LORENTZ UZAYINDA

YÜZEYLER TEORİSİ

Hatice DÖVEN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Mart - 2009

LORENTZ UZAYINDA
YÜZEYLER TEORİSİ

Hatice DÖVEN

Dumlupınar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Ahmet YILDIZ

Mart - 2009

KABUL ve ONAY SAYFASI

....'nın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı .... başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

........./......../.........

(Sınav tarihi)

Üye : Prof.Dr. ....

Üye : Yrd.Doç.Dr. ....

Üye : Yrd.DoçDr. ....

Fen Bilimleri Enstitüsün Yönetim Kurulu'nun ....../...../..... gün ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.

Prof.Dr.Atalay KÜÇÜKBURSA

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

LORENTZ UZAYINDA YÜZEYLER TEORİSİ

Hatice DÖVEN
Matematik, Yüksek Lisans Tezi, 2009
Tez Danışmanı: Yrd. Doç.Dr. Ahmet YILDIZ

ÖZET

Bu çalışma beş bölümden oluşmuştur.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde çalışma için gerekli kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde birinci temel kuadratik form yüzeylerin iç geometrisi, birinci temel kuadratik form ve diskriminantı, yüzeyin bir eğrisinin iki noktası arasındaki eğrisel uzunluk, yüzeyin düzgün bir noktasından geçen herhangi iki eğrisi arasındaki açı ve ikinci temel kuadratik form verilmiştir.

Dördüncü bölümde Riemann uzayında, normal birim vektörün birinci mertebeden kısmi türevleri, Gauss formülleri, Mainardi-Codazzi formülleri, yüzeyler teorisinin temel teoremi verilmiştir.

Son bölümde Lorentz uzayında Gauss karakteristik denklemi özgün olarak tarif edilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Lorentz Uzayı, Temel Kuadratik Formlar, Yüzeyler Teorisi.

THEORY OF SURFACES IN LORENTZ SPACE

Hatice DÖVEN
Mathematics, M.S.Thesis, 2009
Thesis Supervisor:Assist.Prof. Ahmet YILDIZ

SUMMARY

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devote to the introduction.

The second chapter deals with the preliminaries, definitions and necessary theorems that will be needed for later use.

The third chapter consists inner geometry of first basic quadratic form surfaces, first basic quadratic form and discriminant, curvilinear length between two points of a curve of surface, the angle between any two curves that crosses from a straight point and second basic quadratic form.

Keywords: Lorentz Space, Basic Quadratic Froms, Theory of Surfaces.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada bana yardımcı olan başta danışman hocam sayın Yrd.Doç.Dr. Ahmet YILDIZ'a, yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın Yrd.Doç.Dr. A. Funda YALINIZ'a, teşekkür ederim.

Ayrıca desteklerini hep yanımda hissettiğim aileme, çalışmalarım boyunca bana anlayış gösteren ve yardımcı olan eşim Mahmud Sami DÖVEN'e teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
V	n-boyutlu reel vektör uzayı
L^n	n-boyutlu Lorentz uzayı
M^n	n-boyutlu Riemann manifoldu
M_q^n	n-boyutlu, q-indeksli yarı-Riemann manifoldu
$<,>_L$	Lorentz metriği
$\lVert v \rVert$	v nin normu

1. GİRİŞ

3-boyutlu öklid uzayı E^3 te temel kuadratik formlar, iki nokta arasındaki eğrisel uzunluk, yüzeyin düzgün bir noktasından geçen iki eğrisi arasındaki açı, Weingarten, Olinde Rodrigues, Gauss, Darboux-Riboucour, Codazzi-Mainardi formülleri yüzeyler teorisinin temel teoremi (Gauss Karakteristik Denklemi) gibi kavramlar Ferruh Şemin (1987) in çalışmalarından mevcuttur.

3-boyutlu Lorentz uzayı L^3 te time-like ya da space-like olan bir M yüzeyi için Temel Kuadratik Formlar (I. ve II. temel formlar), Gauss ve Codazzi-Mainardi formülleri Ekmekçi ve Tuncer (2007) tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada E^3 ve L^3 te yapılmış olan çalışmalara yer verilerek L^3 te null olmayan (time-like ya da space-like olan) yüzeyler için Gauss Karakteristik Denklemi elde edildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde öncelikle çalışmamızın tabanını oluşturan simetrik bileneer formlar, skaler çarpmalı uzaylar, yarı-Riemann manifoldları, 2-boyutlu Lorentz uzayı, Lorentz uzayında, time-like, space-like ve null eğriler genel olarak tanıtılarak, böylece Lorentz uzayında yüzeylerin çalışılabilmesi için hazırlık yapılacaktır. Sonraki kısımda iki skaler değişkenli vektörel fonksiyonlar, bu fonksiyonların birinci ve çeşitli mertebelerden diferansiyelleri, Taylor formülü verilecektir. Bu bölüm için referanslarımız; O'neill (1983), Beem (1996), Birman ve Nomizu (1984), Duggal ve Bejancu (1996), Uğurlu ve Çalışkan (1997), ve Ferruh Şemin (1983-1987) olacaktır.

2.1 Simetrik Bilineer Formlar

Tanım 2.1.1 V bir reel vektör uzayı olsun.

$\langle .,. \rangle : VxV \to R$

dönüşümü $\forall a, b \in R$ ve $\forall u, v, w \in V$ için

(i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

(ii) $\langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$

$\langle u, av + bw \rangle = a\langle u, v \rangle + b\langle u, w \rangle$

özeliklerine sahip ise $\langle .,. \rangle$ dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer formdur denir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.2 V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form $\langle .,. \rangle$ olsun.

(i) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle > 0, \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ ise, $\langle .,. \rangle$ simetrik bilineer formuna, pozitif tanımlı,

(ii) $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle < 0, \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ ise, $\langle .,. \rangle$ simetrik bilineer formuna negatif tanımlı,

(iii) $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle \geq 0$ ise, $\langle .,. \rangle$ simetrik bilineer formuna yarı pozitif tanımlı,

(iv) $\forall v \in V$ için $\langle v, v \rangle \leq 0$ ise, $\langle .,. \rangle$ simetrik bilineer formuna yarı negatif tanımlı,

(v) "$\forall w \in V$ için $\langle v, w \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$ dır" şartı sağlanıyor ise $\langle .,. \rangle$ simetrik bilineer formuna non-dejenere, non-dejenere değilse dejeneredir denir (O'neill 1983).

V üzerinde bir simetrik bilineer form $\langle .,. \rangle$ ise V nin herhangi bir W altuzayı için $\langle .,. \rangle\big|_w$ kısıtlaması da yine bir simetrik bilineer formdur.

Tanım 2.1.3 V bir vektör uzayı ve

$$\langle .,. \rangle : VxV \to R$$

bir simetrik bilineer form olsun.

$$\langle .,. \rangle\big|_w : WxW \to R$$

negatif tanımlı olacak şekildeki V nin en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna $\langle .,. \rangle$ simetrik bilineer formunun indeksi denir ve v ile gösterilir (O'neill 1983).

Buna göre $1 \leq v \leq boyV$ dir. $v = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\langle .,. \rangle$ simetrik bilineer formunun yarı pozitif tanımlı olmasıdır.

V nin bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olsun. $b_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ olarak tanımlanan $[b_{ij}]_{nxn}$ matrisine $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ bazına göre $\langle .,. \rangle$ nun matrisi denir. $\langle .,. \rangle$ simetrik olduğundan $[b_{ij}]$ matrisi de simetriktir.

$$\langle v, w \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} v_i e_i, \sum_{j=1}^{n} w_j e_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} v_i w_j$$

olduğundan $[b_{ij}]$ matrisi $\langle .,. \rangle$ simetrik bilineer formunu belirler.

Teorem 2.1.4 Bir $\langle .,. \rangle$ simetrik bilineer formunun non-dejenere olması için gerek ve yeter koşul $\langle .,. \rangle$ nun herhangi bir baza göre matrisinin tersinir olmasıdır (O'neill 1983).

Tanım 2.1.5 Bir $v \in V$ vektörü için $\langle v, v \rangle > 0$ veya $v = 0$ ise bu v vektörüne space-like

$\langle v,v\rangle < 0$ ise bu v vektörüne time-like

$\langle v,v\rangle = 0$ ve $v \neq 0$ ise bu v vektörüne light-like veya null vektör denir (O'neill1983).

2.2 Skaler Çarpmalı Uzaylar

Tanım 2.2.1 Bir V vektör uzayı üzerindeki non-dejenere, simetrik, bilineer forma V vektör uzayı üzerinde bir skaler çarpma denir. V üzerindeki bir skaler çarpma $\langle .,. \rangle$ ise $(V, \langle .,. \rangle)$ ikilisine skaler çarpmalı vektör uzayı denir (O'neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

Tanım 2.2.2 Sıfır olmayan $v, w \in V$ için $\langle v,w\rangle = 0$ ise v ve w vektörlerine diktirler denir ve $v \perp w$ şeklinde gösterilir (O'neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

Teorem 2.2.3 V skaler çarpmalı uzayının bir altuzayı W olsun. Bu durumda şu özelikler vardır:

1. $boyW + boyW^{\perp} = n = boyV$
2. $(W^{\perp})^{\perp} = W$

(O'neill 1983).

Tanım 2.2.4 Bir V vektör uzayı, üzerinde bir skaler çarpma $\langle .,. \rangle$ ve W da V nin bir altuzayı olsun. Eğer W üzerinde $\langle .,. \rangle$ non-dejenere ise W ya non-dejenere altuzay, non-dejenere değilse dejenere altuzay denir (O'neill 1983).

Teorem 2.2.5 V bir skaler çarpmalı uzay ve W da V nin bir altuzayı olsun. W nun non-dejenere altuzay olması için gerek ve yeter koşul $V = W \oplus W^{\perp}$ olmasıdır (O'neill 1983).

Tanım 2.2.6 Bir V vektör uzayı üzerindeki bir skaler çarpma $\langle .,. \rangle$ olsun. Bir $v \in V$ vektörünün normu

$$\|v\| = |\langle v,v\rangle|^{1/2}$$

olarak tanımlanır. Normu 1 birim olan vektöre birim vektör ve ortogonal birim vektörlerin cümlesine ortonormal sistem denir (O'neill 1983).

Teorem 2.2.7 Bir $V \neq \{0\}$ skaler çarpmalı uzayı bir ortonormal sisteme sahiptir.

İspat (O'neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

Teorem 2.2.8 Bir V vektör uzayı için bir ortonormal baz $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olsun.

$\varepsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle$ olmak üzere $\forall v \in V$ vektörü

$$v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle v, e_i \rangle e_i$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir.

İspat (O'neill 1983).

Teorem 2.2.9 Bir V vektör uzayının bir $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormal bazı için $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ işaretlerindeki negatif terimlerin ν sayısı V nin indeksidir.

İspat (O'neill 1983).

Eğer V nin bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ve $V; \nu$ indeksine sahip ise $\vec{v}_p$ ve $\vec{w}_p$ vektörleri için $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$, $w = \sum_{j=1}^{n} w_j e_j$ olmak üzere,

$$\langle \vec{v}_p, \vec{w}_p \rangle = -\sum_{i=1}^{\nu} v_i w_i + \sum_{j=\nu+1}^{n} v_j w_j$$

olur. Eğer $\nu = 0$ ise R_ν^n skaler çarpmalı (yarı-Öklid) uzayı R^n den ibarettir, $\nu = 1$ ise R_1^n . Bir Lorentz vektör uzayı L^n ile gösterilir ve bu indeksi 1 ve boyutu ≥ 2 olan bir skaler çarpmalı uzaydır (O'neill 1983).

Tanım 2.2.10 V vektör uzayı üzerinde tanımlanan $\langle .,. \rangle$ skaler çarpımı özel olarak pozitif tanımlı ise Öklid metriği adını alır, V ye de Öklid uzayı denir. Eğer $\nu = 1$ ise $\langle .,. \rangle$ skaler çarpımı Lorentz (Minkowski) metriği olup V ye de Lorentz uzayı veya Minkowski uzayı denir. V deki $\langle .,. \rangle$ simetrik bilineer formu dejenere ise, bu durumda V ye ışıksı veya null veya light-like veya dejenere vektör uzayı denir (O'neill 1983 Duggal ve Bejancu 1996).

2.3 Minkowski Uzay-Zaman

Tanım 2.3.1 n-boyutlu Lorentz uzayı L^n ile birlikte üzerinde

$$ds^2 = -dx_1^2 + \sum_{i=2}^{n} dx_i^2$$

metriği verildiğinde (L^n, ds^2) bir manifold oluşturur. $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ vektör alanı zaman benzeridir. (Beem vd 1996).

Minkowski uzay-zamanının geodezikleri R^n Öklid uzayının doğrularıdır. Bu geodeziklerin afin parametrelendirmeleri R^n deki Öklid yay uzunluğu parametrelendirmeleriyle orantılıdır. Minkowski uzay-zamanda verilen bir P noktasından geçen null geodezikler tepe noktası P de olan eliptik koni formundadırlar (Beem vd 1996).

Minkowski uzay-zamanı bir Lorentz çarpımıdır. Eğer R, negatif tanımlı $-dt^2$ metriğiyle ve R^{n-1} de g_0 Öklid metriğiyle verilmiş ise o zaman

$$(R^n = RxR^{n-1}, \qquad -dt^2 \oplus g_0)$$

bir n-boyutlu Minkowski uzayıdır (Beem vd 1996).

Tanım 2.3.2 Minkowski uzayında farklı iki nokta $p = (p_1, ..., p_n)$ ve $q = (q_1, ..., q_n)$ olsun. R de $p_1 < q_1$ ve $(p_1 - q_1)^2 > (p_2 - q_2)^2 + ... + (p_n - q_n)^2$ ise $p << q$ kronolojik bağıntısı vardır. Eğer $p << q$ ise o zaman p den q ya uzaklık

$$d(p,q)=\left[(p_1-q_1)^2+\sum_{i=2}^{n}(p_i-q_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

ile verilir (Beem vd 1996).

Minkowski uzay-zamanda p merkezli “birim küre”

$$\kappa(p,1)=\{q\in M \mid d(p,q)=1\}$$

dir. Bu cümle iki kanatlı hiperboloidin bir kanatıdır (Beem vd 1996).

Tanım 2.3.3 R_s^n (-,...,-,+,...,+) işaretli yarı-Öklid uzayı olarak tanımlandığında, burada s tane negatif eigen değer ile $n-s$ tane pozitif eigen değeri vardır.

Böylece R_s^n üzerinde yarı-öklid metriği

$$ds^2=-\sum_{i=1}^{s}dx_i^2+\sum_{i=s+1}^{n}dx_i^2$$

ile verilir (Beem vd 1996).

Özel olarak R_1^n n-boyutlu Lorentz uzayı (Minkowski uzay-zaman) dır. $r>0$ için de R_1^{n+1} uzayındaki Lorentz ve hiperbolik küreler, sırasıyla,

$$S_1^n=\left\{x\in R_1^{n+1} \mid -x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n+1}^2=r^2\right\}$$

ve

$$H_1^n=\left\{x\in R_1^{n+1} \mid -x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_{n+1}^2=-r^2\right\}$$

biçiminde ifade edilirler (Beem vd 1996).

2.4 Yarı-Riemann Manifoldları

Tanım 2.4.1 M düzgün, parakompakt Hausdorff manifoldu olsun. $\Pi : TM \to M$ de M nin tanjant demetini göstersin. M nin bir g yarı-Riemann metriği, M de (0,2) tipinde düzgün simetrik tensör alanıdır öyle ki $\forall p \in M$ için

$$g|_p : T_pMxT_pM \to R$$

tensörü (-,...,-,+,...,+) işaretli non-dejenere bir iç çarpımdır.

M üzerinde $(u,(x^1,...,x^n))$ lokal koordinatlardaki g yarı-Riemann metriği

$$g|_u = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)dx_i \otimes dx_j$$

olarak alınabilir, buradaki $g_{ij} = g_{ji}$ ve $\det g \neq 0$ dır. Eğer g, s tane negatif eigen değerine ve $r = n - s$ tane pozitif eigen değerine sahipse o zaman $g,(s,r)$ tipindendir denir. Her $p \in M$ için $g|_p$ nin $diag\{-1,...,-1,+1,...,+1\}$ ile gösterilebilecek şekilde lokal koordinatları vardır (Beem vd 1996).

Tanım 2.4.2 M diferansiyellenebilir bir manifold ve g de M üzerinde sabit indeksli bir metrik tensör olmak üzere, (M,g) ikilisine bir yarı-Riemann manifoldu denir (O'neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

Tanım 2.4.3 (M,g) bir yarı-Riemann manifoldu olsun, g nin sabit indeksi q ya (M,g) yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir, q indeksli ve n-boyutlu bir yarı-Riemann manifoldu M_q^n ile gösterilir (O'neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

Tanım 2.4.4 M_q^n bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Eğer $n \geq 2$ ve $q = 1$ ise bu durumda M_1^n yarı-Riemann manifolduna Lorentz manifoldu denir (O'neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996). Özel olarak $q = 0$ ise, bu durumda M^n bir Riemann manifoldu ve g de bir Riemann metriğidir.

Tanım 2.4.5 M_q^n bir yarı-Riemann manifoldu ve $\alpha : I \subset R \to M_q^n$ diferansiyellenebilir bir eğri olsun, α eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere;

1. $g(T,T) \geq 0$ ise α eğrisine uzay benzeri (space-like) eğri,
2. $g(T,T) < 0$ ise α eğrisine zaman benzeri (time-like) eğri,
3. $T \neq 0$ için, $g(T,T) = 0$ ise α eğrisine ışık benzeri (light-like veya null) eğri denir (0'neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

2.5 2-Boyutlu Lorentz Uzayı

Tanım 2.5.1 R^2 düzleminde $x = (x_1, x_2)$ ve $y = (y_1, y_2)$ olmak üzere

$$\langle x, y \rangle_L = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

tanımlansın. ($R_1^2, < x, y >|_L$) uzayı L^2 ile gösterilir.

Lorentz iç çarpımı ile donatılmış R^2 dir (Birman ve Nomizu 1984).

Bundan sonraki gösterimlerde aksi belirtilmedikçe $\langle , \rangle$ sembolü $\langle , \rangle_L$ anlamında kullanılacaktır.

Tanım 2.5.2 $\vec{x} = (x_1, x_2) \in L^2$ olsun. Eğer,

$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$ ise $\vec{x}$ e time-like vektör

$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ veya $\vec{x} = 0$ ise $\vec{x}$ e space-like vektör ve

$\vec{x} \neq 0$ için $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ ise $\vec{x}$ e null vektör (light-like) denir (O'neill 1989).

Tanım 2.5.3 $\vec{x} \in L^2$ için $\vec{x}$ in normu

$$\|\vec{x}\|_L = \sqrt{|\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle|}$$

olarak tanımlanır (Birman ve Nomizu 1984).

Yine aksi belirtilmedikçe $\| \;\|$ sembolü $\| \;\|_L$ yerine kullanılacaktır. Yukarıda verilen norm tanımına göre şu teorem verilebilir.

Teorem 2.5.4 $\vec{x} \in L^2$ olmak üzere,

1. $\|\vec{x}\| > 0$ dır.

2. $\vec{x} \neq 0$ için $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x}$ bir null vektörüdür.

3. $\vec{x}$ bir time-like vektör ise $\|\vec{x}\|^2 = -\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$ dir.

4. $\vec{x}$ bir space-like vektör ise $\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$ dir (Birman ve Nomizu 1984).

Tanım 2.5.5 L^2, iki boyutlu Lorentz uzayı ve $\vec{x}, \vec{y} \in L^2$ olsun.

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$$

ise $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörlerine Lorentz anlamında diktirler denir (Birman ve Nomizu 1984).
Aksi belirtilmedikçe iki vektörün dikliğinden "Lorentz anlamında diklik" anlaşılacaktır.

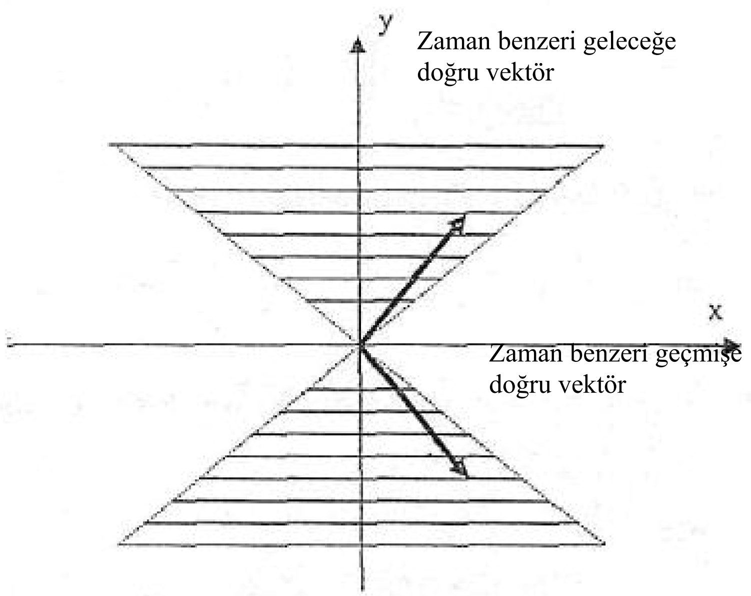
Teorem 2.5.6 L^2 de her ikisi de time-like (veya space-like) olan iki vektör birbirine dik olamaz (Uğurlu ve Çalışkan 1997).

Sonuç 2.5.7 İki vektörün dik olması için birinin time-like diğerinin space-like olması gerekir.

