KENMOTSU MANİFOLDLAR

Kamil SAĞLAM

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Ekim - 2008

KENMOTSU MANİFOLDLAR

Hazırlayan
Kamil SAĞLAM

DUMLUPINAR ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik Anabilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Ahmet YILDIZ

Ekim - 2008

KENMOTSU MANİFOLDLAR

Kamil SAĞLAM
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Tezi 2008
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ahmet YILDIZ

ÖZET

Bu tezin amacı Kenmotsu manifoldlarda bazı eğrilik şartlarını çalışmaktır. Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar ve sonuçları içermektedir. İkinci bölüm Kenmotsu manifoldlar ile ilgili tanımlar ve teoremler içermektedir. Üçüncü bölüm orijinal çalışmalarımızdan oluşmaktadır.

Birinci bölümde Riemann eğrilik tensörü, Einstein manifold, Weyl-conformal eğrilik tensörü, Projektif eğrilik tensörü, hemen hemen değme metrik manifoldlar gibi temel kavramlar tanıtılmıştır.

İkinci bölümde Kenmotsu manifold tanımı ve temel teoremler verilmiştir.

Son bölümde Kenmotsu manifoldlarda Riemann eğrilik tensörü ve Projektif eğrilik tensörü ile ilgili bazı eğrilik şartları ve bu eğrilik şartlarını sağlamamızda kullandığımız eşitlikler verilmiştir. Verilen tüm bu bilgiler ışığında yazılan teoremler ispatlanmış ve sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Hemen hemen değme metrik manifold, Einstein manifold**,** Projektif eğrilik tensörü, Riemann eğrilik tensörü, Kenmotsu manifold.

KENMOTSU MANIFOLDS

Kamil SAĞLAM
Department of Mathematics
MSc Thesis 2008
Supervisor: Asist. Prof. Dr. Ahmet YILDIZ

SUMMARY

The aim of this thesis is to study some curvature conditions on Kenmotsu manifolds. The thesis has three chapters.

First chapter contains some fundamental definitions and results which will be used in other chapters. Second chapter contains some fundamental definitions and theorems about Kenmotsu manifolds. Chapter three contains original works.

In the first chapter the we introduce basic definitions such as, Riemannian curvature tensor, Einstein manifold, Weyl Conformal curvature tensor, projective curvature tensor and almost contact metric manifolds.

In the second chapter the definition of Kenmotsu manifold and main theorems have been given.

In the last chapter some curvature conditions and equations which are used to provide these curvature conditions about Riemann curvature tensor, projective curvature tensor, on Kenmotsu manifolds are given. Under the light of these given information, the written theorems have been proved and results have been obtained.

Keywords: Almost contact metric manifold, Einstein manifold, Projective curvature tensor, Riemannian curvature tensor, Sasakian Manifold, Kenmotsu manifold.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasını yapmama vesile olan ve çalışmamın her basamağında yardımını ve bilgisini esirgemeyen değerli danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Ahmet YILDIZ' a ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen eşim Zeynep ve arkadaşım Muazzez'e teşekkür ederim.

Kamil SAĞLAM

Ekim 2008

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklamalar**
R	Reel Sayılar Cümlesi
M	Manifold
g	Metrik Tensör
C^{∞}	Diferensiyellenebilme
$[,]$	Lie Parantez Operatörü
$T_P(M)$	p noktasında teğet uzay
$T_P^{\perp}(M)$	p noktasında normal uzay
$\chi(M)$	M nin teğet vektör alanlarının uzayı
$\chi^{\perp}(M)$	M nin normal vektör alanlarının uzayı
∇	M üzerindeki afin koneksiyon
$\widetilde{\nabla}$	$\overline{M}$ üzerindeki afin koneksiyon
D	Normal Koneksiyon
R	M nin Riemann Eğrilik Tensörü
$\overline{R}$	$\overline{M}$ nin Riemann Eğrilik Tensörü
A_{ξ}	Şekil Operatörü
B	İkinci Temel Form
τ	Skaler Eğrilik
S	Ricci Tensörü
C	Weyl-Conformal Eğrilik Tensörü
$\widetilde{Z}$	Weyl-Concircular eğrilik Tensörü
P	Projektif Eğrilik Tensörü
Q	Ricci Operatörü
η	1-form
ϕ	(1, 1) tipinde tensör alanı
N_F	F nin Nijenhuis Torsiyon Tensörü

1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar tanıtılmıştır.

Tanım 1.1.1: M bir diferensiyellenebilir (C^{∞}) manifold olsun. M üzerindeki C^{∞} vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den $\boldsymbol{R}$ ye C^{∞} fonksiyonların uzayı $C^{\infty}(M, \boldsymbol{R})$ olmak üzere, M üzerinde;

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^{\infty}(M, \boldsymbol{R})$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik, 2-lineer g Riemann metriği ile birlikte M ye bir **Riemann manifoldu** adı verilir ve (M, g) şeklinde gösterilir [2].
M manifoldunun herhangi iki p ve q noktası için M üzerinde bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabilirse M ye **bağlantılı manifold** adı verilir. M bağlantılı ve temel grubu sadece birim elemandan oluşuyor ise M ye **basit bağlantılı** dır denir [1].

Tanım 1.1.2: M bir diferensiyellenebilir manifold ve M üzerindeki C^{∞} vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere;

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \xrightarrow{2-\text{lineer}} \chi(M)$$
$$(X, Y) \longrightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y$$

dönüşümü $\forall f, g \in C^{\infty}(M, \boldsymbol{R})$, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

i) $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$

ii) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$

iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

özeliklerini sağlarsa, ∇ ya M üzerinde bir **Afin Koneksiyon** adı verilir [4].

Tanım 1.1.3: (M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan bir afin koneksiyon olsun. O zaman $\forall X,Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere; ∇ dönüşümü;

i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (Koneksiyonun sıfır torsiyon özeliği),

ii) $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Koneksiyonun metrikle bağdaşması özeliği) şartlarını sağlıyorsa, ∇ ya M üzerinde **sıfır torsiyonlu Riemann Koneksiyon** veya M nin **Levi-Civita Koneksiyonu** adı verilir [4].

Tanım 1.1.4: M bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere;

$$\nabla : \chi(M) x \chi(M) \xrightarrow{2-lineer} \chi(M)$$
$$(X, Y) \longrightarrow \nabla(X,Y) = \nabla_X Y$$

biçiminde tanımlanan ∇ operatörü, M nin bir U bölgesi üzerinde tanımlı olup her bir C^{∞} $X, Y \in \chi(U)$ vektör alan çiftine U üzerinde $\nabla_X Y$ ile ifade edilen üçüncü bir C^{∞} vektör alanı karşılık getirir. Bu karşılık gelme aşağıdaki özellikleri sağladığında ∇ ya **Lineer Koneksiyon** (veya **kovaryant türev**) adı verilir [1].

$\forall X,Y, Z \in \chi(M)$, $\forall f \in C^{\infty}(M, \mathbf{R})$ olmak üzere;

i.) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$,

ii.) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$,

iii.) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

iv.) $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f)Y$

dir.

Tanım 1.1.5: (M, g) bir Riemann manifoldu, ∇ de M üzerindeki Levi–Civita koneksiyonu olsun.

$$R : \chi(M) x \chi(M) x \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$
$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{1.1}$$

ile tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde bir (1, 3)-tensör alanıdır ve M nin **Riemann eğrilik tensörü** olarak adlandırılır. Ayrıca $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$ tensörüne M nin **Riemann-Christoffel eğrilik tensörü** adı verilir.

Her $X, Y, Z, V, W \in \chi(M)$ için Riemann eğrilik tensörü R aşağıdaki özelliklere sahiptir [1]:

i.) $R(X, Y)Z = - R(Y, X)Z,$ (1.2)

ii.) $g(R(X, Y)V, W) = - g(R(X, Y)W, V),$ (1.3)

iii.) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0,$ (1.4)

iv.) $g(R(X, Y)V, W) = g(R(V, W)X, Y)$ (1.5)

Tanım 1.1.6: *(M, g)* bir Riemann manifoldu olsun. T_pM tanjant uzayının iki boyutlu altuzayı Π olmak üzere $V, W \in \Pi$ tanjant vektörleri için Q fonksiyonu;

$$Q(V, W) = g(V, V)g(W, W) - g(V, W)^2$$

biçiminde tanımlansın. $Q(V, W) \neq 0$ olmak üzere;

$$K(V,W) = \frac{g(R(V,W)W,V)}{Q(V,W)} \tag{1.6}$$

olup buna Π nin **kesitsel eğriliği** denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir [1].

Tanım 1.1.7: : *(M, g)* m-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, $\chi(M)$ in bir bazı olsun.

$$Q : \chi(M) \to \chi(M)$$

$$X \to Q(X) = QX = -\sum_{i=1}^{m} R(e_i, X)e_i$$

biçiminde tanımlanan Q operatörüne M nin **Ricci Operatörü** denir.

Tanım 1.1.8: *(M, g)* m-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, lokal ortonormal vektör alanları olsunlar

$$S : \chi(M) \times \chi(M) \to \mathbf{R}$$

$$(X, Y) \to S(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{g}(\mathrm{R}(\mathrm{e}_i, \mathrm{X})\mathrm{Y}, \mathrm{e}_i) \tag{1.7}$$

şeklinde tanımlı (0,2) tipindeki S tensör alanına, M üzerinde **Ricci eğrilik tensörü** adı verilir [5].

Tanım 1.1.9: *(M, g)* m-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için;

$$S(X, Y) = \lambda g(X,Y) \tag{1.8}$$

olacak biçimde M üzerinde bir λ fonksiyonu var ise yani M nin Ricci tensörü S, metrik tensör g nin bir katı ise M ye **Einstein manifoldu** adı verilir [5].

Tanım 1.1.10: *(M, g)* m-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere;

$$\tau = \sum_{i=1}^{m} S(e_i, e_i) \tag{1.9}$$

değerine M nin **skaler eğriliği** adı verilir [5].

Tanım 1.1.11: *M (2m+1)*-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için *M* nin **Weyl projektif eğrilik tensör alanı;**

$$P(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{2m}[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y] \tag{1.10}$$

ile tanımlanır. Burada *Q* Ricci operatörüdür [5].

