_{jk}^{i} konneksiyon katsayılarını g_{ij} Riemann metriğinin bileşenleri cinsinden bulabiliriz.

D, torsiyonsuz yani $T_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k} - \Gamma_{ij}^{k} = 0$ olsun. O zaman

$$\Gamma_{ji}^{k} = \Gamma_{ij}^{k} \quad \text{ve} \quad \Gamma_{kji} = \Gamma_{kij}$$

olur. D metrik uyumlu olduğundan da

$$dg_{ij} = W_i^k g_{kj} + W_j^k g_{ik} \tag{6.12}$$

ya da

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} du^l = \Gamma_{il}^k du^l \cdot g_{kj} + \Gamma_{jl}^k du^l g_{ik}$$

$$= (\Gamma_{jil} + \Gamma_{ijl}) du^l \tag{6.13}$$

buluruz. Yukarıdaki eşitlikten

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = \Gamma_{jil} + \Gamma_{ijl} \tag{6.14}$$

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} = \Gamma_{lij} + \Gamma_{ilj} \tag{6.15}$$

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} = \Gamma_{lji} + \Gamma_{jli} \tag{6.16}$$

bulunur. $\Gamma_{jki} = \Gamma_{ikj}$ olduğunu kullanarak bu üç eşitlikten

$$\Gamma_{lij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right) \tag{6.17}$$

ve g^{lk} ile çarptığımızda

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right) \tag{6.18}$$

buluruz. (6.17) ve (6.18) eşitlikleri, sırasıyla, birinci çeşit ve ikinci çeşit Christoffel sembolleri olarak adlandırılır.

M nin standart çatısını kullanmıştık. Bunun yanında keyfi bir çatısını da kullanabiliriz. Farzedelim ki $\{e_i, 1 \le i \le m\}$ lokal çatı ve $\{\theta^i, 1 \le i \le m\}$ dual çatı olsun. $\{e_i\}$ çatısı üzerindeki konneksiyon

$$De_i = \theta_i^j e_j \tag{6.19}$$

olarak tanımlanabilir, buradaki θ_i^j'ler D konneksiyon matrisinin bileşenleridir. D'nin torsiyonsuzluk şartı

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \theta_j^i \tag{6.20}$$

ve metrik-uygunluk şartı

$$dg_{ij} = \theta_i^k g_{kj} + \theta_j^k g_{ik} \tag{6.21}$$

dir. Bu eşitlikler,

$$G = g_{ij}\theta^i \otimes \theta^j \quad \text{ve} \quad DG = \left(dg_{ij} - \theta_i^k g_{kj} - \theta_j^k g_{ik}\right) \otimes \theta^i \otimes \theta^j = 0$$

eşitliklerinden bulunabilir[6].

6.2. Finsler Konneksiyonu

Tanım 6.2.1: (Finsler Konneksiyonu). Bir Finsler konneksiyonu (N, F, C) üçlüsü ile tanımlıdır, buradaki N, M üzerinde bir lineer olmayan konneksiyon ve $F = \left(F_{jk}^i\right)$, $C = \left(C_{jk}^i\right)$'ler de lokal tanımlı 0-homogen F_{jk}^i, C_{jk}^i fonksiyonlarının kolleksiyonlarıdır.

$$F_{jk}^i, C_{jk}^i : TM \setminus \{0\} \to \Re$$

aşağıdaki transformasyon kurallarını sağlar.

$$\frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^i} F_{jk}^i = \frac{\partial^2 \tilde{x}^l}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^k} \cdot \tilde{F}_{rs}^l \tag{6.22}$$

$$C_{jk}^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^p} \cdot \frac{\partial \tilde{x}^q}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^k} \tilde{C}_{qr}^p \tag{6.23}$$

$\pi : TM \to M$ bir kanonik projeksiyon olsun. Bir Finsler konneksiyonu

$$\nabla : T_y\left(TM \setminus \{0\}\right) \times \chi(M) \to T_{\pi(y)}(M)$$

$$(Y, X) \to \nabla_Y(X)$$

şeklinde tanımlı bir dönüşüm olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. ∇ lineerdir. (X ve Y de)