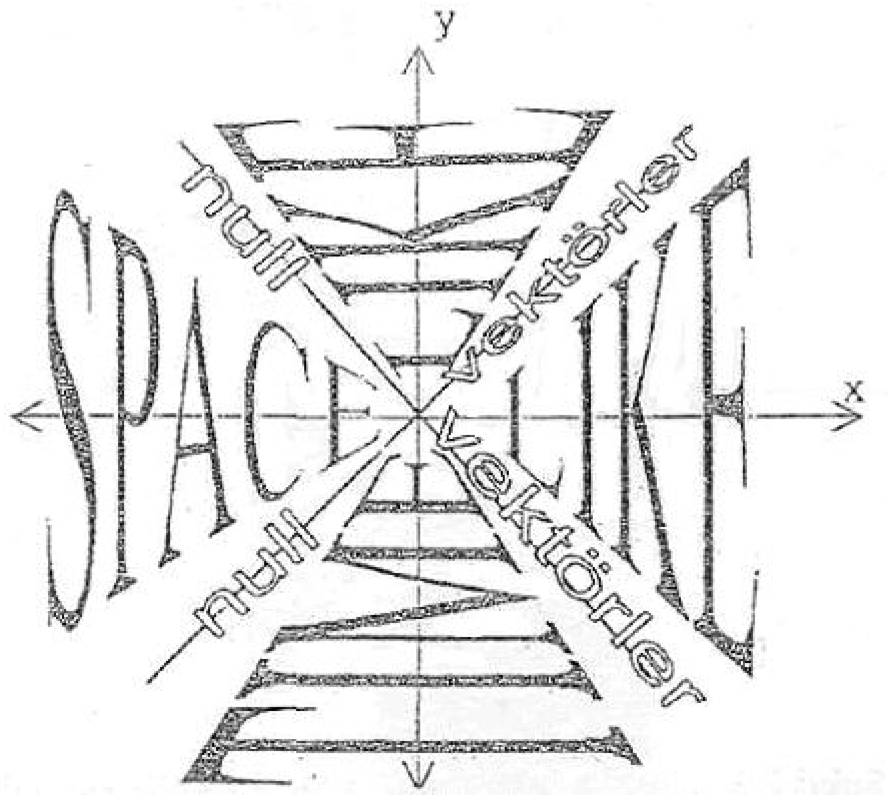
Tanım 2.5.8 $\vec{x} \in L^2$ time-like bir vektör olsun. $\vec{e} = (0,1)$ olmak üzere,

1. $\langle \vec{x}, \vec{e} \rangle < 0$ ise $\vec{x}$ vektörüne zaman benzeri geleceğe doğru vektördür,

2. $\langle \vec{x}, \vec{e} \rangle > 0$ ise $\vec{x}$ vektörüne bir zaman benzeri geçmişe doğru vektördür denir (O'neill 1983) (Şekil 2.1.).



Şekil 2.1. Zaman benzeri geleceğe ve geçmişe doğru vektörler



Şekil 2.2. L^2 Lorentz uzayındaki vektörlerin cinsi

Teorem 2.5.9 L^2 de birim time-like bir vektör l olsun

$$\left\langle \vec{l}, \vec{l}^{\perp} \right\rangle = 0$$

olacak biçimde bir tek $\vec{l}^{\perp}$ birim vektörü vardır (Birman ve Nomizu 1984).

2.6 İki Skaler Değişkenli Vektörel Fonksiyonlar

2.6.1 İki Skaler Değişkenli Vektörel Fonksiyonların Tanımı

R^2 de iki u^1, u^2 skaler, bağımsız değişkenin değişim aralıkları sırasıyla

D: $$a \leq u^1 \leq b, \quad c \leq u^2 \leq d \qquad (2.1)$$

olsun. $u^p, (p = 1,2)$ düzleminde u^1, u^2 koordinat eksenleri birbirlerine dikse, (2.1) tanım bölgesi kapalı bir dikdörtgendir.

Yukarıdaki iki aralığın her (u^1, u^2) değer takımı, belirli bir kuralla, bir $\vec{x}$ serbest vektörünü tanımlıyorsa, $\vec{x}$ serbest vektörü u^1 ve u^2 skaler ve bağımsız değişkenlerinin, verilen $[a,b],[c,d]$ kapalı aralıklarında veya (2.1) kapalı bölgesinde (açık da olabilir) bir vektörel fonksiyonudur.

(2.1) aralıkları, bu vektörel fonksiyonun tanım aralıklarıdır, u^1, u^2 skaler ve bağımsız değişkenleri ile $\vec{x}$ vektörü arasındaki bu ilişki, skaler fonksiyonlarda olduğu gibi

$$\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2) \qquad (2.2)$$

sembolü ile gösterilir. (Şemin 1987)

2.6.2 Birinci Mertebeden Vektörel Kısmi Türevler

(2.1) aralıklarında tanımlanmış tek değerli, gerçel ve sürekli bir vektörel fonksiyon (2.2) eşitliği ile tanımlansın. Tanım bölgesinin bir değer takımını $(u^p{}_0)$ ile gösterilir ve

$$\Delta\vec{x}^1 = \vec{x}(u^1, u^2) - \vec{x}(u_0^1, u_0^2), \quad \Delta u^1 = u^1 - u_0^1$$

olur. (Şemin 1987)

Tanım 2.6.2.1

Eğer sözü edilen vektörel fonksiyon için

$$\lim_{\Delta u^1 \to 0} \frac{\Delta\vec{x}^1}{\Delta u^1}$$

varsa, bu limite, $\vec{x}(u^1, u^2)$ vektörel fonksiyonunun, $(u^1{}_0, u^2{}_0)$ ikilisi için, u^1 skaler değişkenine göre, birinci mertebeden vektörel kısmi türevi denilir. Benzer şekilde

$$\Delta\vec{x}^2 = \vec{x}(u_0{}^1, u^2) - \vec{x}(u_0{}^1, u^2{}_0),\ \Delta u^2 = u^2 - u^2{}_0$$

denilecek olursa,

$$\lim_{\Delta u^2 \to 0} \frac{\Delta\vec{x}^2}{\Delta u^2}$$

ifadesi de, eğer varsa, $\vec{x}(u^1, u^2)$ vektörel fonksiyonunun, $(u^1{}_0, u^2{}_0)$ ikilisi için, u^2 skaler değişkenine göre, birinci mertebeden vektörel kısmi türevidir. (Şemin 1987)

Gösterim:

Bir (u^1, u^2) ikilisi için birinci mertebeden vektörel kısmi türevler:

$$\vec{x}_{u^1} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial u^1} = \lim_{\Delta u^1 \to 0} \frac{\Delta\vec{x}^1}{\Delta u^1},\ \vec{x}_{u^2} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial u^2} = \lim_{\Delta u^2 \to 0} \frac{\Delta\vec{x}^2}{\Delta u^2}$$

ile gösterilecektir. (Şemin 1987)

Tanım 2.6.2.2

Tanım bölgesinin her noktasında birinci mertebeden vektörel kısmi türevleri olan bir $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ vektörel fonksiyonuna bu bölgede birinci mertebeden vektörel kısmi türevli, denilecektir. (Şemin 1987)

Uyarı 2.6.1

Sürekliliğin yeterli olmayışı

Tek skaler değişkenli, vektörel fonksiyonlarda olduğu gibi kısmi türevlerin varlığı için vektörel fonksiyonun gerekli olan sürekliliği yeterli değildir. (Şemin 1987)

2.6.3 Bileşik Vektörel Fonksiyonlar ve Bunların Birinci Mertebeden Türevleri

$\mathbb{R}^2$ düzleminde (2.1) aralıklarıyla tanımlanmış dikdörtgen bir (B) bölgesinde (ya da herhangi bir bölgesinde) verilmiş ve birinci mertebeden sürekli kısmi türevleri olan bir vektörel fonksiyon (2.2) eşitliği ile verilsin

(B) bölgesinin herhangi bir noktası N_0 dan geçen bir eğrisi de E ile gösterilsin.

$\forall t \in I$ için, E eğrisi

$$\vec{x} = \vec{x}\left[u^1(t), u^2(t)\right] \tag{2.3}$$

biçiminde bir parametrelendirme ile gösterilebilir.

Bundan sonraki kısımlarda, E nin N_0 noktasını belirleyen t parametresinin değeri t_0 olarak alınacağından

$$u^1{}_0 = u^1(t_0),\;\; u^2{}_0 = u^2(t_0)$$

denilecektir. (Şemin 1987)

Ayrıca (2.3) eşitliği ile verilen tek skaler değişkenli vektörel fonksiyonun birinci mertebeden türevinin $t = t_0$ noktasındaki değeri

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\vec{x}(u^1, u^2) - \vec{x}(u^1{}_0, u^2{}_0)}{t - t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

dir. Bu oranı

$$\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}(u^1, u^2) - \vec{x}(u^1{}_0, u^2)}{u^1 - u^1{}_0} . \frac{u^1 - u^1{}_0}{t - t_0} +$$
$$\frac{\vec{x}(u^1, u^2) - \vec{x}(u^1{}_0, u^2)}{u^2 - u^2{}_0} . \frac{u^2 - u^2{}_0}{t - t_0}$$

biçiminde yazılırsa, sıra ile

$$\lim_{t\to t_0} \frac{u^1 - u^1{}_0}{t - t_0} = u^1_{t_0} \qquad \lim_{t\to t_0} \frac{u^2 - u^2{}_0}{t - t_0} = u^2_{t_0}$$
$$\lim_{t\to t_0} \frac{\vec{x}(u^1{}_0, u^2) - \vec{x}(u^1{}_0, u^2{}_0)}{u^2 - u^2{}_0} = \left[x(u^1{}_0, u^2)\right]_{u^2{}_0}$$

dır (Şemin, 1983, s.28).

Birinci oranın limitine gelince,

$$\vec{x}(u^1, u^2) - \vec{x}(u^1{}_0, u^2)$$

metrik farkı sadece u^1 değişkeninin fonksiyonu gibi düşünülerek

$$\vec{x}(u^1,u^2)-\vec{x}(u^1{}_0,u^2)=(u^1-u^1{}_0)\left[\vec{x}_{u^1}(u^1{}_0,u^2)+\vec{\alpha}_1(u^1,u^1{}_0,u^2)\right]$$
$$\lim_{u^1\to u^1{}_0}\vec{\alpha}_1(u^1,u^1{}_0,u^2)=\vec{0}$$

olarak yazılabilir. Bunun için de $\vec{x}_{u^1}$ kısmi vektörel türevinin, u^1 değeri yakınlarında sürekli olması gerekir.

Görülüyor ki birinci oranın limiti de: $x(u^1{}_0,u^2)$ dir. Buna göre

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{x}(u^1,u^2)\right]\Bigg|_{t=t_0}=\left(\vec{x}_{u^1}(u^1,u^2)u^1{}_t+\vec{x}_{u^2}(u^1,u^2)u^2{}_t\right)\Bigg|_{t=t_0} \tag{2.4}$$

bulunur. (Şemin 1987)

2.6.4 Çeşitli Mertebelerden Vektörel Kısmi Türevler

İki skaler ve bağımsız değişkenli bir vektörel fonksiyonun birinci mertebeden kısmi türevleri de aynı bağımsız skaler değişkenlerin vektörel fonksiyonlarıdır. Bunların da, tanım bölgelerinde, eğer varsa, birinci mertebeden kısmi vektörel türevlerinden söz edilebilir. Bunlara $\vec{x}=\vec{x}(u^1,u^2)$ vektörel fonksiyonunun, ikinci mertebeden vektörel kısmi türevleri denilir. Bunlar da

$$\begin{aligned}\vec{x}_{u^1u^1}&=\frac{\partial^2\vec{x}}{\partial u^1\partial u^1}=\frac{\partial^2\vec{x}}{(\partial u^1)^2},\\ \vec{x}_{u^1u^2}&=\frac{\partial^2\vec{x}}{\partial u^1\partial u^2},\\ \vec{x}_{u^2u^2}&=\frac{\partial^2\vec{x}}{\partial u^2\partial u^2}=\frac{\partial^2\vec{x}}{(\partial u^2)^2}\end{aligned} \tag{2.5}$$

sembolleri ile gösterilirler.

İkinci mertebeden vektörel kısmi türevlerden söz açmışken, bir özelliği anımsatmak isteriz:

Bilindiği gibi, iki bağımsız değişkenli skaler fonksiyonlarda, örneğin $z=f(x,y)$ fonksiyonunda, ikinci mertebeden z_{xy} ve z_{yx} kısmi türev fonksiyonları, (x, y) noktasında sürekli fonksiyonlarsa, bu noktada

$$z_{xy}=z_{yx}$$

dir.

Aynı sonuç, hatta daha hafifletilmiş koşullar altında, iki skaler bağımsız değişkenli vektörel fonksiyonlar için de geçerlidir, yani birazdan ele alacağımız SCHWARZ teoremindeki koşullara göre, bir (u^1, u^2) noktasında

$$\vec{x}_{u^1u^2} = \vec{x}_{u^2u^1}$$

dir. (Şemin 1987)

Teorem 2.6.4.1 (H.A. SCHWARZ teoremi). İki skaler ve bağımsız değişkenli $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ vektörel fonksiyonunun, (u^1, u^2) noktası yakınlarında

a) $\vec{x}_{u^2}$ birinci mertebeden kısmi vektörel türevi varsa ve sürekli ise;

b) $\vec{x}_{u^1u^2}$ ikinci mertebeden kısmi vektörel türevi varsa; aynı noktada

$\vec{x}_{u^2u^1}$ ikinci mertebeden kısmi vektörel türevi de vardır ve (u^1, u^2) noktasında

$$\vec{x}_{u^1u^2} = \vec{x}_{u^2u^1}$$

dir. (Şemin 1987)

2.6.5 Vektörel Tam Diferansiyel

(2.3) formülündeki vektörel ve skaler fonksiyonlar, bir tek t skaler değişkenine bağlıdırlar. O halde, t nin herhangi bir değeri için bu formül [Diferansiyel Geometri I, Ferruh SEMİN, s. 36. formül (16-2)] yardımıyla

$$\frac{d\vec{x}(u^1, u^2)}{dt} = \vec{x}_{u^1}(u^1, u^2)\frac{du^1}{dt} + \vec{x}_{u^2}(u^1, u^2)\frac{du^2}{dt}$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitliğin her iki yanı dt diferansiyeli ile çarpıldığında, kısaca

$$d\vec{x} = \vec{x}_{u^1}du^1 + \vec{x}_{u^2}du^2 \qquad (2.6)$$

bağıntısı elde edilir.

(2.6) nın ikinci yanı, tanım gereğince, iki skaler ve bağımsız değişkenli $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ vektörel fonksiyonunun tam diferansiyelidir. Bu bağıntıdaki du^1, du^2 diferansiyelleri tamamıyla keyfidir, ve bu formül, (2.1) tanım bölgesinde seçilen yol ve bu yol üzerinde hesaplanan diferansiyeller nasıl olursa olsun, geçerlidir. (Şemin 1987)

Değişkenlerin değiştirilmesinde, tam diferansiyelin kullanılması

Diyelim ki, $u^p, (p=1,2)$ bağımsız değişkenleri, başka iki bağımsız $\bar{u}^p, (p=1,2)$ skaler değişkeninin fonksiyonudur. Buna göre, (2.1) tanım bölgesinde seçilecek bir yol boyunca, u^p ve $\bar{u}^p$ değişkenleri aynı bir t değişkeninin fonksiyonlarıdır. Bileşik skaler fonksiyonların diferansiyelleri kuralına göre

$$\left.\begin{aligned} du^1 &= u^1_{\bar{u}^1} d\bar{u}^1 + u^1_{\bar{u}^2} d\bar{u}^2 \\ du^2 &= u^2_{\bar{u}^1} d\bar{u}^1 + u^2_{\bar{u}^2} d\bar{u}^2 \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

dir.

Aynı yol üzerinde, $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ vektörel fonksiyonunun diferansiyeli, bunun (2.6) ile verilen tam diferansiyelinden ibarettir. (2.6) formülündeki du^1 ve du^2 diferansiyelleri yerine (2.7) ile verilenleri koyar ve elde edilen ifade $d\bar{u}^1$ ve $d\bar{u}^2$ ye göre sıralanırsa

$$d\vec{x} = (\vec{x}_{u^1} u^1_{\bar{u}^1} + \vec{x}_{u^2} u^2_{\bar{u}^1}) d\bar{u}^1 + (\vec{x}_{u^1} u^1_{\bar{u}^2} + \vec{x}_{u^2} u^2_{\bar{u}^2}) d\bar{u}^2 \tag{2.8}$$

olur.

Öte yandan $u^p, (p=1,2)$ yeni skaler değişkenleri cinsinden, (2.6) gereğince

$$d\vec{x} = \vec{x}_{\bar{u}^1} d\bar{u}^1 + \vec{x}_{\bar{u}^2} d\bar{u}^2$$

olduğundan, bu sonuncu ile (2.8) in karşılaştırılması $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ vektörel fonksiyonunun, yeni skaler değişkenlere göre birinci mertebeden kısmi türevlerini, eski skaler değişkenlere göre birinci mertebeden kısmi türevleri cinsinden

$$\vec{x}_{\bar{u}^1} = \vec{x}_{u^1} u^1_{\bar{u}^1} + \vec{x}_{u^2} u^2_{\bar{u}^1}\,;\ \vec{x}_{\bar{u}^2} = \vec{x}_{u^1} u^1_{\bar{u}^2} + \vec{x}_{u^2} u^2_{\bar{u}^2} \tag{2.9}$$

verir. (Şemin 1987)

2.6.6 Çeşitli Mertebelerden Diferansiyeller

İki bağımsız değişkenli $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ vektörel fonksiyonunun ikinci, üçüncü,...n-inci mertebeden tam diferansiyelleri $d^1\vec{x}, d^2\vec{x}, \ldots, d^n\vec{x}$ sembolleriyle gösterilir ve bunlar birinci mertebeden tam diferansiyeli veren (2.6) formülünden itibaren ve Teorem 2.6.4.1 kullanılarak aşama aşama hesap edilir. Örneğin, ikinci mertebeden tam diferansiyel şöyle bulunur:

$$d^2x = d(x_{u^1})du^1 + d(x_{u^2})du^2 + x_{u^1}d^2u^1 + x_{u^2}d^2u^2 \qquad (2.10)$$

Yani

$$d^2x = x_{u^1u^1}(du^1)^2 + 2x_{u^1u^2}du^1du^2 + x_{u^2u^2}(du^2)^2 + x_{u^1}d^2u^1 + x_{u^2}d^2u^2 \qquad (2.10)$$

dir. (Şemin 1987)

2.6.7 İki Bağımsız Değişkenli Vektörel Fonksiyonlarda Sınıf Kavramı

(2.1) bölgesinde (2.2) denklemi ile tanımlanmış iki bağımsız değişkenli vektörel fonksiyonunun, bölgenin her noktasında, $n \geq 1$ olmak üzere, n-inci mertebeye kadar kısmi türevlerinin hepsi (n dahil olmak koşulu ile) varsa ve sürekli ise, buna, (2.1) bölgesinde n-inci sınıftan iki bağımsız değişkenli bir vektörel fonksiyon, yada iki bağımsız değişkenli bir C^n vektörel fonksiyon denir.

Verilen (2.1) bölgesinin her noktasında, verilen iki bağımsız değişkenli vektörel fonksiyonun sonsuz mertebeden sürekli kısmi türevi varsa, bu C^∞ sınıfından vektörel fonksiyonudur.

İki bağımsız değişkenli bir C^n vektörel fonksiyonunun, bir kartezyen koordinat sistemine göre, skaler bileşenlerinden en az birisi aynı sınıftandır, öteki ikisinin sınıfları ise en az n dir. (Şemin 1987)

2.6.8 İki Bağımsız Değişkenli Vektörel Fonksiyonlar İçin TAYLOR Formülü

Bir (2.1) ile tanımlanan bir D bölgesinin bir (u^1, u^2) noktasında n-inci sınıftan ve iki bağımsız değişkenli bir vektörel fonksiyon (2.2) denklemi ile verilirse biraz önce de belirtildiği gibi, bunun herhangi bir $Ox_p, (p = 1, 2, 3)$ kartezyen koordinat sistemine göre skaler bileşenlerinden hiç olmazsa birisi, aynı $(u^1{}_0, u^2{}_0)$ noktasında n-inci sınıftandır ve öteki İki bileşenin de sınıfları en az n dir. O halde, Analiz'den bilindiği gibi, bu üç skaler bileşen için

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta u^1 = u^1 - u^1{}_0,\ \Delta u^2 = u^2 - u^2{}_0,\ \Delta x_p = x_p(u^1,u^2) - x_p(u^1{}_0,u^2{}_0), (p = 1,2,3).\\
&\Delta x_p = (x_{p_{u^1}}\Delta u^1 + x_{p_{u^2}}\Delta u^2 + \frac{1}{2!}\left(x_{p_{u^1}}\Delta u^1 + x_{p_{u^2}}\Delta u^2\right)^{(2)} +\\
&\qquad \ldots + \frac{1}{n!}\left[\left(x_{p_{u^1}}\Delta u^1 + x_{p_{u^2}}\Delta u^2\right)^{(n)} + e_{p_n}\right],\\
&\qquad e_{p_n} = e_{p_n}(u^1{}_0,u^2{}_0,\Delta u^1,\Delta u^2),\ \lim_{\substack{\Delta u^1\to 0\\ \Delta u^2\to 0}} e_{p^n} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (2.11)$$

TAYLOR formülü yazılabilir.

Öte yandan

$$\Delta\vec{x} = \vec{x}(u^1,u^2) - \vec{x}(u^1{}_0,u^2{}_0) = \sum_{p=1}^{3}(\Delta x_p)\vec{k}_p$$

$$\vec{e}_p = \sum_{p=1}^{3} e_{pn}\vec{k}_p$$

denirse

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta\vec{x} = (\vec{x}_{u^1}\Delta u^1 + \vec{x}_{u^2}\Delta u^2 + \frac{1}{2!}\left(\vec{x}_{u^1}\Delta u^1 + \vec{x}_{u^2}\Delta u^2\right)^{(2)} +\\
&\qquad \ldots + \frac{1}{n!}\left[\left(\vec{x}_{u^1}\Delta u^1 + \vec{x}_{u^2}\Delta u^2\right)^{(n)} + e_n\right]\\
&\qquad\qquad \lim_{\substack{\Delta u^1\to 0\\ \Delta u^2\to 0}} \vec{e}_n = \vec{0}
\end{aligned}\right\} \quad (2.12)$$

olur. Görülüyor ki, (2.1) tanım bölgesinde iki bağımsız değişkenli ve n-inci sınıftan bir vektörel fonksiyon verildiğinde, bölgenin $(u^1{}_0,u^2{}_0)$ noktası ve yakınları için (2.12) formülü yazılabilir. Buna, iki bağımsız değişkenli vektörel fonksiyonların TAYLOR formülü denilir. (Şemin 1987).

