LORENTZ UZAYINDA HİPERYÜZEYLER

Hatice BAŞARAN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Mart - 2009

LORENTZ UZAYINDA HİPERYÜZEYLER

Hatice BAŞARAN

Dumlupınar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. A. Funda YALINIZ

Mart - 2009

KABUL ve ONAY SAYFASI

Hatice BAŞARAN'nın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

........./......../.........
(Sınav tarihi)

Üye : ....

Üye : ....

Üye : ....

Fen Bilimleri Enstitüsün Yönetim Kurulu'nun ....../...../..... gün ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

. Prof.DrAtalay KÜÇÜKBURSA............
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

LORENTZ UZAYINDA HİPERYÜZEYLER

Hatice Başaran
Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2009
Tez Danışmanı: Yrd. Doç.Dr.A. Funda YALINIZ

ÖZET

Bu tezin amacı Lorentz uzayındaki yüzeylerin diferansiyel geometrisi üzerine çalışmaktır. Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde gauss eğriliği, hiperyüzey, kısmi türev, ortalama eğrilik, şekil operatörü ve Taylor formülü tanıtılmıştır.

İkinci bölümde Lorentz uzayında simetrik bilineer form, skalar çarpmalı uzay, Minkowski uzay zaman, yarı Riemann manifoldları, 2 boyutlu Lorentz uzayı ve hiperbolik radyan ile ilgili bazı tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde temel kuadratik formlar, yüzeyin bir noktasındaki eğrisel uzunluk, birim normal vektörünün birinci mertebeden kısmi türevleri, Weingarten ve Olinde-Rodrigues formülleri için bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümde lorentz uzayındaki temel formlar, Weingarten ve Olinde-Rodrigues formülleri verilmiştir.

Beşinci bölümde de orjinal bir çalışmamızı içermektedir.

Anahtar Kelimeler : Gauss eğriliği, hiperyüzey, kısmi türev, ortalama eğrilik, Olinde-rodrigues formülleri, şekil operatörü, Taylor formülü, Weingarten formülleri

HYPERSURFACES AT LORENTZ SPACE

Hatice Başaran
Deparment of Mathematics, M.S.Thesis, 2009
Thesis Supervisor:Assist.Prof. A.Funda YALINIZ

SUMMARY

This thesis which is the aim working on differantial geometry of surfaces on which Lorentz spaces. This thesis takes part from five parts.

In the first part, Gauss curvature, hypersurface, partial derivate, mean curvature, figure operatör,and Taylor Formula were introduced.

In the second part, symetric bilinear form at Lorentz space, scaler product space, Minkowski space time, semi-Riemann manifold, Lorentz space with two dimmension and some definations and theorem connected with hyperbolic raidon were given.

In the third part, basic quadratic forms, curvilinear length in any point of surface, unit normal vektör of which first degree partial derivatives, connected with Weingarten and Olinde-Rodrigues formulas same basic defination and theorems were given.

In the fourth part, basic formulas at Lorentz spaces, Weingarten and Olinde-Rodrigues formulas were given.

In the fifth part, it includes of our original work.

Keywords: Gauss curvature, hypersurface, partial derivate, mean curvature, formulas of Olinde-Rodrigues, figure operatör, Taylor Formula, Weingarten formulas.

TEŞEKKÜR

Bana bu çalışmayı vererek çalışmanın her sayfasında yakın ilgi ve önerileri ile beni destekleyen, yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Ayşe Funda YALINIZ'a, Sayın Yrd. Doç. Dr. Ahmet YILDIZ'a teşekkürlerimi sunarım.Bu çalışmam esnasında bana anlayış gösteren ve desteklerini esirgemeyen eşim Salih'e teşekkür ederim.

,

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER(devam)

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil *Sayfa*

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
V	n-boyutlu reel vektör
$\mathbb{R}_v^n$	n-boyutlu v-indeksli skalar çarpmalı uzay
L^n	n-boyutlu Lorentz uzayı
M^n	n-boyutlu Riemann manifoldu
M_q^n	n-boyutlu q-indeksli yarı-Riemann manifoldu
$\langle , \rangle_L$	Lorentz metriği
$\lVert v \rVert$	v'nin normu
D	Riemann koneksiyonu
∇	Yarı-Riemann manifoldu üzerindeki koneksiyon
α	diferansiyellenebilir ve bibim hızlı eğri
$T\alpha$	α eğrisinin tanjant demeti
$T\alpha^{\perp}$	$T\alpha$ nın dik demeti
E^n	n-boyutlu Öklid uzayı
Γ_N	ışık konisi
Γ_S	uzay konisi
Γ_T	zaman konisi
RadW	W nun radikali
SW	W nun ekran uzayı
K	Gauss eğriliği
H	Ortalama eğrilik
S	Şekil operatörü
$\vec{n}$	birim normal vektör

1. TEMEL TANIMLAR

1.1 İki Skalar Değişkenli Vektörel Fonksiyonlar

Tanım 1.1.1 İki u,v, skalar, bağımsız değişkeninin değişim aralıkları sırasıyla

$$a \leq u \leq b, c \leq v \leq d \qquad (\beta) \tag{1.1}$$

olsun. u, v koordinat eksenleri birbirine dikse , (β) tanım bölgesi kapalı bir dikdörgendir.

Yukarıdaki iki aralığın her (u, v) değer takımı, belirli bir kurala göre, bir $\vec{x}$ serbest vektörünü tanımlıyorsa , $\vec{x}$ serbest vektörü u ve v skalar ve bağımsız değişkenlerinin verilen $[a, b], [c, d]$ kapalı aralıklarında veya (β) kapalı bölgesinde –açık da olabilir- bir vektörel fonksiyondur.

(1.1) aralıkları bu vektörel fonksiyonun tanım aralıklarıdır. u, v, skalar ve bağımsız değişkenleri ile $\vec{x}$ vektörü arasındaki bu ilişki, skalar fonksiyonlarda yapıldığı gibi

$$\vec{X} = \vec{X}(u, v) \tag{1.2}$$

sembolü ile gösterilir[1].

Uyarı 1.1.1 Bundan böyle, aksi söylenmedikçe (u,v) skalar ve bağımsız değişkenleri ile $\vec{x}$ vektörel fonksiyonu gerçel olarak alacağız. Bundan başka $\vec{x}$ vektörel fonksiyonu tek değerli olacak, başka deyimle, skaler değişkenlerin (u, v) değer takımı, bir tek $\vec{X}(u, v)$ serbest vektörünü belirleyecektir[1].

Tanım 1.1.2 (1.1) aralıklarında tanımlanmış tek değerli, gerçel ve sürekli bir vektörel fonksiyon

$$\vec{X} = \vec{X}(u, v)$$

olsun. Tanım bölgesinin bir değer takımını (v_0) ile gösterelim ve

$$\Delta\overrightarrow{X^1} = \vec{X}(u, v_0) - \vec{X}(u_0, v_0), \qquad \Delta u = u - u_0$$

diyelim.

Eğer sözü edilen vektörel fonksiyon için

$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta x^1}{\Delta u}$

varsa, bu limite $\vec{X}\,(u, v\,)$ vektörel fonksiyonunun , (u_0, v_0) değer takımı için, u skalar değişkenine göre, birinci mertebeden kısmi türevi denir[1].

Aynı biçimde

$\Delta\overrightarrow{X^2} = \vec{X}\,(\,u_0, v\,) - \vec{X}\,(\,u_0, v_0\,)\,, \qquad \Delta v = v - v_0$

denilecek olursa,

$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta x^2}{\Delta v}$

ifadesi de, eğer varsa , $\vec{X}\,(u, v\,)$ vektörel fonksiyonunun , (u_0, v_0) değer takımı için, v skalar değişkenine göre, birinci mertebeden kısmi türevidir.

Bir $(u, v\,)$ değer takımı için birinci mertebeden iki vektörel kısmi türevi

$\overrightarrow{X_u} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial u}\ ,\ \overrightarrow{X_v} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}$

yazılış biçimlerinden biriyle göstereceğiz[1].

Tanım 1.1.3 O u, v düzleminin (1. 1) aralıklarıyla tanımlanmış (β) dikdörtgen bölgesinde – ya da herhangi bir bölgesinde – verilmiş ve birinci mertebeden sürekli kısmi türevleri olan bir vektörel fonksiyon

$\vec{X} = \vec{X}\,(u, v\,)$

olsun.

(β) nın herhangi bir noktası N_0 ve bu noktadan geçen bir eğrisi de E ile gösterilsin. u, v, skaler, bağımsız ve gerçel değişkenleri, E eğrisi boyunca alınan $N(u, v)$ noktaları için, örneğin t ile gösterilen, aynı bir skaler değişkeninin

u= $u(t)\ ,\ \ v = v(t)$ (1.3)

biçiminde fonksiyonlardır. Buna göre (1. 2) vektörel fonksiyonu, E eğrisi boyunca, t skalar değişkeninin

$$\vec{X} = \vec{X}\,[u(t), v(t)] \tag{1.4}$$

biçiminde bir bileşik fonksiyonudur[1].

Tanım 1.1.4 İki skalar ve bağımsız değişkenli bir vektörel fonksiyonun birinci mertebeden kısmi türevleri de aynı bağımsız skalar değişkenlerin vektörel fonksiyonlarıdır. Bunların, tanım bölgesinde, eğer varsa, birinci mertebeden kısmi vektörel türevlerinden söz edilebilir.

Bunlara

$$\vec{X} = \vec{X}\,(u, v\,)$$

vektörel fonksiyonunun ikinci mertebeden vektörel kısmi türevleri denir. Bunlara

$$\vec{X}_{uu} = \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \vec{X}}{(\partial u)^2}$$

$$\vec{X}_{uv} = \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial u \partial v} \tag{1.5}$$

$$\vec{X}_{vv} = \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial v \partial v} = \frac{\partial^2 \vec{X}}{(\partial v)^2}$$

sembolleri ile gösterilir[1].

Tanım 1.1.5 (1.3) formülündeki vektörel ve skalar fonksiyonlar, bir tek t skaler değişkenine bağlıdırlar. O halde, t nin herhangi bir değeri için bu formülü

$$\frac{\partial \vec{X}(u,v)}{\partial t} = \overrightarrow{X_u}(u, v)\frac{du}{dt} + \overrightarrow{X_v}(u, v)\frac{dv}{dt}$$

biçiminde yazabiliriz. Bu eşitliğin her iki tarafını dt ile çarptığımızda, kısaca

$$d\vec{X} = \overrightarrow{X_u}du + \overrightarrow{X_v}dv \tag{1.6}$$

bağıntısı elde edilir.

(1.6) nın ikinci yanı, tanım gereğince, iki skalar ve bağımsız değişkenli

$$\vec{X} = \vec{X}\,(u, v\,)$$

vektörel fonksiyonunun tam diferansiyelidir[1].

Tanım 1.1.6 İki bağımsız değişkenli $\vec{X} = \vec{X}\,(u, v\,)$ vektörel fonksiyonunun birinci, ikinci, üçüncü,…,n.yinci mertebeden tam diferansiyelleri $d^1\overrightarrow{X}, d^2\overrightarrow{X}, \dots, d^n\vec{X}$ sembolleri ile gösterilir.

Örneğin, 2-nci mertebeden tam diferansiyel şöyle bulunur:

$$d^2\vec{X} = d(\overrightarrow{X_u})du + d(\overrightarrow{X_v})dv + \overrightarrow{X_u}d^2u + \overrightarrow{X_v}d^2v \tag{1.7}$$

yani

$d^2\vec{X} = \overrightarrow{X_{uu}}(du)^2 + 2\overrightarrow{X_{uv}}dudv + \overrightarrow{X_{vv}}(dv)^2 + \overrightarrow{X_u}d^2u + \overrightarrow{X_v}d^2v$ [1]

Tanım 1.1.7 β bölgesinde tanımlanmış iki bağımsız değişkenli $\vec{X} = \vec{X}(u, v)$ vektörel fonksiyonunun , bölgenin her noktasında $n \geq 1$ olmak üzere n-yinci mertebeye kadar kısmi türevlerinin hepsi-n dahil olmak koşulu ile- varsa ve sürekli ise, buna, β bölgesinde n-yinci sınıftan iki bağımsız değişkenli bir vektörel fonksiyon ya da iki bağımsız değişkenli bir C^n vektörel fonksiyonu diyeceğiz.

Verilen β bölgesinin her noktasında verilen iki bağımsız değişkenli vektörel fonksiyonun sonsuz mertebeden sürekli kısmi türevi varsa, sınıfı ∞ dur, veya bu bir C^∞ vektörel fonksi yonudur. İki bağımsız değişkenli bir C^n vektörel fonksiyonunun , bir kartezyen koordinat siste mine göre , skalar bileşenlerinden en az birisi aynı sınıftandır. Öteki ikisinin sınıfları ise en az n dir[1].

Tanım 1.1.8 Bir β bölgesinin bir (u, v) noktasında n-ninci sınıftan ve iki bağımsız değişkenli bir vektörel fonksiyon $\vec{X} = \vec{X}(u, v)$ ise, biraz önce belirttiğimiz gibi, bunun herhangi bir OX_p, (P=1,2,3) Kartezyen koordinat sistemine göre skalar bileşenlerinden hiç olmazsa birisi, aynı (u_0, v_0) noktasında n-ninci sınıftandır ve öteki iki bileşeninde sınıfları en az n dır. O halde, bu üç skaler bileşen için

$$\Delta u = u - u_0 \quad , \quad \Delta v = v - v_0 \quad ,$$

$$\Delta X_p = X_p(u, v) - X_p(u_0, v_0) \quad , \quad (p = 1, 2, 3)$$

$$\Delta X_p = (X_{pu}\Delta u) + (X_{pv}\Delta v) + \frac{1}{2!}\Big((X_{pu}\Delta u) + (X_{pv}\Delta v)\Big)^{(2)} + \cdots + \frac{1}{n!}\Big((X_{pu}\Delta u) + (X_{pv}\Delta v)\Big)^{(n)} + e_{pn} \tag{1.8}$$

$$e_{pn} = e_{pn}(u_0, v_0, \Delta u, \Delta v) \quad , \quad \lim_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0}} e_{pn} = 0$$

Taylor formülü yazılabilir.

Öte yandan

$\Delta\vec{X} = \vec{X}(u,v) - \vec{X}(u_0,v_0) = \sum_{p=1}^{3}(\Delta X_p)\overrightarrow{k_p}$

$\overrightarrow{e_n} = \sum_{p=1}^{n} e_{pn}\overrightarrow{k_p}$

söylersek

$$\Delta\vec{X} = \left(\overrightarrow{X_u}\Delta u + \overrightarrow{X_v}\Delta v\right) + \frac{1}{2!}\left(\overrightarrow{X_u}\Delta u + \overrightarrow{X_v}\Delta v\right)^{(2)} + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\overrightarrow{X_u}\Delta u + \overrightarrow{X_v}\Delta v\right)^{(n)} + e_n \qquad (1.9)$$

$\lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0}} \overrightarrow{e_{pn}} = \vec{0}$

bulunur. Görülüyor ki

β tanım bölgesinde iki bağımsız değişkenli ve n-ninci mertebeden bir vektörel fonksiyon verildiğinde, bölgenin (u_0,v_0) noktası ve yakınları için (1.9) formülü yazılabilir. Buna **iki bağımsız değişkenli vektörel fonksiyonların Taylor formülü** denir[1].