2. Eğer $f \in C^{\infty}(M)$ ve $y \in T_x M \setminus \{0\}$ ise o zaman lokal koordinatlarda

$$\nabla_{\left.\frac{\delta}{\delta x^i}\right|_y} \left(f \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x \right) = df\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x \right) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x + f \cdot F_{ij}^m(y) \left.\frac{\partial}{\partial x^m}\right|_x \tag{6.24}$$

$$\nabla_{\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_y} \left(f \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x \right) = f \cdot C_{ij}^m(y) \left.\frac{\partial}{\partial x^m}\right|_x \tag{6.25}$$

F_{jk}^i ve C_{jk}^i nin transformasyon özelliklerinden $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}}(X) = \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^i} \nabla_{\frac{\delta}{\delta \tilde{x}^r}}(X)$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}}(X) = \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^i} \cdot \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^r}}(X)$$

olur, böylece ∇, lokal koordinatlardan bağımsızdır[7].

Örnek 6.2.1: (M, F) bir Finsler manifoldu

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta g_{ik}}{\delta x^j} + \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^k} - \frac{\delta g_{jk}}{\delta x^i} \right) \tag{6.26}$$

$$\Gamma_{jk}^i = g^{ir} \Gamma_{rjk} \tag{6.27}$$

lokal tanımlı fonksiyonlar olsunlar. O zaman $\left(N_j^i, \Gamma_{jk}^i, \circ\right)$ **Chern-Rund konneksiyonudur**.

Γ_{jk}^i, aşağıdaki transformasyon kurallarını sağlar.

$$\Gamma_{ijk} = \frac{\partial \tilde{x}^p}{\partial x^i} \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^q}{\partial x^j \partial x^k} \tilde{g}_{pq} + \frac{\partial \tilde{x}^q}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^k} \cdot \tilde{\Gamma}_{pqr} \right) \tag{6.28}$$

$$g^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^r} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^s} \cdot \tilde{g}^{rs} \tag{6.29}$$

Son transformasyon kuralı da

$$g_{ij} = \frac{\partial \widetilde{x}^r}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \widetilde{x}^s}{\partial x^j} \widetilde{g}_{rs} \tag{6.30}$$

dir[7].

Örnek 6.2.2: $G^i_{jk} = \dfrac{\partial N^i_j}{\partial y^k}$ olsun. Buradaki N^i_j denklem (5.1) ile verilmişti. O zaman $(N^i_j, G^i_{jk}, 0)$ bir **Berwald Konneksiyonudur**[7].

Örnek 6.2.3: Bir Finsler manifoldu üzerinde C_{ijk} Cartan tensörü

$$C_{ijk} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = \frac{1}{4}\frac{\partial^3 F^2}{\partial y^i \partial y^j \partial y^k} \tag{6.31}$$

$$C^l_{jk} = g^{li} C_{ijk} \tag{6.32}$$

şeklinde tanımlıdır. C^i_{jk} katsayıları (6.23)denklemini sağlar ve $(N^i_j, G^i_{jk}, C^i_{jk})$ konneksiyonu Hashiguchi konneksiyonudur[7].

Örnek 6.1.4: Cartan konneksiyonu $(N^i_j, \Gamma^i_{jk}, C^i_{jk})$ bir Finsler konneksiyonudur$[4]$.

6. 3. Kovaryant Türev

Tanım 6.3.1: (Kovaryant Türev):

Farzedelim ki M, N^i_j lineer olmayan konneksiyonlu bir manifold olsun. O zaman kovaryant türev dönüşümü

$$D : T_x M \setminus \{0\} \times \chi(M) \to T_x M \setminus \{0\}$$

$$(y, X) \to D_y(X)$$

şeklinde tanımlı bir dönüşüm olup aşağıdaki şartları sağlar:

1. $D_y(X+Y) = D_y(X) + D_y(Y)$, $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $y \in TM \setminus \{0\}$,

