KUATERNİYONLARIN LİE GRUP YAPILARI ÜZERİNE

Murat BEKAR

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Nisan – 2009

KUATERNİYONLARIN LİE GRUP YAPILARI ÜZERİNE

Murat BEKAR

Dumlupınar Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik Anabilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman : Doç. Dr. Erhan ATA

Nisan – 2009

KABUL VE ONAY SAYFASI

Murat BEKAR' ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı Kuaterniyonların Lie Grup Yapıları Üzerine başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

…./ …. / ….

Üye : Prof.Dr. Yusuf YAYLI

Üye : Doç.Dr. Erhan ATA (Danışman)

Üye : Yrd.Doç.Dr. Mine TURAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun …. /…. / …. gün ve ……… sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr.Atalay KÜÇÜKBURSA
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

KUATERNİYONLARIN LİE GRUP YAPILARI ÜZERİNE

Murat Bekar
Matematik, Yüksek Lisans Tezi, 2009
Tez Danışmanı: Doç.Dr.Erhan ATA

ÖZET

Bu tezde ilk olarak $\mathbb{D}$ dual sayılar, $\mathbb{H}$ reel kuaterniyonlar, $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyonlar, $\mathbb{H}^{'}$ bölünmüş (split) kuaterniyonlar ve $\mathbb{H}^{'}_{\mathbb{D}}$ dual bölünmüş (split) kuaterniyonlar esas alınmış ve özellikleri geniş biçimde incelenmiştir. Daha sonra, $\mathbb{S}^3$ birim reel kuaterniyonlar cümlesi, $\mathbb{S}^3_{\mathbb{D}}$ birim dual kuaterniyonlar cümlesi, $(\mathbb{S}^{'})^3$ birim bölünmüş (split) kuaterniyonlar cümlesi ve $(\mathbb{S}^{'}_{\mathbb{D}})^3$ birim bölünmüş (split) dual kuaterniyonlar cümlesi üzerindeki Lie grubu ve Lie cebiri yapıları ele alınarak matris gösterimleri elde edilmiştir. Ayrıca, bu grupların adjoint gösterimleri ve Killing bilineer formları bulunarak, adjoint gösterimlerinin bir dönmeye karşılık geldiği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Riemann Manifoldu, Yarı-Riemann Manifoldu, Lie Grubu, Lie Cebiri, Reel Kuaterniyon, Dual Kuaterniyon, Bölünmüş (Split) Kuaterniyon, Dual Bölünmüş (Split) Kuaterniyon.

ON THE LIE GROUP STRUCTURE OF QUATERNIONS

Murat Bekar
Mathematics, M.S. Thesis, 2009
Thesis Supervisor: Assoc.Prof.Erhan ATA

SUMMARY

In this thesis firstly, $\mathbb{D}$ dual numbers, $\mathbb{H}$ real quaternions, $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ dual quaternions, $\mathbb{H}^{'}$ split quaternions and $\mathbb{H}^{'}_{\mathbb{D}}$ dual split quaternions and their properties are examined in detail. Afterwards, Lie group structures and Lie algebra structures on the sets $\mathbb{S}^3$ of unit real quaternions, $\mathbb{S}^3_{\mathbb{D}}$ unit dual quaternions, $(\mathbb{S}^{'})^3$ unit split quaternions and $(\mathbb{S}^{'}_{\mathbb{D}})^3$ unit split dual quaternions are considered and their matrix representations are found. Also, adjoint representations and Killing bilinear forms of these groups are found and it is shown that their adjoint representations correspond to a rotation.

Key Words: Riemann Manifold, Semi-Riemann Manifold, Lie Group, Lie Algebra, Real Quaternion, Dual Quaternion, Split Quaternion, Dual Split Quaternion.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım süresince değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, kıymetli zamanını bana ayırarak titizlikle tezi inceleyen tez danışmanım Doç. Dr. Erhan ATA' ya, yine değerli fikirlerinden yararlandığım hocalarım Prof. Dr. Yusuf YAYLI ve Prof. Dr. H.Hilmi HACISALİHOĞLU' na, çalışmayı titizlikle okuyan Sayın Beytullah BEKAR' a teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan ve sonsuz anlayışları ile beni her zaman destekleyen kıymetli aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{E}_v^n$	Yarı - Öklid Uzayı
M_v^n	Yarı – Riemann Manifoldu
$\mathbb{D}$	Dual Sayılar Halkası
$\mathbb{H}$	Reel Kuaterniyonlar Uzayı
$\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$	Dual Kuaterniyonlar Uzayı
$\mathbb{H}'$	Bölünmüş Kuaterniyonlar Uzayı
$\mathbb{H}'_{\mathbb{D}}$	Dual Bölünmüş Kuaterniyonlar Uzayı
$\mathbb{S}^3$	Birim Kuaterniyonların Cümlesi
$\mathbb{S}^3_{\mathbb{D}}$	Dual Birim Kuaterniyonların Cümlesi
$(\mathbb{S}')^3$	Birim Bölünmüş Kuaterniyonların Cümlesi
$(\mathbb{S}'_{\mathbb{D}})^3$	Dual Birim Bölünmüş Kuaterniyonların Cümlesi
G	Lie Grubu
$\mathfrak{G}$	G nin Lie Cebiri
AdG	G Lie grubunun adjoint Gösterimi

1. GİRİŞ

Matematikte kuaterniyonlar, karmaşık sayılar cisminin değişmli olmayan genişletmesidir. İlk defa İrlandalı matematikçi Sir William Rowan Hamilton tarafından 1843 yılında tanımlanmış ve 3-boyutlu uzaydaki matematiğe uygulanmıştır. İlk başta, kuaterniyonlar değişme kuralına uymadıkları için sorunlu kabul edilmişlerdir. Her ne kadar pek çok uygulamada vektörler yerlerini almış olsa da, hala kuramsal ve uygulamalı matematikte kullanılmaktadırlar. Başlıca kullanım alanları diferensiyel geometri, mekanik ve makinaların sentezinde ve analizinde, moleküler fizikteki parçacık hareketlerinde ve izafiyet teoremindeki hareket denklemlerinin formülasyonu gibi fiziksel bilimlerdir. Ayrıca, 3 – boyutlu uzayda dönme hareketinin hesaplanması, bilgisayar programı yazımı ve rotasyonları matrisler yerine kuaterniyonlar ile belirtmek çok daha kullanışlı olduğundan bilgisayar grafiklerinin oluşturulması da başlıca kullanım alanlarındandır.

Kinematik, kuvvet ve kütle kavramlarını içermeyen Mekaniğin bir dalıdır. Yani Kinematik, sadece bir nokta veya nokta sistemi cismin zamana bağlı olarak yer değiştirmesini inceler. Kuaterniyonlar 1843 yıllarında William Rowan Hamilton (1805 – 1865) tarafından tanımlanmış ve Kinematikte hareketlerin incelenmesi bakımından önemli bir rol oynadığı birçok çalışmada ifade edilmiştir.

Yang ve Freudenstein (1964) dual kuaterniyonların uzay Mekaniği analizine uygulamasını ele almış ve detaylı bir çalışma ile, bir dönme çifti ve üç silindirik çift seçerek uzay 4-link Mekaniğini incelemiştir.

Veldkamp (1976) dual birim vektörler ve dual vektör çiftleri yardımı ile dual birim küreyi ifade etmiş ve dual küresel hareketleri vermiştir. Ayrıca, dual hareket ve reel uzay hareketi arasındaki bağıntıyı göstermiştir.

Rooney (1977) sabit bir nokta etrafında bir cismin dönme hareketini metodlar halinde ifade etmiştir. 3 x 3 tipinde reel ortogonal matrisler O(3), 2 x 2 tipinde üniter matrisler U(2), Pauli spin matrisleri, 3 x 3 tipinde özel üniter matrisler SU(3) yardımıyla bir eksen etrafında dönme matrislerini sınıflandırmıştır.

Bottema ve Roth (1979) reel ve dual kuaterniyonların uzay Kinematiğine uygulamalarını ifade etmiştir. Hareket matrislerinin formlarını vermiştir.

Hacısalihoğlu (1983) reel ve dual kuaterniyonları ve sağladıkları özellikleri ayrıntılı bir şekilde incelemiştir. Birim dual kuaterniyonlar yardımıyla dönme ve kayma operatörlerini ifade etmiştir. Ayrıca vida operatörünün dönme ve kayma operatörlerinin bileşkesi olarak yazılabileceğini göstermiştir. Vida hareketlerinin bileşimini ve Euler açılarının denklemlerini vermiştir.

Hiller ve Woernle (1984), bir cismin genel vida hareketlerini noktalara ve doğrulara göre formülleştirmiştir. Her iki durum için de, temel bağlantıları sağlayan ani vida hareketlerinin diferensiyel denklemlerini vermiş ve bu diferensiyel denklemlerinin çözümlerinden de sonlu vida hareketini ifade etmiştir.

Yaylı ve Çalışkan (2002) dual hiperbolik ve Lorentzian birim küreler üzerinde çemberlerin E.study dönüşümlerini genelleştirerek vida hareketlerini split kuaterniyonlarda ifade etmişlerdir [12].

Karger ve Novak (1985) reel kuaterniyonlar yardımıyla E^3 Öklid uzayında bir eksen etrafında dönmeyi adjoint gösterimiyle ifade etmiştir.

Agrawal (1987) dual kuaterniyonları, Hamilton operatörleri ile formülleştirmiştir ve bu operatörlere karşılık gelen dual matrislerin özelliklerini ifade etmiştir. Bu özellikleri bir nokta ve bir doğrunun vida hareketinin Kinematik denklemlerini geliştirmekte kullanmıştır.

Ward (1997) 3 ve 4 boyutlu Öklid uzaylarında dönme matrislerini reel kuaterniyonları kullanarak vermiştir. Kuaterniyonların matris formlarını ifade etmiştir.

Inoguchi (1998) bölünmüş (split) kuaterniyonları tanımlamış ve Minkowski 3-uzayında sabit ortalama eğrilikli zamansı (timelike) yüzeylerin temel denklemlerini bölünmüş (split) kuaterniyonlar yardımıyla yeniden formülleştirmiştir [8].

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezin ilerleyen bölümlerinde kullanılan bazı temel kavram ve notasyonlar ile ilgili bilgiler verilecektir.

Tanım 2.1 V ve W aynı bir F cismi üzerinde sonlu boyutlu iki vektör uzayı olsun.

$A : V \times W \rightarrow F$

dönüşümü, $\forall\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha \in V$ ve $\forall\ \beta_1, \beta_2, \beta \in W$ için $\forall\ a_1, a_2 \in F$ olmak üzere

i) $A(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2, \beta) = a_1 A(\alpha_1, \beta) + a_2 A(\alpha_2, \beta)$

ii) $A(\alpha, a_1\beta_1 + a_2\beta_2) = K(a_1) A(\alpha, \beta_1) + K(a_2) A(\alpha, \beta_2)$

aksiyomları sağlanıyor ise A dönüşümüne $V \times W$ üzerinde bilineer (2-lineer) dönüşüm veya ikinci dereceden kovaryant tensördür denir [3].

Tanım 2.2 F cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı V ve V üzerindeki bir bilineer dönüşüm A olsun. $\forall\ \alpha, \beta \in V$ için

i) $A(\alpha, \beta) = K(A(\beta,\alpha))$ ise A eşlenik simetrik bilineer dönüşümdür denir.

ii) $A(\alpha, \alpha) \geq 0$ ise A pozitif bilineer dönüşümdür denir.

iii) $A(\alpha, \alpha) > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ise A pozitif tanımlı bilineer dönüşümdür denir.

Eğer bir V reel vektör uzayı için $A : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilineer dönüşümü

$\forall\ \alpha, \beta \in V$ için $A(\alpha, \beta) = A(\beta, \alpha)$

özeliğini sağlıyorsa A simetrik bilineer dönüşümdür denir [3].

Tanım 2.3 V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerindeki bir iç çarpım aşağıdaki aksiyomlarla tanımlanan bir

$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

dönüşümüne denir.

i) Simetri Aksiyomu

ii) Bilineerlik Aksiyomu

iii) Pozitif Tanımlılık Aksiyomu

V vektör uzayı üzerinde tanımlı $\langle\ ,\ \rangle$ iç çarpimi ile birlikte bir iç çarpım uzayı olur. $\forall\ u, v \in V$ olmak üzere u ile v nin iç çarpımı ise $\langle u, v \rangle$ şeklinde gösterilir [3].

Tanım 2.4 $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi olmak üzere n-boyutlu kompleks vektör uzayı $\mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C}x\mathbb{C}x...x\mathbb{C}}_{\text{n tane}}$ olsun. $\forall$ X, Y $\in \mathbb{C}^n$ için $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$; $x_i, y_i \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(X, Y) \rightarrow \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i K(y_i)$$

şeklinde tanımlı $\langle\ ,\ \rangle$ dönüşümü aşağıdaki özelikleri sağladığından $\mathbb{C}^n$ üzerinde bir iç çarpımdır.

i) Eşlenik Simetri Aksiyomu
ii) Bilineerlik Aksiyomu
iii) Pozitif Tanımlılık Aksiyomu

Bu iç çarpıma $\mathbb{C}^n$ üzerindeki standart iç çarpım veya Hermit anlamındaki iç çarpım denir [3].

Tanım 2.5 Reel (veya kompleks) vektör uzayı üzerinde bir iç çarpım tanımlanırsa bu vektör uzayına bir reel (veya kompleks) iç çarpım uzayı denir [3].

Tanım 2.6 Bir $\mathcal{A} \in \mathbb{C}_n^m$ matrisi $\mathcal{A} = [\ a_{ij}\ ]$ ile verilsin. $\mathcal{A}$ matrisinin kompleks eşleniği $K(\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{A}} = \left[\overline{a_{ij}}\right]$ olmak üzere $\mathcal{A}$ nın adjointi veya eki diye $\mathcal{A}^* = \overline{\mathcal{A}^T} = (\ \overline{\mathcal{A}}\ )^T = \left[\overline{a_{ji}}\right] \in \mathbb{C}_m^n$ matrisine denir. Eğer $\mathcal{A} \in \mathbb{R}_n^m$ ise $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ olacağından $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^T \in \mathbb{R}_n^m$ olur [3].

Tanım 2.7 Eğer $\mathcal{A} \in \mathbb{C}_n^n$ matrisi için $\mathcal{A}^* = (\ \overline{\mathcal{A}}\ )^T = \mathcal{A}$ ise $\mathcal{A}$ matrisine bir Hermityen matris, $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$ ise $\mathcal{A}$ matrisine Anti-Hermityen matris denir [3].

Tanım 2.8 Bir $\mathcal{F}$ cismi üzerinde determinantı sıfırdan farklı (regüler) olan nxn tipindeki matrislerin cümlesi, matris çarpımı işlemine göre bir gruptur. Bu grup

$$GL(\ n, \mathcal{F}\ ) = \{\ \mathcal{A} \in \mathcal{F}_n^n : \det \mathcal{A} \neq 0\ \}$$

şeklinde gösterilir ve Genel Lineer Grup adını alır.

Determinantı 1 olan bütün Genel Lineer Grup matrislerinin oluşturduğu alt gruba Özel Genel Lineer Grup adı verilir ve

$$SL(n, \mathcal{F}) = \{ \mathcal{A} \in GL(n, \mathcal{F}) : \det \mathcal{A} = 1 \}$$

şeklinde gösterilir.

Eğer $\mathcal{F} = \mathbb{C}$ alınırsa kompleks Genel Lineer Grup

$$GL(n, \mathbb{C}) = \{ \mathcal{A} \in \mathbb{C}_n^n : \det \mathcal{A} \neq 0 \}$$

ve kompleks Özel Genel Lineer Grup

$$SL(n, \mathbb{C}) = \{ \mathcal{A} \in GL(n, \mathbb{C}) : \det \mathcal{A} = 1 \}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ için reel Genel Lineer Grup

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{ \mathcal{A} \in \mathbb{R}_n^n : \det \mathcal{A} \neq 0 \}$$

ve reel Özel Genel Lineer Grup

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{ \mathcal{A} \in GL(n, \mathbb{R}) : \det \mathcal{A} = 1 \}$$

olur. Buradan

$SL(n, \mathbb{R}) \subset SL(n, \mathbb{C})$ ve $GL(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{C})$ elde edilir [5].

Tanım 2.9 V sonlu boyutlu bir kompleks iç çarpım uzayı olsun. Bir A: $V \to V$ lineer dönüşümü $\forall$ X, Y $\in V$ için

$$\langle A(X), A(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle$$

ise A lineer dönüşümüne üniter dönüşüm denir.

Eğer A üniter dönüşümüne karşılık gelen matris $\mathcal{A} \in \mathbb{C}_n^n$ ile gösterilirse

$$\mathcal{A}(\overline{\mathcal{A}})^T = (\overline{\mathcal{A}})^T \mathcal{A} = I_n$$

olur ve $\mathcal{A}$ ya üniter matris denir.

$\mathbb{C}_n^n$ üzerindeki tüm üniter matrislerin cümlesi matris çarpımı işlemine göre bir gruptur. Bu gruba üniter grup denir ve

$$U(n) = \{ \mathcal{A} \in \mathbb{C}_n^n : \mathcal{A}(\overline{\mathcal{A}})^T = (\overline{\mathcal{A}})^T \mathcal{A} = I_n \}$$

ile gösterilir. Determinantı 1 olan bütün üniter matrislerin oluşturduğu alt gruba özel üniter grup denir ve

$$SU(n) = \{ \mathcal{A} \in U(n) : \det \mathcal{A} = 1 \}$$

ile gösterilir.

Eğer V sonlu boyutlu bir reel iç çarpım uzayı olarak alınırsa A üniter dönüşümüne reel üniter veya ortogonal dönüşüm denir. A ortogonal dönüşümüne karşılık gelen matris $\mathcal{A}$ ise

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^T = \mathcal{A}^T \mathcal{A} = I_n$$

olur ve $\mathcal{A}$ ya ortogonal matris denir.

$\mathbb{R}_n^n$ üzerindeki tüm ortogonal matrislerin cümlesi matris çarpımı işlemine göre bir grup olup bu gruba ortogonal grup denir ve

$$O(n) = \{ \mathcal{A} \in \mathbb{R}_n^n : \mathcal{A}^T \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^T = I_n \}$$

şeklinde gösterilir.

Determinantı 1 olan bütün ortogonal matrislerin oluşturduğu alt gruba özel ortogonal grup veya dönme grubu denir ve

$$SO(n) = \{ \mathcal{A} \in O(n);\ \det \mathcal{A} = 1 \}$$

ile gösterilir. Buna göre

$O(n) \subset U(n)$ ve $SO(n) \subset SU(n)$ elde edilir [3].

Tanım 2.10 X ve Y birer topolojik uzay olsunlar. Bir $f : X \to Y$ fonksiyonu sürekli, f^{-1} tersi var ve f^{-1} de sürekli ise f ye X den Y ye bir homeomorfizim (topolojik dönüşüm) denir. f bir homeomorfizim olduğu zaman X ile Y uzaylarına da topolojik olarak denktirler veya homeomorfiktirler denir [6].

Tanım 2.11 M bir Hausdorff uzayı olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M ye n-boyutlu topolojik manifold (veya kısaca topolojik n-manifold) denir.

i) M nin her bir açık altcümlesi E^n veya E^n nin bir açık altcümlesine homeomorftur.

ii) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir [6].

Tanım 2.12 M bir n-boyutlu topolojik manifold ve U da E^n in bir açık alt cümlesi olsun. Topolojik manifoldun tanımı gereğince U bir ψ homeomorfizimi ile M nin bir W açık alt cümlesine eşlenebilir. Buna göre $\psi : U \subset E^n \rightarrow W \subset M$ olmak üzere (ψ, W) ikilisine M de bir koordinat komşuluğu veya harita denir.

M nin bir açık örtüsü $\{W_\alpha\}$ olsun. W_α açık cümlelerinin α indislerinin cümlesi A olmak üzere $\{W_\alpha\}$ örtüsü için $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ yazılır. E^n de W_α ya bir ψ_α homeomorfizimi altında homeomorf olan açık cümle U_α olsun. Böylece ortaya çıkan (ψ_α, W_α) haritalarının $\{(\psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ koleksiyonuna bir atlas (koordinat komşuluğu sistemi) denir.

M nin bir atlası $S = \{(\psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ olsun. Eğer S atlası için $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere $\forall\ \alpha, \beta \in A$ ya karşılık $\emptyset_{\alpha\beta}$ ve $\emptyset_{\beta\alpha}$ fonksiyonları $\mathbb{C}^k$ sınıfından diferensiyellenebilir iseler S ye $\mathbb{C}$ sınıfından diferensiyellenebilirdir denir. S atlası M üzerinde $\mathbb{C}^k$ sınıfından olduğu zaman S ye M üzerinde $\mathbb{C}^k$ sınıfından diferensiyellenebilir yapı adı verilir [6].

Tanım 2.13 M bir topolojik n-manifold olsun. M üzerinde $\mathbb{C}^k$ sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M ye C^k sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir [6].

Tanım 2.14 G grubu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. G deki grup operatörleri diferensiyellenebilir ise G ye bir Lie grubu denir. Buna göre G deki grup operatörü

$\mu: G \times G \rightarrow G : \mu(a, b) = ab$

ve inversiyon operatörü olan

$\xi: G \rightarrow G ;\ \xi(a) = a^{-1}$

dönüşümlerinin ikisi de diferensiyellenebilirdir [9].

Tanım 2.15 V bir reel vektör uzayı olsun.

$$\begin{aligned} [\ ,\ ] &: V \times V \rightarrow V \\ (X, Y) &\rightarrow [\ ,\ ](X, Y) = [X, Y] = XY - YX \end{aligned}$$

biçimindeki bir dönüşüm $\forall\ X, Y, Z \in V$ için aşağıdaki üç önermeyi doğruluyorsa bu dönüşüme Parantez (bracket) operatörü, $(V, [\ ,\ ])$ ikilisine de bir Lie Cebiri denir.

i) [,] bilineerdir

ii) $[X, Y] = -[Y, X]$, (antisimetriktir)

iii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$, (Jakobi özdeşliği) [6].

Tanım 2.16 G Lie grubunun herhangi bir elemanı a olsun. $\forall\, g \in G$ için $L_a(g) = a \cdot g$ olarak tanımlanan $L_a: G \to G$ dönüşmüne G nin sol ötelemesi (sol çarpımı) denir.

$\forall\, g \in G$ için $r_a(g) = g \cdot a$ olarak tanımlanan $r_a: G \to G$ dönüşmüne G nin sağ ötelemesi (sağ çarpımı) denir. L_a ve r_a dönüşümleri birer diffeomorfizimdir [9].

Tanım 2.17 $F : E^n \to E^m$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\vec{v}_p \in T_{E^n}(p)$ ise $(F_*)_p(\vec{v}_p) \in T_{E^m}(F(p))$ de E^m nin $t \to F(\vec{p} + t\vec{v})$ eğrisinin $t = 0$ noktasındaki hız vektörü olsun. Böylece tanımlı

$$(F_*)_p : T_{E^n}(p) \to T_{E^m}(F(p))$$

fonksiyonuna F nin $p \in E^n$ noktasındaki türev dönüşümü denir. $(F_*)_p$ dönüşüm $(dF)_p = F'_p$ biçiminde de gösterilir [6].

Tanım 2.18 G bir Lie grubu ve G üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\mathcal{X}(G)$ olsun.

$\forall\, a, g \in G$ için $dl_a(X_g) = X_{ag}$ ise

G Lie grubu üzerindeki X vektör alanına sol-invaryanttır denir. Dolayısıyla

$$l_a : G \to G$$
$$g \to l_a(q) = aq$$

sol çarpımının

$$dl_a = (l_a)_* : T_G(q) \to T_G(aq)$$
$$X_q \to dl_a(X_q) = X_{aq}$$

türev dönüşümü X in oluşturduğu teğet vektörleri yer değiştirir. Ayrıca sol-invaryant vektör alanı diferensiyellenebilirdir.

G deki sol-invaryant vektör alanlarının cümlesi $\mathcal{X}_\ell G$ olsun. Vektör alanlarının alışılmış toplama ve skaler ile çarpma işlemleri $\mathcal{X}_\ell G$ yi bir vektör uzayı yapar. $\mathcal{X}_\ell G$ de [,] parantez operatörüde tanımlanarak $\mathcal{X}_\ell G$ bir Lie Cebiri olur. boy G = boy $\mathcal{X}_\ell G$ dir [10].

Teorem 2.1 e, G lie grubunun birim elemanı ve $X_o \in T_G(e)$ olmak üzere G üzerinde ancak ve ancak bir tane $X_o = X_e$ olacak şekilde sol invaryant vektör alanı vardır. Ayrıca bu vektör alanı analitiktir.

Bu teorem G sol invaryant vektör alanlarının e noktasındaki değerleri ile birebir eşleştiğini göstermektedir. $\mathfrak{G}$, G üzerindeki tüm sol invaryant vektör alanlarını belirtsin. $\mathfrak{G}$, G Lie grubu ile aynı boyuta sahip bir Lie cebiridir [1].

Tanım 2.19 e, G Lie grubunun birim elemanı ve $\xi, \eta \in T_G(e)$ olsun. X ve Y ise ξ ve η ile belirlenen sol invaryant vektör alanlarını belirtsin. Öyleyse $[\xi, \eta] = [X, Y]_e$ şeklinde tanımlanabilir.

Sonuç olarak, grubun birim elemanındaki $T_G(e)$ teğet uzayı bir Lie cebiri olur [1].

Tanım 2.20 G Lie grubu verilsin. g , G grubundan seçilmiş belirli bir eleman olsun. Herhangi bir $h \in G$ için

$$\begin{aligned} Intg : G &\to G \\ h &\to ghg^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümü G grubunun diferensiyellenebilir izomorfizimidir ve $e \in G$ birim eleman olmak üzere $Intg(e) = geg^{-1} = e$ dir. Bu ise e noktasındaki Intg dönüşümünün diferensiyelidir. Diğer bir ifadeyle

$(Intg)'_e : T_G(e) \to T_G(e)$; $(Intg)'_e = (Intg)_{*e} = Adg$ anlamına gelir.