3. TEMEL KUADRATİK FORMLAR

3.1 Birinci Temel Kuadratik Form Yüzeylerin İç Geometrisi

3.1.1 Birinci Temel Kuadratik Form ve Diskriminantı

u, v skaler, bağımsız gerçel değişkenlerinin

$a \leq u \leq b$, $c \leq v \leq d$

kapalı dikdörtgen bölgesinde (u, v eksenleri birbirine dik alınmıştır) tanımlanmış, gerçel, tek değerli ve 1-nci mertebeden

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v) \tag{3.1}$$

vektörel fonksiyonu ile bir yüzey parçası verilmiş olsun. Eğer bir C eğrisi (veya bunun bir parçası) tümü ile bu yüzey parçası üzerinde ise, yüzeyin bu eğri üzerinde dolanan bir P noktasının u, v parametreleri, eğri boyunca aynı bir t parametresinin

$$u = u(t), \qquad v = v(t), \qquad a \leq t \leq b \tag{3.2}$$

biçiminde fonksiyonlarıdır ve C nin parametreli vektörel denklemi de

$$\vec{x} = \vec{x}[u(t), v(t)] \tag{3.3}$$

olur.

Eğer C eğrisi 1-nci sınıftan ise, yüzey parçası da böyle sayıldığından (3.2) vektörel fonksiyonu da 1-nci sınıftandır.

C eğrisinin $t = t_0$ la belirli olan bir P_0 noktasındaki teğeti (3.2) denklemlerindeki u ve v ye

$u_0 = u(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$

denilirse

$$\vec{x}'_p(t_0) = \vec{x}_u(u_0, v_0)u'(t_0) + \vec{x}_v(u_0, v_0)v'(t_0) \tag{3.4}$$

vektörüne paraleldir.

Eğer yüzeyin P_0 noktası düzgünse

$\vec{x}_u(u_0, v_0) \wedge \vec{x}_v(u_0, v_0) \neq \vec{0}$

dür. Aynı noktada $u'(t_0)$, $v'(t_0)$ aynı zamanda sıfır değilse (3.4) ile tanımlanan $\vec{x}'_p(t_0) \neq \vec{0}$ dır, yani P_0 noktası, C eğrisinin de düzgün bir noktasıdır.

(3.4) bağıntısında türevler yerine diferansiyeller alındığında, yani (3.4) ün her iki yanını keyfi olan dt ile çarpıp ve herhangi bir P noktası düşünüldüğünde, t parametresine bağlı olmayan ve C nin P deki teğetine paralel olan

$$d\vec{x} = \vec{x}_u du + \vec{x}_v dv \qquad (3.5)$$

vektörü elde edilir.

C eğrisinin P noktasındaki teğetine paralel olan $d\vec{x}$ vektörü, P den itibaren alındığında, yüzeye teğet olur. Bunun doğrultusu $\frac{dv}{du}$ oranına bağlıdır. Eğer C eğrisi (3.2) denklemiyle verilecek yerde

$$g(u,v) = 0$$

bağıntısıyla tanımlanmış ise

$$g_u du + g_v dv = 0$$

eşitliğinden

$$\frac{dv}{du} = -\frac{g_u}{g_v}$$

çıkarılır.

C eğrisinin P noktasındaki lineer elemanı

$$ds^2 = dx^2 \qquad (3.6)$$

olduğundan (3.5) yardımıyla

$$ds^2 =< \vec{x}_u , \vec{x}_u > du^2 + 2 < \vec{x}_u \vec{x}_v > dudv + < \vec{x}_v , \vec{x}_v > dv^2$$

veya

$$< \vec{x}_u , \vec{x}_u >= E \,,\; < \vec{x}_u \vec{x}_v >= F \,,\; \langle \vec{x}_v , \vec{x}_v \rangle = G \qquad (3.7)$$

denildiğinde

$$I \equiv ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \qquad (3.8)$$

sonucu elde edilir.

Buna yüzeyin P noktasındaki birinci temel formu veya metrik formu ya da temel kuadratik formu denir.

Bu formda, varsayım gereğince, du ve dv aynı zamanda sıfır olmadıklarından ve P

de yüzeyin düzgün bir noktası olarak alındığından, yani bu noktada $\vec{x}_u$ ve $\vec{x}_v$ nin ikisi birden sıfır-vektörden farklı bulunduklarından (3.8) kuadratik formunun değeri, gerçel elemanlar için artı işaretlidir. Çünkü sıfır-vektörden farklı olan (3.5) vektörünün karesine eşittir.

Bu kuadratik formdaki du, du^2, dv ve dv^2 nin E,F,G katsayıları u ve v'nin

$$E = E(u,v),\ F = F(u,v),\ G = G(u,v)$$

biçiminde fonksiyonlarıdır. Böylece (u,v) ikilileri ile bir $P(u,v)$ noktası belirtildiğinden, bu üç katsayının nokta fonksiyonları oldukları da söylenir.

Birinci ve üçüncü katsayılar $v = sabit$ ve $u = sabit$ koordinat çizgilerinin teğet doğrultularını veren $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ vektörlerinin, uzunluklarının karesine eşit olduklarından, düzgün noktada sıfırdan farklıdırlar. Buna göre, yüzeyin düzgün her P noktasında daima

$$E > 0,\ G > 0 \tag{3.9}$$

dır. (Şemin 1987)

Teorem 3.1 En az 1-nci mertebeden bir yüzeyin birinci temel kuadratik formu bir diferansiyel invaryanttır, yani (u,v) eğrisel koordinatları yerine, en az 1-nci sınıftan

$$u = f(\bar{u},\bar{v}), \quad v = g(\bar{u},\bar{v})$$

fonksiyonlarıyla yeni bir $(\bar{u},\bar{v})$ eğrisel koordinat sistemi alındığında,

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = \bar{E}d\bar{u}^2 + 2\bar{F}d\bar{u}d\bar{v} + \bar{G}d\bar{v}^2$$

olur.

Böylece (3.7) denkleminden

$$F = \langle \vec{x}_u, \vec{x}_v \rangle$$

olduğundan koordinat çizgileri arasındaki φ açısının değerine bağlıdır. (3.7) formüllerine göre, φ nin yönü ne olursa olsun,

$$F = \sqrt{EG}.\cos\varphi \tag{3.10}$$

olduğundan,

$$\varphi \text{ açısı } \begin{cases} dar\, ise, & F > 0 \\ dik\, ise, & F = 0 \\ geniş\, ise, & F < 0 \end{cases}$$

dır.

Böylece (3.8) kuadratik formunun diskriminantı H^2 ile, yani

$$H^2 = EG - F^2 \tag{3.11}$$

biçiminde gösterilir.

Yüzeyin düzgün ve gerçel her noktasında diskriminant, artı işaretli olduğundan, H^2 ile gösterilmiştir. Gerçekten

$$\begin{aligned} H^2 &= EG - EG\cos^2\varphi \\ &= EG(1-\cos^2\varphi) \\ &= EG.\sin^2\varphi \end{aligned} \tag{3.12}$$

sonucu çıkarılır.

Düzgün ve gerçel noktada $E > 0$, $G > 0$, $\varphi \neq 0$ olduğundan $H^2 > 0$ dır.

Yüzeyin düzgün ve gerçel her noktasında (3.7) ve (3.12) nedeniyle

$$(\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v)^2 = EG\sin^2\varphi = H^2 > 0 \tag{3.13}$$

dır. Görülüyor ki yüzeyin düzgün ve gerçel bir noktasında sıfırdan farklı olan H sayısını

$$H > 0 \tag{3.14}$$

olarak alırsak, normal vektörün salt değeri H dır, yani

$$\left|n^*\right| = \left|\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v\right| = H \tag{3.15}$$

olur.

$$\vec{n} = \frac{\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v}{\left|\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v\right|} = \frac{\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v}{H}$$

olduğundan da

$$H.\vec{n} = \vec{x}_u \wedge \vec{x}_v \tag{3.16}$$

yazılır. (Şemin 1987)

3.1.2 Yüzeyin Bir Eğrisinin İki Noktası Arasındaki Eğrisel Uzunluk

$$\vec{x} = \vec{x}(u,v)$$

vektörel denklemiyle verilen bir yüzeyin bir C eğrisi de 1-nci mertebeden (3.2) denklemleriyle tanımlanmışsa, C nin parametreli vektörel denklemi de

$$\vec{x}(t) = \vec{x}[u(t), v(t)]$$

denklemiyle belirli olur.

C eğrisinin $A(a)$ ve $B(b)$ noktaları arasındaki yay uzunluğu, ($\overset{\frown}{AB}$ yayı düzgün noktalardan oluşuyorsa) C nin $\overset{\frown}{AB}$ yayının bir $P(t)$ noktasında

$$dx^2 = \vec{x}_t^{'2}(t)dt^2 = ds^2$$

yazılabileceğinden

$$\overset{\frown}{AB} = s = \int_a^b \sqrt{\vec{x}_t^{'2}(t)}.dt = \int_a^b \sqrt{d\vec{x}^2} \tag{3.17}$$

$$= \int_a^b \sqrt{Eu_t^{'2} + 2Fu_t^{'}v_t^{'} + Gv_t^{'2}}.dt$$

integraliyle hesaplanır.

Yüzeyin düzgün noktalardan oluşan bir eğrisi

$$h(u,v) = 0\,,\; u_1 \le u \le u_2\,,\; v_1 \le v \le v_2$$

denklemiyle tanımlanmışsa, bunun $P_1(u_1), P_2(u_2)$ noktaları arasındaki $\overset{\frown}{P_1P_2}$ yay uzunluğu da eğri boyunca

$$\frac{dv}{du} = -\frac{h_u}{h_v}\,; \quad h_v(u,v) \neq 0$$

olacağından $\overset{\frown}{P_1P_2}$ yayı

$$\overset{\frown}{P_1P_2} = s = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\left[Eh_v^2\,(u,v) - 2Fh_u(u,v)h_v(u,v) + Gh_u^2\,(u,v)\right]^{1/2} du}{h_v(u,v)} \tag{3.18}$$

sonlu integraline eşittir. (Şemin 1987)

3.1.3 Yüzeyin Düzgün Bir Noktasından Geçen Herhangi İki Eğrisi Arasındaki Açı

İki yanlı ve 1-nci sınıftan bir yüzeyin düzgün bir $P(\mathrm{u}, \mathrm{v})$ noktasındaki birim normal vektörü $\vec{n}$, P den geçen ve 1-nci sınıftan herhangi iki eğrisi de C, $C*$ olsun.

C ve $C*$ eğrileri, gene 1-nci sınıftan

$(\alpha)\quad u = u(t),\ v = v(t)\ ;\quad u = u(t^*),\quad v = v(t^*)$

fonksiyonları yardımıyla verilmişlerse, bunların yer vektörleri, 1-nci sınıftan

$$\vec{x} = \vec{x}[u(t), v(t)], \quad \vec{x} = \vec{x}[u(t^*), v(t^*)]$$

vektörleridir.

O halde C ve C^* ın P düzgün noktasındaki teğet vektörleri

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{x}_u \frac{du}{dt} + \vec{x}_v \frac{dv}{dt}\ ; \quad \frac{\delta\vec{x}}{\delta t^*} = \vec{x}_u \frac{\delta u}{\delta t^*} + \vec{x}_v \frac{\delta v}{\delta t^*}$$

veya kısaca

$$d\vec{x} = \vec{x}_u du + \vec{x}_v dv\ , \quad \delta\vec{x} = \vec{x}_u \delta u + \vec{x}_v \delta v \tag{3.19}$$

olur. (Şemin 1987)

3.1.4 C ve C^* Eğrilerinin P Noktasında Oluşturdukları Açının Tanımı

P noktasındaki $\vec{n}$ birim normal vektörü, bu noktadaki teğet düzlem üzerinde pozitif bir dönme yönü tanımlar. P den geçen iki eğriyi belirli bir sırada, örneğin C, C^* sırasında alalım.Bunların aynı sırada ve aynı noktadaki $dx, \delta x$ teğet vektörleri arasında, π den küçük olmak üzere oluşan

$$\varphi = \sphericalangle d\vec{x}, \delta\vec{x}\ , \quad |\varphi| < \pi$$

açısı, C ve C^* eğrilerinin, P deki açılarıdır. φ açısı π den küçük seçildiğine göre, (+) ya da (-) işaretli olabilir. (Şemin 1987)

3.1.4.1 φ Açısının Cosinüsü

φ açısı hangi işaretli olursa olsun, bunun cosinüsü daima aynı işaretlidir ve

$$\cos\varphi = \frac{d\vec{x} \cdot \delta\vec{x}}{|d\vec{x}| \cdot |\delta\vec{x}|} \tag{3.20}$$

e eşittir.

(3.8) ve (3.17) formüllerini kullanarak

$$\cos\varphi = \frac{Edu\delta u + F(du\delta u + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdu\delta v + Gdv^2} \cdot \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}} \tag{3.21}$$

biçiminde yazılabilir.

Eğer (α) fonksiyonlarını

$$(\alpha) \qquad u = f(t),\ v = k(t); \qquad u = f^*(t^*),\ \text{v=k*(t*)}$$

biçiminde yazarsak

$$(\beta) \qquad du = f_t' dt,\ dv = k_t' dt; \quad \delta u = f^{*'}_{t^*}\, dt^*,\quad \delta v = k^{*'}_{t^*}\, dt^*$$

olacağından

$$\cos\varphi = \frac{Ef_t' f^{*'}_{t^*} + F(f_t' k^{*'}_{t^*} + k_t' f^{*'}_{t^*}) + Gk^{*'}_{t^*} k_t'}{\sqrt{Ef_t'^2 + 2Ff_t' k_t' + Gk_t'^2} \cdot \sqrt{Ef^{*'2}_{t^*} + 2Ff^{*'}_{t^*} k^{*'}_{t^*} + Gk^{*'2}_{t^*}}} \tag{3.22}$$

dir. (Şemin 1987)

3.1.4.2 φ Açısının Sinüsü

$\dfrac{d\vec{x}}{|d\vec{x}|}$ ve $\dfrac{\delta\vec{x}}{|\delta\vec{x}|}$ birim vektörlerinin

$$\frac{d\vec{x} \wedge \delta\vec{x}}{|d\vec{x}| \cdot |\delta\vec{x}|}$$

vektörel çarpımının salt değeri bu iki birim vektörü arasındaki açının salt değerine eşittir.O halde

$$\vec{n} \cdot \frac{d\vec{x} \wedge \delta\vec{x}}{|d\vec{x}| \cdot |\delta\vec{x}|} = \frac{(\vec{n}, d\vec{x}, \delta\vec{x})}{|d\vec{x}| \cdot |\delta\vec{x}|} = \sin\varphi \tag{3.23}$$

yazılabilir.

$d\vec{x} \wedge \delta\vec{x}$ vektörel çarpımının $\vec{n}$ ile aynı yönlü olması halinde, $\varphi > 0$, aksi halde $\varphi < 0$ dır.

(3.19) ve (3.8) bağıntıları yardımıyla

$$d\vec{x} \wedge \delta\vec{x} = (du\delta v - dv\delta u)\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v$$

bulunur. (Şemin 1987)

Açıklama 1

$$\left.\begin{aligned} d\vec{x} &= \vec{x}_u d_u + \vec{x}_v d_v \\ \delta\vec{x} &= \vec{x}_u \delta_u + \vec{x}_v \delta_v \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} d\vec{x} \wedge \delta\vec{x} &= (\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v) du\delta v + (\vec{x}_v \wedge \vec{x}_u) dv\delta u \\ &= \vec{x}_u \wedge \vec{x}_v (du\delta v - dv\delta u) \end{aligned}$$

ve (3.6) kullanarak

$$d\vec{x} \wedge \delta\vec{x} = H(du\delta v - dv\delta u)\cdot\vec{n} \tag{3.24}$$

bulunacağından

$$\sin\varphi = \frac{\mp H\cdot\begin{vmatrix} du & dv \\ \delta u & \delta v \end{vmatrix}}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\cdot\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}} \tag{3.25}$$

olur.

Deminki gibi eğrilerin α fonksiyonları ile verilmeleri halinde de

$$\sin\varphi = \frac{\mp H\cdot\begin{vmatrix} f_t' & k_t' \\ f*'_{t*} & k*'_{t*} \end{vmatrix}}{\sqrt{Ef_t'^2 + 2Ff_t'k_t' + Gk_t'^2}\cdot\sqrt{Eg*'^2_{t*} + 2Ff*'_{t*}\,k*'_{t*} + Gk*'_{t*}}} \tag{3.26}$$

bulunur. (Şemin 1987)

3.2 Temel Kuadratik Form Yüzeylerin Dış Geometrisi

3.2.1 İkinci Temel Kuadratik Form

Bir $P(u,v)$ düzgün noktası yakınlarında en az 2-nci sınıftan ve iki yanlı bir yüzeyin P ye yakın herhangi bir noktası

$$Q(u+\Delta u, v+\Delta v)$$

olsun. P deki birim normal vektörü $\vec{n}(u,v)$ olduğuna göre, Q nun P deki teğet düzlemden işaretli d uzaklığı

$$d = <\vec{n}, \vec{PQ}>$$

dur ve Taylor formülü nedeniyle

Açıklama.2

$$\begin{cases} \vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2) \\ \Delta\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2) - \vec{x}(u_0^1, u_0^2) = \sum_{p=1}^{3} (\Delta x_p)\vec{k}_p \\ \vec{e}_n = \sum_{p=1}^{3} e_{p_n} \vec{k}_p \\ \Delta\vec{x} = (\vec{x}_{u^1}\Delta u^1 + x_{u^2}\Delta u^2) + \frac{1}{2!}(\vec{x}_{u^1}\Delta u^1 + \vec{x}_{u^2}\Delta u^2)^{(2)} + \ldots + \frac{1}{n!}\left[(\vec{x}_{u^1}\Delta u^1 + \vec{x}_{u^2}\Delta u^2)^{(n)} + \vec{e}_n\right] \\ \lim_{\substack{\Delta u^1 \to 0 \\ \Delta u^2 \to 0}} \vec{e}_n = \vec{0} \end{cases}$$

$$P\vec{Q} = \Delta\vec{x} = \Delta u \vec{x}_u + \Delta v \vec{x}_v + \frac{1}{2}\left(\left(\Delta u\right)^2 \vec{x}_{uu} + 2\Delta u \Delta v \vec{x}_{uv} + \left(\Delta v\right)^2 \vec{x}_{vv} + \vec{\varepsilon}_2\right)$$

$$\lim_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0}} \vec{\varepsilon}_2 = \vec{0}$$

yazılabileceğinden

$$\vec{d} = <\vec{n}, \Delta\vec{x}> = \frac{1}{2}\left(\Delta u^2 <\vec{n}, \vec{x}_{uu}> + 2\Delta u \Delta v <\vec{n}, \vec{x}_{uv}> + \Delta v^2 <\vec{n}, \vec{x}_{vv}> + <\vec{n}, \vec{\varepsilon}_2>\right) \quad (3.27)$$

$$\lim_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0}} <\vec{n}, \vec{\varepsilon}_2> = 0$$

$$d = \frac{1}{2}\left(<\vec{n}, \vec{x}_{uu}> du^2 + 2 <\vec{n}, \vec{x}_{uv}> d_u d_v + <\vec{n}, \vec{x}_{vv}> dv^2\right)$$

dir. Eğer

$$L = <\vec{n}, \vec{x}_{uu}>, \quad M = <\vec{n}, \vec{x}_{uv}>, \quad N = <\vec{n}, \vec{x}_{vv}> \quad (3.28)$$

dersek, tanım gereğince

$$\mathrm{II} \equiv <\vec{n}, d^2\vec{x}> = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \quad (3.29)$$

diferansiyel formu, yüzeyin P düzgün noktasındaki ikinci temel kuadratik formudur.

Tıpkı birinci temel kuadratik formda olduğu gibi

$$L = L(u,v), \quad M = M(u,v), \quad N = N(u,v)$$

katsayıları da nokta fonksiyonlarıdır.

Ayrıca söylemedikçe, bundan sonraki kısımlarda, bu katsayıların üçünün birden sıfır olmadıklarını varsayacağız.

İkinci kuadratik formun katsayılarını veren formüller (3.16) ve (3.28) formüllerinden

$$L=\frac{\left(\vec{x}_u,\vec{x}_v,\vec{x}_{uu}\right)}{H},\quad M=\frac{\left(\vec{x}_u,\vec{x}_v,\vec{x}_{uv}\right)}{H},\qquad N=\frac{\left(\vec{x}_u,\vec{x}_v,\vec{x}_{vv}\right)}{H} \tag{3.30}$$

sonuçları çıkarılır.

L, M, N katsayılarının P düzgün noktasında aynı zamanda sıfıra eşit olmamaları da, geometrik bakımdan $\vec{x}_{uu}, \vec{x}_{uv}, \vec{x}_{vv}$ vektörlerinin P düzgün noktasındaki teğet düzleme paralel olmamalarını gerektirir.

Öte yandan

$$<\vec{n}, d\vec{x}>=0$$

özdeşliğinin diferansiyeli alınacak olursa

$$<\vec{n}, d^2\vec{x}>+<d\vec{n}, d\vec{x}>=0$$

ya da

$$\begin{aligned}<\vec{n}, d^2\vec{x}>=\mathrm{II}=&<-d\vec{n}, d\vec{x}>=-<(\vec{n}_u du+\vec{n}_v dv),(\vec{x}_u du+\vec{x}_v dv)>\\ &=-<\vec{n}_u,\vec{x}_u>du^2-\left(<\vec{n}_u,\vec{x}_v>+<\vec{n}_v,\vec{x}_u>\right)dudv-<\vec{n}_v,\vec{x}_v>dv^2\end{aligned}$$

bulunur.Halbuki

$$<\vec{n},\vec{x}_u>\equiv 0, <\vec{n},\vec{x}_v>\equiv 0 \tag{3.31}$$

özdeşliklerinin, sırası ile v ve u ya göre kismi türevleri (3.28) dolayısıyla

$$\left.\begin{array}{ll} <\vec{n}_v,\vec{x}_u>+<\vec{n},\vec{x}_{uv}>=0 & <\vec{n}_v,\vec{x}_v>+<\vec{n},\vec{x}_{vv}>=0\\ -<\vec{n}_v,\vec{x}_u>=<\vec{n},\vec{x}_{uv}>=M & -<\vec{n}_v,\vec{x}_v>=<\vec{n},\vec{x}_{vv}>=N\\ <\vec{n}_u,\vec{x}_u>+<\vec{n},\vec{x}_{uu}>=0 & <\vec{n}_u,\vec{x}_v>+<\vec{n},\vec{x}_{vu}>=0\\ -<\vec{n}_u,\vec{x}_u>=<\vec{n},\vec{x}_{uu}>=L & -<\vec{n}_u,\vec{x}_v>=<\vec{n},\vec{x}_{vu}>=M \end{array}\right\} \tag{3.32}$$

olacağından, L, M, N katsayıları için

$$\left.\begin{array}{l} L=-<\vec{n}_u,\vec{x}_u>\\ M=-<\vec{n}_u,\vec{x}_v>=-<\vec{n}_v,\vec{x}_u>\\ N=-<\vec{n}_v,\vec{x}_v> \end{array}\right\} \tag{3.33}$$

olur.Bunların da geçerli sayılabilmeleri için yüzeyi tanımlayan vektörel fonksiyonların, P düzgün noktasında en az 2-nci sınıftan olması gerekir. (Şemin 1987)

4. RIEMANN UZAYINDA WEİNGARTEN, OLINDE RODRIGUES, GAUSS, DARBOUX-RIBAUCOUR, CODAZZI-MAINARDI FORMÜLLERİ.YÜZEYLER TEORİSİNİN TEMEL TEOREMİ

4.1 Normal Birim Vektörün Birinci Mertebeden Kısmi Türevleri

WEINGARTEN ve OLINDE RODRIGUES Formülleri

En az 2-nci sınıftan

$$\vec{x} = \vec{x}(u,v)$$

vektörel fonksiyonu ile gösterilen yüzeyin bir $P(u,v)$ düzgün noktasındaki $\vec{n}(u,v)$ birim normal vektörünün birinci mertebeden kısmi türev vektörleri, $\vec{n}$ ye dik olduklarından, P deki teğet düzleme parelel vektörlerdir.O halde bunları, koordinat çizgilerinin $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ teğet vektörlerinin lineer kombinasyonları

$$\left.\begin{aligned} \vec{n}_u &= a_{11}\vec{x}_u + a_{12}\vec{x}_v \\ \vec{n}_v &= a_{21}\vec{x}_u + a_{22}\vec{x}_v \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

biçiminde yazılabilir.