Tanım 1.1.12: *M (2m+1)*-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için *M* nin **Weyl conformal eğrilik tensör alanı;**

$$C(X, Y)Z = R(X, Y)Z + \frac{1}{2m-1}[S(X, Z)Y - S(Y, Z)X + g(X, Z)QY$$

$$- g(Y, Z)QX] - \frac{\tau}{2m(2m-1)}[g(X, Z)Y - g(Y, Z)X] \tag{1.11}$$

ile tanımlanır. Burada *Q* Ricci operatörüdür [5].

Tanım 1.1.13: $C = 0$ ise *M* manifoldu **conformal flat** olarak adlandırılır [5].

Tanım 1.1.14: *M (2m+1)*-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $X, Y, W \in \chi(M)$ için *M* nin **Weyl concircular eğrilik tensör alanı;**

$$\widetilde{Z}(X, Y)W = R(X, Y)W - \frac{\tau}{2m(2m-1)}[g(Y, W)X - g(X, W)Y] \tag{1.12}$$

ile tanımlanır. Burada *Q* Ricci operatörüdür [5].

Tanım 1.1.15: Sabit eğrilikli, tam, bağlantılı manifoldlara **uzay form** denir. *(2m+1)*-boyutlu bir *M* uzay formu $M^{2m+1}(c)$ ile gösterilir. Eğer

$$c = 0 \ ise \quad M^{2m+1}(c) = \mathbf{E}^n \ \text{Öklid uzayı}$$
$$c = \frac{1}{r^2} \ ise \quad M^{2m+1}(c) = S^n(r) \ \text{küresi}$$
$$c = -\frac{1}{r^2} \ ise \quad M^{2m+1}(c) = H^n(r) \ \text{Hiperbolik uzay}$$

dır [7].

Tanım 1.1.16 : Eğer $\sigma \in M$ ise, D_σ, $T_\sigma M$ de ν vektörlerinin grubu olsun. Öyle ki inextendible geodezik γ_ν, [0,1] de tanımlanır. σ üzerinde M nin üsse ait haritası

$$\exp_{\sigma} : D_{\sigma} \rightarrow M$$

fonksiyonudur öyle ki $\forall \nu \in D_{\sigma}$ için $\exp_{\sigma}(\nu) = \gamma_{\nu}(1)$ dir [1].

Tanım 1.1.17 : $L : T_{\sigma}(M) \rightarrow T_{\bar{\sigma}}(\overline{M})$ bir lineer izometri olsun ve U , M üzerinde σ nin bir normal komşuluğu olsun öyle ki $\exp_{\bar{\sigma}}$, $L(\exp_{\sigma}{}^{-1}(U))$ grubunda tanımlanır. O zaman

$$\phi_L = \exp_{\bar{\sigma}} \circ L \circ \exp_{\sigma}{}^{-1} : U \rightarrow M$$

haritasına U üzerinde L nin **kutupsal koordinatı** denir [1].

Kısaca $\forall \nu \in U \subset T_{\sigma}(M)$ için $\phi_L : \exp_{\sigma}(\nu) \rightarrow \exp_{\bar{\sigma}}(L_{\nu})$ dir.

Kutupsal haritalar yeterince küçük U için daima bulunur ve Yardımcı Teorem 1.1.1 deki ilk iki özellik gösterir ki, eğer biz izometrinin var olduğunu araştırırsak, σ , L nin kutupsal haritası olmalıdır.

Yardımcı Teorem 1.1.1 : Yukarıdaki gösterim ile

i.) ϕ_L radyal geodezikleri radyal geodeziklere götürür. Açıkça, eğer $\nu \in T_o(M)$ ise, o zaman $\phi_L \circ \gamma_{\nu} = \gamma_{L\nu}$ dir.

ii.) σ üzerinde ϕ nin diferansiyel haritası L dir.

iii.) Eğer U yeterince küçük ise o zaman ϕ_L, M de σ nin bir normal komşuluğu üzerinde bir diffeomorfizmdir.

iv.) Eğer M tam ise, ϕ_L , σ nin her normal komşuluğunda tanımlanır [1].

Sonuç 1.1.1 : Bir yarı-Riemann manifold üzerinde aşağıdaki durumlar denktir.

i.) M lokal simetriktir.

ii.) Eğer $L : T_P(M) \rightarrow T_q(M)$ bir lokal simetrik ise eğriliği korur, o zaman p ve q nun normal komşuluklarının bir ϕ izometrisi vardır öyle ki $d\phi_p = L$ dir.

iii.) M nin her p noktasında lokal geodezik ξ_p bir izometriktir [1].

Tanım 1.1.18 : Bir yarı-Riemann uzayın simetriği, bağlantılı bir yarı-Riemann manilfold M dir, öyle ki $\forall p \in M$ için $T_P(M)$ üzerinde tek bir izometri $\xi_p : M \rightarrow M$ ile diferensiyel harita –id vardır.

İzometri ξ_p ye p de M nin global simetrisi denir. ξ_p, p de lokal geodezik simetrinin M nin tümüne genişletildiğinde tektir. Böylece ikincisi bir izometridir. Yukarıdaki sonuçtan simetrik, lokal simetriği kapsar [1].

Örnek 1.1.1 :

1. R^m simetriktir, her p noktası için harita $p+x \to p-x$ bir izometridir.
2. S^m küresi simetriktir, her p için p ve –p aracılığıyla R^{m+1} de, S^m genel öklidyen anlamda dizi çevresinde simetriktir.
3. Gerçekte her bağlantılı hiperkuadrik, simetriktir [1].

Tanım 1.1.19: *M* $m \geq 2$ boyutlu C^∞ sınıfından bağlantılı bir Riemann manifoldu olsun. *M* üzerinde tanımlı (0,2)-tipinde bir simetrik tensör alanı A olmak üzere Λ_A endomorfizmi

$$\Lambda_A : \quad \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M) \tag{1.13}$$

$$(X \Lambda_A Y)Z = A(Y,Z)X - A(X,Z)Y \tag{1.14}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer A=g alınırsa son denklem

$$(X \Lambda_g Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y \tag{1.15}$$

biçimine indirgenir. Bundan sonra $(X \Lambda_g Y)$ yerine kısaca $X \Lambda Y$ kullanılacaktır [8].

M üzerinde (0,k)-tipinde $(k \geq 1)$ bir T tensör alanı ve (0,2)-tipinde bir simetrik A tensör alanı verildiğinde R.T ve Q(A,T) tensörleri sırası ile ;

$$(R.T)(X_1,X_2,\ldots,X_k;X,Y) = -T(R(X,Y)X_1,X_2,\ldots,X_k) - \ldots$$
$$-T(X_1,X_2,\ldots,R(X,Y)X_k) \tag{1.16}$$

ve

$$Q(A,T)(X_1,X_2,\ldots,X_k;X,Y) = -T((X \Lambda_A Y)X_1,X_2,\ldots,X_k) - \ldots$$
$$-T(X_1,X_2,\ldots,(X \Lambda_A Y)X_k) \tag{1.17}$$

biçiminde tanımlanır [3].

Böylece (1.16) ve (1.17) denklemlerinde T=R ve A=g alındığında

$$(R.R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) = -R(R(X,Y)X_1,X_2,X_3,X_4) - \ldots$$

$$-R(X_1,X_2, X_3,R(X,Y)X_4) \quad (1.18)$$

$$Q(g,R)\,(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-R((X\Lambda_g\, Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-\ldots$$

$$-R(X_1,X_2,X_3,R(X\Lambda_g\, Y)X_4) \quad (1.19)$$

T=C ve A=g alındığında

$$(R.C)\,(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-C(R(X,Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-\ldots$$

$$-C(X_1,X_2,X_3,R(X,Y)X_4) \quad (1.20)$$

$$Q(g,C)\,(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-C((X\Lambda_g\, Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-\ldots$$

$$-C(X_1,X_2,X_3,R(X\Lambda_g\, Y)X_4) \quad (1.21)$$

T=S ve A=g alındığında

$$(R.S)\,(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-S(R(X,Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-\ldots$$

$$-S(X_1,X_2,X_3,R(X,Y)X_4) \quad (1.22)$$

$$Q(g,S)\,(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-S((X\Lambda_g\, Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-\ldots$$

$$-S(X_1,X_2, X_3,R(X\Lambda_g\, Y)X_4) \quad (1.23)$$

ve ayrıca A=S, T=R için (1.17) denkleminden

$$Q(S,R)\,(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-R((X\Lambda_S\, Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-\ldots$$

$$-R(X_1,X_2,X_3,R(X\Lambda_S\, Y)X_4) \quad (1.24)$$

olarak elde edilir. Eğer *M* nin her p noktası için bundan başka,

Eğer R.R=0 ise *M* ye *semisimetriktir* denir [9].
Eğer R.S=0 ise *M* ye *Ricci-semisimetriktir* denir [9].
Eğer R.C=0 ise *M* ye *Weyl-semisimetriktir* denir [10].

Tanım1.1.120: $m \geq 3$ boyutlu bir *(M,g)* Riemann manifoldu için eğer *M* nin her noktasında R.R ve Q(g,R) tensörleri lineer bağımlı ise *M* ye **pseudosimetriktir** denir.
Yani, *M* nin pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart, $U_R = \{p \in M : Q(g,R) \neq 0\}$ kümesi üzerinde $R.R = L_R Q(g,R)$ olmasıdır. L_R, U_R üzerine bir fonksiyondur [10].

Tanım1.1.21: $m \geq 3$ boyutlu bir *(M,g)* Riemann manifoldu için eğer *M* nin her noktasında R.S ve Q(g,R) tensörleri lineer bağımlı ise *M* ye **Ricci- pseudosimetrik manifold** denir.
Yani, *M* nin Ricci-pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart, $U_S = \{p \in M : S - \frac{\kappa}{n} g \neq 0\}$ kümesi üzerinde $R.S = L_S Q(g,S)$ olmasıdır. L_S ,U_S üzerinde tanımlı bir fonksiyondur [10].

Tanım1.1.22: $m \geq 4$ boyutlu bir *(M,g)* Riemann manifoldu için eğer *M* nin her noktasında R.C ve Q(g,C) tensörleri lineer bağımlı ise *M* ye **Weyl- pseudosimetrik manifold** denir.
Yani, *M* nin Weyl-pseudosimetrik olması için gerek ve yeter şart, $U_C = \{p \in M : p \in M$ de $C \neq 0\}$ kümesi üzerinde $R.C = L_C Q(g,C)$ olmasıdır. L_C ,U_C üzerinde tanımlı bir fonksiyondur [10].