Buradan $adg : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ olur. Böylece $Ad : G \to Hom(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ dönüşümüne G grubunun adjoint gösterimi adı verilir [8].

Teorem 2.2 G bir Lie grubu ve G nin Lie cebiri $\mathfrak{G}$ olsun. $\forall g \in G$ ve $\forall\ \xi, \eta \in \mathfrak{G}$ için

$Adg[\xi, \eta] = [Adg\xi, Adg\eta]$ dir [8].

Tanım 2.21 $\mathfrak{G}$ bir Lie cebiri olsun. X, $\mathfrak{G}$ cebrinden seçilmiş belirli bir eleman olmak üzere $\forall\ Y \in G$ için

$AdX: G \to G$; $Y \to AdX(Y) = [X, Y]$ olarak gösterilebilir.

$\forall$ X, Y $\in \mathfrak{G}$ için

K: $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \rightarrow \mathbb{R}$; (X , Y) $\rightarrow$ K (X , Y) = Tr (AdX . AdY)

olarak tanımlansın. K (X , Y) formu $\mathfrak{G}$ deki Killing bilineer form olarak adlandırılır. Burada Tr (AdX . AdY) ifadesi AdX$\cdot$AdY : $\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$; Z $\rightarrow$ [X, [Y,Z]]

dönüşümün izine karşılık gelir. K (X , Y) bir simetrik bilineer formdur. A kare matrisinin köşegen elemanlarının toplamı Tr (A) şeklinde gösterilir [8].

Teorem 2.3 Killing bilineer form invaryanttır. Diğer bir ifadeyle $\forall$ g $\in$ G ve $\forall$ $\xi, \eta \in \mathfrak{G}$ için K (Adg ξ , Adg η) = K (ξ , η) dır [8].

Tanım 2.22 M bir $\mathbb{C}^{\infty}$ manifold olsun. M üstünde vektör alanlarının uzayı $\mathcal{X}(M)$ ve reel değerli $\mathbb{C}^{\infty}$ fonksiyonların halkası $\mathbb{C}^{\infty}$(M , $\mathbb{R}$) olmak üzere

$\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathbb{C}^{\infty}(M, \mathbb{R})$

şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise M ye bir Riemann manifoldu denir. Burada $\langle\ ,\ \rangle$ dönüşümüne M üzerinde iç çarpım, metrik tensör, Riemann metriği veya diferensiyellenebilir metrik denir [7].

Tanım 2.23 M bir $\mathbb{C}^{\infty}$ manifold olsun. M üstünde vektör alanlarının cümlesi $\mathcal{X}(M)$ ve reel değerli $\mathbb{C}^{\infty}$ fonksiyonlarının halkası da $\mathbb{C}^{\infty}$(M , $\mathbb{R}$) olmak üzere

$\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathbb{C}^{\infty}(M, \mathbb{R})$

dönüşümü

i) İki lineer
ii) Simetrik
iii) Non-dejenere
[Y$\in \mathcal{X}(M)$ olmak üzere $\forall$ X $\in \mathcal{X}(M)$ için $\langle$ X , Y $\rangle$ = 0 $\Rightarrow$ Y=0]

özeliklerini sağlıyor ise $\langle\ ,\ \rangle$ ye M üzerinde bir metrik tensör denir ve g ile gösterilir. Bu durumda (M, g) ikilisine bir yarı-Riemann manifoldu adı verilir.

V skalar çarpımlı vektör uzayının ortonormal bir { $e_1, e_2,\ldots, e_n$ } bazı için $g_{ij} = g(e_i, e_j) = \delta_{ij}\,\varepsilon_j$ dir ve burada $\varepsilon_j = g(e_j, e_j) = \pm 1$ dir. V vektör uzayının ortonormal bir bazı sıralı olarak göz önüne alındığında, ε_j sayıları negatif olan vektörlerin ilk sırada yazıldığı varsayılsın. Bu durumda ($\varepsilon_1, \varepsilon_2,\ldots, \varepsilon_n$) deki negatif sayıların sayısı g nin indeksine eşittir. g nin indeksine V nin indeksi denir.

g nin v indeksine ise (M, g) yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir. M nin boyutu n olmak üzere M yarı-Riemann manifoldu M_v^n ile gösterilir.

(M , g) bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Eğer $n \geq 2$ ve $v = 1$ ise M_1^n yarı-Riemann manifolduna Lorentz manifoldu denir.

Eğer $M = \mathbb{R}^n$ alınırsa $\mathbb{R}_v^n$ yarı- öklid uzayı elde edilir. Özel olarak $v = 1$, $n \geq 2$ için $\mathbb{R}_1^n$ Minkowski n-uzayı olur [10].

Tanım 2.24 M yarı-Riemann manifoldu ve g de M üstünde bir metrik tensör olsun. Bu durumda M deki bir v tanjant vektörü için

i) $g(v, v) > 0$ veya $v = 0$ ise v vektörüne uzaysı (spacelike) vektör

ii) $g(v, v) < 0$ ise v vektörüne zamansı (timelike) vektör

iii) $g(v, v) = 0$ ve $v \neq 0$ ise v vektörüne boşluksu (null) vektör denir [9].

Tanım 2.25 $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi olmak üzere

$\mathbb{D} = \{ A = a + \varepsilon a^* : a, a^* \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon \neq 0, \varepsilon^2 = 0 \}$

cümlesi üzerinde aşağıdaki gibi toplama ve çarpma işlemleri tanımlanırsa $\mathbb{D}$ cümlesi birimli ve değişmeli bir halka olur (çarpma işlemine göre $\mathbb{D}$ deki her elemanın tersi olmadığından cisim değildir).

$\mathbb{D}$ nin her bir $A = a + \varepsilon a^*$ elemanına da bir dual sayı denir ve $A = a + \varepsilon a^* = (a, a^*)$ şeklinde yazılabilir.

$\mathbb{D}$ deki herhangi iki eleman $A = (a, a^*)$ ve $B = (b, b^*)$ olmak üzere

$$\oplus : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$$

$$(A, B) \to A \oplus B = (a, a^*) \oplus (b, b^*)$$

$$= (a+b, a^*+b^*)$$

ve

$$\odot : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$$

$$(A, B) \to A \odot B = (a, a^*) \odot (b, b^*)$$

$$= (ab, ab^*+a^*b)$$

şeklinde tanımlanır.

$A = a + \varepsilon a^*$ dual sayısında a ve a^* reel sayılarına sırası ile A nın reel ve dual kısımları denir ve $\mathrm{Re}\,A = a$, $\mathrm{Du}\,A = a^*$ şeklinde yazılır. $A = a + \varepsilon a^*$ sayısının eşleniği $K(A) = a - \varepsilon a^*$ dır [4].

Tanım 2.26 $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası olmak üzere

$\mathbb{D}^3 = \mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D} = \{ \vec{A} = (A_1, A_2, A_3) : A_i \in \mathbb{D}, 1 \leq i \leq 3 \}$

cümlesi üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanırsa $\mathbb{D}^3$ bir modül olur. Buna kısaca $\mathbb{D}$ - modül adını vereceğiz ve bir vektör uzayı olarak bakacağız.

$\mathbb{D}^3$ deki herhangi iki eleman $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ ve $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ olmak üzere

$$\oplus : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \to \mathbb{D}^3$$

$$(\vec{A}, \vec{B}) \to \vec{A} \oplus \vec{B} = (A_1 + B_1, A_2 + B_2, A_3 + B_3)$$

ve $\lambda \in \mathbb{D}$ için

$$\odot : \mathbb{D} \times \mathbb{D}^3 \to \mathbb{D}^3$$

$$(\lambda, \vec{A}) \to \lambda \odot \vec{A} = (\lambda A_1, \lambda A_2, \lambda A_3)$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre $\mathbb{D}$ - modülün elemanları olan sıralı dual üçlülere dual vektörler denir [4].

Teorem 2.4 Herhangi $\vec{a}$, $\vec{a^*} \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $\mathbb{D}$ -Modül' de her bir $\vec{A}$ dual vektörü

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= (A_1, A_2, A_3), \quad A_i = a_i + \varepsilon a_i^*, \quad 1 \leq i \leq 3 \\
&= (a_1 + \varepsilon a_1^*, a_2 + \varepsilon a_2^*, a_3 + \varepsilon a_3^*) \\
&= (a_1, a_2, a_3) + \varepsilon (a_1^*, a_2^*, a_3^*) \\
&= \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir [4].

Tanım 2.27 $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon \overrightarrow{a^*}$ ve $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{b} + \varepsilon \overrightarrow{b^*}$ herhangi iki dual vektör olsun.

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{D}^3 \mathrm{x}\, \mathbb{D}^3 \to \mathbb{D}\ ;\ \langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \rangle = \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle + \varepsilon [\langle \overrightarrow{a^*}, \overrightarrow{b} \rangle + \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b^*} \rangle]$$

dönüşümü $\mathbb{D}$ - modül üzerinde bir iç çarpımdır [4].

Tanım 2.28 $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası olmak üzere $\mathbb{D}^3$, $\mathbb{D}$ - modül yapısıyla alınsın.

$$N : \mathbb{D}^3 \to \mathbb{D},\ \overrightarrow{A} \to N(\overrightarrow{A}) = N_{\overrightarrow{A}} = \| \overrightarrow{A} \| = (\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{A} \rangle)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlı dönüşüme $\mathbb{D}$ - modülde bir norm fonksiyonu $N_{\overrightarrow{A}} = \| \overrightarrow{A} \| \in \mathbb{D}$ dual sayısına da $\overrightarrow{A}$ nın normu denir. Buradan herhangi bir $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon \overrightarrow{a^*}$ dual vektörünün normu

$$\begin{aligned}
\| \overrightarrow{A} \| &= \| \overrightarrow{a} + \varepsilon \overrightarrow{a^*} \| \\
&= (\langle \overrightarrow{a} + \varepsilon \overrightarrow{a^*}, \overrightarrow{a} + \varepsilon \overrightarrow{a^*} \rangle)^{\frac{1}{2}} \\
&= (\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} \rangle + \varepsilon (\langle \overrightarrow{a^*}, \overrightarrow{a} \rangle + \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a^*} \rangle))^{\frac{1}{2}} \\
&= (\| \overrightarrow{a} \|^2 + 2\varepsilon \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a^*} \rangle)^{\frac{1}{2}} \\
&= \| \overrightarrow{a} \| + \varepsilon \frac{\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a^*} \rangle}{\| \overrightarrow{a} \|}\ ;\ (\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}) \\
&= a + \varepsilon a^*\ ;\ \left(a = \| \overrightarrow{a} \|,\ a^* = \frac{\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a^*} \rangle}{\| \overrightarrow{a} \|} \right)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır [4].

Tanım 2.29 Herhangi $\overrightarrow{O}$ ve $\overrightarrow{A} \in \mathbb{D}^3$ dual noktalarının belirttiği $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A}$ dual vektörünün normu $\| \overrightarrow{A} \| = \| \overrightarrow{a} + \varepsilon \overrightarrow{a^*} \| = a + \varepsilon a^*$; (a, $a^* \in R$) dual sayısıdır. Bu dual sayı $\| \overrightarrow{A} \| = d(\overrightarrow{O}, \overrightarrow{A})$ ile gösterilirse P ve Q $\in \mathbb{D}^3$ dual noktalarının belirttiği $\overrightarrow{PQ}$ dual vektörünün normu $\| \overrightarrow{P} - \overrightarrow{Q} \| = d(\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q})$ olur. Eğer $\forall\ \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q} \in \mathbb{D}$ -Modül için

F : $\mathbb{D}$ -Modül $\to$ $\mathbb{D}$ -Modül

dönüşümünde $d[F(\overrightarrow{P}), F(\overrightarrow{Q})] = d(\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q})$ ise F ye $\mathbb{D}$ -Modül' ün bir dual izometrisi denir [4].

2.1. Reel Kuaterniyonlar

Bir reel kuaterniyon $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$; $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ biçiminde ifade edilir. Burada

i) $\overrightarrow{e_1}^2 = \overrightarrow{e_2}^2 = \overrightarrow{e_3}^2 = -1$

ii) $\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_3}\,\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2}$

iii) $\overrightarrow{e_3}\,\overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_1} = -\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_3} = -\overrightarrow{e_2}$

dir. Bir reel kuaterniyon skalar ve vektörel olmak üzere iki kısıma ayrılabilir. Skalar kısmı $S_q = a_0$ ve vektörel kısmı $\overrightarrow{V_q} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ şeklindedir.

O halde bir reel kuaterniyon $q = S_q + \overrightarrow{V_q}$ biçiminde de yazılabilir. Tüm reel kuaterniyonların cümlesini $\mathbb{H}$ ile gösterilsin. Bu cümle üzerinde toplama işlemi

$$\oplus : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

$$\begin{aligned}(q,p) \to q \oplus p &= (S_q + \overrightarrow{V_q}) \oplus (S_p + \overrightarrow{V_p}) \\ &= (S_q + S_p) + (\overrightarrow{V_q} + \overrightarrow{V_p}) \\ &= S_{q+p} + \overrightarrow{V_{q+p}}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırsa bu işlemle birlikte ($\mathbb{H}$, $\oplus$) bir Abel grubudur. $\mathbb{H}$ nın $\oplus$ işlemine göre etkisiz elemanı (0,0,0,0) dır.

$\mathbb{H}$ üzerindeki skalerle çarpma işlemi ise

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

$$(\lambda, q) \to \lambda \odot q = \lambda \odot (S_q + \overrightarrow{V_q}) = \lambda\, S_q + \lambda \overrightarrow{V_q}$$

şeklinde tanımlanırsa { $\mathbb{H}$, $\oplus$, $\mathbb{R}$, + , · , $\odot$ } bir vektör uzayı olur.

Reel Kuaterniyon Çarpımı

Herhangi $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ ve $p = b_0 + b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}$ reel kuaterniyonları için

$x : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$

$$(q,p) \to q \times p = a_0b_0 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)\overrightarrow{e_1}$$

$$+ (a_0b_2 + a_2b_0 + a_3b_1 - a_1b_3)\overrightarrow{e_2} + (a_0b_3 + b_0a_3 + a_1b_2 - a_2b_1)\overrightarrow{e_3}$$

$$= S_qS_p - \langle \overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_p} \rangle + S_q\overrightarrow{V_p} + S_p\overrightarrow{V_q} + \overrightarrow{V_q} \wedge \overrightarrow{V_p}$$

biçiminde tanımlanır ve aşağıdaki özeliklere sahiptir.

i) İki reel kuaterniyonun çarpımı (kuaterniyon çarpımı) bir reel kuaterniyondur.
ii) Reel Kuaterniyon çarpımı birleşimlidir.
iii) Reel Kuaterniyon çarpımı toplama üzerine sağdan ve soldan dağılımlıdır.
iv) Reel Kuaterniyon çarpımı değişimli değildir.

Dolayısıyla $\{ \mathbb{H}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot, x \}$ sistemi bir cebirdir. Fakat değişimli değildir. Bu cebire Reel Kuaterniyon Cebiri denir.

Herhangi bir $q = S_q + \overrightarrow{V_q}$ reel kuaterniyonunun eşleniği $K_q = S_q - \overrightarrow{V_q}$ şeklinde tanımlanır.

Buradan herhangi iki $q = S_q + \overrightarrow{V_q}$, $p = S_p + \overrightarrow{V_p}$ reel kuaterniyonları için

$$q + p = (S_q + S_p) + (\overrightarrow{V_q} + \overrightarrow{V_p}) = S_{q+p} + \overrightarrow{V_{q+p}}$$

ve

$$q \times p = (S_q + \overrightarrow{V_q}) \times (S_p + \overrightarrow{V_p})$$

$$= S_qS_p - \langle \overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_p} \rangle + S_q\overrightarrow{V_p} + S_p\overrightarrow{V_q} + \overrightarrow{V_q} \wedge \overrightarrow{V_p}$$

olacağından

$$K(q+p) = (S_q + S_p) - (\overrightarrow{V_q} + \overrightarrow{V_p}) = K_q + K_p$$

ve

$$K(q\times p)=K((S_q+\overrightarrow{V_q})\times(S_p+\overrightarrow{V_p}))$$

$$=S_qS_p-\langle\overrightarrow{V_q},\overrightarrow{V_p}\rangle-S_q\overrightarrow{V_p}-S_p\overrightarrow{V_q}+\overrightarrow{V_q}\wedge\overrightarrow{V_p}$$

$$=K_pK_q$$

olur.

$$N:\mathbb{H}\to\mathbb{R}$$
$$q\to N(q)=N_q=q\times K_q=a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2$$

biçiminde tanımlanan N işlemine $\mathbb{H}$ üzerinde norm denir ve N_q sayısına q reel kuaterniyonunun normu denir.

Böylece herhangi iki q ve p reel kuaterniyonunun $q\times p$ çarpımının normu $N(q\times p)=N_qN_p$ olur.

$$(\,,)^{-1}:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$$
$$q\to q^{-1}=\frac{K_q}{N_q}$$

biçiminde tanımlanan işleme $\mathbb{H}$ de invers işlemi denir. $q\times q^{-1}=q^{-1}\times q=1$ olacağından $N(q\times q^{-1})=1$ olur. Buradan $N_qN_{q^{-1}}=1$ den $N_{q^{-1}}=\dfrac{1}{N_q}$ elde edilir [4].

Tanım 2.1.1 Herhangi bir q_o reel kuaterniyonu için $N(q_o)=1$ ise q_o a birim reel kuaterniyon denir. $\mathbb{H}$ reel kuaterniyon cebrindeki tüm birim reel kuaterniyonların cümlesi $\mathbb{S}^3=\{\,q_o\in\mathbb{H}:N(q_o)=1\,\}$ ile gösterilir.

Herhangi bir $q_0=a_0+a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+a_3\overrightarrow{e_3}$ birim reel kuaterniyonu için

$$a_o^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$$

dir.

q_0 birim kuaterniyonu $q_0 = \cos\theta_0 + \overrightarrow{s_0}\sin\theta_0$ formunda da ifade edilebilir. Burada

$$\cos\theta_0 = a_0,\ \sin\theta_0 = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2},\ \overrightarrow{S_0} = \frac{a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+a_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$ dır ve $\overrightarrow{s_0}$ birim vektörüne

q_0 birim kuaterniyonunun ekseni denir.

Şimdi de herhangi bir reel kuaterniyonu normuna bölerek birim reel kuaterniyon elde edebiliriz. $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ herhangi bir reel kuaterniyon olsun. Bu durumda

$$q_o = \frac{q}{\sqrt{N_q}} = \frac{a_o + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{a_o^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} = \frac{a_o}{\sqrt{a_o^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} + \frac{a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{a_o^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

birim kuaterniyonu elde edilir. Burada

$$\cos\theta = \frac{a_o}{\sqrt{a_o^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\ ;\ \sin\theta = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{\sqrt{a_o^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\ \text{ ve }\ \overrightarrow{S_o} = \frac{a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

alınırsa $q_o = \cos\theta + \overrightarrow{S_o}\sin\theta$ formunda da ifade edilebilir. $\overrightarrow{S_o}$ birim vektörüne q_o birim reel kuaterniyon ekseni denir [4].

Tanım 2.1.2 Skalar kısmı sıfır olan kuaterniyona vektör adı verilir. Herhangi

$$q = \overrightarrow{v_q} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} \in \mathbb{H} \quad \text{ve} \quad p = \overrightarrow{v_p} = b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3} \in \mathbb{H}$$

vektörlerinin çarpımı

$$\times : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

$$(\vec{q}, \vec{p}) \to \vec{q} \times \vec{p} = -\langle \vec{q}, \vec{p} \rangle + \vec{q} \wedge \vec{p}$$

olarak bulunur. Bundan sonra $\mathbb{H}$ kuaterniyonların vektör uzayı ile

$$E^4 = \{ q = (a_0, a_1, a_2, a_3) : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R},\ \langle q, q \rangle = a_o^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \}$$

öklidyen uzayı özdeş olarak alınacaktır [9].

Teorem 2.1.1 $\mathbb{H}$ üzerinde ki metriği E^4 deki $\langle\ ,\ \rangle$ metriğiyle aynı alalım. Bu durumda aşağıdaki

i) $\langle\, pq_1, pq_2 \,\rangle = N_p \langle\, q_1, q_2 \,\rangle, \forall q_2, q_1, p \in \mathbb{H}$

ii) $\langle\, q_1 p, q_2\, p \,\rangle = N_p \langle\, q_1, q_2 \,\rangle, \forall q_2, q_1, p \in \mathbb{H}$

iii) $\langle\, p_1 q_1, p_2 q_2 \,\rangle + \langle\, p_1 q_2, p_2 q_1 \,\rangle = -2 \langle\, p_1, p_2 \,\rangle \langle\, q_1, q_2 \,\rangle, \forall q_2, q_1, p_1, p_2 \in \mathbb{H}$

iv) $\langle\, p_1 q_1, p_2 \rangle = \langle\, q_1, K(p_1) q_2 \,\rangle, \forall q_2, q_1, p_1 \in \mathbb{H}$

v) $\langle\, p_1 q_1, p_2 \rangle = \langle\, p_1, q_2 K(q_1) \rangle, \forall q_2, q_1, p_1 \in \mathbb{H}$

önermeleri gerçeklenir [1].

2.2. Reel Kuaterniyonların Matris Gösterimi

$$\mathbb{H}_I = \{ a_0 1 + a_1 \overrightarrow{e_1} : a_0, a_1 \in \mathbb{R}, \overrightarrow{e_1}^2 = -1 \}$$

cümlesini alalım. $\mathbb{H}$ deki işlemlerle birlikte

$$\{ \mathbb{H}_I, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot, \times \}$$

sistemi $\mathbb{H}$ nın bir altcebiridir. Ayrıca $\forall\, (a_0 \overrightarrow{e_0} + a_1 \overrightarrow{e_1}) \in \mathbb{H}_I$ kuaterniyonu ile $(a_0 + a_1 \sqrt{-1}) \in \mathbb{C}$ kompleks sayısı birebir eşlendiğinden $\mathbb{H}_I$ ile $\mathbb{C}$ izomorftur. Dolayısıyla $\mathbb{H}$ cebiri $\mathbb{C}$ ye izomorf olan bir cisim kapsar. O halde $\mathbb{H}$,

Herhangi $q \in \mathbb{H}$ ve $z = (a_0 + a_1 \sqrt{-1}) \in \mathbb{C}$ için

$$\odot : \mathbb{H} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$$

$$(q, z) \rightarrow q \odot z$$

dış işlemi ile birlikte bir vektör uzayı olur. Böylece kompleks sayılar cismi üzerinde herhangi bir $q = a_0 \overrightarrow{e_0} + a_1 \overrightarrow{e_1} + a_2 \overrightarrow{e_2} + a_3 \overrightarrow{e_3}$ kuaterniyonu, $\overrightarrow{e_0} = 1$ olmak üzere

$$\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_1} = -\langle \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1} \rangle + \overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_1} = -\overrightarrow{e_3} \text{ ve } \overrightarrow{e_1} = \sqrt{-1} \text{ ise } \overrightarrow{e_3} = -(\overrightarrow{e_2} \times \sqrt{-1}) = -\overrightarrow{e_2}\sqrt{-1}$$

olacağından

$$q = a_0 \overrightarrow{e_0} + a_1 \sqrt{-1}\, \overrightarrow{e_0} + a_2 \overrightarrow{e_2} - a_3 \overrightarrow{e_2} \sqrt{-1}$$

$$= e_0 (a_0 + a_1 \sqrt{-1}) + \overrightarrow{e_2} (a_2 - a_3 \sqrt{-1})$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan $\mathbb{H}$ nin $\mathbb{C}$ üzerinde 2- boyutlu olduğu görülür. Yani

$$\mathbb{H} = \mathrm{Sp}\,\{ e_0, \overrightarrow{e_2} \}$$

dir. $\mathbb{H}$ nin matris gösterimini elde etmek için

$$T : \mathbb{H} \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$$

$$q \rightarrow T_q$$

dönüşümünü , $\forall\ q' \in \mathbb{H}$ için

$$T_q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$$

$$q' \rightarrow T_q(q') = q \times q' = q \cdot q'$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan $\forall q_1', q_2' \in \mathbb{H}$ ve $\forall\ z \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} T_q(\ q_1', q_2') &= q \times (q_1' \oplus q_2') \\ &= (q \times q_1') \oplus (q \times q_2') \\ &= T_q(\ q_1'\ ) \oplus T_q(\ q_2') \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} T_q(\ q_1' \times z) &= q \times (q' \times z) \\ &= (q \times q') \times z \\ &= T_q(\ q'\ ) \times z \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\mathrm{Hom}\,(\mathbb{H}, \mathbb{H}) = \{ T_q' : q \in \mathbb{H} \}$$

yazılabilir. Bu cümle üzerinde toplama ve kompleks skalar ile çarpma işlemleri

$$T_q \oplus T_{q'} = T_{q \oplus q'}$$

$$T_q \odot z = T_{q \odot z}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$(\,\mathrm{Hom}\,(\mathbb{H}, \mathbb{H})\,, \oplus\,, \mathbb{C}\,, +\,, \cdot\,, \odot\ )$$

sistemi bir vektör uzayı olur. Böylece $\forall\ q \in \mathbb{H}$ ve $z_{11}, z_{21}, z_{21}, z_{22} \in \mathbb{C}$ için T_q dönüşümüne $\mathbb{C}$ üzerinde

$$T_q(e_o) = \overrightarrow{e_0}\, z_{11} + \overrightarrow{e_2}\, z_{21}$$

$$T_q(e_2) = \overrightarrow{e_0}\, z_{12} + \overrightarrow{e_2}\, z_{22}$$

eşitlikleri yardımıyla tanımlı bir

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

kompleks matris karşılık gelir.

