T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KOMPLEKS DÜZLEMDE YAKLAŞIM TEORİSİNİN BAZI PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Özlem ÖNSEL

Balıkesir, Mayıs-2010

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KOMPLEKS DÜZLEMDE YAKLAŞIM TEORİSİNİN BAZI PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Özlem ÖNSEL

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV

Sınav Tarihi: 31.05.2010
Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV (Danışman-BAÜ)
Yrd. Doç. Dr. Burçin OKTAY (BAÜ)
Yrd. Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR (BAÜ)

Balıkesir, Mayıs-2010

ÖZET

KOMPLEKS DÜZLEMDE YAKLAŞIM
TEORİSİNİN BAZI PROBLEMLERİ

Özlem ÖNSEL
Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı
(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı: Prof.Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV)
Balıkesir, 2010

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlar ve gösterimler; ikinci bölümde ise ana teoremimizi ispatlamada kullanılacak teoremler ispatsız olarak verilmiştir.

Üçüncü bölüm, ana sonucun ispatında kullanılan bazı sonuçların ve çeşitli kaynaklardan elde edilen yardımcı sonuçların ispatına ayrılmıştır.

Son bölümde, tezin ana teoremi, kompleks düzlemde yaklaşım teorisinin bir düz teoremi ispat edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Faber polinomu / Faber Laurent polinomu / Refleksif Smirnov Orlicz uzayı / sonlu iki bağlantılı bölge / n. dereceden rasyonel fonksiyon / Cauchy singüler operatörü / Dini düzgün eğri.

ABSTRACT

SOME PROBLEMS OF APPROXIMATION THEORY ON THE COMPLEX PLANE

Özlem ÖNSEL
Balıkesir University, Institue of Science,
Department of Mathematics

Balıkesir-Turkey, 2010

This work consists of four chapters.

In the first chapter, basic definitions and notations which are used in following chapters; in the second chapter, theorems which are used to prove the essential theorem without giving proofs are given.

The third chapter is donated with auxiliary results, which are obtained for the proof of main result or get from different works and their proofs.

In the last chapter, the main results of this work, a direct theorem of approximation theory on the complex plane is proved.

KEY WORDS: Faber polynomial, Faber-Laurent polynomial, Reflexive Smirnov-Orlicz space, finite double connected domain, rational function of degree n, Cauchy singular operator, Dini smooth curve.

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

Simge	**Adı**
C	Kompleks(karmaşık) Sayılar Kümesi
R	Reel Sayılar Kümesi
$V_a^b(f)$	f fonksiyonunun $[a,b]$ üzerinde toplam salınımı
Ω	C'de İki Bağlantılı Bölge
Γ	Ω'nın dış sınırı olan sonlu uzunluklu Jordan eğrisi
L	Ω'nın iç sınırı olan sonlu uzunluklu Jordan eğrisi
G	Sınırı Γ olan sınırlı basit bağlantılı bölge
G^-	$\bar{G}$'nin tümleyeni
B	Sınırı L olan sınırsız basit bağlantılı bölge
B^-	$\bar{B}$'nin tümleyeni
T	C'de birim çember veya $[0,2\pi]$
D	C'de birim disk
D^-	$\bar{D}$'nin tümleyeni
Φ	G^-'den D^- üzerine konform dönüşüm
φ	Φ'nin tersi
F	B'den D^- üzerine konform dönüşüm
ψ	F'nin tersi
$\omega(t,h)$	Bir h fonksiyonunun düzgünlük modülü
Φ_n	$\bar{G}$ için n. dereceden Faber polinomu
F_n	$\bar{B}$ için n. dereceden Faber Laurent polinomu
$Q_{n,F}$	C'de cebirsel polinom
$L_p(\Gamma)$	Γ üzerinde L_p uzayı

$\lVert \cdot \rVert_p$	L_p normu
$E_p(G)$	G üzerinde Smirnov sınıfı
$L_M(\Gamma), L_M^*$	Γ üzerinde Orlicz uzayı
$\lVert \cdot \rVert_{L_M(\Gamma)}$	$L_M(\Gamma)$ Orlicz normu
M	N fonksiyon
N	M 'nin tamamlayıcı fonksiyonu
$E_M(G)$	G üzerinde Smirnov Orlicz sınıfı
$\lVert \cdot \rVert_{E_M(G)}$	$E_M(G)$ Smirnov Orlicz normu
$H^p(D)$	D'de analitik fonksiyonların Hardy uzayı
$M^+(X, A)$	X üzerinde negatif olmayan A- ölçülebilir fonksiyonlar kümesi
$BL(X, K)$	X normlu uzayı üzerindeki lineer ve sürekli fonksiyonellerin kümesi
$X^{'}$	X normlu uzayının normlu duali
$X^{''}$	X normlu uzayının normlu 2. duali
$a_{M,\Gamma}\ (f;)$	$f \in L_M(\Gamma)$ fonksiyonunun düzgünlük modülü
$a_{M,L}\ (f;)$	$f \in L_M(L)$ fonksiyonunun düzgünlük modülü
$a_M\ (f;)$	$f \in E_M(\Omega)$fonksiyonunun düzgünlük modülü
S_Γ	$L_1(\Gamma)$ üzerinde Cauchy singüler integrali
$K_n(\theta)$	$[-\Pi, \Pi]$ üzerinde trigonometrik polinom
$P_n(z, f)$	n. dereceden cebirsel polinom
$Q_n(z, f)$	n. dereceden rasyonel fonksiyon
$R_n(z, f)$	n. dereceden rasyonel fonksiyon

ÖNSÖZ

Bilimsel yolculuğum süresince bana önderlik eden danışmanım Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLOV'a teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca bana, her yer ve her koşulda en büyük desteği veren *sevgili anneme* teşekkürlerimi bildiririm.

Balıkesir, 2010
Özlem ÖNSEL

1. GİRİŞ

Tanım 1.1: $[a,b] \subset R$ olmak üzere sürekli bir ,

$$\gamma : [a,b] - C$$

fonksiyonuna C düzleminde bir eğri denir. $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ'ya kapalı eğri; γ eğrisi sadece $t_1 = t_2$ için $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ oluyorsa γ'ya Jordan eğrisi; $\gamma^{'}$ türevi var ve sürekli ise γ'ya diferansiyellenebilir eğri; diferansiyellenebilir γ eğrisi için eğer, $\gamma^{'}(t) \neq 0,\ t \in [a,b]$ oluyor ise γ'ya düzgün eğri denir. [1, s: 126].

Tanım 1.2: f, $[a,b]$ üzerinde tanımlı, reel değerli bir fonksiyon, P=$\{x_0, x_1, ..., x_n\}$, $[a,b]$ aralığının bir parçalanması ve **Q** , $[a,b]$ aralığının tüm P parçalanmalarının kümesi olsun. f 'nin $[a,b]$ üzerindeki toplam salınımı,

$$V_a^b(f) = \sup_{P \in Q} \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right|$$

olarak belirlenir.

Eğer, $V_a^b(f)$ sonlu ise f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sınırlı salınımlıdır denir. [2, s: 125].

Tanım 1.3: Eğer, $\gamma = \gamma(t)$ fonksiyonu sınırlı salınımlı ise bunun belittiği γ eğrisine rektifiye edilebilir(sonlu uzunluklu) eğri denir. [1, s: 128].

Tanım 1.4: Γ rektifiye edilebilir bir Jordan eğrisi; $z \in \Gamma$ ve $\varepsilon > 0$ için, $\Gamma(z,\varepsilon) := \{t \in \Gamma : |t - z| < \varepsilon\}$ ifadesi $\Gamma(z,\varepsilon)$'nun uzunluğu olsun.

Eğer,

$$\sup_{\varepsilon>0}\sup_{z\in\Gamma}\frac{1}{\varepsilon}\left|\Gamma(z,\varepsilon)\right|<\infty$$

oluyor ise Γ'ya Carleson eğrisi denir. [3].

Tanım 1.5: C içinde bir $\mathbf{S}$ kümesi verilsin. Eğer, $S_1=\mathbf{S}\cap A_1\neq\varnothing$, $S_2=\mathbf{S}\cap A_2\neq\varnothing$ ve $\mathbf{S}=S_1\cup S_2$ olacak şekilde C içinde ayrık ve açık A_1 ve A_2 kümeleri bulunamıyorsa $\mathbf{S}$ kümesine bağlantılı küme denir. [1, s: 26].

Tanım 1.6: Kompleks düzlemde bağlantılı ve açık bir kümeye bölge denir. [4, s:1].

Tanım 1.7: B, C düzleminde bir bölge ve

$$\gamma_1:[0,1]\to B\ ,\ \gamma_2:[0,1]\to B$$

kapalı iki eğri olsunlar. Eğer, aşağıdaki iki koşulu gerçekleyen sürekli bir

$$H:[0,1]\times[0,1]\to B$$

fonksiyonu bulunabilirse γ_1 ve γ_2 birbirine homotop eğridirler denir. [1, s: 150].

1. Her bir $s\in[0,1]$ için $t\mapsto H(t,s)$ kapalı bir eğridir.
2. $H(t,0)=\gamma_1(t)$, $H(t,1)=\gamma_2(t)$, $0\leq t\leq 1$.

Tanım 1.8: A, C'de bir bölge olsun. Eğer, A bağlantılı ve A içindeki her kapalı γ eğrisi yine A içinde sabit bir z_0 noktasına homotop ise A'ya basit bağlantılı bölge denir. [1, s: 150].

Tanım 1.9: Bir bölgenin sınırını oluşturan bağlantılı bileşenlerin sayısına bu bölgenin bağlantılılık sayısı; bağlantılılık sayısı 1'den fazla olan bölgeye çok bağlantılı bölge denir. [5, s: 23].

Bir bölgenin bağlantılılık sayısı 1 ise bu, basit bağlantılı bir bölgedir.

Tanım 1.10: $\{w \in C : |w| = 1\}$ üzerinde bir trigonometrik polinom

$$P \sim \sum_{m=-n}^{n} a_n e^{\text{int}} \quad , \quad a_n \in R \qquad \text{(a)}$$

biçiminde bir ifadedir.

(a)'daki n tamsayılarına P'nin dereceleri denir; $|a_n| + |a_{-n}| \neq 0$ olmak üzere en büyük n tamsayısına P'nin derecesi denir. [6, s: 2].

Tanım 1.11: B kompleks düzlemde bir bölge olmak üzere $f : B - C$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer, bir $z_0 \in B$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrileri de w_0'da aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorlarsa f fonksiyonuna z_0'da bir konform dönüşümdür denir. [1, s: 309-310].

Ω , kompleks düzlemde dış sınırı ve iç sınırı sırasıyla rektifiye edilebilr Jordan eğrileri Γ ve L (saatin dönüş yönüne göre ters yönde yönlendirilmiş) olan iki bağlantılı bölge; $G := Int\,\Gamma$, $G^{-} := Ext\,\Gamma$, $B := Int\ L$, $B^{-} := Ext\ L$ olsun. Genelliği kaybetmeden $0 \in B$ olduğunu varsayacağız. $T := \{w \in C : |w| = 1\}$, $D := Int\ \ T$, $D^{-} := Ext\ \ T$ olsun.

Ayrıca, $w = \Phi(z)$, G^{-}'den D^{-} üzerine,

$$\Phi(\propto) = \propto , \qquad \lim_{z \to \infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0 \qquad (1.1)$$

koşulları altında normalize edilen konform dönüşüm ve φ bunun tersi;

$w = F(z)$, B'den D^{-} üzerine,

$$F(0) = 0 \qquad , \qquad \lim_{z \to 0} zF(z) > 0 \qquad (1.2)$$

koşulları altında normalize edilen konform dönüşüm, ψ de bunun tersi olsun.

Tanım 1.12: h , $[0,2\pi]$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Bunun düzgünlük modülünü,

$$\omega(t,h) := \sup\left\{ \left| h(t_1) - h(t_2) \right| : t_1, t_2 \in [0,2\pi], \left| t_1 - t_2 \right| \le t \right\} , \qquad t \ge 0$$

olarak tanımlayalım.

h fonksiyonuna,

$$\int_0^{\pi} t^{-1} \omega(t,h)\,dt < \infty$$

koşulunu sağlıyorsa Dini süreklidir denir. [3].

Tanım 1.13: Γ eğrisine,

$$\Gamma : \varphi_0(\tau), \qquad 0 \le \tau \le 2\pi$$

öyle ki $\varphi_0^{'}(\tau)$ Dini sürekli ve $\neq 0$ biçiminde bir parametrizasyona sahipse, Dini-düzgün eğri denir. [7, s: 48].

Ω 'nın sınırları olan Γ ve L eğrileri Dini-düzgün ise,

$$0 < c_1 \le \left| \Phi^{'}(z) \right| \le c_2 < \infty \qquad , \quad z \in \Gamma \tag{1.3}$$

$$0 < c_3 \le \left| F^{'}(z) \right| \le c_4 < \infty \qquad , \quad z \in L \tag{1.4}$$

olur. [3].

