DEĞİŞMELİ CEBİRLER ÜZERİNDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER VE ÇAPRAZLANMIŞ KARELER

Güllühan ORHAN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Mayıs-2008

DEĞİŞMELİ CEBİRLER ÜZERİNDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER VE ÇAPRAZLANMIŞ KARELER

Güllühan ORHAN

Dumlupınar Ünüversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik Anabilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman : Doç. Dr. Murat ALP

Mayıs-2008

KABUL VE ONAY SAYFASI

Güllühan ORHAN 'nın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "DEĞİŞMELİ CEBİRLER ÜZERİNDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER VE ÇAPRAZLANMIŞ KARELER" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

18/04/2008

Üye : Prof. Dr. Zekeriya ARVASİ

Üye : Doç. Dr. Murat ALP

Üye : Yrd. Doç Dr. Ahmet BEKİR

Fen Bilimleri Enstitüsün Yönetim Kurulu'nun ....../...../..... gün ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.

Prof. Dr. M. Sabri ÖZYURT
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DEĞİŞMELİ CEBİRLER ÜZERİNDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER VE ÇAPRAZLANMIŞ KARELER

Güllühan ORHAN

Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2008
Tez Danışmanı **:** Doç.Dr. Murat ALP

ÖZET

Bu tez iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde iki boyutlu (değişmeli) cebir olarak düşünülebilen "çaprazlanmış modül" yapısı tanıtılmıştır. Bu cebirsel yapının ayrıntılı bir incelemesi verilmeye çalışılmıştır. Özellikle bir ideal verildiğinde çaprazlanmış modül ve yine modül yapısı verildiğinde yine çaprazlanmış modül elde edilebileceğini ve bunun tersininde doğru olduğu açık bir şekilde gösterilmiştir. İkinci bölümde, çaprazlanmış modüllerin çaprazlanmış modülü olan çaprazlanmış kare kavramı verilmiştir. Bu yapı ilgili örneklerle açıklanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Çaprazlanmış kareler, Çaprazlanmış modüller, Değişmeli cebirler

COMMUTATIVE ALGEBRAS OF CROSSED MODULS AND CROSSED SQUARES

Güllühan ORHAN

Department of Mathematics, MsC.Thesis,2008

Thesis Supervisor: Doç. Dr. Murat ALP

SUMMARY

This mast of thesis consists of two chapters. The first chapter of that introduce a crossed module which can be thought of two dimensionel algebra. We give a full details of this algebratic structure. Particulary if given an ideal one can get a crossed module and if given a module over ring one can have a crossed module and vice-versa . The second chapter describe a crossed square which can be throught of a crossed module of crossed modules. This structure are explained by a couple of examples.

Key Words: Crossed squares, Crossed modules, Commutative algebra.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamı yöneten ve çalışma süresince vakit ayırarak ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam; Sayın **Doç. Dr. Murat ALP**'e, her zaman yanımda olan ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen aileme, ayrıca çalışmamın son şeklini almasında büyük katkısı ve emeği olan **Gülümsen ONARLI'**ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Güllühan ORHAN

Kütahya 2008

İÇİNDEKİLER

<u>Sayfa</u>

GİRİŞ

Çaprazlanmış modüller ilk olarak Whitehead [1] tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra Değişmeli Cebir versiyonu T.Porter [2] vermiştir. Değişmeli cebirler üzerinde $X-\text{mod}$ [3] ve [4] tarafından ayrıntılı olarak incelenmiştir. Biz bu çalışmanın birinci bölümünde [2],[3] ve [5] de verilen yapıları detaylı olarak inceledik. Değişmeli cebirler üzerinde $X-\text{mod}^2$ Ellis [4] tarafından verilmiştir. Bizde ikinci bölümde bu cebirsel yapıyı kullanarak ayrıntılı bir şekilde inceledik.

1. DEĞİŞMELİ CEBİRLER ÜZERİNE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Çaprazlanmış modüller ilk olarak Whitehead $[1]$ tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra Değişmeli Cebir versiyonu T.Porter $[2]$ vermiştir. Değişmeli cebirler üzerinde $X-$mod $[3]$ ve $[4]$ tarafından ayrıntılı olarak incelenmiştir. Biz bu çalışmanın birinci bölümünde $[2]$,$[3]$ ve $[5]$ de verilen yapıları detaylı olarak inceledik.

1.1 Çaprazlanmış Modüller

Tanım 1.1.1

k değişmeli halka ve R değişmeli halka olsun.

$f : k \to R$ halka homomorfizmi için

$$\because k \times R \to R$$

$$(k,r) \mapsto k.r = f(k)r$$

tanımlanan etkiyle R bir k-modüldür. Buna göre tanımladığımız k-modül yapısı ile R ye k-cebir denir.

Eğer R değişmeli halka değil ise ;

Her $r, r' \in R, k \in$ k için

$k.(rr') = (k.r)r' = r(k.r')$ eşitliği sağlanmalıdır.

Örnek 1.1.2

$$f : Z \to R$$

$$n \mapsto n.1_R$$

biricik homomorfizmi var olup böylece her halka bir Z-cebirdir.

Örnek 1.1.3

M , bir R-modül olsun.

$$\because M \times M \to M$$

$$(m_1, m_2) \mapsto m_1.m_2 = 0$$

işlemiyle M halka yapısına sahip olduğundan M, R-modülü bu işlemle birlikte bir R-cebirdir.

Uyarı

$f : R \to S$ k-cebir homomorfizmi olsun. Bu durumda $\forall r, s \in R, k \in$ k için

$$i) f(r +_R s) = f(r) +_S f(s)$$

$$ii) f(r\,_R\, s) = f(r)\,_S\, f(s)$$

$$iii) f(k.r) = kf(r)$$

Tanım 1.1.4

k; birimli ,değişmeli sabit bir halka ve R ;değişmeli k-cebir olsun.

$$R \times C \to C$$

$$(r, c) \mapsto r.c$$

değişmeli cebir etkisi olmak üzere

$$\partial : C \to R$$

R-cebirlerin morfizmi $\forall c, c' \in C$ için

$$\partial(c).c' = cc'$$

şartını sağlıyor ise (C, R, ∂) üçlüsüne (veya $\partial : C \to R$) bir ***çaprazlanmış R-modül*** denir. Bu şart Peiffer şartı olarak adlandırılır.

Uyarı

$\partial : C \to R$, R-cebir morfizmi olduğundan $\forall r \in R, c \in C$ için $\partial(r.c) = r\partial(c)$ şartını sağlamalıdır. Bu şart ön çaprazlanmış modül şartı olarak adlandırılır.

CM1) $\partial(r.c) = r\partial(c)$ ön çaprazlanmış modül şartı

CM2) $\partial(c)c' = cc'$ Peiffer şartı.

1.1.5 Çaprazlanmış Modül Örnekleri

1) R bir halka ve $I \trianglelefteq R$ olsun. $I \subseteq R$ olduğundan

$$\partial = i : I \to R$$

$$a \mapsto a$$

içine (gömme) fonksiyonu bir çaprazlanmış R-modüldür.