Bunlar sırası ile $\vec{x}_u$ ve $\vec{x}_v$ vektörleri ile çarpılıp ve (3.33) denkleminden yararlanılırsa

$$<\vec{n}_u, \vec{x}_u> = a_{11} < \vec{x}_u, \vec{x}_u > + a_{12} < \vec{x}_v, \vec{x}_u >$$

olur, burada

$$L = -<\vec{n}_u, \vec{x}_u>, M = -<\vec{n}_u, \vec{x}_v> = -<\vec{n}_v, \vec{x}_u>, N = -<\vec{n}_v \vec{x}_v>$$
$$E = <\vec{x}_u, \vec{x}_u>, F = <\vec{x}_u, \vec{x}_v>, G = <\vec{x}_v, \vec{x}_v>$$

olduğundan

$$-L = a_{11}E + a_{12}F$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\langle \vec{n}_v, \vec{x}_u \rangle = a_{21} \langle \vec{x}_u, \vec{x}_u \rangle + a_{22} \langle \vec{x}_v, \vec{x}_u \rangle$$

eşitliğinden

$$-M = a_{21}E + a_{22}F$$

eşitliğini

$$\left\langle \vec{n}_u, \vec{x}_v \right\rangle = a_{11} \left\langle \vec{x}_u, \vec{x}_v \right\rangle + a_{12} \left\langle \vec{x}_v, \vec{x}_v \right\rangle$$ eşitliğinden

$$-M = a_{11}F + a_{12}G$$

eşitliğini

$$< \vec{n}_v, \vec{x}_v >= a_{21} < \vec{x}_u, \vec{x}_v > + a_{22} < \vec{x}_v, \vec{x}_v >$$ eşitliğinden

$$-N = a_{21}F + a_{22}G$$

eşitliği bulunur. Oluşan denklem sistemi çözülerek a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} bilinmeyenleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$-L = a_{11}E + a_{12}F$$
$$\underline{-M = a_{11}F + a_{12}G}$$
$$+FL = -a_{11}FE - a_{12}F^2$$
$$-EM = a_{11}EF + a_{12}EG$$
$$\overline{FL - EM = a_{12}\underbrace{(-F^2 + EG)}_{H^2}}$$
$$H^2 a_{12} = FL - EM$$

$$-M = a_{21}E + a_{22}F$$
$$-N = a_{21}F + a_{22}G$$
$$\overline{GM = -a_{21}GE - a_{22}GF}$$
$$-FN = a_{21}F^2 + a_{22}FG$$
$$\overline{FN - GM = a_{21}\underbrace{(-F^2 + GE)}_{H^2}}$$
$$H^2 a_{21} = FN - GM$$

$$-L = a_{11}E + a_{12}F$$
$$-M = a_{11}F + a_{12}G$$
$$\overline{-GL = a_{11}GE + a_{12}GF}$$
$$FM = -a_{11}F^2 - a_{12}FG$$

$$-GL+FM=a_{11}\underbrace{(GE-F^2)}_{H^2}$$

$$H^2a_{11}=FM-GL$$

$$-M=a_{21}E+a_{22}F$$
$$-N=a_{21}F+a_{22}G$$

$$FM=-a_{21}FE-a_{22}F^2$$
$$-EN=a_{21}EF+a_{22}EG$$

$$FM-EN=a_{22}\underbrace{(-F^2+EG)}_{H^2}$$

$$H^2a_{22}=FM-EN$$

$$\left.\begin{aligned} H^2a_{12}&=FL-EM\\ H^2a_{21}&=FN-GM\\ H^2a_{11}&=FM-GL\\ H^2a_{22}&=FM-EN \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

veya

$$\left.\begin{aligned} \vec{n}_u&=a_{11}\vec{x}_u+a_{12}\vec{x}_v\\ \vec{n}_v&=a_{21}\vec{x}_u+a_{22}\vec{x}_v \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

olduklarından

$$\left.\begin{aligned} \vec{n}_u&=\frac{1}{H^2}\left[(FM-GL)\vec{x}_u+(FL-EM)\vec{x}_v\right]\\ \vec{n}_v&=\frac{1}{H^2}\left[(FN-GM)\vec{x}_u+(FM-EN)\vec{x}_v\right] \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

olarak bulunur. Bunlara WEINGARTEN formülleri denir.

Eğer koordinat çizgilerinin yüzey üzerinde oluşturdukları parametreli eğrilerinin ailesi dikse $F\equiv 0$ dır ve (4.3) formülleri

$$H^2=GE$$

olduğundan

$$\left.\begin{aligned}\vec{n}_u &= -\left[\frac{L}{E}\vec{x}_u + \frac{M}{G}\vec{x}_v\right] \\ \vec{n}_v &= -\left[\frac{M}{E}\vec{x}_u + \frac{N}{G}\vec{x}_v\right]\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

eşitliklerini verir.

Eğer fazla olarak, koordinat çizgileri yüzey üzerinde $M \equiv 0$ özdeşliğini sağlayabilecek biçimde seçilebilirse, (4.4) formüllerinden,

$$\left.\begin{aligned}\vec{n}_u &= -\frac{L}{E}\vec{x}_u \\ \vec{n}_v &= -\frac{N}{G}\vec{x}_v\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

olup

$$r = \frac{L}{E}, \ \bar{r} = \frac{N}{G}$$

denildiğinde,

$$\left.\begin{aligned}\vec{n}_u + r\vec{x}_u &= \vec{0} \\ \vec{n}_v + \bar{r}\vec{x}_v &= \vec{0}\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

olur. Bunlara da OLINDE RODRIGUES formülleri denir. (Şemin 1987)

4.2 GAUSS Formülleri

En az 2-nci sınıftan

$$\vec{x} = \vec{x}(u,v)$$

vektörel fonksiyonu ile gösterilen yüzeyin düzgün bir $P(u,v)$ noktasında yer vektörünün ikinci mertebeden

$$\vec{x}_{uu}, \ \vec{x}_{uv}, \ \vec{x}_{vv}$$

kısmi türev vektörleri, lineer olarak bağımsız $\vec{x}_u$, $\vec{x}_v$, $\vec{n}$ vektörlerinin lineer birleşimi biçiminde yazılabilirler.

$$\left.\begin{aligned}\vec{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1\vec{x}_u + \Gamma_{11}^2\vec{x}_v + \alpha_1\vec{n} \\ \vec{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1\vec{x}_u + \Gamma_{12}^2\vec{x}_v + \alpha_2\vec{n} \\ \vec{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1\vec{x}_u + \Gamma_{22}^2\vec{x}_v + \alpha_3\vec{n}\end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

Bunlara GAUSS formülleri denir. Γ_{ij}^{k} katsayıları da 2-nci türden CHRISTOFFEL sembolleri adını alırlar.

Önce her üç eşitliği skaler olarak $\vec{n}$ ile çarptığımızda (3.28) formülleri

$$\langle \vec{x}_{uu}, \vec{n} \rangle = \Gamma_{11}^{1} \underbrace{\langle \vec{x}_{u}, \vec{n} \rangle}_{0} + \Gamma_{11}^{2} \underbrace{\langle \vec{x}_{v}, \vec{n} \rangle}_{0} + \alpha_1 \underbrace{\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle}_{1}$$

$$\langle \vec{x}_{uu}, \vec{n} \rangle = \alpha_1$$

$$L = \alpha_1$$

$$\langle \vec{x}_{uv}, \vec{n} \rangle = \Gamma_{12}^{1} \langle \vec{x}_{u}, \vec{n} \rangle + \Gamma_{12}^{2} \langle \vec{x}_{v}, \vec{n} \rangle + \alpha_2 \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle$$

$$\langle \vec{x}_{uv}, \vec{n} \rangle = \alpha_2$$

$$M = \alpha_2$$

$$\langle \vec{x}_{vv}, \vec{n} \rangle = \Gamma_{22}^{1} \langle \vec{x}_{u}, \vec{n} \rangle + \Gamma_{22}^{2} \langle \vec{x}_{v}, \vec{n} \rangle + \alpha_3 \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle$$

$$\langle \vec{x}_{vv}, \vec{n} \rangle = \alpha_3$$

$$N = \alpha_3$$

$$\alpha_1 = L, \qquad \alpha_2 = M, \qquad \alpha_3 = N \tag{4.8}$$

verir.

Öte yandan

$$F = \langle \vec{x}_u, \vec{x}_v \rangle$$

nin u ve v ye göre kısmi türevlerinden

$$\left. \begin{aligned} F_u &= \langle \vec{x}_{uu}, \vec{x}_v \rangle + \underbrace{\langle \vec{x}_u, \vec{x}_{uv} \rangle}_{\frac{1}{2}E_v} = \langle \vec{x}_v, \vec{x}_{uu} \rangle + \frac{1}{2} E_v \\ F_v &= \underbrace{\langle \vec{x}_{uv}, \vec{x}_v \rangle}_{\frac{1}{2}G_u} + \langle \vec{x}_u, \vec{x}_{vv} \rangle = \langle \vec{x}_u, \vec{x}_{vv} \rangle + \frac{1}{2} G_u \end{aligned} \right\} \tag{4.9}$$

veya

$$\left. \begin{aligned} \langle \vec{x}_v, \vec{x}_{uu} \rangle &= F_u - \frac{1}{2} E_v \\ \langle \vec{x}_u, \vec{x}_{vv} \rangle &= F_v - \frac{1}{2} G_u \end{aligned} \right\} \tag{4.10}$$

çıkar. (Şemin 1987)

Açıklama 3

$$\left\langle \vec{x}_u , \vec{x}_u \right\rangle = \vec{x}_{uu} = E \Rightarrow E_v = \left\langle \vec{x}_{uv} , \vec{x}_u \right\rangle + \left\langle \vec{x}_u , \vec{x}_{uv} \right\rangle \qquad E_u = \left\langle \vec{x}_{uu} , \vec{x}_u \right\rangle + \left\langle \vec{x}_u , \vec{x}_{uu} \right\rangle$$

$$E_v = 2\left\langle \vec{x}_u , \vec{x}_{uv} \right\rangle \qquad E_u = 2\left\langle \vec{x}_{uu} , \vec{x}_u \right\rangle$$

$$\left\langle \vec{x}_u , \vec{x}_{uv} \right\rangle = \frac{1}{2} E_v \qquad \frac{1}{2} E_u = \left\langle \vec{x}_{uu} , \vec{x}_u \right\rangle$$

$$\left\langle \vec{x}_v , \vec{x}_v \right\rangle = \vec{x}_{vv} = G \Rightarrow G_u = \left\langle \vec{x}_{vu} , \vec{x}_v \right\rangle + \left\langle \vec{x}_v , \vec{x}_{vu} \right\rangle \qquad G_v = \left\langle \vec{x}_{vv} , \vec{x}_v \right\rangle + \left\langle \vec{x}_v , \vec{x}_{vv} \right\rangle$$

$$E_v = 2\left\langle \vec{x}_{vu} , \vec{x}_v \right\rangle \qquad G_v = 2\left\langle \vec{x}_{vv} , \vec{x}_v \right\rangle$$

$$\left\langle \vec{x}_{vu} , \vec{x}_v \right\rangle = \frac{1}{2} G_u \qquad \frac{1}{2} G_v = \left\langle \vec{x}_{vv} , \vec{x}_v \right\rangle$$

Buna göre (4.7) denklemlerinin $\vec{x}_u$ ve $\vec{x}_v$ ile skaler olarak çarpımları sonucunda da (4.10) yardımı ile

$$\underbrace{\left\langle \vec{x}_{uu} , \vec{x}_u \right\rangle}_{\frac{1}{2}E_u} = \Gamma_{11}^{1} \underbrace{\left\langle \vec{x}_u , \vec{x}_u \right\rangle}_{E} + \Gamma_{11}^{2} \underbrace{\left\langle \vec{x}_v , \vec{x}_u \right\rangle}_{F} + \alpha_1 \underbrace{\left\langle \vec{n} , \vec{x}_u \right\rangle}_{0}$$

$$\frac{1}{2} E_u = \Gamma_{11}^{1} E + \Gamma_{11}^{2} F$$

$$\underbrace{\left\langle \vec{x}_{uu} , \vec{x}_v \right\rangle}_{F_u - \frac{1}{2}E_v} = \Gamma_{11}^{1} \underbrace{\left\langle \vec{x}_u , \vec{x}_v \right\rangle}_{F} + \Gamma_{11}^{2} \underbrace{\left\langle \vec{x}_v , \vec{x}_v \right\rangle}_{G} + \alpha_1 \underbrace{\left\langle \vec{n} , \vec{x}_v \right\rangle}_{0}$$

$$F_u - \frac{1}{2} E_v = \Gamma_{11}^{1} F + \Gamma_{11}^{2} G$$

$$\underbrace{\left\langle \vec{x}_{uv} , \vec{x}_u \right\rangle}_{\frac{1}{2}E_v} = \Gamma_{12}^{1} \underbrace{\left\langle \vec{x}_u , \vec{x}_u \right\rangle}_{E} + \Gamma_{12}^{2} \underbrace{\left\langle \vec{x}_v , \vec{x}_u \right\rangle}_{F} + \alpha_2 \underbrace{\left\langle \vec{n} , \vec{x}_u \right\rangle}_{0}$$

$$\frac{1}{2} E_v = \Gamma_{12}^{1} E + \Gamma_{12}^{2} F$$

$$\underbrace{\left\langle \vec{x}_{uv}, \vec{x}_v \right\rangle}_{\frac{1}{2}G_u} = \Gamma_{12}^1 \underbrace{\left\langle \vec{x}_u, \vec{x}_v \right\rangle}_{F} + \Gamma_{12}^2 \underbrace{\left\langle \vec{x}_v, \vec{x}_v \right\rangle}_{G} + \alpha_2 \underbrace{\left\langle \vec{n}, \vec{x}_v \right\rangle}_{0}$$

$$\frac{1}{2}G_u = \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G$$

$$\underbrace{\left\langle \vec{x}_{vv}, \vec{x}_u \right\rangle}_{F_v - \frac{1}{2}G_u} = \Gamma_{22}^1 \underbrace{\left\langle \vec{x}_u, \vec{x}_u \right\rangle}_{E} + \Gamma_{22}^2 \underbrace{\left\langle \vec{x}_v, \vec{x}_u \right\rangle}_{F} + \alpha_3 \underbrace{\left\langle \vec{n}, \vec{x}_u \right\rangle}_{0}$$

$$F_v - \frac{1}{2}G_u = \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F$$

$$\underbrace{\left\langle \vec{x}_{vv}, \vec{x}_v \right\rangle}_{\frac{1}{2}G_v} = \Gamma_{22}^1 \underbrace{\left\langle \vec{x}_u, \vec{x}_v \right\rangle}_{F} + \Gamma_{22}^2 \underbrace{\left\langle \vec{x}_v, \vec{x}_v \right\rangle}_{G} + \alpha_3 \underbrace{\left\langle \vec{n}, \vec{x}_v \right\rangle}_{0}$$

$$\frac{1}{2}G_v = \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G$$

Sonuç olarak

$$E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}E_u$$

$$E\Gamma_{12}^1 + F\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}E_v$$

$$E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2 = F_v - \frac{1}{2}G_u$$

$$F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = F_u - \frac{1}{2}E_v$$

$$F\Gamma_{12}^1 + G\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}G_u$$

$$F\Gamma_{22}^1 + G\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}G_v$$

bulunur. Buradan da çözüm yapılarak

$$E\Gamma_{11}^{1} + F\Gamma_{11}^{2} = \frac{1}{2}E_u$$

$$\underline{F\Gamma_{11}^{1} + G\Gamma_{11}^{2} = F_u - \frac{1}{2}E_v}$$

$$EG\Gamma_{11}^{1} + FG\Gamma_{11}^{2} = \frac{1}{2}GE_u$$

$$\underline{-F^2\Gamma_{11}^{1} - FG\Gamma_{11}^{2} = -FF_u + \frac{1}{2}FE_v}$$

$$\underbrace{(EG - F^2)}_{H^2}\Gamma_{11}^{1} = -FF_u + \frac{1}{2}GE_u + \frac{1}{2}FE_v$$

$$2H^2\Gamma_{11}^{1} = -2FF_u + FE_v + GE_u$$

$$E\Gamma_{12}^{1} + F\Gamma_{12}^{2} = \frac{1}{2}E_v$$

$$\underline{F\Gamma_{12}^{1} + G\Gamma_{12}^{2} = \frac{1}{2}G_u}$$

$$GE\Gamma_{12}^{1} + GF\Gamma_{12}^{2} = \frac{1}{2}GE_v$$

$$\underline{-F^2\Gamma_{12}^{1} - FG\Gamma_{12}^{2} = -\frac{1}{2}FG_u}$$

$$\underbrace{(GE - F^2)}_{H^2}\Gamma_{12}^{1} = \frac{1}{2}GE_v - \frac{1}{2}FG_u$$

$$2H^2\Gamma_{12}^{1} = GE_v - FG_u$$

$$E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2 = F_v - \frac{1}{2}G_u$$

$$F\Gamma_{22}^1 + G\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}G_v$$

$$GE\Gamma_{22}^1 + GF\Gamma_{22}^2 = GF_v - \frac{1}{2}GG_u$$

$$-F^2\Gamma_{22}^1 - FG\Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{2}FG_v$$

$$\underbrace{(EG - F^2)}_{H^2}\Gamma_{22}^1 = GF_v - \frac{1}{2}GG_u - \frac{1}{2}FG_v$$

$$2H^2\Gamma_{22}^1 = 2GF_v - GG_u - FG_v$$

$$E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}E_u$$

$$F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = F_u - \frac{1}{2}E_v$$

$$-FE\Gamma_{11}^1 - F^2\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2}FE_u$$

$$EF\Gamma_{11}^1 + EG\Gamma_{11}^2 = EF_u - \frac{1}{2}EE_v$$

$$\underbrace{(EG - F^2)}_{H^2}\Gamma_{11}^2 = EF_u - \frac{1}{2}EE_v - \frac{1}{2}FE_u$$

$$2H^2\Gamma_{11}^2 = 2EF_u - EE_v - FE_u$$

$$E\Gamma_{12}^1 + F\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}E_v$$

$$\underline{F\Gamma_{12}^1 + G\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}G_u}$$

$$-FE\Gamma_{12}^1 - F^2\Gamma_{12}^2 = -\frac{1}{2}FE_v$$

$$\underline{EF\Gamma_{12}^1 + EG\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}EG_u}$$

$$\underbrace{(EG - F^2)}_{H^2}\Gamma_{12}^2 = -\frac{1}{2}FE_v + \frac{1}{2}EG_u$$

$$2H^2\Gamma_{12}^2 = EG_u - FE_v$$

$$E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2 = F_v - \frac{1}{2}G_u$$

$$\underline{F\Gamma_{22}^1 + G\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}G_v}$$

$$-FE\Gamma_{22}^1 - F^2\Gamma_{22}^2 = -FF_v + \frac{1}{2}FG_u$$

$$\underline{EF\Gamma_{22}^1 + EG\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}EG_v}$$

$$\underbrace{(EG - F^2)}_{H^2}\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}EG_v - FF_v + \frac{1}{2}FG_u$$

$$2H^2\Gamma_{22}^2 = EG_v - 2FF_v + FG_u$$

$$\left.\begin{aligned}
2H^2\Gamma_{11}^1 &= -2FF_u + FE_v + GE_u \\
2H^2\Gamma_{12}^1 &= GE_v - FG_u \\
2H^2\Gamma_{22}^1 &= 2GF_v - GG_u - FG_v \\
2H^2\Gamma_{11}^2 &= 2EF_u - EE_v - FE_u \\
2H^2\Gamma_{12}^2 &= EG_u - FE_v \\
2H^2\Gamma_{22}^2 &= EG_v - 2FF_v + FG_u
\end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

elde edilir.

Eğer koordinat çizgilerinin yüzey üzerinde oluşturdukları parametreli eğrilerinin ailesi dikse $F \equiv 0$ özdeşliği, (4.7) formüllerini (4.11) yardımıyla

$$\left.\begin{aligned} \vec{x}_{uu} &= \frac{E_u}{2E}\vec{x}_u - \frac{E_v}{2G}\vec{x}_v + L\vec{n} \\ \vec{x}_{uv} &= \frac{E_v}{2E}\vec{x}_u + \frac{G_u}{2G}\vec{x}_v + M\vec{n} \\ \vec{x}_{vv} &= -\frac{G_u}{2E}\vec{x}_u + \frac{G_v}{2G}\vec{x}_v + N\vec{n} \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

biçimine getirir.