(1)'deki koşulları sağlayan Φ fonksiyonunun $z = \propto$ 'un bir komşuluğunda Laurent açılımı,

$$\Phi(z) = \gamma z + \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{z} + \frac{\gamma_2}{z^2} + \ldots + \frac{\gamma_k}{z^k} + \ldots$$

formunda yazılabilir.

Şimdi, negatif olmayan bir n tamsayısı için,

$$\Phi^n(z) = \left(\gamma z + \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{z} + \ldots + \frac{\gamma_k}{z^k} + \ldots \right)^n \tag{1.5}$$

ifadesini düşünelim. Parantez içindeki toplamın n. kuvvet açılımını yaptığımızda ilk olarak z 'nin negatif olmayan kuvvetlerini içeren $(n+1)$ terimden oluşan bir grup, daha sonra da sonsuz sayıda negatif üslü terimleri elde ederiz.

Yani, (1.5)'ten,

$$\Phi^n(z)=\gamma^n z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + a_{n-2}^{(n)} z^{n-2} + \ldots + a_1^{(n)} z + a_0^{(n)} + \frac{b_1^{(n)}}{z} + \frac{b_2^{(n)}}{z^2} + \ldots + \frac{b_k^{(n)}}{z^k} + \ldots \tag{1.6}$$

gösterimine ulaşırız.

Tanım 1.14: (1.6) bağıntısının sağ tarafındaki ifadenin polinom kısmına $\bar{G}$ için $n.$ dereceden Faber polinomları denir. [8, s: 33-35].

Faber polinomları için,

$$\Phi_n(z)=\gamma^n z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + a_{n-2}^{(n)} z^{n-2} + \ldots + a_0^{(n)}$$

notasyonunu kullanacağız.

Φ 'nin tersi olan $z=\varphi(w)$ fonksiyonu D^-'yi G^- üzerine konform ve univalent olarak resmeder. Faber polinomları ile φ fonksiyonu arasında,

$$\frac{\varphi'(w)}{\varphi(w)-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Phi_k(z)}{w^{k+1}}, \qquad z\in G,\ |w|>1 \tag{1.7}$$

bağıntısı vardır.

Şimdi de (1.2)'deki koşulları sağlayan $w=F(z)$ dönüşümünü ele alalım. f fonksiyonu için orijin civarında,

$$F(z)=\frac{\alpha}{z}+\alpha_0+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\ldots+\alpha_k z^k+\ldots$$

açılımı geçerlidir. Bu bağıntıda her iki tarafın $n.$ dereceden kuvvetini alarak,

$$\left[F(z)\right]^n = F_n\left(\frac{1}{z}\right) - Q_{n,F}(z), \qquad z \in B$$

bağıntısını buluruz.

Burada , $F_n\left(\frac{1}{z}\right)$, z'nin negatif kuvvetlerinin polinomunu gösterirken, $Q_{n,F}(z)$, z'nin negatif olmayan kuvvetlerini içerir. $Q_{n,F}(z)$ B içinde analitik bir fonksiyondur. Eğer z noktası L'nin dışında yer alıyor ise L boyunca pozitif yönde integral alarak,

$$F_n\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F^n(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{t^n \psi'(t)}{\psi(t) - z}dt$$

elde ederiz. Bu formülden,

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t) - z} = -\sum_{n=1}^{\infty} F_n\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{t^{n+1}}, \qquad |t| > 1,\ z \in \Omega \tag{1.8}$$

bağıntısı elde edilir.

Tanım 1.15: z'nin negatif kuvvetlerinin polinomu olan yukarıdaki $F_n\left(\frac{1}{z}\right)$ polinomlarına $\bar{B}$ kümesi için Faber-Laurent polinomları denir. [8, s: 255-256].

Eğer, $0 < p < \propto$ ve f bir X kümesi üzerinde kompleks ölçülebilir bir fonksiyon ise

$$\|f\|_p = \left\{\int_X |f|^p d\mu\right\}^{\frac{1}{p}}$$

ve $L_p(\mu)$,

$$\|f\|_p < \infty$$

koşulunu gerçekleyen tüm f fonksiyonlarından oluşsun. $\|f\|_p$ normuna f'nin L_p normu denir. [9, s: 67].

Tanım 1.16: Yukarıda bahsettiğimiz $\left(L_p(\mu), \|.\|_p\right)$ uzayına X üzerinde L_p uzayı denir. [9, s: 67].

B, kompleks düzlemde rektifiye edilebir kapalı bir Γ Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu küme olsun. $\zeta = \Phi_1(z)$, B kümesini $|\zeta| < 1$ diski üzerine konform olarak resmeden fonksiyonu ve $z = \varphi_1(\zeta)$ bunun tersini; Γ_r, $z = \varphi_1(\zeta)$ dönüşümü altında $|\zeta| = r$ çemberlerinin görüntüsü olan eğrileri göstersin.

Tanım 1.17: B içinde analitik olup

$$\sup_{0<r<1} \int_{\Gamma_r} |f(z)|^p \, ds < \infty$$

özelliğini sağlayan ve özdeş olarak sıfıra eşit olmayan tüm f fonksiyonlarının oluşturduğu kümeye E_p Smirnov sınıfı denir. [10, s:438-439].

Tanım 1.18: Bir $M(u) : R \rightarrow R^+$ fonksiyonu $R := (-\infty, \infty)$ ve $R^+ := (0, \infty)$ olmak üzere,

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t) dt$$

gösterimine sahipse bu $M(u)$ fonksiyonuna bir N- fonksiyon denir.

Burada, $p(t)$ sağdan sürekli, $t \geq 0$ için azalmayan, $t > 0$ için pozitif ve $p(0) = 0$, $\lim_{t \to \infty} p(t) = \infty$ koşulunu sağlayan bir fonksiyondur. [11, s:6].

Tanım 1.19: $N(v) := \int_0^{|v|} q(s) ds$ fonksiyonuna N-fonksiyonun tamamlayıcı fonksiyonu denir. Burada, $q(s) := \sup_{p(t) \leq s} t$, $s \geq 0$'dir. [11, s.11].

M bir N-fonksiyon ve N bunun tamamlayıcı fonksiyonu olsun. $L_M(\Gamma)$ ile $f : \Gamma - C$ Lebesgue ölçülebilir ve bir $a > 0$ sayısı için,

$$\int_{\Gamma} M\left[\alpha |f(z)|\right] |dz| < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların vektör uzayını göstereceğiz.

$L_M(\Gamma)$ uzayı,

$$\|f\|_{L_M(\Gamma)} := \sup\left\{ \int_{\Gamma} |f(z)g(z)||dz| : g \in L_N(\Gamma), \rho(g;N) \le 1 \right\}$$

normu yardımıyla bir Banach uzayı haline gelir. Burada,

$$\rho(g;N) := \int_{\Gamma} N\left[|g(z)|\right] |dz| \text{ 'dir.}$$

Tanım 1.20: $\left(L_M(\Gamma), \|\cdot\|_{L_M(\Gamma)}\right)$ Banach uzayına Γ üzerinde Orlicz uzayı; $\|\cdot\|_{L_M(\Gamma)}$ normuna da Orlicz normu denir. [3].

Tanım 1.21: $f : \Gamma \cup L^- \to C$ Lebesgue ölçülebilir fonksiyonu ve bir $\alpha > 0$ sayısı için,

$$\int_{\Gamma \cup L^-} M\left[\alpha | f(z)|\right] |dz| < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların,

$$\|f\|_{L_M(\Gamma \cup L^-)} := \sup\left\{ \int_{\Gamma \cup L^-} | f(z)g(z)|| dz| : g \in L_N(\Gamma \cup L^-), \rho(g;N) \le 1 \right\}$$

normuyla oluşturduğu Banach uzayına $\Gamma \cup L^-$ üzerinde Orlicz uzayı denir, $\left(L_M(\Gamma \cup L^-), \|\cdot\|_{\Gamma \cup L^-}\right)$ ile gösterilir.

Γ_r, $\{w \in C : |w| = r, 0 < r < 1\}$ çemberinin D'den G üzerine bir konform dönüşüm altındaki görüntüsü ve M bir N-fonksiyon olsun.

Tanım 1.22: G'de analitik olan bir f fonksiyonu için,

$$\int_{\Gamma_r} M\left[\,|\,f(z)|\,\right]|\,dz\,| < c_\Gamma < \infty, \qquad 0 < r < 1$$

koşulunu sağlayacak biçimde r'den bağımsız bir $c_\Gamma > 0$ sabiti varsa f $E_M(G)$ Smirnov-Orlicz sınıfına aittir denir. [3].

Uyarı 1.23: $E_M(G)$ sınıfındaki her fonksiyon Γ üzerinde h.h.y açısal limitlere sahiptir ve sınır fonksiyonu $L_M(\Gamma)$'ya aittir.

$\forall f \in E_M(G)$ için $E_M(G)$ normu,

$$\|f\|_{E_M(G)} := \|f\|_{L_M(\Gamma)} \tag{1.9}$$

olarak tanımlanabilir. [12].

L_r, $\{w \in C : |w| = r \;, 0 < r < 1\}$ çemberinin D'den B^- üzerine bir konform dönüşüm altındaki görüntüsü olsun.

Tanım 1.24: B^-**'de** analitik bir f fonksiyonu için

$$\int_{L_r} M\left[\,|\,f(z)|\,\right]|\,dz\,| < c_L < \infty \quad , \qquad 0 < r < 1$$

koşulunu sağlayacak şekilde r'den bağımsız bir $c_L > 0$ sabiti varsa , f , $E_M(B^-)$ Smirnov-Orlicz sınıfına aittir denir.

Uyarı 1.23'te olduğu gibi $E_M(B^-)$ sınıfındaki her fonksiyon L üzerinde h.h.y. açısal limitlere sahiptir ve sınır fonksiyonu $L_M(L)$'ye aittir.

Buna göre, (1.9)'da olduğu gibi, $\forall f \in E_M(B^-)$ için, $E_M(B^-)$ normu,

$$\|f\|_{E_M(B^-)} := \|f\|_{L_M(L)}$$

şeklinde tanımlanabilir.

Uyarı 1.25: Tanım 1.22 ve 1.24'teki M N-fonksiyonu

$$M(x) := M(x,p) := x^p \qquad 1 < p < \propto \ ,$$

olarak tanımlandığında elde ettiğimiz $E_M(G)$ ve $E_M(B^-)$ Smirnov-Orlicz sınıfları sırasıyla $E_p(G)$ ve $E_p(B^-)$ Smirnov sınıflarıyla çakışır. [3].

Tanım 1.26: Ω, çok bağlantılı bir bölge ve f Ω'da analitik bir fonksiyon olsun. Eğer, Ω içinde $\{C_n\}$ sınırları , sonlu sayıda rektifiye edilebilir Jordan eğrilerinden oluşan Δ_n $(n \in N^+)$ kümelerinin bir dizisi, $\forall$ $\mathbf{K} \subset \Omega$ kompaktı verildiğinde **K**'ya **bağlı** $\exists n_0 \in N :$ $n \geq n_0$ için $\Delta_n \supset \mathbf{K}$, $mes\, C_n < \propto$ ve

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{C_n} |f(z)|^p \, |dz| < \infty \qquad , \quad 1 < p < \infty$$

olacak şekilde mevcutsa f, $E_p(\Omega)$ Smirnov sınıfına aittir denir. [13, s:182-183].

Tanım 1.27: M , bir N fonksiyon; Ω**,** çok bağlantılı bir bölge ve f, Ω'da analitik bir fonksiyon olsun. Eğer, Ω içinde $\{C_n\}$ sınırları, sonlu sayıda rektifiye edilebilir Jordan eğrilerinden oluşan Δ_n $(n \in N^+)$ kümelerinin bir dizisi $\forall$ $\mathbf{K} \subset \Omega$ kompaktı verildiğinde **K**'ya **bağlı** $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ **:** $n \geq n_0$ için $\Delta_n \supset \mathbf{K}$**,** $mes\, C_n < \propto$ ve

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{C_n} M\big(|f(z)| \big) |dz| < \infty$$

olacak şekilde mevcutsa f, $E_M(\Omega)$ Smirnov-Orlicz sınıfına aittir denir.

İleride göstereceğiz ki, $\forall f \in E_M(\Omega)$ için f'nin sınır fonksiyonu $L_M(\Gamma \cup L^-)$'ye aittir. f fonksiyonunun Γ üzerindeki sınır değerlerinin oluşturduğu fonksiyon $L_M(\Gamma)$'ya ; L üzerindeki sınır değerlerinin oluşturduğu fonksiyon da $L_M(L)$'ye aittir.

Buna göre, $E_M(\Omega)$ normu yukarıda söz ettiğimiz özellikten dolayı, $\forall f \in E_M(\Omega)$ için (1.9)'dan,

$$\|f\|_{E_M(\Omega)} := \|f\|_{L_M\left(\Gamma \cup L^-\right)}$$

olarak tanımlanabilir.