$I \trianglelefteq R$ olduğundan

$$R \times I \to I$$

$$(r,a) \mapsto r.a = ra$$

etkisi tanımlanabilir.

$\forall a, a' \in I$ için

CM2) $\partial(a).a' = a.a'$ ($\because$ ∂ nın tanımı)

$= aa'$ ($\because$ etki tanımı)

O halde (I, R, ∂) bir çaprazlanmış R-moüldür.

Herhangi bir ideal aldığımızda her zaman çaprazlanmış modül elde edilir. Tersine bir çaprazlanmış modül aldığımızda da bir ideal elde edilir.

$\partial : C \to R$ çaprazlanmış R-modül ise $\partial(C) \trianglelefteq R$ dir.

$\forall r \in R, \partial(c) \in \partial(C)$ için

$r\partial(c)=\partial(r.c)$ ($\because$ ∂ çaprazlanmış modül CM1)

$\Rightarrow \partial(r.c)\in \partial(c)$ ($\because$ $R\times C\to C$

$(r,c)\mapsto r.c\in C$)

Buna göre $\partial(C)\trianglelefteq R$ dir.

2) *M , R*-modül olsun. Her *M , R*-modülü

$$M\times M\to M$$

$$(m_1,m_2)\mapsto m_1m_2=0$$

işlemiyle bir R-cebir yapısı oluşturur. Buradan

$$\partial:0=M\to R$$

$$m\mapsto \partial(m)=0$$

homomorfizmi , bir çaprazlanmış *R*-modüldür. Çünkü

$$R\times M\to M$$

$$(r,m)\mapsto r.m=rm$$

etkisiyle , $\forall m,m'\in M$ için

$\partial(m).m'=0.m'$ ($\because$ ∂ nın tanımı)

$=0m'$ ($\because$ etki tanımı)

$=0$

$=mm'$ ($\because$ M yi R-cebir yapan etki)

O halde $(M,R,0)$ bir çaprazlanmış *R*-modüldür.

Bir modül yapısı aldık ve çaprazlanmış modül elde ettik. Tersine bir çaprazlanmış modül aldığımızda da modül yapısı elde edebiliriz.

Önerme 1.1.6

$\partial : C \to R$, çaprazlanmış R-modül ve $I = \partial(C)$ olsun.

$i)$ Çek $\partial \trianglelefteq C$ dir.

$ii)$ Çek $\partial, R/I$ modül yapısına sahiptir.

$iii) C/C^2$ ve I/I^2 , R/I modüldür.

İspat

$i)$ $a \in$ Çek ∂ ve $c \in C$ olsun.

$$\partial(ac) = \partial(a)\partial(c) \qquad (\because \ \partial \text{ cebir homomorfizmi})$$

$$= 0\partial(c) \qquad (\because \ a \in \text{ Çek } \partial)$$

$$= 0c \qquad (\because \ \partial \text{ çaprazlanmış modül})$$

$$= 0$$

$\Rightarrow ac \in$ Çek ∂

$\Rightarrow$ Çek $\partial \trianglelefteq C$

$ii)$ İlk olarak I nın Çek∂ üzerine etkisinin sıfır olduğunu gösterelim. Yani

$$I \times \text{Çek } \partial \to \text{Çek } \partial$$

$$(x, a) \mapsto x.a$$

etkisi için

$$x.a = \partial(c).a \qquad (\because \ x \in I, x = \partial c, c \in C)$$

$$= ca \qquad (\because \ \partial \text{ çaprazlanmış modül})$$

$$= c\partial(a) \qquad (\because\ \partial \text{ çaprazlanmış modül})$$

$$= c0$$

$$= 0$$

olup x.a=0 dır. Buna göre I nın $Çek\partial$ üzerine etkisi sıfırdır. Bu durumda R/I nın Çek ∂ üzerine etkisi

$$R/I \times \text{Çek } \partial \to \text{Çek } \partial$$

$$(r+I,a) \mapsto (r+I).a = ra$$

olarak tanımlanabilir. Tanımlanan bu etkiyle Çek ∂ bir R/I modüldür.

$iii)$ C, R-cebir olduğundan

$$R \times C/C^2 \to C/C^2$$

$$(r, c+C^2) \mapsto r.(c+C^2) = rc + C^2$$

etkisi vardır. Şimdi I nın C/C^2 üzerine etkisinin sıfır olduğunu gösterelim.

$$I \times C/C^2 \to C/C^2$$

$$(x, c+C^2) \mapsto x.c + C^2$$

$x = \partial(c') \in \partial(C), c + C^2 \in C/C^2$ için

$$x.(c+C^2) = \partial(c').(c+C^2)$$

$$= \partial(c')c + C^2$$

$$= c'c + C^2 \in C^2/C^2 \cong \{0\}$$

olup $x.(c+C^2) = 0$ dır.

O halde

$$\begin{array}{ccc} R\times C/C^2 \longrightarrow C/C^2 & & (r,c+C^2)\longrightarrow rc+C^2 \\ \downarrow \qquad\qquad \| & & \downarrow \qquad\qquad \| \\ R/I\times C/C^2 \longrightarrow C/C^2 & & (r+I,c+C^2)\longrightarrow (r+I)(c+C^2) \end{array}$$

etkisi tanımlanabilir. Bu etkiyle birlikte C/C^2 bir R/I -modül yapısına sahiptir.

Benzer şekilde I/I^2 nin R/I -modül olduğunu gösterelim.

$$R/I\times I/I^2 \to I/I^2$$

$(r+I,i+I^2)\mapsto (r+I).(i+I^2)=ri+I^2$ etkisini tanımlayalım.

$i=\partial(c)\in\partial(C)$ için

$r\partial(c)=\partial(r.c)\in\partial(C)$ olduğundan bu etkiyi tanımlayabiliriz. Ancak I nın I/I^2 üzerine etkisinin sıfır olduğunu göstermeliyiz.

$i_1\in I, i_2+I^2\in I/I^2$ için

$i_1.(i_2+I^2)=i_1i_2+I^2\in I^2/I^2\cong\{0\}$

olup $i_1.(i_2+I^2)=0$ dır. O halde

$$\begin{array}{ccc} R\times I/I^2 \longrightarrow I/I^2 & & (r,i+I^2)\longrightarrow ri+I^2 \\ \downarrow \qquad\qquad \| & & \downarrow \qquad\qquad \| \\ R/I\times I/I^2 \longrightarrow I/I^2 & & (r+I,i+I^2)\longrightarrow (r+I),(i+I^2) \end{array}$$

etkisiyle I/I^2 bir R/I -modül yapısı oluşturur.