$F \equiv 0$ için

$$2H^2\Gamma_{11}^1 = GE_u$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{G}{2\underbrace{H^2}_{EG-\underbrace{F^2}_{0}}}E_u$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{G}{2EG}E_u$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E}$$

$$2H^2\Gamma_{12}^1 = GE_v$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{G}{2H^2}E_v$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{G}{2EG}E_v$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E}$$

$$2H^2\Gamma_{22}^1 = -GG_u$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{G}{2H^2}G_u$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{G}{2EG}G_u$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{G_u}{2E}$$

$$2H^2\Gamma_{11}^2 = -EE_v$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{E}{2H^2}E_v$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{E}{2EG}E_v$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v}{2G}$$

$$2H^2\Gamma_{12}^2 = EG_u$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{E}{2H^2}G_u$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{E}{2EG}G_u$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}$$

$$2H^2\Gamma_{22}^2 = EG_v$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{E}{2H^2}G_v$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{E}{2EG}G_v$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}$$

Bu değerler (4.7) de yerine yazıldığında

$$\left.\begin{aligned} \vec{x}_{uu} &= \frac{E_u}{2E}\vec{x}_u - \frac{E_v}{2G}\vec{x}_v + L\vec{n} \\ \vec{x}_{uv} &= \frac{E_v}{2E}\vec{x}_u + \frac{G_u}{2G}\vec{x}_v + M\vec{n} \\ \vec{x}_{vv} &= -\frac{G_u}{2E}\vec{x}_u + \frac{G_v}{2G}\vec{x}_v + N\vec{n} \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

biçimine getirir. (Şemin 1987)

4.3 CODAZZI -MAINARDI Formülleri: İntegre Edilebilme Koşulları

GAUSS formüllerinin bir $P(u,v)$ düzgün noktasında uygulandığı yüzey eğer 3-ncü mertebedense, aynı noktada yer vektörünün

$$(\vec{x}_{uu})_v = (\vec{x}_{uv})_u \ , \ (\vec{x}_{vv})_u = (\vec{x}_{uv})_v \tag{4.13}$$

özdeşliklerini gerçekleştirmesi gerekir. O halde (4.7) formülleri kullanılacak olursa

$$(\Gamma_{11}^1\vec{x}_u + \Gamma_{11}^2\vec{x}_v + L\vec{n})_v = (\Gamma_{12}^1\vec{x}_u + \Gamma_{12}^2\vec{x}_v + M\vec{n})_u \tag{4.14}$$

$$(\Gamma_{22}^1\vec{x}_u + \Gamma_{22}^2\vec{x}_v + N\vec{n})_u = (\Gamma_{12}^1\vec{x}_u + \Gamma_{12}^2\vec{x}_v + M\vec{n})_v \tag{4.15}$$

(4.14) den

$$\begin{aligned}&(\Gamma_{11}^1)_v\vec{x}_u + \Gamma_{11}^1\vec{x}_{uv} + (\Gamma_{11}^2)_v\vec{x}_v + \Gamma_{11}^2\vec{x}_{vv} + L_v\vec{n} + L\vec{n}_v\\ &= (\Gamma_{12}^1)_u\vec{x}_u + \Gamma_{12}^1\vec{x}_{uu} + (\Gamma_{12}^2)_u\vec{x}_v + \Gamma_{12}^2\vec{x}_{vu} + M_u\vec{n} + M\vec{n}_u\end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned}&\left[(\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{12}^1)_u\right]\vec{x}_u + \left[(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u\right]\vec{x}_v + (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2)\vec{x}_{uv}\\ &+(\Gamma_{11}^2)\vec{x}_{vv} - \Gamma_{12}^1\vec{x}_{uu} + (L_v - M_u)\vec{n} + \left(L\vec{n}_v - M\vec{n}_u\right) = 0\end{aligned}$$

olur. GAUSS ve Weingarten formüllerinden yararlanarak,

$$\begin{aligned}&\left[(\Gamma_{11}^1)_v - (\Gamma_{12}^1)_u\right]\vec{x}_u + \left[(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u\right]\vec{x}_v\\ &+(\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2)(\Gamma_{12}^1\vec{x}_u + \Gamma_{12}^2\vec{x}_v + M\vec{n}) + (\Gamma_{11}^2)(\Gamma_{22}^1\vec{x}_u + \Gamma_{22}^2\vec{x}_v + \mathrm{N}\vec{n})\\ &-\Gamma_{12}^1(\Gamma_{11}^1\vec{x}_u + \Gamma_{11}^2\vec{x}_v + L\vec{n}) + \left(L_v - M_u\right)\vec{n} + (L\vec{n}_v - M\vec{n}_u) = 0\end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned}&\left[\left(\Gamma_{11}^1\right)_v - \left(\Gamma_{12}^1\right)_u + \cancel{\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^1} - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 - \cancel{\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^1}\right]\vec{x}_u\\ &+\left[\left(\Gamma_{11}^2\right)_v - \left(\Gamma_{12}^2\right)_u + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2\right]\vec{x}_v\\ &+\left[\left(\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2\right)\mathrm{M} + \Gamma_{11}^2\mathrm{N} - \Gamma_{12}^1\mathrm{L} + \left(\mathrm{L}_v - \mathrm{M}_u\right)\right]\vec{n}\\ &+\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{H}^2}\left[\left(\mathrm{FN} - \mathrm{GM}\right)\vec{x}_u + \left(\mathrm{FM} - \mathrm{EN}\right)\vec{x}_v\right]\\ &-\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{H}^2}\left[\left(\mathrm{FM} - \mathrm{GL}\right)\vec{x}_u + \left(\mathrm{FL} - \mathrm{EM}\right)\vec{x}_v\right] = 0\end{aligned}$$

ya da

$$\left[\left(\Gamma_{11}^{1}\right)_v-\left(\Gamma_{12}^{1}\right)_u+\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1}-\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{1}+\frac{F}{H^2}(LN-M^2)\right]\vec{x}_u$$

$$+\left[\left(\Gamma_{11}^{2}\right)_v-\left(\Gamma_{12}^{2}\right)_u+\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{12}^{2}-\left(\Gamma_{12}^{2}\right)^2+\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2}-\Gamma_{12}^{1}\Gamma_{11}^{2}-\frac{E}{H^2}\left(LN-M^2\right)\right]\vec{x}_v$$

$$+\left[\left(\Gamma_{11}^{1}-\Gamma_{12}^{2}\right)M+\Gamma_{11}^{2}N-\Gamma_{12}^{1}L+\left(L_v-M_u\right)\right]\vec{n}=0$$

olur $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ ve $\vec{n}$ nin katsayısını A_1, A_2, A_3 ile gösterirsek;

$$A_1=\left(\Gamma_{11}^{1}\right)_v-\left(\Gamma_{12}^{1}\right)_u+\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1}-\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{1}+\frac{F}{H^2}\left(LN-M^2\right)$$

$$A_2=\left(\Gamma_{11}^{2}\right)_v-\left(\Gamma_{12}^{2}\right)_u+\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{12}^{2}-\left(\Gamma_{12}^{2}\right)^2+\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2}-\Gamma_{12}^{1}\Gamma_{11}^{2}-\frac{E}{H^2}\left(LN-M^2\right)$$

$$A_3=\left[\left(\Gamma_{11}^{1}-\Gamma_{12}^{2}\right)M+\Gamma_{11}^{2}N-\Gamma_{12}^{1}L+\left(L_v-M_u\right)\right]$$

olup yukarıdaki vektörel denklem

$$A_1\vec{x}_u+A_2\vec{x}_v+A_3\vec{n}=0$$

şeklinde yazılır ki $\{\vec{x}_u, \vec{x}_v, \vec{n}\}$ lineer bağımsız olduğundan, $A_1=A_2=A_3=0$ dır. Böylece

$$\frac{F\left(LN-M^2\right)}{H^2}=\left(\Gamma_{12}^{1}\right)_u-\left(\Gamma_{11}^{1}\right)_v+\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{1}-\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1} \tag{4.16}$$

$$\frac{E\left(LN-M^2\right)}{H^2}=\left(\Gamma_{11}^{2}\right)_v-\left(\Gamma_{12}^{2}\right)_u+\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{12}^{2}+\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2}-\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{12}^{1}-\left(\Gamma_{12}^{2}\right)^2 \tag{4.17}$$

$$L_v-M_u=\left(\Gamma_{12}^{2}-\Gamma_{11}^{1}\right)M+\Gamma_{12}^{1}L-\Gamma_{11}^{2}N \tag{4.18}$$

olur. Şimdi aynı işlemler (4.15) için yapılırsa;

$$\left(\Gamma_{22}^{1}\right)_u.\vec{x}_u+\Gamma_{22}^{1}.\vec{x}_{uu}+\left(\Gamma_{22}^{2}\right)_u.\vec{x}_v+\Gamma_{22}^{2}.\vec{x}_{vu}+N_u.\vec{n}+N.\vec{n}_u$$

$$=\left(\Gamma_{12}^{1}\right)_v.\vec{x}_u+\left(\Gamma_{12}^{1}\right).\vec{x}_{uv}+\left(\Gamma_{12}^{2}\right)_v.\vec{x}_v+\left(\Gamma_{12}^{2}\right).\vec{x}_{vv}+M_v.\vec{n}+M.\vec{n}_v$$

ya da

$$\left[\left(\Gamma_{22}^{1}\right)_u-\left(\Gamma_{12}^{1}\right)_v\right]\vec{x}_u+\left[\left(\Gamma_{22}^{2}\right)_u-\left(\Gamma_{12}^{2}\right)_v\right]\vec{x}_v+\left(N_u-M_v\right)\vec{n}$$

$$+\left[\Gamma_{22}^{2}-\Gamma_{12}^{1}\right]\underbrace{\left(\Gamma_{12}^{1}x_{u}+\Gamma_{12}^{2}x_{v}Mn\right)}_{x_{uv}}+\left(N\vec{n}_{u}-M\vec{n}_{v}\right)$$

$$+\Gamma_{22}^{1}\underbrace{\left(\Gamma_{11}^{1}x_{u}+\Gamma_{11}^{2}x_{v}+Ln\right)}_{x_{uu}}-\left(\Gamma_{12}^{2}\right)\underbrace{\left(\Gamma_{22}^{1}\vec{x}_{u}+\Gamma_{22}^{2}\vec{x}_{v}+N\vec{n}\right)}_{x_{vv}}=0$$

$$\left[\left(\Gamma_{22}^{1}\right)_{u}-\left(\Gamma_{12}^{1}\right)_{v}+\Gamma_{12}^{1}\Gamma_{22}^{2}-\Gamma_{12}^{1}\Gamma_{12}^{1}+\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{22}^{1}-\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{1}\right]\vec{x}_{u}$$

$$+\left[\left(\Gamma_{22}^{2}\right)_{u}-\left(\Gamma_{12}^{2}\right)_{v}+\cancel{\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{22}^{2}}-\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{1}+\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1}-\cancel{\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{22}^{2}}\right]\vec{x}_{v}$$

$$+\left[N_{u}-M_{v}+\left(\Gamma_{22}^{2}-\Gamma_{12}^{1}\right)M+\Gamma_{22}^{1}L-\Gamma_{12}^{2}N\right]\vec{n}$$

$$+\frac{N}{H^{2}}\underbrace{\left((FM-GL)\vec{x}_{u}+(FL-EM)\vec{x}_{v}\right)}_{n_{u}}$$

$$-\frac{M}{H^{2}}\underbrace{\left((FN-GM)x_{u}+(FM-EN)\vec{x}_{v}\right)}_{\vec{n}_{v}}=0$$

ya da

$$\left[\left(\Gamma_{11}^{1}\right)_{u}-\left(\Gamma_{12}^{1}\right)_{v}+\Gamma_{12}^{1}\Gamma_{22}^{2}-\left(\Gamma_{12}^{1}\right)^{2}+\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{22}^{2}-\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{22}^{1}-\frac{G}{H^{2}}\left(LN-M^{2}\right)\right]\vec{x}_{u}$$

$$+\left[\left(\Gamma_{22}^{2}\right)_{u}-\left(\Gamma_{12}^{2}\right)_{v}-\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{1}+\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1}+\frac{F}{H^{2}}\left(LN-M^{2}\right)\right]\vec{x}_{v}$$

$$+\left[N_{u}-M_{v}+\left(\Gamma_{22}^{2}-\Gamma_{12}^{1}\right)M+\Gamma_{22}^{1}L-\Gamma_{12}^{2}N\right]\vec{n}=0$$

olur. $\vec{x}_{u},\vec{x}_{v}$ ve $\vec{n}$ vektörlerinin katsayıları B_1, B_2, B_3 ile gösterilirse denklem;

$$B_{1}\vec{x}_{u}+B_{2}\vec{x}_{v}+B_{3}\vec{n}=0$$

şeklinde yazılıp B_1, B_2, B_3 katsayıları sıfıra eşitlenebilir. Böylece de

$$\frac{G}{H^{2}}\left(LN-M^{2}\right)=\left(\Gamma_{22}^{1}\right)_{u}-\left(\Gamma_{12}^{1}\right)_{v}+\Gamma_{12}^{1}\Gamma_{22}^{2}-\left(\Gamma_{12}^{1}\right)^{2}+\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1}-\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{22}^{1} \tag{4.19}$$

$$\frac{F}{H^{2}}\left(LN-M^{2}\right)=\left(\Gamma_{12}^{2}\right)_{v}-\left(\Gamma_{22}^{2}\right)_{u}+\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{1}-\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1} \tag{4.20}$$

$$M_v\text{-}N_u=\left(\Gamma_{22}^{2}-\Gamma_{12}^{1}\right)M+\Gamma_{22}^{1}L-\Gamma_{12}^{2}N \tag{4.21}$$

denklemleri bulunur.

(4.18) ve (4.21) denklemlerine Codazzi-Mainardi formülleri veya integre edilebilme koşulları denilir.

a) Yüzey üzerinde F=0 ise;

$$\Gamma_{11}^{1}=\frac{E_{vu}}{2E},\quad \Gamma_{11}^{2}=-\frac{E_v}{2G},\quad \Gamma_{12}^{1}=\frac{E_v}{2E},\quad \Gamma_{22}^{1}=-\frac{G_u}{2E},\quad \Gamma_{12}^{2}=\frac{G_u}{2G},\ \text{ve}\ \Gamma_{22}^{2}=\frac{G_v}{2G}$$

olduğundan (4.18) ve (4.21) eşitlikleri yeniden yazılarak;

$$\left.\begin{aligned} L_v+\frac{E_u}{2E}M-\frac{E_v}{2G}N&=M_u+\frac{E_v}{2E}L+\frac{G_u}{2G}M\\ N_u-\frac{G_u}{2E}L+\frac{G_v}{2G}M&=M_v+\frac{E_v}{2E}M+\frac{G_u}{2G}N \end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

olur.

b) Üstelik yüzey üzerinde M=0 ise, (4.22) den

$$\left.\begin{aligned} L_v-\frac{E_v}{2G}N&=\frac{E_v}{2E}L\\ N_u-\frac{G_u}{2E}L&=\frac{G_u}{2G}N \end{aligned}\right\} \tag{4.23}$$

çıkar.

c) Eğer yüzey sıfır uzunlukta eğrilere -minimal eğrilere- nispet edilirse, yüzey üzerinde özdeş olarak E=0, G=0 olacağından;

$$\Gamma_{11}^{1}=\frac{F_{uv}}{F}=\left(\lg|F|\right)_u$$

$$\Gamma_{22}^{2}=\frac{F_u}{F}=\left(\lg|F|\right)_v\ ,\quad \Gamma_{11}^{2}=\Gamma_{12}^{1}=\Gamma_{12}^{2}=\Gamma_{22}^{1}=0$$

olacağından, (4.7) formülleri

$$\left.\begin{aligned}\vec{x}_{uu} &= \left(\lg|F|\right)_u \vec{x}_u + L\vec{n}\\ \vec{x}_{uv} &= M\vec{n}\\ \vec{x}_{vv} &= \left(\lg|F|\right)_v \vec{x}_v + N\vec{n}\end{aligned}\right\} \tag{4.24}$$

biçiminde olur.

Codazzi-Mainardi formülleri ise;

$$\left.\begin{aligned}L_v - M_u &= -M\left(\lg|F|\right)_u\\ M_v - N_u &= M\left(\lg|F|\right)_v\end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

olur. Buradan da

$$\left(\frac{M_u - L_v}{M}\right)_v = \left(\frac{M_v - N_u}{M}\right)_u \tag{4.26}$$

sonucu çıkar. (Şemin 1987)

4.4 Yüzeyler Teorisinin Temel Teoremi: Gauss Karakteristik Denklemi

(3.7) deki $\langle \vec{x}_u, \vec{x}_v \rangle = F$ eşitliğinin önce u ya sonra v ye göre kısmi türevleri alınırsa;

$$\langle \vec{x}_{uu}, \vec{x}_v \rangle + \langle \vec{x}_u, \vec{x}_{uv} \rangle = F_u$$

$$\langle \vec{x}_{uu}, \vec{x}_v \rangle + \frac{E_v}{2} = F_u$$

$$\langle \vec{x}_{uuv}, \vec{x}_v \rangle + \langle \vec{x}_{uu}, \vec{x}_{vv} \rangle + \frac{E_{vv}}{2} = F_{uv} \tag{4.27}$$

bulunur. Yine (3.7) deki $\langle \vec{x}_v, \vec{x}_v \rangle = G$ eşitliğinin u ya göre birinci ve ikinci türevleri alınırsa;

$$\langle \vec{x}_{uv}, \vec{x}_v \rangle + \langle \vec{x}_v, \vec{x}_{uv} \rangle = G_u$$

$$2\langle \vec{x}_{uv}, \vec{x}_v \rangle = G_u$$

$$\langle \vec{x}_{uv}, \vec{x}_v \rangle = \frac{G_u}{2}$$

$$\langle \vec{x}_{uuv}, \vec{x}_v \rangle + \langle \vec{x}_{uv}, \vec{x}_{uv} \rangle = \frac{G_{uu}}{2} \tag{4.28}$$

olur. (4.27) ve (4.28) eşitsizlikleri taraf tarafa çıkartılarak

$$F_{uv}-\frac{G_{uu}}{2}=\cancel{\left\langle \vec{x}_{uuv},\vec{x}_{v}\right\rangle}+\left\langle \vec{x}_{uu},\vec{x}_{vv}\right\rangle+\frac{E_{vv}}{2}$$

$$-\cancel{\left\langle \vec{x}_{uuv},\vec{x}_{v}\right\rangle}-\left\langle \vec{x}_{uv},\vec{x}_{uv}\right\rangle$$

ya da

$$\left\langle \vec{x}_{uu},\vec{x}_{vv}\right\rangle-\left\langle \vec{x}_{uv},\vec{x}_{uv}\right\rangle=\frac{2F_{uv}-G_{uu}-E_{vv}}{2} \tag{4.29}$$

elde edilir. (Şemin 1987)

Teorem 4.1 Bir P düzgün noktası yakınlarında sınıfı ≥3 olan bir yüzeyin ikinci temel kaudratik formunun

$$LN-M^2$$

diskriminantı, birinci temel kaudratik formun katsayıları ve bunların birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevlerinden bazıları yardımıyla ifade edilebilir. (Şemin 1987)

İspat (4.7) ve (4.8) eşitsizliklerinden

$$\left\langle \vec{x}_{uu},\vec{x}_{vv}\right\rangle-\left\langle \vec{x}_{uv},\vec{x}_{uv}\right\rangle=\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{22}^{1}\left\langle \vec{x}_{u},\vec{x}_{u}\right\rangle+\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{22}^{2}\left\langle \vec{x}_{u},\vec{x}_{v}\right\rangle$$

$$+\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1}\left\langle \vec{x}_{v},\vec{x}_{u}\right\rangle+\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2}\left\langle \vec{x}_{v},\vec{x}_{v}\right\rangle+LN\left\langle \vec{n},\vec{n}\right\rangle$$

$$-\left(\Gamma_{12}^{1}\right)^{2}\left\langle \vec{x}_{u},\vec{x}_{u}\right\rangle-\left(\Gamma_{12}^{2}\right)^{2}\left\langle \vec{x}_{v},\vec{x}_{v}\right\rangle+M^{2}\left\langle \vec{n},\vec{n}\right\rangle$$

$$-2\Gamma_{12}^{1}\left\langle \vec{x}_{u},\vec{x}_{v}\right\rangle$$

ya da

$$\left\langle \vec{x}_{uu},\vec{x}_{vv}\right\rangle-\left\langle \vec{x}_{uv},\vec{x}_{uv}\right\rangle=\left(\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{22}^{1}-\left(\Gamma_{12}^{1}\right)^{2}\right)\left\langle \vec{x}_{u},\vec{x}_{u}\right\rangle$$

$$+\left(\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2}-\left(\Gamma_{12}^{2}\right)^{2}\right)\left\langle \vec{x}_{v},\vec{x}_{v}\right\rangle+\left(\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{22}^{2}+\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1}-2\Gamma_{12}^{1}\right)\left\langle \vec{x}_{u},\vec{x}_{v}\right\rangle$$

$$+\left(LN-M^{2}\right)\left\langle \vec{n},\vec{n}\right\rangle$$

olup (3.7) kullanılarak

$$\left\langle \vec{x}_{uu},\vec{x}_{vv}\right\rangle-\left\langle \vec{x}_{uv},\vec{x}_{uv}\right\rangle=\left(\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{22}^{2}-\left(\Gamma_{12}^{1}\right)^{2}\right).E$$

$$+\left(\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2}-\left(\Gamma_{12}^{2}\right)^{2}\right)G+\left(\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{22}^{2}+\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1}-2\Gamma_{12}^{1}\right)F$$

$$+\left(LN-M^{2}\right)$$

yazılabilir. (4.29) nedeniyle de

$$\left.\begin{aligned} LN-M^{2}=\frac{2F_{uv}-G_{uu}-E_{vv}}{2}&+\left[\left(\Gamma_{12}^{1}\right)^{2}-\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{22}^{1}\right]E \\ &+\left[\left(\Gamma_{12}^{2}\right)^{2}-\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2}\right]G+\left[2\Gamma_{12}^{1}-\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{22}^{2}-\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1}\right]F \end{aligned}\right\} \tag{4.30}$$

çıkar. Bu son eşitlik Gauss karakteristik denklemidir. (Şemin 1987)

5. LORENTZ UZAYINDA GAUSS FORMÜLLERİ

5.1 Birinci ve İkinci Temel Kuadratik Formlar

L^3 de time-like ya da space-like olan bir M yüzeyi

$\vec{x} = \vec{x}(u, v)$

vektörel fonksiyonu ile verilmiş olsun. Eğer bir C eğrisi (veya bunun bir parçası) tamamen bu yüzey üzerinde ise, yüzeyin bu eğri üzerinde gezinen bir P noktasının u, v parametreleri, eğri boyunca aynı bir t parametresinin

u=u(t), *v=v(t),* $a \le t \le b$

biçiminde fonksiyonlarıdır ve C nin t parametresine bağlı vektörel denklemi de

$$\vec{x} = \vec{x}\big(u(t), v(t)\big) \tag{5.1}$$

olur. Eğer C eğrisi 1-nci sınıftan ise, yüzey parçası da böyle sayıldığından vektörel fonksiyonu da 1-nci sınıftandır. C eğrisinin her P(u,v) noktasındaki teğeti

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial u}.\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}.\frac{dv}{dt} \\ &= x_u.\frac{du}{dt} + x_v.\frac{dv}{dt} \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

dir ve bu noktada $\vec{x}_u \times \vec{x}_v \neq 0$ dır.