Tanım 1.1.9 E^n, n-boyutlu Öklid uzayında (n-1) boyutlu bir yüzey veya (n-1) yüzey diye E^n deki boş olmayan bir M cümlesine denir, öyle ki bu M cümlesi

$$\mathrm{M} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{U} \subset \mathrm{E}^n \,|\, \mathrm{f}: \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R}, \mathrm{U} \text{ bir açık cümle}\}$$
$$x \longrightarrow f(x) = c$$

$\nabla \mathrm{f}|_{\mathrm{p}} \neq 0$, $\forall\, p \in M$ biçiminde tanımlanır. E^2 de bir 1-yüzeye düzlemsel eğri denir, E^3 de bir 2-yüzeye ekseriya sadece yüzey denir. E^n de bir (n-1) yüzeye $n > 3$ olması halinde daha çok bir **hiperyüzey** olarak adlandırılır[2].

Tanım 1.1.10 E^n de bir hiperyüzey M ve M'nin birim normal vektör alanı N verilsin. E^n de Riemann koneksiyonu D olmak üzere $\forall\, X \in \mathcal{X}(M)$ için

$S(X) = D_X N$

şeklinde tanımlı, S dönüşümüne M üzerinde **şekil operatörü** veya **Weingarten dönüşümü** denir[2].

Tanım 1.1.11 E^n de bir hiperyüzey M olsun. M'nin bir P noktasındaki şekil operatörü S(p) olmak üzere

$$K = M \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$p \longrightarrow K(p) = detS(p)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M'nin Gauss eğrilik fonksiyonu ve K(p) değerine de M'nin p noktasındaki **Gauss eğriliği** denir[2].

Tanım 1.1.12 E^n de bir hiperyüzey M olsun. M'nin bir P noktasındaki şekil operatörü S(p) olmak üzere

$$H = \mathrm{M} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$p \longrightarrow H(p) = iz\big(S(p)\big)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M'nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve H(p) değerine de M'nin p noktasında ki **ortalama eğriliği** denir[2].

2. LORENTZ UZAYI

2.1 Simetrik Bilineer Formlar

Tanım 2.1.1 V bir reel vektör uzayı olsun.

$\langle\cdot,\cdot\rangle: V \times V \to \mathbb{R}$

dönüşümü $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall\, u, v, w \in V$ için

(i) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

(ii) $\langle au + bv, w\rangle = a\,\langle u, w\rangle + b\,\langle v, w\rangle$

$\langle u, av + bw\rangle = a\,\langle u, v\rangle + \mathrm{b}\,\langle u, w\rangle$

özelliklerine sahip ise $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer formdur denir[3,5].

Tanım 2.1.2 V vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form $\langle\cdot,\cdot\rangle$ olsun.

(i) $\forall\, v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v\rangle > 0, \langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ ise $\langle\cdot,\cdot\rangle$ simetrik bilineer formuna pozitif tanımlı,

(ii) $\forall\, v \in V\ ve\ v \neq 0\ için\ \langle v, v\rangle < 0, \langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0\ ise$ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ simetrik bilineer formuna negatif tanımlı,

(iii) $\forall\, v \in V\ için\ \langle v, v\rangle \geq 0\ ise$ simetrik bilineer formuna yarı pozitif tanımlı,

(iv) $\forall\, v \in V\ için\ \langle v, v\rangle \leq 0\ ise$ simetrik bilineer formuna yarı negatif tanımlı,

(v) $''\forall\, w \in V\ için\ \langle v, w\rangle = 0 \Rightarrow v = 0\ dır''$ şartı sağlanıyor ise $\langle\cdot,\cdot\rangle$ simetrik bilineer formuna non-dejenere, non-dejenere değilse dejeneredir denir[3,5].

V üzerinde bir simetrik bilineer form $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ise V'nin herhangi bir W altuzayı için $\langle\cdot,\cdot\rangle\,|_W$ kısıtlaması da yine bir simetrik bilineer formdur [3].

Tanım 2.1.3 V bir vektör uzayı ve

$\langle\cdot,\cdot\rangle: V \times V \to \mathbb{R}$

bir simetrik bilineer form olsun.

$\langle\cdot,\cdot\rangle|_W : W \times W \ \rightarrow \ \mathbb{R}$

negatif tanımlı olacak şekildeki V'nin en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna $\langle\cdot,\cdot\rangle$ simetrik bilineer formunun indeksi denir ve ν ile gösterilir[3,5].

Buna göre $1 \ \leq \nu \ \leq boyV$ dir. $\nu \ = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\langle\cdot,\cdot\rangle$ simetrik bilineer formunun yarı pozitif tanımlı olmasıdır.

V nin bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olsun. $b_{ij} \ = \ \langle e_i, e_j\rangle$ olarak tanımlanan $[b_{ij}]_{n\times n}$ matrisine $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bazına göre $\langle\cdot,\cdot\rangle$ nun matrisi denir. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ simetrik olduğundan $[b_{ij}]$ matrisi de simetriktir.

$\langle v, w\rangle \ = \ \langle\sum_{i=1}^{n} v_i\, e_i, \sum_{j=1}^{n} w_j e_j\rangle \ = \ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} v_i w_j$

olduğundan $[b_{ij}]$ matrisi $\langle\cdot,\cdot\rangle$ simetrik bilineer formunu belirler[3].

Teorem 2.1.1 Bir $\langle\cdot,\cdot\rangle$ simetrik bilineer formunun non-dejenere olması için gerek ve yeter koşul $\langle\cdot,\cdot\rangle$ nun herhangi bir baza göre matrisinin tersinin olmasıdır[3,5].

Tanım 2.1.4 Bir $v \ \in V$ vektörü için $\langle v, v\rangle \ > 0$ veya $v \ = 0$ ise bu v vektörüne space-like vektör,

$\langle v, v\rangle \ < 0 \ ise\ bu\ v$ vektörüne time like vektör,

$\langle v, v\rangle \ = 0 \ ve\ v \neq 0$ ise bu v vektörüne light-like veya null vektör denir[3,5].

2.2 Skalar Çarpmalı Uzaylar

Tanım 2.2.1 Bir V vektör uzayı üzerindeki non-dejenere, simetrik, bilineer forma V vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpma denir. V üzerindeki bir skalar çarpma $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ise $\langle V, \langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ ikilisine skalar çarpmalı vektör uzayı denir[3,5,6].

Tanım 2.2.2 Sıfır olmayan $v, w \ \in V \ için \ \langle v, w\rangle \ = 0 \ ise\ v\ ve\ w$ vektörlerine diktirler denir ve $v \perp w$ şeklinde gösterilir[3,5,6].

Teorem 2.2.1 V skaler çarpmalı uzayının bir altuzayı W olsun. Bu durumda şu özellikler vardır:

1. $boy\, W + boyW^{\perp} = n = boyV$
2. $(W^{\perp})^{\perp} = W$

[3,5].

Tanım 2.2.3 Bir V vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpma $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ve W da V'nin bir altuzayı olsun. Eğer W üzerinde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ non-dejenere ise W ya non-dejenere altuzay, non-dejenere değilse dejenere alt uzay denir[3,5].

Teorem 2.2.2 V skalar çarpmalı uzay ve W da V'nin bir altuzayı olsun. W'nun non-dejenere olması için gerek ve yeter koşul $V = W \oplus W^{\perp}$ olmasıdır[3,5].

Tanım 2.2.4 Bir V vektör uzayı üzerindeki bir skalar çarpma $\langle\cdot,\cdot\rangle$ olsun. Bir $v \epsilon V$ vektörünün normu

$\|v\| = |\langle v, v\rangle|^{1/2}$

olarak tanımlanır. Normu 1 olan vektöre birim vektör ve ortogonal birim vektörlerin cümlesine ortonormal sistem denir[3,5].

Teorem 2.2.3 Bir $V \neq \{0\}$ skalar çarpmalı uzayı bir ortonormal sisteme sahiptir. [3]

İspat. [3,5,6].

Teorem 2.2.4 Bir V vektör uzayı için bir ortonormal baz $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ olsun. $\varepsilon_i = \langle e_i, e_i\rangle$ olmak üzere $\forall\ v \epsilon V$ vektörü

$v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle V, e_i\rangle e_i$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir[3].

İspat. [3,5].

Teorem 2.2.5 Bir V vektör uzayının bir $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormal bazı için $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ işaretlerindeki negatif terimlerin v sayısı V'nin indeksidir[3].

İspat. [3,5].

Eğer V'nin bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ve V; v indeksine sahip ise, $\overrightarrow{v_p}\ ve\ \overrightarrow{w_p}$ vektörleri için, $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i, \quad w = \sum_{j=1}^{n} w_j e_j$

$\langle \overrightarrow{v_p}, \overrightarrow{w_p} \rangle = -\sum_{i=1}^{v} v_i w_i + \sum_{j=v+1}^{n} v_j w_j$

olur.Eğer $V = 0$ ise $\mathbb{R}_v^n$ skalar çarpmalı (yarı-Öklid) uzayı $\mathbb{R}^n$ den ibarettir. Bir Lorentz vektör uzayı L^n , indeksi 1 ve boyutu ≥ 2 olan skalar çarpmalı uzaydır [3,5].

Tanım 2.2.5 V vektör uzayı üzerinde tanımlanan $\langle \cdot,\cdot \rangle$ skalar çarpımı özel olarak pozitif tanımlı ise Öklid metriği adını alır, V ye de Öklid uzayı denir. Eğer $v = 1$ ise $\langle \cdot,\cdot \rangle$ skalar çarpımı Lorentz (Minkowski) metriği olup V ye de Lorentz uzayı veya Minkowski uzayı denir. V deki $\langle \cdot,\cdot \rangle$ simetrik bilineer formu dejenere ise, bu durumda V ye ışıksı veya null veya light-like veya dejenere vektör uzayı denir[3,5,6].

Önerme 2.2.1 $(W, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ reel n-boyutlu dejenere vektör uzayı ve W'nun sıfır uzayı RadW olsun. $nullW = r < n$ olmak üzere, RadW'nun V'deki tümleyeni olan altuzay non-dejeneredir. Bu uzaya ekran uzayı (screen space) veya perde uzayı denir ve SW ile gösterilir. [3]

İspat. [3,6].

Tanım 2.2.6 $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ skalar çarpmalı uzay olmak üzere;

(i) $\Gamma_N = \{v \in (V - \{0\}) \mid \langle v, v \rangle = 0\}$ şeklinde tanımlı Γ_N cümlesine V'nin ışık konisi

(ii) $\Gamma_S = \{v \in V \mid \langle v, v \rangle > 0\}$ şeklinde tanımlı Γ_S cümlesine V'nin uzay konisi

(iii) $\Gamma_T = \{v \in (V - \{0\}) \mid \langle v, v \rangle < 0\}$ şeklinde tanımlı Γ_T cümlesine V'nin zaman konisi denir[3,5,6].

2.3 Minkowski Uzay-Zaman

Tanım 2.3.1 Minkowski uzay-zaman (Lorentz uzayı)

$ds^2 = -dx_1^2 + \sum_{i=2}^{n} dx_i^2$

metriğiyle beraber M = $\mathbb{R}^n$ manifoldudur ve $\frac{\partial}{\partial x_1}$ vektör alanıyla zaman yönlüdür

[3,7].

Minkowski uzay-zamanının geodezikleri $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayının doğrularıdır. Bu geodeziklerin afin parametrelendirmeleri $\mathbb{R}^n$ deki Öklid yay uzunluğu parametrelendirmeleriyle orantılıdır. Minkowski uzay-zamanda verilen bir p noktasından geçen null geodezikler tepe noktası P de olan eliptik koni formundadırlar [3,7].

Minkowski uzay-zamanı bir Lorentz çarpımıdır. Eğer $\mathbb{R}$, negatif tanımlı $-dt^2$ metriğiyle ve $\mathbb{R}^{n-1}$ de g_0Öklid metriğiyle verilmiş ise o zaman

$(\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}, \quad -dt^2 \oplus g_0)$

bir n-boyutlu Minkowski uzayıdır[3,7].

Tanım 2.3.2 Minkowski uzayında farklı iki nokta $p = (p_1, \dots, p_n)\ ve\ q = (q_1, \dots, q_n)$ olsun. $\mathbb{R}$'de $p_1 < q_1\ ve\ (p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + \dots + (p_n - q_n)^2\ ise\ p \ll q$ kronolojik bağıntısı vardır. Eğ$er\ p \ll q$ ise o zaman p'den q'ya uzaklık

$d(p,q) = [(p_1 - q_1)^2 + \sum_{i=2}^{n}(p_i - q_i)^2\ ]^{\frac{1}{2}}$

ile verilir[3,7].

Minkowski uzay-zamanda p merkezli ''birim küre''

$K(p,1) = \{q\ \in M \mid d(p,q) = 1\}$

dir. Bu cümle iki kanatlı hiperboloidin bir kanatıdır[3,7].

Tanım 2.3.3 $\mathbb{R}_s^n$'yi $(-, \dots, -, +, \dots, +)$ işaretli yarı-Öklid uzayı olarak tanımlayalım, burada s tane negatif eigen değer ile $n - s$ tane pozitif eigen değeri vardır. Böylece $\mathbb{R}_s^n$ üzerinde yarı-Öklid metriği

$ds^2 = -\sum_{i=1}^{s} dx_i^2 + \sum_{i=s+1}^{n} dx_i^2$

ile verilir[3,7].

Özel olarak $\mathbb{R}_1^n$ $n -$ boyutlu Minkowski uzay-zaman (Lorentz uzayı) dır. $r > 0$ için de $\mathbb{R}_1^{n+1}$ uzayındaki Lorentz ve hiperbolik küreler, sırasıyla,

$S_1^n = \{x\epsilon\mathbb{R}_1^{n+1} \mid -x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = r^2\}$

ve

$\mathrm{H}_1^n = \{x \epsilon \mathbb{R}_1^{n+1} \mid -x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = -r^2\}$

biçimde ifade edilebilirler[3,7].

2.4 Yarı-Riemann Manifoldları

Tanım 2.4.1 M düzgün, para kompakt Hausdorff manifoldu olsun. $\pi : TM \to M$ de M'nin tanjant demetini göstersin. M'nin bir g yarı-Riemann metriği, M'de (0,2) tipinde düzgün simetrik tensör alanıdır öyle ki $\forall\, p \in M$ için

$g\,|_p : T_P M \times T_P M \to \mathbb{R}$

tensörü $(-, \ldots, -, +, \ldots, +)$ işaretli non-dejenere bir iç çarpımdır.

M üzerinde $\big(u, (x^1, \ldots, x^n)\big)$ lokal koordinatlardaki g yarı-Riemann metriği

$g\,|_u = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, dx_i \otimes dx_j$

olarak alınabilir, buradaki $g_{ij} = g_{ji}$ ve $det g \neq 0$ dır. Eğer g, s tane negatif eigen değerine ve $r = n - s$ tane pozitif eigen değerine sahipse o zaman, (s, r) tipindendir denir. Her $p \in M$ *için* g $|_p' nin\ diag\ \{-1, \ldots -1, +1, \ldots, +1\}$ ile gösterebilecek şekilde lokal koordinatları vardır [3,7].

Tanım 2.4.2 M diferansiyellebilir bir manifold ve g'de M üzerinde sabit indeksli bir metrik tensör olmak üzere; (M, g) ikilisine yarı-Riemann manifoldu denir[3,5,6].

Tanım 2.4.3 (M, g) bir yarı-Riemann manifoldu olsun. g'nin sabit indeksi q'ya (M, g) bir yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir, q indeksli n- boyutlu bir yarı-Riemann manifoldu M_q^n ile gösterilir[3,5,6].

Tanım 2.4.4 M_q^n bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Eğer n ≥ 2 ve $q = 1$ ise bu durumda M_1^n yarı-Riemann manifolduna Lorentz manifoldu denir[3,5,6].