Örnek 1.1.7

R , değişmeli k-cebir ve $Ann(R)=0$ (veya $R^2=R$) olsun.

$$M(R)=\left\{\lambda \middle| \lambda : R\to R, \lambda(rr')=\lambda(r)r'; r,r'\in R\right\}$$

R nin çarpanlarının k-cebiri verilsin. O halde $\forall r,r'\in R$ için

$$\partial : R\to M(R)$$

$$r\mapsto \lambda_r : R\to R$$

$$r'\mapsto \lambda_r(r')=rr'$$

çaprazlanmış modüldür. R üzerinde $M(R)$ etkisi

$$M(R)\times R\to R$$

$$(\lambda,r)\mapsto \lambda.r=\lambda(r)$$

olmak üzere

CM1) $\partial(\lambda.r)=\partial(\lambda(r))$

$=\lambda_{\lambda(r)}$ $\qquad\left(\because \lambda_{\lambda(r)}(r')=\lambda(r)r'=\lambda(rr')=\lambda(\lambda_r(r'))\right)$

$=\lambda\lambda_r$

$=\lambda\partial(r)$

CM2) $\partial(r).r'=\lambda_r.r'$

$=\lambda_r(r')$

$=rr'$

olup $(R,M(R),\partial)$ bir çaprazlanmış modüldür.

Örnek 1.1.8

$$\theta : L \to M$$

R-modüllerin bir morfizmi olsun. $\forall r, r' \in R, m, m' \in M$ için

$$(r,m)(r',m') = (rr', rm' + r'm)$$

çarpımını alarak

$$R \times M$$

yarı-direkt çarpımını tanımlayabiliriz. Böylece

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] (R\times M)\times L \arrow[rr] \arrow[dr] & & L \arrow[dl] \\ & R\times L & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olup L nin $R \times M$ üzerine etkisi

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] ((r,m)l) \arrow[rr] \arrow[dr] & & (r,m).l = rl \arrow[dl] \\ & (r,l) & \end{tikzcd}$$

şeklindedir. Burada p , projeksiyondur. Tanımlanan bu etkiyle birlikte $L, R \times M$ -modül yapısı oluşturur. O halde

$$\partial : L \to R \times M$$

$$l \mapsto (0, \theta(R))$$

çaprazlanmış $R \times M$ -modüldür. Çünkü $\forall l, l' \in L$ için

CM2) $\partial(l).l' = (0, \theta(l)).l'$

$= 0l' = 0$

$= ll'$

(Not: Burada L *ve* M , R-modüllerini sifır çarpımı alınarak , R-cebir yapısı oluşturduğunu hatırlatalım. Yani:

$$L \times L \to L \qquad \text{ve} \qquad M \times M \to M$$

$$(l, l') \mapsto ll' = 0 \qquad\qquad (m, m') \mapsto mm' = 0$$

olup çarpım

$$\begin{aligned}(r,m)(r',m') &= (rr', rm' + r'm + mm') \\ &= (rr', rm' + r'm + 0) \\ &= (rr', rm' + r'm)\end{aligned}$$

şeklinde alınmaktadır.)

1.2 Çaprazlanmış Modüller Kategorisi

$\partial : C \longrightarrow R$ çaprazlanmış R-modül ve $\partial' : C' \longrightarrow R'$ çaprazlanmış R'-modül olsun.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & C' \arrow[d] \\ R \arrow[r, "\varphi"'] & R' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} R \times C \arrow[r, "(\varphi,\theta)"] \arrow[d] & R' \times C' \arrow[d] \\ C \arrow[r, "\theta"'] & C' \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramları göz önüne alındığında

$$\begin{tikzcd}
(r,c) \arrow[r] \arrow[d] & (\varphi(r),\theta(c)) \arrow[d] \\
r.c \arrow[r] & \theta(r.c)=\varphi(r).\theta(c)
\end{tikzcd}$$

olup $\theta(r.c)=\varphi(r).\theta(c)$ elde edilir. Bdurumda $(\theta,\varphi):(C,R,\partial)\longrightarrow(C',R',\partial')$ homomorfizm çiftine , çaprazlanmış modül morfizmi denir. Bununla birlikte çaprazlanmış modül morfizmleri arasındaki kompozisyon

$$(\theta,\varphi)\circ(\theta',\varphi')=(\theta'\circ\theta,\varphi'\circ\varphi)$$

şeklinde tanımlanır. K-sabit değişmeli k-cebir k-Ceb (veya Ceb) kategorisinde, çaprazlanmış modüller kategorisini tanımlayabiliriz. Bu kategori $XMod$ (veya $XMod_k$) ile gösterilir.

$R=R'$ alınırsa;

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[d] \\
R \arrow[r] & R'=R
\end{tikzcd}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & C' \arrow[d] \\
R \arrow[r, "id_R"'] & R
\end{tikzcd}$$

olup

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\partial"'] & & C' \arrow[dl, "\partial'"] \\
& R &
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı elde edilir. Bu durumda elde edilen kategori $X-Mod\big|_R$ ile gösterilir.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\partial"'] & & C' \arrow[dl, "\partial'"] \\
& R &
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramımız olmak üzere

$\theta:(\theta,id_R):(C,R,\partial)\longrightarrow(C',R,id_R)$ çaprazlanmış R-modül morfizmidir. $XMod/R$ kategorisi $XMod$ kategorisinin bir alt kategorisidir.

1.2.1 Funktoriyel Örnekleri

1) Herhangi *R,k*-cebiri alındığında ,her zaman çaprazlanmış modül yapısı

$$F : Ceb \longrightarrow XMod$$

funktoru elde edilir. $F(R) = (R, R, id_R)$ bir çaprazlanmış modüldür.

$f : R \longrightarrow S$ *k*-cebir morfizmi olmak üzere

$$F(f) = \left(\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & S \\ id_R \downarrow & & \downarrow id_S \\ R & \xrightarrow[f]{} & S \end{array} \right) = (f, f)$$

Tersine $G : XMod \longrightarrow Ceb$ funktoru ise

$X = (C, R, \partial)$ çaprazlanmış modülü için $G\left(C \xrightarrow{\partial} R\right) = R$ olarak tanımlanabilir.

$$G(\theta, \varphi) = G \left(\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\theta} & C' \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial' \\ R & \xrightarrow[\varphi]{} & R' \end{array} \right) = R \xrightarrow{\theta} R'$$

Burada (F, G) ikilisi bir Adjoint ikili oluşturur. Ayrıca diğer bir

$$G' : XMod \longrightarrow Ceb$$

funktoru $G'\left(C \xrightarrow{\partial} R\right) = C$ *k*-cebiri olarak tanımlanabilir. Çünkü *C,R*-cebiri olup

$$\begin{array}{lcl} k \to R & & k \times C \to C \\ k \mapsto f(k) & \text{ve} & (k, c) \mapsto k.c = f(k)c \in C \end{array}$$

işlemiyle *C* bir *k*-cebirdir.Benzer şekilde

$$G'(\theta, \varphi) = G' \left(\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\theta} & C' \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial' \\ R & \xrightarrow[\varphi]{} & R' \end{array} \right) = \left(C \xrightarrow{\theta} C'\right)$$

olup k-cebir morfizmidir. Buradan (F,G') ikilisi adjoint ikilidir.