Genel olarak bir $q = \overrightarrow{e_0}z + \overrightarrow{e_2}w \in \mathbb{H}$ ve z , w ϵ $\mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} T_{\overrightarrow{e_0}z+\overrightarrow{e_2}w}(\overrightarrow{e_0}) &= (\overrightarrow{e_0}z + \overrightarrow{e_2}w)\,\overrightarrow{e_0} \\ &= \overrightarrow{e_0}z\,\overrightarrow{e_0} + \overrightarrow{e_2}w\,\overrightarrow{e_0} \\ &= \overrightarrow{e_0}z + \overrightarrow{e_2}w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\overrightarrow{e_0}z+\overrightarrow{e_2}w}(\overrightarrow{e_2}) &= (\overrightarrow{e_0}z + \overrightarrow{e_2}w)\,\overrightarrow{e_2} \\ &= \overrightarrow{e_0}z\,\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_2}w\,\overrightarrow{e_2} \\ &= \overrightarrow{e_0}(-\overline{w}) + \overrightarrow{e_2}\,\overline{z} \end{aligned}$$

yukarıdaki eşitlikte

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e_2}\, z &= \overrightarrow{e_2}(x + y\overrightarrow{e_1}) \\ &= \overrightarrow{e_2}\, x + \overrightarrow{e_2}y\overrightarrow{e_1} = x\overrightarrow{e_2} + y\overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_1} \\ &= x\overrightarrow{e_2} - y\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_2} = (x - y\overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_2} \\ &= \overline{z}\,\overrightarrow{e_2} \end{aligned}$$

olduğu kullanıldı. Sonuç olarak $K(z) = \overline{z}$ ve $K(w) = \overline{w}$ alınırsa

$$T_{\overrightarrow{e_0}z+\overrightarrow{e_2}w} \leftrightarrow \begin{bmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{bmatrix}$$

elde edilir [2].

2.3. Dual Kuaterniyonlar

Herhangi iki reel kuaterniyon

$$q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} \text{ ve } q^* = a_o^* + a_1^*\overrightarrow{e_1} + a_2^*\overrightarrow{e_2} + a_3^*\overrightarrow{e_3}$$

olmak üzere bir dual kuaterniyon $Q = q + \varepsilon q^*$, $\varepsilon \neq 0$ ve $\varepsilon^2 = 0$ şeklinde tanımlanır. Bu dual kuaterniyonu $Q = A_o + A_1\,\overrightarrow{e_1} + A_2\,\overrightarrow{e_2} + A_3\,\overrightarrow{e_3}$ olarak da yazmak mümkündür. Burada $A_o = a_o + \varepsilon a_o^*$, $A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*$, $A_2 = a_2 + \varepsilon a_2^*$, $A_3 = a_3 + \varepsilon a_3^*$ dir ve bu dual sayılara Q dual kuaterniyonunun bileşenleri adı verilir.

Q dual kuaterniyonunun skalar ve vektörel kısımları sırası ile S_Q ve $\overrightarrow{V_Q}$ ile gösterilirse

$$S_Q = S_q + \varepsilon S_{q^*} = A_o \ , \quad \overrightarrow{V_Q} = \overrightarrow{V_q} + \varepsilon \overrightarrow{V_{q^*}} = A_1\,\overrightarrow{e_1} + A_2\,\overrightarrow{e_2} + A_3\,\overrightarrow{e_3}$$

olmak üzere $Q = S_Q + \overrightarrow{V_Q}$ biçiminde de yazılabilir. Tüm dual kuaterniyonların cümlesi $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ ile gösterilsin. Bu cümle üzerinde toplama işlemi

$$\oplus : \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \,x\, \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \to \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$$

$$(Q, P) \to Q \oplus P = (S_Q + \overrightarrow{V_Q}) \oplus (S_P + \overrightarrow{V_P})$$

$$= S_{Q+P} + \overrightarrow{V_{Q+P}}$$

şeklinde tanımlanırsa bu işlemle birlikte ($\mathbb{H}_{\mathbb{D}}, \oplus$) bir Abel grubudur. $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ nin $\oplus$ işlemine göre etkisiz elemani (0,0,0,0) dır.

$\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ üzerinde skalerle çarpma işlemi ise

$$\odot : \mathbb{D} \times \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \to \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$$

$$(A, Q) \to A \odot Q = A \odot (S_Q + \overrightarrow{V_Q}) = AS_Q + A\overrightarrow{V_Q}$$

şeklinde tanımlanırsa { $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot$ } bir vektör uzayı olur.

Dual Kuaterniyon Çarpımı

$\times : \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \times \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \to \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$

$$(Q, P) \to Q \times P = (q + \varepsilon q^*) \times (p + \varepsilon p^*)$$

$$= (qp) + \varepsilon (qp^* + q^* p)$$

$$= S_Q S_P - < \overrightarrow{V_Q}, \overrightarrow{V_P} > + S_Q \overrightarrow{V_P} + S_P \overrightarrow{V_Q} + \overrightarrow{V_Q} \wedge \overrightarrow{V_P}$$

şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki özeliklere sahiptir.

i) Genel olarak dual kuaterniyon çarpımı yine bir dual kuaterniyon verir. Ancak $qp^* + q^* p = 0$ için $Q \times P = qp$ olacağından bir reel kuaterniyon elde edilir.

ii) Genel olarak dual kuaterniyon çarpımı değişimli değildir. Ancak Q veya P bir dual sayı ise ozaman $Q \times P = P \times Q$ olur.

iii) Dual kuaterniyon çarpımı birleşimlidir.

iv) Dual kuaterniyon çarpımı toplama üzerine dağılımlıdır.

Dolayısıyla { $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$, $\oplus$, □ , + , $\cdot$, $\odot$, x } sistemi bir cebirdir. Fakat değişimli değildir. Bu cebire Dual Kuaterniyon Cebiri denir.

Herhangi bir $Q = q + \varepsilon q^*$, $q, q^* \in \mathbb{H}$ dual kuaterniyonunun eşleniği K_Q ile gösterilir ve

$$K_Q = K_q + \varepsilon K_{q^*} ; \; q = S_q + \overrightarrow{V_q} \; , \; q^* = S_{q^*} + \overrightarrow{V_{q^*}}$$

$$= (S_q - \overrightarrow{V_q}) + \varepsilon (S_{q^*} - \overrightarrow{V_{q^*}})$$

$$= S_Q - \overrightarrow{V_Q}$$

$$= A_0 - (A_1 \overrightarrow{e_1} + A_2 \overrightarrow{e_2} + A_3 \overrightarrow{e_3})$$

şeklinde tanımlanır. Buradan herhangi iki $Q = S_Q + \overrightarrow{V_Q}$, $P = S_P + \overrightarrow{V_P}$ dual kuaterniyonları için

$$Q + P = (\, S_Q + S_P\,) + (\,\overrightarrow{V_Q} + \overrightarrow{V_P}\,) \text{ ve } Q \times P = qp + \varepsilon(qp^* + q^* p)$$

olacağından

$$K(Q+P) = (S_Q + S_P) - (\overrightarrow{V_Q} + \overrightarrow{V_P}) = K_Q + K_P$$

ve

$$K(Q \times P) = K(qp) + \varepsilon K(qp^* + q^* p)$$

$$= K_p K_q + \varepsilon(K_{p^*} K_q + K_p K_{q^*})$$

$$= (K_p + \varepsilon K_{p^*})(K_q + \varepsilon K_{q^*})$$

$$= K_P K_Q$$

olur.

$$N : \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \to \mathbb{D}$$
$$Q \to N\,(Q) = N_Q = Q \times K_Q$$

biçiminde tanımlanan N işlemine $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ üzerinde norm denir. Bir $Q = q + \varepsilon q^*$ dual kuaterniyonunun normu $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ ve $q^* = a_0^* + a_1^*\overrightarrow{e_1} + a_2^*\overrightarrow{e_2} + a_3^*\overrightarrow{e_3} = S_{q^*} + \overrightarrow{V_{q^*}}$ olmak üzere

$$N_Q = a_0^{\,2} + a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2} + 2\varepsilon\,(a_0 a_0^{\,*} + a_1 a_1^{\,*} + a_2 a_2^{\,*} + a_3 a_3^{\,*})$$

şeklindedir. Burada $A_0 = a_0 + \varepsilon a_0^*$, $A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*$, $A_2 = a_2 + \varepsilon a_2^*$ ve $A_3 = a_3 + \varepsilon a_3^*$ alınırsa $N_Q = A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$ olur.

Böylece herhangi iki Q ve P dual kuaterniyonunun $Q \times P$ çarpımının normu $N(Q \times P) = N_Q N_P$ olur.

$$(\,,)^{-1} : \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \to \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$$
$$Q \to Q^{-1} = \frac{K_Q}{N_Q}$$

biçiminde tanımlanan işleme $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ de invers işlemi denir. $Q \times Q^{-1} = Q^{-1} \times Q = 1$ olacağından $N(Q \times Q^{-1}) = 1$ olur. Buradan $N_Q N_{Q^{-1}} = 1$ den $N_{Q^{-1}} = \dfrac{1}{N_Q}$ elde edilir [4].

Tanım 2.3.1 Herhangi bir Q_0 dual kuaterniyonu için $N_{Q_0} = 1 + \varepsilon 0$ ise Q_0 a birim dual kuaterniyon denir. $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ dual kuaterniyon cebrindeki tüm birim dual kuaterniyonların cümlesi $S^3_{\mathbb{D}} = \{ Q_0 \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}} : N_{Q_0} = 1 \}$ ile gösterilir. Eğer $Q_0 = A_o + A_1 \overrightarrow{e_1} + A_2 \overrightarrow{e_2} + A_3 \overrightarrow{e_3}$ için $A_o = a_o + \varepsilon a_o^*$, $A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*$, $A_2 = a_2 + \varepsilon a_2^*$, $A_3 = a_3 + \varepsilon a_3^*$ ise

$$a_o^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1; \; a_o a_o^* + a_1 a_1^* + a_2 a_2^* + a_3 a_3^* = 0$$

elde edilir.

Q_0 birim dual kuaterniyonu $Q_0 = \cos\theta_0 + \overrightarrow{S_0} \sin\theta_0$ formunda da ifade edilebilir. Burada

$$\cos\theta_0 = A_0,\; \sin\theta_0 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2},\; \overrightarrow{S_0} = \frac{A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}$$ dır ve θ_0 dual açısı Q_0 ın dual açısıdır. $\overrightarrow{S_0}$ birim dual vektörü ise Q_0 ın birim dual vektördür.

$\theta_0 = \theta + \varepsilon\theta^*$; $\overrightarrow{S_0} = \overrightarrow{S_0} + \varepsilon \overrightarrow{S_0}^*$ şeklinde yazılabilir. Burada;

$$\theta = \arccos(a_o),\; \theta^* = -\frac{a_0^*}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

$$\overrightarrow{S_0} = \frac{a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},\; \overrightarrow{S_0}^* = \frac{a_1^*\overrightarrow{e_1} + a_2^*\overrightarrow{e_2} + a_3^*\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} + \frac{a_0 a_0^*(a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3})}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

dir .

Şimdi de herhangi bir dual kuaterniyonu normuna bölerek birim dual kuaterniyon elde edebiliriz. $Q = A_o + A_1 \overrightarrow{e_1} + A_2 \overrightarrow{e_2} + A_3 \overrightarrow{e_3}$ herhangi bir dual kuaterniyon olsun. Bu durumda

$$Q_o = \frac{Q}{\sqrt{N_Q}} = \frac{A_o + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{A_o^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}} = \frac{A_0}{\sqrt{A_o^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}} + \frac{A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{A_o^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}$$

birim dual kuaterniyonu elde edilir. Burada

$$\cos\theta = \frac{A_0}{\sqrt{A_o^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}} \;;\; \sin\theta = \frac{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}{\sqrt{A_o^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}} \text{ ve } \overrightarrow{S_o} = \frac{A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}$$

alınırsa $Q_o = \cos\theta + \overrightarrow{S_o}\sin\theta$ formunda da ifade edilebilir. $\overrightarrow{S_o}$ birim dual vektörüne Q_o birim dual kuaterniyon ekseni denir [4].

Tanım 2.3.2 Reel kuaterniyonlar cebiri $\mathbb{H}$ olmak üzere

$$\mathbb{H}^n = \mathbb{H} \text{ x } \mathbb{H} \text{ x } \ldots \text{x } \mathbb{H} = \{ \vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{H} \,,\, 1 \leq i \leq n\}$$

cümlesi tanımlansın. $\mathbb{H}^n$ in elemanlarına birer vektör ve $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{H}$ reel kuaterniyonlarına da bu vektörün bileşenleri denir.

$$\oplus : \mathbb{H}^n \text{ x } \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$$
$$(\vec{a}, \vec{b}) \to \vec{a} \oplus \vec{b}$$

toplama işlemi $\forall\ \vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{H}^n$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{H}^n$ için

$$\vec{a} \oplus \vec{b} = (a_1+b_1 \,,\, a_2+b_2 \,,\, \ldots \,,\, a_n+b_n)$$

şeklinde tanımlanırsa $(\mathbb{H}^n, \oplus)$ ikilisinin bir Abel grubu olduğu açıktır. Diğer taraftan

$$\odot : \mathbb{H}^n \text{ x } \mathbb{H} \to \mathbb{H}^n$$
$$(\vec{a}, q) \to \vec{a} \odot q = (a_1 q, a_1 q, \ldots, a_n q)$$

şeklinde tanımlanan dış işlemi aşağıdaki özelikleri sağlar.

$\forall\ \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2} \in \mathbb{H}^n$ ve $\forall\ q, q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ için

i) $(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2})q = \overrightarrow{a_1}\, q + \overrightarrow{a_2}\, q$

ii) $\vec{a}(q_1 + q_2) = \vec{a}\, q_1 + \vec{a}\, q_2$

iii) $\vec{a}(q_1 q_2) = (\vec{a}\, q_1) q_2$

iv) $\vec{a} \cdot 1 = \vec{a}$

Böylece $\{\mathbb{H}^n, \oplus, \mathbb{H}, +, \cdot, \odot\}$ sistemi $\mathbb{H}$ reel kuaterniyonlar cismi üzerinde bir vektör uzayı olur [4].

Tanım 2.3.3 $\mathbb{H}^n$, $\mathbb{H}$ reel kuaterniyonlar cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\langle \, , \rangle : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) \to \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{i=1}^{n} K(a_i) b_i$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm

$\forall\ \vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2} \in \mathbb{H}^n$ ve $\forall\ q \in \mathbb{H}$ için

i) $\langle \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}, \vec{b} \rangle = \langle \overrightarrow{a_1}, \vec{b} \rangle + \langle \overrightarrow{a_2}, \vec{b} \rangle$

ii) $\langle \vec{a}, \overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{b_2} \rangle = \langle \vec{a}, \overrightarrow{b_1} \rangle + \langle \vec{a}, \overrightarrow{b_2} \rangle$

iii) $\langle \vec{a}, \vec{b}\, q \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle\, q$

iv) $\langle \vec{a}\, q, \vec{b} \rangle = K(q) \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

özeliklerini sağladığından $\mathbb{H}^n$ üzerinde bir Hermit iç çarpımıdır. Bu dönüşüme $\mathbb{H}^n$ üzerinde bir simplektik çarpım adı verilir. Burada $K(q) = \bar{q} = S_q - \overrightarrow{V_q}$ dir. Eğer bu işlemde $\vec{a} = \vec{b}$ alınırsa

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \sum_{i=1}^{n} K(a_i) a_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} N(a_i)$$

elde edilir ki $\sum_{i=1}^{n} N(a_i)$ sayısı $\|\vec{a}\|_{e_0}$ şeklinde de yazılabilir ve bu sayıya $\vec{a}$ vektörünün normu denir [4].

2.4. Dual Kuaterniyonların Matris Gösterimi

$$\mathbb{H}_{\mathbb{D}_1} = \{A_0 1 + A_1 \overrightarrow{e_1} : A_0, A_1 \in \mathbb{D}, \overrightarrow{e_1}^2 = -1\}$$

cümlesini alalım. $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ deki işlemlerle birlikte

$$\{ \mathbb{H}_{\mathbb{D}_1}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot, \times \}$$

sistemi $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ nın bir altcebiridir. Ayrıca $\forall\ (A_0\overrightarrow{e_0} + A_1\overrightarrow{e_1}) \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}_1}$ kuaterniyonu ile $(A_0 + A_1\sqrt{-1}) \in \mathbb{C}_{\mathbb{D}}$ dual kompleks sayısı birebir eşlendiğinden $\mathbb{H}_{\mathbb{D}_1}$ ile $\mathbb{C}_{\mathbb{D}}$ izomorftur. Dolayısıyla $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ cebiri $\mathbb{C}_{\mathbb{D}}$ ye izomorf olan bir cisim kapsar. O halde $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$,

Herhangi $Q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ ve $Z = (A_0 + A_1\sqrt{-1}) \in \mathbb{C}_{\mathbb{D}}$ için

$$\odot : \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \times \mathbb{C}_{\mathbb{D}} \to \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$$

$$(Q, Z) \to Q \odot Z$$

dış işlemi ile birlikte bir vektör uzayı olur. Böylece dual kompleks sayılar cismi üzerinde herhangi bir $Q = A_0\overrightarrow{e_0} + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$ dual kuaterniyonu , $\overrightarrow{e_0} = 1$ olmak üzere

$$\overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_1} = -\langle \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1} \rangle + \overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_1} = -\overrightarrow{e_3} \text{ ve } \overrightarrow{e_1} = \sqrt{-1} \text{ ise } \overrightarrow{e_3} = -(\overrightarrow{e_2} \times \sqrt{-1}) = -\overrightarrow{e_2}\sqrt{-1}$$

olacağından

$$Q = A_0\overrightarrow{e_0} + A_1\sqrt{-1}\,\overrightarrow{e_0} + A_2\overrightarrow{e_2} - A_3\overrightarrow{e_2}\sqrt{-1}$$

$$= e_0(A_0 + A_1\sqrt{-1}) + \overrightarrow{e_2}(A_2 - A_3\sqrt{-1})$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ nin $\mathbb{C}_{\mathbb{D}}$ üzerinde 2- boyutlu olduğu görülür. Yani

$$\mathbb{H}_{\mathbb{D}} = \mathrm{Sp}\{ e_0, \overrightarrow{e_2} \}$$

dir. $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ nin matris gösterimini elde etmek için

$$T : \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \to \mathrm{Hom}(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}, \mathbb{H}_{\mathbb{D}})$$

$$Q \to T_Q$$

dönüşümünü , $\forall\ Q' \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ için

$$T_Q : \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \to \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$$

$$Q' \to T_Q(Q') = Q \times Q' = Q \cdot Q'$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan $\forall Q_1', Q_2' \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ ve $\forall\ Z \in \mathbb{C}_{\mathbb{D}}$ için

$$\mathrm{T}_Q(\,Q_1^{'}\,,Q_2^{'}\,) = Q \times (Q_1^{'} \oplus Q_2^{'})$$

$$= (Q \times Q_1^{'}) \oplus (Q \times Q_2^{'})$$

$$= \mathrm{T}_Q(\,Q_1^{'}\,) \oplus \mathrm{T}_Q(\,Q_2^{'}\,)$$

ve

$$\mathrm{T}_Q(\,Q_1^{'} \times Z\,) = Q \times (Q^{'} \times Z)$$

$$= (Q \times Q^{'}\,) \times Z$$

$$= \mathrm{T}_Q(\,Q^{'}\,) \times Z$$

olur. Böylece

$$\mathrm{Hom}\,(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}\,,\mathbb{H}_{\mathbb{D}}\,) = \{\,\mathrm{T}_Q^{'} : Q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}\,\}$$

yazılabilir. Bu cümle üzerinde toplama ve kompleks skalar ile çarpma işlemleri

$$\mathrm{T}_Q \oplus \mathrm{T}_{Q^{'}} \;=\; \mathrm{T}_{Q \oplus Q^{'}}$$

$$\mathrm{T}_Q \odot Z \;=\; \mathrm{T}_{Q \odot Z}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$(\,\mathrm{Hom}\,(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}\,,\mathbb{H}_{\mathbb{D}}\,)\,,\oplus\,,\;\mathbb{C}_{\mathbb{D}}\;\,,+\,,\cdot\,,\odot\;)$$

sistemi bir vektör uzayı olur. Böylece $\forall\ Q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ ve $Z_{11}, Z_{21}, Z_{21}, Z_{22} \in \mathbb{C}_{\mathbb{D}}$ için T_Q dönüşümüne $\mathbb{C}_{\mathbb{D}}$ üzerinde

$$\mathrm{T}_Q(\mathrm{e}_{\mathrm{o}}) = \overrightarrow{\mathrm{e}_0}\, Z_{11} + \overrightarrow{\mathrm{e}_2}\, Z_{21}$$

$$\mathrm{T}_Q(\mathrm{e}_2) = \overrightarrow{\mathrm{e}_0}\, Z_{12} + \overrightarrow{\mathrm{e}_2}\, Z_{22}$$

eşitlikleri yardımıyla tanımlı bir

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

kompleks matris karşılık gelir.

Genel olarak bir $Q = \overrightarrow{\mathrm{e}_0}Z + \overrightarrow{\mathrm{e}_2}W \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ ve $Z\,,\,W \in \mathbb{C}_{\mathbb{D}}$ için

$$\mathrm{T}_{\overrightarrow{\mathrm{e}_0}Z + \overrightarrow{\mathrm{e}_2}W}\,(\overrightarrow{\mathrm{e}_0}) \;=\; (\overrightarrow{\mathrm{e}_0}Z + \overrightarrow{\mathrm{e}_2}W)\,\overrightarrow{\mathrm{e}_0}$$

$$= \overrightarrow{e_0} Z \overrightarrow{e_0} + \overrightarrow{e_2} W \overrightarrow{e_0}$$

$$= \overrightarrow{e_0} Z + \overrightarrow{e_2} W$$

$$T_{\overrightarrow{e_0}Z+\overrightarrow{e_2}W}(\overrightarrow{e_2}) = (\overrightarrow{e_0} Z + \overrightarrow{e_2} W)\overrightarrow{e_2}$$

$$= \overrightarrow{e_0} Z \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_2} W \overrightarrow{e_2}$$

$$= \overrightarrow{e_0}(-\overline{W}) + \overrightarrow{e_2}\,\overline{Z}$$

yukarıdaki eşitlikte $Z = \mathrm{X}+\mathrm{Y}\overrightarrow{e_1}$ olmak üzere

$$\overrightarrow{e_2}\, Z = \overrightarrow{e_2}(\mathrm{X} + \mathrm{Y}\overrightarrow{e_1})$$

$$= \overrightarrow{e_2}\,\mathrm{X} + \overrightarrow{e_2}\mathrm{Y}\overrightarrow{e_1} = \mathrm{X}\overrightarrow{e_2} + \mathrm{Y}\overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_1}$$

$$= \mathrm{X}\overrightarrow{e_2} - \mathrm{Y}\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_2} = (\mathrm{X} - \mathrm{Y}\overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_2}$$

$$= \overline{Z}\,\overrightarrow{e_2}$$

olduğu kullanıldı. . Sonuç olarak $K(Z) = \overline{Z}$ ve $K(\mathrm{W}) = \overline{\mathrm{W}}$ alınırsa

$$T_{\overrightarrow{e_0}Z+\overrightarrow{e_2}W} \leftrightarrow \begin{bmatrix} Z & -\overline{W} \\ W & \overline{Z} \end{bmatrix}$$

elde edilir [2].

2.5. Bölünmüş (Split) Kuaterniyonlar

$$\mathbb{H}' = \{\ q = a_0 1 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}\ :\ a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\ \}$$

cümlesini ele alalım. Burada $\{1, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ birimlerinin çarpımı

i) $\overrightarrow{e_1}^2 = -1$, $\overrightarrow{e_2}^2 = 1$, $\overrightarrow{e_3}^2 = 1$

ii) $\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_3} = -\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_3}\,\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2}$

iii) $\overrightarrow{e_3}\,\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_1} = -\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_3} = -\overrightarrow{e_2}$

şeklindedir.

$\mathbb{H}'$ nün her bir elemanına bir bölünmüş (split) kuaterniyon adı verilir. Burada a_0, a_1, a_2, a_3 reel sayılarına q bölünmüş kuaterniyonunun bileşenleri denir ve $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ şeklinde gösterilir. $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ birimleri 3-boyutlu reel vektör uzayının bir dik koordinat sisteminin baz vektörleri olarak alınabilir. Bir bölünmüş kuaterniyon skalar ve vektörel olmak üzere iki kısıma ayrılabilir. Skalar kısmı $S_q = a_o$ ve vektörel kısmı $\overrightarrow{V_q} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ şeklindedir. O halde bir bölünmüş kuaterniyon $q = S_q + \overrightarrow{V_q}$ şeklinde yazılabilir.

Herhangi $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ ve $p = b_0 + b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyonlarının toplamı

$$\oplus : \mathbb{H}' \times \mathbb{H}' \rightarrow \mathbb{H}'$$

$$(q, p) \rightarrow q \oplus p = (S_q + S_p) \oplus (\overrightarrow{V_q} + \overrightarrow{V_p})$$

$$= S_{q+p} + \overrightarrow{V_{q+p}}$$

şeklinde tanımlanırsa bu işlemle birlikte $(\mathbb{H}', \oplus)$ bir Abel grubudur. $\mathbb{H}'$ nin işlemine göre etkisiz elemanı $(0,0,0,0)$ dır.

Herhangi $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} \in \mathbb{H}'$ olmak üzere

$\mathbb{H}'$ üzerindeki skalerle çarpma işlemi ise

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{H}' \rightarrow \mathbb{H}'$$

$$(\lambda, q) \rightarrow \lambda \odot q = \lambda \odot (S_q + \overrightarrow{V_q}) = \lambda S_q + \lambda \overrightarrow{V_q}$$

şeklinde tanımlanırsa $\{ \mathbb{H}', \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot \}$ bir vektör uzayı olur. $\mathbb{H}'$ bölünmüş kuaterniyonların cümlesi reel sayılar cismi üzerinde 4-boyutlu bir vektör uzayıdır.

Bölünmüş (Split) Kuaterniyonların Çarpımı

$$\times : \mathbb{H}' \text{ x } \mathbb{H}' \to \mathbb{H}'$$

$$(q, p) \to qp = (a_0b_0 - a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1b_0 + a_0b_1 - a_2b_3 + a_3b_2)\overrightarrow{e_1}$$

$$+ (a_0b_2 + a_2b_0 - a_1b_3 + a_3b_1)\overrightarrow{e_2} + (a_0b_3 + a_3b_0 - a_2b_1 + a_1b_2)\overrightarrow{e_3}$$

$$= S_q S_p + g(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_p}) + S_q \overrightarrow{V_p} + S_p \overrightarrow{V_q} + \overrightarrow{V_q} \wedge \overrightarrow{V_p}$$

biçiminde tanımlanır.