Özel olarak q = 0 ise, bu durumda M^n bir Riemann manifoldu ve g de bir Riemann metriğidir.

Tanım 2.4.5 M_q^n bir yarı-Riemann manifoldu ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M_q^n$ diferansiyellenebilir bir eğri olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere;

1. $g\,(T,T) \geq 0$ ise α eğrisine uzay benzeri (space-like) eğri,
2. $g\,(T,T) < 0$ ise α eğrisine zaman benzeri (time-like) eğri,
3. $T \neq 0$ *için*, $g\,(T,T) = 0$ ise α eğrisine ışık benzeri (light-like veya null) eğri denir [3,5,6].

2.5 2-Boyutlu Lorentz Uzayı

Tanım 2.5.1 L^2 iki boyutlu Lorentz uzayı, $x = (x_1, x_2)$ ve $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$\langle x, y \rangle_L = x_1 y_1 - x_2 y_2$

Lorentz iç çarpımı ile donatılmış $\mathbb{R}^2$ dir[3,8].

Bundan sonraki gösterimlerde aksi belirtilmedikçe $\langle , \rangle$sembolü $\langle , \rangle_L$ anlamında kullanılacaktır.

Tanım 2.5.2 $\vec{x} = (x_1, x_2) \in L^2$ olsun. Eğer,

$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$ ise $\vec{x}$ ‘e time-like vektör,

$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ veya $\vec{x} = 0$ ise $\vec{x}$ ‘e space-like vektör ve

$x \neq 0$ *için* $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ ise $\vec{x}$ ‘e null vektör (light-like) denir[3,5].

Tanım 2.5.3 $\vec{x} \in L^2$ için $\vec{x}$’in normu

$\|\vec{x}\|_L = \sqrt{|\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle|}$

olarak tanımlanır [3,8].

Yine aksi belirtilmedikçe $\| \quad \|$ *sembol*ü $\| \quad \|_L$ yerine kullanılacaktır. Yukarıda verilen norm tanımına göre şu teorem verilebilir.

Teorem 2.5.1 $\vec{x} \in L^2$ olmak üzere,

1. $\|\vec{x}\| > 0$ dır.
2. $\vec{x} \neq 0$ *için* $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x}$ bir null vektördür.

3. $\vec{x}$ bir time-like vektör ise $\|\vec{x}\|^2 = -\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$ dir.

4. $\vec{x}$ bir space-like vektör ise $\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$ dir[3,8].

Tanım 2.5.4 L^2 iki boyutlu Lorentz uzayı ve $\vec{x}, \vec{y} \in L^2$ $(x \neq 0 \; ve \; y \neq 0)$ olsun.

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$

ise $\vec{x} \; ve \; \vec{y}$ vektörlerine Lorentz anlamında diktirler denir[3,8].

Aksi belirtilmedikçe iki vektörün dikliğinden ''Lorentz anlamında diklik'' anlaşılacak tır.

Örnek 2.5.1 $\vec{x} = (1,1) \; ve \; \vec{y} = (-1,1)$ vektörleri, öklidiyen anlamında dik olmalarına rağmen

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = -1 - 1 = -2 \neq 0$

olduğundan Lorentz anlamında dik değillerdir[3].

Örnek 2.5.2 $\vec{x} = (1,2) \; ve \; \vec{y} = (2,1)$ vektörleri birbirine diktirler. Çünkü

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 1.2 - 2.1 = 0$

dır[3].

Genel olarak, $\vec{x} = (x_1, x_2)$ve $\vec{y} = (y_1, y_2) \in L^2$ vektörleri birbirine diktirler $\Leftrightarrow$ $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ [3]

Teorem 2.5.2 Her ikisi de time-like (veya space-like) olan iki vektör birbirine dik olamaz [3,9].

İspat. $\vec{x}, \vec{y} \in L^2$ iki time-like vektör olsun. , $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$ için,

$$\left.\begin{array}{l} x_1{}^2 - x_2{}^2 < 0 \\ y_1{}^2 - y_2{}^2 < 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x_1{}^2 < x_2{}^2 \\ y_1{}^2 < y_2{}^2 \end{array}$$

dir.

$\Rightarrow\ {x_1}^2{y_1}^2 < {x_2}^2{y_2}^2$

$\Rightarrow\ |x_1y_1| = |x_2y_2|$

$\Rightarrow\ x_1y_1 \neq x_2y_2$

$\Rightarrow\ x_1y_1 - x_2y_2 \neq 0$

$\Rightarrow\ \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \neq 0$

dır. Yani $\vec{x}\ ve\ \vec{y}$ vektörleri dik olamazlar. Benzer bir ispat space-like vektörler için de yapılabilir[3].

Sonuç 2.5.1 İki vektörün dik olması için birinin time-like diğerinin space-like olması gerekir [3].

Tanım 2.5.5 $\vec{x} \in L^2$ time-like bir vektör olsun. **.** $\vec{e} = (0,1)$ olmak üzere,

1. $\langle \vec{x}, \vec{e} \rangle < 0$ ise $\vec{x}$ vektörüne zaman benzeri geleceğe doğru vektördür,
2. $\langle \vec{x}, \vec{e} \rangle > 0$ ise $\vec{x}$ vektörüne bir zaman benzeri geçmişe doğru vektördür denir[3,5].

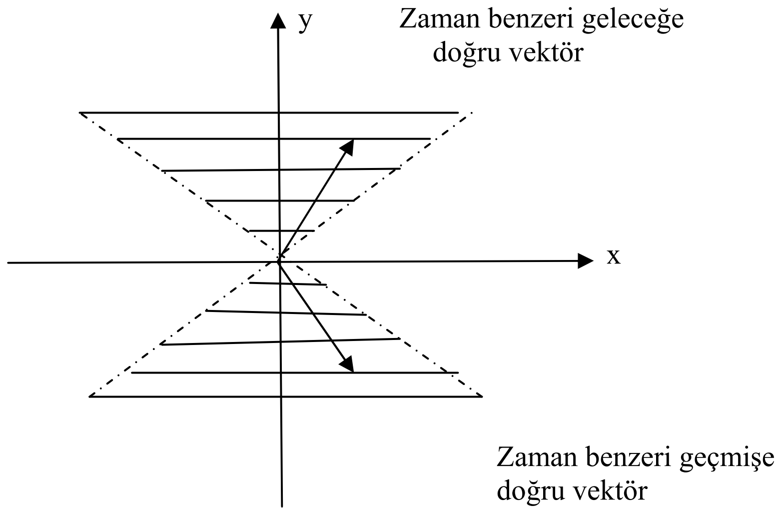
Sonuç 2.5.2 $\vec{\mathrm{x}} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \in L^2$ vektörünün zaman benzeri geleceğe doğru olması için gerek ve yeter şart

$|x_1| < x_2$

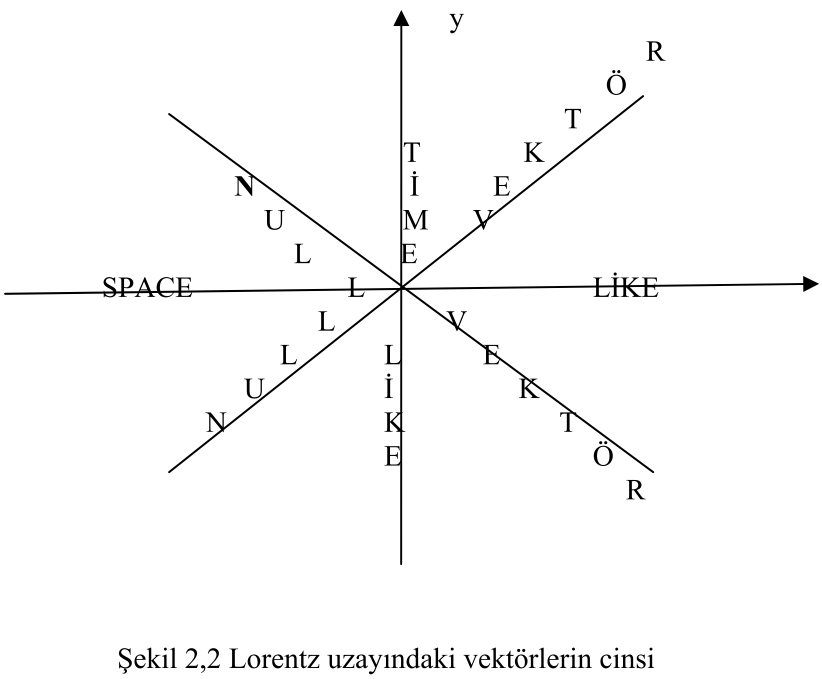
olmasıdır[3,8]

Örnek 2.5.3 $\vec{x} = (1,2)$ vektörü için, $|1| < 2$ olduğundan $\vec{\mathrm{x}}$ bir zaman benzeri geleceğe doğru vektördür[3].

Yukarıdaki açıklamalara göre $\langle , \rangle$ iç çarpımıyla donatılmış $\mathbb{R}^2$ için vektörlerin cinsini Şekil 2,2 deki gibi gösterebiliriz[3].



Şekil 2,1 Zaman benzeri geleceğe doğru ve zaman benzeri geçmişe doğru vektörler



Şekil 2,2 Lorentz uzayındaki vektörlerin cinsi

Teorem 2.5.3 $\mathbb{L}^2$ de birim time-like bir vektör ℓ *olsun*

$\langle \vec{\ell}, \vec{\ell}^{\perp} \rangle = 0$

olacak biçimde bir tek $\vec{\ell}^{\perp}$ birim vektörü vardır [3,8].

2.6 Hiperbolik Radyan

Tanım 2.6.1 $\mathbb{L}^2$ Lorentz uzayında space-like birim çember

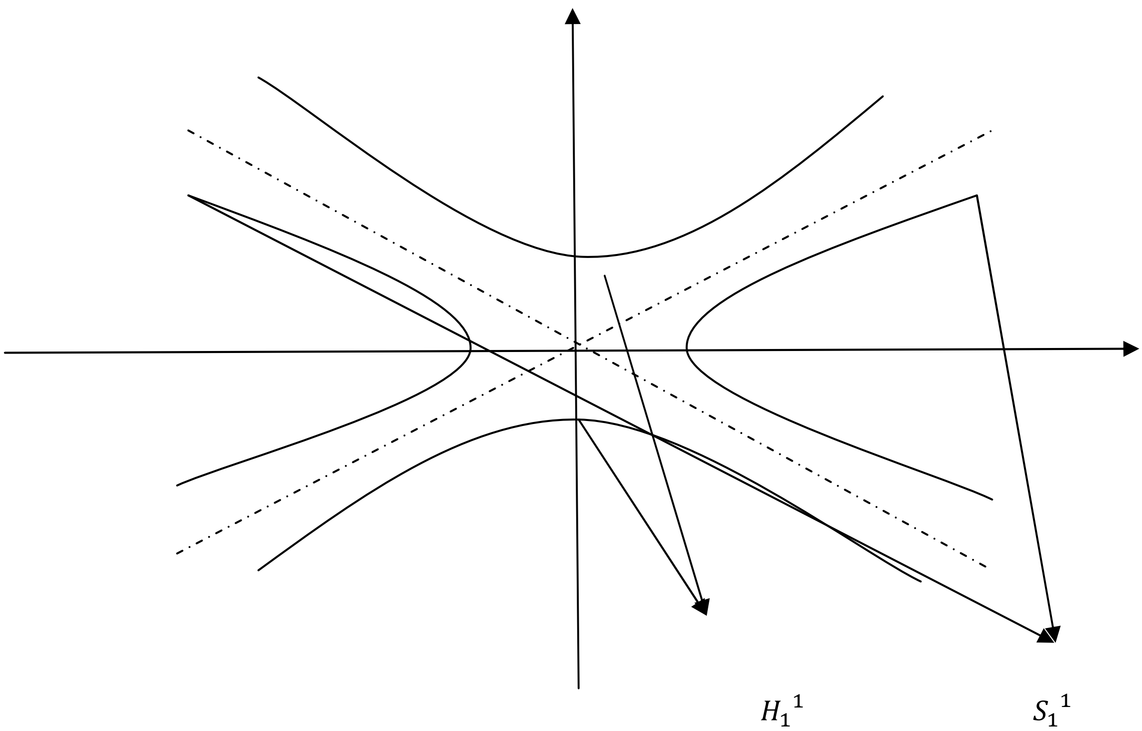
$S_1^{\,1} = \{X \in \mathbb{L}^2 \mid \langle X, X \rangle = 1\}$

biçiminde tanımlanır. Bu çemberin teğetleri daima $\langle \alpha', \ \alpha' \rangle < 0$ olup time-like vektörlerdir.

Benzer olarak, time-like birim çember de

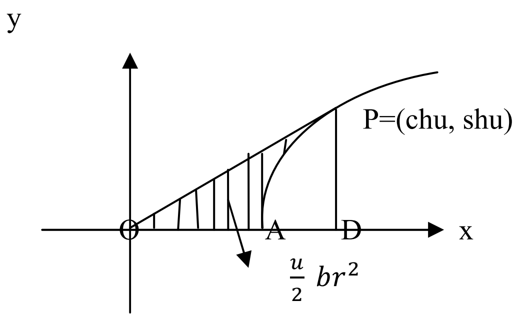
$H_1^{\,1} = \{X \in \mathbb{L}^2 \mid \langle X, X \rangle = -1\}$

biçiminde tanımlı olup, bu eğrinin teğetleri de space-like vektörlerdir(şekil 2.3). (Space-like ve Time-like Eğriler)

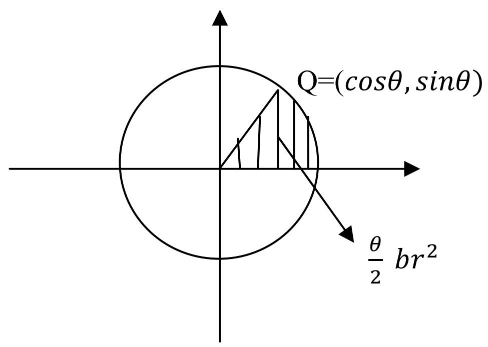


Şekil 2,3 Uzay benzeri ve zaman benzeri eğriler

$\mathbb{L}^2$ de açı kavramına geçmeden önce hiperbolik radyan kavramından bahsetmek yararlı olacaktır.Sıkça kullanılan ’’chu’’, ’’shu’’ ifadelerindeki ’’u’’ hiperbolik radyan cinsinden bir açı birimidir. Şekil 2.4. deki birim space like çember üzerindeki bir P noktasının koordinatları olarak verilen ’’chu’’, ’’shu’’ sayıları, birim çember (Şekil 2.5.)üzerinde bir $Q = (\cos\theta, \sin\theta)$ noktasının koordinatlarına oldukça benzemektedir. Birim çember üzerinde Q noktasının koordinatları için kullanılan θ radyanlı açının ölçüsü Şekil 2.5. teki taralı alanın ’’2 katından’’ ibaret bir büyüklüktür. Aynı şekilde space-like çember üzerindeki P noktasının koordinatları için kullanılan ’’u’’ hiperbolik radyanlık açının ölçüsü ise yine Şekil 2.4. deki taralı bölgenin alanını’’2 katından’’ ibaret bir büyüklüktür.(Silverman 1985).