2) $R-IdC$; R, k-cebirlerinin ideallerinin kategorisi olsun.

$$F : XMod/R \longrightarrow R-IdC$$

funktoru tanımlanabilir. Bu funktorun objeleri

$$F(C,R,\partial)=\partial(C)\trianglelefteq R$$

ve morfizmleri

$$F\left(\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\partial"'] & & C' \arrow[dl, "\partial'"] \\ & R & \end{tikzcd}\right)=\partial(C)\longrightarrow\partial(C')$$

R-cebirlerin ideallerinin morfizmleridir.

Tersine $G : R-IdC \longrightarrow XMod/R$ funktoru ise $I\trianglelefteq R$ için

$$G(I)=(I\xhookrightarrow{i} R)$$

olarak tanımlanabilir. (I,R,i) bir çaprazlanmış modül olduğunu biliyoruz.

$I,J\trianglelefteq R$ olmak üzere $f : I \hookrightarrow J$ içine homomorfizmi alınırsa

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, hook, "f"] \arrow[dr, hook, "i_1"'] & & J \arrow[dl, hook', "i_2"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

şeklinde değişmeli diyagramı elde edilir. Çünkü $\forall x\in I$ için

$$(i_2 f)(x)=i_2(f(x))=i_2(x)=x=i_1(x)$$

olup $i_2 f = i_1 dir$.

$$G(f)=G(I)\longrightarrow G(J)$$

$$(I \hookrightarrow R) \longrightarrow (J \hookrightarrow R)$$

$$G\left(\begin{tikzcd} I \arrow[rr, hook, "f"] \arrow[dr, "i_1"'] & & J \arrow[dl, "i_2"] \\ & R & \end{tikzcd}\right) = \left(f_1 id_R\right) = f$$

Burada f çaprazlanmış modül morfizmidir.

Buradan (F,G) adjoint ikili oluşturur.

3) ${}_R Mod$ *,* R-modüller kategori olmak üzere

$$F : {}_R Mod \longrightarrow XMod/R$$

funktoru M,R-modülü için

$$F(M) = \left(0 = \partial : M \longrightarrow R\right)$$

olarak tanımlanabilir. Burada $\left(0 = \partial : M \longrightarrow R\right)$ çaprazlanmış R-modül morfizmi için

$$F(f) = F(M) \longrightarrow F(N)$$

olup

$$F(f) = \left(\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "0"'] & N \arrow[d, "0"] \\ R \arrow[r, "id_R"'] & R \end{tikzcd}\right) = \left(f, id_R\right) = f$$

çaprazlanmış R-modül morfizmidir.

$$G : XMod/R \longrightarrow {}_R Mod$$

funktoru $\left(C \xrightarrow{\partial} R\right)$ çaprazlanmış R-modülü için

$$R \times Çek\partial \to Çek\partial$$

$$(r,a) \mapsto r.a = ra$$

etkisiyle bir R-modüldür. Burada $a \in Çek\partial$ için

$$\partial(ra) = r\partial(a)$$
$$= r0$$
$$= 0 \qquad \Rightarrow ra \in Çek\partial$$

$$G(f, id_R) = G \left(\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\partial"'] & C' \arrow[d, "\partial'"] \\ & R \end{tikzcd} \right) = \left(Çek\partial \longrightarrow Çek\partial' \right)$$

R-modül morfizmidir. Bu durumda (F, G) Adjoint ikli oluşturur.

1.2.2 Forgetful Funktor Örnekleri

1) Objeleri k-cebir morfizmleri ve morfizmleri değişmeli diyagramlar olacak şekilde Ceb^2 kategorisini alalım. Bu durumda

$$F : XMod \longrightarrow Ceb^2$$

forgetful funktoru tanımlanabilir. $\partial : C \longrightarrow R$ çaprazlanmış R-modül morfizmi için

$$F(\partial) = \partial$$

olup Peiffer şartını sağlamayan $\partial : C \longrightarrow R$, k-cebir morfizmidir.

$$(\theta, \varphi) : (C, R, \partial) \longrightarrow (C', R', \partial')$$

morfizmi için

$$F(\theta, \varphi) = \left(\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"'] & C' \arrow[d, "\partial'"] \\ R \arrow[r, "\varphi"'] & R' \end{tikzcd} \right)$$

yalnız k-cebir morfizmlerinden oluşan değişmeli diyagramı elde edilir.

2) $G : XMod \longrightarrow Ceb$ funktorunun objeleri

$$F(C,R,\partial) = R\Big|_{\partial(C)}$$

bir k-cebirdir. Çünkü

$$k \longrightarrow R \longrightarrow R\Big|_{\partial(C)}$$

halka homomorfizmi

$$k \times R\Big|_{\partial(C)} \longrightarrow R\Big|_{\partial(C)}$$

$$\big(k, r+\partial(C)\big) \mapsto k.\big(r+\partial(C)\big) = kr+\partial(C)$$

işlemiyle $R/\partial(C)$ bir k-modül yapısı oluşturur. Morfizmler

$$F(\theta,\varphi) = \left(R\Big|_{\partial(C)} \longrightarrow R'\Big|_{\partial'(C')} \right)$$

indirgenmiş k-cebir homomorfizmleridir. Çünkü

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"'] & C \arrow[d, "\partial'"] \\
R' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "q"'] & C' \arrow[d, "q'"] \\
R/\partial(C) \arrow[r] & R'/\partial'(C')
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

Not

$\left(C \xrightarrow{\partial} R\right)$ önçaprazlanmış R-modül ve $c, c' \in C$ olsun.

$$\partial c.c' - cc'$$

elemanına Peiffer elemanı denir. Dolayısıyla ön çaprazlanmış modülde tüm Peiffer elemanları sıfır ise çaprazlanmış modül elde edilir.

$$P=\{\partial c.c'-cc' \mid c,c'\in C\}$$

Peiffer elemanlarının kümesini alalım. Bu durumda P tarafından üretilen $\langle P\rangle$ kümesi C nin idealidir.

Önerme 1.2.3

$\langle P\rangle \trianglelefteq C$ dir.

İspat

$x\in C$ ve $a\in\langle P\rangle$ olsun.

$$xa=x\left(\partial(c).c'-cc'\right)=x\partial(c).c'-xcc'$$

olup

$$\begin{aligned}\partial(xa)&=\partial\left(x\partial(c).c'-xcc'\right)\\&=\partial(c)\partial(xc')-\partial(xcc') \quad (\because\ \partial \text{ ön çaprazlanmış modül })\\&=\partial(c)\partial(x)\partial(c')-\partial(x)\partial(c)\partial(c')\\&=0\end{aligned}$$

Bu durumda herhangi $\partial: C\longrightarrow R$ ön çaprazlanmış R-modül için

$$C^{cr}=C/\langle P\rangle$$

tanımlanabilir. Ayrıca

$$R\times C^{cr}\longrightarrow C^{cr}$$

$$\left(r,c+\langle P\rangle\right)\mapsto r.\left(c+\langle P\rangle\right)=rc+\langle P\rangle$$

işlemiyle birlikte C^{cr}, R -cebirdir.

Önerme 1.2.4

$\partial : C \longrightarrow R$ ön çaprazlanmış R-modül ise indirgenmiş

$$\partial^{cr} : C^{cr} \longrightarrow R$$

homomorfizmi çaprazlanmış R-modüldür.