Tanım1.1.23: Eğer R.R ve Q(S,R) tensörleri lineer bağımlı ise yani R.R=LQ(S,R) ise *M* ye **Genelleştirilmiş Ricci-pseudosimetriktir** denir.
Yukarıda 1.1.19, 1.1.20, 1.1.21 ve 1.1.22 numaralı tanımlarda tanımlanan eğrilik şartları için aşağıdaki kapsama bağıntıları geçerlidir.

$$R.R = 0 \subset R.S = 0$$
$$R.R = 0 \subset R.C = 0$$
$$R.S = 0 \subset R.S = L_S Q(g,S)$$
$$R.R = 0 \subset R.R = L_R Q(g,R)$$
$$R.C = 0 \subset R.C = L_C Q(g,C)$$
$$R.R = L_R Q(g,R) \subset R.S = L_S Q(g,S)$$
$$R.R = L_R Q(g,R) \subset R.C = L_C Q(g,C)$$

Eğer *M* semisimetrik olmayan fakat pseudosimetrik bir manifold ise *M* ye proper pseudosimetrik, Ricci-semisimetrik olmayan fakat Ricci-pseudosimetrik manifold ise *M* ye proper Ricci-pseudosimetrik, Weyl-semisimetrik olmayan fakat Weyl-pseudosimetrik bir manifold ise *M* ye proper Weyl-pseudosimetriktir denir [10].

Tanım1.1.24: Bir *(M ,g)* $m \geq 3$ boyutlu diferensiyellenebilir manifoldu için eğer

$$(\nabla_X S)(Y,Z) = \alpha(X) S(Y,Z) \tag{1.25}$$

olacak şekilde bir $\alpha(X)$ 1-formu var ise *M* ye Ricci Rekürent denir.

$$(\nabla_X S)(Y,Z) = \alpha(X) S(Y,Z) + \beta(X) g(Y,Z) \tag{1.26}$$

olacak biçimde $\alpha(X)$ ve $\beta(X)$ 1-formları var ise M ye genelleştirilmiş Ricci Rekürent denir. S nin kovaryant türevi ∇S

$$(\nabla_X S)(Y,Z)+\nabla_Y S(X,Z)+(\nabla_Z S)(X,Y)=0 \tag{1.27}$$

ile tanımlanır. Eğer;

$$(\nabla_X S)(Y,Z)+\nabla_Y S(X,Z)+(\nabla_Z S)(X,Y)=0 \tag{1.28}$$

ise *M* ye dairesel paralel Ricci tensöre sahiptir denir.
Bundan başka g metrik tensörünün türevi

$$(\nabla_X g)(Y,Z)=\nabla_X g(Y,Z)-g(\nabla_X Y,Z)-g(Y,\nabla_X Z) \tag{1.29}$$

ile ifade edilir [11].

1.1. Hemen Hemen Değme Metrik Manifoldları

Tanım 1.2.1: *M* bir *(2m+1)*-boyutlu manifold, ϕ, ξ, η da *M* üzerinde, sırası ile, (1,1)-tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve bir 1-form olsun. Eğer ϕ, ξ, η için, *M* üzerinde herhangi bir vektör alanı *X* olmak üzere;

$$\eta(\xi)=1, \tag{1.30}$$

ve

$$\phi^2 X=-X+\eta(X)\xi, \tag{1.31}$$

özellikleri sağlanıyor ise o zaman (ϕ, ξ, η) ya *M* üzerinde bir **hemen hemen değme yapısı** denir. *M* bu yapı ile bir **hemen hemen değme manifoldu** olarak adlandırılır [5].

Teorem 1.2.1: (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı için;

i) $\phi\xi=0,$ (1.32)

ii) $\eta(\phi X)=0,$ (1.33)

iii) $rank\ \phi=2n,$ (1.34)

dir [5].

Tanım 1.2.2: Hemen hemen değme manifoldu *M* verilsin. *M* üzerinde hemen hemen değme yapısı (ϕ, ξ, η) olsun. *M* üzerinde bir *g* Riemann metriği;

$$\eta(X)=g(X,\xi), \tag{1.35}$$

ve

$$g(\phi X,\phi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y) \tag{1.36}$$

şartlarını sağlıyor ise g metriğine M üzerinde **hemen hemen değme metrik,** (ϕ,ξ,η,g) yapısına da **hemen hemen değme metrik yapısı,** (ϕ, ξ, η, g) yapısı ile M ye de **hemen hemen değme metrik manifoldu** denir [5].

Sonuç 1.2.1: $(2m+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifoldu M ile hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) verilsin. Böylece,

$$g(\phi X, Y)=-g(X, \phi Y) \tag{1.37}$$

dir [5].

Tanım 1.2.3: $(2m+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M verilsin. Herbir η 1-formu için $\eta\wedge(d\eta)^n \neq 0$ şartı sağlanır ise η ya M nin **değme yapısı** ve M ye de **değme manifoldu** denir [5].

Teorem 1.2.2: $(2m+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M verilsin. M nin bir değme yapısı η verildiğinde;

$$g(X, \phi Y) = d\eta(X, Y) \tag{1.38}$$

olacak şekilde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) vardır [5]

Tanım 1.2.4: M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) için;

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y)$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) nın **2.temel formu** denir [5].

1.2. Hemen Hemen Değme Manifoldların Torsion Tensörü

Tanım 1.3.1: V bir reel vektör uzayı olmak üzere;

$$J : V \longrightarrow V$$

lineer dönüşümü;

$$J^2 = -I$$

şartını sağlıyor ise J ye V üzerinde bir **kompleks yapı** denir.

($2m+1$)-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M verilsin. Bu manifold üzerinde hemen hemen değme yapısı (ϕ, ξ, η) olsun. Reel bir doğruyu $\boldsymbol{R}$ ile göstererek $M\times\boldsymbol{R}$ çarpım manifoldunu gözönüne alalım. $M\times\boldsymbol{R}$ üzerinde herhangi bir vektör alanı;

$$(X, f\frac{d}{dt})$$

şeklindedir. Burada X, M ye teğet bir vektör alanı, t, $\boldsymbol{R}$ nin bir koordinatı ve f , $M\times\boldsymbol{R}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.

$M\times\boldsymbol{R}$ nin tanjant uzayındaki bir J lineer dönüşümü;

$$J\,(X, f\frac{d}{dt}) = (\phi X - f\xi,\ \eta(X)\frac{d}{dt}) \tag{1.39}$$

ile tanımlanır [5].

Sonuç 1.3.1: Yukarıdaki şekilde tanımlanan J dönüşümü $M\times\boldsymbol{R}$ üzerinde bir **hemen hemen kompleks yapı** denir [5].

Tanım 1.3.2: M bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere M üzerinde (1,1)-tipinde bir tensör alanı F olsun. $\forall X, Y\in\chi(M)$ için;

$$N_F(X,Y) = F^2[X,Y]+[FX,FY]-F[FX,Y]-F[X,FY]$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alanına F nin **Nijenhuis torsion tensörü** denir.

$F=J$ hemen hemen kompleks yapı olması halinde de,

$$\begin{aligned} N_J(X,Y) &= J^2[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] \\ &= -[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] \end{aligned} \tag{1.40}$$

dir [5].

Tanım 1.3.3: Hemen hemen kompleks manifoldu (M, J) verilsin. $N_J = 0$ ise J dönüşümüne integrallenebilirdir denir [5].

Tanım 1.3.4: Eğer $M\times\boldsymbol{R}$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısına **normaldir** denir [5].

Örnek 1.3.1: E^4 Kaehler manifoldunun 3-boyutlu bir reel hiperküresi S^3 olsun. E^4 de S^3 ün bir birim normali C olmak üzere E^4 ün hemen hemen kompleks tensör alanı J,

$$J : E^4 \longrightarrow E^4$$

$$JC=-\xi$$

biçiminde tanımlansın. O zaman ξ, S^3 üzerinde bir birim vektör alanı olur. Yani $\xi \in \chi(S^3)$ dir. S^3 e teğet her bir X vektör alanı için $\eta(X)=g(X,\xi)$ olmak üzere η 1-formu iyi tanımlıdır. Üstelik $\eta(\xi)=1$ dir. Diğer yandan,

$$JX=\phi X+\eta(X)C$$

eşitliği ile ϕ lineer dönüşümünü tanımlayalım. Buna göre $\forall p=(p_1, p_2, p_3, p_4) \in S^3$ için;

$$J=\begin{bmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yapısı yardımı ile;

$$J(C(p))=J(p_1, p_2, p_3, p_4)=(-p_3, -p_4, p_1, p_2)= -\xi$$

elde edilir [13]. Burada;

$$\xi=\begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

dir. Şimdi $g(X, \xi)\xi$ için;

$$g(X, \xi)\xi=\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan,

$$g(X, \xi)\xi = (x_1 p_3 + x_2 p_4 - x_3 p_1 - x_4 p_2)\begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece;

$\lambda=(x_1 p_3 + x_2 p_4 - x_3 p_1 - x_4 p_2)$

olmak üzere;

$g(X, \xi)\xi = \lambda\xi$

eşitliği elde edilir. Ayrıca,

$\phi(\phi X)= J(\phi X)-\eta(\phi X)C$

$=J(JX-\eta(X)C)-\eta(JX-\eta(X)C)C$

$$=J(\begin{bmatrix}-x_3\\-x_4\\x_1\\x_2\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{bmatrix})-g(JX-\eta(X)C,\xi)C$$

$$=\begin{bmatrix}-x_1+\lambda p_3\\-x_2+\lambda p_4\\-x_3-\lambda p_1\\-x_4-\lambda p_2\end{bmatrix}-<\begin{bmatrix}-x_3-\lambda p_1\\-x_4-\lambda p_2\\-x_1-\lambda p_3\\-x_2-\lambda p_4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}p_3\\p_4\\-p_1\\-p_2\end{bmatrix}>\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\\p_4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-x_1\\-x_2\\-x_3\\-x_4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\lambda p_3-\left[(x_3-\lambda p_1)p_3+(x_4-\lambda p_2)p_4+(x_1+\lambda p_3)p_1+(x_2+\lambda p_4)p_2\right]p_1\\-\lambda p_4-\left[(x_3-\lambda p_1)p_3+(x_4-\lambda p_2)p_4+(x_1+\lambda p_3)p_1+(x_2+\lambda p_4)p_2\right]p_2\\-\lambda p_1-\left[(x_3-\lambda p_1)p_3+(x_4-\lambda p_2)p_4+(x_1+\lambda p_3)p_1+(x_2+\lambda p_4)p_2\right]p_3\\-\lambda p_2-\left[(x_3-\lambda p_1)p_3+(x_4-\lambda p_2)p_4+(x_1+\lambda p_3)p_1+(x_2+\lambda p_4)p_2\right]p_4\end{bmatrix}$$

dir. O zaman

$$\phi(\phi X)=-\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}p_3\\p_4\\-p_1\\-p_2\end{bmatrix}$$

olduğundan,

$\phi^2X=-X+\eta(X)\xi$

elde edilir. Bununla birlikte,

$\phi\xi = J\xi-\eta(\xi)C$

olduğundan,

$$\phi\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = 0$$

bulunur.