Burada $\mathbb{H}'$ nün imajiner kısmı $\operatorname{Im}\mathbb{H}' = \{ a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} \ : \ a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \}$ olmak üzere

$$g : \operatorname{Im}\mathbb{H}' \text{ x } \operatorname{Im}\mathbb{H}' \to \mathbb{R}$$

$$(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_p}) \to g(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_p}) = -a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

ve

$$\wedge : \operatorname{Im}\mathbb{H}' \text{ x } \operatorname{Im}\mathbb{H}' \to \operatorname{Im}\mathbb{H}'$$

$$(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_p}) \to \overrightarrow{V_q} \wedge \overrightarrow{V_p} = (a_3b_2 - a_2b_3)\overrightarrow{e_1} + (a_3b_1 - a_1b_3)\overrightarrow{e_2} + (a_1b_2 - a_2b_1)\overrightarrow{e_3}$$

dır ve aşağıdaki özliklere sahiptir.

i) İki bölünmüş kuaterniyonun çarpımı bir bölünmüş kuaterniyondur.

ii) Bölünmüş kuaterniyon çarpımı birleşimlidir.

iii) Bölünmüş kuaterniyon çarpımı toplama üzerine sağdan ve soldan dağılımlıdır.

iv) Bölünmüş kuaterniyon çarpımı değişimli değildir.

Dolayısıyla $\{ \mathbb{H}', \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot, \text{x} \}$ sistemi bir cebirdir. Fakat değişimli değildir. Bu cebire Bölünmüş Kuaterniyon Cebiri denir.

$$K : \mathbb{H}' \to \mathbb{H}'$$

$$q = S_q + \overrightarrow{V_q} \to K(q) = S_q - \overrightarrow{V_q}$$

biçiminde tanımlanan eşlenik işlemine göre bir $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyonun eşleniği $K(q) = a_0 - a_1\overrightarrow{e_1} - a_2\overrightarrow{e_2} - a_3\overrightarrow{e_3}$ şeklindedir. Eşlenik işlemi aşağıdaki

i) $K(\mathrm{a}q+\mathrm{b}p)=\mathrm{a}K(q)+\mathrm{b}K(p)\ ,\ \forall\, \mathrm{a,b}\in\mathbb{R}\ ,\ \forall\, q,p\in\mathbb{H}'$

ii) $K(qp)=K(p)\,K(q)\ ,\ \forall\, q,p\in\mathbb{H}'$

iii) $K(K(q))=q\ ,\ \forall\, q\in\mathbb{H}'$

özeliklerine sahiptir.

$$N:\mathbb{H}'\to\mathbb{R}$$
$$q\to N(q)=N_q=qK(q)=K(q)q$$

biçiminde tanımlanan N işlemine $\mathbb{H}'$ üzerinde norm denir. Bir $q=\mathrm{a}_0+\mathrm{a}_1\overrightarrow{\mathrm{e}_1}+\mathrm{a}_2\overrightarrow{\mathrm{e}_2}+\mathrm{a}_3\overrightarrow{\mathrm{e}_3}$ bölünmüş kuaterniyonu için, q nun N_q normu

$$N_q=\mathrm{a}_o^2+\mathrm{a}_1^2-\mathrm{a}_2^2-\mathrm{a}_3^2$$

reel sayısıyla tanımlıdır. Norm işlemi aşağıdaki

i) $N_{qp}=N_qN_p\ ,\ \forall\, q,p\in\mathbb{H}'$

ii) $N_{\lambda q}=\lambda^2N_q\ ,\ \forall\,\lambda\in\mathbb{R}\ ,\ \forall\, q\in\mathbb{H}'$

özeliklerine sahiptir.

$$(\,,)^{-1}:\mathbb{H}'\to\mathbb{H}'$$
$$q\to q^{-1}=\frac{K(q)}{N_q}\ ,\ N_q\neq 0$$

biçiminde tanımlanan işleme $\mathbb{H}'$ de invers işlemi denir. $N_q\neq 0$ olmak üzere bir q bölünmüş kuaterniyonunun inversi $q^{-1}=\dfrac{K(q)}{N_q}=\dfrac{\mathrm{a}_0-\mathrm{a}_1\overrightarrow{\mathrm{e}_1}-\mathrm{a}_2\overrightarrow{\mathrm{e}_2}-\mathrm{a}_3\overrightarrow{\mathrm{e}_3}}{\mathrm{a}_o^2+\mathrm{a}_1^2-\mathrm{a}_2^2-\mathrm{a}_3^2}$ dır. İnvers işlemi aşağıdaki

i) $(qp)^{-1}=p^{-1}q^{-1}\ ,\ \forall\, q,p\in\mathbb{H}'$ ve $N_q\neq 0\ ,\ N_p\neq 0$

ii) $(\lambda q)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}q^{-1}\ ,\ 0\neq\lambda\in\mathbb{R}\ ,\ \forall\, q\in\mathbb{H}'$ ve $N_q\neq 0$

özeliklerine sahiptir [1].

Tanım 2. 5.1 Herhangi q_o bölünmüş kuaterniyonu için $N_{q_o} = 1$ ise q_o a birim bölünmüş kuaterniyon denir . $\mathbb{H}'$ bölünmüş kuaterniyon cebrindeki tüm birim bölünmüş kuaterniyonların cümlesi $\left(S'\right)^3 = \{\, q_o \in \mathbb{H}' : N_{q_o} = 1 \}$ ile gösterilir .

Herhangi bir $q_o = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ birim bölünmüş kuaterniyonu için

$$a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = 1$$

dir.

$q_0 = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ birim bölünmüş kuaterniyon ve

$g(\overrightarrow{V_{q_o}}, \overrightarrow{V_{q_o}}) = -a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0$ olsun. Bu durumda $N_{q_0} = 1$ ve $\overrightarrow{V_{q_o}}$ spacelike (uzaysı) bir vektör olacağından $q_0 = \cosh\theta_0 + \overrightarrow{s_0}\sinh\theta_0$ formunda da ifade edilebilir. Burada

$$\cosh\theta_0 = a_0,\ \sinh\theta_0 = \sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},\quad \overrightarrow{S_0} = \frac{a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

dır ve $\overrightarrow{s_0}$ birim spacelike bölünmüş vektörüne q_0 birim bölünmüş kuaterniyonunun ekseni denir.

Şimdi de herhangi bir bölünmüş kuaterniyonu normuna bölerek birim bölünmüş kuaterniyon elde edebiliriz. $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ herhangi bir bölünmüş kuaterniyon olsun. Bu durumda

$$q_o = \frac{q}{\sqrt{N_q}} = \frac{a_o + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{a_o^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}} = \frac{a_o}{\sqrt{a_o^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}} + \frac{a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{a_o^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}}$$

birim bölünmüş kuaterniyonu elde edilir. Burada

$$\cosh\theta = \frac{a_o}{\sqrt{a_o^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}}\ ;\ \sinh\theta = \frac{\sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{\sqrt{a_o^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}}\ \text{ve}\ \overrightarrow{S_o} = \frac{a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

alınırsa $q_o = \cosh\theta + \overrightarrow{S_o}\sinh\theta$ formunda da ifade edilebilir. $\overrightarrow{S_o}$ birim uzaysı bölünmüş vektörüne q_o birim bölünmüş kuaterniyon ekseni denir.

Eğer $q_0 = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ birim bölünmüş kuaterniyon ve

$g(\overrightarrow{V_{q_0}}, \overrightarrow{V_{q_0}}) = -a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 < 0$ ise $N_{q_0} = 1$ ve $\overrightarrow{V_{q_0}}$ timelike (zamansı) bir vektör olacağından $q_0 = \cos\theta_0 + \overrightarrow{s_0}\sin\theta_0$ formunda da ifade edilebilir. Burada

$$\cos\theta_0 = a_0,\ \sin\theta_0 = \sqrt{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}\ ,\quad \overrightarrow{S_0} = \frac{a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}}$$ dır ve $\overrightarrow{s_0}$ birim timelike (zamansı) bölünmüş vektörüne q_0 birim bölünmüş kuaterniyonunun ekseni denir.

Şimdi de herhangi bir bölünmüş kuaterniyonu normuna bölerek birim bölünmüş kuaterniyon elde edebiliriz. $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ herhangi bir bölünmüş kuaterniyon olsun. Bu durumda

$$q_o = \frac{q}{\sqrt{N_q}} = \frac{a_o + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{a_o^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}} = \frac{a_o}{\sqrt{a_o^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}} + \frac{a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{a_o^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}}$$

birim bölünmüş kuaterniyonu elde edilir. Burada

$$\cos\theta = \frac{a_o}{\sqrt{a_o^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}}\ ;\ \sin\theta = \frac{\sqrt{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}}{\sqrt{a_o^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}}\ \text{ ve }\ \overrightarrow{S_o} = \frac{a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}}$$

alınırsa $q_o = \cos\theta + \overrightarrow{S_o}\sin\theta$ formunda da ifade edilebilir. $\overrightarrow{S_o}$ birim timelike bölünmüş vektörüne q_o birim bölünmüş kuaterniyon ekseni denir [9].

Tanım 2.5.2 Skalar kısmı sıfır olan bölünmüş kuaterniyona bölünmüş vektör adı verilir. Herhangi $q = \overrightarrow{v_q} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} \in \mathbb{H}'$ ve $p = \overrightarrow{v_p} = b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3} \in \mathbb{H}'$ bölünmüş vektörlerinin çarpımı

$$\times : \mathbb{H}' \times \mathbb{H}' \to \mathbb{H}'$$

$$(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_p}) \to \overrightarrow{V_q} \times \overrightarrow{V_p} = g(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_p}) + \overrightarrow{V_q} \wedge \overrightarrow{V_p} = g(q, p) + q \wedge p$$

olarak bulunur. Bundan sonra $\mathbb{H}'$ bölünmüş kuaterniyonların vektör uzayı ile

$$E_2^4 = \{ q = (a_0, a_1, a_2, a_3) : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}, \langle\, q, q \,\rangle = -a_o^2 - a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \}$$

yarı Öklidyen uzayı özdeş olarak alınacaktır [9].

Teorem 2.5.3 $\mathbb{H}'$ üzerinde ki metriği E_2^4 deki $\langle\ ,\ \rangle$ metriğiyle aynı alalım. Bu durumda aşağıdaki

i) $\langle\, pq_1, pq_2 \,\rangle = N_p \langle\, q_1, q_2 \,\rangle, \forall q_2, q_1, p \in \mathbb{H}'$

ii) $\langle\, q_1 p, q_2 p \,\rangle = N_p \langle\, q_1, q_2 \,\rangle, \forall q_2, q_1, p \in \mathbb{H}'$

iii) $\langle\, p_1 q_1, p_2 q_2 \,\rangle + \langle\, p_1 q_2, p_2 q_1 \,\rangle = -2 \langle\, p_1, p_2 \,\rangle \langle\, q_1, q_2 \,\rangle, \forall q_2, q_1, p_1, p_2 \in \mathbb{H}'$

iv) $\langle\, p_1 q_1, p_2 \rangle = \langle\, q_1, K(p_1) q_2 \,\rangle, \forall q_2, q_1, p_1 \in \mathbb{H}'$

v) $\langle\, p_1 q_1, p_2 \rangle = \langle\, p_1, q_2 K(q_1) \rangle, \forall q_2, q_1, p_1 \in \mathbb{H}'$

önermeleri gerçeklenir [9].

2.6. Bölünmüş (Split) Kuaterniyonların Matris Gösterimi

$1, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyonları tüm bölünmüş kuaterniyonların vektör uzayları için bir baz oluştururlar.

$$\sigma(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \sigma(\overrightarrow{e_1}) = \begin{bmatrix} \overrightarrow{e_1} & 0 \\ 0 & -\overrightarrow{e_1} \end{bmatrix}, \ \sigma(\overrightarrow{e_2}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ \sigma(\overrightarrow{e_3}) = \begin{bmatrix} 0 & -\overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_1} & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan σ dönüşümü lineer olarak tüm bölünmüş kuaterniyonlar için uygulanabilir. Başka bir ifadeyle herhangi bir $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyonuna $\sigma(q) = a_0\sigma(1) + a_1\sigma(\overrightarrow{e_1}) + a_2\sigma(\overrightarrow{e_2}) + a_3\sigma(\overrightarrow{e_3})$ dönüşümü uygulanabilir. Buradan bölünmüş kuaterniyonların cümlesini 2×2 tipindeki kompleks matrislere dönüştüren bir dönüşüm elde edilir.

Herhangi q ve p bölünmüş kuaterniyonları için

$$\sigma(q + p) = \sigma(q) + \sigma(p) \ \text{ ve } \ \sigma(qp) = \sigma(q)\sigma(p)$$

olduğu hemen görülebilir. Sonuç olarak $z = \mathrm{a} + i\mathrm{b}$, $w = -\mathrm{c} - i\mathrm{d}$ için $K(z) = \overline{z}$ ve $K(w) = \overline{w}$ alınırsa

$$\sigma(q) = \begin{bmatrix} z & w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}$$

elde edilir [1].

2.7. Bölünmüş (Split) Dual Kuaterniyonlar

$\mathbb{H}'_{\mathbb{D}} = \{\, Q = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1\overrightarrow{\mathrm{e}_1} + \mathrm{A}_2\overrightarrow{\mathrm{e}_2} + \mathrm{A}_3\overrightarrow{\mathrm{e}_3} \,;\, A_0, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3 \in \mathbb{D} \,\}$ cümlesini ele alalım. Burada $\{1, \overrightarrow{\mathrm{e}_1}, \overrightarrow{\mathrm{e}_2}, \overrightarrow{\mathrm{e}_3}\}$ birimlerinin çarpımı

i) $\overrightarrow{\mathrm{e}_1}^2 = -1$, $\overrightarrow{\mathrm{e}_2}^2 = 1$, $\overrightarrow{\mathrm{e}_3}^2 = 1$

ii) $\overrightarrow{\mathrm{e}_1}\,\overrightarrow{\mathrm{e}_2} = \overrightarrow{\mathrm{e}_3}$, $\overrightarrow{\mathrm{e}_2}\,\overrightarrow{\mathrm{e}_3} = -\overrightarrow{\mathrm{e}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{e}_3}\,\overrightarrow{\mathrm{e}_1} = \overrightarrow{\mathrm{e}_2}$

iii) $\overrightarrow{\mathrm{e}_3}\,\overrightarrow{\mathrm{e}_2} = \overrightarrow{\mathrm{e}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{e}_2}\,\overrightarrow{\mathrm{e}_1} = -\overrightarrow{\mathrm{e}_3}$, $\overrightarrow{\mathrm{e}_1}\,\overrightarrow{\mathrm{e}_3} = -\overrightarrow{\mathrm{e}_2}$

şeklindedir.

$\mathbb{H}'_{\mathbb{D}}$ nün her bir elemanına bir bölünmüş (split) dual kuaterniyon adı verilir. Burada $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3$ reel sayılarına Q bölünmüş dual kuaterniyonunun bileşenleri denir ve $Q = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1\overrightarrow{\mathrm{e}_1} + \mathrm{A}_2\overrightarrow{\mathrm{e}_2} + \mathrm{A}_3\overrightarrow{\mathrm{e}_3}$ şeklinde gösterilir. $\overrightarrow{\mathrm{e}_1}, \overrightarrow{\mathrm{e}_2}, \overrightarrow{\mathrm{e}_3}$ birimleri 3-boyutlu reel vektör uzayının bir dik koordinat sisteminin baz vektörleri olarak alınabilir. Bir bölünmüş dual kuaterniyon skalar ve vektörel olmak üzere iki kısıma ayrılabilir. Skalar kısmı $S_Q = \mathrm{A}_o$ ve vektörel kısmı $\overrightarrow{V_Q} = \mathrm{A}_1\overrightarrow{\mathrm{e}_1} + \mathrm{A}_2\overrightarrow{\mathrm{e}_2} + \mathrm{A}_3\overrightarrow{\mathrm{e}_3}$ şeklindedir. O halde bir bölünmüş dual kuaterniyon $Q = S_Q + \overrightarrow{V_Q}$ şeklinde yazılabilir.

Herhangi $Q = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1\overrightarrow{\mathrm{e}_1} + \mathrm{A}_2\overrightarrow{\mathrm{e}_2} + \mathrm{A}_3\overrightarrow{\mathrm{e}_3}$ ve $P = \mathrm{B}_0 + \mathrm{B}_1\overrightarrow{\mathrm{e}_1} + \mathrm{B}_2\overrightarrow{\mathrm{e}_2} + \mathrm{B}_3\overrightarrow{\mathrm{e}_3}$ bölünmüş dual kuaterniyonlarının toplamı

$$\oplus : \mathbb{H}'_{\mathbb{D}} \times \mathbb{H}'_{\mathbb{D}} \to \mathbb{H}'_{\mathbb{D}}$$

$$(Q, P) \to Q \oplus P = (S_Q + S_P) \oplus (\overrightarrow{V_Q} + \overrightarrow{V_P})$$

$$= S_{Q+P} + \overrightarrow{V_{Q+p}}$$

şeklinde tanımlanırsa bu işlemle birlikte $(\mathbb{H}'_{\mathbb{D}}, \oplus)$ bir Abel grubudur. $\mathbb{H}'_{\mathbb{D}}$ nin işlemine göre etkisiz elemanı $(0,0,0,0)$ dır.

Herhangi $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $Q = A_0 + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3} \in \mathbb{H}'_{\mathbb{D}}$ olmak üzere

$\mathbb{H}'_{\mathbb{D}}$ üzerindeki skalerle çarpma işlemi ise

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{H}' \rightarrow \mathbb{H}'$$

$$(\lambda, Q) \rightarrow \lambda \odot Q = \lambda \odot (S_Q + \overrightarrow{V_Q}) = \lambda S_Q + \lambda \overrightarrow{V_Q}$$

şeklinde tanımlanırsa $\{ \mathbb{H}'_{\mathbb{D}}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot \}$ bir vektör uzayı olur. $\mathbb{H}'_{\mathbb{D}}$ bölünmüş dual kuaterniyonların cümlesi reel sayılar cismi üzerinde 4-boyutlu bir vektör uzayıdır.

Bölünmüş (Split) Dual Kuaterniyonların Çarpımı

$$\times : \mathbb{H}'_{\mathbb{D}} \times \mathbb{H}'_{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{H}'_{\mathbb{D}}$$

$$(Q, P) \rightarrow QP = (a_0b_0 - a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1b_0 + a_0b_1 - a_2b_3 + a_3b_2)\overrightarrow{e_1}$$

$$+ (a_0b_2 + a_2b_o - a_1b_3 + a_3b_1)\overrightarrow{e_2} + (a_0b_3 + a_3b_0 - a_2b_1 + a_1b_2)\overrightarrow{e_3}$$

$$= S_Q S_p + g(\overrightarrow{V_Q}, \overrightarrow{V_P}) + S_Q \overrightarrow{V_P} + S_P \overrightarrow{V_Q} + \overrightarrow{V_Q} \wedge \overrightarrow{V_P}$$

biçiminde tanımlanır.

Burada $\mathbb{H}'_{\mathbb{D}}$ nün imajiner kısmı $\operatorname{Im}\mathbb{H}'_{\mathbb{D}} = \{ A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3} : A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{D} \}$ olmak üzere

$$g : \operatorname{Im}\mathbb{H}'_{\mathbb{D}} \times \operatorname{Im}\mathbb{H}'_{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{D}$$

$$(\overrightarrow{V_Q}, \overrightarrow{V_P}) \rightarrow g(\overrightarrow{V_Q}, \overrightarrow{V_P}) = -A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

ve

$$\wedge : \operatorname{Im}\mathbb{H}'_{\mathbb{D}} \times \operatorname{Im}\mathbb{H}'_{\mathbb{D}} \to \operatorname{Im}\mathbb{H}'_{\mathbb{D}}$$

$$(\overrightarrow{V_Q}, \overrightarrow{V_P}) \to \overrightarrow{V_Q} \wedge \overrightarrow{V_P} = (A_3B_2 - A_2B_3)\overrightarrow{e_1} + (A_3B_1 - A_1B_3)\overrightarrow{e_2} + (A_1B_2 - A_2B_1)\overrightarrow{e_3}$$

dır ve aşağıdaki özliklere sahiptir.

i) İki bölünmüş dual kuaterniyonun çarpımı bir bölünmüş dual kuaterniyondur.

ii) Bölünmüş dual kuaterniyon çarpımı birleşimlidir.

iii) Bölünmüş dual kuaterniyon çarpımı toplama üzerine sağdan ve soldan dağılımlıdır.

iv) Bölünmüş dual kuaterniyon çarpımı değişimli değildir.

Dolayısıyla $\{ \mathbb{H}'_{\mathbb{D}}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot, \times \}$ sistemi bir cebirdir. Fakat değişimli değildir. Bu cebire Bölünmüş Dual Kuaterniyon Cebiri denir.

$$K : \mathbb{H}'_{\mathbb{D}} \to \mathbb{H}'_{\mathbb{D}}$$

$$Q = S_Q + \overrightarrow{V_Q} \to K(Q) = S_Q - \overrightarrow{V_Q}$$

biçiminde tanımlanan eşlenik işlemine göre bir $Q = A_0 + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş dual kuaterniyonun eşleniği $K(Q) = A_0 - A_1\overrightarrow{e_1} - A_2\overrightarrow{e_2} - A_3\overrightarrow{e_3}$ şeklindedir. Eşlenik işlemi aşağıdaki

i) $K(aQ + bP) = aK(Q) + bK(P)$, $\forall\, a,b \in \mathbb{D}$, $\forall\, Q,P \in \mathbb{H}'_{\mathbb{D}}$

ii) $K(QP) = K(P)\,K(Q)$, $\forall\, Q,P \in \mathbb{H}'_{\mathbb{D}}$

iii) $K(K(Q)) = Q$, $\forall\, Q \in \mathbb{H}'_{\mathbb{D}}$

özeliklerine sahiptir.

$$N : \mathbb{H}'_{\mathbb{D}} \to \mathbb{D}$$

$$Q \to N(Q) = N_Q = QK(Q) = K(Q)Q$$

biçiminde tanımlanan N işlemine $\mathbb{H}'_{\mathbb{D}}$ üzerinde norm denir. Bir

$Q = A_0 + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş dual kuaterniyonu için, Q nun N_Q normu

$$N_Q = A_0^2 + A_1^2 - A_2^2 - A_3^2$$

reel sayısıyla tanımlıdır. Norm işlemi aşağıdaki

i) $N_{QP} = N_Q N_p$, $\forall\, Q,P \in \mathbb{H}'_{\mathbb{D}}$

ii) $N_{\lambda Q} = \lambda^2 N_Q$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\ Q \in \mathbb{H}'_{\mathbb{D}}$

özeliklerine sahiptir.

$$(,)^{-1} : \mathbb{H}'_{\mathbb{D}} \to \mathbb{H}'_{\mathbb{D}}$$
$$Q \to Q^{-1} = \frac{K(Q)}{N_Q} \ , \ N_Q \neq 0$$

biçiminde tanımlanan işleme $\mathbb{H}'_{\mathbb{D}}$ de invers işlemi denir. $N_Q \neq 0$ olmak üzere bir Q bölünmüş dual kuaterniyonunun inversi $Q^{-1} = \dfrac{K(Q)}{N_Q} = \dfrac{a_0 - a_1\overrightarrow{e_1} - a_2\overrightarrow{e_2} - a_3\overrightarrow{e_3}}{a_o^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}$ dır. İnvers işlemi aşağıdaki

i) $(QP)^{-1} = P^{-1}Q^{-1}$, $\forall\ Q, P \in \mathbb{H}'_{\mathbb{D}}$ ve $N_Q \neq 0$, $N_P \neq 0$

ii) $(\lambda Q)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} Q^{-1}$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\ Q \in \mathbb{H}'_{\mathbb{D}}$ ve $N_Q \neq 0$

özeliklerine sahiptir [9].

Tanım 2.7.1 Herhangi bir Q_0 dual bölünmüş kuaterniyonu için $N_{Q_0} = 1$ ise Q_0 'a birim dual bölünmüş kuaterniyon denir . $\mathbb{H}'_{\mathbb{D}}$ dual bölünmüş kuaterniyon cebrindeki tüm birim dual bölünmüş kuaterniyonların cümlesi $\left(S'\right)^3_{\mathbb{D}} = \{ Q_o \in \mathbb{H}'_{\mathbb{D}} : N_{Q_0} = 1 \}$ ile gösterilir . Eğer $Q_0 = A_0 + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$ için $A_0 = a_0 + \varepsilon a_o^*$, $A_1 = a_1 + \varepsilon a_1^*$, $A_2 = a_2 + \varepsilon a_2^*$, $A_3 = a_3 + \varepsilon a_3^*$ ise

$$a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = 1 \ ; \ a_0a_0^* + a_1a_1^* - a_2a_2^* - a_3a_3^* = 0$$

elde edilir.

$Q_0 = A_0 + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$ birim bölünmüş kuaterniyon ve

$g(\overrightarrow{V_{Q_o}}, \overrightarrow{V_{Q_0}}) = -A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 > 0$ olsun. Bu durumda $N_{Q_0} = 1$ ve $\overrightarrow{V_{Q_0}}$ spacelike (uzaysı) bir vektör olacağından $Q_0 = \cosh\theta_0 + \overrightarrow{S_0}\sinh\theta_0$ formunda da ifade edilebilir. Burada

$$\cosh\theta_0 = D_0, \ \sinh\theta_0 = \sqrt{-A_0^2 + A_1^2 + A_2^2}\ , \ \overrightarrow{S_0} = \frac{A_0\overrightarrow{e_1} + A_1\overrightarrow{e_2} + A_2\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{-A_0^2 + A_1^2 + A_2^2}}$$

dır ve θ_0 bölünmüş dual açısı Q_0 ın bölünmüş dual açısıdır. $\overrightarrow{S_0}$ birim spacelike bölünmüş dual vektörü ise Q_0 ın birim bölünmüş dual vektördür.