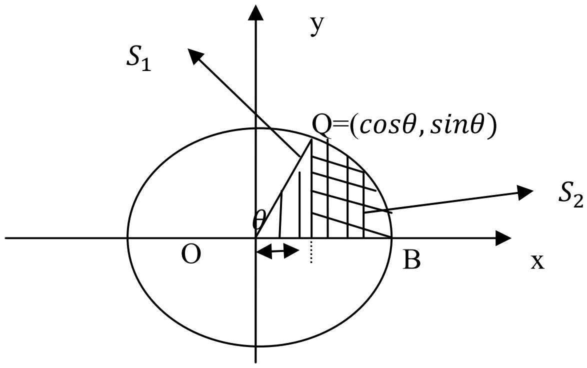
Şekil 2,4 Lorentz uzayında birim çember



Şekil 2,5 Öklid uzayında birim çember

$\mathbb{R}^2$ öklid uzayında birim çember, ${S_1}^1 = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid \langle X, X\rangle = 1\}$ şeklinde tanımlı olup X = (x, y) ∈ S^1 için $x^2 + y^2 = 1$ denklemine sahiptir. $\mathbb{L}^2$(ya da $\mathbb{R}_1^2$) Lorentz uzayında da birim çember ${S_1}^1 = \{X \in \mathbb{L}^2 \mid \langle X, X\rangle = 1\}$ şeklinde tanımlı olduğundan X = (x, y) ∈ S_1^1 için $x^2 - y^2 = 1$ denklemiyle gösterilir. Yani Öklid uzayındaki çemberlerin Lorentz uzayındaki karşılığı öklid anlamındaki hiperbollerdir. Öklid uzayında; parametrik gösterimi

$\alpha(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ olan birim çemberlerin θ açısına karşılık gelen $\widehat{BQ}$ yayının uzunluğunu bulalım (şekil 2.6.)



Şekil 2,6 Öklid uzayındaki θradyanlı açının ölçüsü

$S(\theta) = \int_0^{\theta} \sqrt{\langle\alpha'(\theta), \alpha'(\theta)\rangle} d\theta$

$= \int_0^{\theta} \sqrt{\langle(-\sin\theta, \cos\theta), (-\sin\theta, \cos\theta)\rangle} d\theta$

$= \int_0^{\theta} \sqrt{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)} d\theta$

$= \int_0^{\theta} \sqrt{1} d\theta$

$= \theta$

dır[3].

Şimdi S_2 alanını bulalım:

Öklid anlamında $x^2 + y^2 = 1$ olduğundan $y = \sqrt{1 - x^2}$ dir.

$S_2 = \int_x^1 \sqrt{1 - x^2} dx$

burada x = cos θ olduğundan $dx = -\sin\theta \, d\theta$ dır.

$S_2 = \int_{\theta}^{0} \sqrt{1 - \cos^2\theta} \, (-\sin\theta d\theta)$

$\Rightarrow S_2 = -\int_{\theta}^{0} \sqrt{\sin^2\theta} \sin\theta d\theta$

$$\Rightarrow S_2 = -\int_\theta^0 \sin^2\theta \, d\theta$$

$$\Rightarrow S_2 = -\int_\theta^0 \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$\Rightarrow S_2 = -\frac{1}{2}\int_\theta^0 (1-\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$\Rightarrow S_2 = -\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_\theta^0$$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta$$

olur. Şekil 2.6. daki OQC dik üçgeninin alanına S_1 dersek,

$$S_1 = \frac{1}{2}\cos\theta \sin\theta$$

dır[3].

Böylece Şekil 2.5. te gösterilen taralı bölgenin alanına S_A dersek

$$S_A = S_1 + S_2$$

$$\Rightarrow S_A = \frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta + \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta$$

$$\Rightarrow S_A = \frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta + \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}(2\sin\theta\cos\theta)$$

$$\Rightarrow S_A = \frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta + \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow S_A = \frac{1}{2}\theta$$

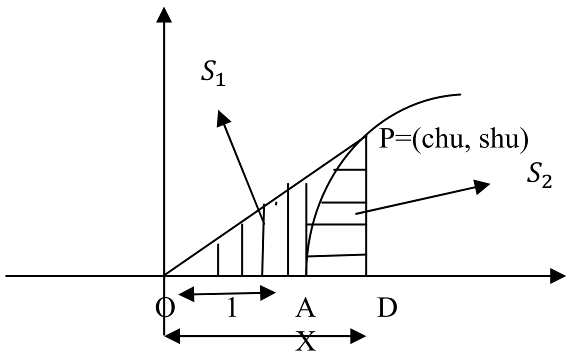
dır[3].

$\mathbb{L}^2$ Lorentz uzayında Lorentziyen birim çember;

$$S_1{}^1 = \left\{X \in \mathbb{L}^2 \mid \langle X, X\rangle = 1\right\}$$

şeklinde tanımlı olup $X = (x, y) \in S_1^1$ için $x^2 - y^2 = 1$ denklemine sahip olacağından bu denklem Öklid uzayında bir hiperbol gösteriyordu.

Şimdi de parametrik gösterimi $\gamma(u) = (chu, shu)$ olan eğrinin u açısına karşılık gelen $\widehat{AP}$ yayının uzunluğunu bulalım (Şekil 2,7)



Şekil 2,7 Lorentz uzayındaki u hiperbolik radyanlı açının ölçüsü

$\ell(\mathrm{u}) = \int_0^{\mathrm{u}} \sqrt{-\langle \gamma'(\mathrm{u}), \gamma'(\mathrm{u}) \rangle_{\mathbb{L}}} \mathrm{du}$

ve $\gamma(u) = (shu, chu)$ olduğundan

$\ell(u) = \int_0^u \sqrt{-(\mathrm{sh}^2 u - \mathrm{ch}^2 u)} du$

dur; burada $\mathrm{sh}^2 u - \mathrm{ch}^2 u = 1$ olduğundan

$\ell(u) = \int_0^u du \implies \ell(u) = u$

olur[3].

S_2 alanını bulalım:

Hiperbolün denklemi; $x^2 - y^2 = 1$ olduğundan $y = \sqrt{x^2 - 1}$ dir.

$S_2 = \int_1^x \sqrt{x^2 - 1} dx$

yazılışında $x = chu$ olduğundan $dx = shudu$ dur. O halde,

$S_2 = \int_0^u \sqrt{\mathrm{ch}^2 u - 1}(\,shudu)$

$\Rightarrow S_2 = \int_0^u \sqrt{\mathrm{sh}^2 u}\, shudu)$

$\Rightarrow S_2 = \int_0^u \mathrm{sh}^2 u\, du$

$\Rightarrow S_2 = \int_0^u \frac{\cosh 2u-1}{2} du$

$\Rightarrow S_2 = \frac{1}{2}\int_0^u (\cosh 2u - 1) du$

$\Rightarrow S_2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sinh 2u - u)|_0^u$

$\Rightarrow S_2 = \frac{1}{4}\sinh 2u - \frac{u}{2}$

olur[3].

Şekil 2,7 deki OPD dik üçgeninin alanına S_A dersek,

$S_A = \frac{1}{2} chushu$

olur. Burada $S_A = S_1 + S_2$ olacağından Şekil 2.7. de gösterilen taralı bölgenin alanı olan S_1, $S_A - S_2$ ye eşittir, yani

$S_1 = \frac{1}{2} chushu - \frac{1}{4} sh2u + \frac{u}{2}$

$\Rightarrow S_1 = \frac{1}{2} chushu - \frac{1}{4}(2chushu) + \frac{u}{2}$

$\Rightarrow S_1 = \frac{u}{2}$

dir[3].

3. TEMEL KUADRATİK FORMLAR

3.1 Birinci Temel Kuadratik Form ve Diskriminantı

u, v skaler, bağımsız gerçel değişkenlerin

$a \leq u \leq b$, $c \leq v \leq d$

kapalı dikdörtgen bölgesinde tanımlanmış, gerçel tek değerli ve 1-nci mertebeden

$$\vec{X} = \vec{X}\,(u, v) \tag{3.1}$$

vektörel fonksiyonu ile bir yüzey parçası verilmiş olsun (u, v eksenleri birbirine dik alınmıştır).

Eğer bir C eğrisi (veya bunun bir parçası) tümü ile bu yüzey parçası üzerinde ise, yüzeyin bu eğri üzerinde dolanan bir P noktasının u, v parametreleri, eğri boyunca aynı bir t parametresinin

$$u = u\,(t)\ , \qquad v = v\,(t) \qquad\qquad a \leq t \leq b \tag{3.2}$$

biçiminde fonksiyonlarıdır ve C'nin parametreli vektörel denklemi de

$$\vec{X} = \vec{X}\,[\,u\,(t), v\,(t)\,] \tag{3.3}$$

olur[1].

Eğer C eğrisi 1-nci mertebeden ise, yüzey parçası da böyle sayıldığından, (3.2) vektörel fonksiyonu da 1-nci mertebedendir.

C eğrisinin $t = t_0$ la belirli bir P_0 noktasındaki teğeti (3.2) denklemlerindeki u ve v ye

$u_0 = u\,(t_0\,), \qquad v_0 = v\,(t_0\,)$

dersek

$$\overrightarrow{X_p}'(t_0) = \overrightarrow{X_u}\,(u_0, v_0\,)\,u'(t_0) + \overrightarrow{X_v}\,(u_0, v_0\,)v'\,(t_0) \tag{3.4}$$

vektörüne paraleldir.

Eğer yüzeyin P_0 noktası düzgünse

$\overrightarrow{X_u}(u_0, v_0\,) \wedge \overrightarrow{X_v}\,(u_0, v_0\,) \neq \vec{0}$

dür. Aynı noktada $u'\,(t_0)\,, v'\,(t_0)$ aynı zamanda sıfır değilse, (3.4) ile tanımlanan $\overrightarrow{X_p}'(t_0) \neq 0$

dür, yani P_0 noktası C eğrisinde düzgün bir noktadır[1].

(3.4) bağıntısında türevler yerine diferansiyeller alırsak, yani (3.4)'ün her iki yanını keyfi olan dt ile çarpar ve herhangi bir P noktasını düşünürsek, t parametresine bağlı olmayan ve C'nin P deki teğetine paralel olan

$$d\vec{X} = \overrightarrow{X_u}du + \overrightarrow{X_v}dv \tag{3.5}$$

vektörünü elde ederiz[1].

C eğrisinin P noktasındaki teğetine paralel olan $\overrightarrow{dX}$ vektörü, P den itibaren alındığında, yüzeye teğet olur. Bunun doğrultusu $\frac{dv}{du}$ oranına bağlıdır. Eğer C eğrisi (3.2) denklemleriyle verilecek yerde,

$$g\,(u, v\,) = 0$$

bağıntısıyla tanımlanmış ise

$$g_u du + g_v dv = 0$$

eşitliğinden

$$\frac{du}{dv} = -\frac{gu}{gv}$$

çıkarılır.

C eğrisinin P noktasındaki lineer elemanı,

$$ds^2 = dx^2 \tag{3.6}$$

olduğundan (3.5) yardımıyla

$$ds^2 = \overrightarrow{X_u}^2 du^2 + 2\overrightarrow{X_u}.\overrightarrow{X_v}.du.dv + \overrightarrow{X_v}^2 dv^2$$

$$\overrightarrow{X_u}^2 = \langle\overrightarrow{X_u}, \overrightarrow{X_u}\rangle,\ \ \overrightarrow{X_u}.\overrightarrow{X_v} = \langle\overrightarrow{X_u}, \overrightarrow{X_v}\rangle,\ \ \overrightarrow{X_v}^2 = \langle\overrightarrow{X_v}, \overrightarrow{X_v}\rangle$$

veya

$$\langle\overrightarrow{X_u}, \overrightarrow{X_u}\rangle = E, \qquad \overrightarrow{X_u}.\overrightarrow{X_v} = F, \quad \langle\overrightarrow{X_v}, \overrightarrow{X_v}\rangle = G \tag{3.7}$$

dersek

$$\mathrm{I} = \mathrm{ds}^2 = \mathrm{Edu}^2 + 2\mathrm{Fdudv} + \mathrm{Gdv}^2 \tag{3.8}$$

sonucunu elde ederiz[1].

Buna yüzeyin P noktasındaki **birinci temel formu** veya metrik formu ya da **temel kuadratik formu** denir.

Bu formda, varsayım gereğince, du ve dv aynı zamanda sıfır almadıklarından ve P de yüzeyin düzgün bir noktası olarak alındığından, yani bu noktada $\overrightarrow{X_u}\ ve\ \overrightarrow{X_v}$ nın ikiside sıfır-vektörden farklı bulunduklarından (3.8) kuadratik formunun değeri, gerçel elemanlar için artı işaretlidir. Çünkü sıfır vektörden farklı olan (3.5) vektörünün skaler karesine eşittir.

Bu kuadratik formdaki $du^2, du, dv\ ve\ dv^2$ nin E, F, G katsayıları u, v nin

E = E (u, v), F = F (u, v), G = G (u,v)

biçimindeki fonksiyonlarıdır[1].

(u, v) değer takımı ile bir P (u, v) noktası belirtildiğinden, bu üç katsayının nokta fonksiyonları oldukları da söylenir.

Birinci ve üçüncü katsayılar, v = st ve u = st koordinat çizgilerinin teğet doğrultularını veren $\overrightarrow{X_u}, \overrightarrow{X_v}$ vektörlerinin, uzunluklarının karesine eşit olduklarından, düzgün noktada sıfırdan farklıdırlar.

Buna göre, yüzeyin düzgün her P noktasında daima

$$E > 0\,, G > O \tag{3.9}$$

dır[1].

Teorem 3.1.1. En az 1-nci mertebeden bir yüzeyin birinci temel kuadratik formu bir diferansi yel invaryanttır, yani (u, v) eğrisel koordinatları yerine, en az 1-nci mertebeden

$u = f\ (\vec{u}, \vec{v}\ ), \quad v = g\ (\vec{u}, \vec{v}\ )$

fonksiyonlarıyla yeni bir ($\vec{u}, \vec{v}$) eğrisel koordinat sistemi alındığında,

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = \bar{E}d\bar{u}^2 + 2\bar{F}d\bar{u}d\bar{v} + \bar{G}d\bar{v}^2$$

olur[1].

Birinci kuadratik formun ikinci katsayısı

$F = \langle \overrightarrow{X_u}, \overrightarrow{X_v} \rangle$

olduğundan, koordinat çizgileri arasındaki φ açısına bağlıdır. (3.7) formüllerine göre, φ nın yönü ne olursa olsun,

$$F = \sqrt{EG} cos\varphi \tag{3.10}$$

olduğundan

dar ise , $F > 0$

φ açısı dik ise , $F = 0$

geniş ise , $F < 0$

dür. (3.8) kuadratik formunun diskirminantını H^2 ile yani

$$H^2 = EG - F^2 \tag{3.11}$$

biçiminde göstereceğiz[1].

Yüzeyin düzgün ve gerçel her noktasında diskirminant, + işaretli olduğundan, H^2 ile gösterilmiştir. Gerçekten

$$\begin{aligned} H^2 &= EG - EG \cos^2 \varphi \\ &= EG \,(1 - \cos^2 \varphi) \\ &= EG \sin^2 \varphi \end{aligned} \tag{3.12}$$

sonucu çıkarılır[1].

Düzgün ve gerçel her noktada $E > 0$, $G > 0$, $\varphi \neq 0$ olduğundan , $H^2 > 0$ dır.

Yüzeyin düzgün ve gerçel her noktasında (3.7) ve (3.12) nedeniyle

$$\left(\overrightarrow{X_u} \wedge \overrightarrow{X_v}\right)^2 = EG \sin^2 \varphi = H^2 > 0 \tag{3.13}$$

dır. Görülüyor ki yüzeyin düzgün ve gerçel bir noktasında sıfırdan farklı H sayısını

$$H > 0 \tag{3.14}$$

olarak alırsak, normal vektörün salt değeri H dır, yani

$$|\overrightarrow{n^*}| = |\overrightarrow{X_u} \wedge \overrightarrow{X_v}| = |H| \tag{3.15}$$

olur.