Böylece;

$$\begin{aligned} \eta(\phi X) &= g(\phi X, \xi) \\ &= g(JX - \eta(X)C, \xi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğu da açıkça görülebilir.

Sonuç olarak (ϕ, ξ, η, g) yapısı S^3 üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı oluşturur.

1.3. K-Değme Manifoldları

Tanım 1.4.1: M diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere;

$$\varphi : \mathbf{R} \times M \xrightarrow{C^\infty} M$$
$$(t, p) \longrightarrow \varphi_t(p)$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyor ise φ ye M nin **diferensiyellenebilir bir 1-parametreli grubu** adı verilir.

i) $\forall t \in \mathbf{R}$ için

$\varphi_t : M \longrightarrow M$

$p \longrightarrow \varphi_t(p)$ bir diffeomorfizm

ii) $\forall t, s \in \mathbf{R}$ ve $p \in M$ için

$\varphi_{t+s}(p) = \varphi_t(\varphi_s(p))$

dir [2].

Tanım 1.4.2: M üzerinde bir vektör alanı X ve φ_t ise X ile genelleştirilmiş lokal dönüşümlü bir 1-parametreli grubu olsun. X vektör alanına göre bir K tensör alanının X yönünde $L_X K$ **Lie türevi,**

$$(L_X K)_X = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [K_X - (\varphi_t K)_X]$$

şeklinde tanımlanır [2].

Tanım 1.4.3 : M Riemann metriği g olan bir Riemann manifoldu ve M üzerinde bir vektör alanı X verilsin. M nin her bir noktasının bir komşuluğunda X ile meydana gelen lokal dönüşümlerin lokal 1-parametreli grubu lokal izometrilerden oluşuyor ise X vektör alanı **Killing vektör alanı** adı verilir. Böylece X bir Killing vektör alanıdır $\Leftrightarrow$ $L_X g = 0$ dır [5].

Tanım 1.4.4: Değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) olan $(2m+1)$-boyutlu bir M manifoldu **değme metrik manifold** olarak adlandırılır [5].

Tanım 1.4.5: $(2m+1)$-boyutlu değme metrik manifoldu M verilsin. Eğer (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısında verilen ξ vektör alanı g ye göre bir Killing vektör alanı ise o zaman M üzerinde değme yapı **K-değme yapısı** ve M ye de **K-değme manifoldu** adı verilir [5].

Önerme 1.4.1: Bir değme metrik manifoldu M olsun. O zaman M bir K-değme manifoldu olması için gerek ve yeter şart

$$\nabla_X \xi = -\phi X \tag{1.41}$$

dir [5].

Teorem 1.4.1: $(2m+1)$-boyutlu bir Riemann manifoldu M nin bir K-değme manifoldu olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır.

i-) M bir ξ birim Killing vektör alanına sahiptir.

ii-) M nin her bir noktasında ξ yı kapsayan düzlem kesitleri için kesitsel eğriliği 1 e eşittir [5].

2. KENMOTSU MANİFOLDLAR

Tanım 2.1: M bir $(n=2m+1)-$boyutlu hemen hemen değme metrik manifoldu olsun. M üzerinde

$$(\nabla_X \phi)Y = g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X \tag{2.1}$$

eşitliği var ise M ye bir **Kenmotsu manifold** adı verilir. Burada ∇, g Riemann metriğine göre Levi-Civita koneksiyonudur [6].

Önerme 2.1: Bir M Kenmotsu manifoldu için (2.1) den aşağıdaki eşitlikler geçerlidir [6].

$$\nabla_X \xi = X - \eta(X)\xi, \tag{2.2}$$

$$(\nabla_X \eta)Y = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

Önerme 2.2: Bir M Kenmotsu manifoldunda R Riemann eğrilik tensörü olmak üzere

$$R(X,Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X \tag{2.3}$$

dir [6].

Teorem 2.1: M bir $(2m+1)-$boyutlu Kenmotsu manifold ve M üzerinde Riemann eğrilik tensörü R olsun. Bu durumda

$$R(\xi, X)Y = -g(X,Y)\xi - \eta(Y)X \tag{2.4}$$

dir [6].

Sonuç 2.1: M bir Kenmotsu manifold olsun. (2.4) denkleminden her X, Y, Z vektör alanları için

$$\eta(R(X,Y)Z = g(X,Z)\eta(Y) - g(Y,Z)\eta(X)$$

dir [6].

Sonuç 2.2: M bir Kenmotsu manifold olsun. (2.4) denkleminden her X vektör alanı için

$$R(\xi, X)\xi = X - \eta(X)\xi \tag{2.5}$$

dır [6].

Sonuç 2.3: M bir $(n=2m+1)-$boyutlu Kenmotsu manifold olsun. M nin Ricci tensörü S ve Ricci operatörü Q olmak üzere

$$S(X,\xi) = (1-n)\eta(X) \tag{2.6}$$

ve

$$Q\xi = (1-n)\xi \tag{2.7}$$

dır [6].

3. KENMOTSU MANİFOLDLARDA BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI

Bu bölümde Kenmotsu manifoldlar üzerinde sağlanan bazı eğrilik şartlarını vereceğiz.

Teorem 3.1: M^{2m+1} $(n = 2m+1)-$boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. M üzerinde $R(\xi, X) \cdot S = 0$ olması için gerek ve yeter şart M nin bir Einstein manifoldu olmasıdır.

İspat: $\forall X, U, W \in \chi(M)$ için M üzerinde $R(\xi, X) \cdot S = 0$ şartı sağlansın. O zaman (1.16) dan

$$(R(\xi, X) \cdot S)(U, W) = R(\xi, X)S(U, W) - S(R(\xi, X)U, W) - S(U, R(\xi, X)W) = 0 \quad (3.1)$$

elde ederiz. (3.1) den

$$(R(\xi, X) \cdot S)(U, W) = -S(R(\xi, X)U, W) - S(U, R(\xi, X)W) = 0$$

yazarız. Dolayısıyla

$$S(R(\xi, X)U, W) + S(U, R(\xi, X)W) = 0 \quad (3.2)$$

elde edilir. Böylece (2.4) kullanılarak

$$\begin{aligned} S(R(\xi, X)U, W) &= S(\eta(U)X - g(X, U)\xi, W) \\ &= \eta(U)S(X, W) - g(X, U)S(\xi, W) \\ &= \eta(U)S(X, W) + (n-1)\eta(W)g(X, U) \end{aligned} \quad (3.3)$$

ve

$$\begin{aligned} S(U, R(\xi, X)W) &= S(U, \eta(W)X - g(X, W)\xi) \\ &= \eta(W)S(U, X) - g(X, W)S(U, \xi) \\ &= \eta(W)S(U, X) + (n-1)\eta(U)g(X, W) \end{aligned} \quad (3.4)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.3) ve (3.4) eşitliklerini (3.2) de yerine yazıp, (2.6) denkleminide kullanırsak

$$\eta(U)S(X, W) + (n-1)\eta(W)g(X, U) + \eta(W)S(U, X) + (n-1)\eta(U)g(X, W) = 0$$

elde ederiz. Bu denklemde $U = \xi$ alırsak

$$S(X, W) + (n-1)\eta(W)\eta(X) - (n-1)\eta(X)\eta(W) + (n-1)g(X, W) = 0$$

bulunur. Bu denklemi düzenlersek

$$S(X, W) = -(n-1)g(X, W)$$

eşitliğini buluruz. Dolayısıyla M manifoldu bir Einstein manifolddur.

Tersine M bir Einstein manifold ise

$$R(\xi, X) \cdot S = 0$$

olduğu kolayca görülür.

Teorem 3.2: M^{2m+1} $(n = 2m+1)-$boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. M üzerinde $R(\xi, X)\cdot P = 0$ olması için gerek ve yeter şart M nin bir Einstein manifoldu olmasıdır.

İspat: $\forall X, U, W, Z \in \chi(M)$ için M üzerinde $R(\xi, X)\cdot P = 0$ şartı sağlansın. O zaman (1.16) dan

$$(R(\xi, X)\cdot P)(U,W)Z = R(\xi, X)P(U,W)Z - P(R(\xi, X)U,W)Z$$
$$- P(U, R(\xi, X)W)Z - P(U,W)R(\xi, X)Z = 0 \tag{3.5}$$

dir. Bu denklemi düzenlersek

$$R(\xi, X)P(U,W)Z - P(R(\xi, X)U,W)Z - P(U, R(\xi, X)W)Z - P(U,W)R(\xi, X)Z = 0 \tag{3.6}$$

dır. (1.10) denkleminden

$$R(\xi, X)(R(U,W)Z - \frac{1}{n-1}\left[S(W,Z)U - S(U,Z)W\right])$$
$$- R(R(\xi, X)U,W)Z + \frac{1}{n-1}\left[S(W,Z)R(\xi, X)U - S(R(\xi, X)U,Z)W\right]$$
$$- R(U,R(\xi, X)W)Z + \frac{1}{n-1}\left[S(R(\xi, X)W,Z)U - S(U,Z)R(\xi, X)W\right]$$
$$- R(U,W)R(\xi, X)Z + \frac{1}{n-1}\left[S(W,R(\xi, X)Z)U - S(U,R(\xi, X)Z)W\right] = 0$$

elde ederiz. Bu denklemde gerekli düzenlemeler yapılınca

$$R(\xi, X)(R(U,W)Z - \frac{1}{n-1}S(W,Z)R(\xi, X)U + \frac{1}{n-1}S(U,Z)R(\xi, X)W$$
$$- R(R(\xi, X)U,W)Z + \frac{1}{n-1}S(W,Z)R(\xi, X)U - \frac{1}{n-1}S(R(\xi, X)U,Z)W$$
$$- R(U,R(\xi, X)W)Z + \frac{1}{n-1}S(R(\xi, X)W,Z)U - \frac{1}{n-1}S(U,Z)R(\xi, X)W$$
$$- R(U,W)R(\xi, X)Z + \frac{1}{n-1}S(W,R(\xi, X)Z)U - \frac{1}{n-1}S(U,R(\xi, X)Z)W = 0$$

elde edilir. Son denklemde gerekli sadeleştirmeler yaparsak

$$R(\xi, X)(R(U,W)Z - R(R(\xi, X)U,W)Z - R(U,R(\xi, X)W)Z - R(U,W)R(\xi, X)Z$$

$$-\frac{1}{n-1}S(R(\xi, X)U,Z)W + \frac{1}{n-1}S(R(\xi, X)W,Z)U$$
$$+\frac{1}{n-1}S(W,R(\xi, X)Z)U - \frac{1}{n-1}S(U,R(\xi, X)Z)W = 0 \tag{3.7}$$

dir.