$\theta_0 = \theta + \varepsilon\theta^*$; $\overrightarrow{S_0} = \overrightarrow{S_0} + \varepsilon\overrightarrow{S_0}^*$ şeklinde yazılabilir. Burada;

$$\theta = \arccos(a_0)\ , \ \theta^* = -\frac{a_0^*}{\sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

$$\overrightarrow{S_0} = \frac{a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\ , \ \overrightarrow{S_0}^* = \frac{a_1^*\overrightarrow{e_1} + a_2^*\overrightarrow{e_2} + a_3^*\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} + \frac{a_0 a_0^*(a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3})}{\sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

dir .

Şimdi de herhangi bir dual bölünmüş kuaterniyonu normuna bölerek birim dual bölünmüş kuaterniyon elde edebiliriz. $Q_0 = A_0 + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$ herhangi bir dual bölünmüş kuaterniyon olsun. Bu durumda

$$Q_o = \frac{Q}{\sqrt{N_Q}} = \frac{A_o + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{A_o^2 + A_1^2 - A_2^2 - A_3^2}} = \frac{A_o}{\sqrt{A_o^2 + A_1^2 - A_2^2 - A_3^2}} + \frac{A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{A_o^2 + A_1^2 - A_2^2 - A_3^2}}$$

birim dual bölünmüş kuaterniyonu elde edilir. Burada

$$\cosh\theta = \frac{A_o}{\sqrt{A_o^2 + A_1^2 - A_2^2 - A_3^2}}\ ;\sinh\theta = \frac{\sqrt{-A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}{\sqrt{A_o^2 + A_1^2 - A_2^2 - A_3^2}}\ \text{ve}\ \overrightarrow{S_o} = \frac{A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{-A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}$$

alınırsa $Q_o = \cosh\theta + \overrightarrow{S_o}\sinh\theta$ formunda da ifade edilebilir. $\overrightarrow{S_o}$ birim spacelike dual bölünmüş vektörüne Q_o birim dual bölünmüş kuaterniyon ekseni denir.

Eğer $Q_0 = A_0 + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$ birim bölünmüş kuaterniyon ve

$g(\overrightarrow{V_{Q_0}}, \overrightarrow{V_{Q_0}}) = -A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 < 0$ ise $N_{Q_0} = 1$ ve $\overrightarrow{V_{Q_0}}$ timelike (zamansı) bir vektör olacağından $Q_0 = \cos\theta_0 + \overrightarrow{S_0}\sin\theta_0$ formunda da ifade edilebilir. Burada

$$\cos\theta_0 = D_0,\ \sin\theta_0 = \sqrt{A_0^2 - A_1^2 - A_2^2},\ \overrightarrow{S_0} = \frac{A_0\overrightarrow{e_1} + A_1\overrightarrow{e_2} + A_2\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{A_0^2 - A_1^2 - A_2^2}}$$ dır ve θ_0 bölünmüş dual açısı Q_0 ın bölünmüş dual açısıdır. $\overrightarrow{S_0}$ birim timelike bölünmüş dual vektörü ise Q_0 ın birim bölünmüş dual vektördür.

$\theta_0 = \theta + \varepsilon\theta^*$; $\overrightarrow{S_0} = \overrightarrow{S_0} + \varepsilon\overrightarrow{S_0}^*$ şeklinde yazılabilir. Burada;

$$\theta = \arccos(a_0),\ \theta^* = -\frac{a_0^*}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}}$$

$$\overrightarrow{S_0} = \frac{a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}},\ \overrightarrow{S_0}^* = \frac{a_1^*\overrightarrow{e_1} + a_2^*\overrightarrow{e_2} + a_3^*\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}} + \frac{a_0 a_0^*(a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3})}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}}$$

dir .

Şimdi de herhangi bir dual bölünmüş kuaterniyonu normuna bölerek birim dual bölünmüş kuaterniyon elde edebiliriz. $Q_0 = A_0 + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$ herhangi bir dual bölünmüş kuaterniyon olsun. Bu durumda

$$Q_o = \frac{Q}{\sqrt{N_Q}} = \frac{A_o + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{A_o^2 + A_1^2 - A_2^2 - A_3^2}} = \frac{A_o}{\sqrt{A_o^2 + A_1^2 - A_2^2 - A_3^2}} + \frac{A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{A_o^2 + A_1^2 - A_2^2 - A_3^2}}$$

birim dual bölünmüş kuaterniyonu elde edilir. Burada

$$\cos\theta = \frac{A_o}{\sqrt{A_o^2 + A_1^2 - A_2^2 - A_3^2}};\ \sin\theta = \frac{\sqrt{A_1^2 - A_2^2 - A_3^2}}{\sqrt{A_o^2 + A_1^2 - A_2^2 - A_3^2}}\ \text{ve}\ \overrightarrow{S_o} = \frac{A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2 - A_3^2}}$$

alınırsa $Q_o = \cos\theta + \overrightarrow{S_o}\sin\theta$ formunda da ifade edilebilir. $\overrightarrow{S_o}$ birim timelike dual bölünmüş vektörüne Q_o birim dual bölünmüş kuaterniyon ekseni denir [9].

Tanım 2.7.2 Skalar kısmı sıfır olan dual bölünmüş kuaterniyona dual bölünmüş vektör adı verilir. Herhangi iki

$$Q = \overrightarrow{v_Q} = A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3} \in \mathbb{H}'_{\mathbb{D}}\ ,\ P = \overrightarrow{v_P} = B_1\overrightarrow{e_1} + B_2\overrightarrow{e_2} + B_3\overrightarrow{e_3} \in \mathbb{H}'_{\mathbb{D}}$$ dual

bölünmüş vektörlerinin çarpımı

$$Q \wedge P = \frac{1}{2}(QP - PQ)$$

olarak bulunur. Q ve P dual bölünmüş kuaterniyonlarının skalar çarpımı

$$\langle QP\rangle = -A_0B_0 - A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

$$= -\frac{1}{2}(K(Q)P + K(P)Q) = -\frac{1}{2}(QK(P) + PK(Q))$$

$$= \langle qp\rangle + \varepsilon(\langle qp^*\rangle + \langle q^*p\rangle)$$

şeklindedir. Ayrıca bir dual bölünmüş kuaterniyon dual sayı dörtlüsüdür. Bu dörtlüyü aşağıdaki gibi bir sütun matrisi formunda yazabiliriz.

$$Q = Q = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \end{bmatrix}^T$$

Böylece

$$Q = q + \varepsilon q^*$$

olarak gösterilebilir. Burada q ve q^*, 4×1 tipinde reel sütun vektörleridir [9].

2.8. Bölünmüş (Split) Dual Kuaterniyonların Matris Gösterimi

$1, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ bölünmüş dual kuaterniyonları tüm bölünmüş dual kuaterniyonların vektör uzayları için bir baz oluştururlar.

$$\sigma(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \sigma(\overrightarrow{e_1}) = \begin{bmatrix} \overrightarrow{e_1} & 0 \\ 0 & -\overrightarrow{e_1} \end{bmatrix},\ \sigma(\overrightarrow{e_2}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ \sigma(\overrightarrow{e_3}) = \begin{bmatrix} 0 & -\overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_1} & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan σ dönüşümü lineer olarak tüm bölünmüş dual kuaterniyonlar için uygulanabilir. Başka bir ifadeyle herhangi bir $Q = A_0 + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş dual kuaterniyonuna $\sigma(Q) = A_0\sigma(1) + A_1\sigma(\overrightarrow{e_1}) + A_2\sigma(\overrightarrow{e_2}) + A_3\sigma(\overrightarrow{e_3})$ dönüşümü uygulanabilir. Buradan bölünmüş dual kuaterniyonların cümlesini 2×2 tipindeki dual kompleks matrislere dönüştüren bir dönüşüm elde edilir.

Herhangi Q ve P bölünmüş dual kuaterniyonları için

$$\sigma(Q+P) = \sigma(Q) + \sigma(P) \text{ ve } \sigma(QP) = \sigma(Q)\sigma(P)$$

olduğu hemen görülebilir. Sonuç olarak $Z = A + iB$, $W = -C - iD$ için $K(Z) = \overline{Z}$ ve $K(W) = \overline{W}$ alınırsa

$$\sigma(Q) = \begin{bmatrix} Z & W \\ \overline{W} & \overline{Z} \end{bmatrix}$$

elde edilir [1].

3. REEL VE DUAL KUATERNİYONLARIN LİE GRUP YAPISI

3.1. Reel Kuaterniyonların Lie Grup ve Lie Cebir Yapıları

$$\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^4$$
$$q \to \varphi(q) = (a_0, a_1, a_2, a_3) \ , \ q = a_0\overrightarrow{e_0} + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$$

ile verilen φ dönüşümü birebir ve örtendir. Bu nedenle $\mathbb{H}$ ile $\mathbb{R}^4$ ün noktaları birebir eşlenebilir. $\varphi(\mathbb{H}) = \mathbb{R}^4$ olup $\varphi(\mathbb{H})$ açıktır. $(\varphi, \mathbb{H})$, $\mathbb{H}$nin bir haritasıdır. $\varphi \circ \varphi^{-1} = I$ özdeşlik dönüşümü diferensiyellenebilirdir. Ayrıca $(\varphi, \mathbb{H})$ tek haritalı atlastır. Bu tek haritalı atlas diferensiyellenebilirdir. Böylece $\mathbb{H}$, bu atlasla birlikte bir diferensiyellenebilir manifolddur.

$$\mathbb{H}^* = \mathbb{H} - \{(0,0,0,0)\}$$

cümlesi $\times$ kuaterniyon çarpımı işlemine göre bir gruptur. Ayrıca $\mathbb{H}^*$, $\mathbb{R}^4$ ün bir açık alt manifoldu yapısıyla verilebilir.

$$\times : \mathbb{H}^* \times \mathbb{H}^* \to \mathbb{H}^*$$
$$(q,p) \to qp = S_q S_p - \langle \overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_p} \rangle + S_q \overrightarrow{V_p} + S_p \overrightarrow{V_q} + \overrightarrow{V_q} \wedge \overrightarrow{V_p}$$

işlemi, diferensiyellenebilir işlemlerin bir lineer birleşimi olduğu için diferensiyellenebilirdir. Sonuç olarak $\mathbb{H}^*$ bir Lie grubudur.

$\mathbb{H}^*$ ın bir x noktasındaki tanjant uzayı $T_{\mathbb{H}^*}(x)$ olsun.

$$f_x : \mathbb{H}^* \to T_{H^*}(x)$$

$$q = a_0\overrightarrow{e_0} + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} \to \sum_{m=0}^{3} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x$$

dönüşümü bir vektör uzayı izomorfizimidir. f_x in birebir ve örten olduğu hemen görülebilir. Ayrıca

$$f_x(tq + sp) = \sum_{m=0}^{3} (ta_i \frac{\partial}{\partial x_i} + sb_i \frac{\partial}{\partial x_i})\bigg|_x$$

$$= \sum_{m=0}^{3} ta_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x + \sum_{m=0}^{3} sb_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x$$

$$= t\sum_{m=0}^{3} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x + s\sum_{m=0}^{3} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x$$

$$= t\, f_x(q) + s\, f_x(p)$$

dir. Yani f_x lineerdir. Üstelik f_x^{-1} de lineerdir.

$a \in \mathbb{H}$ belirli bir eleman olmak üzere, $x \in \mathbb{H}^*$ için

$$X(x) = f_x(x\,a)$$

eşitliği ile tanımlı X , $\mathbb{H}^*$ üzerinde bir vektör alanıdır. Ayrıca $q \in \mathbb{H}^*$ ile belirli sol öteleme L_q ise ,

$$L_{q*}(X_x) = X(qx)$$

yazılabileceğinden X bir sol invaryant vektör alanıdır. Böylece elde edilen

$$\mu : \mathbb{H} \to \mathfrak{G}^*$$
$$x \to X, \qquad X(x) = f_x(x\,a)$$

dönüşümü lineerdir. Çekirdeği { 0 } dır.

$\mathbb{H}$ ve $\mathfrak{G}^*$ aynı boyuta sahiptir. Böylece μ bir lineer izomorfizimdir. $\wedge$ dönüşümünün $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ sistemindeki değerleri

$$\mu(\vec{e}_0) = f_x(x\vec{e}_0) = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3} + x_4\frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$\mu(\vec{e}_1) = f_x(x\vec{e}_1) = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$\mu(\vec{e}_2) = f_x(x\vec{e}_2) = -x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - x_4\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1\frac{\partial}{\partial x_3} + x_2\frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$\mu(\vec{e}_3) = f_x(x\vec{e}_3) = -x_4\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3} + x_1\frac{\partial}{\partial x_4}$$

olarak hesaplanır. $f_x(x\vec{e}_i)$ de x ile $\vec{e}_i$ arasındaki çarpım kuaterniyon çarpımıdır. $\mu(\vec{e}_1)$ ’ i hesaplayalım.

$$\mu(\overrightarrow{e_1}) = f_x(x\overrightarrow{e_1}) = f_x\left((x_1\overrightarrow{e_0} + x_2\overrightarrow{e_1} + x_3\overrightarrow{e_2} + x_4\overrightarrow{e_3}) \times (\overrightarrow{e_1})\right)$$

$$= f_x\left(x_1\overrightarrow{e_0}\,\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_1} + x_3\overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_1} + x_4\overrightarrow{e_3}\,\overrightarrow{e_1}\right)$$

$$= f_x\left(x_1\overrightarrow{e_1} - x_2\overrightarrow{e_o} - x_3\overrightarrow{e_3} + x_4\overrightarrow{e_2}\right)$$

$$= -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_4}$$

3.2. $\mathbb{S}^3$ Lie Grubunun Lie Cebiri

Normu birim olan kuaterniyonlara birim kuaterniyon demiştik. Birim kuaterniyonların cümlesini

$$\mathbb{S}^3 = \{\, q_o \ : \ q_o = a_0\overrightarrow{e_0} + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} \ , \ \ N(q_o) = 1 \, , \ q_o \in \mathbb{H} \,\}$$

ile gösterelim. $\mathbb{E}^4$ deki birim hiperküre $\mathbb{S}^3$ ise

$$\varphi : \mathbb{E}^4 \to \mathbb{R}$$
$$q_o \to \varphi(q_o) = (\, a_0 , a_1 , a_2 , a_3)$$

dönüşümü birebirdir. $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{E}^4$, $\mathbb{S}^3$ ün $\mathbb{C}^\infty$ yapısından indirgenen topolojisine göre, $\mathbb{E}^4$ de bir regüler alt manifolddur. Böylece $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}$ bir regüler alt manifold yapısıyla ele alınabilir. Bu yapı $\mathbb{S}^3$ ün diferensiyellenebilir yapısıyla aynıdır.

$\forall \ p, q \in \mathbb{H}$ için, $N(pq) = N(p) \cdot N(q)$

olduğundan $\mathbb{S}^3$ da $\times$ işlemi kapalıdır. ($\mathbb{S}^3$, $\times$) bir gruptur. Birim elemanı $\overrightarrow{e_0} = (1, 0, 0, 0)$ dır. Boy $\mathbb{S}^3 = 3$ tür.

$\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}$, grup yapısına sahip regüler altmanifold olduğundan bir Lie alt grubu dolayısıyla bir Lie grubudur.

$\mathbb{S}^3$ üzerinde bir α eğrisi

$$\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{S}^3$$
$$t \to \alpha(\, t\,) = \alpha(t) = a_0(t) + a_1(t)\overrightarrow{e_1} + a_2(t)\overrightarrow{e_2} + a_3(t)\overrightarrow{e_3}$$

ve $\alpha(0) = \overrightarrow{e_0}$ olarak verilsin. Yani

$$a_0(0) = 1$$

$$a_i(0) = 0 \ , \ 1 \leq i \leq 3$$

olsun. $\alpha(t) \in \mathbb{S}^3$ dan dolayı

$$\sum_{j=0}^{3} \left[a_j(t) \right]^2 = 1$$

$$\sum_{j=0}^{3} a_j'(t)\, a_j(t) = 0$$

dır. $t = 0$ için

$$\sum_{j=0}^{3} a_j'(0)\, a_j(0) = 0 \ \text{ ve } \ a_1(0) = a_2(0) = a_3(0) = 0$$

dan dolayı

$$a_0'(0) = 0$$

olur. Bu durumda birim noktadaki tanjant uzayda $a_0'(t)$ den bileşen bulunmamaktadır. Böylece $\overrightarrow{e_0}$ noktasındaki tanjant uzayın vektörleri

$$\eta = \eta_1 \overrightarrow{e_1} + \eta_2 \overrightarrow{e_2} + \eta_3 \overrightarrow{e_3}$$

formundaki vektörlerle inşa edilebilir. Şimdi $\mathbb{S}^3$ üzerinde tanımlı sol invaryant ve

$$X_e = \eta$$

olan vektör alanlarını araştıralım.

$\mathbb{S}^3$ üzerinde bir $\beta(t)$ eğrisini

$$\beta(0) = \overrightarrow{e_0}$$

$$\beta'(0) = \eta = \eta_1 \overrightarrow{e_1} + \eta_2 \overrightarrow{e_2} + \eta_3 \overrightarrow{e_3}$$

olarak alalım. $q_o \in \mathbb{S}^3$

$q_o = a_0\overrightarrow{e_0} + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} = S_{q_o} + \overrightarrow{V_{q_0}}$ ve $\eta \in T_{\mathbb{S}^3}(e)$ belirli bir eleman olmak üzere

$$X(q_0) = L_{q_{0_*}}(\eta)$$

$\mathbb{S}^3$ üzerinde bir sol invaryant vektör alanıdır. Ayrıca

$$L_{q_{0_*}}(\eta) = \left(L_{q_0} \times \beta\right)_* |_{t=0} \ , \ \beta'(0) = \eta$$

$$= [(S_{q_o} + \overrightarrow{V_{q_o}}) \times (S_\beta + \overrightarrow{V_\beta})]_* |_{t=0}$$

$$= q_o \times \eta = q_o\eta$$

dır. Böylece q_o kuaterniyonu ile $\beta(t)$ eğrisinin soldan ötelenişi $q_o\eta$ dir.

$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right\}$, $T_{\mathbb{S}^3}(e)$ nin standart bazı olmak üzere , X_i , $1 \leq i \leq 3$ vektör alanları,

$$X_i |_{q_o} = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{q_o} \quad , \quad N(q_o) = 1$$

olarak tanımlansın. X_i lerin $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ deki değerleri hesaplanırsa

$$X_1 = q \times \overrightarrow{e_1} = -x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$X_2 = q \times \overrightarrow{e_2} = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_0 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$X_3 = q \times \overrightarrow{e_3} = -x_3 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_0 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

elde edilir. Örnek olması için X_1 ' i hesaplayalım. $q = (a_0, a_1, a_2, a_3) = S_q + \overrightarrow{V_q}$

$$X_1\big|\overrightarrow{e_1} = q \times \overrightarrow{e_1}$$

$$= (a_0\overrightarrow{e_0} + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}) \times \overrightarrow{e_1}$$

$$= a_0\overrightarrow{e_1} + a_1(-1) + a_2(-\overrightarrow{e_3}) + a_3\overrightarrow{e_2}$$

$$= -a_1\overrightarrow{e_0} + a_0\overrightarrow{e_1} + a_3\overrightarrow{e_2} - a_2\overrightarrow{e_3}$$

ve q dan bağımsız olarak koordinat fonksiyonları cinsinden

$$X_1 = -x_1\frac{\partial}{\partial x_0} + x_0\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3}$$

yazılabilir.

Burada $\mathbb{S}^3$ ın Lie cebiri, $\mathbb{H}$ nin pürimajiner kısmına ait sol invaryant vektör alanlarıyla verilebilir. Şimdi $X_L(\mathbb{S}^3)$ üzerindeki [,] Lie çarpımını $\{X_1, X_2, X_3\}$ bazı cinsinden hesaplayalım.

$$[X_1, X_2] = (X_1 \times X_2) - (X_2 \times X_1)$$

$$= (S_{X_1} + \overrightarrow{V_{X_1}}) \times (S_{X_2} + \overrightarrow{V_{X_2}}) - (S_{X_2} + \overrightarrow{V_{X_2}}) \times (S_{X_1} + \overrightarrow{V_{X_1}})$$

$$= (\overrightarrow{V_{X_1}} \wedge \overrightarrow{V_{X_2}}) - (\overrightarrow{V_{X_2}} \wedge \overrightarrow{V_{X_1}})$$

$$= 2\,\overrightarrow{V_{X_1}} \wedge \overrightarrow{V_{X_2}}$$

$$= 2X_1 \wedge X_2 \bmod \mathbb{R} = 2\,X_3\,|_{\bmod \mathbb{R}}$$

$$[X_2, X_3] = 2X_1,\ [X_3, X_1] = 2X_2$$

olur.

$X_L(\mathbb{S}^3)$ üzerindeki Lie çarpımını $\mathfrak{S}^3 = T_{\mathbb{S}^3}(e)$ uzayına taşırsak $\mathfrak{S}^3$ da reel

kısım olmayacağından $X_1\big|_{\vec{e}_o} = \vec{e}_1$, $X_2\big|_{\vec{e}_o} = \vec{e}_2$, $X_3\big|_{\vec{e}_o} = \vec{e}_3$ olacağından $\mathfrak{S}^3$ daki

[,] çarpımı baz vektörleri cinsinden

$$[\vec{e}_1, \vec{e}_2] = 2\vec{e}_3 \, , [\vec{e}_2, \vec{e}_3] = 2\vec{e}_1 \, , [\vec{e}_3, \vec{e}_1] = 2\vec{e}_2$$

olarak bulunur.

Teorem 3.2.1 Herhangi bir $q_o = a_0\vec{e}_0 + a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ birim kuaterniyonun adjoint gösterimi

$$\mathrm{Ad}\,q_o = \begin{bmatrix} a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 & 2(a_1a_2 + a_0a_3) & 2(a_0a_2 + a_1a_3) \\ 2(a_0a_3 + a_1a_2) & a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 & 2(a_2a_3 - a_0a_1) \\ 2(a_1a_3 - a_0a_2) & 2(a_0a_1 + a_2a_3) & a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 \end{bmatrix}$$

ortogonal matrisine karşılık gelir.

İspat : $\mathrm{Ad}\,q_o = (\mathrm{Int}\,q_o)'_e : \mathfrak{S}^3 \to \mathfrak{S}^3$

$$\xi \to \mathrm{Ad}\,q_o(\xi) = (\mathrm{Int}\,q_o)'_e(\xi) = d\,(\mathrm{Int}\,q_o)_e(\xi)$$

$\mathbb{S}^3$ üzerinde $\alpha(o) = 1$ ve $\alpha'(0) = \xi$ olacak şekilde bir eğri $\alpha(t) = a_0(t) + a_1(t)\vec{e}_1 + a_2(t)\vec{e}_2 + a_3(t)\vec{e}_3$ olsun. Buradan

$$\mathrm{Ad}\,q_o(\xi) = (\mathrm{Int}\,q_o)'_e(\xi) = d\,(\mathrm{Int}\,q_o)_e(\xi)\left((d\alpha)(\frac{d}{dt}|_o)\right)$$

$$= d\,(q_o\,\alpha\,q_0^{-1})|_0\,(\frac{d}{dt}|_o)$$

$$= q_o\,(d\alpha)|_0\,(\frac{d}{dt}|_o)\,q_0^{-1}$$

$$= q_o\,\xi\,q_0^{-1}$$

elde edilir.

Sonuç olarak $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ bazına göre $\mathrm{Ad}\,q_o$ lineer izomorfizmine karşılık gelen ortogonal matrisleri elde edilir. Burada $\mathrm{Ad}\,q_o$

$$\mathrm{Ad}\,q_o(\vec{e_1}) = q_o\, \vec{e_1}\, q_0^{-1} \;,\; \mathrm{Ad}\,q_o(\vec{e_2}) = q_o\, \vec{e_2}\, q_0^{-1} \;,\; \mathrm{Ad}\,q_o(\vec{e_3}) = q_o\, \vec{e_3}\, q_0^{-1}$$

özeliklerini sağlar. Matrislerin ortogonalliği hemen görülebilir. Dolayısıyla birim kürenin adjoint gösterimi bir izometridir.

Şimdi $\mathfrak{S}^3$ birim kürenin Killing formunu hesaplayalım. Bütün pürimajiner kuaterniyonların vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ uzayı ile izomorfiktir. Ayrıca pürimajiner kuaterniyonlar için

$$X \times Y = -\langle X, Y\rangle + X \wedge Y$$

idi. $X, Y \in \mathfrak{S}^3$ için

$$X = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e_i} \;,\; Y = \sum_{i=1}^{3} b_i \vec{e_i}$$

olsun. Buradan

$$\frac{1}{4}(\mathrm{AdX.AdY})(Z) = \frac{1}{4}(\mathrm{AdX}([Y,Z])) = \frac{1}{4}[X([Y,Z]] = X\wedge(Y\wedge Z) = \langle X,Z\rangle Y - \langle X,Y\rangle Z$$

yazılabilir. Bu dönüşümün $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ bazındaki matrisini hesaplayalım.

$$\frac{1}{4}(\mathrm{AdX.AdY})(\vec{e_i}) = \langle X, \vec{e_i}\rangle Y - \langle X, Y\rangle \vec{e_i}$$

$$= a_i Y - \langle X, Y\rangle \vec{e_i}$$

$$K(X, Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{AdX.AdY})$$

idi. AdX.AdY nin matrisinin bileşenleri $[a_{ij}]$ ise

$$a_{11} = \langle \mathrm{AdX.AdY}\;, \vec{e_1}\rangle = \langle a_1 Y - \langle X, Y\rangle \vec{e_1}, \vec{e_1}\rangle = a_1 b_1 - \langle X, Y\rangle$$

$$a_{22} = \langle \mathrm{AdX.AdY}\;, \vec{e_2}\rangle = \langle a_2 Y - \langle X, Y\rangle \vec{e_2}, \vec{e_2}\rangle = a_2 b_2 - \langle X, Y\rangle$$

$$a_{33} = \langle \mathrm{AdX.AdY}\;, \vec{e_3}\rangle = \langle a_3 Y - \langle X, Y\rangle \vec{e_3}, \vec{e_3}\rangle = a_3 b_3 - \langle X, Y\rangle$$

olarak bulunur. Böylece

$$\frac{1}{4}K(X,Y)=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i-3\langle X,Y\rangle$$

$$=\langle X,Y\rangle-3\langle X,Y\rangle$$

$$=-2\langle X,Y\rangle$$

yazılabilir. Bu K Killing formunun $\mathfrak{S}^3$ de

$$K(X,Y)=-8\langle X,Y\rangle$$

ile belirli iç çarpım fonksiyonunun bir katı olduğunu ifade eder.

$$K=-8\langle\ ,\ \rangle$$

yazılabilir. Yani Killing formu $\mathbb{S}^3$ daki iç çarpımdır. K Killing formu adG altında invaryant idi. Yukarda da K nın $\langle\ ,\ \rangle$ ile denk olduğu gösterildi. O halde $\mathbb{S}^3$ Lie grubunun adjoint temsili ad$\mathbb{S}^3$ iç çarpımı korur.