Tanım 1.28: Tanım bölgesi bir X lineer uzayı (vektör uzayı) ve değer bölgesi bunun sayı cismi olan bir lineer dönüşüme lineer fonksiyonel adı verilir.

Bir X normlu uzayı için bu uzay üzerindeki lineer ve sürekli bütün fonksiyonellerin oluşturduğu Banach uzayı $BL(X,K)$, $K := R$ veya C notasyonu ile gösterilir. [14, s:168].

Tanım 1.29: $BL(X,K)$ Banach uzayına X normlu uzayının normlu duali denir ve X' ile gösterilir. [14, s:168].

Tanım 1.30: $BL(X,K)$ normlu uzayının duali olan $BL(X',K) = (X')'$ uzayına da X normlu uzayının ikinci duali denir ve X'' ile gösterilir. [14, s: 204].

X normlu uzayı üzerinde belirli bir $x \in X$ için,

$$g_x : X' \to K \quad , \quad g_x(f) = f(x)$$

lineer ve sürekli fonksiyonelini tanımlayalım.

Tanım 1.31: $\mathbf{G} : X \to X''$, $\mathbf{G}(x) = g_x$ dönüşümüne X normlu uzayından X'' içine doğal dönüşüm denir. [14, s: 206-207].

Tanım 1.32: X normlu uzayı için $\mathbf{G}$ dönüşümü örten yani,

$$\mathbf{G}(X) = X''$$

ise X normlu uzayına refleksif normlu uzay denir. [14, s: 208].

Tanım 1.33: $\zeta \in \Gamma$ için $\zeta_h \in \Gamma$ noktası

$$\zeta_h := \varphi\left(\Phi(\zeta)e^{ih}\right), \quad h \in [0,2\pi]$$

olarak tanımlanır. [3].

Tanım 1.34: $\zeta \in L$ için $\zeta_{1h} \in L$ noktası

$$\zeta_{1h} := \psi\left(F(\zeta)e^{ih}\right), \quad h \in [0,2\pi]$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1.35: $\zeta_h \in \Gamma$ noktası ve $f \in L_M(\Gamma)$ için $T_h(f)$ fonksiyonu,

$$T_h f(\zeta) := f(\zeta_h), \quad \zeta \in \Gamma \tag{1.10}$$

olarak tanımlanır. [3].

Tanım 1.36: $\zeta_{1h} \in L$ noktası ve $f \in L_M(L)$ için,

$$T_{1h} f(\zeta) := f(\zeta_{1h}), \quad \zeta \in L \tag{1.11}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1.37: $f \in L_M(\Gamma)$ için düzgünlük modülü,

$$\omega_{M,\Gamma}(\delta, f) := \sup_{|h| \le \delta} \left\| f - T_h(f) \right\|_{L_M(\Gamma)}, \quad \delta \ge 0 \tag{1.12}$$

olarak tanımlanır. [3].

Bu fonksiyon,

- $\omega_{M,\Gamma}(0, f) = 0$
- $\omega_{M,\Gamma}(\delta, f) \ge 0$, $\quad \delta > 0$
- $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega_{M,\Gamma}(\delta, f) = 0$
- $\omega_{M,\Gamma}(\delta, f + g) \le \omega_{M,\Gamma}(\delta, f) + \omega_{M,\Gamma}(\delta, g)$, $\quad f, g \in E_M(G)$
- $n \in N$ olmak üzere,

$$\omega_{M,\Gamma}(n\delta, f) \le n\, \omega_{M,\Gamma}(\delta, f)$$

özelliklerine sahiptir.

Tanım 1.38: $f \in L_M(L)$ için düzgünlük modülü,

$$\omega_{M,L}(\delta, f) := \sup_{|h|\leq\delta} \left\| f - T_{1h} f \right\|_{L_M(L)}, \quad \delta \geq 0 \tag{1.13}$$

biçiminde tanımlanır.

Bu fonksiyon da,

- $\omega_{M,L}(\delta,0) = 0$
- $\omega_{M,L}(\delta, f) \geq 0 \quad , \quad \delta > 0$
- $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega_{M,L}(\delta, f) = 0$
- $\omega_{M,L}(\delta, f+g) \leq \omega_{M,L}(\delta, f) + \omega_{M,L}(\delta, g) \quad , \quad f, g \in E_M(B^-)$
- $n \in N$ olmak üzere,

$$\omega_{M,L}(n\delta, f) \leq n\,\omega_{M,L}(\delta, f)$$

özelliklerine sahiptir.

Tanım 1.39: $f \in E_M(\Omega)$ için düzgünlük modülü,

$$\omega_M(\delta, f) := \omega_{M,\Gamma}(\delta, f) + \omega_{M,L}(\delta, f) \tag{1.14}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1.40: Γ**,** rektifiye edilebilir Jordan eğrisi**,** $f \in L_1(\Gamma)$ olsun. f_Γ^+, f_Γ^- fonksiyonları,

$$f_\Gamma^+(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad , \quad z \in G$$

$$f_\Gamma^-(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad , \quad z \in G^- \tag{1.15}$$

biçiminde tanımlanır. f_Γ^+ ve f_Γ^- fonksiyonları sırasıyla G ve G^- içinde analitiktir. $f_\Gamma^-(\infty) = 0$ 'dır. [3].

Tanım 1.41: Γ, rektifiye edilebilir Jordan eğrisi olmak üzere $f \in L_1(\Gamma)$ olsun.

$$S_\Gamma f(z_0) := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma \cap \{\zeta : |\zeta - z_0| \geq \varepsilon\}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} dz \quad , \quad z_0 \in \Gamma$$

limiti varsa bu limite f fonksiyonunun z_0 noktasında Cauchy singüler integrali denir. [7].

f_Γ^+ ve f_Γ^- fonksiyonlarından biri Γ eğrisi üzerinde h.h.y açısal limitlere sahipse $S_\Gamma f(z)$, Γ üzerinde h.h.y mevcuttur ve diğer fonksiyon da Γ üzerinde h.h.y açısal limitlere sahiptir. Tersine, $S_\Gamma f(z)$, Γ üzerinde h.h.y mevcutsa f_Γ^+ ve f_Γ^- herikisi de Γ üzerinde h.h.y açısal limitlere sahiptir.

Her iki durumda da ,

$$\left.\begin{aligned} f_\Gamma^+(z) &= S_\Gamma f(z) + \frac{1}{2} f(z) \\ f_\Gamma^-(z) &= S_\Gamma f(z) - \frac{1}{2} f(z) \end{aligned}\right\} , \quad \Gamma \text{ üzerinde h.h.y.} \qquad (1.16)$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan,

$$f = f_\Gamma^+ - f_\Gamma^- \quad , \qquad \Gamma \text{ üzerinde h.h.y.}$$

elde edilir. [3].

Tanım 1.42: $S_\Gamma : f \mapsto S_\Gamma f$ lineer operatörüne Cauchy singüler operatörü denir. [3].

Tanım 1.43: $\sum_{n=-k}^{k} a_n e^{\text{int}}$ toplamı sonlu ise $\forall t \in T$ için tanımlı bir

$$P(t) = \sum_{n=-k}^{k} a_n e^{\text{int}}$$

fonksiyonu belirtir. Bu formüldeki a_n katsayıları

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_T P(t)e^{-\mathrm{int}}\,dt$$

olarak hesaplanabilir. [6, s:2].

Tanım 1.44: T üzerinde bir trigonometrik seri

$$S(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\mathrm{int}}$$

formunda bir ifadedir. [6, s:3].

Tanım 1.45: $f \in L_1(T)$ olsun.

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_T P(t)e^{-\mathrm{int}}\,dt$$

bağıntısından hareketle f ’nin n. Fourier katsayısını

$$\hat{f}\,(n) = \frac{1}{2\pi}\int_T f(t)e^{-\mathrm{int}}\,dt$$

biçiminde tanımlarız. [6, s: 3].

Tanım 1.46: $f \in L_1(T)$ fonksiyonunun $S[f]$ Fourier serisi

$$S[f] \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}\,(n)e^{\mathrm{int}} \qquad (1.17)$$

trigonometrik serisidir. [6, s: 3].

Tanım 1.47: Reel u değişkenine göre reel değerli $M(u)$ fonksiyonu ,

$$M\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) \le \frac{1}{2}\left[M(u_1)+M(u_2)\right] \quad , \quad \forall\, u_1, u_2 \text{ için}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $M(u)$’ya bir konveks fonksiyon denir. [11, s: 1].

Uyarı 1.48: N fonksiyonlar konvekstir. [11, s: 7].

Tanım 1.49: B, R^2'de bir bölge ve $u : B \to R$ ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon olsun. Eğer,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

oluyorsa u , B'de harmonik bir fonksiyondur denir.Burada $\nabla^2(u) = 0$ denklemine Laplace denklemi denir. [1, s: 94].

Tanım 1.50: Eğer, $U(z)$ $|z| < \mathrm{R}$ için harmonikse R>1 ve $0 \le r < 1$ ise,

$$U(r e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 - r^2) U(e^{it})}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)} dt$$

ifadesine U'nun Poisson integral gösterimi denir.

Burada,

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\theta} \quad , \quad |z| < 1 \text{ için}$$

Poisson çekirdeğidir. [15, s: 2].

Tanım 1.51: $|z| < 1$ diskinde analitik bir fonksiyon $0 < p \le \infty$ olmak üzere

$$\lim_{r \to 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(r e^{i\theta}) \right|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

koşulunu sağlıyorsa $f \in H^p$ sınıfındandır denir. [13, s: 1-2].

Tanım 1.52: $M(u)$ bir N fonksiyon olmak üzere, $M(2u) \le kM(u)$, $(u \ge u_0)$ olacak şekilde bir $k > 0$ sabiti ve $u_0 \ge 0$ varsa $M(u)$, u'nun büyük değerleri için Δ_2 koşulunu sağlar denir. [11, s: 23].

2. ÖN BİLGİLER

Teorem 2.1: (Genelleştirilmiş Parseval Özdeşliği)

Eğer, $f(x) \in L_2$, $\varphi(x) \in L_2$ öyle ki a_n, b_n $f(x)$ için Fourier katsayıları ve α_n, β_n $\varphi(x)$ için Fourier katsayıları ise

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi(x)dx = \frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n)$$

Parseval Özdeşliği'ni elde ederiz. [16, s: 225-228].

Uyarı 2.2: f , sınırlı salınımlı ve $\varphi \in L_1$ ise bu özdeşlik yine geçerlidir. [16, s:225-228].

Teorem 2.3: (Hölder Eşitsizliği)

Bir $u(x) \in L_M^*$ ve $v(x) \in L_N^*$ fonksiyon çifti için

$$\left| \int_{G_0} u(x)v(x)dx \right| \leq \| u \|_M \| v \|_N$$

eşitsizliği gerçekleşir. [11, s: 74].

Teorem 2.4: (Fatou Lemması)

(X, A, μ) bir ölçü uzayı ve f_n de $M^+(X, A)$'daki fonksiyonların bir dizisi ise

$$\int_X \liminf_{n \to \infty} f_n d\mu : \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu .$$ [2, s: 66].

Teorem 2.5: (Fubini Teoremi)

$f : X \times Y - R$ bir $\mu \times \upsilon$- integrallenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\int f \, d(\mu \times \upsilon) = \iint f \, d\mu \, d\upsilon = \iint f \, d\upsilon \, d\mu$$

tekrarlı integralleri mevcuttur. [17, s: 212].

Teorem 2.6: (Jensen Eşitsizliği)

μ, bir A kümesi üzerinde tanımlı M σ cebiri üzerinde pozitif bir ölçüm olsun öyle ki $\mu(A)=1$. Eğer, f, $L_1(\mu)$ içinde bir reel değerli fonksiyonsa $\forall x \in A$ için $a < f(x) < b$ ise ve φ, (a,b) üzerinde konveks ise

$$\varphi\left(\int_A f\, d\mu\right) \leq \int_A (\varphi \circ f)\, d\mu \,.$$ [9, s: 63].

Uyarı 2.7: Bu teorem**,** $a = -\infty$, $b = \infty$ durumları haricen geçerlidir. [9, s:63].

Teorem 2.8: Bir M N fonksiyonu için,

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{M(2x)}{M(x)} < \infty$$

oluyorsa M Δ_2 koşulunu sağlar. [3].

Teorem 2.9: $L_M(\Gamma)$ Orlicz uzayının refleksif olması için gerek ve yeter koşul M N fonksiyonu ve bunun tamamlayıcı fonksiyonunun her ikisinin de Δ_2 koşulunu sağlamasıdır. [18, s: 113].

Teorem 2.10: f, $|z|<1$ içinde analitik bir fonksiyon olsun. $f \in H^1$ olması için gerek ve yeter koşul

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\varphi(t)\,dt \qquad (2.1)$$

olacak şekilde bir $\varphi \in L_1$ fonksiyonunun bulunmasıdır. Bu durumda, $\varphi(t) = f(e^{it})$ h.h.y. [13, s: 34].