Şimdi (3.7) da $U = \xi$ alalım.

$$R(\xi, X)(R(\xi,W)Z - R(R(\xi, X)\xi,W)Z - R(\xi, R(\xi, X)W)Z - R(\xi,W)R(\xi, X)Z$$

$$-\frac{1}{n-1}S(R(\xi, X)\xi, Z)W + \frac{1}{n-1}S(R(\xi, X)W, Z)\xi$$
$$+\frac{1}{n-1}S(W, R(\xi, X)Z)\xi - \frac{1}{n-1}S(\xi, R(\xi, X)Z)W = 0 \tag{3.8}$$

dır. (3.8) eşitliğinin her iki tarafını ξ ile iç çarpım uygularsak

$$g(R(\xi, X)(R(\xi,W)Z,\xi) - g(R(R(\xi, X)\xi,W)Z,\xi) - g(R(\xi, R(\xi, X)W)Z,\xi)$$

$$-g(R(\xi,W)R(\xi, X)Z,\xi) - \frac{1}{n-1}S(R(\xi, X)\xi, Z)g(W,\xi)$$

$$+\frac{1}{n-1}S(R(\xi, X)W, Z)g(\xi,\xi) + \frac{1}{n-1}S(W, R(\xi, X)Z)g(\xi,\xi)$$
$$-\frac{1}{n-1}S(\xi, R(\xi, X)Z)g(W,\xi) = 0 \tag{3.9}$$

dir. Böylece (3.9) deki eşitlikleri ayrı ayrı hesaplarsak

$$\begin{aligned} g(R(\xi, X)(R(\xi,W)Z,\xi) &= g(R(\xi, X)[\eta(Z)W - g(Z,W)\xi],\xi) \\ &= g(\eta(Z)R(\xi, X)W - g(Z,W)R(\xi, X)\xi,\xi) \\ &= \eta(Z)g(R(\xi, X)W,\xi - g(Z,W)g(R(\xi, X)\xi,\xi)) \\ &= \eta(Z)g(R(\xi, X)W,\xi) \\ &= \eta(Z)g(\eta(W)X - g(X,W)\xi,\xi) \\ &= \eta(Z)\eta(W)g(X,\xi) - \eta(Z)g(X,W)g(\xi,\xi) \\ &= \eta(Z)\eta(W)\eta(X) - \eta(Z)g(X,W)\ , \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} g(R(R(\xi, X)\xi,W)Z,\xi) &= -g(R(R(\xi, X)\xi,W)\xi, Z) \\ &= -g(\eta(R(\xi, X)\xi)W - \eta(W)R(\xi, X)\xi, Z) \end{aligned}$$

$$=g\left(\eta(W)R(\xi,X)\xi,Z\right)$$

$$=\eta(W)g\left(R(\xi,X)\xi,Z\right)$$

$$=-\eta(W)g\left(R(\xi,X)Z,\xi\right)$$

$$=-\eta(W)g\left(\eta(Z)X-g(X,Z)\xi,\xi\right)$$

$$=-\eta(W)\eta(Z)\eta(X)+g(X,Z)\eta(W), \tag{3.11}$$

$$g\left(R(\xi,R(\xi,X)W)Z,\xi\right)=g\left(\eta(Z)R(\xi,X)W-g\left(R(\xi,X)W,Z\right)\xi,\xi\right)$$

$$=\eta(Z)g\left(R(\xi,X)W,\xi\right)-g\left(R(\xi,X)W,Z\right)$$

$$=\eta(Z)\left[\eta(W)\eta(X)-g(X,W)\right]-\eta(W)g(X,Z)+g(X,W)\eta(Z)$$

$$=\eta(Z)\eta(W)\eta(X)-g(X,W)\eta(Z)-g(X,Z)\eta(W)+g(X,W)\eta(Z)$$

$$=\eta(Z)\eta(W)\eta(X)-g(X,Z)\eta(W), \tag{3.12}$$

$$g\left(R(\xi,W)R(\xi,X)Z,\xi\right)=g\left(R(\xi,W)\{\eta(Z)X-g(Z,X)\xi\},\xi\right)$$

$$=g\left(\eta(Z)R(\xi,W)X-g(Z,X)R(\xi,W)\xi,\xi\right)$$

$$=\eta(Z)g\left(R(\xi,W)X,\xi\right)-g(Z,X)g\left(R(\xi,W)\xi,\xi\right)$$

$$=\eta(Z)g\left(R(\xi,W)X,\xi\right)$$

$$=\eta(Z)g\left(\eta(X)W-g(W,X)\xi,\xi\right)$$

$$=\eta(Z)\eta(X)g(W,\xi)-\eta(Z)g(W,X)g(\xi,\xi)$$

$$=\eta(Z)\eta(X)\eta(W)-\eta(Z)g(W,X), \tag{3.13}$$

$$\frac{1}{n-1}S(R(\xi,X)\xi,Z)g(W,\xi)=\frac{1}{n-1}\left[S(X-\eta(X)\xi,Z)\right]\eta(W)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[S(X,Z) - \eta(X)S(\xi,Z)\right]\eta(W)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[S(X,Z) - \eta(X)(-(n-1)\eta(Z)\right]\eta(W)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[S(X,Z) + (n-1)\eta(X)\eta(Z)\right]\eta(W)$$

$$= \frac{1}{n-1}S(X,Z)\eta(W) + \eta(X)\eta(Z)\eta(W), \tag{3.14}$$

$$\frac{1}{n-1}S(R(\xi,X)W,Z)g(\xi,\xi) = \frac{1}{n-1}\left[S(\eta(W)X - g(X,W)\xi,Z)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\eta(W)S(X,Z) - g(X,W)S(\xi,Z)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\eta(W)S(X,Z) - g(X,W)(-(n-1)\eta(Z)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\eta(W)S(X,Z) + (n-1)g(X,W)\eta(Z)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\eta(W)S(X,Z) + g(X,W)\eta(Z), \tag{3.15}$$

$$\frac{1}{n-1}S(W,R(\xi,X)Z)g(\xi,\xi) = \frac{1}{n-1}\left[S(W,\eta(Z)X - g(X,Z)\xi)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\eta(Z)S(W,X) - g(X,Z)S(W,\xi)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\eta(Z)S(W,X) - g(X,Z)(-(n-1)\eta(W)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\eta(Z)S(W,X) + (n-1)g(X,Z)\eta(W)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\eta(Z)S(W,X) + g(X,Z)\eta(W), \tag{3.16}$$

$$\frac{1}{n-1}S(\xi,R(\xi,X)Z)g(W,\xi)=\frac{1}{n-1}\left[S(\xi,\eta(Z)X-g(X,Z)\xi)\right]\eta(W)$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\eta(Z)S(\xi,X)-g(X,Z)S(\xi,\xi)\right]\eta(W)$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\eta(Z)(-(n-1)\eta(X)-g(X,Z)(-(n-1)\eta(\xi)\right]\eta(W)$$

$$=\frac{1}{n-1}(-(n-1)\eta(Z)\eta(X)\eta(W)+\frac{1}{n-1}(n-1)g(X,Z)\eta(\xi)\eta(W)$$

$$=-\eta(Z)\eta(X)\eta(W)+\eta(W)g(X,Z)\,, \qquad (3.17)$$

elde ederiz. (3.10) - (3.17) eşitlikleri (3.9) da yerine yazarsak

$$\eta(Z)\eta(W)\eta(X)-\eta(Z)g(X,W)+\eta(W)\eta(Z)\eta(X)-g(X,Z)\eta(W)$$

$$-\eta(Z)\eta(W)\eta(X)+g(X,Z)\eta(W)-\eta(Z)\eta(X)\eta(W)+\eta(Z)g(W,X)$$

$$-\frac{1}{n-1}S(X,Z)\eta(W)-\eta(X)\eta(Z)\eta(W)+\frac{1}{n-1}\eta(W)S(X,Z)+g(X,W)\eta(Z)$$

$$+\frac{1}{n-1}\eta(Z)S(W,X)+g(X,Z)\eta(W)+\eta(Z)\eta(X)\eta(W)-\eta(W)g(X,Z)=0$$

dir. Böylece son denklemden

$$\eta(Z)[g(W,X)+\frac{1}{n-1}\eta(Z)S(W,X)]=0 \qquad (3.18)$$

elde edilir. $\eta(Z)\neq 0$ olduğundan,

$$g(W,X)+\frac{1}{n-1}S(W,X)=0$$

veya

$$S(W,X)=-(n-1)g(W,X)$$

dir. Dolayısıyla M manifoldu bir Einstein manifolddur.

Tersine M bir Einstein manifold ise

$$R(\xi,X)\cdot P=0$$

olduğu görülür.

Teorem 3.3: M^{2m+1} $(n=2m+1)-$boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. M üzerinde $P(\xi,X)\cdot R=0$ olması için gerek ve yeter şart M nin bir Einstein manifoldu olmasıdır.