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{X_u} \wedge \overrightarrow{X_v}}{|\overrightarrow{X_u} \wedge \overrightarrow{X_v}|} = \frac{\overrightarrow{X_u} \wedge \overrightarrow{X_v}}{H}$$

olduğundan da,

$$H\vec{n} = \overrightarrow{X_u} \wedge \overrightarrow{X_v} \tag{3.16}$$

yazılır[1].

3.2 Yüzeyin Bir Eğrisinin İki Noktası Arasındaki Eğrisel Uzunluk

$\vec{X} = \vec{X}\,(u, v)$ vektörel denklemiyle verilen bir yüzeyin bir C eğrisi de 1-nci mertebeden (3.2) denklemleriyle tanımlanmışsa, C nin parametreli vektörel denklemi de

$$\vec{X}(t) = \vec{X}\,[\,u\,(t), v\,(t)]$$

denklemiyle belli olur.

C eğrisinin A(a) ve B(b) noktaları arsındaki yay uzunluğu ($\widehat{AB}$ yayı düzgün noktalar dan oluşuyorsa), C eğrisinin $\widehat{AB}$ yayının bir P (t) noktasında

$$dx^2 = \langle\overrightarrow{X'_{(t)}}, \overrightarrow{X'_{(t)}}\rangle\, dt^2 = ds^2$$

yazılabileceğinden

$$\widehat{AB} = s = \int_a^b \sqrt{\langle\overrightarrow{X'_{(t)}}, \overrightarrow{X'_{(t)}}\rangle}\; dt = \int_a^b \sqrt{\overrightarrow{dx^2}}$$

$$= \int_a^b \sqrt{E\langle u'_{(t)}, u'_{(t)}\rangle + 2F\langle u'_{(t)}, v'_{(t)}\rangle + G\langle v'_{(t)}, v'_{(t)}\rangle}\; dt \tag{3.17}$$

integraliyle hesaplanır[1].

Yüzeyin düzgün noktalardan oluşan bir eğrisi

$h\,(u,v)=0,\; u_1\;\le\; u\;\le\; u_2\;,\quad v_1\;\le v\;\le\; v_2$

denklemiyle tanımlanmışsa, bunun $P_1(u_1), P_2(u_2)$ noktaları arsındaki $\widehat{P_1P_2}$ yay uzunluğu da eğri boyunca

$$\frac{dv}{du}=\;-\frac{h_u}{h_v}\;;\qquad h_v(u,v)\neq 0$$

olduğundan $\widehat{P_1P_2}$ yayı,$\langle h_u(u,v), h_u(u,v)\rangle = {h_u}^2(u,v)\; ve\; \langle h_v(u,v), h_v(u,v)\rangle = {h_v}^2(u,v)$ gösterilmek üzere

$$\widehat{P_1P_2}=s=\int_{u_1}^{u_2}\frac{\left[E{h_v}^2(u,v)-2Fh_u(u,v)h_v(u,v)+G{h_u}^2(u,v)\right]^{1/2}du}{h_v(u,v)} \tag{3.18}$$

sonlu integraline eşittir[1].

3.3 Yüzeyin Düzgün Bir Noktasından Geçen Herhangi İki Eğrisi Arasındaki Açı

İki yanlı ve 1-nci mertebeden bir yüzeyin düzgün bir P (u, v) noktasındaki birim normal vektörü $\vec{n}$, P den geçen ve 1-nci mertebeden iki eğrisi de C, C^* olsun.

$C\; ve\;\; C^*$ eğrileri, yine 1-nci mertebeden

$$u=u(t)\,,\qquad v=v(t)\,;\qquad u=u(t^*)\,,\qquad v=v(t^*) \tag{α}$$

fonksiyonları yardımıyla verilmişlerse, bunların yer vektörleri 1-nci mertebeden

$\vec{X}=\;\vec{X}[u(t),v(t)]\;\;,\vec{X}=\;\vec{X}[u(t^*),v(t^*)]$

vektörleridir.

O halde $C\; ve\;\; C^*$ın P düzgün noktasındaki teğet vektörleri

$$\frac{d\vec{X}}{dt}=\;\overrightarrow{X_u}\frac{du}{dt}+\overrightarrow{X_v}\frac{dv}{dt}\;\;,\qquad \frac{\delta\vec{X}}{\delta t^*}=\;\overrightarrow{X_u}\frac{\delta u}{\delta t^*}+\overrightarrow{X_v}\frac{\delta v}{\delta t^*}$$

veya kısaca,

$$d\vec{X}=\;\overrightarrow{X_u}du+\overrightarrow{X_v}dv\qquad,\;\;\delta\vec{X}=\;\overrightarrow{X_u}\delta u+\overrightarrow{X_v}\delta v \tag{3.19}$$

olur[1].

C , C^* eğrilerinin P noktasında oluşturdukları açının tanımı :

P noktasındaki $\vec{n}$ birim normal vektörü, bu noktadaki teğet düzlem üzerinde pozitif bir dönme yönü tanımlar. P den geçen iki eğriyi belirli bir sırada, örneğin C , C^* sırasında alalım. Bunların aynı sırada ve aynı noktadaki $dx, \delta x$ teğet vektörleri arasında, π den küçük olmak üzere oluşan

$$\varphi = \widehat{d\vec{X}\delta\vec{X}} \quad , \quad |\varphi| < \pi$$

açısı, C , C^* eğrilerinin P deki açılarıdır. φ açısı π den küçük seçildiğine göre, (+) ya da (-) işaretli olabilir[1].

a. φ Açısının Kosinüsü

φ açısı hangi işaretli olursa olsun, bunun kosinüsü daima aynı işaretlidir ve

$$\cos\varphi = \frac{d\vec{X}.\delta\vec{X}}{|d\vec{X}|.|\delta\vec{X}|} \tag{3.20}$$

e eşittir.

(3.8) ve (3.17) formüllerini kullanarak

$$\cos\varphi = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}} \tag{3.21}$$

şeklinde yazabiliriz.

Eğer (α) fonksiyonlarını

$$u = f(t)\,, \qquad v = k(t) \quad ; \quad u = f^*(t^*)\,, \quad v = k^*(t^*) \qquad (\alpha)$$

biçiminde yazarsak

$$du = f_t'dt\,, dv = k_t'dt\,; \quad \delta u = f_{t^*}^{*}{}'dt^* \;, \delta v = k_{t^*}^{*}dt^* \qquad (\beta)$$

olacağından, (3.21) formülü

$$\cos\varphi = \frac{Ef_t'f_{t^*}^{*}{}' + F(f_t'k_{t^*}^{*}{}' + k_t'f_{t^*}^{*}{}') + Gk_t'k_{t^*}^{*}{}'}{\sqrt{Ef_t'^2 + 2Ff_t'k_t' + Gk_t'^2}\sqrt{Ef_{t^*}^{*}{}'^2 + 2Ff_{t^*}^{*}{}'k_{t^*}^{*}{}' + Gk_{t^*}^{*}{}'^2}} \tag{3.22}$$

dır[1].

b. φ Açısının Sinüsü

$\frac{d\vec{X}}{|d\vec{X}|}$ ve $\frac{\delta\vec{X}}{|\delta\vec{X}|}$ birim vektörlerinin $\frac{d\vec{X}\wedge\delta\vec{X}}{|d\vec{X}|.|\delta\vec{X}|}$ vektörel çarpımının salt değeri bu iki birim vektörü arasındaki açının salt değerine eşittir. O halde

$$\vec{n}.\frac{d\vec{X}\wedge\delta\vec{X}}{|d\vec{X}|.|\delta\vec{X}|}=\frac{\left(\vec{n},d\vec{X},\delta\vec{X}\ \right)}{|d\vec{X}|.|\delta\vec{X}|}=\ \sin\varphi \qquad (3.23)$$

yazabiliriz.

$d\vec{X}\wedge\delta\vec{X}$ vektörel çarpımının $\vec{n}$ ile aynı yönlü olması halinde, $\varphi\ >0$, aksi halde $\varphi\ <0$ dır.

(3.19) ve (3.8) bağıntıları yardımıyla

$$d\vec{X}\wedge\delta\vec{X}=(du\delta v-dv\delta u)\overrightarrow{X_u}\wedge\overrightarrow{X_v}$$

yazabiliriz;

ya da

$$\left.\begin{array}{l} d\vec{X}=\ \overrightarrow{X_u}du+\overrightarrow{X_v}dv \\ \delta\vec{X}=\ \overrightarrow{X_u}\delta u+\overrightarrow{X_v}\delta v \end{array}\right\}\Rightarrow d\vec{X}\wedge\delta\vec{X}=\ \left(\overrightarrow{X_u}\wedge\overrightarrow{X_v}\ \right)du\delta v+\left(\overrightarrow{X_u}\wedge\overrightarrow{X_v}\ \right)dv\delta u$$

$$=\overrightarrow{X_u}\wedge\overrightarrow{X_v}(du\delta v-dv\delta u)$$

ve (3.16) yı kullanarak

$$d\vec{X}\wedge\delta\vec{X}=H\ (du\delta v-dv\delta u)\vec{n} \qquad (3.24)$$

bulunacağından

$$\sin\varphi=\frac{\pm H\begin{vmatrix}du & dv\\ \delta u & \delta v\end{vmatrix}}{\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2+2F\delta u\delta v+G\delta v^2}} \qquad (3.25)$$

dur.

eğrilerin α fonksiyonları ile verilmeleri halinde de

$$\sin\varphi = \frac{\pm H \begin{vmatrix} f_t' & k_t' \\ f_{t^*}^{*}{}' & k_{t^*}^{*}{}' \end{vmatrix}}{\sqrt{E f_t'^2 + 2F f_t' k_t' + G k_t'^2}\sqrt{E f_{t^*}^{*}{}'^2 + 2F f_{t^*}^{*}{}' k_{t^*}^{*}{}' + G k_{t^*}^{*}{}'^2}} \tag{3.26}$$

bulunur[1].

3.2 İkinci Temel Kuadratik Form Ve Düzgün Nokta Yakınlarının, Düzgün Noktadaki Teğet Düzleme Göre Konumu

Bir P (u, v) düzgün noktası yakınlarında en az 2-nci mertebeden ve iki yanlı bir yüzeyin P ye yakın herhangi bir noktası $Q\ (u+\Delta u, v+\Delta v)$ olsun. P deki birim normal vektörü $\vec{n}(u,v)$ olduğuna göre Q nun P deki teğet düzlemden işaretli d uzaklığı

$d = \langle \vec{n}, \overrightarrow{PQ} \rangle$

ve Taylor formülü nedeniyle

$\overrightarrow{PQ} = \Delta\vec{X} = \Delta u \overrightarrow{X_u} + \Delta v \overrightarrow{X_u} + \frac{1}{2}\left[(\Delta u)^2 \overrightarrow{X_{uu}} + 2\Delta u \Delta v \overrightarrow{X_{uv}} + (\Delta v)^2 \overrightarrow{X_{vv}} + \cdots + \overrightarrow{\varepsilon_2}\right]$

$\lim_{\Delta u \to 0} \overrightarrow{\varepsilon_2} = \vec{0}$

yazılabileceğinden

$$\vec{d} = \langle \vec{n}, \Delta\vec{X} \rangle = \frac{1}{2}\left[\Delta u^2 \langle \vec{n}, \overrightarrow{X_{uu}} \rangle + 2\Delta u \Delta v \langle \vec{n}, \overrightarrow{X_{uv}} \rangle + \Delta v^2 \langle \vec{n}, \overrightarrow{X_{vv}} \rangle + \langle \vec{n}, \overrightarrow{\varepsilon_2} \rangle\right] \tag{3.27}$$

olur[1].

$\lim_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0}} \langle \vec{n}, \overrightarrow{\varepsilon_2} \rangle = 0$

$\vec{d} = \frac{1}{2}\left[\langle \vec{n}, \overrightarrow{X_{uu}} \rangle du^2 + 2\langle \vec{n}, \overrightarrow{X_{uv}} \rangle du dv + \langle \vec{n}, \overrightarrow{X_{vv}} \rangle dv^2\right]$

dır. Eğer

$$L = \langle \vec{n}, \overrightarrow{X_{uu}} \rangle, \quad M = \langle \vec{n}, \overrightarrow{X_{uv}} \rangle, \quad N = \langle \vec{n}, \overrightarrow{X_{vv}} \rangle \tag{3.28}$$

dersek, tanım gereğince

$$\mathbb{I} = \langle \vec{n}, d^2\vec{X} \rangle = L du^2 + 2M du dv + N dv^2 \tag{3.29}$$

diferansiyel formu, yüzeyin P düzgün noktasındaki ikinci temel kuadratik formdur.

Tıpkı I temel kuadratik formda olduğu gibi

L = L (u, v) , M = (u, v) , N = (u, v)

katsayıları da nokta fonksiyonlarıdır [1].

Ayrıca söylenmedikçe, bundan sonraki kısımlarda, bu katsayıların üçünün birden sıfır olmadıklarını varsayacağız.

İkinci kuadratik formun katsayılarını veren formüller

$H\vec{n} = \overrightarrow{X_u} \wedge \overrightarrow{X_v}$

ve (3.28) formüllerinden

$$L = \frac{\left(\overrightarrow{X_u}, \overrightarrow{X_v}, \overrightarrow{X_{uu}}\right)}{H} \;\; ; \;\; M = \frac{\left(\overrightarrow{X_u}, \overrightarrow{X_v}, \overrightarrow{X_{uv}}\right)}{H} \;\; ; \;\; N = \frac{\left(\overrightarrow{X_u}, \overrightarrow{X_v}, \overrightarrow{X_{vv}}\right)}{H} \qquad (3.30)$$

sonuçları çıkarılır[1].