İspat

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\partial"] \arrow[dr, "q"'] & & R \\ & C/\langle P\rangle \arrow[ur, "\partial^{cr}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c \arrow[rr] \arrow[dr] & & \partial(c) \arrow[dl] \\ & [c] & \end{tikzcd}$$

$[c] = c + \langle P\rangle$, $[c'] = c' + \langle P\rangle \in C^{cr}$ için

$$\partial^{cr}\left(c+\langle P\rangle\right).\left(c'+\langle P\rangle\right) = \partial(c).\left(c'+\langle P\rangle\right) \quad \left(\because \ \ \partial^{cr}\left([c]\right) = \partial(c)\right)$$

$$= \partial(c)c' + \langle P\rangle$$

$$= cc' + \langle P\rangle \qquad\qquad (\because \ \ \text{mod} \ \ P)$$

$$= \left(c+\langle P\rangle\right)\left(c'+\langle P\rangle\right)$$

Bu durumda $\left(C^{cr} \xrightarrow{\partial^{cr}} R\right)$ çaprazlanmış R-modüldür. Böylece

$$F : PXMod \longrightarrow XMod$$

funktoru $\partial : C \longrightarrow R$ önçaprazlanmış R-modülü için

$$F(\partial) = \left(\partial^{cr} : C^{cr} \longrightarrow R\right)$$

olarak tanımlanabilir. (θ, φ) önçaprazlanmış modül morfizmi ise

$$F(\theta, \varphi) = \left(\theta^{cr}, \varphi\right)$$

çaprazlanmış modül morfizmidir.

1.3 Alt Çaprazlanmış Modüller

$\left(C,R,\partial\right)$ bir çaprazlanmış R-modül olsun. C',C nin bir alt cebiri ve

$$\partial' : \partial/C' : C' \longrightarrow R$$

∂ nın C' ye kısıtlanmış olmak üzere $\left(C',R,\partial'\right)$ çaprazlanmış modülü $\left(C,R,\partial\right)$ çaprazlanmış R-modülün alt çaprazlanmış modülüdür. $\left(C',R,\partial'\right) \leq \left(C,R,\partial\right)$ ile gösterilir.

Hatırlatma

$\left(C',R,\partial'\right)$, $\left(C,R,\partial\right)$ nın bir alt çaprazlanmış modülü olsun. Bu durumda $c \in C$ ve $x \in C'$ için

$$xc = x.\partial c \in C'$$

olup $xc \in C'$ dür. Dolayısıyla C',C de bir idealdir. Böylece $\left(C',R,\partial'\right)$ alt çaprazlanmış modülü

$$\partial' : \partial\Big|_{C'} : C' \longrightarrow R$$

kısıtlanmış fonksiyonu ile C nin bir C' idealidir.

Örnek 1.3.1

I,R halkasının herhangi bir ideali olmak üzere $\left(I,R,i\right),\left(R,R,id_R\right)$ çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modülünü oluşturur.

$$i = id_R\Big|_{I} : I \subset R \longrightarrow R$$

içine fonksiyonu , id_R birim fonksiyonu tarafından indirgenmiştir. I ideali, R halkasının bir alt cebiri olduğu ve $\forall i,i_1,i_2 \in I, r \in R$ için

$$\begin{aligned}&i_1 i_2 \in I\\&i_1 - i_2 \in I\\&ri \in I\end{aligned}$$

şeklinde ideal tanımından görülür.

Örnek 1.3.2

$(M,R,0)$ bir çaprazlanmış modül olmak üzere , R üzerinde M modülünün herhangi bir M' alt modülü , M nin alt çaprazlanmış modülüdür.

Çünkü M', M nin alt modülü olduğundan $x,y\in M', r\in R$ için rm' çarpımı kapalıdır. Aynı zamanda M', M nin alt grubu olduğundan

$$xy\in M'$$
$$x-y\in M'$$

sağlanır. Böylece M', M nin alt cebiridir ve

$$0\big|_{M'} : M'\to R$$

$$m'\mapsto 0$$

indirgenmiş fonksiyonu ile M' bir alt çaprazlanmış R-modüldür.

Tanım 1.3.3 ($XMod_k$ kategorisinde alt çaprazlanmış modül)

(C,R,∂) bir çaprazlanmış R-modül olsun.

(i) $\phi\neq C'\subseteq C, \phi\neq R'\subseteq R$ için C',C nin alt cebiri ve R',R nin alt cebiri

(ii)
$$\begin{tikzcd} C' \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d, "\partial'"'] & C \arrow[d, "\partial"] \\ R' \arrow[r, hook, "i_2"'] & R \end{tikzcd}$$
diyagramı değişmeli (yani $\partial i_1=\partial i_2$)

(iii) $\partial' : C'\longrightarrow R'$ bir çaprazlanmış R'-modül

şartları sağlanıyorsa (C',R',∂') çaprazlanmış R'-modülü (C,R,∂) çaprazlanmış R-modülünün alt çaprazlanmış modülüdür.

1.4 Çaprazlanmış İdealler

Şimdi çaprazlanmış idealler olarak isimlendireceğimiz , bir (C,R,∂) çaprazlanmış modülün " normal " alt çaprazlanmış modülünün tanımını verelim.

Halka teorisinde , çekirdeklerin ve ideallerin aynı olduğu bilinir. Yani bir R halkasının herhangi bir I ideali

$$V : R \longrightarrow R/I$$

bilinen halka homomorfizminin çekirdeğidir ve bir halka homomorfizminin her bir çekirdeği bir idealdir.

Bir çaprazlanmış ideali $c \in C$ için $v(c) = c + C'$ ve $\overline{\partial}(c+C) = \partial(c)$ olmak üzere

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\partial"'] & C/C' \arrow[dl, "\overline{\partial}"] \\ R & \end{tikzcd}$$

şeklinde , R üzerinde çaprazlanmış modüllerin morfizmi $(C, C/C', v)$ nin bir çekirdeği olan , R üzerinde (C,R,∂) çaprazlanmış modülünün (C',R,∂') alt modülü olarak tanımlayalım.

$\overline{\partial}$ nın iyi tanımlı olması için gerek ve yeter şart C' nün $Çek\partial$ de yer alması olduğu açıktır. Çünkü

$$c + C' = c' + C' \Rightarrow c + c' = x \in C' \quad \text{ve} \quad c = c' + x$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \overline{\partial}(c+C') = \overline{\partial}(c'+C') &\Leftrightarrow \partial(c) = \partial(c') \\ &\Leftrightarrow \partial(c) - \partial(c') = 0 \\ &\Leftrightarrow \partial(c - c') = 0 \\ &\Leftrightarrow c - c' = x \in Çek\partial \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $\partial : C \longrightarrow R$ çaprazlanmış modülünün çaprazlanmış idealleri (C,R,∂) nın *Çek*∂ da yer alan , bütün (C',R,∂') alt çaprazlanmış modülleridir. Çaprazlanmış modüllerin herhangi bir

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "iç"] \arrow[d, "\partial"'] & C \arrow[dl, "\partial"] \\ R & \end{tikzcd}$$

Tanım 1.4.1 ($XMod_{(k)}$ da çaprazlanmış ideal)

(C,R,∂) bir çaprazlanmış *R*-modül olsun. $\varnothing \neq C' \subseteq C$ ve $\varnothing \neq R' \subseteq R$ olsun.