Teorem 2.11: $f(z)$, $|z|<1$ içinde analitik bir fonksiyon olsun. $f \in H^p$ olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun, bir $\varphi \in L_p$ $(1 < p < \infty)$ fonksiyonunun Poisson integrali biçiminde ifade edilebilmesidir. [13, s: 34].

Teorem 2.12: Γ, sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ve $L_M(\Gamma)$, Γ üzerinde refleksif bir Orlicz uzayı olsun. Öyleyse, S_Γ singüler operatörü $L_M(\Gamma)$ üzerinde sınırlıdır; yani, $\forall f \in L_M(\Gamma)$ ve bir $c_5 > 0$ sabiti için,

$$\| S_\Gamma f \|_{L_M(\Gamma)} \leq c_5 \| f \|_{L_M(\Gamma)} \tag{2.2}$$

olur. [19]

3.YARDIMCI SONUÇLAR

Teorem 3.1: Γ**,** Dini düzgün bir eğri ve

$$f \in L_1(\Gamma) \text{ ise } f \circ \varphi \in L_1(T)\text{'dir.} \tag{3.1}$$

İspat 3.1: (1.1)'den $z = \varphi(w)$, $z \in \Gamma$, $w \in T$ olmak üzere

$$\int_T |(f \circ \varphi)(w)||dw| = \int_\Gamma |(f \circ \varphi)(\Phi(z))||d\,\Phi(z)|$$

$$= \int_\Gamma |f(z)||\Phi'(z)||dz|$$

(1.3)'ten ve $f \in L_1(\Gamma)$ olduğundan,

$$\leq \int_\Gamma |f(z)|\, c\, |dz| < \infty$$

Buradan, $f \circ \varphi \in L_1(T)$ elde edilir.

Teorem 3.2: Γ , kompleks düzlemde rektifiye edilebilir bir Jordan eğrisi olmak üzere,

$$L_M(\Gamma) \subset L_1(\Gamma)\text{'dir. [18, s: 50].} \tag{3.2}$$

İspat 3.2: $f \in L_M(\Gamma)$ olsun. Bu durumda, bir $\alpha > 0$ için

$$\int_\Gamma M[\alpha|f(z)|]|dz| \leq c < \infty$$

olur.

M , konveks bir fonksiyon olduğundan a, b sabitleri için, $M(x) \geq ax + b$ dir.

$$\Rightarrow a\alpha|f(z)| + b \leq M[\alpha|f(z)|]$$

$$\Rightarrow \int_\Gamma (a\alpha|f(z)| + b)|dz| \leq \int_\Gamma M[\alpha|f(z)|]|dz|$$

$$\Rightarrow a\alpha\int_\Gamma |f(z)||dz| + b\int_\Gamma |dz| \leq \int_\Gamma M[\alpha|f(z)|]|dz| < \infty$$

Buradan, $f \in L_M(\Gamma)$ ve $\int_\Gamma |dz| = mes\,\Gamma < \infty$ olup $f \in L_1(\Gamma)$'dır.

Teorem 3.3: G **,** kompleks düzlemde basit bağlantılı bir bölge olmak üzere,

$$E_M(G) \subset E_1(G). \tag{3.3}$$

İspat 3.3: $f \in E_M(G)$ olsun. Bu durumda, Tanım 1.22'den,

$$\int_{\Gamma_r} M[|f(z)|]\,|dz| \le c_\Gamma < \infty .$$

Teorem 3.2'dekine benzer şekilde M bir konveks fonksiyon olduğundan, a,b sabitleri için,

$$M(x) \ge ax + b$$

$$\Rightarrow M[f(z)] \ge a|f(z)| + b$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_r} (af(z)+b)|dz| \le \int_{\Gamma_r} M[|f(z)|]\,|dz| < \infty$$

$$\Rightarrow a\int_{\Gamma_r} |f(z)||dz| + b\,mes\,\Gamma_r \le \int_{\Gamma_r} M[|f(z)|]\,|dz| \le c_\Gamma < \infty$$

Yine, $f \in E_M(G)$ ve $mes\,\Gamma_r < \propto$ olduğundan,

$$\int_{\Gamma_r} |f(z)||dz| \le c_\Gamma < \infty$$

elde edilir.

Buradan, $f \in E_1(G)$'dir.

Teorem 3.4: G **,** kompleks düzlemde basit bağlantılı bir bölge ve Γ bunun Dini düzgün sınırı olsun. O halde, $\forall f \in E_M(G)$ için f'nin sınır fonksiyonu $L_M(\Gamma)$'ya aittir. [12].

İspat 3.4: $f \in E_M(G)$ olsun. Yine tanım 1.22'den,

$$\int_{\Gamma_r} M\left[\left|f(z)\right|\right]\left|dz\right| \leq c_\Gamma < \infty$$

olur.

$\varphi_1 : D - G$ Riemann konform dönüşümü ve Φ_1 bunun tersi olmak üzere, $z = \varphi_1(w)$ değişken değiştirmesi yaparak,

$$\int_{\Gamma} M\left[\left|f(z)\right|\right]\left|dz\right| = \int_{|w|=1} M\left[\left|f(\varphi_1(w))\right|\right]\left|\varphi_1^{'}(w)\right|\left|dw\right|$$

$$= \int_{|w|=1} \liminf_{r\to 1} M\left[\left|(f \circ \varphi_1)(rw)\right|\right]\left|r\varphi_1^{'}(rw)\right|\left|dw\right|$$

Fatou Lemması'ndan,

$$\leq \liminf_{r\to 1} \int_{|w|=1} M\left[\left|(f \circ \varphi_1)(rw)\right|\right]\left|r\varphi_1^{'}(rw)\right|\left|dw\right|$$

$rw = \Phi_1(z)$ değişken değiştirmesi yapıldığında, $f \in E_M(G)$ olduğundan,

$$\int_{\Gamma} M\left[\left|f(z)\right|\right]\left|dz\right| \leq \liminf_{r\to 1} \int_{\Gamma_r} M\left[\left|f(z)\right|\right]\left|dz\right| < \infty$$

olur. Bu ise $a = 1$ için f 'nin sınır fonksiyonunun $L_M(\Gamma)$'ya ait olması demektir.

Teorem 3.5: $f \in L_M(T)$ ve $L_M(T)$ refleksif olsun. Bu durumda,

$$f^{+}(w) := \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{f(\tau)}{\tau - w}\,d\tau \quad , \qquad w \in D$$

fonksiyonu $E_M(D)$ Smirnov-Orlicz sınıfındandır.

İspat 3.5: $f \in L_M(T)$ olsun. Bu durumda, $L_M(T)$ refleksif bir Orlicz uzayı olduğundan, $\exists p,q : 1 < p < q < \propto$ vardır ki, $L_q(T) \subset L_M(T) \subset L_p(T)$ olup buradan da $f \in L_p(T)$ elde edilir. [19].

[20]'den,

$$f^{+}(w) := \frac{1}{2\pi i}\int_{T}\frac{f(\tau)}{\tau - w}\,d\tau, \quad w\in D$$

$H^{p}(D)$ sınıfından bir fonksiyondur ve teorem 2.10 ile 2.11'den,

$$f^{+}(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f^{+}\left(e^{it}\right)P_{r}(\theta - t)\,dt \quad , \quad t\in[0,2\pi]$$

Poisson integral gösterimine sahiptir. Buradan,

$$\mu_{\theta}(t) := \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{t} P_{r}(\theta - t)\,dt$$

için,

$$f^{+}(w) := \int_{0}^{2\pi} f^{+}\left(e^{it}\right)d\,\mu_{\theta}(t)$$

yazılabilir.

Bu en son bağıntıda, her iki tarafın mutlak değerini alarak M N fonksiyonu için,

$$M\left[\left|f^{+}(w)\right|\right] = M\left[\left|\int_{0}^{2\pi} f^{+}\left(e^{it}\right)d\,\mu_{\theta}(t)\right|\right]$$

elde edilir.

Bu bağıntıda da $w = r\,e^{i\theta}$, $0 < r < 1$, $\theta\in[0,2\pi]$ değişken değiştirmesi yapıp her iki tarafta 0'dan 2π 'ye integral alarak,

$$\int_{0}^{2\pi} M\left[\left|f^{+}\left(r\,e^{i\theta}\right)\right|\right]d\theta = \int_{0}^{2\pi} M\left[\left|\int_{0}^{2\pi} f^{+}\left(e^{it}\right)d\,\mu_{\theta}(t)\right|\right]d\theta$$

elde edilir.

Şimdi, Jensen Eşitsizliği'nden,

$$\int_0^{2\pi} M\left[\int_0^{2\pi} \left|f^+\left(e^{it}\right)\right| d\,\mu_\theta(t)\right] d\theta \le \int_0^{2\pi} \left\{\int_0^{2\pi} M\left[\left|f^+\left(e^{it}\right)\right|\right] d\,\mu_\theta(t)\right\} d\theta$$

bulunur.

Burada, $\mu_\theta(t)$'nin tanımından,

$$\int_0^{2\pi} M\left[\left|f^+\left(r\,e^{i\theta}\right)\right|\right] d\theta \le \int_0^{2\pi} \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\left[\left|f^+\left(e^{it}\right)\right|\right] P_r(\theta-t)\,dt\right\} d\theta .$$

Fubini Teoremi'nden

$$\int_0^{2\pi} \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\left[\left|f^+\left(e^{it}\right)\right|\right] P_r(\theta-t)\,dt\right\} d\theta = \int_0^{2\pi} M\left[\left|f^+\left(e^{it}\right)\right|\right] dt\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)\,d\theta$$

olup,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)\,d\theta = 1$$

olduğundan,

$$\int_0^{2\pi} M\left[\left|f^+\left(r\,e^{i\theta}\right)\right|\right] d\theta \le \int_0^{2\pi} M\left[\left|f^+\left(e^{it}\right)\right|\right] dt$$

elde edilir.

Şimdi, 1.16'dan görmek mümkündür ki,

$$f^+(\tau) = \frac{1}{2} f(\tau) + S_f(\tau), \qquad \tau \in T .$$

Bu bağıntıda her iki tarafta $L_M(T)$ üzerinden norm alınırsa,

$$\left\|f^+\right\|_{L_M(T)} \le \frac{1}{2}\left\|f\right\|_{L_M(T)} + \left\|S_f\right\|_{L_M(T)}$$

olduğu görülür. (2.2)'den,

$$\left\|f^{+}\right\|_{L_M(T)} \leq \frac{1}{2}\|f\|_{L_M(T)} + \left\|S_f\right\|_{L_M(T)} \leq \frac{1}{2}\|f\|_{L_M(T)} + c\|f\|_{L_M(T)}$$

$$\leq k\|f\|_{L_M(T)} .$$

Buna göre,

$$\int_0^{2\pi} M\left[\left|f^{+}\left(r e^{i\theta}\right)\right|\right] d\theta = \int_T M\left[\left|f^{+}(r\tau)\right|\right]|d\tau|, \qquad e^{i\theta} = \tau$$

$$\leq \int_T M\left[\left|f^{+}(\tilde{\tau})\right|\right]|d\tilde{\tau}|, \qquad e^{it} = \tilde{\tau}$$

$$\leq \int_T M\left[k\left|f(\tilde{\tau})\right|\right]|d\tilde{\tau}| \leq c_T < \infty \qquad k>0.$$

Bu ise, $f^{+} \in E_M(D)$ olduğunu ispat eder.

Teorem 3.6: $f \in L_M(\Gamma)$ ve $L_M(\Gamma)$ refleksif olsun. O halde,

$$f^{+}(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad , \quad z \in G$$

fonksiyonu $E_M(G)$ Smirnov-Orlicz sınıfına aittir.

İspat 3.6: $\varphi_1 : D \to G$ Riemann konform dönüşümü, Φ_1 bunun tersi ve $f \in L_M(\Gamma)$ olsun. Bu durumda, $f_0(w) := f(\varphi_1(w)) \in L_M(T)$ olduğu görülür. $L_M(\Gamma)$ refleksif olduğundan $L_q(\Gamma) \subset L_M(\Gamma) \subset L_p(\Gamma)$ olacak şekilde $1 < q < p < \infty$ koşulunu sağlayan p, q sayıları bulunabilir. Böylece, $f \in L_M(\Gamma)$ ise $f \in L_p(\Gamma)$ olur. Bu takdirde, [20]'den, $f^{+} \in E_p(G)$ olup h.h. $z \in \Gamma$ için,

$$f^{+}(z) = \frac{1}{2} f(z) + S_f(z)$$

ve (2.2)'den,

$$\left\|S_f\right\|_{L_M(\Gamma)} \leq c\|f\|_{L_M(\Gamma)}$$

olduğundan,

$$\left\|f^{+}\right\|_{L_M(\Gamma)} \leq \frac{1}{2}\|f\|_{L_M(\Gamma)} + \left\|S_f\right\|_{L_M(\Gamma)}$$

$$\leq \frac{1}{2}\|f\|_{L_M(\Gamma)} + c\|f\|_{L_M(\Gamma)}$$

$$\leq k\|f\|_{L_M(\Gamma)}$$

elde edilir. Böylece, $f^+ \in L_M(\Gamma)$ olduğu görülür. Eğer, Γ Dini düzgün ise $f_0^+(w) := f^+(\varphi_1(w)) \in L_M(T)$ olup teorem 3.5'ten ve tanım 1.40'tan $f_0^+ \in E_M(D)$ olur.