L,M,N katsayılarının P düzgün noktasında aynı zamanda sıfıra eşit olmamaları da, geometrik bakımdan $\overrightarrow{X_{uu}}, \overrightarrow{X_{uv}}, \overrightarrow{X_{vv}}$ vektörlerinin P düzgün noktasındaki teğet düzleme paralel olmamalarını gerektirir. Öte yandan

$\langle \vec{n}, d\vec{X} \rangle = 0$

özdeşliğinin diferansiyelini alırsak

$\langle \vec{n}, d^2 X \rangle + \langle d\vec{n}, d\vec{X} \rangle = 0$

ya da

$\langle \vec{n}, d^2 X \rangle = II = -\langle d\vec{n}, d\vec{X} \rangle = -\langle (\overrightarrow{n_u} du + \overrightarrow{n_v} dv), \left(\overrightarrow{X_u} du + \overrightarrow{X_v} dv\right) \rangle = -\langle \overrightarrow{n_u}, \overrightarrow{X_u} \rangle du^2 -$

$\left(\langle \overrightarrow{n_u}, \overrightarrow{X_v} \rangle + \langle \overrightarrow{n_v}, \overrightarrow{X_u} \rangle\right) du dv - \langle \overrightarrow{n_v}, \overrightarrow{X_v} \rangle dv^2$

buluruz. Hâlbuki

$$\langle \vec{n}, \overrightarrow{X_u} \rangle \equiv 0 \; , \qquad \langle \vec{n}, \overrightarrow{X_v} \rangle \equiv 0 \qquad (3.31)$$

özdeşliklerinin, sırası ile v ve u ya göre kısmi türevlerini aldığımızda

$$\left.\begin{aligned}
&\langle\overrightarrow{n_v},\overrightarrow{X_u}\rangle + \langle\vec{n},\overrightarrow{X_{uv}}\rangle \equiv 0 \Rightarrow -\langle\overrightarrow{n_v},\overrightarrow{X_u}\rangle = \langle\vec{n},\overrightarrow{X_{uv}}\rangle = M \\
&\langle\overrightarrow{n_u},\overrightarrow{X_v}\rangle + \langle\vec{n},\overrightarrow{X_{vu}}\rangle \equiv 0 \Rightarrow -\langle\overrightarrow{n_u},\overrightarrow{X_v}\rangle = \langle\vec{n},\overrightarrow{X_{vu}}\rangle = M \\
&\langle\overrightarrow{n_u},\overrightarrow{X_u}\rangle + \langle \vec{n},\overrightarrow{X_{uu}}\rangle \equiv 0 \Rightarrow -\langle\overrightarrow{n_u},\overrightarrow{X_u}\rangle = \langle\vec{n},\overrightarrow{X_{uu}}\rangle = L \\
&\langle\overrightarrow{n_v},\overrightarrow{X_v}\rangle + \langle\vec{n},\overrightarrow{X_{vv}}\rangle \equiv 0 \Rightarrow -\langle\overrightarrow{n_v},\overrightarrow{X_v}\rangle = \langle\vec{n},\overrightarrow{X_{vv}}\rangle = N
\end{aligned}\right\} \qquad (3.32)$$

olacağından, L,M,N katsayıları için

$$L = -\langle\overrightarrow{n_u},\overrightarrow{X_u}\rangle \quad ; \quad M = -\langle\overrightarrow{n_v},\overrightarrow{X_u}\rangle = -\langle\overrightarrow{n_u},\overrightarrow{X_v}\rangle \quad ; \quad N = -\langle\overrightarrow{n_v},\overrightarrow{X_v}\rangle \qquad (3.33)$$

olur. Bunlarında geçerli olabilmeleri için, yüzeyi tanımlayan vektörel fonksiyonun, P düzgün noktasında en az 2-nci mertebeden olması gerekir [1].

3.4. Birim Normal Vektörünün Birinci Mertebeden Kısmi Türevleri. Weingarten ve Olinde Rodrigues formülleri

En az 2-nci mertebeden $\vec{X} = \vec{X}(u,v)$ vektörel fonksiyonu ile gösterilen yüzeyin bir P(u,v) düzgün noktasındaki $\vec{n}(u,v)$ birim normal vektörünün birinci mertebeden kısmi türev vektörleri, $\vec{n}$ ye dik olduklarından, P deki teğet düzleme paralel vektörlerdir. O halde bunları, koordinat çizgilerinin $\overrightarrow{X_u}$, $\overrightarrow{X_v}$ teğet vektörlerinin lineer kombinezonları biçiminde yazabiliriz.

$$\overrightarrow{n_u} = a_{11}\overrightarrow{X_u} + a_{12}\overrightarrow{X_v} \quad , \quad \overrightarrow{n_v} = a_{21}\overrightarrow{X_u} + a_{22}\overrightarrow{X_v} \qquad (3.34)$$

Bunları sırası ile $\overrightarrow{X_u}$ ve $\overrightarrow{X_v}$ vektörleri ile çarparsak

$$\overrightarrow{n_u} = a_{11}\overrightarrow{X_u} + a_{12}\overrightarrow{X_v}$$

$$\langle\overrightarrow{n_u},\overrightarrow{X_u}\rangle = a_{11}\langle\overrightarrow{X_u},\overrightarrow{X_u}\rangle + a_{12}\langle\overrightarrow{X_v},\overrightarrow{X_u}\rangle$$

(burada $L = -\langle\overrightarrow{n_u},\overrightarrow{X_u}\rangle$; $M = -\langle\overrightarrow{n_v},\overrightarrow{X_u}\rangle = -\langle\overrightarrow{n_u},\overrightarrow{X_v}\rangle$; $N = -\langle\overrightarrow{n_v},\overrightarrow{X_v}\rangle$

$E = \langle\overrightarrow{X_u},\overrightarrow{X_u}\rangle$; $F = \langle\overrightarrow{X_u},\overrightarrow{X_v}\rangle$; $G = \langle\overrightarrow{X_v},\overrightarrow{X_v}\rangle$ olduğundan)

$$\boxed{-L = a_{11}E + a_{12}F} \qquad (3.35)$$

$$\overrightarrow{n_v} = a_{21}\overrightarrow{X_u} + a_{22}\overrightarrow{X_v}$$

$$\langle\overrightarrow{n_v}\overrightarrow{X_u}\rangle = a_{21}\langle\overrightarrow{X_u}\overrightarrow{X_u}\rangle + a_{22}\langle\overrightarrow{X_v}\overrightarrow{X_u}\rangle$$

$$\boxed{-M = a_{21}E + a_{22}F} \tag{3.36}$$

$$\langle \overrightarrow{n_v}, \overrightarrow{X_v} \rangle = a_{21}\langle \overrightarrow{X_v}, \overrightarrow{X_u} \rangle + a_{22}\langle \overrightarrow{X_v}, \overrightarrow{X_v} \rangle$$

$$\boxed{-N = a_{21}F + a_{22}G} \tag{3.37}$$

$$\langle \overrightarrow{n_u}, \overrightarrow{X_v} \rangle = a_{11}\langle \overrightarrow{X_u}, \overrightarrow{X_v} \rangle + a_{12}\langle \overrightarrow{X_v}, \overrightarrow{X_v} \rangle$$

$$\boxed{-M = a_{11}F + a_{12}G} \tag{3.38}$$

(3.35), (3.36), (3.37) ve (3.38) denklemlerinden de

$$\left.\begin{aligned} H^2 a_{11} &= FM - GL \\ H^2 a_{12} &= FL - EM \\ H^2 a_{21} &= FN - GM \\ H^2 a_{22} &= FM - EN \end{aligned}\right\} \tag{3.39}$$

elde edilir. (3.39)'u kullanarak (3.34)'ü yeniden yazarsak

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{n_u} &= \frac{1}{H^2}\{(FM - GL)\overrightarrow{X_u} + (FL - EM)\overrightarrow{X_v}\} \\ \overrightarrow{n_v} &= \frac{1}{H^2}\{(FN - GM)\overrightarrow{X_u} + (FM - EN)\overrightarrow{X_v}\} \end{aligned}\right\} \tag{3.40}$$

elde ederiz. Bunlara **WEİNGARTEN formülleri** denir[1].

Eğer koordinat çizgilerinin yüzey üzerinde oluşturdukları şebeke dik ise, $F \equiv 0$ dır ve (3.40) formülleri

$$H^2 = GE$$

olduğundan

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{n_u} &= -\left\{\frac{L}{E}\overrightarrow{X_u} + \frac{M}{G}\overrightarrow{X_v}\right\} \\ \overrightarrow{n_v} &= -\left\{\frac{M}{E}\overrightarrow{X_u} + \frac{N}{G}\overrightarrow{X_v}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{3.41}$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer, fazla olarak, koordinat çizgileri yüzey üzerinde $M \equiv 0$ özdeşliğini sağlayabilecek biçimde seçilebilirse

$$\overrightarrow{n_u} = -\frac{L}{E}\overrightarrow{X_u} \qquad , \qquad \overrightarrow{n_v} = -\frac{N}{G}\overrightarrow{X_v}$$

olup,

$$r = \frac{L}{E} \qquad , \qquad \bar{r} = \frac{N}{G} \tag{3.42}$$

dersek (3.41) formüllerinden

$$\overrightarrow{n_u} + r\,\overrightarrow{X_u} = \vec{0} \qquad , \qquad \overrightarrow{n_v} + \bar{r}\,\overrightarrow{X_v} = \vec{0} \tag{3.43}$$

elde edilir. Bunlara da **OLİNDE RODRIGUES formülleri** denir.[1].

4. LORENTZ UZAYINDA YÜZEYLERİN DİFERANSİYEL GEOMETRİSİ

4.1 Temel Formlar

$\mathbb{L}^3$ de time-like ya da space-like olan bir M yüzeyi

$$\vec{X} = \vec{X}\,(u, v) \tag{4.1}$$

vektörel fonksiyonu ile verilmiş olsun. Eğer bir C eğrisi (veya bunun bir parçası) tümü ile bu yüzey üzerinde ise, yüzeyin bu eğri üzerinde dolanan bir P noktasının u, v parametreleri, eğri boyunca aynı bir t parametresinin

$$u = u(t)\,,\ \ v = v(t)\,,\ \ \ a \leq t \leq b \tag{4.2}$$

biçiminde fonksiyonlardır ve C nın t parametresine bağlı vektörel denklemi de

$$\vec{X} = \vec{X}\,(u(t), v(t)) \tag{4.3}$$

olur. Eğer C eğrisi 1-nci mertebeden ise, yüzey parçası da böyle sayıldığından (4.2) vektörel fonksiyonu da 1-nci mertebedendir. C eğrisinin her p(u, v) noktasındaki teğeti

$$\begin{aligned} X'(t) &= \frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial X}{\partial v}\frac{dv}{dt} \\ &= X_u \frac{du}{dt} + X_v \frac{dv}{dt} \end{aligned} \tag{4.4}$$

dir [4] ve bu noktada $\overrightarrow{X_u} \times \overrightarrow{X_V} \neq 0'$ dır.

(4.4)'de her iki tarafı keyfi olan dt ile çarparsak

$$d\vec{X} = \overrightarrow{X_u}du + \overrightarrow{X_v}dv \tag{4.5}$$

vektörünü elde ederiz.

C eğrisinin P noktasındaki lineer elemanı

$$ds^2 = d\vec{X}^2 = \left(\overrightarrow{X'}(t)\right)^2 dt^2$$

olduğundan (4.5)'den

$$ds^2 = \langle\overrightarrow{X_u}, \overrightarrow{X_u}\rangle du^2 + 2\langle\overrightarrow{X_u}, \overrightarrow{X_v}\rangle dudv + \langle\overrightarrow{X_v}, \overrightarrow{X_v}\rangle dv^2 \tag{4.6}$$

buluruz.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ işaret fonksiyonlarını, $\overrightarrow{X_u} ve \overrightarrow{X_V}$ M deki teğet vektörler ve $\vec{n}$'de M deki normal vektörü göstermek üzere aşağıdaki eşitlikleri tanımlayalım:[4]

$$\langle \overrightarrow{n_u}, \overrightarrow{n_u} \rangle = \varepsilon_1 \|\overrightarrow{n_u}\|^2 \;,\; \langle \overrightarrow{n_v}, \overrightarrow{n_v} \rangle = \varepsilon_2 \|\overrightarrow{n_v}\|^2 \;,\; \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = \varepsilon_5 \|\vec{n}\|^2$$

$$\langle \overrightarrow{X_u}, \overrightarrow{X_u} \rangle = \varepsilon_3 \left\|\overrightarrow{X_u}\right\|^2 \;,\; \langle \overrightarrow{X_v}, \overrightarrow{X_v} \rangle = \varepsilon_4 \left\|\overrightarrow{X_v}\right\|^2 \;,\; \langle \overrightarrow{X_u}, \overrightarrow{X_v} \rangle = \frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3 \varepsilon_4}}$$

$$\langle \overrightarrow{X_u}, \overrightarrow{X_u} \rangle = \varepsilon_3 E \;,\; \langle \overrightarrow{X_v}, \overrightarrow{X_v} \rangle = \varepsilon_4 G \;,\; H^2 = \varepsilon_3 \varepsilon_4 EG - \frac{F^2}{\varepsilon_3 \varepsilon_4}$$

Böylece (4.6)'yı yeniden yazarsak

$$\mathrm{I} = ds^2 = \varepsilon_3 E du^2 + 2 \frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3 \varepsilon_4}} dudv + \varepsilon_4 G dv^2 \tag{4.7}$$

olur[4]. Buna yüzeyin P noktasındaki **birinci temel formu** veya **temel kuadratik formu** denir. Böylece C eğrisinin a ve b noktaları arasındaki yay uzunluğu

$$s = \int_a^b \sqrt{(X'(t))^2} dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{\overrightarrow{dx}^2}$$

$$= \int_a^b \sqrt{\overrightarrow{ds^2}}$$

$$= \int_a^b \sqrt{\varepsilon_3 E (u'_t)^2 + 2 \frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3 \varepsilon_4}} u'_t v'_t + \varepsilon_4 G (v'_t)^2}\, dt \tag{4.8}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Sonuç 1.

a)Eğer $\overrightarrow{X_u}$ vektörü time-like, $\overrightarrow{X_v}$ vektörü de spaca-like ise $\langle \overrightarrow{X_u}, \overrightarrow{X_u} \rangle = -E \;\; ve \;\; \langle \overrightarrow{X_v}, \overrightarrow{X_v} \rangle = G$ olacağından birinci temel kuadratik form $F = 0$ olması şartı ile

$\mathrm{I} = -Edu^2 + Gdv^2$

olur [4].

b)Eğer $\overrightarrow{X_v}$ vektörü time-like, $\overrightarrow{X_u}$ vektörü de spaca-like ise $\langle\overrightarrow{X_u},\overrightarrow{X_u}\rangle = E \ \ ve \ \ \langle\overrightarrow{X_v},\overrightarrow{X_v}\rangle = -G$ olacağından birinci temel kuadratik form $F = 0$ olması şartı ile

$\mathrm{I} = Edu^2 - Gdv^2$

olur[4].

En az ikinci mertebeden bir yüzey üzerindeki bir P(u, v)noktasının komşuluğunda ve P'ye yeterince yakın bir nokta $Q(u + \Delta u, v + \Delta v)$ olsun. P deki birim normal vektör $\vec{n}\ (u, v)$ olduğuna göre, Q nun P deki teğet düzleme olan d uzaklığı

$d = \ \langle\vec{n}, \overrightarrow{PQ}\rangle$

dur ve Taylor formülünü kullanarak

$$\overrightarrow{PQ} = \ \Delta x = \Delta_u\overrightarrow{X_u} + \Delta_v\overrightarrow{X_v} + \frac{1}{2}(\Delta_u{}^2\overrightarrow{X_{uu}} + 2\Delta_u\Delta_v\overrightarrow{X_{uv}} + \Delta_v{}^2\overrightarrow{X_{vv}} + \varepsilon$$

yazabiliriz[4]. Böylece

$$d = \ \langle\vec{n}, \overrightarrow{PQ}\rangle = \ \langle\vec{n}, \Delta x\ \rangle$$

$$= \Delta_u\langle\vec{n}, \overrightarrow{X_u}\rangle + \Delta_v\langle\vec{n}, \overrightarrow{X_v}\rangle + \frac{1}{2}\Big((\Delta_u{}^2\langle\vec{n}\ , \overrightarrow{X_{uu}}\rangle + 2\Delta_u\Delta_v\langle\vec{n}\ , \overrightarrow{X_{uv}}\rangle + \Delta_v{}^2\langle\vec{n}\ , \overrightarrow{X_{vv}}\rangle + \langle\vec{n}, \varepsilon\rangle\Big)$$

ya da

$$d = \ \frac{1}{2}\Big((\Delta_u{}^2\langle\vec{n}\ , \overrightarrow{X_{uu}}\rangle + 2\Delta_u\Delta_v\langle\vec{n}\ , \overrightarrow{X_{uv}}\rangle + \Delta_v{}^2\langle\vec{n}\ , \overrightarrow{X_{vv}}\rangle + \langle\vec{n}, \varepsilon\rangle\Big)$$

olur[4].