2. $D_y(fX) = df(y)X + fD_y(X)$, $\forall X \in \chi(M)$ ve $f \in C^\infty(M)$ için

3. Lokal koordinatlarda , $\forall y \in T_x M \setminus \{0\}$ için

$$D_y\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x\right)=N_i^j(y)\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x \quad \text{dir.}$$

N_j^i için transformasyon kuralını kullanarak

$$D_y\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x\right)=\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\cdot D_y\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\right)+d\left(\frac{\partial \tilde{x}^h}{\partial x^i}\right)(y)\left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^h}\right|_x$$

olur. D_y iyi tanımlıdır. Genel olarak, $D_y(X)$'in yüksek mertebeden lineer olması gerekmez[7].

6.4. Temel Finsler Niceliklerinin Bazı Özellikleri

$\mathcal{L}:T^*M\to TM$ Legendre transformasyonu bir $\hbar$ ko-Finsler metriğiyle tanımlansın. Lokal koordinatlarda

$$L(\xi)=L^i(\xi)\frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{ve} \quad L^{-1}(y)=L_i^{-1}(y)dx^i \ , \ \xi\in T^*M \ \text{ve} \ y\in TM \ \text{olsun.}$$

$$L^i(\xi)=h^{ij}(\xi)\xi_j \quad , \quad \xi\in T^*M$$

$$L_i^{-1}(y)=g_{ij}(y) \quad , \quad y\in TM$$

Γ nın Özellikleri

$$C_{ijkl}=\frac{\partial G_{ijk}}{\partial y_l} \quad \text{olsun. Üstelik } L_{ijk} \text{ ' yı}$$

$$L_{ijk}=\frac{\partial C_{ijk}}{\partial x^s}y^s-2C_{ijks}G^s-N_i^sC_{sjk}-N_j^sC_{sik}-N_k^sC_{sij} \tag{6.34}$$

şeklinde tanımlayalım. Bunlar Landsberg tensörünün bileşenleridir. L_{ijk} fonksiyonları i,j,k indislerinde simetriktirler, yani i,j,k indislerinin herhangi ikisi yer değiştirdiğinde L_{ijk} değişmez. Üstelik,

$$C_{ijk}y^k=0 \ \text{ve} \ C_{ijkl}y^l=-C_{ijk} \ \text{olduğundan}$$

$$L_{ijk}y^i=L_{jik}y^i=L_{jki}y^i=0 \text{'dır [7].}$$

Önerme 6.4.1: Chern-Rund konneksiyonunun özellikleri aşağıdaki gibidir[7]:

$$\Gamma_{ijk} = g_{im} G^m_{jk} - L_{ijk} \tag{6.35}$$

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ikj} \tag{6.36}$$

$$\Gamma^i_{jk} y^j = N^i_k \tag{6.37}$$

$$\Gamma^i_{jk} L^{-1}_i = G^i_{jk} L^{-1}_i = \Gamma_{ijk} y^i \tag{6.38}$$

İspat : Önce (6.35)'i ispatlayalım:

Γ_{ijk} 'nın tanımından

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta g_{ik}}{\delta x^j} + \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^k} - \frac{\delta g_{jk}}{\delta x^i} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^j} - N^m_j \frac{\partial}{\partial y^m} \right)(g_{ik}) + \left(\frac{\partial}{\partial x^k} - N^m_k \frac{\partial}{\partial y^m} \right)(g_{ij}) - \left(\frac{\partial}{\partial x^i} - N^m_i \frac{\partial}{\partial y^m} \right)(g_{jk}) \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right] + \frac{1}{2}\left[-N^m_j \frac{\partial g_{ik}}{\partial y^m} - N^m_k \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^m} + N^m_i \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^m} \right]$$

olur, burada $\gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i} \right]$ alıp, $C_{ikm} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial y^m}$, $C_{ijm} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^m}$ ve $C_{ikm} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial y^m}$ değerlerini yerine yazarsak

$$\Gamma_{ijk} = \gamma_{ijk} - N^m_j C_{ikm} - N^m_k C_{ijm} + N^m_i C_{jkm}$$

buluruz. (4.7) deki G^m için

$$g_{mi} G^m = \frac{1}{4}\left\{ 2\frac{\partial g_{si}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{sm}}{\partial x^i} \right\} y^s \cdot y^m$$

dir, bu eşitliğin her iki tarafının önce y_j 'ye göre türevini sonra da y_k 'ya göre türevini alalım.