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}:\ &\mathbb{S}^3\to L(\mathbb{S}^3,\mathbb{S}^3)\\ &q\to \mathrm{Ad}\,q=L_{q_*}\circ R_{q_*^{-1}}\end{aligned}$$

dönüşümü $\mathbb{R}^3$ de iç çarpımı koruyan dönüşümdür. Dolayısıyla

$$\mathrm{Ad}\ \mathbb{S}^3\subset O(3)$$

bir alt gruptur. Burada O (3) , ortogonal matrislerin cümlesidir.

$\forall q\in\mathbb{S}^3$ için Adq nun iç çarpımı koruması, Adq nun bir dönme tanımlayacağını belirtir. Şimdi de Adq nun tanımladığı dönmeyi, eksenini ve dönme açısını hesaplayalım.

$\forall q\in\mathbb{S}^3$ normlu kuaterniyonu için

$$q=\cos\varphi+\vec{\varepsilon}\sin\varphi$$

olarak yazılabilir. $\vec{\varepsilon}\in\mathbb{R}^3$ olup, $\vec{\varepsilon}\in\mathbb{S}^3$ alınabilir. Şimdi Ad$q(\vec{\varepsilon})$ u hesaplayalım.

$$\mathrm{Ad}\,q(\vec{\varepsilon}) = (\cos\varphi + \vec{\varepsilon}\sin\varphi)\times(\vec{\varepsilon})\times(\cos\varphi - \vec{\varepsilon}\sin\varphi)$$

$$= (\cos\varphi\cdot\vec{\varepsilon} + \vec{\varepsilon}\times\vec{\varepsilon}\sin\varphi)\times(\cos\varphi - \vec{\varepsilon}\sin\varphi)$$

$$= (\cos\varphi\cdot\vec{\varepsilon} + \sin\varphi)\times(\cos\varphi - \vec{\varepsilon}\sin\varphi)$$

$$= \cos^2\varphi\cdot\vec{\varepsilon} + \sin^2\varphi\cdot\vec{\varepsilon}$$

$$= \vec{\varepsilon}$$

Bu durumda $\mathrm{Ad}\,q$ nun dönme ekseni q nun ekseni olan $\vec{\varepsilon}$ ekseni ile aynı eksendir.

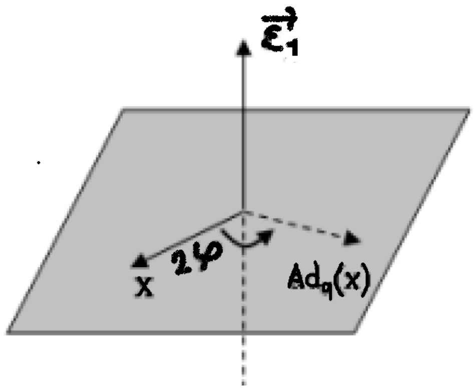
$\mathbb{R}^3$ de pozitif yönlü bir $\{\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3}\}$ ortonormal sistemini $\vec{\varepsilon_1} = \varepsilon$ olacak şekilde alınırsa

$$\mathrm{Ad}\,q(\overrightarrow{\varepsilon_2}) = \cos 2\varphi\overrightarrow{\varepsilon_2} + \sin 2\varphi\overrightarrow{\varepsilon_3}$$

$$\mathrm{Ad}\,q(\overrightarrow{\varepsilon_3}) = \sin 2\varphi\overrightarrow{\varepsilon_2} + \cos 2\varphi\overrightarrow{\varepsilon_3}$$

$$\mathrm{Ad}\,q(\overrightarrow{\varepsilon_1}) = \overrightarrow{\varepsilon_1}$$

olur. Böylece $\mathrm{Ad}\,q$, $\overrightarrow{\varepsilon_1}$ dönme eksenli , 2φ dönme açılı bir dönmedir. Bu şekil 3.1 den görülebilir



Şekil 3.1 Rotasyon

$$\det[\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\mathrm{Ad}\,\alpha\vec{\varepsilon_2}] = \det[\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon_3}\sin 2\varphi + \vec{\varepsilon_2}\cos 2\varphi]$$

$$= \det[\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon_3}\sin 2\varphi] + \det[\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon_3}\cos 2\varphi]$$

$$= \sin 2\varphi$$

ve $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$ için $\sin 2\varphi > 0$ olduğundan $\{\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\mathrm{Ad}\,\alpha\vec{\varepsilon_2}\}$ bir sağ - sistem oluşturur. $\mathrm{ad}\,q$ bir sağ – sistemi bir sağ - sisteme dönüştürdüğünden yön koruyan bir kongrüanstır. Ayrıca determinantı $+1$ dir. Sonuç olarak $\mathrm{Ad}\,q \in SO(3)$ tür. Dolayısıyla $\mathrm{Ad}\,\mathbb{S}^3$ ile $SO(3)$ izomorfiktirler. Ancak

$$\mathrm{Ad}: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathrm{ad}\,\mathbb{S}^3$$

dönüşümü, α ve $-\alpha$ için aynı dönmeleri verdiğinden birebir değildir.

3.3. Dual Kuaterniyonların Lie Grup ve Lie Cebir Yapıları

$$\Psi: \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{D}^4$$
$$Q \rightarrow \Psi(Q) = (A_0, A_1, A_2, A_3), \quad Q = A_0\vec{e_0} + A_1\vec{e_1} + A_2\vec{e_2} + A_3\vec{e_3}$$

ile verilen Ψ dönüşümü birebir ve örtendir. $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ ile $\mathbb{D}^4$ ün noktaları birebir eşlenebilir. Bu nedenle $\Psi(\mathbb{H}_{\mathbb{D}}) = \mathbb{D}^4$ olup $\Psi(\mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ açıktır. $(\Psi, \mathbb{H}_{\mathbb{D}})$, $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ nin bir haritasıdır. $\Psi \circ \Psi^{-1} = I$ özdeşlik dönüşümü diferensiyellenebilirdir. Ayrıca $(\Psi, \mathbb{H}_{\mathbb{D}})$ tek haritalı atlastır. Bu tek haritalı atlas diferensiyellenebilirdir. Böylece $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$, bu atlasla birlikte bir diferensiyellenebilir manifolddur.

$$\mathbb{H}_{\mathbb{D}}^* = \mathbb{H}_{\mathbb{D}} - \{(0,0,0,0)\}$$

cümlesi $\times$ kuaterniyon çarpımı işlemine göre bir gruptur. Ayrıca $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}^*$, $\mathbb{D}^4$ ün bir açık alt manifoldu yapısıyla verilebilir.

$$\times: \mathbb{H}_{\mathbb{D}}^* \times \mathbb{H}_{\mathbb{D}}^* \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{D}}^*$$
$$(Q,P) \rightarrow QP = S_Q S_P - \langle \vec{V_Q}, \vec{V_P} \rangle + S_Q\vec{V_P} + S_P\vec{V_Q} + \vec{V_Q} \wedge \vec{V_P}$$

işlemi, diferensiyellenebilir işlemlerin bir lineer birleşimi olduğu için diferensiyellenebilirdir. Sonuç olarak $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}^*$ bir Lie grubudur.

$\mathbb{H}_{\mathbb{D}}^{*}$ ın bir x noktasındaki tanjant uzayı $T_{\mathbb{H}_{\mathbb{D}}^{*}}(\mathrm{x})$ olsun.

$$f_{\mathrm{x}} : \mathbb{H}_{\mathbb{D}}^{*} \to T_{\mathbb{H}_{\mathbb{D}}^{*}}(\mathrm{x})$$

$$Q = A_0\overrightarrow{e_0} + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3} \;\to\; \sum_{m=0}^{3} A_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\mathrm{x}}$$

dönüşümü bir vektör uzayı izomorfizimidir. f_{x} in birebir ve örten olduğu hemen görülebilir. Ayrıca

$$f_{\mathrm{x}}(\,tQ + sP\,) = \left.\sum_{m=0}^{3}(\,tA_i\frac{\partial}{\partial x_i} + sB_i\frac{\partial}{\partial x_i})\right|_{\mathrm{x}}$$

$$= \sum_{m=0}^{3} tA_i\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\mathrm{x}} + \sum_{m=0}^{3} sB_i\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\mathrm{x}}$$

$$= t\sum_{m=0}^{3} A_i\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\mathrm{x}} + s\sum_{m=0}^{3} B_i\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\mathrm{x}}$$

$$= t\,f_{\mathrm{x}}(Q) + s\,f_{\mathrm{x}}(P)$$

dir. Yani f_{x} lineerdir. Üstelik f_{x}^{-1} de lineerdir.

$A \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ belirli bir eleman olmak üzere, $X \in \mathbb{H}_{D}^{*}$ için

$$\mathrm{X}(\,X\,) = f_{\mathrm{x}}(\,XA\,)$$

eşitliği ile tanımlı X , $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}^{*}$ üzerinde bir vektör alanıdır. Ayrıca $Q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}^{*}$ ile belirli sol öteleme L_Q ise

$$L_{Q_*}(\mathrm{X}_{\mathrm{x}}) = \mathrm{X}(QX)$$

yazılabileceğinden X bir sol invaryant vektör alanıdır. Böylece elde edilen

$$\mu : \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \to \mathfrak{G}_{\mathbb{D}}^{*}$$
$$X \to \mathrm{X}, \qquad \mathrm{X}(\,X\,) = f_{\mathrm{x}}(\,XA\,)$$

dönüşümü lineerdir. Çekirdeği { 0 } dır.

$\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ ve $\mathfrak{G}^*_{\mathbb{D}}$ aynı boyuta sahiptir. Böylece μ bir lineer izomorfizimdir. $\wedge$ dönüşümünün $\{\overrightarrow{e_0}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ sistemindeki değerleri

$$\mu(\overrightarrow{e_0}) = f_x(X\overrightarrow{e_0}) = X_1\frac{\partial}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial}{\partial x_2} + X_3\frac{\partial}{\partial x_3} + X_4\frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$\mu(\overrightarrow{e_1}) = f_x(X\overrightarrow{e_1}) = -X_2\frac{\partial}{\partial x_1} + X_1\frac{\partial}{\partial x_2} + X_4\frac{\partial}{\partial x_3} - X_3\frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$\mu(\overrightarrow{e_2}) = f_x(X\overrightarrow{e_2}) = -X_3\frac{\partial}{\partial x_1} - X_4\frac{\partial}{\partial x_2} + X_1\frac{\partial}{\partial x_3} + X_2\frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$\mu(\overrightarrow{e_3}) = f_x(X\overrightarrow{e_3}) = -X_4\frac{\partial}{\partial x_1} + X_3\frac{\partial}{\partial x_2} - X_2\frac{\partial}{\partial x_3} + X_1\frac{\partial}{\partial x_4}$$

olarak hesaplanır. $f_x(X\overrightarrow{e_i})$ de X ile $\overrightarrow{e_i}$ arasındaki çarpım kuaterniyon çarpımıdır. $\mu(\overrightarrow{e_1})$ ' i hesaplayalım.

$$\begin{aligned}\mu(\overrightarrow{e_1}) = f_x(X\overrightarrow{e_1}) &= f_x\left((X_1\overrightarrow{e_0} + X_2\overrightarrow{e_1} + X_3\overrightarrow{e_2} + X_4\overrightarrow{e_3}) \times (\overrightarrow{e_1})\right)\\ &= f_x\left(X_1\overrightarrow{e_0}\,\overrightarrow{e_1} + X_2\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_1} + X_3\overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_1} + X_4\overrightarrow{e_3}\,\overrightarrow{e_1}\right)\\ &= f_x\left(X_1\overrightarrow{e_1} - X_2\overrightarrow{e_o} - X_3\overrightarrow{e_3} + X_4\overrightarrow{e_2}\right)\\ &= -X_2\frac{\partial}{\partial x_1} + X_1\frac{\partial}{\partial x_2} + X_4\frac{\partial}{\partial x_3} - X_3\frac{\partial}{\partial x_4} \quad [2].\end{aligned}$$

3.4. $\mathbb{S}^3_{\mathbb{D}}$ Lie Grubunun Lie Cebiri

Normu birim olan dual kuaterniyonlara birim dual kuaterniyon demiştik. Birim dual kuaterniyonların cümlesini

$$\mathbb{S}^3_{\mathbb{D}} = \{\, Q_o : Q_o = A_0\overrightarrow{e_0} + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}\ ,\ N(Q_o) = 1\ ,\ Q_o \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \}$$

ile gösterelim. $\mathbb{D}^4$ deki birim dual hiperküre $\mathbb{S}^3_{\mathbb{D}}$ ise

$$\varphi : \mathbb{S}^3_{\mathbb{D}} \to \mathbb{D}$$
$$Q_o \to \varphi(Q_o) = (\ A_0\ ,\ A_1,\ A_2\ ,\ A_3\ )$$

dönüşümü birebirdir. $\mathbb{S}^3_{\mathbb{D}} \subset \mathbb{D}^4$, $\mathbb{S}^3_{\mathbb{D}}$ ün $\mathbb{C}^\infty$ yapısından indirgenen topolojisine göre, $\mathbb{D}^4$ de bir regüler alt manifolddur. Böylece $\mathbb{S}^3_{\mathbb{D}} \subset \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ bir regüler alt manifold yapısıyla ele alınabilir. Bu yapı $\mathbb{S}^3_{\mathbb{D}}$ ün diferensiyellenebilir yapısıyla aynıdır.

$\forall\ P, Q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ için, $N(PQ) = N(P) \cdot N(Q)$

olduğundan $\mathbb{S}^3_{\mathbb{D}}$ de $\times$ işlemi kapalıdır. ($\mathbb{H}_1$, $\times$) bir gruptur. Birim elemanı $\overrightarrow{e_0} = (1, 0, 0, 0)$ dır. Boy $\mathbb{S}^3_{\mathbb{D}} = 3$ tür.

$\mathbb{S}^3_{\mathbb{D}} \subset \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$, grup yapısına sahip regüler altmanifold olduğundan bir Lie alt grubu dolayısıyla bir Lie grubudur.

$\mathbb{S}^3_{\mathbb{D}}$ üzerinde bir α eğrisi

$$\alpha : I \subseteq \mathbb{D} \to \mathbb{S}^3_{\mathbb{D}}$$
$$t \to \alpha(t) = \alpha(t) = A_0(t) + A_1(t)\overrightarrow{e_1} + A_2(t)\overrightarrow{e_2} + A_3(t)\overrightarrow{e_3}$$

ve $\alpha(0) = \overrightarrow{e_0}$ olarak verilsin. Yani

$$A_0(0) = 1$$

$$A_i(0) = 0\ ,\ 1 \le i \le 3$$

olsun. $\alpha(t) \in \mathbb{S}^3_{\mathbb{D}}$ dan dolayı

$$\sum_{j=0}^{3} \left[A_j(t) \right]^2 = 1$$

$$\sum_{j=0}^{3} A'_j(t)\, A_j(t) = 0$$

dır. $t = 0$ için

$$\sum_{j=0}^{3} A'_j(0)\, A_j(0) = 0 \quad \text{ve} \quad A_1(0) = A_2(0) = A_3(0) = 0$$

dan dolayı

$$A_0^{'}(0) = 0$$

olur. Bu durumda birim noktadaki tanjant uzayda $A_0^{'}(t)$ den bileşen bulunmamaktadır. Böylece $\overrightarrow{e_0}$ noktasındaki tanjant uzayın vektörleri

$$\eta = \eta_1\overrightarrow{e_1} + \eta_2\overrightarrow{e_2} + \eta_3\overrightarrow{e_3}$$

formundaki vektörlerle inşa edilebilir. Şimdi $\mathbb{S}_{\mathbb{D}}^3$ üzerinde tanımlı sol invaryant ve

$$X_e = \eta$$

olan vektör alanlarını araştıralım.

$\mathbb{S}_{\mathbb{D}}^3$ üzerinde bir $\beta(t)$ eğrisini

$$\beta(0) = \overrightarrow{e_0}$$

$$\beta^{'}(0) = \eta = \eta_1\overrightarrow{e_1} + \eta_2\overrightarrow{e_2} + \eta_3\overrightarrow{e_3}$$

olarak alalım. $Q_o \in \mathbb{S}_{\mathbb{D}}^3$

$Q_o = A_0\overrightarrow{e_0} + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3} = S_{Q_o} + \overrightarrow{V_{Q_0}}$ ve $\eta \in T_{\mathbb{S}_{\mathbb{D}}^3}(e)$ belirli bir eleman olmak üzere

$$X(Q_0) = L_{Q_{0_*}}(\eta)$$

$\mathbb{S}_{\mathbb{D}}^3$ üzerinde bir sol invaryant vektör alanıdır. Ayrıca

$$L_{Q_{0_*}}(\eta) = \left(L_{Q_0} \times \beta\right)_* |_{t=0} \ , \ \beta^{'}(0) = \eta$$

$$= [(S_{Q_o} + \overrightarrow{V_{Q_o}}) \times (S_\beta + \overrightarrow{V_\beta})]_* |_{t=0}$$

$$= Q_o \times \eta = Q_o\eta$$

dır. Böylece Q_o kuaterniyonu ile $\beta(t)$ eğrisinin soldan ötelenişi $Q_o\eta$ dir.

$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}\right\}$, $T_{\mathbb{S}^3_{\mathbb{D}}}(e)$ nin standart bazı olmak üzere , X_i , $1 \leq i \leq 3$ vektör alanları ,

$$X_i\big|_{q_o} = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{q_o} \qquad , \qquad N(Q_o)=1$$

olarak tanımlansın. X_i lerin $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ deki değerleri hesaplanırsa

$$X_1 = Q\times\vec{e}_1 = -X_1\frac{\partial}{\partial x_o}+X_o\frac{\partial}{\partial x_1}+X_3\frac{\partial}{\partial x_2}-X_2\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$X_2 = Q\times\vec{e}_2 = -X_2\frac{\partial}{\partial x_o}-X_3\frac{\partial}{\partial x_1}+X_o\frac{\partial}{\partial x_2}+X_1\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$X_3 = Q\times\vec{e}_3 = -X_3\frac{\partial}{\partial x_o}+X_2\frac{\partial}{\partial x_1}-X_1\frac{\partial}{\partial x_2}+X_o\frac{\partial}{\partial x_3}$$

elde edilir. Örnek olması için X_1 ' i hesaplayalım. $Q = (A_0,A_1,A_2,A_3) = S_Q+\vec{V_Q}$

$$X_1\big|\vec{e}_1 = Q\times\vec{e}_1$$

$$= (A_0\vec{e}_0+A_1\vec{e}_1+A_2\vec{e}_2+A_3\vec{e}_3)\times\vec{e}_1$$

$$= A_0\vec{e}_1+A_1(-1)+A_2(-\vec{e}_3)+A_3\vec{e}_2$$

$$= -A_1\vec{e}_o+A_o\vec{e}_1+A_3\vec{e}_2-A_2\vec{e}_3$$

ve Q dan bağımsız olarak koordinat fonksiyonları cinsinden

$$X_1 = -X_1\frac{\partial}{\partial x_o}+X_o\frac{\partial}{\partial x_1}+X_3\frac{\partial}{\partial x_2}-X_2\frac{\partial}{\partial x_3}$$

yazılabilir.

Burada $\mathbb{S}^3_{\mathbb{D}}$ ın Lie cebiri, $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ nin pürimajiner kısmına ait sol invaryant vektör alanlarıyla verilebilir. Şimdi $X_L(\mathbb{S}^3_{\mathbb{D}})$ üzerindeki [,] Lie çarpımını $\{X_1, X_2, X_3\}$ bazı cinsinden hesaplayalım.

$$[X_1, X_2] = (X_1 \times X_2) - (X_2 \times X_1)$$

$$= (S_{X_1} + \overrightarrow{V_{X_1}}) \times (S_{X_2} + \overrightarrow{V_{X_2}}) - (S_{X_2} + \overrightarrow{V_{X_2}}) \times (S_{X_1} + \overrightarrow{V_{X_1}})$$

$$= (\overrightarrow{V_{X_1}} \wedge \overrightarrow{V_{X_2}}) - (\overrightarrow{V_{X_2}} \wedge \overrightarrow{V_{X_1}})$$

$$= 2\, \overrightarrow{V_{X_1}} \wedge \overrightarrow{V_{X_2}}$$

$$= 2X_1 \wedge X_2 \bmod \mathbb{R} = 2\, X_3 \,|_{\bmod \mathbb{R}}$$

$$[X_2, X_3] = 2X_1, [X_3, X_1] = 2X_2$$

olur.

$X_L(\mathbb{S}^3_{\mathbb{D}})$ üzerindeki Lie çarpımını $\mathfrak{G}^3_{\mathbb{D}} = T_{\mathbb{S}^3_{\mathbb{D}}}(e)$ uzayına taşırsak $\mathfrak{G}^3_{\mathbb{D}}$ da reel

kısım olmayacağından $X_1\big|_{\vec{e}_o} = \overrightarrow{e_1}$, $X_2\big|_{\vec{e}_o} = \overrightarrow{e_2}$, $X_3\big|_{\vec{e}_o} = \overrightarrow{e_3}$ olacağından $\mathfrak{G}^3_{\mathbb{D}}$ daki

[,] çarpımı baz vektörleri cinsinden

$$[\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}] = 2\overrightarrow{e_3}, [\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}] = 2\overrightarrow{e_1}, [\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}] = 2\overrightarrow{e_2}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.4.1 Herhangi bir $Q_o = A_0\overrightarrow{e_0} + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$ birim dual kuaterniyonun adjoint gösterimi

$$\mathrm{Ad}\,Q_o = \begin{bmatrix} A_0^2 + A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 & 2(A_1A_2 + A_0A_3) & 2(A_0A_2 + A_1A_3) \\ 2(A_0A_3 + A_1A_2) & A_0^2 - A_1^2 + A_2^2 - A_3^2 & 2(A_2A_3 - A_0A_1) \\ 2(A_1A_3 - A_0A_2) & 2(A_0A_1 + A_2A_3) & A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 + A_3^2 \end{bmatrix}$$

dual ortogonal matrisine karşılık gelir.

İspat : $\mathrm{Ad}Q_o = (\mathrm{Int}Q_o)'_e : \mathfrak{G}^3_{\mathbb{D}} \to \mathfrak{G}^3_{\mathbb{D}}$

$$\zeta \to \mathrm{Ad}Q_o\ (\zeta) = (\mathrm{Int}Q_o)'_e(\zeta) = \mathrm{d}\,(\mathrm{Int}Q_o)_e(\zeta)$$

$\mathbb{S}^3_{\mathbb{D}}$ üzerinde $\alpha(o) = 1$ ve $\alpha'(0) = \zeta$ olacak şekilde bir eğri $\alpha(t) = A_0(t) + A_1(t)\overrightarrow{e_1} + A_2(t)\overrightarrow{e_2} + A_3(t)\overrightarrow{e_3}$ olsun. Buradan

$$\mathrm{Ad}Q_o\ (\zeta) = (\mathrm{Int}Q_o)'_e(\zeta) = \mathrm{d}\,(\mathrm{Int}Q_o)_e(\zeta)\left((\mathrm{d}\alpha)(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|_o)\right)$$

$$= \mathrm{d}\,(Q_o\,\alpha\,Q_0^{-1})|_0\,(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|_o)$$

$$= Q_o\ (\mathrm{d}\alpha)|_0\ (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|_o)\ Q_0^{-1}$$

$$= Q_o\ \zeta\ Q_0^{-1}$$

elde edilir.

Sonuç olarak $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ bazına göre $\mathrm{Ad}Q_o$ lineer izomorfizmine karşılık gelen dual ortogonal matrisleri elde edilir. Burada $\mathrm{Ad}Q_o$

$$\mathrm{Ad}Q_o\ (\overrightarrow{e_1}) = Q_o\ \overrightarrow{e_1}\ Q_0^{-1}\ ,\ \mathrm{Ad}Q_o\ (\overrightarrow{e_2}) = Q_o\ \overrightarrow{e_2}\ Q_0^{-1}\ ,\ \mathrm{Ad}Q_o\ (\overrightarrow{e_3}) = Q_o\ \overrightarrow{e_3}\ Q_0^{-1}$$

özeliklerini sağlar. Matrislerin ortogonalliği hemen görülebilir. Dolayısıyla dual birim kürenin adjoint gösterimi bir izometridir.