(5.2) de her iki taraf dt ile çarpılırsa

$$d\vec{x} = \vec{x}_u du + \vec{x}_v dv \tag{5.3}$$

vektörü elde edilir.

C eğrisinin P noktasındaki lineer elemanı

$$ds^2 = d\vec{x}^2 = \big(x'(t)\big)^2 dt^2$$

olduğundan (5.2) den

$$ds^2 = d\vec{x}^2 = \langle \vec{x}_u, \vec{x}_u \rangle du^2 + 2\langle \vec{x}_u, \vec{x}_v \rangle dudv + \langle \vec{x}_v, \vec{x}_v \rangle dv^2 \tag{5.4}$$

bulunur.

ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, ε_5 işaret fonksiyonları, $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ M deki teğet vektörler ve $\vec{n}$ de M deki birim normal vektörü göstermek üzere aşağıdaki eşitlikleri tanımlayalım:

$$\left.\begin{array}{l} \langle \vec{n}_u, \vec{n}_u \rangle = \varepsilon_1 \left\| \vec{n}_u \right\|^2 \\ \langle \vec{n}_v, \vec{n}_v \rangle = \varepsilon_2 \left\| \vec{n}_v \right\|^2 \\ \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = \varepsilon_5 \\ \langle \vec{x}_u, \vec{x}_u \rangle = \varepsilon_3 \left\| \vec{x}_u \right\|^2 = \varepsilon_3 E \\ \langle \vec{x}_v, \vec{x}_v \rangle = \varepsilon_4 \left\| \vec{x}_v \right\|^2 = \varepsilon_4 G \\ \langle \vec{x}_u, \vec{x}_v \rangle = \dfrac{F}{\sqrt{\varepsilon_3 \varepsilon_4}} \end{array}\right\} \tag{5.5}$$

$$H^2 = \varepsilon_3 \varepsilon_4 EG - \frac{F^2}{\varepsilon_3 \varepsilon_4} \tag{5.6}$$

Ayrıca $\langle \vec{n}, \vec{x}_u \rangle = 0$ ve $\langle \vec{n}, \vec{x}_v \rangle = 0$ olduğundan u ve v ye göre türevleri alınırsa:

$$\langle \vec{n}_u, \vec{x}_u \rangle + \langle \vec{n}, \vec{x}_{uu} \rangle = 0$$

ya da

$$-\langle \vec{n}_u, \vec{x}_u \rangle = \langle \vec{n}, \vec{x}_{uu} \rangle = \frac{L}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3}} \tag{5.7}$$

$$\langle \vec{n}_v, \vec{x}_v \rangle + \langle \vec{n}, \vec{x}_{vv} \rangle = 0$$

ya da

$$-\langle \vec{n}_v, \vec{x}_v \rangle = \langle \vec{n}, \vec{x}_{vv} \rangle = \frac{N}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_4}} \tag{5.8}$$

$$\langle \vec{n}_v, \vec{x}_u \rangle + \langle \vec{n}, \vec{x}_{uv} \rangle = 0$$

ya da

$$-\langle \vec{n}_v, \vec{x}_u \rangle = \langle \vec{n}, \vec{x}_{uv} \rangle = \frac{M}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_3}} \tag{5.9}$$

$$\langle \vec{n}_u, \vec{x}_v \rangle + \langle \vec{n}, \vec{x}_{vu} \rangle = 0$$

ya da

$$-\langle \vec{n}_u, \vec{x}_v \rangle = \langle \vec{n}, \vec{x}_{vu} \rangle = \frac{M}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_4}} \tag{5.10}$$

bulunur.

Böylece (5.4) yeniden yazılarak;

$$I \equiv ds^2 = \varepsilon_3 E du^2 + \frac{2F}{\sqrt{\varepsilon_3 \varepsilon_4}} .dudv + \varepsilon_4 G dv^2$$

bulunur. Buna yüzeyin P noktasındaki birinci temel formu veya temel kuadratik formu denir.

En az ikinci sınıftan bir yüzey üzerindeki P(u,v) noktası için ikinci temel kuadratik form da

$$II = \frac{L}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3}} du^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_4}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_3}} \right) Mdudv + \frac{N}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_4}} dv^2$$

şeklinde tanımlıdır. (Ekmekci ve Tunçer 2007)

5.2 Gauss Formülleri

En az 2-nci sınıftan

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v)$$

vektörel fonksiyonu ile gösterilen yüzeyin düzgün bir P(u,v) noktasında, yer vektörünün ikinci mertebeden

$$\vec{x}_{uu},\ \vec{x}_{uv},\ \vec{x}_{vv},$$

kısmi türev vektörleri, lineer bağımsız $\vec{x}_u,\ \vec{x}_v,\ \vec{n}$ vektörlerinin lineer kombinasyonları biçiminde yazılabilirler.

$$\left.\begin{aligned} \vec{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{11}^2 \vec{x}_v + \alpha_1 \vec{n} \\ \vec{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{12}^2 \vec{x}_v + \alpha_2 \vec{n} \\ \vec{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{22}^2 \vec{x}_v + \alpha_3 \vec{n} \end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

Bunlara Gauss formülleri denilir. Γ_{ij}^k katsayıları da 2-nci türden Christoffel sembolleri adını alır.

Önce, her üç eşitliği skaler olarak $\vec{n}$ ile çarpalım.

$$\langle \vec{x}_{uu}, \vec{n} \rangle = \Gamma_{11}^{1} \underbrace{\langle \vec{x}_{u}, \vec{n} \rangle}_{0} + \Gamma_{11}^{2} \underbrace{\langle \vec{x}_{v}, \vec{n} \rangle}_{0} + \alpha_{1} \underbrace{\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle}_{\varepsilon_5}$$

$$\langle \vec{x}_{uu}, \vec{n} \rangle = \alpha_{1} \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle \tag{5.12}$$

(5.7) den dolayı $\langle \vec{x}_{uu}, \vec{n} \rangle = \dfrac{L}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3}}$ ve (5.5) den dolayı $\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = \varepsilon_5$ olup, bu eşitlikler (5.12) de yerine yazılarak

$$\frac{L}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3}} = \alpha_1 \varepsilon_5$$

ya da

$$\alpha_1 = \frac{L}{\varepsilon_5 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_3}} \tag{5.13}$$

olur.

$$\langle \vec{x}_{uv}, \vec{n} \rangle = \Gamma_{12}^{1} \underbrace{\langle \vec{x}_{u}, \vec{n} \rangle}_{0} + \Gamma_{12}^{2} \underbrace{\langle \vec{x}_{v}, \vec{n} \rangle}_{0} + \alpha_{2} \underbrace{\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle}_{\varepsilon_5}$$

$$\langle \vec{x}_{uv}, \vec{n} \rangle = \alpha_2 . \varepsilon_5 \tag{5.14}$$

(5.9) dan dolayı $\langle \vec{x}_{uv}, \vec{n} \rangle = \dfrac{M}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_3}}$ ve (5.5) den dolayı $\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = \varepsilon_5$ olduğundan, bu eşitlikler (5.14) de yerine yazılarak

$$\frac{M}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_3}} = \alpha_2 . \varepsilon_5$$

buradan da

$$\alpha_2 = \frac{M}{\varepsilon_5 \sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_3}} \tag{5.15}$$

olur.

$$\left\langle \vec{x}_{vv},\vec{n}\right\rangle = \Gamma^1_{22}\underbrace{\left\langle \vec{x}_u,\vec{n}\right\rangle}_{0} + \Gamma^2_{22}\underbrace{\left\langle \vec{x}_v,\vec{n}\right\rangle}_{0} + \alpha_3\underbrace{\left\langle \vec{n},\vec{n}\right\rangle}_{\varepsilon_5}$$

$$\left\langle \vec{x}_{vv},\vec{n}\right\rangle = \alpha_3\varepsilon_5 \tag{5.16}$$

(5.8) den dolayı $\left\langle \vec{x}_{vv},\vec{n}\right\rangle = \dfrac{N}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}$ ve (5.5) den dolayı $\left\langle \vec{n},\vec{n}\right\rangle = \varepsilon_5$ olduğundan, bu eşitlikler de (5.16) da yerine yazılarak

$$\alpha_3 = \frac{N}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}} \tag{5.17}$$

bulunur. Öte yandan (5.5) deki $\left\langle \vec{x}_u,\vec{x}_v\right\rangle = \dfrac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}$ eşitliğinin u ve v parametrelerine göre türevleri alınırsa;

$$\left.\begin{aligned} \left\langle \vec{x}_{uu},\vec{x}_v\right\rangle + \left\langle \vec{x}_u,\vec{x}_{uv}\right\rangle &= \frac{F_u}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} \\ \left\langle \vec{x}_{uv},\vec{x}_v\right\rangle + \left\langle \vec{x}_u,\vec{x}_{vv}\right\rangle &= \frac{F_v}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} \end{aligned}\right\} \tag{5.18}$$

bulunur. (5.5) deki $\left\langle x_u,x_u\right\rangle = \varepsilon_3 E$ eşitliğinin v ye göre kısmi türevi alındığında;

$$\left\langle \vec{x}_{uv},\vec{x}_u\right\rangle + \left\langle \vec{x}_u,\vec{x}_{uv}\right\rangle = \varepsilon_3 E_v$$

ya da

$$\left\langle \vec{x}_u,\vec{x}_{uv}\right\rangle = \frac{\varepsilon_3}{2}E_v$$

olur. (5.5) deki $\left\langle x_v,x_v\right\rangle = \varepsilon_4 G$ eşitliğinin u ya göre kısmi türevi alındığında

$$\left\langle \vec{x}_{uv},\vec{x}_v\right\rangle + \left\langle \vec{x}_v,\vec{x}_{uv}\right\rangle = \varepsilon_4 G_u$$

ya da

$$\left\langle \vec{x}_v,\vec{x}_{uv}\right\rangle = \frac{\varepsilon_4}{2}G_u$$

bulunur. Bu eşitsizlikleri (5.18) de kullanılırsa

$$\left.\begin{aligned} \left\langle \vec{x}_{uu}, \vec{x}_v \right\rangle + \frac{\varepsilon_3}{2} E_v &= \frac{F_u}{\sqrt{\varepsilon_3 \varepsilon_4}} \\ \left\langle \vec{x}_u, \vec{x}_{vv} \right\rangle + \frac{\varepsilon_4}{2} . G_u &= \frac{F_v}{\sqrt{\varepsilon_3 \varepsilon_4}} \end{aligned}\right\}$$

olur. Böylece

$$\left.\begin{aligned} \left\langle \vec{x}_{uu}, \vec{x}_v \right\rangle &= \frac{F_u}{\sqrt{\varepsilon_3 \varepsilon_4}} - \frac{\varepsilon_3}{2} E_v \\ \left\langle \vec{x}_u, \vec{x}_{vv} \right\rangle &= \frac{F_v}{\sqrt{\varepsilon_3 \varepsilon_4}} - \frac{\varepsilon_4}{2} G_u \end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

dir.

Ayrıca $\left\langle \vec{x}_u, \vec{x}_u \right\rangle = \varepsilon_3 E$ eşitliğinin u ya göre kısmi türevi alındığında

$$\left.\begin{aligned} \left\langle \vec{x}_{uu}, \vec{x}_u \right\rangle + \left\langle \vec{x}_u, \vec{x}_{uu} \right\rangle &= \varepsilon_3 E_u \\ \left\langle \vec{x}_{uu}, \vec{x}_u \right\rangle &= \frac{\varepsilon_3}{2} E_u \end{aligned}\right\} \tag{5.20}$$

$\left\langle \vec{x}_v, \vec{x}_v \right\rangle = \varepsilon_4 . G$ eşitliğinin de v ye göre kısmi türevi alındığında

$$\left\langle \vec{x}_{vv}, \vec{x}_v \right\rangle + \left\langle \vec{x}_v, \vec{x}_{vv} \right\rangle = \varepsilon_4 G_v$$

$$\left\langle \vec{x}_{vv}, \vec{x}_v \right\rangle = \frac{\varepsilon_4}{2} G_v \tag{5.21}$$

bulunur.

(5.11) deki Gauss denklemlerinin $\vec{x}_u$ ve $\vec{x}_v$ ile skaler çarpımlarını alıp (5.5), (5.19), (5.20), (5.21) eşitliklerinin kullanılması ile aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\left\langle \vec{x}_{uu}, \vec{x}_u \right\rangle = \Gamma_{11}^1 \left\langle \vec{x}_u, \vec{x}_u \right\rangle + \Gamma_{11}^2 \left\langle \vec{x}_v, \vec{x}_u \right\rangle + \alpha_1 \underbrace{\left\langle \vec{n}, \vec{x}_u \right\rangle}_{0}$$

$$\frac{\varepsilon_3}{2} E_u = \Gamma_{11}^1 \varepsilon_3 E + \Gamma_{11}^2 \frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3 \varepsilon_4}} \tag{5.22}$$

$$\left\langle \vec{x}_{uu}, \vec{x}_v \right\rangle = \Gamma_{11}^1 \left\langle \vec{x}_u, \vec{x}_v \right\rangle + \Gamma_{11}^2 \left\langle \vec{x}_v, \vec{x}_v \right\rangle + \alpha_1 \underbrace{\left\langle \vec{n}, \vec{x}_v \right\rangle}_{0}$$

$$\frac{F_u}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}-\frac{\varepsilon_3}{2}E_v=\Gamma_{11}^1\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}+\Gamma_{11}^2\varepsilon_4 G \tag{5.23}$$

$$\left\langle \vec{x}_{uv},\vec{x}_u\right\rangle=\Gamma_{12}^1\left\langle \vec{x}_u,\vec{x}_u\right\rangle+\Gamma_{12}^2\left\langle \vec{x}_v,\vec{x}_u\right\rangle+\alpha_2\underbrace{\left\langle \vec{n},\vec{x}_u\right\rangle}_{0}$$

$$\frac{\varepsilon_3}{2}E_v=\Gamma_{12}^1\varepsilon_3 E+\Gamma_{12}^2\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} \tag{5.24}$$

$$\left\langle \vec{x}_{uv},\vec{x}_v\right\rangle=\Gamma_{12}^1\left\langle \vec{x}_u,\vec{x}_v\right\rangle+\Gamma_{12}^2\left\langle \vec{x}_v,\vec{x}_v\right\rangle+\alpha_2\underbrace{\left\langle \vec{n},\vec{x}_v\right\rangle}_{0}$$

$$\frac{\varepsilon_4}{2}G_u=\Gamma_{12}^1\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}+\Gamma_{12}^2\varepsilon_4 G \tag{5.25}$$

$$\left\langle \vec{x}_{vv},\vec{x}_u\right\rangle=\Gamma_{22}^1\left\langle \vec{x}_u,\vec{x}_u\right\rangle+\Gamma_{22}^2\left\langle \vec{x}_v,\vec{x}_u\right\rangle+\alpha_3\underbrace{\left\langle \vec{n},\vec{x}_u\right\rangle}_{0}$$

$$\frac{F_v}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}-\frac{\varepsilon_4}{2}G_u=\Gamma_{22}^1\varepsilon_3 E+\Gamma_{22}^2\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} \tag{5.26}$$

$$\left\langle \vec{x}_{vv},\vec{x}_v\right\rangle=\Gamma_{22}^1\left\langle \vec{x}_u,\vec{x}_v\right\rangle+\Gamma_{22}^2\left\langle \vec{x}_v,\vec{x}_v\right\rangle+\alpha_3\underbrace{\left\langle \vec{n},\vec{x}_v\right\rangle}_{0}$$

$$\frac{\varepsilon_4}{2}G_v=\Gamma_{22}^1\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}+\Gamma_{22}^2\varepsilon_4 G \tag{5.27}$$

Böylece Γ_{11}^1, Γ_{11}^2, Γ_{12}^1, Γ_{12}^2, Γ_{22}^1, Γ_{22}^2 katsayıları hesaplanır. (5.22) ve (5.23) beraber çözülerek;

$$\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}\Big/ \qquad \frac{F_u}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}-\frac{\varepsilon_3}{2}E_v=\Gamma_{11}^1\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}+\Gamma_{11}^2\varepsilon_4 G$$

$$-\varepsilon_4 G \Big/ \; \frac{\varepsilon_3}{2}E_u = \Gamma_{11}^1 \varepsilon_3 E + \Gamma_{11}^2 \frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}$$

$$\frac{F.F_u}{\varepsilon_3\varepsilon_4} - \frac{\varepsilon_3}{2\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}.FE_v = \Gamma_{11}^1 \frac{F^2}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} + \cancel{\Gamma_{11}^2 \frac{\varepsilon_4}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} FG}$$

$$-\frac{\varepsilon_3\varepsilon_4}{2} G.E_u = \Gamma_{11}^1\left(-\varepsilon_3\varepsilon_4 EG\right) + \cancel{\Gamma_{11}^2 \frac{\varepsilon_4}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} FG}$$

$$\Gamma_{11}^1 \underbrace{\left(\frac{F^2}{\varepsilon_3\varepsilon_4} - \varepsilon_3\varepsilon_4 EG\right)}_{-H^2} = \frac{F.F_u}{\varepsilon_3\varepsilon_4} - \frac{\varepsilon_3}{2\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} FE_v - \frac{\varepsilon_3\varepsilon_4}{2} GE_u$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{H^2}\left[\frac{\varepsilon_3}{2\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} FE_v + \frac{\varepsilon_3\varepsilon_4}{2} GE_u - \frac{F.F_u}{\varepsilon_3\varepsilon_4}\right] \tag{5.28}$$

bulunur. (5.24) ve (5.25) beraber çözülerek

$$\varepsilon_4 G \Big/ \; \frac{\varepsilon_3}{2}E_v = \Gamma_{12}^1 \varepsilon_3 E + \Gamma_{12}^2 \frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}$$

$$-\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} \Big/ \; \frac{\varepsilon_4}{2} G_u = \Gamma_{12}^1 \frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} + \Gamma_{12}^2 \varepsilon_4 G$$

$$\frac{\varepsilon_3\varepsilon_4}{2} G.E_v = \Gamma_{12}^1 \varepsilon_3\varepsilon_4 GE + \cancel{\Gamma_{12}^2 \frac{\varepsilon_4}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} G.F}$$

$$-\frac{\varepsilon_4}{2\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} F.G_u = \Gamma_{12}^1\left(-\frac{F^2}{\varepsilon_3\varepsilon_4}\right) - \cancel{\Gamma_{12}^2 \frac{\varepsilon_4}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} G.F}$$

$$\Gamma_{12}^{1}\underbrace{\left(\varepsilon_3\varepsilon_4 GE-\frac{F^2}{\varepsilon_3\varepsilon_4}\right)}_{H^2}=\frac{\varepsilon_3\varepsilon_4}{2}GE_v-\frac{\varepsilon_4}{2\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}FG_u$$

$$\Gamma_{12}^{1}=\frac{1}{H^2}\left[\frac{\varepsilon_3\varepsilon_4}{2}G.E_v-\frac{\varepsilon_4}{2\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}FG_u\right] \tag{5.29}$$

bulunur. (5.26) ve (5.27) beraber çözülerek

$$\varepsilon_4 G \quad \frac{F_v}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}-\frac{\varepsilon_4}{2}G_u=\Gamma_{22}^{1}\varepsilon_3 E+\Gamma_{22}^{2}\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}$$

$$-\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} \quad \frac{\varepsilon_4}{2}G_v=\Gamma_{22}^{1}\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}+\Gamma_{22}^{2}\varepsilon_4 G$$

$$\frac{\varepsilon_4}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}G.F_v-\frac{\varepsilon_4{}^2}{2}GG_u=\Gamma_{22}^{1}\varepsilon_3\varepsilon_4 GE+\cancel{\Gamma_{22}^{2}\frac{\varepsilon_4}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}G.F}$$

$$-\frac{\varepsilon_4}{2\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}F.G_v=-\Gamma_{22}^{1}\frac{F^2}{\varepsilon_3\varepsilon_4}-\cancel{\Gamma_{22}^{2}\frac{\varepsilon_4}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}G.F}$$

$$\Gamma_{22}^{1}\underbrace{\left(\varepsilon_3\varepsilon_4 GE-\frac{F^2}{\varepsilon_3\varepsilon_4}\right)}_{H^2}=\frac{\varepsilon_4}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}GF_v-\frac{1}{2}GG_u-\frac{\varepsilon_4}{2\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}FG_v$$

$$\Gamma_{22}^{1}=\frac{1}{H^2}\left[\frac{\varepsilon_4}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}\left(GF_v-\frac{1}{2}FG_v\right)-\frac{1}{2}GG_u\right] \tag{5.30}$$

(5.22) ve (5.23) beraber çözülerek

$$-\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} \Big/ \qquad \frac{\varepsilon_3}{2}E_u = \Gamma_{11}^1\varepsilon_3 E + \Gamma_{11}^2\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}$$

$$\varepsilon_3 E \Big/ \qquad \frac{F_u}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} - \frac{\varepsilon_3}{2}E_v = \Gamma_{11}^1\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} + \Gamma_{11}^2\varepsilon_4 G$$

$$-\frac{\varepsilon_3}{2\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}E_u F = \Gamma_{11}^1\left(\cancel{\frac{-\varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}E.F}\right) - \Gamma_{11}^2\frac{F^2}{\varepsilon_3\varepsilon_4}$$

$$\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}F_u.E - \frac{\varepsilon_3^2}{2}E_v.E = \Gamma_{11}^1\left(\cancel{\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}E.F}\right) + \Gamma_{11}^2\varepsilon_3\varepsilon_4 GE$$

$$\Gamma_{11}^2\underbrace{\left(\varepsilon_3\varepsilon_4 GE - \frac{F^2}{\varepsilon_3\varepsilon_4}\right)}_{H^2} = \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}\left(F_u E - \frac{1}{2}E_u F\right) - \frac{1}{2}E_v E$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{H^2}\left[\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}\left(F_u.E - \frac{1}{2}E_u F\right) - \frac{1}{2}E_v E\right] \qquad (5.31)$$