$$\frac{\partial}{\partial y^j}\left(g_{mi} G^m \right) = \frac{1}{4}\left\{ 2\frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial g_{si}}{\partial y^j} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial g_{sm}}{\partial y^j} \right\} y^s y^m + \frac{1}{4}\left\{ 2\frac{\partial g_{si}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{sm}}{\partial x^i} \right\}\frac{\partial}{\partial y^j}\left(y^s \cdot y^m \right)$$

$$\frac{\partial g_{mi}}{\partial y^j}\cdot G^m + g_{mi}\frac{\partial G^m}{\partial y^j} = \frac{1}{4}\left\{\frac{\partial}{\partial x^m}C_{sij} - \frac{\partial}{\partial x^i}C_{smj}\right\}y^s\cdot y^m$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial g_{si}}{\partial x^m} - \frac{1}{4}\frac{\partial g_{sm}}{\partial x^i}\right\}\left(\delta^s_j\cdot y^m + y^s\cdot\delta^m_j\right)$$

$$2\cdot C_{mij}\cdot G^m + g_{mi}N^m_j = \frac{1}{4}\left\{\frac{\partial}{\partial x^m}C_{sij}\left(y^s\cdot y^m\right) - \frac{\partial}{\partial x^i}C_{smj}\left(y^s\cdot y^m\right)\right\}$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^m} - \frac{1}{4}\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i}\right\}\cdot y^m + \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial g_{si}}{\partial x^j} - \frac{1}{4}\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^i}\right\}\cdot y^s$$

burada $C_{sij}y^s = 0$ ve $C_{smj}y^s = 0$ olduğunu kullanırsak

$$2C_{mij}G^m + g_{mi}N^m_j = \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} - \frac{1}{4}\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i}\right\}\cdot y^m + \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial g_{si}}{\partial x^j} - \frac{1}{4}\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^i}\right\}y^s$$

buluruz. Şimdi de her iki tarafın y^k 'ya göre türevini alalım:

$$2\cdot\frac{\partial}{\partial y^k}C_{mij}\cdot G^m + 2\cdot C_{mij}\frac{\partial G^m}{\partial y^k} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial y^k}N^m_j + g_{mi}G^m_{jk} = \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} - \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial g_{jm}}{\partial y^k}\right\}y^m$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} - \frac{1}{4}\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i}\right\}\delta^m_k + \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial g_{si}}{\partial y^k} - \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial g_{sj}}{\partial y^k}\right\}\cdot y^s$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial g_{si}}{\partial x^j} - \frac{1}{4}\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^i}\right\}\cdot\delta^s_k$$

bu ifadeyi yeniden düzenlersek

$$2\cdot C_{mijk}\cdot G^m + 2\cdot C_{mij}\cdot N^m_k + 2\cdot C_{mik}N^m_j + g_{mi}G^m_{jk} = \left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^m}C_{ijk}\right)y^m - \left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\underbrace{C_{jmk})\cdot y^m}_{0}\right\}$$

$$+\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{1}{4}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right\} + \left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\underbrace{C_{sik})\cdot y^s}_{0} - \left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\underbrace{C_{sjk})\cdot y^s}_{0}\right\} + \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{1}{4}\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\right\}$$

olur, burada $C_{jmk}y^m = 0$, $C_{sik}y^s = 0$ ve $C_{sjk}y^s = 0$ değerlerini yerlerine yazıp gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$g_{mi}G^m_{jk} = -2C_{ijkm} \cdot G^m - 2C_{ijm}N^m_k - 2C_{ikm}N^m_j + \frac{\partial C_{ijk}}{\partial x^m} \cdot y^m + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{1}{4}\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}$$