(i) $(C',R',\partial') \leq (C,R,\partial)$

(ii) $x \in C', c \in C$ için $xc \in C'$ yani $C' \trianglelefteq C$

$y \in R', r \in R$ için $ry \in R'$ yani $R' \trianglelefteq R$

(iii) $RC \subseteq C'$ ve $R'C \subseteq C'$

şartları sağlanıyorsa (C',R',∂') çaprazlanmış R'-modülüne (C,R,∂) çaprazlanmış R-modülünün çaprazlanmış ideali denir.

Not

C', R'-cebir olduğundan $R' \xrightarrow{f} C'$ cebir homomorfizmi vardır.

$$\begin{tikzcd} R' \times C \arrow[r, "(f, id_c)"] \arrow[dr, "g \circ (f, id_c)"'] & C' \times C \arrow[d, "g"] \\ & C' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (r',c) \arrow[r] \arrow[dr] & (f(r'),c) \arrow[d] \\ & f(r')c \in C' \quad (\because C' \trianglelefteq C) \end{tikzcd}$$

$$R' \times C \to C'$$
$$(r',c) \mapsto f(r')c$$

tanımlanan etkisiyle $R'C \subseteq C'$ dür

Benzer şekilde $RC \subseteq C'$ olduğu gösterilebilir.

Tanım 1.4.2 (Çaprazlanmış Çekirdek)

$(\theta,\varphi):(C,R,\partial)\longrightarrow(C',R',\partial')$ çaprazlanmış modül homomorfizmi verilsin. $Çek(\theta,\varphi),(C,R,\partial)$ nın bir çaprazlanmış ideali olsun.

$$\begin{tikzcd} Çek\theta \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d, "\partial|_{Çek\varphi}"'] & C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"] & C' \arrow[d, "\partial'"] \\ Çek\varphi \arrow[r, hook, "i_2"'] & R \arrow[r, "\varphi"'] & R' \end{tikzcd} \qquad Çek\theta \trianglelefteq C$$

Bu durumda $Çek(\theta,\varphi)=\left(Çek\theta, Çek\varphi, \partial\Big|_{Çek\theta}\right)$ idealine (θ,φ) nin çekirdeği denir.

Tanım 1.4.3

$(\theta,\varphi):(C,R,\partial)\longrightarrow(C',R',\partial')$ çaprazlanmış modül morfizmi verilsin. $\theta(C),C'$nün alt cebiri ve $\varphi(R),R'$ nün alt cebiri olsun. Bu durumda $\left(\theta(C),\varphi(R),\partial\Big|_{\theta(C)}\right)\leq(C',R',\partial')$ olup (θ,φ) çaprazlanmış modül morfizminin görüntüsü

$$Gör(\theta,\varphi)=\left(\theta(c),\varphi(R),\partial'\Big|_{\theta(C)}\right)$$

dir.

Tanım 1.4.4 (Çaprazlanmış Bölüm Modülleri)

$(C',R',\partial'),(C,R,\partial)$ da bir ideal olsun. Bu durumda $R, C/C'$ üzerine etki eder. R' nün C/C' üzerine etkisi ise

$$\begin{aligned} R'\times C/C' &\to C/C' \\ (r',c+C') &\mapsto r'c+C' \end{aligned}$$

şeklinde etki eder ve buradan ∂,

$$\bar{\partial} : C/C' \to R/R'$$

$$c + C' \mapsto \partial(c) + R'$$

morfizmine indirgenir.

Bu tanıma ve etki fonksiyonuna göre $\left(C\big|_{C'}, R\big|_{R'}, \partial'\right)$ çaprazlanmış R/R'- modül olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}\left((r+R')(c+C')\right) &= \bar{\partial}(rc+C') && (\because \text{ etki tanımı }) \\
&= \partial(rc)+R' && (\because\ \bar{\partial} \text{ tanımı }) \\
&= r\partial(c)+R' && (\because\ \partial \text{ çaprazlanmış modül }) \\
&= r\left(\partial(c)+R'\right) && \\
&= r\bar{\partial}(c+C') && (\because\ \bar{\partial} \text{ tanımı })
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}\left((c+C')(b+C')\right) &= \bar{\partial}(cb+C') && (\because\ C/C' \text{ bölüm cebiri }) \\
&= \partial(cb)+R' && (\because\ \bar{\partial} \text{ tanımı }) \\
&= \partial(c)\partial(b)+R' && (\because\ \partial \text{ cebir homomorfizmi }) \\
&= \left(\partial(c)+R'\right)\left(\partial(b)+R'\right) && (\because \text{ etki tanımı })
\end{aligned}$$

olduğundan $\bar{\partial}$ bir cebir morfizmidir. Şimdi de çaprazlanmış modül aksiyomlarının sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}\left((r+R').(c+C')\right) &= \bar{\partial}(rc+C') && (\because \text{ etki tanımı }) \\
&= \partial(rc)+R' && (\because\ \bar{\partial} \text{ tanımı }) \\
&= r\partial(c)+R' && (\because\ \partial \text{ çaprazlanmış modül }) \\
&= (r+R')\left(\partial(c)+R'\right) && (\because\ R/R' \text{ bölüm cebiri })
\end{aligned}$$

$$= (r + R')\bar{\partial}(c + C')$$

$$\bar{\partial}(c + C').(c' + C') = (\partial(c) + R')(c' + C') \qquad (\because \ \bar{\partial} \ \text{tanımı})$$

$$= \partial(c)c' + C' \qquad (\because \ \text{etki tanımı})$$

$$= cc' + C' \qquad (\because \ \partial \ \text{çaprazlanmış modül})$$

$$= (c + C')(c' + C') \qquad (\because \ C/C' \ \text{bölüm cebiri})$$

olduğundan $\left(C/C', R/R', \bar{\partial}\right)$ bir çaprazlanmış modül oluşturur.

Teorem 1.4.5 (Çaprazlanmış Modüller İçin 1. İzomorfizm Teoremi)

$(\theta, \varphi) : (C, R, \partial) \longrightarrow (C', R', \partial')$ çaprazlanmış modül homomorfizmi verilsin. Bu durumda

$$(C, R, \partial) \Big/ Çek(\theta, \varphi) \cong Gör(\theta, \varphi)$$

yani

$$(C, R, \partial) \Big/ \left(Çek\theta, Çek\varphi, \partial\big|_{Çek\theta}\right) \cong \left(\theta(C), \varphi(R), \partial'\big|_{\theta(C)}\right)$$

dır.

Teorem 1.4.6 (Çaprazlanmış Modüller İçin Evrensellik Özelliği)

$(\theta, \varphi) : (C, R, \partial) \longrightarrow (B, S, \beta)$ çaprazlanmış modül morfizmini alalım.