$(\Delta u, \Delta v) \to (0, 0)$ iken

$\lim_{(\Delta u, \Delta v)\to(0,0)}\langle\vec{n}, \varepsilon\rangle = 0$

olup, parantez içindeki son terimin, d'nin işaretini belirlemede hiçbir rolü yoktur.P'ye yeteri kadar yakın Q noktaları için, başka deyişle, daha yüksek mertebeden diferansiyeller farkıyla

$$d = \ \frac{1}{2}(\langle n, X_{uu}\rangle du^2 + 2\langle n, X_{uv}\rangle dudv + \langle n, X_{vv}\rangle dv^2)$$

dir[4]. Üstelik $\overrightarrow{X_u} ve \overrightarrow{X_V}$ vektörleri $\vec{n}$ vektörüne dik olduklarından

$\langle\vec{n}, \overrightarrow{X_u}\rangle = 0 \ \ ve \ \ \langle\vec{n}, \overrightarrow{X_v}\rangle = 0$

dır[4]. $u\ ve\ v$ 'ye göre türevler alınarak

$\langle \overrightarrow{n_u}, \overrightarrow{X_u} \rangle = \langle \vec{n}, \overrightarrow{X_{uu}} \rangle = 0 \Longrightarrow -\langle \overrightarrow{n_u}, \overrightarrow{X_u} \rangle = \langle \vec{n}, \overrightarrow{X_{uu}} \rangle = \frac{L}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}$ [4]

$\langle \overrightarrow{n_v}, \overrightarrow{X_v} \rangle = \langle \vec{n}, \overrightarrow{X_{vv}} \rangle = 0 \Longrightarrow -\langle \overrightarrow{n_v}, \overrightarrow{X_v} \rangle = \langle \vec{n}, \overrightarrow{X_{vv}} \rangle = \frac{N}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_4}}$ [4]

$\langle \overrightarrow{n_u}, \overrightarrow{X_v} \rangle = \langle \vec{n}, \overrightarrow{X_{vu}} \rangle = 0 \Longrightarrow -\langle \overrightarrow{n_u}, \overrightarrow{X_v} \rangle = \langle \vec{n}, \overrightarrow{X_{vu}} \rangle = \frac{M}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_4}}$

$\langle \overrightarrow{n_v}, \overrightarrow{X_u} \rangle = \langle \vec{n}, \overrightarrow{X_{uv}} \rangle = 0 \Longrightarrow -\langle \overrightarrow{n_v}, \overrightarrow{X_u} \rangle = \langle \vec{n}, \overrightarrow{X_{uv}} \rangle = \frac{M}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_3}}$

bulunur. Burada $\overrightarrow{X_{uv}} = \overrightarrow{X_{vu}}$ olduğundan $\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_4} = \sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_3}$ olur. Öte yandan $\langle \vec{n}, d\vec{X} \rangle = 0$ eşitliğinin diferansiyelini alırsak $-\langle d\vec{n}, d\vec{X} \rangle = \langle \vec{n}, d^2\vec{X} \rangle$ olduğunu görürüz. [4]

$\mathbb{I} = \langle \vec{n}, d^2\vec{X} \rangle$

ve

$\langle \vec{n}, d^2\vec{X} \rangle = \langle -d\vec{n}, d\vec{X} \rangle$

formüllerini kullanarak

$$\mathbb{I} = -\langle (\overrightarrow{n_u} du + \overrightarrow{n_v} dv), \left(\overrightarrow{X_u} du + \overrightarrow{X_v} dv\right) \rangle$$

$$= -\left(\langle \overrightarrow{n_u}, \overrightarrow{X_u} \rangle du^2 + \langle \overrightarrow{n_u}, \overrightarrow{X_v} \rangle dudv + \langle \overrightarrow{n_v}, \overrightarrow{X_u} \rangle dvdu + \langle \overrightarrow{n_v}, \overrightarrow{X_v} \rangle dv^2\right)$$

ya da

$$\mathbb{I} = \frac{L}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3}} du^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_4}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_3}}\right) M dudv + \frac{N}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_4}} dv^2 \tag{4.9}$$

elde edilir[4].

Bu diferansiyel forma yüzeyin P düzgün noktasındaki **ikinci temel kuadratik formu** denir.

4.2 Weingarten ve Olin-Rodrigues Formülleri

$\vec{X} = \vec{X}(u, v)$

vektörel fonksiyonu ile gösterilen bir M yüzeyinin bir P(u, v) noktasındaki $\vec{n}\,(u, v)$ birim normal vektörünün birinci mertebeden kısmi türevleri; $\vec{n}$'ye dik olduklarından, P deki teğet düzleme paralel vektörlerdir. O halde bunları koordinat çizgilerinin $\overrightarrow{X_u}, \overrightarrow{X_v}$ teğet vektörlerinin lineer kombinasyonları biçiminde yazabiliriz:[4]

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{n_u} &= a_{11}\overrightarrow{X_u} + a_{12}\overrightarrow{X_v} \\ \overrightarrow{n_v} &= a_{21}\overrightarrow{X_u} + a_{22}\overrightarrow{X_v} \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

Bunları sırası ile $\overrightarrow{X_u}, \overrightarrow{X_v}$ vektörleri ile çarparsak

$$\langle \overrightarrow{n_u}, \overrightarrow{X_u} \rangle = a_{11}\langle \overrightarrow{X_u}, \overrightarrow{X_u} \rangle + a_{12}\langle \overrightarrow{X_v}, \overrightarrow{X_u} \rangle$$

$$-\frac{L}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}} = a_{11}\varepsilon_3 E + a_{12}\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}$$

$$\langle \overrightarrow{n_u}, \overrightarrow{X_v} \rangle = a_{11}\langle \overrightarrow{X_u}, \overrightarrow{X_v} \rangle + a_{12}\langle \overrightarrow{X_v}, \overrightarrow{X_v} \rangle$$

$$-\frac{M}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_4}} = a_{11}\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} + a_{12}\varepsilon_4 G$$

$$\langle \overrightarrow{n_v}, \overrightarrow{X_u} \rangle = a_{21}\langle \overrightarrow{X_u}, \overrightarrow{X_u} \rangle + a_{22}\langle \overrightarrow{X_v}, \overrightarrow{X_u} \rangle$$

$$-\frac{M}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}} = a_{21}\varepsilon_3 E + a_{22}\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}$$

$$\langle \overrightarrow{n_v}, \overrightarrow{X_v} \rangle = a_{21}\langle \overrightarrow{X_u}, \overrightarrow{X_v} \rangle + a_{22}\langle \overrightarrow{X_v}, \overrightarrow{X_v} \rangle$$

$$-\frac{N}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}} = a_{21}\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} + a_{22}\varepsilon_4 G$$

$$-\varepsilon_4 G / \qquad -\frac{L}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}} = a_{11}\varepsilon_3 E + a_{12}\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}$$

$$\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} / \qquad -\frac{M}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_4}} = a_{11}\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} + a_{12}\varepsilon_4 G$$

$$\frac{\varepsilon_4}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}GL = -\varepsilon_3\varepsilon_4 a_{11}EG - \frac{\varepsilon_4}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}a_{12}FG$$

$$-\frac{FM}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}} = \frac{F^2}{\varepsilon_3\varepsilon_4}a_{11} + \frac{\varepsilon_4}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}a_{12}FG$$

$$\frac{\varepsilon_4 GL - FM}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}} = -\varepsilon_3\varepsilon_4 a_{11}EG + \frac{F^2}{\varepsilon_3\varepsilon_4}a_{11}$$

$$\frac{\varepsilon_4 GL - FM}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}} = a_{11}\left(\frac{F^2}{\varepsilon_3\varepsilon_4} - \varepsilon_3\varepsilon_4 a_{11}EG\right)$$

$\varepsilon_3\varepsilon_4 EG - \frac{F^2}{\varepsilon_3\varepsilon_4} = H^2$ olduğundan

$$H^2 a_{11} = \frac{FM - \varepsilon_4 GL}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}$$

ya da

$$\boxed{a_{11} = \frac{FM - \varepsilon_4 GL}{H^2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}} \tag{4.11}$$

olur.

$$\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} / \qquad -\frac{L}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}} = a_{11}\varepsilon_3 E + a_{12}\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}$$

$$-\varepsilon_3 E / \qquad -\frac{M}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_4}} = a_{11}\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} + a_{12}\varepsilon_4 G$$

$$-\frac{FL}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_4}} = a_{11}\ \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}FE + a_{12}\frac{F^2}{\varepsilon_3\varepsilon_4}$$

$$\frac{\varepsilon_3 EM}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_4}} = \ -a_{11}\ \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}FE - a_{12}\varepsilon_3\varepsilon_4 EG$$

$$\frac{\varepsilon_3 EM - FL}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_4}} = a_{12}\frac{F^2}{\varepsilon_3\varepsilon_4} - a_{12}\varepsilon_3\varepsilon_4 EG$$

$$\frac{\varepsilon_3 EM - FL}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_4}} = a_{12}\left(\frac{F^2}{\varepsilon_3\varepsilon_4} - \varepsilon_3\varepsilon_4 EG\right)$$

$$H^2 a_{12} = \frac{FL - \varepsilon_3 EM}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_4}}$$

ya da

$$\boxed{a_{12} = \ \frac{FL - \varepsilon_3 EM}{H^2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_4}}} \tag{4.12}$$

olur.

$$-\varepsilon_4 G\ / \quad -\frac{M}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}} = a_{21}\varepsilon_3 E + a_{22}\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}$$

$$\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}/ \quad -\frac{N}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}} = \ a_{21}\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} + a_{22}\varepsilon_4 G$$

$$\frac{\varepsilon_4}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}MG = -a_{21}\varepsilon_3\varepsilon_4 EG - a_{22}\frac{\varepsilon_4}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}GF$$

$$\frac{-FN}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}} = a_{21}\frac{F^2}{\varepsilon_3\varepsilon_4} + a_{22}\frac{\varepsilon_4}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}GF$$

$$\frac{\varepsilon_4 GM - FN}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}} = -a_{21}\varepsilon_3\varepsilon_4 EG + a_{21}\frac{F^2}{\varepsilon_3\varepsilon_4}$$

$$\frac{\varepsilon_4 GM - FN}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}} = a_{21}\left(\frac{F^2}{\varepsilon_3\varepsilon_4} - \varepsilon_3\varepsilon_4 EG\right)$$

$$H^2 a_{21} = \frac{FN - \varepsilon_4 GM}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}$$

ya da

$$\boxed{a_{21} = \frac{FN - \varepsilon_4 GM}{H^2\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}} \tag{4.13}$$

olur.

$$-\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}/ \qquad -\frac{M}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}} = a_{21}\varepsilon_3 E + a_{22}\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}$$

$$\varepsilon_3 E/ \qquad -\frac{N}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}} = a_{21}\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} + a_{22}\varepsilon_4 G$$

$$\frac{FM}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}} = -a_{21}\varepsilon_3\frac{EF}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} - a_{22}\frac{F^2}{\varepsilon_3\varepsilon_4}$$

$$\frac{-\varepsilon_3 EN}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}} = +a_{21}\varepsilon_3\frac{EF}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} + a_{22}\varepsilon_3\varepsilon_4 EG$$

$$\frac{FM-\varepsilon_3 EN}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}} = -a_{22}\frac{F^2}{\varepsilon_3\varepsilon_4} + a_{22}\varepsilon_3\varepsilon_4 EG$$

$$\frac{FM-\varepsilon_3 EN}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}} = a_{22}\left(\varepsilon_3\varepsilon_4 EG - \frac{F^2}{\varepsilon_3\varepsilon_4}\right)$$

$$H^2 a_{22} = \frac{FM-\varepsilon_3 EN}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}$$

ya da

$$\boxed{a_{22} = \frac{FM-\varepsilon_3 EN}{H^2\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}} \tag{4.14}$$

olur.

(4.11), (4.12), (4.13) ve (4.14) eşitliklerini (4.10) da yerine yazarsak

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{n_u} &= \frac{1}{H^2}\left\{\left(\frac{FM-\varepsilon_4 GL}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}\right)\overrightarrow{X_u} + \left(\frac{FL-\varepsilon_3 EM}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_4}}\right)\overrightarrow{X_v}\right\} \\ \overrightarrow{n_v} &= \frac{1}{H^2}\left\{\left(\frac{FN-\varepsilon_4 GM}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}\right)\overrightarrow{X_u} + \left(\frac{FM-\varepsilon_3 EN}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}\right)\overrightarrow{X_v}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

olur. Bunlara Weingarten formülleri denir.

Eğer $F = 0$ ise $H^2 = \varepsilon_3\varepsilon_4 EG$ olduğundan (4.15)'i yeniden yazarsak

$$\overrightarrow{n_u} = \frac{1}{\varepsilon_3\varepsilon_4 EG}\left\{\left(\frac{-\varepsilon_4 GL}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}\right)\overrightarrow{X_u} + \left(\frac{-\varepsilon_3 EM}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_4}}\right)\overrightarrow{X_v}\right\}$$

$$\overrightarrow{n_v} = \frac{1}{\varepsilon_3\varepsilon_4 EG}\left\{\left(\frac{-\varepsilon_4 GM}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}\right)\overrightarrow{X_u} + \left(\frac{-\varepsilon_3 EN}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}\right)\overrightarrow{X_v}\right\}$$

$$\overrightarrow{n_u} = \left(\frac{-\varepsilon_4 GL}{\varepsilon_3\varepsilon_4 EG\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}\right)\overrightarrow{X_u} + \left(\frac{-\varepsilon_3 EM}{\varepsilon_3\varepsilon_4 EG\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_4}}\right)\overrightarrow{X_v}$$

$$\overrightarrow{n_v} = \left(\frac{-\varepsilon_4 GM}{\varepsilon_3\varepsilon_4 EG\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}\right)\overrightarrow{X_u} + \left(\frac{-\varepsilon_3 EN}{\varepsilon_3\varepsilon_4 EG\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}\right)\overrightarrow{X_v}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n_u} &= \left(\frac{-L}{\varepsilon_3\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}E}\right)\overrightarrow{X_u} + \left(\frac{-M}{\varepsilon_4\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_4}G}\right)\overrightarrow{X_v} \\ \overrightarrow{n_v} &= \left(\frac{-M}{\varepsilon_3\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}E}\right)\overrightarrow{X_u} + \left(\frac{-N}{\varepsilon_4\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}G}\right)\overrightarrow{X_v}\end{aligned} \qquad (4.16)$$

elde ederiz.

Eğer, koordinat çizgileri yüzey üzerinde $M \equiv 0$ özdeşliğini sağlayabilecek biçimde se çilebilirse

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{n_u} &= \frac{1}{\varepsilon_3\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}\left(\frac{-L}{E}\right)\overrightarrow{X_u} \\ \overrightarrow{n_v} &= \frac{1}{\varepsilon_4\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}\left(\frac{-N}{G}\right)\overrightarrow{X_v}\end{aligned}\right\} \qquad (4.17)$$

olup,

$r = \frac{L}{E}$, $\bar{r} = \frac{N}{G}$ [4]

dersek

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{n_u} + \dfrac{r}{\varepsilon_3\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}\overrightarrow{X_u} = 0 \\[2em] \overrightarrow{n_v} + \dfrac{\bar{r}}{\varepsilon_4\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}\overrightarrow{X_v} = 0\end{array}\right\} \tag{4.18}$$

olur. Bunlara da **Olinde Rodrigues formülleri** denir.

(4.15) den $S = \left[a_{ij}\right]$ şekil operatörünün matrisini

$$S = \frac{1}{H^2}\begin{bmatrix} \dfrac{FM - \varepsilon_4 GL}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}} & \dfrac{FL - \varepsilon_3 EM}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_4}} \\ \dfrac{FN - \varepsilon_4 GM}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}} & \dfrac{FM - \varepsilon_3 EN}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}} \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece $K = detS$ gauss eğriliği ile $H = izS$ ortalama eğriliğini hesapla-yabiliriz.