İspat: $\forall X,U,W,Z\in\chi(M)$ için M üzerinde $P(\xi,X)\cdot R=0$ şartı sağlansın. (1.16) dan

$$\begin{aligned}(P(\xi,X)\cdot R)(U,W)Z &= P(\xi,X)R(U,W)Z-R(P(\xi,X)U,W)Z\\ &\quad -R(U,P(\xi,X)W)Z-R(U,W)P(\xi,X)Z=0\end{aligned} \tag{3.19}$$

yazabiliriz. Böylece (3.19) denklemini

$$P(\xi,X)R(U,W)Z-R(P(\xi,X)U,W)Z-P(U,R(\xi,X)W)Z-P(U,W)R(\xi,X)Z=0 \tag{3.20}$$

şeklinde yazabiliriz. (1.10) denkleminden

$$\begin{aligned}&P(\xi,X)R(U,W)Z-R(R(\xi,X)U-\frac{1}{n-1}[S(X,U)\xi-S(\xi,U)X],W)Z\\ &-R(U,R(\xi,X)W-\frac{1}{n-1}[S(X,W)\xi-S(\xi,W)X])Z-P(U,W)R(\xi,X)Z=0\end{aligned} \tag{3.21}$$

elde edilir. (3.21) denklemini düzenlersek

$$\begin{aligned}&R(\xi,X)R(U,W)Z-\frac{1}{n-1}[S(X,R(U,W)Z)\xi-S(\xi,R(U,W)Z)X]\\ &-R(R(\xi,X)U-\frac{1}{n-1}[S(X,U)\xi-S(\xi,U)X],W)Z-R(U,R(\xi,X)W\\ &-\frac{1}{n-1}[S(X,W)\xi-S(\xi,W)X])Z-R(U,W)\{R(\xi,X)Z\\ &-\frac{1}{n-1}[S(X,Z)\xi-S(\xi,Z)]X\}=0\end{aligned} \tag{3.22}$$

elde ederiz. Bu denklemi de düzenlersek

$$\begin{aligned}&R(\xi,X)R(U,W)Z-\frac{1}{n-1}S(X,R(U,W)Z)\xi+\frac{1}{n-1}S(\xi,R(U,W)Z)X\\ &-R(R(\xi,X)U,W)Z+\frac{1}{n-1}S(X,U)R(\xi,W)Z-\frac{1}{n-1}S(\xi,U)R(X,W)Z\\ &-R(U,R(\xi,X)W)Z+\frac{1}{n-1}[S(X,W)R(U,\xi)Z-\frac{1}{n-1}S(\xi,W)R(U,X)Z\end{aligned}$$

$$-R(U,W)\{R(\xi,X)Z+\frac{1}{n-1}[S(X,Z)R(U,W)\xi-\frac{1}{n-1}S(\xi,Z)R(U,W)X=0 \quad (3.23)$$

ifadesi elde edilir. (3.23) de $U=Z=\xi$ alalım. Bu durumda

$$R(\xi,X)R(\xi,W)\xi-\frac{1}{n-1}S(X,R(\xi,W)\xi)\xi+\frac{1}{n-1}S(\xi,R(\xi,W)\xi)X$$
$$-R(R(\xi,X)\xi,W)\xi+\frac{1}{n-1}S(X,\xi)R(\xi,W)\xi-\frac{1}{n-1}S(\xi,\xi)R(X,W)\xi$$

$$-R(\xi,R(\xi,X)W)\xi+\frac{1}{n-1}[S(X,W)R(\xi,\xi)\xi-\frac{1}{n-1}S(\xi,W)R(\xi,X)\xi$$

$$-R(\xi,W)\{R(\xi,X)\xi+\frac{1}{n-1}[S(X,\xi)R(\xi,W)\xi-\frac{1}{n-1}S(\xi,\xi)R(\xi,W)X \quad (3.24)$$

dır. (2.3), (2,5), (2.6) eşitliklerini (3.24) de kullanırsak

$$R(\xi,X)(W-\eta(W)\xi)-\frac{1}{n-1}S(X,W-\eta(W)\xi)\xi+\frac{1}{n-1}S(\xi,W-\eta(W)\xi)X$$

$$-R(X-\eta(X)\xi,W)\xi+\frac{1}{n-1}(-(n-1)\eta(X)(W-\eta(W)\xi)-\frac{1}{n-1}(-(n-1)\eta(\xi))R(X,W)\xi$$

$$-(R(\xi,X)W-\eta(R(\xi,X)W)\xi)+\frac{1}{n-1}(-(n-1))\eta(X)\eta(W)$$

$$-\frac{1}{n-1}(-(n-1)\eta(W)X-\eta(X)\xi)-R(\xi,W)(X-\eta(X)\xi)$$

$$+\frac{1}{n-1}(-(n-1)\eta(X)(W-\eta(W)\xi)-\frac{1}{n-1}(-(n-1))R(\xi,W)X=0 \quad (3.25)$$

bulunur. (3.25) de gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$R(\xi,X)W-\eta(W)R(\xi,X)\xi-\frac{1}{n-1}\eta(W)S(X,\xi)+\frac{1}{n-1}S(X,W)\xi$$
$$+\frac{1}{n-1}\eta(W)X.S(\xi,\xi)-\frac{1}{n-1}S(\xi,W)X-\eta(X)R(\xi,W)\xi-R(X,W)\xi-\eta(X)\eta(W)\xi$$

$$-\eta(X)W+R(X,W)\xi-R(\xi,X)W+\eta(R(\xi,X)W)\xi-\eta(X)\eta(W)+\eta(W)X$$

$$-\eta(W)\eta(X)\xi - R(\xi,W)X + \eta(X)\ R(\xi,W)\xi - \eta(X)W + \eta(W)\eta(X)\xi$$
$$+ R(\xi,W)X = 0 \qquad (3.26)$$

ifadesi elde edilir. (2.4), (2.5), (2.6) ve (2.7) eşitliklerini (3.26) de kullanırsak

$$R(\xi,X)W - \eta(W)X + \eta(W)\eta(X)\xi + \eta(W)\eta(X) + \frac{1}{n-1}S(X,W)\xi$$

$$-\eta(W)X + \eta(W)X + \eta(X)W + \eta(X)\eta(W)\xi - R(X,W)\xi - \eta(X)\eta(W)\xi$$

$$-\eta(X)W + R(X,W)\xi - R(\xi,X)W + \eta(W)X + g(X,W)\xi - \eta(X)\eta(W)$$
$$-\eta(X)\eta(W)\xi$$

$$-R(\xi,W)X + \eta(X)W - \eta(X)\eta(W)\xi - \eta(X)W + \eta(X)\eta(W)\xi + R(\xi,W)X = 0 \qquad (3.27)$$

bulunur. (3.27) da sadeleştirmeler yapılırsa

$$\frac{1}{n-1}S(X,W)\xi + g(X,W)\xi = 0 \qquad (3.28)$$

elde ederiz. (3.28) denklemine ξ ile iç çarpım uygularsak

$$\frac{1}{n-1}S(X,W) + g(X,W) = 0$$

veya

$$S(X,W) = -(n-1)g(X,W) \qquad (3.29)$$

elde edilir. Dolayısıyla M manifoldu bir Einstein manifolddur.

Tersine M bir Einstein manifold ise

$$P(\xi,X)\cdot R = 0$$

sağlanır.

Teorem 3.4: M^{2m+1} $(2m+1)-$boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. M üzerinde $P(\xi,X)\cdot S = 0$ olması için gerek ve yeter şart M nin bir Einstein manifoldu olmasıdır.

İspat: $\forall X,U,W \in \chi(M)$ için M üzerinde $P(\xi,X)\cdot S = 0$ şartı sağlansın. O zaman (1.16) dan

$$(P(\xi,X)\cdot S)(U,W)=P(\xi,X)S(U,W)-S(P(\xi,X)U,W)-S(U,P(\xi,X)W)=0 \quad (3.30)$$

yazılır. Bu denklemden de

$$(P(\xi,X)S)(U,W)=-S(P(\xi,X)U,W)-S(U,P(\xi,X)W) \quad (3.31)$$

elde edilir. (3.31) eşitliği

$$S(P(\xi,X)U,W)+S(U,P(\xi,X)W)=0 \quad (3.32)$$

şeklinde yazılabilir. (3.32) denklemini hesaplarsak

$$\begin{aligned}
S(P(\xi,X)U,W)+S(U,P(\xi,X)W) &= S(R(\xi,X)U-\frac{1}{n-1}[S(X,U)\xi \\
&\quad -S(\xi,U)X],W)+S(U,R(\xi,X)W) \\
&\quad -\frac{1}{n-1}[S(X,W)\xi-S(\xi,W)X]) \\
&= S(R(\xi,X)U,W)-\frac{1}{n-1}S(X,U)S(\xi,W) \\
&\quad +\frac{1}{n-1}S(\xi,U)S(X,W) \quad +S(U,R(\xi,X)W) \\
&\quad -\frac{1}{n-1}S(X,W)S(U,\xi)+\frac{1}{n-1}S(\xi,W)S(U,X)=0
\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$S(R(\xi,X)U,W)+S(U,R(\xi,X)W)=0 \quad (3.33)$$

dir. (3.33) de U=ξ alalım. O halde

$$S(R(\xi,X)\xi,W)+S(\xi,R(\xi,X)W)=0 \quad (3.34)$$

elde ederiz. (3.34) deki terimleri hesaplarsak

$$\begin{aligned}
S(R(\xi,X)\xi,W) &= S(X-\eta(X)\xi,W) \\
&= S(X,W)-\eta(X)S(\xi,W) \\
&= S(X,W)-\eta(X)\,(-(n-1)\eta(W)) \\
&= S(X,W)+(n-1)\,\eta(X)\,\eta(W) \quad (3.35)
\end{aligned}$$

ve

$$S(\xi, R(\xi, X)W) = S(\xi, \eta(W)X - g(X, W)\ \xi)$$

$$= \eta(W)\ S(\xi, X) - g(X, W)\ S(\xi, \xi)$$

$$= \eta(W)\ S(\xi, X) - g(X, W)\ (-(n-1)\eta(\xi))$$

$$= \eta(W)\ S(\xi, X) + (n-1)\ g(X, W)$$

$$= \eta(W)\ [-(n-1)\eta(X)] + (n-1)\ g(X, W) \tag{3.36}$$

elde edilir. (3.35) ve (3.36) eşitliklerini (3.34) eşitliğinde yerine yazarsak

$$S(X, W) + (n-1)\ \eta(X)\ \eta(W) - (n-1)\ \eta(X)\ \eta(W) + (n-1)\ g(X, W) = 0$$

elde ederiz. Buradan da

$$S(X, W) = -(n-1)\ g(X, W)$$

bulunur. Dolayısıyla M manifoldu bir Einstein manifolddur.

Tersine M bir Einstein manifold ise

$$P(\xi, X) \cdot S = 0$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.5: M^{2m+1} $(2m+1)-$boyutlu bir Kenmotsu manifoldu olsun. M üzerinde $R(\xi, X) \cdot R = 0$ şartı sağlandığında manifold $S^{2m+1}(1)$ küresine lokal olarak izometriktir.