ya da

$$g_{mi}G^m_{jk} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right\} + \frac{\partial C_{ijk}}{\partial x^m} \cdot y^m - 2C_{ijkm}G^m - 2C_{ijm}N^m_k - 2C_{ikm}N^m_j$$

olup, burada $\gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right]$ değerini yazdığımızda da

$$g_{mi}G^m_{jk} = \gamma_{ijk} + \frac{\partial C_{ijk}}{\partial x^m} \cdot y^m - 2C_{ijkm}G^m - 2C_{ijm}N^m_k - 2C_{ikm}N^m_j$$

olur. Sonuç olarak da

$$L_{ijk} = \frac{\partial C_{ijk}}{\partial x^m} \cdot y^m - 2C_{ijkm}G^m - N^m_i C_{jkm} - N^m_j C_{ikm} - N^m_k C_{ijm}$$

eşitliğini kullanarak

$$g_{mi}G^m_{jk} - L_{ijk} = \gamma_{ijk} - C_{ijm}N^m_k - C_{ikm}N^m_j + N^m_i C_{jkm}$$

olduğunu görürüz, sağ taraftaki kısım Γ_{ijk} ’ya eşit olduğundan

$$g_{mi}G^m_{jk} - L_{ijk} = \Gamma_{ijk}$$

dır.

7.EĞRİLİK

7.1.Riemann Geometrisinde Eğrilikler

Tanım 7.1.1: $R:\Gamma(T(M))\times\Gamma(T(M))\times\Gamma(T(M))\to\Gamma(T(M))$ (7.1)

Şeklinde tanımlı bir dönüşüm tensörel formda

$$R=R_{ikl}^{j}\cdot\frac{\partial}{\partial u^{j}}\otimes du^{i}\otimes du^{k}\otimes du^{l} \tag{7.2}$$

şeklinde yazılabiliyorsa, D konneksiyonunun **eğrilik tensörüdür**, denir. $\forall X,Y,Z\in\Gamma(T(M))$ için

$$R(X,Y)Z=D_X D_Y Z-D_Y D_X Z-D_{[X,Y]}Z \tag{7.3}$$

şeklinde tanımlıdır[6].

Tanım 7.1.2: $\Omega_i^j=dw_i^j-w_i^h\wedge w_h^j$ D'nin eğrilik matrisinin bileşenleri olarak adlandırılır.

Eğrilik matrisinin kullanılmasıyla R_{ikl}^{j} eğriliğinin bileşenleri Christoffel sembolleri cinsinden bulunabilir[6].

$W_i^j=\Gamma_{ik}^j du^k$ alırsak

$$\Omega_i^j=d\left(\Gamma_{ik}^j du^k\right)-\left(\Gamma_{il}^h du^l\right)\wedge\left(\Gamma_{hk}^j du^k\right)$$

$$=\frac{\partial\Gamma_{ik}^j}{\partial u^l}du^l\wedge du^k-\Gamma_{il}^h\Gamma_{hk}^j du^l\wedge du^k$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma_{ik}^j}{\partial u^l}du^l\wedge du^k-\frac{1}{2}\frac{\partial\Gamma_{ik}^l}{\partial u^l}du^k\wedge du^l$$
$$+\frac{1}{2}\Gamma_{il}^h\cdot\Gamma_{hk}^j du^l\wedge du^k+\frac{1}{2}\Gamma_{il}^h\Gamma_{hk}^j du^k\wedge du^l$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\Gamma_{ik}^j}{\partial u^l}-\frac{\partial\Gamma_{il}^j}{\partial u^k}+\Gamma_{ik}^h\Gamma_{hl}^j-\Gamma_{il}^h\Gamma_{hk}^j\right]du^l\wedge du^k$$

$$\equiv\frac{1}{2}R_{ilk}^j du^l\wedge du^k$$

yani

$$\Omega_i^j = \frac{1}{2} R_{ilk}^j du^l \wedge du^k \tag{7.4}$$

olur, burada

$$R_{ilk}^j = \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma^j}{\partial u^k} + \Gamma_{ik}^h \Gamma_{hl}^j - \Gamma_{il}^h \Gamma_{hk}^j \tag{7.5}$$