Bunun sonucu olarak da,

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} M\left[\left|f_0^+\left(r e^{i\theta}\right)\right|\right] d\theta \leq c_{f_0} < \infty$$

$$= \sup_{0<r<1} \int_{|w|=r} M\left[\left|f_0^+(w)\right|\right] |dw| \leq c_{f_0} < \infty$$

$$\Rightarrow \sup_{0<r<1} \int_{\Gamma_r} M\left[\left|f_0^+(\Phi_1(z))\right|\right] \left|\Phi_1'(z)\right| |dz| < \infty$$

$$\Rightarrow \sup_{0<r<1} \int_{\Gamma_r} M\left[\left|f^+(z)\right|\right] |dz| < \infty$$

Buradan, $f^+ \in E_M(G)$ elde edilir.

Not: Teorem 3.5 ve 3.6'da S_f, f'nin tanım 1.41'de vermiş olduğumuz Cauchy singüler integralidir.

Teorem 3.7: M bir N fonksiyon ; G, kompleks düzlemde basit bağlantılı bir bölge ; Γ, G'nin sınırı ve $\tilde{\Gamma}$, G içinde kapalı bir eğri öyle ki Γ ve $\tilde{\Gamma}$ rektifiye edilebilir Jordan eğrileri olsunlar.

Öyleyse, $\forall f \in E_M(G)$ için,

$$\| f \|_{L_M(\tilde{\Gamma})} \leq k \| f \|_{L_M(\Gamma)} . \qquad (3.4)$$

İspat 3.7: $f \in E_M(G)$ olsun. (3.3)'ten $f \in E_1(G)$ olup,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \ , \ z \in G$$

Cauchy integral gösterimine sahiptir. Buradan $z \in \tilde{\Gamma}$ için,

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|} |d\zeta|$$

Hölder Eşitsizliği'nden,

$$\leq \frac{1}{2\pi} \| f \|_{L_M(\Gamma)} \left\| \frac{1}{\zeta - z} \right\|_{L_N(\Gamma)}$$

$$\frac{1}{\zeta - z} \leq k < \infty$$

olduğundan,

$$\leq \frac{1}{2\pi} \| f \|_{L_M(\Gamma)} \| k \|_{L_N(\Gamma)}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \| f \|_{L_M(\Gamma)} M_0 \quad , \quad M_0 > 0 \ \text{ sabit}$$

Eşitsizliğin her iki tarafını $\rho(g;N) \leq 1$ özelliğindeki $g \in L_N(\tilde{\Gamma})$ fonksiyonlarının mutlak değeri ile çarparak ve L üzerinden integral alarak,

$$\int_{\tilde{\Gamma}} |f(z)| |g(z)| |dz| \leq \int_{\tilde{\Gamma}} \frac{1}{2\pi} \| f \|_{L_M(\Gamma)} M_0 |g(z)| |dz|$$

elde edilir. Her iki tarafta $\rho(g;N) \leq 1$ üzerinden supremum aldığımızda,

$$\| f \|_{L_M(\tilde{\Gamma})} = \sup \int_{\tilde{\Gamma}} |f(z)| |g(z)| |dz|$$

$$\leq \sup \int_{\tilde{\Gamma}} \frac{M_0}{2\pi} \| f \|_{L_M(\Gamma)} |g(z)| |dz|$$

$$= \frac{M_0}{2\pi} \| f \|_{L_M(\Gamma)} \sup \int_{\tilde{\Gamma}} |g(z)| \, | dz |$$

$$\leq \frac{M_0}{2\pi} \| f \|_{L_M(\Gamma)} M_1 \quad , \quad M_1 > 0 \ \text{ sabit.}$$

Buradan,

$$\| f \|_{L_M(\tilde{\Gamma})} \leq k \| f \|_{L_M(\Gamma)}$$

elde edilir.

Teorem 3.8: Ω **,** sonlu iki bağlantılı ve sınırları rektifiye edilebilir Γ, L eğrileri olan bölge olsun. $\forall f \in E_M(\Omega)$ fonksiyonunun sınır fonksiyonu $L_M(\Gamma \cup L^-)$'ye aittir.

İspat 3.8: Tanım 1.27'den, $f \in E_M(\Omega)$ ise,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{C_n} M\left[|f(z)|\right]|dz| < \infty .$$

Buna göre, $\gamma := \Gamma \cup L^-$ için,

$$\int_{\gamma} M\left[|f(z)|\right]|dz| = \liminf_{n\to\infty} \int_{C_n} M\left[|f(z)|\right]|dz|$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \int_{C_n} M\left[|f(z)|\right]|dz| < \infty , \qquad C_n := \Gamma_n \cup L_n^-$$

Bu durumda $\alpha = 1$ için

$$\int_{\gamma} M\left[|f(z)|\right]|dz| < \infty$$

koşulu gerçekleştiğinden, $f \in L_M(\gamma) \Rightarrow f \in L_M(\Gamma \cup L^-)$ olur.

Teorem 3.9: $E_M(\Omega) \subset E_1(\Omega)$.

İspat 3.9: $f \in E_M(\Omega)$ olsun. Tanım 1.27'den,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{C_n} M\left[|f(z)|\right]|dz| < \infty .$$

M konveks olduğundan,

$$ax + b \leq M(x)$$

olur. Buradan,

$$a|f(z)|+b \le M(|f(z)|) \quad \Rightarrow \int\limits_{C_n}(a|f(z)|+b)|dz| \le \int\limits_{C_n} M[|f(z)|]\,|dz|$$

$$\Rightarrow \int\limits_{C_n} a|f(z)||dz| + \int\limits_{C_n} b|dz| \le \int\limits_{C_n} M[|f(z)|]\,|dz|$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \int\limits_{C_n} a|f(z)||dz| \le \limsup_{n\to\infty}\left(\int\limits_{C_n} a|f(z)||dz| + \int\limits_{C_n} b|dz|\right)$$

$$\le \limsup_{n\to\infty} \int\limits_{C_n} M[|f(z)|]\,|dz| < \infty$$

$$= \ f \in E_1(\Omega) \text{ elde edilir.}$$

Teorem 3.10: $f \in E_M(\Omega)$ olsun.

$$\| f \|_{L_M(\Gamma\cup L^-)} \le \| f \|_{L_M(\Gamma)} + \| f \|_{L_M(L)} \qquad (3.5)$$

İspat 3.10: $f \in E_M(\Omega)$ ise teorem 3.8'den $f \in L_M(\Gamma \cup L^-)$'dir.

$$= \ \| f \|_{L_M(\Gamma\cup L^-)} := \sup_{\substack{g\in L_N(\Gamma\cup L^-)\\ \rho(g;N)\le 1}} \int\limits_{\Gamma\cup L^-} |f(z)g(z)|\,|dz|$$

$$\le \sup_{\substack{g\in L_N(\Gamma\cup L^-)\\ \rho(g;N)\le 1}} \left(\int\limits_{\Gamma} |f(z)||g(z)||dz| + \int\limits_{L^-} |f(z)||g(z)||dz| \right)$$

$$\le \sup_{\substack{g\in L_N(\Gamma\cup L^-)\\ \rho(g;N)\le 1}} \left(\int\limits_{\Gamma} |f(z)||g(z)||dz| + \int\limits_{L} |f(z)||g(z)||dz| \right)$$

$$\le \sup_{\substack{g\in L_N(\Gamma)\\ \rho(g;N)\le 1}} \int\limits_{\Gamma} |f(z)||g(z)||dz| + \sup_{\substack{g\in L_N(L)\\ \rho(g;N)\le 1}} \int\limits_{L} |f(z)||g(z)||dz|$$

$$= \| f \|_{L_M(\Gamma)} + \| f \|_{L_M(L)}.$$

Teorem 3.11: $\|\cdot\|_{L_M(\Gamma)}$ fonksiyonu $L_M(\Gamma)$ üzerinde bir normdur.

İspat 3.11: $\|.\|_{L_M(\Gamma)}$ fonksiyonunun norm özelliklerini sağlayıp sağlamadığını araştıralım.

(i) $\forall f \in L_M(\Gamma)$ ve $g \in L_N(\Gamma): \rho(g;N) \leq 1$ için,

$$|f(z)g(z)| \geq 0 \quad = \quad \int_\Gamma |f(z)g(z)||dz| \geq 0$$

$$\Rightarrow \| f \|_{L_M(\Gamma)} = \sup_{\rho(g;N)\leq 1} \int_\Gamma |f(z)g(z)||dz| \geq \int_\Gamma |f(z)g(z)||dz| \geq 0$$

(ii) $\forall f \in L_M(\Gamma)$ ve $g \in L_N(\Gamma): \rho(g;N) \leq 1$ için,

a) $f = \theta$ olsun. Bu durumda, $\theta = \theta(z) = 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\| f \|_{L_M(\Gamma)} = \| \theta \|_{L_M(\Gamma)} &= \sup_{\rho(g;N)\leq 1} \int_\Gamma |\theta(z)g(z)||dz| \\
&= \sup_{\rho(g;N)\leq 1} \int_\Gamma 0 |dz| \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. Yani, $f = \theta \quad \Rightarrow \| f \|_{L_M(\Gamma)} = 0$ 'dır.

b) $f \neq \theta$ ve $\| f \|_{L_M(\Gamma)} = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda da,

$$|f(z)g(z)| \neq 0 = \int_\Gamma |f(z)g(z)||dz| \neq 0$$

$$= \quad (i)\text{'den} \quad \int_\Gamma | f(z)g(z)||dz| > 0$$

$$\Rightarrow \| f \|_{L_M(\Gamma)} = \sup_{\rho(g;N)\leq 1} \int_\Gamma |f(z)g(z)||dz| \geq \int_\Gamma |f(z)g(z)||dz| > 0$$

$$\Rightarrow \| f \|_{L_M(\Gamma)} \neq 0$$

olup varsayımla çelişir. O halde , $f \neq \theta \quad = \quad \| f \|_{L_M(\Gamma)} \neq 0$ bulunur.

Buradan,

$\| f \|_{L_M(\Gamma)} = 0 \quad = \quad f = \theta$ çıkar.

Sonuç olarak, a) ve b)'den,

$$\| f \|_{L_M(\Gamma)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0$$

elde edilir.

(iii) $\quad \forall \alpha \in C, \forall f \in L_M(\Gamma)$ ve $g \in L_N(\Gamma) : \rho(g;N) \leq 1$ için,

$$\begin{aligned}
\| \alpha f \|_{L_M(\Gamma)} &= \sup_{\rho(g;N)\leq 1} \int_\Gamma | \alpha f(z) g(z) | | dz | \\
&= \sup_{\rho(g;N)\leq 1} \int_\Gamma | \alpha | | f(z) g(z) | | dz | \\
&= | \alpha | \sup_{\rho(g;N)\leq 1} \int_\Gamma | f(z) g(z) | | d z | \\
&= | \alpha | \, \| f \|_{L_M(\Gamma)}
\end{aligned}$$

bulunur.

(iv) $\quad \forall f_1, f_2 \in L_M(\Gamma)$ ve $g \in L_N(\Gamma) : \rho(g;N) \leq 1$ için,

$$\begin{aligned}
\| f_1 + f_2 \|_{L_M(\Gamma)} &= \sup_{\rho(g;N)\leq 1} \int_\Gamma | (f_1 + f_2)(z) g(z) | | dz | \\
&= \sup_{\rho(g;N)\leq 1} \int_\Gamma | (f_1(z) + f_2(z)) g(z) | | dz | \\
&= \sup_{\rho(g;N)\leq 1} \int_\Gamma | f_1(z) g(z) + f_2(z) g(z) | | dz |
\end{aligned}$$

Üçgen eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{\rho(g;N)\leq 1} \int_\Gamma \left[| f_1(z) g(z) | + | f_2(z) g(z) | \right] | dz | \\
&= \sup_{\rho(g;N)\leq 1} \left\{ \int_\Gamma | f_1(z) g(z) | | dz | + \int_\Gamma | f_2(z) g(z) | | dz | \right\} \\
&\leq \sup_{\rho(g;N)\leq 1} \int_\Gamma | f_1(z) g(z) | | dz | + \sup_{\rho(g;N)\leq 1} \int_\Gamma | f_2(z) g(z) | | dz | \\
&= \| f_1 \|_{L_M(\Gamma)} + \| f_2 \|_{L_M(\Gamma)}
\end{aligned}$$

olduğundan , $\| . \|_{L_M(\Gamma)}$ fonksiyonu Γ üzerinde bir normdur.