K, gauss eğriliği

$$K = \frac{1}{H^4}\left[\frac{(FM - \varepsilon_4 GL)(FM - \varepsilon_3 EN)}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}} - \frac{(FL - \varepsilon_3 EM)(FN - \varepsilon_4 GM)}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}}\right]$$

ya da

$$K = \frac{1}{H^4\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}}\left[\begin{array}{c}(FM)^2 - \varepsilon_3 FMEN - \varepsilon_4 GLFM + \varepsilon_3\varepsilon_4 GLEN - F^2 LN + \varepsilon_4 FLGM + \\ \varepsilon_3 EMFN - \varepsilon_3\varepsilon_4 EM^2 G\end{array}\right]$$

$$K = \frac{LN(\varepsilon_3\varepsilon_4 EG - F^2) - M^2(\varepsilon_3\varepsilon_4 EG - F^2)}{H^4\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}}$$

$$K = \frac{(\varepsilon_3\varepsilon_4 EG - F^2)(LN - M^2)}{H^4\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}} \tag{4.20}$$

olur.

Ortalama eğrilik ise

$$H = izS = \frac{1}{H^2}\left(\frac{FM - \varepsilon_4 GL}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}} + \frac{FM - \varepsilon_3 EN}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}\right) \tag{4.21}$$

olur.

Eğer $\langle \overrightarrow{X_u}, \overrightarrow{X_v} \rangle = 0$ yani $F = 0$

$$K = \frac{\varepsilon_3\varepsilon_4 EG(LN - M^2)}{E^2G^2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}} = \frac{\varepsilon_3\varepsilon_4}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}}\left(\frac{(LN - M^2)}{EG}\right)$$

ve

$$H = \frac{1}{\varepsilon_3\varepsilon_4 EG}\left(\frac{-\varepsilon_4 GL}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}} + \frac{-\varepsilon_3 EN}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}\right)$$

$$H = \frac{-L}{\varepsilon_3\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}} - \frac{N}{\varepsilon_4\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}} = -\left(\frac{1}{\varepsilon_3\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}\left(\frac{L}{E}\right) + \frac{1}{\varepsilon_4\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}\left(\frac{N}{G}\right)\right)$$

olur.

Eğer $F = 0 \; ve \; M = 0$ ise (4.18) den

$$S = \begin{bmatrix} \frac{r}{\varepsilon_3\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{r}}{\varepsilon_4\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}} \end{bmatrix}$$

yazabiliriz, burada

$$r = \frac{L}{E} \; ve \; \bar{r} = \frac{N}{G}$$

dir.

Böylece K gauss eğriliği ve H ortalama eğrilik aşağıdaki gibidir:

$$K = \frac{r.\bar{r}}{\varepsilon_3\varepsilon_4\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}} = \frac{1}{\varepsilon_3\varepsilon_4\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}}\left(\frac{LN}{EG}\right)$$

$$H = -\frac{r}{\varepsilon_3\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}} - \frac{\bar{r}}{\varepsilon_4\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}} = \frac{-L}{\varepsilon_3\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}E} - \frac{N}{\varepsilon_4\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}G}$$

ÖRNEK:

$X_{(u,v)} = \mathrm{v}\cos \mathrm{u}\,\overrightarrow{\mathrm{e}_1} + \mathrm{v}\sin \mathrm{u}\,\overrightarrow{\mathrm{e}_2} + hu\overrightarrow{\mathrm{e}_3}$ vektörel denklemiyle verilen yüzeyin gauss formülleri-ni, birinci ve ikinci temel kuadratik formlarını, Weingarten formüllerini, şekil operatörünün matrisini, gauss eğriliğini ve ortalama eğriliğini hesaplayalım.

$\langle \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1} \rangle = \langle \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2} \rangle = 1 \ , \ \langle \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_3} \rangle = -1$

$\langle X, X \rangle = v^2 \cos^2 u + v^2 \sin^2 u + h^2 u^2 (-1)$

$\langle X, X \rangle = v^2 - h^2 u^2$

$v^2 > h^2 u^2 \Longrightarrow |v| > |hu| \quad (space - like)$

$v^2 < h^2 u^2 \Longrightarrow |v| < |hu| \quad (time - like)$

$v^2 = h^2 u^2 \Longrightarrow |v| = |hu| \quad (null)$

$\boxed{\overrightarrow{X_u} = -\mathrm{v}\sin \mathrm{u}\,\overrightarrow{\mathrm{e}_1} + \mathrm{v}\cos \mathrm{u}\,\overrightarrow{\mathrm{e}_2} + h\overrightarrow{\mathrm{e}_3}}$

$\boxed{\overrightarrow{X_v} = \cos \mathrm{u}\,\overrightarrow{\mathrm{e}_1} + \sin \mathrm{u}\,\overrightarrow{\mathrm{e}_2}}$

$\overrightarrow{X_{uu}} = -v\cos \mathrm{u}\,\overrightarrow{\mathrm{e}_1} - \mathrm{v}\sin \mathrm{u}\,\overrightarrow{\mathrm{e}_2} = -\mathrm{v}(\cos \mathrm{u}\,\overrightarrow{\mathrm{e}_1} + \sin \mathrm{u}\,\overrightarrow{\mathrm{e}_2}) \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{X_{uu}} = -v\overrightarrow{X_v}}$

$\boxed{\overrightarrow{X_{uv}} = (-\sin \mathrm{u}\,\overrightarrow{\mathrm{e}_1} + \cos \mathrm{u}\,\overrightarrow{\mathrm{e}_2}}$

$$\overrightarrow{X_u} \wedge \overrightarrow{X_v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathrm{e}_1} & \overrightarrow{\mathrm{e}_2} & -\overrightarrow{\mathrm{e}_3} \\ -\mathrm{v}\sin \mathrm{u} & \mathrm{v}\cos \mathrm{u} & h \\ \cos \mathrm{u} & \sin \mathrm{u} & 0 \end{vmatrix} = -h\sin \mathrm{u}\,\overrightarrow{\mathrm{e}_1} + \mathrm{h}\cos \mathrm{u}\,\overrightarrow{\mathrm{e}_2} - (-\mathrm{v}\sin^2 u - v\cos^2 u)\overrightarrow{\mathrm{e}_3}$$

$\boxed{\overrightarrow{X_u} \wedge \overrightarrow{X_v} = (-h\sin \mathrm{u}\,\overrightarrow{\mathrm{e}_1} + \mathrm{h}\cos \mathrm{u}\,\overrightarrow{\mathrm{e}_2} + \mathrm{v}\overrightarrow{\mathrm{e}_3})}$

$\langle \overrightarrow{X_u} \wedge \overrightarrow{X_v}, \overrightarrow{X_u} \wedge \overrightarrow{X_v} \rangle = h^2 - v^2 = \left\| \overrightarrow{X_u} \wedge \overrightarrow{X_v} \right\|^2$

$\boxed{\vec{n} = \frac{\overrightarrow{X_u} \wedge \overrightarrow{X_v}}{\left\| \overrightarrow{X_u} \wedge \overrightarrow{X_v} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{h^2 - v^2}}(-h\sin \mathrm{u}\,\overrightarrow{\mathrm{e}_1} + \mathrm{h}\cos \mathrm{u}\,\overrightarrow{\mathrm{e}_2} + \mathrm{v}\overrightarrow{\mathrm{e}_3})}$

$\boxed{\overrightarrow{X_{uv}} = \frac{-v}{h^2 - v^2}\overrightarrow{X_u} + \frac{h}{\sqrt{h^2 - v^2}}\vec{n}}$

$$\left.\begin{aligned} &\overrightarrow{X_{vv}} = 0 \\ &\overrightarrow{X_{uu}} = -v\overrightarrow{X_v} \\ &\overrightarrow{X_{uv}} = \frac{-v}{h^2 - v^2}\overrightarrow{X_u} + \frac{h}{\sqrt{h^2 - v^2}}\vec{n} \end{aligned}\right\} \text{Gauss formülleri}$$

$$\overrightarrow{X_{vv}} = 0$$

$$\langle\overrightarrow{X_u}, \overrightarrow{X_u}\rangle = v^2 \sin^2 u \,\langle\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}\rangle + v^2 \cos^2 u \,\langle\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}\rangle + h^2\langle\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_3}\rangle$$

$$\boxed{\langle\overrightarrow{X_u}, \overrightarrow{X_u}\rangle = v^2 - h^2}$$

$$\langle\overrightarrow{X_v}, \overrightarrow{X_v}\rangle = \cos^2 u \,\langle\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}\rangle + \sin^2 u \;\langle\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}\rangle$$

$$\boxed{\langle\overrightarrow{X_v}, \overrightarrow{X_v}\rangle = 1}$$

$$\langle\overrightarrow{X_u}, \overrightarrow{X_v}\rangle = -v \sin \mathrm{u} \cos \mathrm{u} \,\langle\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}\rangle + v \sin \mathrm{u} \cos \mathrm{u} \,\langle\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}\rangle \; + 0$$

$$\boxed{\langle\overrightarrow{X_u}, \overrightarrow{X_v}\rangle = 0}$$

$$\langle\overrightarrow{X_u}, \overrightarrow{X_u}\rangle = \boxed{v^2 - h^2 = \varepsilon_3 E}$$

$$\langle\overrightarrow{X_v}, \overrightarrow{X_v}\rangle = \boxed{1 = \varepsilon_4 G}$$

$$\langle\overrightarrow{X_u}, \overrightarrow{X_v}\rangle = 0 = \frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3 \varepsilon_4}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{F = 0}$$

$$H^2 = \varepsilon_3 \varepsilon_4 E G - \frac{F^2}{\varepsilon_3 \varepsilon_4}$$

$$\boxed{H^2 = v^2 - h^2}$$

$$\langle\vec{n}, \overrightarrow{X_{uu}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{h^2 - v^2}}\langle -h \sin \mathrm{u}\, \overrightarrow{\mathrm{e}_1} + \mathrm{h} \cos \mathrm{u}\, \overrightarrow{\mathrm{e}_2} + \mathrm{v}\overrightarrow{\mathrm{e}_3}, -\mathrm{v} \cos \mathrm{u}\, \overrightarrow{\mathrm{e}_1} - \mathrm{v} \sin \mathrm{u}\, \overrightarrow{\mathrm{e}_2} \rangle$$

$$\langle \vec{n}, \overrightarrow{X_{uu}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{h^2 - v^2}} (hv \sin u \cos u - hv \sin u \cos u) = 0$$

$$\langle \vec{n}, \overrightarrow{X_{uu}} \rangle = 0 = \frac{L}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3}} \Longrightarrow \boxed{L = 0}$$

$$\langle \vec{n}, \overrightarrow{X_{vv}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{h^2 - v^2}} \langle -h \sin u \overrightarrow{e_1} + h \cos u \overrightarrow{e_2} + v\overrightarrow{e_3}, 0 \rangle$$

$$\langle \vec{n}, \overrightarrow{X_{vv}} \rangle = 0 = \frac{N}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_4}} \Longrightarrow \boxed{N = 0}$$

$$\langle \vec{n}, \overrightarrow{X_{uv}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{h^2 - v^2}} (h \sin^2 u + h \cos^2 u)$$

$$\langle \vec{n}, \overrightarrow{X_{uv}} \rangle = \boxed{\frac{h}{\sqrt{h^2 - v^2}} = \frac{M}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_3}}} = \frac{M}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_4}}$$

Birinci temel form:

$$\mathrm{I} \equiv \varepsilon_3 E du^2 + \frac{2F}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_4}} dudv + \varepsilon_4 G dv^2$$

$$\boxed{\mathrm{I} \equiv (v^2 - h^2) du^2 + dv^2}$$

İkinci temel form

$$\mathbb{I} = \frac{L}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3}} du^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_4}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_3}} \right) M dudv + \frac{N}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_4}} dv^2$$

$$\mathbb{I} = \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_4}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_3}} \right) \sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_3} \frac{h}{\sqrt{h^2 - v^2}} dudv$$

$$\mathbb{I} = \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_3}}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_4}} + 1 \right) \frac{h}{\sqrt{h^2 - v^2}} dudv$$

$$\boxed{\mathbb{I} = 2 \frac{h}{\sqrt{h^2 - v^2}} dudv}$$

$$\overrightarrow{n_u} = \frac{1}{\sqrt{h^2 - v^2}} (-h \cos u \overrightarrow{e_1} - h \sin u \overrightarrow{e_2}) = \frac{-h}{\sqrt{h^2 - v^2}} (\cos u \overrightarrow{e_1} + \sin u \overrightarrow{e_2})$$

$$\boxed{\overrightarrow{n_u} = \frac{-h}{\sqrt{h^2 - v^2}}\overrightarrow{X_v}}$$

$$\overrightarrow{n_v} = \frac{hv}{(h^2 - v^2)^{3/2}}(-\sin u\,\overrightarrow{e_1} + \cos u\,\overrightarrow{e_2}) + \frac{h^2}{(h^2 - v^2)^{3/2}}\overrightarrow{e_3}$$

$$\overrightarrow{n_v} = \frac{h}{(h^2 - v^2)^{3/2}}(-v\sin u\,\overrightarrow{e_1} + v\cos u\,\overrightarrow{e_2} + h\overrightarrow{e_3})$$

$$\boxed{\overrightarrow{n_v} = \frac{h}{(h^2 - v^2)^{3/2}}\overrightarrow{X_u}}$$

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{n_u} &= \frac{-h}{\sqrt{h^2 - v^2}}\overrightarrow{X_v} \\ \overrightarrow{n_v} &= \frac{h}{(h^2 - v^2)^{3/2}}\overrightarrow{X_u} \end{aligned}\right\} \quad \text{Weingarten formülleri}$$

Şekil operatörünün matrisi:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-h}{\sqrt{h^2 - v^2}} \\ \frac{h}{(h^2 - v^2)^{3/2}} & 0 \end{bmatrix}$$

K gauss eğriliği:

$$K = \frac{h^2}{(h^2 - v^2)^2}$$

H ortalama eğriliği:

$$H = 0$$

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] Prof,Dr,Ferruh Şemin, 1987, Diferansiyel Geometri II, Marmara Üniversitesi,Fen-Edebiyat Fakültesi, 585 p.

[2] Prof,Dr,H.Hilmi Hacısalihoğlu, 2000, Diferansiyel Geometri II, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, 339 p.

[3] A.Funda Yalınız, 2004, Lorentz Uzayında Harmonik Eğrilikler ve Eğilim Çizgilerinin Karakterizasyonları, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi.

[4] Nejat Ekmekçi ve Yılmaz Tuncer, 13 Haziran 2007, On Differantial Geometry of the Lorentz Surfaces, Dumlupınar Üniversitesi, Fen Bilimleri Dergisi.

[5] O'Neill, B, 1983, Semi Riemannian Geometry, Academic Press, New York, London.

[6] Bejancu, A, and Duggal, K,L, 1995, Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds, Acta Appl, Math, Vol, 38;197-215 p.
Bejancu, A, 1996, Null Hypersurfaces of Semi-Riemannian Spaces, Sairama Marh, J,Vol 14;25-40

[7] Beem, J,K, Ehrlich P,E, and Easly, K,L, 1996, Global Lorentzian Geometry, Marcel Dekker Inc, New York, London.

[8] Birman , G, S, and Nomizu, K, 1984-A, Trigonometry in Lorentzian Geometry, Am, Math, Mont, 91(9);543-549 p.

[9] Uğurlu, H,H, ve Çalışkan ,A, 1997, Space-like Yüzeyler Geometrisi.