İspat: $\forall X, U, W, Z \in \chi(M)$ için M üzerinde $R(\xi, X) \cdot R = 0$ şartı sağlansın. O zaman (1.16) dan

$$\begin{aligned}(R(\xi, X) \cdot R)(U, W)Z = R(\xi, X)R(U, W)Z - R(R(\xi, X)U, W)Z \\ - R(U, R(\xi, X)W)Z - R(U, W)R(\xi, X)Z = 0\end{aligned} \tag{3.37}$$

ve bu denklemden de

$$R(\xi, X)R(U, W)Z - R(R(\xi, X)U, W)Z - R(U, R(\xi, X)W)Z - R(U, W)R(\xi, X)Z = 0 \tag{3.38}$$

elde ederiz. (3.38) da $U = \xi$ alalım. Bu durumda

$$R(\xi, X)R(\xi, W)Z - R(R(\xi, X)\xi, W)Z - R(\xi, R(\xi, X)W)Z - R(\xi, W)R(\xi, X)Z = 0$$

$$(3.39)$$

dır. (3.39) daki terimleri hesaplarsak

$$\begin{aligned} R(\xi,X)R(\xi,W)Z &= R(\xi,X)(\eta(Z)W - g(W,Z)\xi) \\ &= \eta(Z)R(\xi,X)W - g(W,Z)R(\xi,X)\xi \\ &= \eta(Z)(\eta(W)X - g(X,W)\xi) - g(W,Z)(X - \eta(X)\xi) \\ &= \eta(Z)\eta(W)X - \eta(Z)g(X,W)\xi - g(W,Z)X + \eta(X)g(W,Z)\xi , \end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned} R(R(\xi,X)\xi,W)Z &= R(X - \eta(X)\xi,W)Z \\ &= R(X,W)Z - \eta(X)R(\xi,W)Z \\ &= R(X,W)Z - \eta(X)(\eta(Z)W - g(W,Z)\xi) \\ &= R(X,W)Z - \eta(X)\eta(Z)W + \eta(X)g(W,Z)\xi , \end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned} R(\xi,R(\xi,X)W)Z &= R(\xi,\eta(W)X - g(X,W)\xi)Z \\ &= \eta(W)R(\xi,X)Z - g(X,W)R(\xi,\xi)Z \\ &= \eta(W)(\eta(Z)X - g(X,Z)\xi) \\ &= \eta(W)\eta(Z)X - \eta(W)g(X,Z)\xi , \end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned} R(\xi,W)R(\xi,X)Z &= R(\xi,W)(\eta(Z)X - g(X,Z)\xi) \\ &= \eta(Z)R(\xi,W)X - g(X,Z)R(\xi,W)\xi \\ &= \eta(Z)(\eta(X)W - g(W,X)\xi) - g(X,Z)(W - \eta(W)\xi) \\ &= \eta(Z)\eta(X)W - \eta(Z)g(W,X)\xi - g(X,Z)W + \eta(W)g(X,Z)\xi , \end{aligned} \tag{3.43}$$

elde ederiz. (3.40)-(3.43) eşitlikleri (3.39) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &\eta(Z)\eta(W)X - \eta(Z)g(X,W)\xi - g(W,Z)X + \eta(X)g(W,Z)\xi - R(X,W)Z \\ &+ \eta(X)\eta(Z)W - \eta(X)g(W,Z)\xi - \eta(W)\eta(Z)X + \eta(W)g(X,Z)\xi - \eta(Z)\eta(X)W \\ &+ \eta(Z)g(W,X)\xi + g(X,Z)W - \eta(W)g(X,Z)\xi = 0 \end{aligned} \tag{3.44}$$

dır.

(3.44) de gerekli sadeleştirilmeler yapılırsa

$$R(X,W)Z = g(W,Z)X - g(X,Z)W$$

bulunur. Dolayısıyla M manifoldu $S^{2m+1}(1)$ küresine lokal olarak izometriktir.

Teorem 3.6: M^{2m+1} $(2m+1)-$boyutlu Kenmotsu manifoldu olsun. M üzerinde $\widetilde{Z}(\xi,X)\cdot\widetilde{Z}=0$ şartı sağlandığında manifold negatif skaler eğrilikli bir manifold veya $S^{2m+1}(1)$ küresine lokal olarak izometriktir.

İspat: $\forall X,Y,U,W \in \chi(M)$ için M üzerinde $\widetilde{Z}(\xi,X)\cdot\widetilde{Z}=0$ şartı sağlansın. O zaman (1.16) dan

$$\begin{aligned}(\widetilde{Z}(\xi,X)\cdot\widetilde{Z})(Y,U)W &= \widetilde{Z}(\xi,X)\widetilde{Z}(Y,U)W - \widetilde{Z}(\widetilde{Z}(\xi,X)Y,U)W \\ &- \widetilde{Z}(Y,\widetilde{Z}(\xi,X)U)W - \widetilde{Z}(Y,U)\widetilde{Z}(\xi,X)W = 0 \qquad (3.45)\end{aligned}$$

dır. (1.12) denkleminden

$$\begin{aligned}&\widetilde{Z}(\xi,X)(R(Y,U)W - \frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(U,W)Y - g(Y,W)U]) \\ &-(R(\widetilde{Z}(\xi,X)Y,U)W - \frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(U,W)\widetilde{Z}(\xi,X)Y - g(\widetilde{Z}(\xi,X)Y,W)U]) \\ &-(R(Y,\widetilde{Z}(\xi,X)U)W - \frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(\widetilde{Z}(\xi,X)U,W)Y - g(Y,W)\widetilde{Z}(\xi,X)U]) \\ &-\widetilde{Z}(Y,U)(R(\xi,X)W - \frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(X,W)\xi - g(\xi,W)X]) = 0 \qquad (3.46)\end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$\begin{aligned}&\widetilde{Z}(\xi,X)R(Y,U)W - \frac{\tau}{2m(2m+1)}g(U,W)\widetilde{Z}(\xi,X)Y + \frac{\tau}{2m(2m+1)}g(Y,W)\widetilde{Z}(\xi,X)U \\ &- R(\widetilde{Z}(\xi,X)Y,U)W + \frac{\tau}{2m(2m+1)}g(U,W)\widetilde{Z}(\xi,X)Y \\ &- \frac{\tau}{2m(2m+1)}g(\widetilde{Z}(\xi,X)Y,W)U - R(Y,\widetilde{Z}(\xi,X)U)W \\ &+ \frac{\tau}{2m(2m+1)}g(\widetilde{Z}(\xi,X)U,W)Y - \frac{\tau}{2m(2m+1)}g(Y,W)\widetilde{Z}(\xi,X)U \\ &- \widetilde{Z}(Y,U)R(\xi,X)W + \frac{\tau}{2m(2m+1)}g(X,W)\widetilde{Z}(Y,U)\xi\end{aligned}$$

$$-\frac{\tau}{2m(2m+1)}\, g(\xi,W)\widetilde{Z}(Y,U)X = 0 \tag{3.47}$$

elde edilir. (3.47) de gerekli sadeleştirmeler yapılır ve $Y=\xi$ alınırsa

$$\widetilde{Z}(\xi,X)R(\xi,U)W - R(\widetilde{Z}(\xi,X)\xi,U)W - \frac{\tau}{2m(2m+1)}\, g(\widetilde{Z}(\xi,X)\xi,W)U$$

$$-R(\xi,\widetilde{Z}(\xi,X)U)W + \frac{\tau}{2m(2m+1)}\, g(\widetilde{Z}(\xi,X)U,W)\xi - \widetilde{Z}(\xi,U)R(\xi,X)W$$

$$+\frac{\tau}{2m(2m+1)}\, g(X,W)\widetilde{Z}(\xi,U)\xi - \frac{\tau}{2m(2m+1)}\, g(\xi,W)\widetilde{Z}(\xi,U)X = 0 \tag{3.48}$$

elde edilir. (3.48) denklemini ayrı ayrı hesaplayalım

$$\widetilde{Z}(\xi,X)R(\xi,U)W = R(\xi,X)R(\xi,U)W - \frac{\tau}{2m(2m+1)}\,[g(X,R(\xi,U)W)\xi$$

$$-g(\xi,R(\xi,U)W)X]$$

$$= R(\xi,X)R(\xi,U)W - \frac{\tau}{2m(2m+1)}\, g(X,R(\xi,U)W)\xi$$

$$+\frac{\tau}{2m(2m+1)}\, g(\xi,R(\xi,U)W)X$$

$$= R(\xi,X)(\eta(W)U - g(U,W)\xi) - \frac{\tau}{2m(2m+1)}\, g(X,\eta(W)U - g(U,W)\xi)\xi$$

$$+\frac{\tau}{2m(2m+1)}\, g(\xi,\eta(W)U - g(U,W)\xi)X$$

$$= \eta(W)R(\xi,X)U - R(\xi,X)g(U,W)\xi) - \frac{\tau}{2m(2m+1)}\,\eta(W)g(X,U)\xi$$

$$+\frac{\tau}{2m(2m+1)}\, g(X,g(U,W)\xi)\xi + \frac{\tau}{2m(2m+1)}\,\eta(W)g(\xi,U)X$$

$$-\frac{\tau}{2m(2m+1)}\, g(\xi,g(U,W)\xi)X$$

$$= \eta(W)\eta(U)X - \eta(W)g(X,U)\xi - g(U,W)X + \eta(X)g(U,W)\xi$$

$$-\frac{\tau}{2m(2m+1)}\,\eta(W)g(X,U)\xi + \frac{\tau}{2m(2m+1)}\,\eta(X)g(U,W)\xi$$

$$+\frac{\tau}{2m(2m+1)}\eta(W)\eta(U)X-\frac{\tau}{2m(2m+1)}g(U,W)X\,, \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}
R(\widetilde{Z}(\xi,X)\xi,U)W &= R(R(\xi,X)\xi-\frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(X,\xi)\xi-g(\xi,\xi)X],U)W \\
&= R(X-\eta(X)\xi-\frac{\tau}{2m(2m+1)}[\eta(X)\xi-X],U)W \\
&= R(X,U)W-\eta(X)R(\xi,U)W-\frac{\tau}{2m(2m+1)}\eta(X)R(\xi,U)W \\
&\quad+\frac{\tau}{2m(2m+1)}R(X,U)W \\
&= R(X,U)W-\eta(X)\eta(W)U+\eta(X)g(U,W)\xi-\frac{\tau}{2m(2m+1)}\eta(X)\eta(W)U \\
&\quad+\frac{\tau}{2m(2m+1)}\eta(X)g(U,W)\xi+\frac{\tau}{2m(2m+1)}R(X,U)W\,,
\end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}
g(\widetilde{Z}(\xi,X)\xi,W)U &= g(R(\xi,X)\xi-\frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(X,\xi)\xi-g(\xi,\xi)X],W)U \\
&= g(R(\xi,X)\xi,W)U-\frac{\tau}{2m(2m+1)}[\eta(X)\xi-X],W)U \\
&= g(X-\eta(X)\xi,W)U-\frac{\tau}{2m(2m+1)}\eta(X)g(\xi,W)U \\
&\quad+\frac{\tau}{2m(2m+1)}g(X,W)U \\
&= g(X,W)U-\eta(X)\eta(W)U-\frac{\tau}{2m(2m+1)}\eta(X)\eta(W)U \\
&\quad+\frac{\tau}{2m(2m+1)}g(X,W)U\,,
\end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned}
R(\xi,\widetilde{Z}(\xi,X)U)W &= R(\xi,R(\xi,X)U-\frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(X,U)\xi-g(\xi,U)X])W \\
&= R(\xi,R(\xi,X)U)W-\frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(X,U)R(\xi,\xi)W
\end{aligned}$$