dir. (7.4)'ün her iki tarafını g_{jh} ile çarparsak,

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} R_{ijlk} du^l \wedge du^k \tag{7.6}$$

elde ederiz, burada da

$$\Omega_{ij} = dw_{ij} + w_i^l \wedge w_{jl} \tag{7.7}$$

dir. Böylece

$$R_{ijlk} = \frac{\partial \Gamma_{jik}}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{jil}}{\partial u^k} + \Gamma_{il}^h \Gamma_{hjk} - \Gamma_{ik}^h \Gamma_{hjl} \tag{7.8}$$

olur. Eğrilik tensörü aşağıdaki gibi yazılır[6].

$$R = R_{ijkl} du^i \otimes du^i \otimes du^j \otimes du^l \otimes du^l \tag{7.9}$$

Teorem 7.1.1: R_{ijkl} eğrilik tensörü aşağıdaki özellikleri sağlar:

1) $R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}$

2) $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$

3) $R_{ijkl} = R_{klij}$

(7.2)'yi $(Z,W)X$ ile (7.9)'u da (X,Y,Z,W) ile birleştirirsek

$$R(Z,W)X = R_{ikl}^j X^i Z^k W^l \frac{\partial}{\partial u^j} \tag{7.10}$$

ve

$$R(X,Y,Z,W) = R_{ijkl} X^i Y^j Z^k W^l \tag{7.11}$$

ya da

$$R(X,Y,Z,W) = (R(Z,W)X)Y \tag{7.12}$$

olur, burada X,Y,Z,W tanjant vektör alanları ve $du^i\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \delta^i_j$ dir.

Teorem 7.1.1 ve (7.11) den aşağıdakiler vardır:

1) $R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z) = -R(Y,X,Z,W)$,

2) $R(X,Y,Z,W) + R(X,Z,W,Y) + R(X,W,Y,Z) = 0$

3) $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$

G Riemann metriği için aşağıdaki fonksiyonu tanımlayabiliriz[6].

$$G(X,Y,Z,W) = G(X,Z)G(Y,W) - G(X,W)G(Y,Z) \tag{7.13}$$

Tanım 7.1.3: $T_p(M)$ nin her iki boyutlu E alt uzayı için E üzerindeki kesit eğriliğini

$$K(E) = -\frac{R(X,Y,X,Y)}{G(X,Y,X,Y)} \tag{7.14}$$

şeklinde tanımlarız, burada $X,Y \in T_p(M)$ dir[6].

Tanım 7.1.4: Bir m-boyutlu M Riemann manifoldu **sabit eğriliklidir** denir eğer $K(p)$ sabit ise.

Tanım 7.1.5: Eğrilik tensörünün izi **Ricci eğriliği** olarak adlandırılır. Ricci eğriliğinin bileşenleri

$$R_{ij} = R^k_{ikj} \tag{7.15}$$

dir[6].

Tanım 7.1.6: Ricci eğriliğinin izi **skalar eğrilik** olarak adlandırılır. Skalar eğrilik

$$R = R_{ij} g^{ij} \tag{7.16}$$

dır[6].

Tanım 7.1.7: Eğer Ricci eğrilik tensörü, metrik tensörün skalar çarpımı ise o zaman Riemann metriği **Einstein metriği** olarak adlandırılır. Einstein metriğinin bileşenleri

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \tag{7.17}$$

dir[6].