$(C', R', \partial') \trianglelefteq (C, R, \partial)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{tikzcd}
(C, R, \partial) \arrow[r, "(\theta,\varphi)"] \arrow[d, "(q_1, q_2)"'] & (B, S, \beta) \\
(C/C', R/R, \partial') \arrow[ur, "(f, g)"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde biricik (f,g) çaprazlanmış modül morfizmi vardır.

İspat

$(C/C', R/R', \partial')$ bir çaprazlanmış R/R'-modül olduğu gösterilmişti.

$I=(C', R', \partial') \subseteq Çek(\theta,\varphi)$ olduğu için $\theta(C')=0$ ve $\varphi(R')=0$ dır.

$$(f,g):(C/C', R/R', \bar{\partial}) \longrightarrow (B,S,\beta)$$

$$f: C/C' \to B \qquad\qquad g: R/R' \to S$$

$$c+C' \mapsto \theta(c) \qquad\qquad r+R' \mapsto \varphi(r)$$

$\forall c_1, c_2 \in C$ için

$$\begin{aligned} c_1+C'=c_2+C' &\Rightarrow c_1-c_2 \in C' \\ &\Rightarrow \theta(c_1-c_2) \in \theta(C') \\ &\Rightarrow \theta(c_1-c_2)=0 \quad (\because \theta(C')=0) \\ &\Rightarrow \theta(c_1)-\theta(c_2)=0 \\ &\Rightarrow \theta(c_1)=\theta(c_2) \\ &\Rightarrow f(c_1+C')=f(c_2+C') \end{aligned}$$

Buna göre f iyi tanımlıdır.

$\forall r_1, r_2 \in R$ için

$$\begin{aligned} r_1+R'=r_2+R' &\Rightarrow r_1-r_2 \in R' \\ &\Rightarrow \varphi(r_1-r_2) \in \varphi(R') \\ &\Rightarrow \varphi(r_1-r_2)=0 \qquad (\because \varphi(R')=0) \\ &\Rightarrow \varphi(r_1)-\varphi(r_2)=0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi(r_1) = \varphi(r_2)$$

$$\Rightarrow g(r_1 + R') = g(r_2 + R')$$

Bu durumda g iyi tanımlıdır.

f ve g iyi tanımlı olduğundan (f,g) de iyi tanımlıdır.

(f,g) nin bir çaprazlanmış modül morfizmi olduğunu gösterelim.

(i)

$$\begin{tikzcd} C/C' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\bar{\partial}"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ R/R' \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} R/R' \times C/C' \arrow[r, "(g,f)"] \arrow[d] & S \times B \arrow[d] \\ C/C' \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (r+R', c+C') \arrow[r] \arrow[d] & \big(g(r+R').f(c+C')\big) \arrow[d] \\ (r+R').(c+C') = (rc+C') \arrow[r] & f(rc+C') = g(r+R').f(c+C') \end{tikzcd}$$

$$f\big((r+R').(c+C')\big) = f(rc+C') = g(r+R').f(c+C')$$

$f(rc+C') = \theta(rc)$ ($\because$ f nin tanımı)

$= \varphi(r)\theta(c)$ ($\because$ (θ,φ) çaprazlanmış modül morfizmi)

$= g(r+R').f(c+C')$

(ii)

$$\begin{tikzcd} C/C' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\overline{\partial}"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ R/R' \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd}$$

diyagramının değişmeli olduğunu (yani $\beta f = g\overline{\partial}$) gösterelim.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr] \arrow[dd, "q_1"'] & & B \arrow[dr, "\beta"] \arrow[dd, "id_B"] & \\ & R \arrow[rr, "\varphi"'] \arrow[dd, "q_2"] & & S \arrow[dd, "id_S"] \\ C/C' \arrow[rr, dashed, "f"'] \arrow[dr, "\overline{\partial}"'] \arrow[uurr, dashed] & & B \arrow[dr, "\beta"'] & \\ & R/R' \arrow[rr, dashed, "g"'] \arrow[uurr, dashed] & & S \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\partial"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ R \arrow[r, "\varphi"'] & S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C/C' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\overline{\partial}"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ R/R' \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd}$$

(1) $\qquad\qquad$ (2)

(θ,φ) çaprazlanmış modül morfizmi olduğundan (1) diyagramı değişmelidir. Yani $\varphi\partial = \beta\theta$ dır.

$\forall c + C' \in C/C'$

$$\left(g\overline{\partial}\right)(c+C') = g\left(\overline{\partial}(c+C')\right)$$

$$= g\left(\partial(c) + R'\right) \qquad\qquad (\because \ \overline{\partial} \ \text{ tanımı })$$

$$= \varphi\left(\partial(c)\right)$$

$$= (\varphi\partial)(c)$$

$=(\beta\theta)(c)$ ($\because$ (θ,φ) çaprazlanmış modül morfizmi

$=\beta(\theta(c))$ olduğundan $\varphi\partial=\beta\theta$)

$=\beta(f(c+C'))$

$=(\beta f)(c+C')$

$\Rightarrow \forall c+C'\in C/C'$ için $g\overline{\partial}=\beta f$ dir. O halde (2) diyagramı da değişmelidir.

$(f,g).(q_1,q_2)=(\theta,\varphi)$ eşitliğini gösterelim.

$$(f,g).(q_1,q_2)=(q_1 f,q_2 g)$$

$$=(\theta,\varphi)$$

$$fq_1=\theta \qquad \text{ve} \qquad gq_2=\varphi$$

Bu durumda (f,g) bir çaprazlanmış modül morfizmidir.

$$(f',g'):\left(C/C',R/R',\overline{\partial}\right)\longrightarrow(B,S,\beta)$$

çaprazlanmış morfizmi olsun.

$$f':C/C'\to B \qquad\qquad g:R/R'\to S$$

$$c+C'\mapsto a \qquad\qquad r+R'\mapsto b$$

şeklinde tanımlansın.

Kabul edelimki $(f',g'),(f,g)$ ile aynı özellikte, (yani diyagramı değişmeli yapacak şekilde $(f',g')(q_1,q_2)=(\theta,\varphi)$ olacak şekilde)başka bir çaprazlanmış modül morfizmi olsun.

$$q_1:C\to C/C' \qquad\qquad q_2:R\to R/R'$$

$$c \mapsto c + C' \qquad\qquad r \mapsto r + R'$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\big((f',g')(q_1,q_2)\big)(c,r) &= (f',g')\big((q_1,q_2)(c,r)\big) \\
&= (f',g')\big(q_1(c),q_2(r)\big) \\
&= (f',g')(c+C',r+R') \\
&= \big(f'(c+C'),g'(r+R')\big) \\
&= (a,b) \\
&= \big(\theta(c+C'),\varphi(r+R')\big) \qquad \big(\because (f',g')(q_1,q_2)=(\theta,\varphi)\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \big((f',g')(q_1,q_2)\big)(c+C',r+R') &= (a,b) \\
&= \big(\theta(c+C'),\varphi(r+R')\big) \\
&= \big((f,g)(q_1,q_2)\big)(c+C'+r+R')
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \forall c+C' \in C/C'$ ve $r+R \in R/R'$ için

$$(f',g')(q_1,q_2) = (f,g)(q_1,q_2)$$

olup $(f',g')=(f,g)$ elde edilir. Dolayısıyla (f,g) çaprazlanmış modül morfizmi biriciktir.