Teorem 3.12: $\omega_{M,\Gamma}(\delta, f)$ bir düzgünlük modülüdür.

İspat 3.12:

- $\omega_{M,\Gamma}(0, f) = \sup_{|h|\le 0} \| f - T_h f \|_{L_M(\Gamma)}$

$$= \| f - T_0 f \|_{L_M(\Gamma)}$$

$$T_0 f(\zeta) = f(\zeta_0) = f\left(\varphi\left(\Phi(\zeta) e^{i0}\right)\right)$$

$$= f(\zeta) \qquad , \qquad \zeta \in \Gamma$$

$$= T_0(f) = f$$

Buradan,

$$\| f - T_0 f \|_{L_M(\Gamma)} = \| f - f \|_{L_M[\Gamma]}$$

$$= 0$$

elde edilir.

- Orlicz normu tanımından,

$$\| f - T_h f \|_{L_M(\Gamma)} \ge 0$$

Bu durumda,

$$\omega_{M,\Gamma}(\delta, f) = \sup_{|h|\le\delta} \| f - T_h f \|_{L_M(\Gamma)} \ge \| f - T_h f \|_{L_M(\Gamma)} \ge 0 \quad , \quad \delta > 0$$

bulunur.

- $\lim_{\delta\to 0} \omega_{M,\Gamma}(\delta, f) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{|h|\le\delta} \| f - T_h f \|_{L_M(\Gamma)}$

$$= \sup_{|h|\le 0} \| f - T_0 f \|_{L_M(\Gamma)}$$

$$= 0$$

elde edilir.

- $f, g \in E_M(G)$ için,

$$\omega_{M,\Gamma}(\delta, f+g) = \sup_{|h|\le\delta} \left\| (f+g) - T_h(f+g) \right\|_{L_M(\Gamma)}$$

$\zeta \in \Gamma$

için,

$$T_h(f+g)(\zeta) = (f+g)(\zeta_h)$$

$$= f(\zeta_h) + g(\zeta_h)$$

$$= \quad T_h(f+g) = T_h f + T_h g$$

Buna göre,

$$\omega_{M,\Gamma}(\delta, f+g) = \sup_{|h|\le\delta} \left\| (f+g) - T_h(f+g) \right\|_{L_M(\Gamma)}$$

$$= \sup_{|h|\le\delta} \left\| (f+g) - (T_h f + T_h g) \right\|_{L_M(\Gamma)}$$

$$= \sup_{|h|\le\delta} \left\| (f - T_h f) + (g - T_h g) \right\|_{L_M(\Gamma)}$$

$$\le \sup_{|h|\le\delta} \left(\left\| f - T_h f \right\|_{L_M(\Gamma)} + \left\| g - T_h g \right\|_{L_M(\Gamma)} \right)$$

$$\le \sup_{|h|\le\delta} \left\| f - T_h f \right\|_{L_M(\Gamma)} + \sup_{|h|\le\delta} \left\| g - T_h g \right\|_{L_M(\Gamma)}$$

$$= \omega_{M,\Gamma}(\delta, f) + \omega_{M,\Gamma}(\delta, g)$$

olduğu görülür.

- $\omega_{M,\Gamma}(n\delta, f) = \sup_{|h|\le n\delta} \left\| f - T_h f \right\|_{L_M(\Gamma)}$

$f = T_0 f$ olduğundan,

$$\sup_{|h|\le n\delta} \left\| T_0 f - T_h f \right\|_{L_M(\Gamma)}$$

$$= \sup_{|h|\le n\delta} \left(\sup_{\substack{g \in L_N(\Gamma) \\ \rho(g,N)\le 1}} \int_\Gamma \left| T_0 f(\zeta) - T_h f(\zeta) \right| \left| g(\zeta) \right| \left| d\zeta \right| \right)$$

$\forall \zeta \in \Gamma$ için $\exists \theta \in [0, 2\pi]$: $\zeta = \varphi(e^{i\theta})$

$$T_h f(\zeta) = f(\zeta_h) = f\left(\varphi\left(\Phi(\zeta) e^{ih}\right)\right) \quad , \quad h \in [0, 2\pi]$$

$$\zeta = \varphi(e^{i\theta}) \;=\; T_h f(\zeta) = f\left(\varphi\left(\Phi\left(\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right) e^{ih}\right)\right) = (f \circ \varphi)\left(e^{i(\theta+h)}\right)$$

$$\Rightarrow T_0 f(\zeta) = (f\circ\varphi)(e^{i\theta})$$

$$= \sup_{|h|\le n\delta}\left(\sup_{\substack{g\in L_N(\Gamma)\\ \rho(g,N)\le 1}} \int_\Gamma |T_0 f(\zeta) - T_h f(\zeta)||g(\zeta)||\,d\zeta\,|\right)$$

$$= \sup_{|h|\le n\delta}\left(\sup_{\substack{g\in L_N(\Gamma)\\ \rho(g,N)\le 1}} \int_0^{2\pi}\left|(f\circ\varphi)(e^{i\theta}) - (f\circ\varphi)(e^{i(\theta+h)})\right||(g\circ\varphi)(e^{i\theta})|\,|\varphi'(e^{i\theta})|\,d\theta\right)$$

$u(\theta) := e^{i\theta}$ için,

$(f\circ\varphi)(e^{i\theta}) = (f\circ\varphi\circ u)(\theta)$ ve

$f_0 := f\circ\varphi\circ u$, $\theta_1 := \theta$, $\theta_2 := \theta + h$

diyelim.

$[\theta_1,\theta_2]$ aralığını n eşit parçaya bölelim.

$[\theta_1,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},\theta_2]$ için,

$$|f_0(\theta_1) - f_0(\theta_2)| = \left|\begin{matrix} f_0(\theta_1) - f_0(x_1) + f_0(x_1) - f_0(x_2) + f_0(x_2) - \ldots \\ + f_0(x_{n-1}) - f_0(\theta_2)\end{matrix}\right|$$

$$\le |f_0(\theta_1) - f_0(x_1)| + |f_0(x_1) - f_0(x_2)| + \ldots + |f_0(x_{n-1}) - f_0(\theta_2)|$$

Eşitsizliğin her iki tarafını $|g\circ\varphi|$ ile çarparak ve her iki tarafta $[0,2\pi]$ üzerinden integral alarak,

$$\int_0^{2\pi}|f_0(\theta_1) - f_0(\theta_2)||(g\circ\varphi)(e^{i\theta_1})||\varphi'(e^{i\theta_1})|\,d\theta_1$$

$$\le \int_0^{2\pi}|f_0(\theta_1) - f_0(x_1)||(g\circ\varphi)(e^{i\theta_1})||\varphi'(e^{i\theta_1})|\,d\theta_1$$

$$+\int_0^{2\pi}\left|f_0(x_1)-f_0(x_2)\right|\left|(g\circ\varphi)\left(e^{ix_1}\right)\right|\left|\varphi'\left(e^{ix_1}\right)\right|d\,x_1+\ldots$$

$$+\int_0^{2\pi}\left|f_0(x_{n-1})-f_0(\theta_2)\right|\left|(g\circ\varphi)\left(e^{i(x_{n-1})}\right)\right|\left|\varphi'\left(x^{i(x_{n-1})}\right)\right|d\,x_{n-1}$$

elde edilir.

Her bir $[\theta_1,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},\theta_2]$ aralığı için $\left|\hat{h}\right|=\left|x_i-x_{i-1}\right|\leq\delta$ i=0,1,2,…,n olduğundan, $x_i=x_{i-1}+\hat{h}$ yazılabilir. Buradan ve f_0 ile u fonksiyonlarının tanımından,

$$\int_0^{2\pi}\left|f_0(\theta_1)-f_0(\theta_2)\right|\left|(g\circ\varphi)\left(e^{i\theta_1}\right)\right|\left|\varphi'\left(e^{i\theta_1}\right)\right|d\,\theta_1$$

$$\leq\int_0^{2\pi}\left|(f\circ\varphi)\left(e^{i\theta_1}\right)-(f\circ\varphi)\left(e^{i(\theta_1+\hat{h})}\right)\right|\left|(g\circ\varphi)\left(e^{i\theta_1}\right)\right|\left|\varphi'\left(e^{i\theta_1}\right)\right|d\,\theta_1$$

$$+\int_0^{2\pi}\left|(f\circ\varphi)\left(e^{ix_1}\right)-(f\circ\varphi)\left(e^{i(x_1+\hat{h})}\right)\right|\left|(g\circ\varphi)\left(e^{ix_1}\right)\right|\left|\varphi'\left(e^{ix_1}\right)\right|d\,x_1+\ldots$$

$$+\int_0^{2\pi}\left|(f\circ\varphi)\left(e^{ix_{n-1}}\right)-(f\circ\varphi)\left(e^{i(x_{n-1}+\hat{h})}\right)\right|\left|(g\circ\varphi)\left(e^{i(x_{n-1})}\right)\right|\left|\varphi'\left(x^{i(x_{n-1})}\right)\right|d\,x_{n-1}$$

elde edilir.

$f(\zeta_h)=f\left(\varphi\left(\Phi(\zeta)e^{ih}\right)\right)$ ve $\zeta=\varphi\left(e^{i\theta}\right)$ olduğundan,

$$\int_0^{2\pi}\left|f_0(\theta_1)-f_0(\theta_2)\right|\left|(g\circ\varphi)\left(e^{i\theta_1}\right)\right|\left|\varphi'\left(e^{i\theta_1}\right)\right|d\,\theta_1$$

$$\leq\int_0^{2\pi}\left|(f\circ\varphi)\left(e^{i\theta_1}\right)-(f\circ\varphi)\left(e^{i(\theta_1+\hat{h})}\right)\right|\left|(g\circ\varphi)\left(e^{i\theta_1}\right)\right|\left|\varphi'\left(e^{i\theta_1}\right)\right|d\,\theta_1$$

$$+\int_0^{2\pi}\left|(f\circ\varphi)\left(e^{ix_1}\right)-(f\circ\varphi)\left(e^{i(x_1+\hat{h})}\right)\right|\left|(g\circ\varphi)\left(e^{ix_1}\right)\right|\left|\varphi'\left(e^{ix_1}\right)\right|d\,x_1+\ldots$$

$$+\int_0^{2\pi}\left|(f\circ\varphi)\left(e^{ix_{n-1}}\right)-(f\circ\varphi)\left(e^{i(x_{n-1}+\hat{h})}\right)\right|\left|(g\circ\varphi)\left(e^{i(x_{n-1})}\right)\right|\left|\varphi'\left(x^{i(x_{n-1})}\right)\right|d\,x_{n-1}$$

$$=\int_\Gamma\left|f(\zeta_0)-f(\zeta_{\hat{h}})\right|\left|g(\zeta)\right|\left|d\zeta\right|+\int_\Gamma\left|f(\zeta_0)-f(\zeta_{\hat{h}})\right|\left|g(\zeta)\right|\left|d\zeta\right|+\ldots$$

$$+\int_\Gamma\left|f(\zeta_0)-f(\zeta_{\hat{h}})\right|\left|g(\zeta)\right|\left|d\zeta\right|$$

$$= n\int_{\Gamma}\left|f\left(\zeta_0\right)- f\left(\zeta_{\hat{h}}\right)\right|\left|g(\zeta)\right|\left| d\zeta \right|$$

$f\left(\zeta_h\right)= T_h f(\zeta)$=$f_0$ (θ_2) olduğundan,

$$\int_{\Gamma}\left|T_0 f(\zeta)-T_h f(\zeta)\right|\left|g(\zeta)\right|\left| d\zeta \right|$$

$$\leq n\int_{\Gamma}\left|T_0 f(\zeta)-T_{\hat{h}} f(\zeta)\right|\left|g(\zeta)\right|\left| d\zeta \right|$$

$\rho(g;N)\leq 1$ özelliğindeki tüm $g \in L_N(\Gamma)$ fonksiyonları üzerinden supremum alarak,

$$\sup \int_{\Gamma}\left|T_0 f(\zeta)-T_h f(\zeta)\right|\left|g(\zeta)\right|\left| d\zeta \right|$$

$$\leq \sup \left\{ n\int_{\Gamma}\left|T_0 f(\zeta)-T_{\hat{h}} f(\zeta)\right|\left|g(\zeta)\right|\left| d\zeta \right| \right\}$$

$$= n \sup \int_{\Gamma}\left|T_0 f(\zeta)-T_{\hat{h}} f(\zeta)\right|\left|g(\zeta)\right|\left| d\zeta \right|$$

Yine, burada, $|h| \leq n\delta$ veya $\left|\hat{h}\right| \leq \delta$ üzerinden supremum alarak,

$$\sup_{|h|\leq n\delta} \sup \int_{\Gamma}\left|T_0 f(\zeta)-T_h f(\zeta)\right|\left|g(\zeta)\right|\left| d\zeta \right|$$

$$\leq \sup_{\left|\hat{h}\right|\leq\delta} \left\{ n \sup \int_{\Gamma}\left|T_0 f(\zeta)-T_{\hat{h}} f(\zeta)\right|\left|g(\zeta)\right|\left| d\zeta \right| \right\}$$

$$= n \sup_{\left|\hat{h}\right|\leq\delta} \sup \int_{\Gamma}\left|T_0 f(\zeta)-T_{\hat{h}} f(\zeta)\right|\left|g(\zeta)\right|\left| d\zeta \right|$$

$$= \quad \omega_{M,\Gamma}(n\delta, f) = \sup_{|h|\leq n\delta}\left\| T_0 f - T_h f \right\|_{L_M(\Gamma)}$$

$\leq n\sup_{\left|\hat{h}\right|\leq\delta}\left\| T_0 f - T_{\hat{h}} f \right\|_{L_M(\Gamma)} = n\, \omega_{M,\Gamma}(\delta, f)$ olur ve ispat biter.