(5.24) ve (5.25) beraber çözülerek

$$-\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} \Big/ \frac{\varepsilon_3}{2}E_v = \Gamma_{12}^1\varepsilon_3 E + \Gamma_{12}^2\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}$$

$$\varepsilon_3 E \Big/ \frac{\varepsilon_4}{2}G_u = \Gamma_{12}^1\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} + \Gamma_{12}^2\varepsilon_4 G$$

$$-\frac{\varepsilon_3}{2\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}F.E_v = \Gamma_{12}^1\left(\cancel{-\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}F.E}\right) + \Gamma_{12}^2\left(-\frac{F^2}{\varepsilon_3\varepsilon_4}\right)$$

$$\frac{\varepsilon_3\varepsilon_4}{2}E.G_u = \Gamma_{12}^{1}\left(\cancel{\frac{\varepsilon_3}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}}E.F\right) + \Gamma_{12}^{2}\left(\varepsilon_3\varepsilon_4 EG\right)$$

$$\Gamma_{12}^{2} = \frac{1}{H^2}\left[\frac{\varepsilon_3}{2}\left(\varepsilon_4 EG_u - \frac{F.E_v}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}\right)\right] \qquad (5.32)$$

(5.26) ve (5.27) beraber çözülerek

$$\frac{-F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}\Big/\frac{F_v}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} - \frac{\varepsilon_4}{2}G_u = \Gamma_{22}^{1}\varepsilon_3 E + \Gamma_{22}^{2}\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}$$

$$\varepsilon_3 E\Big/\frac{\varepsilon_4}{2}G_v = \Gamma_{22}^{1}\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} + \Gamma_{22}^{2}\varepsilon_4 G$$

$$-\frac{FF_v}{\varepsilon_3\varepsilon_4} + \frac{\varepsilon_4}{2\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}FG_u = \Gamma_{22}^{2}\left(-\frac{F^2}{\varepsilon_3\varepsilon_4}\right)$$

$$\frac{\varepsilon_3\varepsilon_4}{2}EG_v = \Gamma_{22}^{2}\left(\varepsilon_3\varepsilon_4 EG\right)$$

$$\Gamma_{22}^{2} = \frac{1}{H^2}\left[\frac{\varepsilon_4}{2\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}FG_u + \frac{\varepsilon_3\varepsilon_4}{2}EG_v - \frac{FF_v}{\varepsilon_3\varepsilon_4}\right] \qquad (5.33)$$

bulunur. (Ekmekci ve Tunçer 2007)

Teorem 5.2.1 Eğer koordinat çizgilerinin yüzey üzerinde oluşturdukları parametreli eğrilerinin ailesi dikse F=0 olacağından

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{1}{\cancel{\varepsilon_3\varepsilon_4}E\cancel{G}}\left(\frac{\cancel{\varepsilon_3\varepsilon_4}}{2}\cancel{G}.E_u\right) = \frac{E_u}{2E}$$

$$\Gamma_{12}^{1} = \frac{1}{\cancel{\varepsilon_3\varepsilon_4}E\cancel{G}}\left(\frac{\cancel{\varepsilon_3\varepsilon_4}}{2}\cancel{G}.E_v\right) = \frac{E_v}{2E}$$

$$\Gamma^1_{22}=\frac{1}{\varepsilon_3\varepsilon_4 E\cancel{G}}\left(-\frac{1}{2}\cancel{G}.G_u\right)=-\frac{G_u}{2\varepsilon_3\varepsilon_4 E}$$

$$\Gamma^2_{11}=\frac{1}{\varepsilon_3\varepsilon_4 \cancel{E}G}\left(-\frac{1}{2}E_v.\cancel{E}\right)=-\frac{E_v}{2\varepsilon_3\varepsilon_4 G}$$

$$\Gamma^2_{12}=\frac{1}{\cancel{\varepsilon_3\varepsilon_4}\,\cancel{E}G}\left(\frac{\cancel{\varepsilon_3\varepsilon_4}}{2}\cancel{E}.G_u\right)=\frac{G_u}{2G}$$

$$\Gamma^2_{22}=\frac{1}{\cancel{\varepsilon_3\varepsilon_4}\,\cancel{E}G}\left(\frac{\cancel{\varepsilon_3\varepsilon_4}}{2}\cancel{E}.G_v\right)=\frac{G_v}{2G}$$

olup Gauss formülleri

$$\left.\begin{aligned}
\vec{x}_{uu}&=\frac{E_u}{2E}\vec{x}_u-\frac{E_v}{2\varepsilon_3\varepsilon_4 G}\vec{x}_v+\frac{L}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}.\vec{n}\\
\vec{x}_{uv}&=\frac{E_v}{2E}\vec{x}_u+\frac{G_u}{2G}\vec{x}_v+\frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}.\vec{n}\\
\vec{x}_{vv}&=-\frac{G_u}{2\varepsilon_3\varepsilon_4 E}\vec{x}_u+\frac{G_v}{2G}\vec{x}_v+\frac{N}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}.\vec{n}
\end{aligned}\right\}\tag{5.34}$$

şeklinde yazılabilir. (Ekmekci ve Tunçer 2007)

5.3 CODAZZI-MAINARDI Formülleri

Gauss formüllerinin bir *P(u,v)* düzgün noktasından uygulandığı yüzey eğer 3-ncü sınıftansa, aynı noktadaki yer vektörünün

$$\left(\vec{x}_{uu}\right)_v=\left(\vec{x}_{uv}\right)_u,\left(\vec{x}_{vv}\right)_u=\left(\vec{x}_{uv}\right)_v\tag{5.35}$$

özdeşliklerini gerçekleştirmesi gerekir. O halde, (5.11)deki Gauss formülleri kullanılırsa

$$\left(\Gamma^1_{11}\vec{x}_u+\Gamma^2_{11}\vec{x}_v+\frac{L}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}.\vec{n}\right)_v=\left(\Gamma^1_{12}\vec{x}_u+\Gamma^2_{12}\vec{x}_v+\frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}.\vec{n}\right)_u\tag{5.36}$$

$$\left(\Gamma^1_{22}\vec{x}_u+\Gamma^2_{22}\vec{x}_v+\frac{N}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}.\vec{n}\right)_u=\left(\Gamma^1_{12}\vec{x}_u+\Gamma^2_{12}\vec{x}_v+\frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}.\vec{n}\right)_v\tag{5.37}$$

olur.

(5.36) nın kısmi türevleri alınarak

$$\left(\Gamma_{11}^{1}\right)_{v}\vec{x}_{u}+\Gamma_{11}^{1}\left(\vec{x}_{uv}\right)+\left(\Gamma_{11}^{2}\right)_{v}\vec{x}_{v}+\Gamma_{11}^{2}\vec{x}_{vv}$$

$$+\frac{L}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{1}\varepsilon_{3}}}\vec{n}_{v}+\frac{L_{v}}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{1}\varepsilon_{3}}}\vec{n}$$

$$=\left(\Gamma_{12}^{1}\right)_{u}\vec{x}_{u}+\Gamma_{12}^{1}\left(\vec{x}_{uu}\right)+\left(\Gamma_{12}^{2}\right)_{u}\vec{x}_{v}+\Gamma_{12}^{2}\left(\vec{x}_{vu}\right)$$

$$+\frac{M}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{2}\varepsilon_{3}}}\vec{n}_{u}+\frac{M_{u}}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{2}\varepsilon_{3}}}\vec{n}$$

ya da

$$\left[\left(\Gamma_{11}^{1}\right)_{v}-\left(\Gamma_{12}^{1}\right)_{u}\right]\vec{x}_{u}+\left[\left(\Gamma_{11}^{2}\right)_{v}-\left(\Gamma_{12}^{2}\right)_{u}\right]\vec{x}_{v}$$

$$+\left(\Gamma_{11}^{1}-\Gamma_{12}^{2}\right)\vec{x}_{uv}+\Gamma_{11}^{2}\left(\vec{x}_{vv}\right)-\Gamma_{12}^{1}\left(\vec{x}_{uu}\right)$$

$$+\left(\frac{L_{v}}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{1}\varepsilon_{3}}}-\frac{M_{u}}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{2}\varepsilon_{3}}}\right)\vec{n}+\frac{L}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{1}\varepsilon_{3}}}\vec{n}_{v}-\frac{M}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{2}\varepsilon_{3}}}\vec{n}_{u}=0 \tag{5.38}$$

bulunur.

(5.37)nin kısmi türevleri benzer şekilde alındığında

$$\left(\Gamma_{22}^{1}\right)_{u}\vec{x}_{u}+\left(\Gamma_{22}^{1}\right)\vec{x}_{uu}+\left(\Gamma_{22}^{2}\right)_{u}\vec{x}_{v}+\left(\Gamma_{22}^{2}\right)\vec{x}_{vu}$$

$$+\left(\frac{N_{u}}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{2}\varepsilon_{4}}}\right)\vec{n}+\frac{N}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{2}\varepsilon_{4}}}\vec{n}_{u}$$

$$=\left(\Gamma_{12}^{1}\right)_{v}\vec{x}_{u}+\Gamma_{12}^{1}\left(\vec{x}_{uv}\right)+\left(\Gamma_{12}^{2}\right)_{v}\vec{x}_{v}+\Gamma_{12}^{2}\left(\vec{x}_{vv}\right)$$

$$+\frac{M_{v}}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{2}\varepsilon_{3}}}\vec{n}+\frac{M}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{2}\varepsilon_{3}}}\vec{n}_{v}$$

ya da

$$\left[\left(\Gamma_{22}^{1}\right)_{u}-\left(\Gamma_{12}^{1}\right)_{v}\right].\vec{x}_{u}+\left[\left(\Gamma_{22}^{2}\right)_{u}-\left(\Gamma_{12}^{2}\right)_{v}\right].\vec{x}_{v}$$

$$+\left(\Gamma_{22}^{2}-\Gamma_{12}^{1}\right)\vec{x}_{uv}+\Gamma_{22}^{1}\vec{x}_{uu}-\Gamma_{12}^{2}\vec{x}_{vv}$$

$$+\left[\frac{N_u}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}-\frac{M_v}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}\right]\vec{n}+\frac{N}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}\vec{n}_u-\frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}\vec{n}_v=0 \qquad (5.39)$$

bulunur.

Tekrar Gauss ve Weingarten formüllerinden yararlanılarak (5.38)den

$$\left[\left(\Gamma_{11}^{1}\right)_v-\left(\Gamma_{12}^{1}\right)_u\right].\vec{x}_u+\left[\left(\Gamma_{11}^{2}\right)_v-\left(\Gamma_{12}^{2}\right)_u\right].\vec{x}_v$$

$$+\left(\Gamma_{11}^{1}-\Gamma_{12}^{2}\right)\left(\Gamma_{12}^{1}\vec{x}_u+\Gamma_{12}^{2}\vec{x}_v+\frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}.\vec{n}\right)$$

$$+\Gamma_{11}^{2}\left(\Gamma_{22}^{1}\vec{x}_u+\Gamma_{22}^{2}\vec{x}_v+\frac{N}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}.\vec{n}\right)$$

$$-\Gamma_{12}^{1}\left(\Gamma_{11}^{1}\vec{x}_u+\Gamma_{11}^{2}\vec{x}_v+\frac{L}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}\vec{n}\right)$$

$$+\left(\frac{L_v}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}-\frac{M_u}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}\right).\vec{n}+\frac{L}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}.\vec{n}_v-\frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}\vec{n}_u=0$$

$$\left[\left(\Gamma_{11}^{1}\right)_v-\left(\Gamma_{12}^{1}\right)_u+\cancel{\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{12}^{1}}-\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{1}+\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1}-\cancel{\Gamma_{12}^{1}\Gamma_{11}^{1}}\right]\vec{x}_u$$

$$+\left[\left(\Gamma_{11}^{2}\right)_v-\left(\Gamma_{12}^{2}\right)_u+\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{12}^{2}-\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{2}+\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2}-\Gamma_{12}^{1}\Gamma_{11}^{2}\right]\vec{x}_v$$

$$+\left(\left(\Gamma_{11}^{1}-\Gamma_{12}^{2}\right)\frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}+\Gamma_{11}^{2}\frac{N}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}-\Gamma_{12}^{1}\frac{L}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}+\frac{L_v}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}-\frac{M_u}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}\right)\vec{n}$$

$$+\frac{L}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}\vec{n}_v-\frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}\vec{n}_u=0$$

$$\left[\left(\Gamma_{11}^{1}\right)_v-\left(\Gamma_{12}^{1}\right)_u+\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1}-\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{1}\right].\vec{x}_u$$

$$
\left.\begin{aligned}
&+\left[\left(\Gamma_{11}^{2}\right)_{v}-\left(\Gamma_{12}^{2}\right)_{u}+\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{12}^{2}+\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2}-\Gamma_{12}^{1}\Gamma_{11}^{2}-\left(\Gamma_{12}^{2}\right)^{2}\right]\vec{x}_{v}\\
&+\left[\left(\Gamma_{11}^{1}-\Gamma_{12}^{2}\right)\frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}+\Gamma_{11}^{2}\frac{N}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}-\Gamma_{12}^{1}\frac{L}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}+\frac{L_v}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}-\frac{M_u}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}\right]\vec{n}\\
&+\frac{L}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}\vec{n}_{v}-\frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}\vec{n}_{u}=0
\end{aligned}\right\}(5.40)
$$

bulunur.

Burada $\bar{a}_{11}, \bar{a}_{12}, \bar{a}_{21}$ ve $\bar{a}_{22}$, Weingarten matrisinin bileşenleri olmak üzere

$$\vec{n}_{u}=\bar{a}_{11}\vec{x}_{u}+\bar{a}_{12}\vec{x}_{v}$$

$$\vec{n}_{v}=\bar{a}_{21}\vec{x}_{u}+\bar{a}_{22}\vec{x}_{v}$$

şeklinde $\vec{n}_u$ ve $\vec{n}_v$ vektörleri $\vec{x}_u$ ve $\vec{x}_v$ vektörlerinin lineer kombinasyonları şeklinde yazılabilir. Böylece (5.40)dan

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(\Gamma_{11}^{1}\right)_{v}-\left(\Gamma_{12}^{1}\right)_{u}+\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1}-\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{1}\right].\vec{x}_{u}\\
&+\left[\left(\Gamma_{11}^{2}\right)_{v}-\left(\Gamma_{12}^{2}\right)_{u}+\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{12}^{2}+\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2}-\Gamma_{12}^{1}\Gamma_{11}^{2}-\left(\Gamma_{12}^{2}\right)^{2}\right]\vec{x}_{v}\\
&+\left[\left(\Gamma_{11}^{1}-\Gamma_{12}^{2}\right)\frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}+\Gamma_{11}^{2}\frac{N}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}-\Gamma_{12}^{1}\frac{L}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}+\frac{L_v}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}-\frac{M_u}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}\right]\vec{n}\\
&+\frac{L}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}\left(\bar{a}_{21}\vec{x}_{u}+\bar{a}_{22}\vec{x}_{v}\right)-\frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}\left(\bar{a}_{11}\vec{x}_{u}+\bar{a}_{12}\vec{x}_{v}\right)=0
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\left[\left(\Gamma_{11}^{1}\right)_{v}-\left(\Gamma_{12}^{1}\right)_{u}+\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1}-\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{1}+\frac{\bar{a}_{21}L}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}-\frac{\bar{a}_{11}M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}\right].\vec{x}_{u}\\
&+\left[\left(\Gamma_{11}^{2}\right)_{v}-\left(\Gamma_{12}^{2}\right)_{u}+\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{12}^{2}+\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2}-\Gamma_{12}^{1}\Gamma_{11}^{2}-\left(\Gamma_{12}^{2}\right)^{2}+\frac{\bar{a}_{22}L}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}-\frac{\bar{a}_{12}M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}\right]\vec{x}_{v}\\
&+\left[\left(\Gamma_{11}^{1}-\Gamma_{12}^{2}\right)\frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}+\Gamma_{11}^{2}\frac{N}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}-\Gamma_{12}^{1}\frac{L}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}+\frac{L_v}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}-\frac{M_u}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}\right]\vec{n}=0
\end{aligned}\right\}\quad(5.41)
$$

$\vec{x}_u, \vec{x}_v$ ve $\vec{n}$ nin katsayıları A_1, A_2 ve A_3 ile gösterilirse

$$A_1 = \left(\Gamma_{11}^1\right)_v - \left(\Gamma_{12}^1\right)_u + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1$$
$$+ \frac{L}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}.\bar{a}_{21} - \frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}.\bar{a}_{11}$$

$$A_2 = \left(\Gamma_{11}^2\right)_v - \left(\Gamma_{12}^2\right)_u + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 - \left(\Gamma_{12}^2\right)^2$$
$$+ \frac{L}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}.\bar{a}_{22} - \frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}.\bar{a}_{12}$$

ve

$$A_3 = \left(\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2\right)\frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}} + \Gamma_{11}^2\frac{N}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}} - \Gamma_{12}^1\frac{L}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}$$
$$+ \frac{L_v}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}} - \frac{M_u}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}$$

olup (5.41) denklemi

$$A_1\vec{x}_u + A_2\vec{x}_v + A_3\vec{n} = 0$$

ile gösterilebilir. Burada $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ ve $\vec{n}$ vektörleri lineer bağımsız olduklarından A_1, A_2 ve A_3 katsayıları sıfırdır. Böylece

$$\frac{L}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}\bar{a}_{21} - \frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}\bar{a}_{11} = \left(\Gamma_{12}^1\right)_u - \left(\Gamma_{11}^1\right)_v + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1$$

$$\frac{L}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}.\bar{a}_{22} - \frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}.\bar{a}_{12} = \left(\Gamma_{12}^2\right)_u - \left(\Gamma_{11}^2\right)_v - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \left(\Gamma_{12}^2\right)^2$$

$$\frac{L_v}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}} - \frac{M_u}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}} = \left(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1\right)\frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}} - \Gamma_{11}^2\frac{N}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}} + \Gamma_{12}^1\frac{L}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}} \qquad (5.42)$$

(5.39) denklemi için benzer işlemler yapıldığında,

$$\left[\left(\Gamma_{22}^1\right)_u - \left(\Gamma_{12}^1\right)_v\right].\vec{x}_u + \left[\left(\Gamma_{22}^2\right)_u - \left(\Gamma_{12}^2\right)_v\right].\vec{x}_v$$

$$+\left(\Gamma_{22}^{2}-\Gamma_{12}^{1}\right)\left(\Gamma_{12}^{1}\vec{x}_{u}+\Gamma_{12}^{2}\vec{x}_{v}+\frac{M}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{2}\varepsilon_{3}}}.\vec{n}\right)$$

$$+\left(\Gamma_{22}^{1}\right)\left(\Gamma_{11}^{1}\vec{x}_{u}+\Gamma_{11}^{2}\vec{x}_{v}+\frac{L}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{1}\varepsilon_{3}}}.\vec{n}\right)$$

$$-\left(\Gamma_{12}^{2}\right)\left(\Gamma_{22}^{1}\vec{x}_{u}+\Gamma_{22}^{2}\vec{x}_{v}+\frac{N}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{2}\varepsilon_{4}}}.\vec{n}\right)$$

$$+\left[\frac{N_{u}}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{2}\varepsilon_{4}}}-\frac{M_{v}}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{2}\varepsilon_{3}}}\right]\vec{n}+\frac{N}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{2}\varepsilon_{4}}}\left(\bar{a}_{11}\vec{x}_{u}+\bar{a}_{12}\vec{x}_{v}\right)$$

$$-\frac{M}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{2}\varepsilon_{3}}}\left(\bar{a}_{21}\vec{x}_{u}+\bar{a}_{22}\vec{x}_{v}\right)=0$$

$$\left[\left(\Gamma_{22}^{1}\right)_{u}-\left(\Gamma_{12}^{1}\right)_{v}+\Gamma_{22}^{2}\Gamma_{12}^{1}-\left(\Gamma_{12}^{1}\right)^{2}+\Gamma_{22}^{1}\Gamma_{11}^{1}-\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{22}^{1}+\frac{N}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{2}\varepsilon_{4}}}.\bar{a}_{11}-\frac{M}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{2}\varepsilon_{3}}}.\bar{a}_{21}\right]\vec{x}_{u}$$

$$+\left[\left(\Gamma_{22}^{2}\right)_{u}-\left(\Gamma_{12}^{2}\right)_{v}+\cancel{\Gamma_{22}^{2}\Gamma_{12}^{2}}-\Gamma_{12}^{1}\Gamma_{12}^{2}+\Gamma_{22}^{1}\Gamma_{11}^{2}-\cancel{\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{22}^{2}}+\frac{N}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{2}\varepsilon_{4}}}.\bar{a}_{12}-\frac{M}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{2}\varepsilon_{3}}}.\bar{a}_{22}\right]\vec{x}_{v}$$

$$+\left[\left(\Gamma_{22}^{2}-\Gamma_{12}^{1}\right)\frac{M}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{2}\varepsilon_{3}}}+\Gamma_{22}^{1}\frac{L}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{1}\varepsilon_{3}}}-\Gamma_{12}^{2}\frac{N}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{2}\varepsilon_{4}}}+\frac{N_{u}}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{2}\varepsilon_{4}}}-\frac{M_{v}}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{2}\varepsilon_{3}}}\right]\vec{n}=0$$

(5.43)

(5.43)de $\vec{x}_u$, $\vec{x}_v$ ve $\vec{n}$ vektörlerinin katsayıları B_1, B_2 ve B_3 ile gösterilirse

$$B_{1}=\left(\Gamma_{22}^{1}\right)_{u}-\left(\Gamma_{12}^{1}\right)_{v}+\Gamma_{22}^{2}\Gamma_{12}^{1}-\left(\Gamma_{12}^{1}\right)^{2}+\Gamma_{22}^{1}\Gamma_{11}^{1}$$
$$-\Gamma_{12}^{2}\Gamma_{22}^{1}+\frac{N}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{2}\varepsilon_{4}}}.\bar{a}_{11}-\frac{M}{\varepsilon_{5}\sqrt{\varepsilon_{2}\varepsilon_{3}}}.\bar{a}_{21}$$

$$B_2 = \left(\Gamma_{22}^2\right)_u - \left(\Gamma_{12}^2\right)_v - \Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^2$$
$$+\frac{N}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}.\bar{a}_{12} - \frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}.\bar{a}_{22}$$

$$B_3 = \left(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1\right)\frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}} + \Gamma_{22}^1\frac{L}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}} - \Gamma_{12}^2\frac{N}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}$$
$$+\frac{N_u}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}} - \frac{M_v}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}$$

olup denklem

$$B_1\vec{x}_u + B_2\vec{x}_v + B_3\vec{n} = 0$$

şeklinde yazılabilir. $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ ve $\vec{n}$ vektörleri lineer bağımsız olduğundan B_1, B_2 ve B_3 katsayıları sıfıra eşitlenerek

$$\frac{N}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}.\bar{a}_{11} - \frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}\bar{a}_{21} = \left(\Gamma_{12}^1\right)_v - \left(\Gamma_{22}^1\right)_u + \left(\Gamma_{12}^1\right)^2 - \Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1$$

$$\frac{N}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}.\bar{a}_{12} - \frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}.\bar{a}_{22} = \left(\Gamma_{12}^2\right)_v - \left(\Gamma_{22}^2\right)_u + \Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^2 \qquad (5.44)$$

$$\frac{N_u}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}} - \frac{M_v}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}} = \left(-\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1\right)\frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}} - \Gamma_{22}^1\frac{L}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}} + \Gamma_{12}^2\frac{N}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}$$

bulunur.