2.DEĞİŞMELİ CEBİRLER İÇİN ÇAPRAZLANMIŞ KARELER

Değişmeli cebirlerin çaprazlanmış kareleri ilk olarak Ellis $[4]$ doktora tezinde yayınlanmıştır.

2.1 Çaprazlanmış Kareler

Tanım 2.1.1

k değişmeli halka , *R*, *k*-cebiri ve D,C,B nin her biri *R*-cebir olsun.

$$\begin{array}{lll} R\times C\to C & R\times B\to B & R\times D\to D \\ (r,c)\mapsto r.c & (r,b)\mapsto r.b & (r,d)\mapsto r.d \end{array}$$

etkileri ve

$\partial : C\to R$, $\partial' : D\to R$, $\beta' : D\to C$ ve $\beta : B\to R$ *R*-cebir morfizmleri ve

$$h: C\times B\to D$$

olmak üzere

(i) $\partial,\beta,\partial',\beta'$ birer çaprazlanmış R-modül;

(ii) ∂ ve β , R nin etkileri koruması

(iii) $r.h(c,b)=h(r.c,b)$

(iv) $h(c+c',b)=h(c,b)+h(c',b)$ ve $h(c,b+b')=h(c,b)+h(c,b')$

(v) $h(\beta'(d),b)=d.\beta(b)$ ve $h(c,\partial'(d))=\partial c.d$

şartları her $c,c'\in C$, $b,b'\in B$ ve $d\in D$ için geçerli ise

$$\chi = \left(\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\beta'} & C \\ {\scriptstyle\partial'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\partial} \\ B & \xrightarrow[\beta]{} & R \end{array}\right)$$

karesine , bir ***çaprazlanmış kare*** denir.

Not

Çaprazlanmış kareler, çaprazlanmış modülleri olarak düşünülebilir.

2.1.2 Örnekler

1) R değişmeli bir halka I, J, R nin idealleri olsun.

Bu durumda

$$\begin{array}{ccccccc} I & \hookrightarrow & R & \quad \text{ve} \quad & J & \hookrightarrow & R \\ x & \longrightarrow & x & & y & \longrightarrow & y \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccccccc} I \cap J & \hookrightarrow & I & \quad & I \cap J & \hookrightarrow & J \\ a & \longrightarrow & a & & b & \longrightarrow & b \end{array}$$

gömme fonksiyonlarının birer çaprazlanmış modül olduğunu biliyoruz. Ayrıca $I, J, I \cap J$ kümeleri R nin birer ideali olduğundan

$$\begin{array}{ccccccc} R \times I & \longrightarrow & I & \quad \text{ve} \quad & R \times J & \longrightarrow & J \\ (r, x) & \longrightarrow & r.x = rx & & (r, y) & \longrightarrow & r.y = ry \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc} (I \cap J) \times R & \longrightarrow & I \cap J \\ (a, r) & \longrightarrow & a.r = ar \end{array}$$

etkileriyle ve

$$\begin{array}{ccc} h : [x] & \longrightarrow & I \cap J \\ (x, y) & \longrightarrow & \text{xy} \end{array}$$

olmak üzere

$$\chi = \left(\begin{tikzcd} I \cap J \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & I \arrow[d, hook] \\ J \arrow[r, hook] & R \end{tikzcd} \right)$$

karesi bir çaprazlanmış karedir. Aksiyomlarının doğruluğu etkilerin her biri cebir çarpımı olduğundan gayet açıktır.

2) M, N birer R-modül ve C abelyen grup olsun.

$$\begin{array}{lcl} R \times M \to M & \text{ve} & R \times N \to N \\ (r,m) \mapsto r.m = 0 & & (r,n) \mapsto r.n = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} R \times C \to C \\ (r,c) \mapsto r.c = 0 \end{array}$$

etkisiyle birlikte

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & N \arrow[d, "0"] \\ M \arrow[r, "0"'] & R \end{tikzcd}$$

karesi,

$$\begin{array}{l} 0 = h : M \times N \to C \\ (m,n) \mapsto h.(m,n) = m.n = 0 \end{array}$$

fonksiyonu bir çaprazlanmış karedir.

3) (C, R, ∂) çaprazlanmış modül ve

$$(C', R', \partial') \trianglelefteq (C, R, \partial)$$

ideali olsun. İdeal tanımından

(a) $C' \trianglelefteq C$ ve $R' \trianglelefteq R$

(b) $R'C \subseteq C'$ ve $RC' \subseteq C'$

dır. (a) dan

$$i_1 : C' \hookrightarrow C$$

ve

$R' \trianglelefteq R$ dir.

$$i_2 : R' \hookrightarrow R$$

gömme çaprazlanmış modülleri vardır.

Ayrıca P_1 ve P_2 projeksiyonlar olmak üzere

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "P_1"'] & R \arrow[d, "P_2"] \\ C' \arrow[r, "\partial'"'] & R' \end{tikzcd}$$

indirgenmiş homomorfizmleri çaprazlanmış modüldür. Çünkü (b) den

$$R' \times C' \to C'$$

$$(r', c') \mapsto r'c' \in C'$$

dir. Böylece

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d, "\partial'"'] & C \arrow[d, "\partial"] \\ R' \arrow[r, hook, "i_2"'] & R' \end{tikzcd}$$

karesi

$$h : R' \times C \;\to\; C'$$

$$\left(r',c\right) \;\mapsto\; r'c$$

fonksiyonları bir çaprazlanmış karedir.

Yalnız (iii) ve (v) göstereceğiz.

$c \in C, r' \in R'$ ve $s \in R$ için

$$\begin{aligned} sh\left(r',c\right) &= s\left(r'c\right) \\ &= \left(sr'\right)c \\ &= h\left(sr',c\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \partial' h\left(r',c\right) = \partial'\left(r'c\right) &= r'\partial'\left(c\right) \\ &= r'\partial\left(c\right) \quad \left(\because \; \partial'\big|_{C'} = \partial \right) \end{aligned}$$

dir. Diğer aksiyomlar benzer şekilde gösterilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] Whitehead, J.H.C., 1949, “Combinatorial Homotopy II”, Bull. A. M. S. 55, 453-496

[2] Porter,T., 1987, “Some Categorical Results in Theory of Crossed Modules in Commutatif Algebras”, J.Algebras 109, 415-429.

[3] Ege,U., 1997, “Çaprazlanmış modüller”, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi.

[4] Ellis,G.J., 1988, “Higher Dimensionel Crossed Modules of Algebras”, J.P.A.A. 52, 277-282.

[5] Gürmen, Ö., 2007, “İleri İtme ve Geri Çekme Çaprazlanmış Modüller”, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Doktora tezi.