Şimdi $\mathfrak{G}^3_{\mathbb{D}}$ birim kürenin Killing formunu hesaplayalım. Bütün pürimajiner dual kuaterniyonların vektör uzayı $\mathbb{D}^4$ uzayı ile izomorfiktir. Ayrıca pürimajiner dual kuaterniyonlar için

$$X \times Y = -\langle X, Y \rangle + X \wedge Y$$

idi. $X, Y \in \mathfrak{G}^3_{\mathbb{D}}$ için

$$X = \sum_{i=1}^{3} A_i \overrightarrow{e_i}\ ,\ Y = \sum_{i=1}^{3} B_i \overrightarrow{e_i}$$

olsun. Buradan

$$\frac{1}{4}(AdX.AdY)(Z) = \frac{1}{4}(AdX([Y,Z])) = \frac{1}{4}[X([Y,Z]] = X\wedge(Y\wedge Z) = <X,Z>Y - <X,Y>Z$$

yazılabilir. Bu dönüşümün $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ bazındaki matrisini hesaplayalım.

$$\frac{1}{4}(\,AdX.AdY\,)(\vec{e_i}\,) = \langle\, X\,,\, \vec{e_i}\,\rangle\, Y - \langle\, X\,,\, Y\,\rangle\, \vec{e_i}$$

$$= A_i Y - \langle\, X\,,\, Y\,\rangle\, \vec{e_i}$$

$$K(\,X\,,\,Y\,) = \ Tr\,(\,AdX.AdY\,)$$

idi. AdX.AdY nin matrisinin bileşenleri [A_{ij}] ise

$$A_{11} = \langle\, AdX.AdY\ ,\ \vec{e_1}\,\rangle = \langle\ A_1 Y - \langle X, Y\rangle \vec{e_1}, \vec{e_1}\,\rangle = \ A_1 B_1 - \langle X, Y\rangle$$

$$A_{22} = \langle\, AdX.AdY\ ,\ \vec{e_2}\,\rangle = \langle\ A_2 Y - \langle X, Y\rangle \vec{e_2}, \vec{e_2}\,\rangle = \ A_2 B_2 - \langle X, Y\rangle$$

$$A_{33} = \langle\, AdX.AdY\ ,\ \vec{e_3}\,\rangle = \langle\ A_3 Y - \langle X, Y\rangle \vec{e_3}, \vec{e_3}\,\rangle = \ A_3 B_3 - \langle X, Y\rangle$$

olarak bulunur. Böylece

$$\frac{1}{4}K(\,X\,,\,Y\,) = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i - 3\,\langle\, X\,,\,Y\rangle$$

$$= \langle\, X\,,\,Y\rangle - 3\,\langle\, X\,,\,Y\rangle$$

$$= \ -2\,\langle\, X\,,\,Y\rangle$$

yazılabilir. Bu K Killing formunun $\mathfrak{G}^3_{\mathbb{D}}$ de

$$K(\,X\,,\,Y\,) = -8\ \langle\, X\,,\,Y\rangle$$

ile belirli iç çarpım fonksiyonunun bir katı olduğunu ifade eder.

$$K = -8\ \langle\ ,\ \rangle$$

yazılabilir. Yani Killing formu $\mathbb{S}^3_{\mathbb{D}}$ daki iç çarpımdır. K Killing formu adG altında invaryant idi. Yukarda da K nın $\langle\ ,\ \rangle$ ile denk olduğu gösterildi. O halde $\mathbb{S}^3_{\mathbb{D}}$ Lie grubunun adjoint temsili $\mathrm{Ad}\,\mathbb{S}^3_{\mathbb{D}}$ iç çarpımı korur.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}:\ & \mathbb{S}^3_{\mathbb{D}} \to \mathrm{L}\,(\mathbb{S}^3_{\mathbb{D}}, \mathbb{S}^3_{\mathbb{D}}) \\ & Q \to \mathrm{Ad}\,Q = \mathrm{L}_{q_*} \circ \mathrm{R}_{q_*^{-1}} \end{aligned}$$

dönüşümü $\mathbb{D}^3$ de iç çarpımı koruyan dönüşümdür. Dolayısıyla

$$\mathrm{Ad}\ \mathbb{S}^3_{\mathbb{D}} \subset \mathrm{O}\,(\mathbb{D}^3)$$

bir alt gruptur. Burada O ($\mathbb{D}^3$) , ortogonal dual matrislerin cümlesidir.

$\forall Q \in \mathbb{S}^3_{\mathbb{D}}$ için $\mathrm{Ad}\,Q$ nun iç çarpımı koruması, $\mathrm{Ad}\,Q$ nun bir dönme tanımlayacağını belirtir. Şimdi de $\mathrm{Ad}\,Q$ nun tanımladığı dönmeyi, eksenini ve dönme açısını hesaplayalım.

$\forall Q \in \mathbb{S}^3_{\mathbb{D}}$ normlu dual kuaterniyonu için

$$Q = \cos\psi + \vec{\varepsilon}\sin\psi$$

olarak yazılabilir. $\vec{\varepsilon} \in \mathbb{D}^3$ olup, $\vec{\varepsilon} \in \mathbb{S}^3_{\mathbb{D}}$ alınabilir. Şimdi $\mathrm{Ad}\,Q\ (\vec{\varepsilon}\ )$ u hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}\,Q\ (\vec{\varepsilon}\ ) &= (\cos\psi + \vec{\varepsilon}\sin\psi)\times(\vec{\varepsilon}\ )\times(\cos\psi - \vec{\varepsilon}\sin\psi) \\ &= (\cos\psi\cdot\vec{\varepsilon} + \vec{\varepsilon}\times\vec{\varepsilon}\sin\psi)\times(\cos\psi - \vec{\varepsilon}\sin\psi) \\ &= (\cos\varphi\cdot\vec{\varepsilon} + \sin\varphi)\times(\cos\varphi - \vec{\varepsilon}\sin\varphi) \\ &= \cos^2\psi\cdot\vec{\varepsilon} + \sin^2\psi\cdot\vec{\varepsilon} \\ &= \vec{\varepsilon} \end{aligned}$$

Bu durumda $\mathrm{Ad}\,Q$ nun dönme ekseni Q nun ekseni olan $\vec{\varepsilon}$ ekseni ile aynı eksendir.

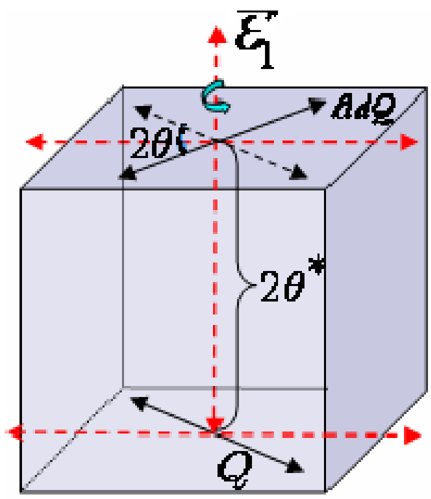
$\mathbb{D}^3$ de pozitif yönlü bir $\{\ \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3\ \}$ ortonormal sistemini $\vec{\varepsilon}_1 = \varepsilon$ olacak şekilde alınırsa

$$\mathrm{ad}\,Q(\vec{\varepsilon_2}) = \cos 2\psi \vec{\varepsilon_2} + \sin 2\psi \vec{\varepsilon_3}$$

$$\mathrm{ad}\,Q(\vec{\varepsilon_3}) = \sin 2\psi \vec{\varepsilon_2} + \cos 2\psi \vec{\varepsilon_3}$$

$$\mathrm{ad}\,Q(\vec{\varepsilon_1}) = \vec{\varepsilon_1}$$

olur. Böylece $\mathrm{Ad}\,Q$, $\vec{\varepsilon_1}$ dönme eksenli , 2ψ dönme açılı bir dönmedir. Bu dönme $2\psi = 2\theta + 2\theta^*$ dual açı şeklinde olup 2θ açılık dönmeye ve $2\theta^*$ kadar kaymaya karşılık gelir. Bu şekil 3.2 den görülebilir



Şekil 3.2 Dual rotasyon (vida hareketi)

$$\det[\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \mathrm{Ad}\,\alpha \vec{\varepsilon_2}] = \det[\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3} \sin 2\psi + \vec{\varepsilon_2} \cos 2\psi]$$

$$= \det[\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3} \sin 2\psi] + \det[\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3} \cos 2\psi]$$

$$= \sin 2\psi$$

ve $0 < \psi < \frac{1}{2}\pi$ için $\sin 2\psi > 0$ olduğundan $\{\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \mathrm{Ad}\,\alpha \vec{\varepsilon_2}\}$ bir sağ - sistem oluşturur. $\mathrm{Ad}\,Q$ bir sağ - sistemi bir sağ - sisteme dönüştürdüğünden yön koruyan bir kongrüanstır.

Ayrıca determinantı $+1$ dir. Sonuç olarak Ad $Q \in SO_{\mathbb{D}}(3)$ tür. Dolayısıyla $\mathrm{Ad}\,\mathbb{S}^3_{\mathbb{D}}$ ile $SO_{\mathbb{D}}(3)$ izomorfiktirler. Ancak

$$\mathrm{Ad}:\ \mathbb{S}^3_{\mathbb{D}} \to \mathrm{ad}\,\mathbb{S}^3_{\mathbb{D}}$$

dönüşümü, α ve $-\alpha$ için aynı dönmeleri verdiğinden birebir değildir.

4. BÖLÜNMÜŞ (SPLİT) VE DUAL SPLİT KUATERNİYONLARIN LİE GRUP YAPISI

4.1. Bölünmüş (Split) Kuaterniyonların Lie Grup Ve Lie Cebir Yapıları

$$\varphi : \mathbb{H}' \to \mathbb{R}^4$$
$$q \to \varphi(q) = (a_0, a_1, a_2, a_3) \;,\; q = a_0\overrightarrow{e_0} + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$$

ile verilen φ dönüşümü birebir ve örtendir. Bu nedenle $\mathbb{H}'$ ile $\mathbb{R}^4$ ün noktaları birebir eşlenebilir. $\varphi(\mathbb{H}') = \mathbb{R}^4$ olup $\varphi(\mathbb{H}')$ açıktır. $(\varphi , \mathbb{H}')$, $\mathbb{H}'$ nin bir haritasıdır. $\varphi \circ \varphi^{-1} = I$ özdeşlik dönüşümü diferensiyellenebilirdir. Ayrıca $(\varphi , \mathbb{H}')$ tek haritalı atlastır. Bu tek haritalı atlas diferensiyellenebilirdir. Böylece $\mathbb{H}'$, bu atlasla birlikte bir diferensiyellenebilir manifolddur.

$$\mathbb{H}^{*'} = \mathbb{H}' - \{(0,0,0,0)\}$$

cümlesi $\times$ kuaterniyon çarpımı işlemine göre bir gruptur. Ayrıca $\mathbb{H}^{*'}$, $\mathbb{R}^4$ ün bir açık alt manifoldu yapısıyla verilebilir.

$$\times : \mathbb{H}^{*'} \times \mathbb{H}^{*'} \to \mathbb{H}^{*'}$$
$$(q,p) \to qp = S_q S_p + g(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_p}) + S_q\overrightarrow{V_p} + S_p\overrightarrow{V_q} + \overrightarrow{V_q} \wedge \overrightarrow{V_p}$$

işlemi, diferensiyellenebilir işlemlerin bir lineer birleşimi olduğu için diferensiyellenebilirdir. Sonuç olarak $\mathbb{H}^{*'}$ bir Lie grubudur.

$\mathbb{H}^{*'}$ ın bir x noktasındaki tanjant uzayı $T_{\mathbb{H}^{*'}}(x)$ olsun.

$$f_x : \mathbb{H}^{*'} \to T_{H^{*'}}(x)$$

$$q = a_0\overrightarrow{e_0} + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} \to \sum_{m=0}^{3} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x$$

dönüşümü bir vektör uzayı izomorfizimidir. f_x in birebir ve örten olduğu hemen görülebilir. Ayrıca

$$f_x(\, tq + sp) = \sum_{m=0}^{3} (\, ta_i \frac{\partial}{\partial x_i} + sb_i \frac{\partial}{\partial x_i})\bigg|_x$$

$$= \sum_{m=0}^{3} ta_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x + \sum_{m=0}^{3} sb_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x$$

$$= t\sum_{m=0}^{3} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x + s\sum_{m=0}^{3} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x$$

$$= t\, f_x(q) + s\, f_x(p)$$

dir. Yani f_x lineerdir. Üstelik f_x^{-1} de lineerdir.

$a \in \mathbb{H}'$ belirli bir eleman olmak üzere, $x \in \mathbb{H}^{*'}$ için

$$X(x) = f_x(x\,a)$$

eşitliği ile tanımlı X , $\mathbb{H}^{*'}$ üzerinde bir vektör alanıdır. Ayrıca $q \in \mathbb{H}^{*'}$ ile belirli sol öteleme L_q ise,

$$L_{q*}(X_x) = X(qx)$$

yazılabileceğinden X bir sol invaryant vektör alanıdır. Böylece elde edilen

$$\mu : \mathbb{H}' \to (\mathfrak{G}^*)'$$
$$x \to X, \qquad X(x) = f_x(x\,a)$$

dönüşümü lineerdir. Çekirdeği $\{ 0 \}$ dır.

$\mathbb{H}'$ ve $(\mathfrak{G}^*)'$ aynı boyuta sahiptir. Böylece μ bir lineer izomorfizimdir. $\wedge$ dönüşümünün $\{ \vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$ sistemindeki değerleri

$$\mu(\vec{e}_0) = f_x(x\vec{e}_0) = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$\mu(\vec{e}_1) = f_x(x\vec{e}_1) = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$\mu(\vec{e}_2) = f_x(x\vec{e}_2) = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$\mu(\vec{e}_3) = f_x(x\vec{e}_3) = x_4 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

olarak hesaplanır. $f_x(x\overrightarrow{e_i})$ de x ile $\overrightarrow{e_i}$ arasındaki çarpım kuaterniyon çarpımıdır. $\mu(\overrightarrow{e_1})$ ' i hesaplayalım.

$$\begin{aligned}\mu(\overrightarrow{e_1}) = f_x(x\overrightarrow{e_1}) &= f_x\left((x_1\overrightarrow{e_0} + x_2\overrightarrow{e_1} + x_3\overrightarrow{e_2} + x_4\overrightarrow{e_3}) \times (\overrightarrow{e_1})\right) \\ &= f_x\left(x_1\overrightarrow{e_0}\,\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_1} + x_3\overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_1} + x_4\overrightarrow{e_3}\,\overrightarrow{e_1}\right) \\ &= f_x\left(x_1\overrightarrow{e_1} - x_2\overrightarrow{e_o} - x_3\overrightarrow{e_3} + x_4\overrightarrow{e_2}\right) \\ &= -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_4}\end{aligned}$$

4.2. $(\mathbb{S}')^3$ Lie Grubunun Lie Cebiri

Normu birim olan bölünmüş kuaterniyonlara birim bölünmüş kuaterniyon demiştik. Birim bölünmüş kuaterniyonların cümlesini

$$(\mathbb{S}')^3 = \{\ q_o : q_o = a_0\overrightarrow{e_0} + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}\ ,\ N(q_o) = 1\ ,\ q_o \in \mathbb{H}'\ \}$$

ile gösterelim. $\mathbb{E}_2^4$ deki birim hiperküre $(\mathbb{S}')^3$ ise

$$\begin{aligned}\varphi :\ & \mathbb{E}_2^4 \to \mathbb{R} \\ & q_o \to \varphi(q_o) = (\ a_0, a_1, a_2, a_3)\end{aligned}$$

dönüşümü birebirdir. $(\mathbb{S}')^3 \subset \mathbb{E}^4$, $(\mathbb{S}')^3$ ün $\mathbb{C}^\infty$ yapısından indirgenen topolojisine göre, $\mathbb{R}^4$ de bir regüler alt manifolddur. Böylece $(\mathbb{S}')^3 \subset \mathbb{H}'$ bir regüler alt manifold yapısıyla ele alınabilir. Bu yapı $(\mathbb{S}')^3$ ün diferensiyellenebilir yapısıyla aynıdır.

$\forall\ p, q \in \mathbb{H}'$ için, $N(pq) = N(p)\cdot N(q)$

olduğundan $(\mathbb{S}')^3$ da $\times$ işlemi kapalıdır. $((\mathbb{S}')^3\ ,\ \times\ )$ bir gruptur. Birim elemanı $\overrightarrow{e_0} = (1, 0, 0, 0)$ dır. Boy $(\mathbb{S}')^3 = 3$ tür.

$(\mathbb{S}')^3 \subset \mathbb{H}'$, grup yapısına sahip regüler altmanifold olduğundan bir Lie alt grubu dolayısıyla bir Lie grubudur.

$(\mathbb{S}^{'})^3$ üzerinde bir α eğrisi

$$\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{S}^{'})^3$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = \alpha(t) = a_0(t) + a_1(t)\overrightarrow{e_1} + a_2(t)\overrightarrow{e_2} + a_3(t)\overrightarrow{e_3}$$

ve $\alpha(0) = \overrightarrow{e_0}$ olarak verilsin. Yani

$$a_0(0) = 1$$

$$a_i(0) = 0 \ , \ 1 \leq i \leq 3$$

olsun. $\alpha(t) \in (\mathbb{S}^{'})^3$ dan dolayı

$$\sum_{j=0}^{3}\left[a_j(t)\right]^2 = 1$$

$$\sum_{j=0}^{3} a_j^{'}(t)\, a_j(t) = 0$$

dır. $t = 0$ için

$$\sum_{j=0}^{3} a_j^{'}(0)\, a_j(0) = 0 \quad \text{ve} \quad a_1(0) = a_2(0) = a_3(0) = 0$$

dan dolayı

$$a_0^{'}(0) = 0$$

olur. Bu durumda birim noktadaki tanjant uzayda $a_0^{'}(t)$ den bileşen bulunmamaktadır. Böylece $\overrightarrow{e_0}$ noktasındaki tanjant uzayın vektörleri

$$\eta = \eta_1\overrightarrow{e_1} + \eta_2\overrightarrow{e_2} + \eta_3\overrightarrow{e_3}$$

formundaki vektörlerle inşa edilebilir. Şimdi $(\mathbb{S}^{'})^3$ üzerinde tanımlı sol invaryant ve

$$X_e = \eta$$

olan vektör alanlarını araştıralım.

$(\mathbb{S}^{'})^3$ üzerinde bir $\beta(t)$ eğrisini

$$\beta(0) = \overrightarrow{e_0}$$

$$\beta^{'}(0) = \eta = \eta_1\overrightarrow{e_1} + \eta_2\overrightarrow{e_2} + \eta_3\overrightarrow{e_3}$$

olarak alalım. $q_o \in (\mathbb{S}^{'})^3$

$q_o = a_0\overrightarrow{e_0} + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} = S_{q_o} + \overrightarrow{V_{q_0}}$ ve $\eta \in T_{(\mathbb{S}^{'})^3}(e)$ belirli bir eleman olmak üzere

$$X(q_0) = L_{q_{0*}}(\eta)$$

$(\mathbb{S}^{'})^3$ üzerinde bir sol invaryant vektör alanıdır. Ayrıca

$$L_{q_{0*}}(\eta) = \left(L_{q_0} \times \beta\right)_* |_{t=0} \ , \ \beta^{'}(0) = \eta$$

$$= [(S_{q_o} + \overrightarrow{V_{q_o}}) \times (S_\beta + \overrightarrow{V_\beta})]_* |_{t=0}$$

$$= q_o \times \eta = q_o\eta$$

dır. Böylece q_o birim split kuaterniyonu ile $\beta(t)$ eğrisinin soldan öteleni̇şi $q_o\eta$ dir.

$\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \dfrac{\partial}{\partial x_3}\right\}$, $T_{(\mathbb{S}^{'})^3}(e)$ nin standart bazı olmak üzere , X_i , $1 \leq i \leq 3$ vektör alanları,

$$X_i |_{q_o} = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{q_o} \quad , \quad N(q_o) = 1$$

olarak tanımlansın. X_i lerin $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ deki değerleri hesaplanırsa

$$X_1 = q \times \overrightarrow{e_1} = -x_1\frac{\partial}{\partial x_0} + x_0\frac{\partial}{\partial x_1} + x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$X_2 = q \times \overrightarrow{e_2} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_0 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$X_3 = q \times \overrightarrow{e_3} = x_3 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_0 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

elde edilir. Örnek olması için X_1 ' i hesaplayalım. $q = (a_0, a_1, a_2, a_3) = S_q + \overrightarrow{V_q}$

$$X_1\Big|\overrightarrow{e_1} = q \times \overrightarrow{e_1}$$

$$= (a_0\overrightarrow{e_0} + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}) \times \overrightarrow{e_1}$$

$$= a_0\overrightarrow{e_1} + a_1(-1) + a_2(-\overrightarrow{e_3}) + a_3\overrightarrow{e_2}$$

$$= -a_1\overrightarrow{e_0} + a_0\overrightarrow{e_1} + a_3\overrightarrow{e_2} - a_2\overrightarrow{e_3}$$

ve q dan bağımsız olarak koordinat fonksiyonları cinsinden

$$X_1 = -x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

yazılabilir.

Burada $(\mathbb{S}')^3$ ın Lie cebiri, $\mathbb{H}'$ nin pürimajiner kısmına ait sol invaryant vektör alanlarıyla verilebilir. Şimdi $X_L((\mathbb{S}')^3)$ üzerindeki [,] Lie çarpımını { X_1, X_2, X_3 } bazı cinsinden hesaplayalım.

$$[X_1, X_2] = (X_1 \times X_2) - (X_2 \times X_1)$$

$$= (S_{X_1} + \overrightarrow{V_{X_1}}) \times (S_{X_2} + \overrightarrow{V_{X_2}}) - (S_{X_2} + \overrightarrow{V_{X_2}}) \times (S_{X_1} + \overrightarrow{V_{X_1}})$$

$$= (\overrightarrow{V_{X_1}} \wedge \overrightarrow{V_{X_2}}) - (\overrightarrow{V_{X_2}} \wedge \overrightarrow{V_{X_1}})$$

$$= 2\, \overrightarrow{V_{X_1}} \wedge \overrightarrow{V_{X_2}}$$

$$= 2\,X_1 \wedge X_2 \ \mathrm{mod}\,\mathbb{R} = 2\ X_3\,|_{\mathrm{mod}\,\mathbb{R}}$$

$$[X_2, X_3] = -2\,X_1,\ [X_3, X_1] = 2\,X_2$$

olur.

$X_L((\mathbb{S}')^3)$ üzerindeki Lie çarpımını $(\mathfrak{G}')^3 = T_{(\mathbb{S}')^3}(e)$ uzayına taşırsak $(\mathfrak{G}')^3$ da reel kısım olmayacağından $X_1\big|_{\overline{e}_o} = \overrightarrow{e_1}$, $X_2\big|_{\overline{e}_o} = \overrightarrow{e_2}$, $X_3\big|_{\overline{e}_o} = \overrightarrow{e_3}$ olacağından $(\mathfrak{G}')^3$ daki [,] çarpımı baz vektörleri cinsinden

$$[\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}] = 2\,\overrightarrow{e_3},\ [\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}] = -2\,\overrightarrow{e_1},\ [\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}] = 2\,\overrightarrow{e_2}$$

olarak bulunur.

Teorem 4.2.1 Herhangi bir $q_o = a_0\overrightarrow{e_0} + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ birim bölünmüş kuaterniyonun adjoint gösterimi

$$\mathrm{Ad}\,q_o = \begin{bmatrix} a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & 2(a_0a_3 - a_1a_2) & -2(a_0a_2 + a_1a_3) \\ 2(a_0a_3 + a_1a_2) & a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 & -2(a_0a_1 + a_2a_3) \\ 2(-a_0a_2 + a_1a_3) & 2(a_0a_1 - a_2a_3) & a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 \end{bmatrix}$$

yarı - ortogonal matrisine karşılık gelir.

İspat : $\mathrm{Ad}\,q_o = (\mathrm{Int}\,q_o)'_e : (\mathfrak{G}')^3 \to (\mathfrak{G}')^3$

$$\xi \to \mathrm{Ad}\,q_o(\xi) = (\mathrm{Int}\,q_o)'_e(\xi) = d\,(\mathrm{Int}\,q_o)_e(\xi)$$

$(\mathbb{S}')^3$ üzerinde $\alpha(o) = 1$ ve $\alpha'(0) = \xi$ olacak şekilde bir eğri $\alpha(t) = a_0(t) + a_1(t)\overrightarrow{e_1} + a_2(t)\overrightarrow{e_2} + a_3(t)\overrightarrow{e_3}$ olsun. Buradan

$$\mathrm{Ad}\,q_o(\xi) = (\mathrm{Int}\,q_o)'_e(\xi) = d\,(\mathrm{Int}\,q_o)_e(\xi)\left((d\alpha)(\frac{d}{dt}|_o)\right)$$

$$= d\,(q_o\,\alpha\,q_0^{-1})|_0\,(\frac{d}{dt}|_o)$$

$$= q_o (d\alpha)|_0 \left(\frac{d}{dt}|_o\right) q_0^{-1}$$

$$= q_o \ \xi \ q_0^{-1}$$

elde edilir.

Sonuç olarak $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ bazına göre $\mathrm{Ad}\,q_o$ lineer izomorfizmine karşılık gelen yarı - ortogonal matrisleri elde edilir. Burada $\mathrm{Ad}\,q_o$

$$\mathrm{Ad}\,q_o(\vec{e}_1) = q_o \ \vec{e}_1 \ q_0^{-1} \ , \ \mathrm{Ad}\,q_o(\vec{e}_2) = q_o \ \vec{e}_2 \ q_0^{-1} \ , \ \mathrm{Ad}\,q_o(\vec{e}_3) = q_o \ \vec{e}_3 \ q_0^{-1}$$

özeliklerini sağlar. Matrislerin yarı - ortogonalliği hemen görülebilir. Sonuç olarak $\mathrm{Ad}(\mathbb{S}')^3$ grubu yarı – ortogonal grubun alt grubudur.

Şimdi $(\mathfrak{G}')^3$ birim bölünmüş kürenin Killing formunu hesaplayalım. Bütün pürimajiner bölünmüş kuaterniyonların vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ uzayı ile izomorfiktir.

Teorem 4.2.2 Birim bölünmüş kürenin Killing bilineer formu invaryanttır.