(5.42) ve (5.44) için son eşitlikleri olan

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{L_v}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}-\frac{M_u}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}=\left(\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^1\right)\frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}-\Gamma_{11}^2\frac{N}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}+\Gamma_{12}^1\frac{L}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}\\
&\frac{N_u}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}-\frac{M_v}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}=\left(\Gamma_{12}^2-\Gamma_{22}^2\right)\frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}-\Gamma_{22}^1\frac{L}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}+\Gamma_{12}^2\frac{N}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}
\end{aligned}\right\}\quad(5.45)$$

formüllerine x(u,v) yüzeyinin Codazzi-Mainardi formülü denir.

a) Yüzey üzerinde $F\equiv 0$ ise (5.45) formülleri (5.34) yardımı ile yeniden yazılabilir.

$F\equiv 0$ için;

$$\Gamma_{11}^1=\frac{E_u}{2E}\ ,\ \Gamma_{11}^2=\frac{-E_v}{2\varepsilon_3\varepsilon_4 G}\ ,\ \Gamma_{12}^1=\frac{E_v}{2E}\ ,\ \Gamma_{12}^2=\frac{G_u}{2G}\ ,\ \Gamma_{22}^1=\frac{-G_u}{2\varepsilon_3\varepsilon_4 E}\ ,\ \Gamma_{22}^2=\frac{G_v}{2G}$$

olduğundan bu değerler (5.45) de yerine yazıldığında,

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{L_v}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}-\frac{M_u}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}=\left(\frac{G_u}{2G}-\frac{E_u}{2E}\right)\frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}\\
&\quad+\frac{E_v}{2\varepsilon_3\varepsilon_4 G}\frac{N}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}+\frac{E_v}{2E}\frac{L}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}\\
&\frac{N_u}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}-\frac{M_v}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}=\left(\frac{E_v}{2E}-\frac{G_v}{2G}\right)\frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}\\
&\quad+\frac{G_u}{2\varepsilon_3\varepsilon_4 E}.\frac{L}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}+\frac{G_u}{2G}.\frac{N}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}
\end{aligned}\right\}\quad(5.46)$$

olur. (5.46)dan

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{L_v}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}+\frac{M_u}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}.\frac{E_u}{2E}-\frac{N}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}.\frac{E_v}{2\varepsilon_3\varepsilon_4 G}\\
&=\frac{M_u}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}+\frac{L}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}.\frac{E_v}{2E}+\frac{M}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}.\frac{G_u}{2G}
\end{aligned}\right\}\quad(5.47)$$

ve

$$\frac{N_u}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}+\frac{M}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}\frac{G_v}{2G}-\frac{L}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}\frac{G_u}{2\varepsilon_3\varepsilon_4 E}$$
$$=\frac{M_v}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}+\frac{M}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}.\frac{E_v}{2E}+\frac{N}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}.\frac{G_u}{2G} \tag{5.48}$$

yazılır.

b) Yüzey üzerinde F≡0 ve M≡0 ise (5.47) ve (5.48) denklemleri kullanılarak

$$\left.\begin{aligned}\frac{L_v}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}-\frac{N}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}.\frac{E_v}{2\varepsilon_3\varepsilon_4 G}&=\frac{L}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}.\frac{E_v}{2E}\\ \frac{N_u}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}-\frac{L}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}.\frac{G_u}{2\varepsilon_3\varepsilon_4 E}&=\frac{N}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}.\frac{G_u}{2G}\end{aligned}\right\} \tag{5.49}$$

bulunur.

c) Eğer yüzey sıfır uzunlukta eğrilere (minimal eğrilere) karşılık getirilirse, yüzey üzerinde özdeş olarak E=0, G=0 olacağından (5.28), (5.29), (5.30), (5.31), (5.32), (5.33) eşitliklerinden

$$\Gamma_{11}^{1}=-\frac{FF_u}{H^2\varepsilon_3\varepsilon_4}=\frac{+FF_u}{\left(\frac{F^2}{\varepsilon_3\varepsilon_4}-\varepsilon_3\varepsilon_4\underbrace{EG}_{0}\right)\varepsilon_3\varepsilon_4}$$

ya da

$$\Gamma_{11}^{1}=\frac{F_u}{F}=(\log|F|)_u$$

$$\Gamma_{12}^{1}=0\,,\,\Gamma_{12}^{2}=0\,,\,\Gamma_{11}^{2}=0\,,\,\Gamma_{22}^{1}=0$$

$$\Gamma_{22}^{2}=-\frac{-FF_v}{\varepsilon_3\varepsilon_4 H^2}=\frac{FF_v}{\varepsilon_3\varepsilon_4\left(\frac{F^2}{\varepsilon_3\varepsilon_4}\right)}=\frac{F_v}{F}$$

ya da

$$\Gamma_{22}^{2}=(\log|F|)_v$$

olur. Böylece Gauss formülü

$$\left.\begin{aligned}\vec{x}_{uu} &= \left(\log|F|\right)_u \vec{x}_u + \frac{L}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}.\vec{n}\\ \vec{x}_{uv} &= \frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}.\vec{n}\\ \vec{x}_{vv} &= \left(\log|F|\right)_v \vec{x}_v + \frac{N}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}.\vec{n}\end{aligned}\right\} \tag{5.50}$$

şeklinde yazılır.

Üstelik Codazzi-Mainardi formülü de

$$\begin{aligned}\frac{L_v}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}} - \frac{M_u}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}} &= -\left(\log|F|\right)_u \frac{M}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}\\ \frac{N_u}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}} - \frac{M_v}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}} &= -\left(\log|F|\right)_v \frac{M}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}\end{aligned} \tag{5.51}$$

olur. Buradan;

$$\left[\left(\frac{M_u}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}} - \frac{L_v}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}\right).\frac{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}{M}\right]_v$$

$$= \left[\left(\frac{M_v}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}} - \frac{N_u}{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}\right).\frac{\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}{M}\right]_u$$

ya da

$$\left(\frac{\left(M_u - \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}L_v\right)}{M}\right)_v = \left(\frac{\left(M_v - \sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}N_u\right)}{M}\right)_u \tag{5.52}$$

sonucu çıkar. (Ekmekci ve Tunçer 2007)

5.4 Yüzeyler Teorisinin Temel Teoremi: GAUSS Karakteristik Denklemi

(5.5)deki $\left\langle \vec{x}_u, \vec{x}_v \right\rangle = \dfrac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}$ bağıntısının u ya göre kısmi türevi;

$$\left\langle \vec{x}_{uu}, \vec{x}_v \right\rangle + \left\langle \vec{x}_u, \vec{x}_{vu} \right\rangle = \frac{F_u}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} \tag{5.53}$$

dir. Ayrıca (5.5)deki $\left\langle x_u, x_u \right\rangle = \varepsilon_3 E$ eşitliğinin v ye göre kısmi türevi;

$$\left\langle \vec{x}_{uv}, \vec{x}_u \right\rangle + \left\langle \vec{x}_u, \vec{x}_{uv} \right\rangle = \varepsilon_3 E_v$$

ya da

$$\left\langle \vec{x}_u, \vec{x}_{uv} \right\rangle = \varepsilon_3 \frac{E_v}{2}$$

olduğundan (5.53)deki eşitlikten

$$\left\langle \vec{x}_{uu}, \vec{x}_v \right\rangle + \varepsilon_3 \frac{E_v}{2} = \frac{F_u}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} \tag{5.54}$$

elde edilir. (5.54)ün v ye göre kısmi türevi alındığında da

$$\left\langle \vec{x}_{uuv}, \vec{x}_v \right\rangle + \left\langle \vec{x}_{uu}, \vec{x}_{vv} \right\rangle + \varepsilon_3 \frac{E_{vv}}{2} = \frac{F_{uv}}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} \tag{5.55}$$

olur.

(5.5)deki $\left\langle \vec{x}_v, \vec{x}_v \right\rangle = \varepsilon_4 G$ eşitliğinin u ya göre birinci ve ikinci mertebeden türevleri alınırsa;

$$\left\langle \vec{x}_{vu}, \vec{x}_v \right\rangle + \left\langle \vec{x}_v, \vec{x}_{vu} \right\rangle = \varepsilon_4 G_u$$

$$\Rightarrow 2\left\langle \vec{x}_v, \vec{x}_{vu} \right\rangle = \varepsilon_4 G_u$$

$$\Rightarrow \left\langle \vec{x}_v, \vec{x}_{vu} \right\rangle = \frac{\varepsilon_4}{2} G_u$$

ve de

$$\left\langle \vec{x}_{uv}, \vec{x}_{uv} \right\rangle + \left\langle \vec{x}_v, \vec{x}_{uuv} \right\rangle = \frac{\varepsilon_4}{2} G_{uu} \tag{5.56}$$

olur. (5.55) ve (5.56)dan

$$\frac{F_{uv}}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} - \frac{\varepsilon_4}{2} G_{uu} = \cancel{\left\langle \vec{x}_{uuv}, \vec{x}_v \right\rangle} + \left\langle \vec{x}_{uu}, \vec{x}_{vv} \right\rangle$$

$$-\left\langle \vec{x}_{uv}, \vec{x}_{uv} \right\rangle - \cancel{\left\langle \vec{x}_v, \vec{x}_{uuv} \right\rangle} + \frac{\varepsilon_3}{2} E_{vv}$$

ya da

$$\frac{2F_{uv}}{2\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} - \frac{\varepsilon_4}{2}G_{uu} - \frac{\varepsilon_3}{2}E_{vv} = \langle \vec{x}_{uu}, \vec{x}_{vv} \rangle - \langle \vec{x}_{uv}, \vec{x}_{uv} \rangle$$

Sonuç 5.4.1 Bir P(u,v) düzgün noktası yakınlarında sınıfı ≥3 olan bir yüzeyin P(u,v) noktasında durumu

$$\langle \vec{x}_{uu}, \vec{x}_{vv} \rangle - \langle \vec{x}_{uv}, \vec{x}_{uv} \rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{2F_{uv}}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} - \varepsilon_4 G_{uu} - \varepsilon_3 E_{vv} \right) \tag{5.57}$$

dir.

Teorem 5.4.2 Bir P düzgün noktası yakınlarında sınıfı 3'ten büyük olan bir yüzeyin ikinci temel kuadratik formunun

$$\varepsilon_5\left(\frac{LN}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}} - \frac{M^2}{\varepsilon_2\varepsilon_3} \right)$$

diskiriminantı, birinci temel kuadratik formun katsayıları ve bunların birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevlerinden bazıları yardımıyla ifade edilebilir.

İspat

$$\vec{x}_{uu} = \Gamma_{11}^1\vec{x}_u + \Gamma_{11}^2\vec{x}_v + \frac{L}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}}\vec{n}$$

$$\vec{x}_{uv} = \Gamma_{12}^1\vec{x}_u + \Gamma_{12}^2\vec{x}_v + \frac{M}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}}\vec{n}$$

$$\vec{x}_{vv} = \Gamma_{22}^1\vec{x}_u + \Gamma_{22}^2\vec{x}_v + \frac{N}{\varepsilon_5\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_4}}\vec{n}$$

Gauss formüllerini kullanarak aşağıdaki çarpımlar yazılır.

$$\left\langle \vec{x}_{uu},\vec{x}_{vv}\right\rangle = \Gamma_{11}^{1}\Gamma_{22}^{1}\left\langle \vec{x}_{u},\vec{x}_{u}\right\rangle + \Gamma_{11}^{1}\Gamma_{22}^{2}\left\langle \vec{x}_{u},\vec{x}_{v}\right\rangle$$
$$+\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1}\left\langle \vec{x}_{v},\vec{x}_{u}\right\rangle + \Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2}\left\langle \vec{x}_{v},\vec{x}_{v}\right\rangle$$
$$+\frac{LN}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}}\left\langle \vec{n},\vec{n}\right\rangle$$

Burada (5.5) deki

$$\left\langle \vec{x}_{u},\vec{x}_{u}\right\rangle = \varepsilon_3 E,\quad \left\langle \vec{x}_{u},\vec{x}_{v}\right\rangle = \frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}},\quad \left\langle \vec{x}_{v},\vec{x}_{v}\right\rangle = \varepsilon_4 G \ \text{ ve } \left\langle \vec{n},\vec{n}\right\rangle = \varepsilon_5$$

eşitlikleri kullanılırsa;

$$\left\langle \vec{x}_{uu},\vec{x}_{vv}\right\rangle = \varepsilon_3\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{22}^{1}E + \Gamma_{11}^{1}\Gamma_{22}^{2}\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}$$
$$+\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1}\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} + \varepsilon_4\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2}G + \varepsilon_5\frac{LN}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}}$$

ya da

$$\left.\begin{aligned} &\left\langle \vec{x}_{uu},\vec{x}_{vv}\right\rangle = \varepsilon_3\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{22}^{1}E + \varepsilon_4\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2}G \\ &+\left(\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{22}^{2} + \Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1}\right)\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} + \varepsilon_5\frac{LN}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}} \end{aligned}\right\} \tag{5.58}$$

olur. Benzer şekilde

$$\left\langle \vec{x}_{uv},\vec{x}_{uv}\right\rangle = \left(\Gamma_{12}^{1}\right)^2\left\langle \vec{x}_{u},\vec{x}_{u}\right\rangle + \left(\Gamma_{12}^{2}\right)^2\left\langle \vec{x}_{v},\vec{x}_{v}\right\rangle$$
$$+2\Gamma_{12}^{1}\Gamma_{12}^{2}\left\langle \vec{x}_{u},\vec{x}_{v}\right\rangle + \frac{M^2}{\varepsilon_2\varepsilon_3}\left\langle \vec{n},\vec{n}\right\rangle$$

ya da

$$\left.\begin{aligned} &\left\langle \vec{x}_{uv},\vec{x}_{uv}\right\rangle = \varepsilon_3\left(\Gamma_{12}^{1}\right)^2 E + \varepsilon_4\left(\Gamma_{12}^{2}\right)^2 G \\ &\quad + 2\Gamma_{12}^{1}\Gamma_{12}^{2}\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} + \frac{\varepsilon_5}{\varepsilon_2\varepsilon_3}.M^2 \end{aligned}\right\} \tag{5.59}$$

bulunur. (5.58) ve (5.59) dan da

$$\left\langle \vec{x}_{uu}, \vec{x}_{vv} \right\rangle - \left\langle \vec{x}_{uv}, \vec{x}_{uv} \right\rangle = \varepsilon_3 \left(\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{22}^{1} - \left(\Gamma_{12}^{1}\right)^2 \right) E$$

$$+\varepsilon_4 \left(\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2} - \left(\Gamma_{12}^{2}\right)^2 \right) G + \left(\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{22}^{2} + \Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1} - 2\Gamma_{12}^{1}\Gamma_{12}^{2} \right) \frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}$$

$$+\varepsilon_5 \left(\frac{LN}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}} - \frac{M^2}{\varepsilon_2\varepsilon_3} \right)$$

bulunur. Buradan da

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_5 \left(\frac{LN}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}} - \frac{M^2}{\varepsilon_2\varepsilon_3} \right) = \left\langle \vec{x}_{uu}, \vec{x}_{vv} \right\rangle \\ &-\left\langle \vec{x}_{uv}, \vec{x}_{uv} \right\rangle + \varepsilon_3 \left(\left(\Gamma_{12}^{1}\right)^2 - \Gamma_{11}^{1}\Gamma_{22}^{1} \right) E \\ &+\varepsilon_4 \left(\left(\Gamma_{12}^{2}\right)^2 - \Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2} \right) G + \left(2\Gamma_{12}^{1}\Gamma_{12}^{2} - \Gamma_{11}^{1}\Gamma_{22}^{2} - \Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1} \right) \frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} \end{aligned}\right\} \qquad (5.60)$$

çıkar. 5.4.1 sonucundaki (5.57) eşitliğinden de

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_5 \left(\frac{LN}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}} - \frac{M^2}{\varepsilon_2\varepsilon_3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2F_{uv}}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} - \varepsilon_4 G_{uu} - \varepsilon_3 E_{vv} \right) \\ &+\varepsilon_3 \left(\left(\Gamma_{12}^{1}\right)^2 - \Gamma_{11}^{1}\Gamma_{22}^{1} \right) E + \varepsilon_4 \left(\left(\Gamma_{12}^{2}\right)^2 - \Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2} \right) G \\ &+\left(2\Gamma_{12}^{1}\Gamma_{12}^{2} - \Gamma_{11}^{1}\Gamma_{22}^{2} - \Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1} \right) \frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}} \end{aligned}\right\} \qquad (5.61)$$

olur. Bu denkleme Gauss karakteristik denklemi denir.

Sonuç 5.4.3

a) Eğer koordinat çizgilerinin yüzey üzerinde oluşturdukları parametreli eğrilerinin ailesi dikse F=0 olacağından

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{E_u}{2E},\ \Gamma_{11}^{2} = \frac{-E_v}{2.\varepsilon_3\varepsilon_4 G},\ \Gamma_{12}^{1} = \frac{E_v}{2E},\ \Gamma_{12}^{2} = \frac{G_u}{2G},\ \Gamma_{22}^{1} = \frac{-G_u}{2\varepsilon_3\varepsilon_4 E},\ \Gamma_{22}^{2} = \frac{G_v}{2G}$$

eşitlikleri (5.61) denkleminde yerlerine yazılarak

$$\varepsilon_5\left(\frac{LN}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}}-\frac{M^2}{\varepsilon_2\varepsilon_3}\right)=-\frac{\varepsilon_4}{2}G_{uu}-\frac{\varepsilon_3}{2}E_{vv}$$
$$+\varepsilon_3\left(\left(\frac{E_v}{2E}\right)^2+\frac{E_u}{2E}.\frac{G_u}{2\varepsilon_3\varepsilon_4 E}\right)E$$
$$+\varepsilon_4\left(\left(\frac{G_u}{2G}\right)^2+\frac{E_v}{2\varepsilon_3\varepsilon_4 G}.\frac{G_v}{2G}\right)G$$

ya da

$$\varepsilon_5\left(\frac{LN}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}}-\frac{M^2}{\varepsilon_2\varepsilon_3}\right)=-\frac{1}{2}\left(\varepsilon_4 G_{uu}+\varepsilon_3 E_{vv}\right)$$
$$+\frac{\varepsilon_3}{4E^2}\left(\left(E_v\right)^2+\frac{E_uG_u}{\varepsilon_3\varepsilon_4}\right)E$$
$$+\frac{\varepsilon_4}{4G^2}\left(\left(G_u\right)^2+\frac{E_vG_v}{\varepsilon_3\varepsilon_4}\right)G$$

ya da

$$\varepsilon_5\left(\frac{LN}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}}-\frac{M^2}{\varepsilon_2\varepsilon_3}\right)=-\frac{1}{2}\left(\varepsilon_4 G_{uu}+\varepsilon_3 E_{vv}\right)$$
$$+\frac{\varepsilon_3}{4E}\left(\left(E_v\right)^2+\frac{E_uG_u}{\varepsilon_3\varepsilon_4}\right)+\frac{\varepsilon_4}{4G}\left(\left(G_u\right)^2+\frac{E_vG_v}{\varepsilon_3\varepsilon_4}\right)$$

sonucu çıkartılır.

b) Eğer yüzey minimal eğrilerle mukayese edilirse yüzey üzerinde E=0, G=0 olacağından

$$\Gamma_{11}^{1}=\frac{F_u}{F}=\left(\log\left|F\right|\right)_u\ ,\ \Gamma_{12}^{1}=\Gamma_{12}^{2}=\Gamma_{11}^{2}=\Gamma_{22}^{1}=0$$

ve $\Gamma_{22}^{2}=\frac{F_v}{F}=\left(\log\left|F\right|\right)_v$ eşitlikleri (5.61) denkleminde yerine yazılarak

$$\varepsilon_5\left(\frac{LN}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4}}-\frac{M^2}{\varepsilon_2\varepsilon_3}\right)=\frac{F_{uv}}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}-\frac{F_u}{F}.\frac{F_v}{\cancel{F}}\frac{\cancel{F}}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}$$

$$=\frac{F_{uv}}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}-\frac{F_u.F_v}{F.\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}$$

$$=\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}\left(\frac{F.F_{uv}-F_u.F_v}{F^2}\right)$$

$$=\frac{F}{\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_4}}\left(\frac{F_u}{F}\right)_v$$

sonucu çıkarılır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] Beem, J. K., Ehrlich P. E. and Easley, K.L. 1996. Global Lorentzian Geometry. Marcel Dekker Inc. New York, Second Edition.

[2] Birman, G.S. and Nomizu, K. 1984-A. Trigonometry in Lorentzian geometry. Am. Math. Mont. 91(9); 543-549

[3] Birman, G.S. and Nomizu, K. 1984-B. The Gauss-Bonnet theorem for 2-dimensional space-times. Michigan. Math. J. 31; 77-81.

[4] Duggal, K.L. and Bejancu, A. 1996. Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications. Kluwer Academic Publisher.

[5] Ekmekci, N., Tunçer Y., 2007, Gauss and Codazzi-Mainardi Formulae. Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, Sayı: 13 Haziran 2007 1302-3055, Kütahya

[6] O'Neill, B. 1983. Semi Riemannian Geometry. Academic pres. New York, London.

[7] Şemin F., 1983, Diferansiyel Geometri I, İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi, İstanbul.

[8] Şemin F., 1987, Diferansiyel Geometri II, Marmara Üniversitesi Yayınları, Yayın No:441., İstanbul.

[9] Uğurlu, H.H. ve Çalışkan, A. 1997. Space-like Yüzeyler Geometrisi.

[10] Yalınız, A.F., 2004, Lorentz Uzayında Harmonik Eğrilikler ve Eğilim Çizgilerinin karakterizasyonları, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.