7.2. Finsler Geometrisinde Eğrilikler

Riemann geometrisinde, Riemann eğrilik tensörü, M üzerinde bir tensördür. Finsler geometrisinde ise eğrilik tensörü $TM \setminus \{0\}$ üzerindedir.

$$\left[\frac{\delta}{\delta x^j}, \frac{\delta}{\delta x^k} \right] = -\left(\frac{\delta N_k^m}{\delta x^j} - \frac{\delta N_j^m}{\delta x^k} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial y^m} \quad ,$$

buradaki $[.,.]$, vektör alanları için Lie operatörünü gösterir.

$$R_{jk}^m = \frac{\delta N_k^m}{\delta x^j} - \frac{\delta N_j^m}{\delta x^k}$$

ve

$$R_{ijk}^m = \frac{\partial R_{jk}^m}{\partial y^i}$$

dir. Böylece R eğrilik tensörü

$$R = R_{ijk}^m dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \frac{\delta}{\delta x^m}$$

şeklinde tanımlıdır[7].

TM üzerindeki dx^i ve dy^i 1-formları aşağıdaki eşitlikleri sağlarlar:

$$dx^i\Big|_y = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^r} d\tilde{x}_r\Big|_y \quad ,$$

$$dy^i\Big|_y = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^r} d\tilde{y}_r + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \tilde{x}^r \partial \tilde{x}^s} \tilde{y}^r \cdot d\tilde{x}^s\Big|_y$$

Ayrıca

$$\left[\frac{\delta}{\delta\widetilde{x}^i},\frac{\delta}{\delta\widetilde{x}^j}\right]=\frac{\partial x^r}{\partial\widetilde{x}^i}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial\widetilde{x}^j}\left[\frac{\delta}{\delta x^r},\frac{\delta}{\delta x^s}\right]$$

olup böylece $\widetilde{R}_{ij}^m=\frac{\partial x^r}{\partial\widetilde{x}^i}\cdot\frac{\partial x^s}{\partial\widetilde{x}^j}\cdot\frac{\partial\widetilde{x}^m}{\partial x^r}R_{rs}^n$ dir ve R iyi tanımlıdır[7].

Önerme 7.1: 0-homojen R_{ijk}^m fonksiyonları aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$0=R_{ijk}^m+R_{jki}^m+R_{kij}^m \tag{7.1}$$

$$R_{ijk}^m=-R_{ikj}^m \tag{7.2}$$

$$R_{ijk}^m=\frac{\delta G_{ik}^m}{\delta x^j}-\frac{\delta G_{ij}^m}{\delta x^k}+G_{ik}^sG_{js}^m-G_{ij}^sG_{ks}^m \tag{7.3}$$

İspat : Önce (7.2)'yi gösterelim: tanımdan

$$R_{ijk}^m=\frac{\partial R_{jk}^m}{\partial y^i}=\frac{\partial}{\partial y^i}\left(\frac{\delta N_k^m}{\delta x^j}-\frac{\delta N_j^m}{\delta x^k}\right)$$

$$=-\frac{\partial}{\partial y^i}\left(\frac{\delta N_j^m}{\delta x^k}-\frac{\delta N_k^m}{\delta x^j}\right)$$

$$=-\frac{\partial R_{kj}^m}{\partial y^i}$$

$$=-R_{ikj}^m$$

Şimdi (7.3)'ü ispatlayalım :

$$R_{jk}^m=\frac{\delta N_k^m}{\delta x^j}-\frac{\delta N_j^m}{\delta x^k}$$

burada (5.2) yi kullanarak

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x^j}-N_j^s\frac{\partial}{\partial y^s}\right)N_k^m-\left(\frac{\partial}{\partial x^k}-N_k^s\frac{\partial}{\partial y^s}\right)N_j^m$$

$$= \frac{\partial N_k^m}{\partial x^j} - N_j^s G_{sk}^m - \frac{\partial N_j^m}{\partial x^k} + N_k^s G_{sj}^m$$

buluruz.