$$+\frac{\tau}{2m(2m+1)}\, g(\xi,U)R(\xi,X)W$$

$$= R(\xi,\eta(U)X - g(X,U)\xi)W + \frac{\tau}{2m(2m+1)}\, \eta(U)(\eta(W)X - g(X,W)\xi)$$

$$= \eta(U)R(\xi,X)W - g(X,U)R(\xi,\xi)W + \frac{\tau}{2m(2m+1)}\, \eta(U)\eta(W)X$$

$$-\frac{\tau}{2m(2m+1)}\, \eta(U)g(X,W)\xi$$

$$= \eta(U)\eta(W)X - \eta(U)g(X,W)\xi + \frac{\tau}{2m(2m+1)}\, \eta(U)\eta(W)X$$

$$-\frac{\tau}{2m(2m+1)}\, \eta(U)g(X,W)\xi, \tag{3.52}$$

$$g(\widetilde{Z}(\xi,X)U,W)\xi = g(R(\xi,X)U - \frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(X,U)\xi - g(\xi,U)X],W)\xi$$

$$= g(R(\xi,X)U,W)\xi - \frac{\tau}{2m(2m+1)}\, g(X,U)g(\xi,W)\xi$$

$$+\frac{\tau}{2m(2m+1)}\, \eta(U)g(X,W)\xi$$

$$= g(\eta(U)X - g(X,U)\xi,W)\xi - \frac{\tau}{2m(2m+1)}\, \eta(W)g(X,U)\xi$$

$$+\frac{\tau}{2m(2m+1)}\, \eta(U)g(X,W)\xi$$

$$= \eta(U)g(X,W)\xi - \eta(W)g(X,U)\xi - \frac{\tau}{2m(2m+1)}\, \eta(W)g(X,U)\xi$$

$$+\frac{\tau}{2m(2m+1)}\, \eta(U)g(X,W)\xi, \tag{3.53}$$

$$\widetilde{Z}(\xi,U)R(\xi,X)W = R(\xi,U)R(\xi,X)W - \frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(U,R(\xi,X)W)\xi$$

$$-\, g(\xi,R(\xi,X)W)U]$$

$$= R(\xi,U)(\eta(W)X - g(X,W)\xi) - \frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(U,\eta(W)X$$

$$- g(X,W)\xi)\xi - g(\xi,\eta(W)X - g(X,W)\xi)U]$$

$$= \eta(W)R(\xi,U)X - g(X,W)R(\xi,U)\xi - \frac{\tau}{2m(2m+1)}\eta(W)g(U,X)\xi$$

$$+ \frac{\tau}{2m(2m+1)}g(X,W)g(U,\xi)\xi + \frac{\tau}{2m(2m+1)}g(\xi,X)U$$

$$- \frac{\tau}{2m(2m+1)}g(X,W)g(\xi,\xi)U$$

$$= \eta(W)\eta(X)U - \eta(W)g(U,X)\xi - g(X,W)U + \eta(U)g(X,W)\xi$$

$$- \frac{\tau}{2m(2m+1)}\eta(W)g(U,X)\xi + \frac{\tau}{2m(2m+1)}\eta(U)g(X,W)\xi$$

$$+ \frac{\tau}{2m(2m+1)}\eta(W)\eta(X)U - \frac{\tau}{2m(2m+1)}g(X,W)U, \qquad (3.54)$$

$$g(X,W)\widetilde{Z}(\xi,U)\xi = g(X,W)(R(\xi,U)\xi - \frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(U,\xi)\xi - g(\xi,\xi)U])$$

$$= g(X,W)(U - \eta(U)\xi - \frac{\tau}{2m(2m+1)}[\eta(U)\xi - U])$$

$$= g(X,W)U - \eta(U)g(X,W)\xi - \frac{\tau}{2m(2m+1)}\eta(U)g(X,W)\xi$$

$$+ \frac{\tau}{2m(2m+1)}g(X,W)U, \qquad (3.55)$$

$$g(\xi,W)\widetilde{Z}(\xi,U)X = g(\xi,W)(R(\xi,U)X - \frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(U,X)\xi - g(\xi,X)U])$$

$$= \eta(W)(\eta(X)U - g(U,X)\xi - \frac{\tau}{2m(2m+1)}[g(U,X)\xi - \eta(X)U])$$

$$= \eta(W)\eta(X)U - \eta(W)g(U,X)\xi - \frac{\tau}{2m(2m+1)}\eta(W)g(U,X)\xi$$

$$+\frac{\tau}{2m(2m+1)}\eta(W)\eta(X)U\ , \tag{3.56}$$

elde ederiz. (3.49)-(3.56) eşitlikleri (3.48) de yerine yazılırsa

$$\eta(W)\eta(U)X-\eta(W)g(X,U)\xi-g(U,W)X+\eta(X)g(U,W)\xi-\frac{\tau}{2m(2m+1)}$$
$$\eta(W)g(X,U)\xi+\frac{\tau}{2m(2m+1)}\eta(X)g(U,W)\xi+\frac{\tau}{2m(2m+1)}\eta(W)\eta(U)X$$
$$-\frac{\tau}{2m(2m+1)}g(U,W)X-R(X,U)W+\eta(X)\eta(W)U-\eta(X)g(U,W)\xi$$
$$+\frac{\tau}{2m(2m+1)}\eta(X)\eta(W)U-\frac{\tau}{2m(2m+1)}\eta(X)g(U,W)\xi$$

$$-\frac{\tau}{2m(2m+1)}R(X,U)W-\frac{\tau}{2m(2m+1)}g(X,W)U+\frac{\tau}{2m(2m+1)}\eta(X)\eta(W)U$$
$$+(\frac{\tau}{2m(2m+1)})^2\eta(X)\eta(W)U-(\frac{\tau}{2m(2m+1)})^2g(X,W)U$$

$$-\eta(U)\eta(W)X+\eta(U)g(X,W)\xi-\frac{\tau}{2m(2m+1)}\eta(U)\eta(W)X+\frac{\tau}{2m(2m+1)}$$
$$\eta(U)g(X,W)\xi+\frac{\tau}{2m(2m+1)}\eta(U)g(X,W)\xi-\frac{\tau}{2m(2m+1)}\eta(W)g(X,U)\xi$$
$$-(\frac{\tau}{2m(2m+1)})^2\eta(W)g(X,U)\xi+(\frac{\tau}{2m(2m+1)})^2\eta(U)g(X,W)\xi-\eta(W)\eta(X)U$$
$$+\eta(W)g(U,X)\xi+g(X,W)U-\eta(U)g(X,W)\xi+\frac{\tau}{2m(2m+1)}\eta(W)g(U,X)\xi$$
$$-\frac{\tau}{2m(2m+1)}\eta(U)g(X,W)\xi-\frac{\tau}{2m(2m+1)}\eta(W)\eta(X)U+\frac{\tau}{2m(2m+1)}g(X,W)U$$

$$+\frac{\tau}{2m(2m+1)}g(X,W)U-\frac{\tau}{2m(2m+1)}\eta(U)g(X,W)\xi-(\frac{\tau}{2m(2m+1)})^2$$
$$\eta(U)g(X,W)\xi+(\frac{\tau}{2m(2m+1)})^2g(X,W)U-\frac{\tau}{2m(2m+1)}$$
$$\eta(W)\eta(X)U+\frac{\tau}{2m(2m+1)}\eta(W)g(U,X)\xi+(\frac{\tau}{2m(2m+1)})^2\eta(W)g(U,X)\xi$$
$$-(\frac{\tau}{2m(2m+1)})^2\eta(W)\eta(X)U=0 \tag{3.57}$$

elde edilir. (3.57) de gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$(\frac{\tau}{2m(2m+1)}+1)\ (R(X,U)W-g(X,W)U+g(U,W)X)=0$$

dır. Bu durumda ya

$$\tau = -2m(2m+1)$$

ya da

$$R(X,U)W = g(X,W)U - g(U,W)X$$

dir. Birinci durumda M negatif skaler eğrilikli bir manifolddur. İkinci durumda M $S^{2m+1}(1)$ küresine lokal olarak izometriktir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] O' Neill, B., Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, Inc. (1983)

[2] Kobayashi S., Nomizu K., Foundations of differential geometry, John Wiley and Sons, Inc., New York (1996).

[3] Matsumoto K., and Mihai I., On a certain transformation in a Lorentzian para-Sasakian manifold, Tensor, N. S., 47, 189-197, (1988).

[4] Hacısalihoğlu H. H., Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Yayınları, (1983).

[5] Yano K., Kon M., Structures on manifolds, World Scientific, 508p, (1984).

[6] Kenmotsu K., A class of almost contact Riemannian manifolds, Tohoku Math. J.,24 93-103, (1972).

[7] Chen B. Y., 'Geometry of submanifolds', Pure and Applied Mathematics, No. 22. Marcel Dekker, Inc., New York, (1973).

[8] Mihai I., A. Shaikh A., and U. C. De, On Lorentzian para-Sasakian Manifolds, Korean J. Math. Sci. 6, 1-13, (1999).

[9] Szabó Z. I., 'Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X,Y)\cdot R=0$ The local version', J.Differential Geom. 17, no. 4,531-582, (1982).

[10] Deszcz R., 'On pseudosymmetric spaces' *Bull. Soc. Math. Belg. Ser. A* 44 no. 1. 1-34, (1992).

[11] De , U. C., Guha, N., Kamilya, D., "On generalized Ricci-recurrent manifolds" , *Tensor (N.S.)* 56, no. 3, 312-317, (1995).