4. ESAS TEOREM

Teorem 4.1: G, Γ sınırı Dini düzgün olan sonlu basit bağlantılı bir bölge ve $E_M(G)$, G üzerinde refleksif bir Smirnov-Orlicz uzayı olsun. Öyleyse, her $f \in E_M(G)$ ve bir $n \in N$ için en çok n. dereceden bir $p_n(.,f)$ cebirsel polinomu vardır öyle ki

$$\left\| f - p_n(.,f) \right\|_{L_M(\Gamma)} \leq c\, \omega_M\left(\frac{1}{n}, f\right)$$

olur. Burada, c, n'den bağımsız bir sabittir.[3]

Bu bölümde araştıracağımız problem, basit bağlantılı bölgeler için elde edilen yukarıdaki sonucun iki bağlantılı bölgelere genelleşmesidir. Şimdi, esas teoremi ve ispatını verelim:

Teorem 4.2: Ω**,** iç sınırı L ve dış sınırı Γ Dini düzgün eğriler olan sonlu iki bağlantılı bir bölge ve $E_M(\Omega)$ uzayı da Ω üzerinde refleksif bir Smirnov-Orlicz uzayı olsun. Öyle ise bir $f \in E_M(\Omega)$ ve herhangi $n \in N$ için en çok n.dereceden bir rasyonel fonksiyon vardır ki,

$$\left\| f - R_n(.,f) \right\|_{L_M(\Gamma \cup L^-)} \leq c\, \omega_M\left(\frac{1}{n}, f\right)$$

olur. Burada, c, n'den bağımsız bir sabittir.

İspat 4.1: $f \in E_M(\Omega)$ olsun. Teorem 3.9'dan $f \in E_1(\Omega)$ olduğu görülür ve bundan dolayı f,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{L} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \qquad z \in \Omega$$

Cauchy integral gösterimine sahiptir.

Şu halde,

$$f_1(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\ , \qquad z \in G$$

ve

$$f_2(z) := \frac{-1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\ , \qquad z \in B^-$$

gösterimlerini dikkate alırsak,

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z), \qquad z \in \Omega \qquad (*)$$

olur.

f fonksiyonuna yaklaşan rasyonel fonksiyonları inşaa etmek için aşağıdaki yöntemi takip edeceğiz:

Önce, f_1 fonksiyonuna $E_M(G)$'de yaklaşan cebirsel polinomları inşaa edeceğiz. Daha sonra f_2 fonksiyonuna $E_M(B^-)$'de yaklaşan rasyonel fonksiyonları bulacağız.

Şimdi, $(*)$ bağıntısından hareketle f fonksiyonuna $E_M(\Omega)$ uzayında yaklaşan rasyonel fonksiyonları kolayca bulmak mümkündür.

İlk olarak f_1'e yaklaşımı inceleyelim.

$f \in E_M(\Omega)$'nın Γ üzerindeki sınır fonksiyonunun $L_M(\Gamma)$'ya ait olduğunu birinci bölümde ifade etmiştik. Bundan dolayı (3.2)'den $f \in L_1(\Gamma)$ olur. Γ, Dini düzgün olduğundan (3.1)'den $f \circ \varphi \in L_1(T)$ elde edilir ve (1.17)'den $f \circ \varphi$ fonksiyonuna bir kuvvet serisi karşılık getirebiliriz. Yani,

$$(f\circ\varphi)(w) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{w^k} \tag{4.1}$$

yazılabilir.

$$K_n(\theta) = \sum_{m=-n}^{n} \lambda_m^{(n)} e^{im\theta} \tag{4.2}$$

çift, negatif olmayan ve $\forall n \in N$ için,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)d\theta = 1$$

$$\int_0^{\pi} \theta K_n(\theta)d\theta \leq \frac{c_6}{n} \tag{4.3}$$

koşullarını bir $c_6 > 0$ sabiti için sağlayan bir trigonometrik polinom olsun.

$$\mathrm{I}_1(\theta, z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta_{-\theta})}{\zeta - z} d\zeta, \qquad z \in G \tag{4.4}$$

integralini düşünelim.

Bu integralde $\zeta = \varphi(e^{it})$ değişken değiştirmesini yaparak,

$$\mathrm{I}_1(\theta, z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\varphi\left(e^{i(t-\theta)}\right)\right)\frac{\varphi'(e^{it})e^{it}}{\varphi(e^{it}) - z} dt$$

elde ederiz ve (4.1) ile (1.7) bağıntılarını hesaba katarak,

$$\mathrm{I}_1(\theta, z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi_k(z) e^{-ik\theta}$$

yazabiliriz.

$\mathrm{I}_1(\theta, z) \in L_1([-\pi, \pi])$ ve $K_n(\theta)$ sınırlı salınımlı olduğu için Genelleştirilmiş Parseval Özdeşliği'nden,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)\mathrm{I}_1(\theta, z)d\theta = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} a_k \Phi_k(z)$$

bağıntısını elde ederiz ve bu (4.4) ile birlikte düşünüldüğünde,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)d\theta \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta_{-\theta})}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} a_k \Phi_k(z) \quad , \quad z \in G$$

olur. Buradan görüyoruz ki,

$$P_n(z,f) := \frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)d\theta \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta_{-\theta})}{\zeta - z} d\zeta \quad , \quad z \in G \tag{4.5}$$

n. dereceden bir cebirsel polinomdur. $K_n(\theta)$ çift bir fonksiyon olduğundan,

$$P_n(z,f) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_{0}^{\pi} K_n(\theta)d\theta \int_{\Gamma} \left[f(\zeta_\theta) + f(\zeta_{-\theta})\right] \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

ve (1.10) ile (1.15)'ten,

$$P_n(z,f) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} K_n(\theta)\left[(T_\theta f)_\Gamma^+(z) + (T_{-\theta} f)_\Gamma^+(z)\right] d\theta \quad , \quad z \in G$$

sonucuna ulaşırız.

$z' \in G$ olsun.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta)d\theta = 1$$

denkleminin her iki yanını $f_\Gamma^+(z')$ fonksiyonu ile çarpalım.

$f_\Gamma^+(z') = f_1(z')$ olduğundan,

$$f_1(z') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_\Gamma^+(z') K_n(\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} 2 f_\Gamma^+(z') K_n(\theta)d\theta$$

bulunur.

Bu en son eşitlikten,

$f_1(z')$- $P_n(z',f)$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} K_n(\theta)\left\{ 2 f_\Gamma^+(z') - \left[(T_\theta f)_\Gamma^+(z') + (T_{-\theta} f)_\Gamma^+(z')\right]\right\} d\theta$$

yazılır.

Γ içindeki bütün açısal yollar boyunca $z' - z \in \Gamma$ limitini alarak ve (1.16)'yı kullanarak,

$$f_1(z) - P_n(z,f)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_n(\theta)\begin{bmatrix} 2S_\Gamma f(z) + f(z) - S_\Gamma(T_\theta f)(z) \\ -\frac{1}{2}(T_\theta f)(z) - S_\Gamma(T_{-\theta} f)(z) - \frac{1}{2}(T_{-\theta} f)(z)\end{bmatrix} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[S_\Gamma(f - T_\theta f)(z) + S_\Gamma(f - T_{-\theta} f)(z)\right]K_n(\theta)d\theta$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} K_n(\theta)\left[(f - T_\theta f)(z) + (f - T_{-\theta} f)(z)\right]d\theta \quad , \text{ (h.h. } z \in \Gamma \text{ için)}$$

elde ederiz.

Şimdi, $\rho(g;N) \le 1$ özelliğindeki tüm $g \in L_N(\Gamma)$ fonksiyonları üzerinden supremum alarak,

$$\left\|f_1 - P_n(.,f)\right\|_{L_M(\Gamma)} = \sup\int_\Gamma \left|f_1(z) - P_n(.,f)\right|\left|g(z)\right|\left|dz\right|$$

$$\le \sup\int_\Gamma\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[S_\Gamma(f - T_\theta f)(z) + S_\Gamma(f - T_{-\theta} f)(z)\right]K_\theta(\theta)d\theta\right|\left|g(z)\right|\left|dz\right|$$

$$+ \sup\int_\Gamma\left|\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\left[(f - T_\theta f)(z) + (f - T_{-\theta} f)(z)\right]K_n(\theta)d\theta\right|\left|g(z)\right|\left|dz\right|$$

$$\le \sup\int_\Gamma\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_n(\theta)\left(\left|S_\Gamma(f - T_\theta f)(z)\right| + \left|S_\Gamma(f - T_{-\theta} f)(z)\right|\right)d\theta\right\}\left|g(z)\right|\left|dz\right|$$

$$+ \sup\int_\Gamma\left\{\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} K_n(\theta)\left(\left|(f - T_\theta f)(z)\right| + \left|(f - T_{-\theta} f)(z)\right|\right)d\theta\right\}\left|g(z)\right|\left|dz\right|$$

ve Fubini Teoremi'nden,

$$\left\|f_1 - P_n(.,f)\right\|_{L_M(\Gamma)}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_n(\theta)\left\{\sup_{\Gamma}\int\left(\left|S_\Gamma(f-T_\theta f)(z)\right|+\left|S_\Gamma(f-T_{-\theta} f)(z)\right|\right)\left|g(z)\right|\left|dz\right|\right\}d\theta$$

$$+\ \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} K_n(\theta)\left\{\sup_{\Gamma}\int\left[\left|(f-T_\theta f)(z)\right|+\left|(f-T_{-\theta} f)(z)\right|\right]\left|g(z)\right|\left|dz\right|\right\}d\theta$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K_n(\theta)\left[\left\|S_\Gamma(f-T_\theta f)\right\|_{L_M(\Gamma)}+\left\|S_\Gamma(f-T_{-\theta} f)\right\|_{L_M(\Gamma)}\right]d\theta$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} K_n(\theta)\left[\left\|f-T_\theta f\right\|_{L_M(\Gamma)}+\left\|f-T_{-\theta} f\right\|_{L_M(\Gamma)}\right]d\theta .$$

(2.2)’yi uygulayarak,

$$\left\| f_1-P_n(.,f)\right\|_{L_M(\Gamma)} \leq c_7\int_0^{\pi} K_n(\theta)\left[\left\|f-T_\theta f\right\|_{L_M(\Gamma)}+\left\|f-T_{-\theta} f\right\|_{L_M(\Gamma)}\right]d\theta .$$

$\omega_{M,\Gamma}(\delta,f)$’nin (12)’teki tanımından ve [3, s:97]’den,

$$\left\|f_1-P_n(.,f)\right\|_{L_M(\Gamma)} \leq c_8\int_0^{\pi} K_n(\theta)\,\omega_{M,\Gamma}(\theta,f)\,d\theta$$

$$\leq c_9\,\omega_{M,\Gamma}\left(\frac{1}{n},f\right)\int_0^{\pi} K_n(\theta)(n\theta+1)\,d\theta$$

Sonuç olarak, (4.3)’ten,

$$\left\|f_1-P_n(.,f)\right\|_{L_M(\Gamma)} \leq c_{10}\,\omega_{M,\Gamma}\left(\frac{1}{n},f\right)$$

bulunur.

Şimdi de, f_2’ye yaklaşımı inceleyelim. $f \in E_M(\Omega)$’nın L üzerindeki sınır fonksiyonunun $L_M(L)$’ye ait olduğunu biliyoruz. Bu durumda (3.2)’den $f \in L_1(L)$ olur. L, Dini düzgün olduğundan, (3.1)’den, $f\circ\psi \in L_1(T)$ bulunur. (1.17)’den $f\circ\psi$ fonksiyonuna bir kuvvet serisi karşılık getirebiliriz:

$$f\circ\psi \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{w^k} \tag{4.6}$$

Yine, $K_n(\theta)$, (4.2) ve (4.3) koşullarını sağlayan trigonometrik polinom olsun ve

$$\mathrm{I}_2(\theta,z):=\frac{-1}{2\pi i}\int_L \frac{f\left(\zeta_{1(-\theta)}\right)}{\zeta-z}d\zeta\,,\quad z\in B^- \tag{4.7}$$

integralini düşünelim.