$$R_{ijk}^m = \frac{\partial R_{jk}^m}{\partial y^i}$$

olduğundan da

$$R_{ijk}^m = \frac{\partial}{\partial y^i}\left(\frac{\partial N_k^m}{\partial x^j}\right) - \frac{\partial}{\partial y^i}\left(N_j^s G_{sk}^m\right) - \frac{\partial}{\partial y^i}\left(\frac{\partial N_j^m}{\partial x^k}\right) + \frac{\partial}{\partial y^i}\left(N_k^s G_{sj}^m\right)$$

ya da

$$= \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial N_k^m}{\partial y^i}\right) - \frac{\partial N_j^s}{\partial y^i} G_{sk}^m - N_j^s \frac{\partial G_{sk}^m}{\partial y^i} - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial N_j^m}{\partial y^i}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial y^i} N_k^s\right) G_{sj}^m + N_k^s \frac{\partial G_{sj}^m}{\partial y^i}$$

ya da

$$= \frac{\partial G_{ik}^m}{\partial x^j} - G_{ij}^s G_{sk}^m - N_j^s \frac{\partial G_{sk}^m}{\partial y^i} - \frac{\partial G_{ij}^m}{\partial x^k} + G_{ik}^s G_{sj}^m + N_k^s \frac{\partial G_{sj}^m}{\partial y^i}$$

burada $\frac{\partial G_{sk}^m}{\partial y^i} = \frac{\partial G_{ik}^m}{\partial y^s}$ ve $\frac{\partial G_{sj}^m}{\partial y^i} = \frac{\partial G_{ij}^m}{\partial y^s}$ olduklarından

$$R_{ijk}^m = \left(\frac{\partial}{\partial x^j} - N_j^s \frac{\partial}{\partial y^s}\right) G_{ik}^m - \left(\frac{\partial}{\partial x^k} - N_k^s \frac{\partial}{\partial y^s}\right) G_{ij}^m - G_{ij}^s G_{sk}^m + G_{ik}^s G_{sj}^m$$

ya da

$$= \frac{\delta G_{ik}^m}{\delta x^j} - \frac{\delta G_{ij}^m}{\delta x^k} + G_{ik}^s G_{sj}^m - G_{ij}^s G_{sk}^m$$

buluruz.

Son olarak da (7.1) eşitliğini göstermek için

$$R_{ijk}^m = \frac{\delta G_{ik}^m}{\delta x^j} - \frac{\delta G_{ij}^m}{\delta x^k} + G_{ik}^s G_{js}^m - G_{ij}^s G_{ks}^m$$

$$R^{m}_{jki} = \frac{\delta G^{m}_{ji}}{\delta x^{k}} - \frac{\delta G^{m}_{jk}}{\delta x^{i}} + G^{s}_{ji} G^{m}_{ks} - G^{s}_{jk} G^{m}_{is}$$

ve

$$R^{m}_{kij} = \frac{\delta G^{m}_{kj}}{\delta x^{i}} - \frac{\delta G^{m}_{ki}}{\delta x^{j}} + G^{s}_{kj} G^{m}_{is} - G^{s}_{ki} G^{m}_{js}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$R^{m}_{ijk} + R^{m}_{jki} + R^{m}_{kij} = 0$$

olarak bulunur.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] H.H.Hacısalihoğlu, N.Ekmekçi, Tensör Geometri, 2003.

[2] H.H.Hacısalihoğlu, Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi yayınları, 2, Elazığ, 1980.

[3] S.Kobayashi and K.Nomizu, Foundations of Differential Geometry, Vol.1, Vol.2, John Wiley Sens Inc.Leen:63-19209.

[4] J.C.Alvarez Palva and A.C.Thompson, Volumes on Normed and Finsler Spaces, Riemann-Finsler Geometry MSRI Publications Volume 50, 2004.

[5] Zhongmin Shen, Lectures on Finsler Geometry, 2001.

[6] Süleyman Tek, The Geometry of Tangent Bundle and its Applications, Bilkent Üniversitesi Master Tezi, 2003.

[7] Matias Dahl, An Brief İntroduction to Finsler Geometry, July 12, 2006.

[8] Enli Guo and Xıachuan Mo, Riemann-Finsler Geometry, Higher Education Press, co-published with Springerverlag Gmblt,Volume 1, Number 4, 2006.

[9] Hans-Bert Rademacher, Nonreversible Finsler Metrics of Positive Flag Curvature. Riemann Finsler Geometry MSRI Publications Volume 50, 2004.