Bu integralde, $\zeta=\psi\left(e^{it}\right)$ değişken değiştirmesi yapılarak,

$$\mathrm{I}_2(\theta,z):=\frac{-1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\psi\left(e^{i(t-\theta)}\right)\right)\frac{\psi'\left(e^{it}\right)e^{it}}{\psi\left(e^{it}\right)-z}dt$$

elde edilir ve (4.6) ile (1.8) bağıntılarından,

$$\mathrm{I}_2(\theta,z)\sim\sum_{k=1}^{\infty}c_k F_k\left(\frac{1}{z}\right)e^{-ik\theta}$$

yazabiliriz.

$\mathrm{I}_2(\theta,z)\in L_1([-\pi,\pi])$ ve $K_n(\theta)$ sınırlı salınımlı olduğundan Genelleştirilmiş Parseval Özdeşliğinden,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(\theta)\mathrm{I}_2(\theta,z)d\theta=\sum_{k=1}^{n}\lambda_{1k}^{(n)}c_k F_k\left(\frac{1}{z}\right)$$

bağıntısını elde ederiz. Bu ve (4.7)'den,

$$\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(\theta)d\theta\int_L\frac{-f\left(\zeta_{1(-\theta)}\right)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{k=1}^{n}\lambda_{1k}^{n}c_k F_k\left(\frac{1}{z}\right),\quad z\in B^-$$

olur. Böylece,

$$Q_n(z,f):=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(\theta)d\theta\int_L\frac{-f\left(\zeta_{1(-\theta)}\right)}{\zeta-z}d\zeta\,,\quad z\in B^- \tag{4.8}$$

n. dereceden rasyonel fonksiyonu elde edilmiş olur.

$K_n(\theta)$ çift bir fonksiyon olduğundan,

$$Q_n(z,f)=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{\pi}K_n(\theta)d\theta\int_L\left[-f\left(\zeta_{1(-\theta)}\right)-f\left(\zeta_{1\theta}\right)\right]\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

ve (1.11) ile (1.15)'ten,

$$Q_n(z,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\Big[-\left(T_{1\theta}f\right)_L^-(z)-\left(T_{1(-\theta)}f\right)_L^-(z)\Big]d\theta \ , \qquad z\in B^-$$

elde ederiz.

$z'\in B^-$ olsun.

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(\theta)d\theta=1$ denkleminin her iki yanını $f_L^-\left(z'\right)$ fonksiyonu ile çarpalım.

$$f_L^-(z')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_L^-(z')K_n(\theta)d\theta$$

$f_L^-(z')=-f_2\left(z'\right)$ olup buradan,

$$f_2(z')=\frac{-1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_L^-(z')K_n(\theta)d\theta$$

$$=\frac{-1}{2\pi}\int_0^{\pi}2f_L^-(z')K_n(\theta)d\theta$$

bulunur.

Şimdi, bu en son eşitlikten,

$$f_2(z')-Q_n(z',f)$$

$$=\frac{-1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\Big\{2f_L^-(z')-\Big[\left(T_{1\theta}f\right)_L^-(z')+\left(T_{1(-\theta)}f\right)_L^-(z')\Big]\Big\}d\theta$$

elde edilir.

L'nin dışındaki tüm açısal yollar boyunca $z'-\ z\in L$ limitini alarak ve (1.16)'yı kullanarak,

$$f_2(z)-Q_n(z,f)=\frac{-1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\begin{bmatrix}2S_Lf(z)-f(z)-S_L\left(T_{1\theta}f\right)(z)+\frac{1}{2}\left(T_{1\theta}f\right)(z)\\ \\ -S_L\left(T_{1(-\theta)}f\right)(z)+\frac{1}{2}\left(T_{1(-\theta)}f\right)(z)\end{bmatrix}d\theta$$

$$=\frac{-1}{2\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\big[S_L(f-T_{1\theta}f)(z)+S_L(f-T_{1(-\theta)}f)(z)\big]d\theta$$

$$+\frac{(-1)}{4\pi}\int_0^{\pi}K_n(\theta)\big[(-f+T_{1\theta}f)(z)+(-f+T_{1(-\theta)}f)(z)\big]\,d\theta \quad , \ \text{h.h.} \ z\in L$$

$\rho(g;N) \leq 1$ özelliğindeki tüm $g \in L_N(L)$ fonksiyonları üzerinden supremum alarak bu en son bağıntıda,

$$\left\| f_2 - Q_n(.,f) \right\|_{L_M(L)} = \sup \int_L \left| f_2(z) - Q_n(z,f) \right| \left| g(z) \right| \left| dz \right|$$

$$\leq \sup \int_L \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} K_n(\theta) \left[S_L(f - T_{1\theta} f)(z) + S_L(f - T_{1(-\theta)} f)(z) \right] d\theta \right| \left| g(z) \right| \left| dz \right|$$

$$+ \sup \int_L \left| \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} K_n(\theta) \left[(-f + T_{1\theta} f)(z) + (-f + T_{1(-\theta)} f)(z) \right] d\theta \right| \left| g(z) \right| \left| dz \right|$$

$$\leq \sup \int_L \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} K_n(\theta) \left(\left| S_L(f - T_{1\theta} f)(z) \right| + \left| S_L(f - T_{1(-\theta)} f)(z) \right| \right) d\theta \right\} \left| g(z) \right| \left| dz \right|$$

$$+ \sup \int_L \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} K_n(\theta) \left(\left| (f - T_{1\theta} f)(z) \right| + \left| (f - T_{1(-\theta)} f)(z) \right| \right) d\theta \right\} \left| g(z) \right| \left| dz \right|$$

Fubini Teoremi'nden,

$$\left\| f - Q_n(.,f) \right\|_{L_M(L)}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} K_n(\theta) \left\{ \sup \int_L \left[\left| S_L(f - T_{1\theta} f)(z) \right| + \left| S_L(f - T_{1(-\theta)} f)(z) \right| \right] \left| g(z) \right| \left| dz \right| \right\} d\theta$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} K_n(\theta) \left\{ \sup \int_L \left[\left| (f - T_{1\theta} f)(z) \right| + \left| (f - T_{1(-\theta)} f)(z) \right| \right] \left| g(z) \right| \left| dz \right| \right\} d\theta$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} K_n(\theta) \left[\left\| S_L(f - T_{1\theta} f) \right\|_{L_M(L)} + \left\| S_L(f - T_{1(-\theta)} f) \right\|_{L_M(L)} \right] d\theta$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} K_n(\theta) \left[\left\| f - T_{1\theta} f \right\|_{L_M(L)} + \left\| f - T_{1(-\theta)} f \right\|_{L_M(L)} \right] d\theta$$

(2.2)'yi uygulayarak,

$$\left\| f_2 - Q_n(.,f) \right\|_{L_M(L)} \leq c_{11} \int_0^{\pi} K_n(\theta) \left[\left\| f - T_{1\theta} f \right\|_{L_M(L)} + \left\| f - T_{1(-\theta)} f \right\|_{L_M(L)} \right] d\theta$$

$\omega_{M,L}(\delta, f)$'nin (1.13)'teki tanımından ve [3, s:97]'den,

$$\|f_2 - Q_n(.,f)\|_{L_M(L)} \le c_{12}\int_0^{\pi} K_n(\theta)\,\omega_{M,L}(\theta,f)\,d\theta$$

$$\le c_{13}\,\omega_{M,L}\left(\frac{1}{n},f\right)\int_0^{\pi} K_n(\theta)(n\theta+1)d\theta .$$

(4.3)’ten,

$$\|f_2 - Q_n(.,f)\|_{L_M(L)} \le c_{14}\,\omega_{M,L}\left(\frac{1}{n},f\right)$$

bulunur.

Son olarak, (4.5) ve (4.8)’den

$$R_n(z,f) := P_n(z,f) + Q_n(z,f)$$

rasyonel fonksiyonu yardımıyla, $f \in E_M(\Omega)$ fonksiyonuna yaklaşımı üstten değerlendirerek ispatı tamamlayacağız.

$$\|f - R_n(.,f)\|_{L_M(\Gamma\cup L^-)} = \|(f_1 + f_2) - (P_n(.,f) + Q_n(.,f))\|_{L_M(\Gamma\cup L^-)}$$

$$\le \|f_1 - P_n(.,f)\|_{L_M(\Gamma\cup L^-)} + \|f_2 - Q_n(.,f)\|_{L_M(\Gamma\cup L^-)}$$

(3.5)’ten

$$\le \|f_1 - P_n(.,f)\|_{L_M(\Gamma)} + \|f_1 - P_n(.,f)\|_{L_M(L)} + \|f_2 - Q_n(.,f)\|_{L_M(\Gamma)}$$

$$+ \|f_2 - Q_n(.,f)\|_{L_M(L)}$$

(3.4)’ten ve teorem 3.6’dan,

$$\le \|f_1 - P_n(.,f)\|_{L_M(\Gamma)} + k_1\|f_1 - P_n(.,f)\|_{L_M(\Gamma)}$$

$$+ k_2\|f_2 - Q_n(.,f)\|_{L_M(L)} + \|f_2 - Q_n(.,f)\|_{L_M(L)}$$

$$\le k_3\|f_1 - P_n(.,f)\|_{L_M(\Gamma)} + k_4\|f_2 - Q_n(.,f)\|_{L_M(L)}$$

$$\le k_3 c_{10}\,\omega_{M,\Gamma}\left(\frac{1}{n},f\right) + k_4 c_{14}\,\omega_{M,L}\left(\frac{1}{n},f\right)$$

$$\leq \max(k_3 c_{10}, k_4 c_{14}) \left(\omega_{M,\Gamma}\left(\frac{1}{n}, f\right) + \omega_{M,L}\left(\frac{1}{n}, f\right) \right)$$

$$\leq c\, \omega_M\left(\frac{1}{n}, f\right).$$

SONUÇ

Yüksek lisans tezinde katlı bağlantılı bölgelerde tanımlı Orlicz uzaylarında yaklaşım teorisinin düz problemleri araştırılmıştır. Sınırı, sonlu sayıda Dini düzgün eğriden oluşan sonlu bağlantılı sınırlı bölgelerde yaklaşım teorisinin bir düz teoremi elde edilmiştir.

İki bağlantılı bölgeler için elde ettiğimiz bu sonuç, konform dönüşümler, Faber polinomları ve Faber-Laurent polinomları kullanılarak tümevarım yöntemiyle sonlu n - bağlantılı bölgelere de genelleştirilebilir.

KAYNAKÇA

[1] Başkan, T., Kompleks fonksiyonlar teorisi, Vipaş A.Ş., Bursa, (2000).

[2] Balcı, M., Reel analiz, Ankara, (2000).

[3] İsrafilov, D.M., Oktay, B. and Akgün R., "Approximation in Smirnov Orlicz classes", Glasnik Matematicki, Vol.40(60)(2005), 87-102.

[4] Pommerenke, C., Univalent functions, Vandenhoeck & Ruprecht (1975).

[5] Shabat, B.V., Kompleks analize giriş, Moskova, (2004).

[6] Katznelson, Y., An introduction to harmonic analysis, Cambridge University Press, (2003).

[7] Pommerenke, Ch., Boundary behaviour of conformal maps, Springer-Verlag, Berlin, (1992).

[8] Suetin, P.K., Series of Faber polinomials, Gordon and Breach Science Publishers, (1998).

[9] Rudin,W., Real and complex analysis, Neww York, Mc Graw-Hill (1974).

[10] Goluzin, G.M., Geometric theory of functions of a complex variable, Translations of Mathematical Monographs Vol.26 A.M.S, (1967).

[11] Krasnoselskii, M.A., and Ruticki, Ya., B., Convex functions and Orlicz spaces, P.Noordhoff Ltd., Groningen, (1961).

[12] Kokilashvili, V., On analytic functions of Smirnov Orlicz classes, Studia Mathematica, (31), (1968), 43-59.

[13] Duren, P.L., Theory of H^p spaces, Academic Press, (1970).

[14] Kılıç, S., Erdem, M., Fonksiyonel analize giriş, Gazi Üniversitesi, (1987).

[15] Koosis, P., Introduction to H^p spaces, Cambridge University Press, (1998).

[16] Bary, N.K., A treatise on trigonometric series,Volume 1 Pergamon Press, Oxford-London-New York-Paris-Frankfurt, (1964).

[17] Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., Principles of real analysis Academic Press, (1998).

[18] Rao, M.M. and Ren, Z.D., Theory of Orlicz spaces, Marcel Dekker, New York, (1991).

[19] Karlovich, A. Yu., Algebras of singular integral operators with piecewise continous coefficents on reflexive Orlicz spaces, Math. Nachr. 179(1996), 187-222.

[20] İsrafilov, D., M., "Approximation by p-Faber polynomials in the weighted Smirnov class $E_p(G,w)$ and the Bieberbach polynomials", Constructive approximation **17** (2001), 335-351.