İspat: $K : (\mathfrak{G}')^3 \times (\mathfrak{G}')^3 \to \mathbb{R}$

$$(X, Y) \to K(X, Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}X.\mathrm{Ad}Y)$$

Herhangi $X = X_1\vec{e}_1 + X_2\vec{e}_2 + X_3\vec{e}_3$ ve $Y = Y_1\vec{e}_1 + Y_2\vec{e}_2 + Y_3\vec{e}_3$ birim bölünmüş küreleri için

$$[X, Y] = 2\,X \wedge Y \ \text{ ve } \ g(X, Y) = -X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\mathrm{Ad}\,X(\vec{e}_1) = 0\vec{e}_1 + 2X_3\,\vec{e}_2 - 2X_2\,\vec{e}_3$$

$$\mathrm{Ad}\,X(\vec{e}_2) = 2X_3\,\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 2X_1\,\vec{e}_3$$

$$\mathrm{Ad}\,X(\vec{e}_3) = -2X_2\,\vec{e}_1 - 2X_1\,\vec{e}_2 + 0\,\vec{e}_3$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitliklerden Ad X dönüşümünün matrisini $\{\vec{e}_1, \vec{e}_1, \vec{e}_1\}$ bazına göre

$$\operatorname{Ad} X = \begin{bmatrix} 0 & 2X_3 & -2X_2 \\ 2X_3 & 0 & -2X_1 \\ -2X_2 & 2X_1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. Benzer şekilde

$$\operatorname{Ad} Y = \begin{bmatrix} 0 & 2Y_3 & -2Y_2 \\ 2Y_3 & 0 & -2Y_1 \\ -2Y_2 & 2Y_1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$K\,(X, Y\,) = \operatorname{Tr}\,(\,\operatorname{Ad}X.\operatorname{Ad}Y\,)$$

$$= \operatorname{Tr}\begin{bmatrix} 4X_3Y_3 - 4X_2Y_2 & -4X_2Y_1 & -4X_3Y_1 \\ 4X_1Y_2 & 4X_3X_3 - 4X_1Y_1 & -4X_2Y_3 \\ 4X_1Y_3 & -4X_2Y_3 & 4X_2Y_2 - 4X_1Y_1 \end{bmatrix}$$

$$= 8\,(\,-X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3\,)$$

$$= 8\,g(\,X.\,Y\,)$$

elde edilir. Buradan Killing formun yarı-öklidyen uzay $\mathbb{E}_1^3$ de bir metrik tensör olduğu görülür.

Yukarda K nın $g\,(\;,\;)$ ile denk olduğu gösterildi. O halde $(\mathbb{S}')^3$ Lie grubunun adjoint temsili $\operatorname{Ad}(\mathbb{S}')^3$ iç çarpımı korur.

$$\begin{aligned} \operatorname{Ad}:\ (\mathbb{S}')^3 &\to L\,((\mathbb{S}')^3, (\mathbb{S}')^3\,) \\ q &\to \operatorname{Ad} q = L_{q_*} \circ R_{q_*^{-1}} \end{aligned}$$

dönüşümü $\mathbb{R}^3$ de iç çarpımı koruyan dönüşümdür. Dolayısıyla

$$\operatorname{Ad}\ (\mathbb{S}')^3 \subset O_2^3$$

bir alt gruptur.

$\forall q \in (\mathbb{S}')^3$ için $\mathrm{Ad}\,q$ nun iç çarpımı koruması, $\mathrm{Ad}\,q$ nun bir dönme tanımlayacağını belirtir. Şimdi de $\mathrm{Ad}\,q$ nun tanımladığı dönmeyi, eksenini ve dönme açısını hesaplayalım.

$q = \mathrm{a}_0\overrightarrow{\mathrm{e}_0} + \mathrm{a}_1\overrightarrow{\mathrm{e}_1} + \mathrm{a}_2\overrightarrow{\mathrm{e}_2} + \mathrm{a}_3\overrightarrow{\mathrm{e}_3}$ birim bölünmüş kuaterniyon ve

$g(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_q}) = -\mathrm{a}_1^2 + \mathrm{a}_2^2 + \mathrm{a}_3^2 > 0$ olsun. Bu durumda $N_q = 1$ ve $\overrightarrow{V_q}$ spacelike (uzaysı) bir vektör olacağından $q = \cosh\varphi + \overrightarrow{\varepsilon_1}\sinh\varphi$ şeklinde de yazabiliriz. Burada

$$\cos h\varphi = \mathrm{a}_0,\ \sin h\varphi = \sqrt{-\mathrm{a}_1^2 + \mathrm{a}_2^2 + \mathrm{a}_3^2},\ \overrightarrow{\varepsilon_1} = \frac{\mathrm{a}_1\overrightarrow{\mathrm{e}_1} + \mathrm{a}_2\overrightarrow{\mathrm{e}_2} + \mathrm{a}_3\overrightarrow{\mathrm{e}_3}}{\sqrt{-\mathrm{a}_1^2 + \mathrm{a}_2^2 + \mathrm{a}_3^2}}\ ;$$

$g(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_1}) = \varepsilon_1^2 = 1$ dır ve $\overrightarrow{\varepsilon_1}$ birim bölünmüş spacelike kuaterniyon vektördür.

Şimdi $\mathrm{Ad}\,q(\overrightarrow{\varepsilon_1})$ u hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}\,q(\overrightarrow{\varepsilon_1}) &= (\cosh\varphi + \overrightarrow{\varepsilon_1}\sinh\varphi)\times(\overrightarrow{\varepsilon_1})\times(\cosh\varphi - \overrightarrow{\varepsilon_1}\sinh\varphi) \\
&= (\cosh\varphi \cdot \overrightarrow{\varepsilon_1} + \overrightarrow{\varepsilon_1} \times \overrightarrow{\varepsilon_1}\sinh\varphi)\times(\cosh\varphi - \overrightarrow{\varepsilon_1}\sinh\varphi) \\
&= (\cosh\varphi \cdot \overrightarrow{\varepsilon_1} + \sinh\varphi)\times(\cosh\varphi - \overrightarrow{\varepsilon_1}\sinh\varphi) \\
&= \cos^2 h\varphi \cdot \overrightarrow{\varepsilon_1} + \sin^2 h\varphi \cdot \overrightarrow{\varepsilon_1} \\
&= \overrightarrow{\varepsilon_1}
\end{aligned}$$

Eğer $q = \mathrm{a}_0\overrightarrow{\mathrm{e}_0} + \mathrm{a}_1\overrightarrow{\mathrm{e}_1} + \mathrm{a}_2\overrightarrow{\mathrm{e}_2} + \mathrm{a}_3\overrightarrow{\mathrm{e}_3}$ birim bölünmüş kuaterniyon ve

$g(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_q}) = -\mathrm{a}_1^2 + \mathrm{a}_2^2 + \mathrm{a}_3^2 < 0$ ise $N_q = 1$ ve $\overrightarrow{V_q}$ timelike (zamansı) bir vektör olacağından $q = \cos\varphi + \overrightarrow{\varepsilon_1}\sin\varphi$ şeklinde de yazabiliriz. Burada

$$\cos\varphi = \mathrm{a}_0,\ \sin\varphi = \sqrt{\mathrm{a}_1^2 - \mathrm{a}_2^2 - \mathrm{a}_3^2},\ \overrightarrow{\varepsilon_1} = \frac{\mathrm{a}_1\overrightarrow{\mathrm{e}_1} + \mathrm{a}_2\overrightarrow{\mathrm{e}_2} + \mathrm{a}_3\overrightarrow{\mathrm{e}_3}}{\sqrt{\mathrm{a}_1^2 - \mathrm{a}_2^2 - \mathrm{a}_3^2}}\ ;$$

$g(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_1}) = \varepsilon_1^{\,2} = -1$ dır ve $\overrightarrow{\varepsilon_1}$ birim bölünmüş timelike kuaterniyon vektördür.

Şimdi $\mathrm{Ad}\,q(\overrightarrow{\varepsilon_1})$ u hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}\,q(\overrightarrow{\varepsilon_1}) &= (\cos\varphi + \overrightarrow{\varepsilon_1}\sin\varphi)\times(\overrightarrow{\varepsilon_1})\times(\cos\varphi - \overrightarrow{\varepsilon_1}\sin\varphi) \\
&= (\cos\varphi\cdot\overrightarrow{\varepsilon_1} + \overrightarrow{\varepsilon_1}\times\overrightarrow{\varepsilon_1}\sin\varphi)\times(\cos\varphi - \overrightarrow{\varepsilon_1}\sin\varphi) \\
&= (\cos\varphi\cdot\overrightarrow{\varepsilon_1} + \sin\varphi)\times(\cos\varphi - \overrightarrow{\varepsilon_1}\sin\varphi) \\
&= \cos^2\varphi\cdot\overrightarrow{\varepsilon_1} + \sin^2\varphi\cdot\overrightarrow{\varepsilon_1} \\
&= \overrightarrow{\varepsilon_1}
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\varepsilon_2^{\,2}} = -1$, $\overrightarrow{\varepsilon_3^{\,2}} = 1$, $\overrightarrow{\varepsilon_1}\,\overrightarrow{\varepsilon_2} = -\overrightarrow{\varepsilon_2}\,\overrightarrow{\varepsilon_1} = \overrightarrow{\varepsilon_3}$ olacak şekilde $\{\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_3}\}$ ortonormal baz sistemi alınırsa $\mathrm{Ad}\,q$ dönüşümü altında $\overrightarrow{\varepsilon_2}$ ve $\overrightarrow{\varepsilon_3}$ birim bölünmüş kuaterniyonların görüntüsünü

$$\mathrm{Ad}\,q(\overrightarrow{\varepsilon_2}) = \cos 2\varphi\overrightarrow{\varepsilon_2} + \sin 2\varphi\overrightarrow{\varepsilon_3}$$

$$\mathrm{Ad}\,q(\overrightarrow{\varepsilon_3}) = -\sin 2\varphi\overrightarrow{\varepsilon_2} + \cos 2\varphi\overrightarrow{\varepsilon_3}$$

olur. Böylece $\mathrm{Ad}\,q$, $\overrightarrow{\varepsilon_1}$ dönme eksenli , 2φ dönme açılı bir dönmedir.

$$\begin{aligned}
\det[\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \mathrm{Ad}\,\alpha\,\overrightarrow{\varepsilon_2}] &= \det[\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_3}\sin 2\varphi + \overrightarrow{\varepsilon_2}\cos 2\varphi] \\
&= \det[\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_3}\sin 2\varphi] + \det[\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_3}\cos 2\varphi] \\
&= \sin 2\varphi
\end{aligned}$$

ve $0 < \varphi < \frac{1}{2}\pi$ için $\sin 2\varphi > 0$ olduğundan $\{\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \mathrm{Ad}\,\alpha\,\overrightarrow{\varepsilon_2}\}$ bir sağ - sistem oluşturur. $\mathrm{Ad}\alpha$ bir sağ - sistemi bir sağ - sisteme dönüştürdüğünden yön koruyan bir kongrüanstır. Ayrıca determinantı $+1$ dir. Sonuç olarak $\mathrm{Ad}\,q \in SO_2^3$ tür. Dolayısıyla $\mathrm{ad}(\mathbb{S}')^3$ ile SO_2^3 izomorfiktirler. Ancak

$$\mathrm{Ad}: (\mathbb{S}')^3 \rightarrow \mathrm{ad}(\mathbb{S}')^3$$

dönüşümü, α ve $-\alpha$ için aynı dönmeleri verdiğinden birebir değildir.

4.3. Dual Split Kuaterniyonların Lie Grup Ve Lie Cebir Yapıları

$$\Psi : \mathbb{H}'_{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{D}^4$$
$$Q \rightarrow \Psi(Q) = (A_0, A_1, A_2, A_3) \;\;,\;\; Q = A_0\overrightarrow{e_0} + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$$

ile verilen Ψ dönüşümü birebir ve örtendir. $\mathbb{H}'_{\mathbb{D}}$ ile $\mathbb{D}^4$ ün noktaları birebir eşlenebilir. Bu nedenle $\Psi(\mathbb{H}'_{\mathbb{D}}) = \mathbb{D}^4$ olup $\Psi(\mathbb{H}'_{\mathbb{D}})$ açıktır. $(\Psi, \mathbb{H}'_{\mathbb{D}})$, $\mathbb{H}'_{\mathbb{D}}$ nin bir haritasıdır. $\Psi \circ \Psi^{-1} = I$ özdeşlik dönüşümü diferensiyellenebilirdir. Ayrıca $(\Psi, \mathbb{H}'_{\mathbb{D}})$ tek haritalı atlastır. Bu tek haritalı atlas diferensiyellenebilirdir. Böylece $\mathbb{H}'_{\mathbb{D}}$, bu atlasla birlikte bir diferensiyellenebilir manifolddur.

$$\mathbb{H}'^{*}_{\mathbb{D}} = \mathbb{H}'_{\mathbb{D}} - \{(0,0,0,0)\}$$

cümlesi $\times$ kuaterniyon çarpımı işlemine göre bir gruptur. Ayrıca $\mathbb{H}'^{*}_{\mathbb{D}}$, $\mathbb{D}^4$ ün bir açık alt manifoldu yapısıyla verilebilir.

$$\times : \mathbb{H}'^{*}_{\mathbb{D}} \times \mathbb{H}'^{*}_{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{H}'^{*}_{\mathbb{D}}$$
$$(Q,P) \rightarrow QP = S_Q S_P + g_{\mathbb{D}}(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_p}) + S_Q\overrightarrow{V_P} + S_P\overrightarrow{V_Q} + \overrightarrow{V_Q} \wedge \overrightarrow{V_P}$$

işlemi, diferensiyellenebilir işlemlerin bir lineer birleşimi olduğu için diferensiyellenebilirdir. Sonuç olarak $\mathbb{H}'^{*}_{\mathbb{D}}$ bir Lie grubudur.

$\mathbb{H}'^{*}_{\mathbb{D}}$ ın bir x noktasındaki tanjant uzayı $T_{\mathbb{H}'^{*}_{\mathbb{D}}}(x)$ olsun.

$$f_x : \mathbb{H}'^{*}_{\mathbb{D}} \rightarrow T_{\mathbb{H}'^{*}_{\mathbb{D}}}(x)$$
$$Q = A_0\overrightarrow{e_0} + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3} \rightarrow \sum_{m=0}^{3} A_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x$$

dönüşümü bir vektör uzayı izomorfizimidir. f_x in birebir ve örten olduğu hemen görülebilir. Ayrıca

$$f_x(\,tQ + sP\,) = \sum_{m=0}^{3}(\,tA_i \frac{\partial}{\partial x_i} + sB_i \frac{\partial}{\partial x_i})\Big|_x$$

$$= \sum_{m=0}^{3} tA_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x + \sum_{m=0}^{3} sB_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x$$

$$= t\sum_{m=0}^{3} A_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x + s\sum_{m=0}^{3} B_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x$$

$$= t\, f_x(Q) + s\, f_x(P)$$

dir. Yani f_x lineerdir. Üstelik f_x^{-1} de lineerdir.

$A \in \mathbb{H}'_{\mathbb{D}}$ belirli bir eleman olmak üzere, $X \in \mathbb{H}'^{*}_{D}$ için

$$\mathrm{X}(\,X\,) = f_x(\,XA\,)$$

eşitliği ile tanımlı X , $\mathbb{H}'^{*}_{\mathbb{D}}$ üzerinde bir vektör alanıdır. Ayrıca $Q \in \mathbb{H}'^{*}_{\mathbb{D}}$ ile belirli sol öteleme L_Q ise,

$$L_{Q*}(X_x) = \mathrm{X}(QX)$$

yazılabileceğinden X bir sol invaryant vektör alanıdır. Böylece elde edilen

$$\mu : \mathbb{H}'_{\mathbb{D}} \to (\mathfrak{G}'_{\mathbb{D}})'$$

$$X \to \mathrm{X} \quad , \qquad \mathrm{X}(\,X\,) = f_x(\,XA\,)$$

dönüşümü lineerdir. Çekirdeği { 0 } dır.

$\mathbb{H}'_{\mathbb{D}}$ ve $\mathfrak{G}'^{\,3}_{\mathbb{D}}$ aynı boyuta sahiptir. Böylece μ bir lineer izomorfizimdir. $\wedge$ dönüşümünün $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ sistemindeki değerleri

$$\mu(\vec{e}_0) = f_x(X\vec{e}_0) = X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + X_4 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$\mu(\overrightarrow{e_1}) = f_x(X\overrightarrow{e_1}) = -X_2\frac{\partial}{\partial x_1} + X_1\frac{\partial}{\partial x_2} + X_4\frac{\partial}{\partial x_3} - X_3\frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$\mu(\overrightarrow{e_2}) = f_x(X\overrightarrow{e_2}) = X_3\frac{\partial}{\partial x_1} + X_4\frac{\partial}{\partial x_2} + X_1\frac{\partial}{\partial x_3} + X_2\frac{\partial}{\partial x_4}$$

$$\mu(\overrightarrow{e_3}) = f_x(X\overrightarrow{e_3}) = +X_4\frac{\partial}{\partial x_1} - X_3\frac{\partial}{\partial x_2} - X_2\frac{\partial}{\partial x_3} + X_1\frac{\partial}{\partial x_4}$$

olarak hesaplanır. $f_x(X\overrightarrow{e_i})$ de X ile $\overrightarrow{e_i}$ arasındaki çarpım kuaterniyon çarpımıdır. $\mu(\overrightarrow{e_1})$ ' i hesaplayalım.

$$\mu(\overrightarrow{e_1}) = f_x(X\overrightarrow{e_1}) = f_x\left((X_1\overrightarrow{e_0} + X_2\overrightarrow{e_1} + X_3\overrightarrow{e_2} + X_4\overrightarrow{e_3}) \times (\overrightarrow{e_1})\right)$$

$$= f_x\left(X_1\overrightarrow{e_0}\,\overrightarrow{e_1} + X_2\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_1} + X_3\overrightarrow{e_2}\,\overrightarrow{e_1} + X_4\overrightarrow{e_3}\,\overrightarrow{e_1}\right)$$

$$= f_x\left(X_1\overrightarrow{e_1} - X_2\overrightarrow{e_o} - X_3\overrightarrow{e_3} + X_4\overrightarrow{e_2}\right)$$

$$= -X_2\frac{\partial}{\partial x_1} + X_1\frac{\partial}{\partial x_2} + X_4\frac{\partial}{\partial x_3} - X_3\frac{\partial}{\partial x_4} \quad [9].$$

4.4. $(\mathbb{S}'_{\mathbb{D}})^3$ Lie Grubunun Lie Cebiri

Normu birim olan bölünmüş dual kuaterniyonlara birim bölünmüş dual kuaterniyon demiştik. Birim bölünmüş dual kuaterniyonların cümlesini

$$(\mathbb{S}'_{\mathbb{D}})^3 = \{\, Q_o : Q_o = A_0\overrightarrow{e_0} + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}\ ,\ N(Q_o) = 1\,,\ Q_o \in \mathbb{H}'_{\mathbb{D}} \}$$

ile gösterelim. $\mathbb{D}^4$ deki birim dual hiperküre $(\mathbb{S}'_{\mathbb{D}})^3$ ise

$$\varphi : (\mathbb{S}'_{\mathbb{D}})^3 \to SU_{\mathbb{D}}(2)$$
$$Q_o \to \varphi(Q_o) = (A_0, A_1, A_2, A_3)$$

dönüşümü birebirdir. $(\mathbb{S}^{'}_{\mathbb{D}})^3 \subset \mathbb{D}^4$, $(\mathbb{S}^{'}_{\mathbb{D}})^3$ ün $\mathbb{C}^{\infty}$ yapısından indirgenen topolojisine göre, $\mathbb{D}^4$ de bir regüler alt manifolddur. Böylece $(\mathbb{S}^{'}_{\mathbb{D}})^3 \subset \mathbb{H}^{'}_{\mathbb{D}}$ bir regüler alt manifold yapısıyla ele alınabilir. Bu yapı $(\mathbb{S}^{'}_{\mathbb{D}})^3$ ün diferensiyellenebilir yapısıyla aynıdır.

$$\forall\ P, Q \in \mathbb{H}^{'}_{\mathbb{D}} \text{ için, } N(PQ) = N(P) \cdot N(Q)$$

olduğundan $(\mathbb{S}^{'}_{\mathbb{D}})^3$ de $\times$ işlemi kapalıdır. $((\mathbb{S}^{'}_{\mathbb{D}})^3\ ,\ \times\ )$ bir gruptur. Birim elemanı $\overrightarrow{e_0} = (1, 0, 0, 0)$ dır. Boy $(\mathbb{S}^{'}_{\mathbb{D}})^3 = 3$ tür.

$(\mathbb{S}^{'}_{\mathbb{D}})^3 \subset \mathbb{H}^{'}_{\mathbb{D}}$, grup yapısına sahip regüler altmanifold olduğundan bir Lie alt grubu dolayısıyla bir Lie grubudur.

$(\mathbb{S}^{'}_{\mathbb{D}})^3$ üzerinde bir α eğrisi

$$\alpha : I \subseteq \mathbb{D} \rightarrow (\mathbb{S}^{'}_{\mathbb{D}})^3$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = \alpha(t) = A_0(t) + A_1(t)\overrightarrow{e_1} + A_2(t)\overrightarrow{e_2} + A_3(t)\overrightarrow{e_3}$$

ve $\alpha(0) = \overrightarrow{e_0}$ olarak verilsin. Yani

$$A_0(0) = 1$$

$$A_i(0) = 0\ ,\ 1 \leq i \leq 3$$

olsun. $\alpha(t) \in (\mathbb{S}^{'}_{\mathbb{D}})^3$ dan dolayı

$$\sum_{j=0}^{3} \left[A_j(t)\right]^2 = 1$$

$$\sum_{j=0}^{3} A_j^{'}(t)\, A_j(t) = 0$$

dır. $t = 0$ için

$$\sum_{j=0}^{3} A_j^{'}(0)\, A_j(0) = 0 \text{ ve } A_1(0) = A_2(0) = A_3(0) = 0$$

dan dolayı

$$A_0^{'}(0) = 0$$

olur. Bu durumda birim noktadaki tanjant uzayda $A_0^{'}(t)$ den bileşen bulunmamaktadır. Böylece $\overrightarrow{e_0}$ noktasındaki tanjant uzayın vektörleri

$$\eta = \eta_1\overrightarrow{e_1} + \eta_2\overrightarrow{e_2} + \eta_3\overrightarrow{e_3}$$

formundaki vektörlerle inşa edilebilir. Şimdi $(\mathbb{S}_{\mathbb{D}}^{'})^3$ üzerinde tanımlı sol invaryant ve

$$X_e = \eta$$

olan vektör alanlarını araştıralım.

$(\mathbb{S}_{\mathbb{D}}^{'})^3$ üzerinde bir $\beta(t)$ eğrisini

$$\beta(0) = \overrightarrow{e_0}$$

$$\beta^{'}(0) = \eta = \eta_1\overrightarrow{e_1} + \eta_2\overrightarrow{e_2} + \eta_3\overrightarrow{e_3}$$

olarak alalım. $Q_o \in (\mathbb{S}_{\mathbb{D}}^{'})^3$

$Q_o = A_0\overrightarrow{e_0} + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3} = S_{Q_o} + \overrightarrow{V_{Q_0}}$ ve $\eta \in T_{(\mathbb{S}_{\mathbb{D}}^{'})^3}(e)$ belirli bir eleman olmak üzere

$$X(Q_0) = L_{Q_{0_*}}(\eta)$$

$(\mathbb{S}_{\mathbb{D}}^{'})^3$ üzerinde bir sol invaryant vektör alanıdır. Ayrıca

$$L_{Q_{0_*}}(\eta) = \left(L_{Q_0} \times \beta\right)_* |_{t=0} \ , \ \beta^{'}(0) = \eta$$

$$= [(S_{Q_o} + \overrightarrow{V_{Q_o}}) \times (S_\beta + \overrightarrow{V_\beta})]_* |_{t=0}$$

$$= Q_o \times \eta = Q_o\eta$$

dır. Böylece Q_o kuaterniyonu ile $\beta(t)$ eğrisinin soldan ötelenişi $Q_o\eta$ dir.

$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right\}$, $T_{(\mathbb{S}'_{\mathbb{D}})^3}(e)$ nin standart bazı olmak üzere , X_i , $1 \leq i \leq 3$ vektör alanları,

$$X_i \big|_{q_o} = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{q_o} \quad , \quad N(Q_o) = 1$$

olarak tanımlansın. X_i lerin $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ deki değerleri hesaplanırsa

$$X_1 = Q \times \vec{e_1} = -X_1 \frac{\partial}{\partial x_0} + X_0 \frac{\partial}{\partial x_1} + X_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - X_2 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$X_2 = Q \times \vec{e_2} = +X_2 \frac{\partial}{\partial x_0} + X_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + X_0 \frac{\partial}{\partial x_2} + X_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$X_3 = Q \times \vec{e_3} = +X_3 \frac{\partial}{\partial x_0} - X_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - X_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + X_0 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

elde edilir. Örnek olması için X_1 ' i hesaplayalım. $Q = (A_0, A_1, A_2, A_3) = S_Q + \vec{V_Q}$

$$X_1\big|\vec{e_1} = Q \times \vec{e_1}$$

$$= (A_0\vec{e_0} + A_1\vec{e_1} + A_2\vec{e_2} + A_3\vec{e_3}) \times \vec{e_1}$$

$$= A_0\vec{e_1} + A_1(-1) + A_2(-\vec{e_3}) + A_3\vec{e_2}$$

$$= -A_1\vec{e_0} + A_0\vec{e_1} + A_3\vec{e_2} - A_2\vec{e_3}$$

ve Q dan bağımsız olarak koordinat fonksiyonları cinsinden

$$X_1 = -X_1 \frac{\partial}{\partial x_0} + X_0 \frac{\partial}{\partial x_1} + X_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - X_2 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

yazılabilir.

Burada $(\mathbb{S}^{'}_{\mathbb{D}})^3$ ın Lie cebiri, $\mathbb{H}^{'}_{\mathbb{D}}$ nin pürimajiner kısmına ait sol invaryant vektör alanlarıyla verilebilir. Şimdi $X_L((\mathbb{S}^{'}_{\mathbb{D}})^3)$ üzerindeki [,] Lie çarpımını { X_1, X_2, X_3 } bazı cinsinden hesaplayalım.

$$[X_1, X_2] = (X_1 \times X_2) - (X_2 \times X_1)$$

$$= (S_{X_1} + \overrightarrow{V_{X_1}}) \times (S_{X_2} + \overrightarrow{V_{X_2}}) - (S_{X_2} + \overrightarrow{V_{X_2}}) \times (S_{X_1} + \overrightarrow{V_{X_1}})$$

$$= (\overrightarrow{V_{X_1}} \wedge \overrightarrow{V_{X_2}}) - (\overrightarrow{V_{X_2}} \wedge \overrightarrow{V_{X_1}})$$

$$= 2\, \overrightarrow{V_{X_1}} \wedge \overrightarrow{V_{X_2}}$$

$$= 2 X_1 \wedge X_2 \bmod \mathbb{R} = 2\, X_3 |_{\bmod \mathbb{R}}$$

$$[X_2, X_3] = 2X_1, [X_3, X_1] = -2X_2$$

olur.

$X_L((\mathbb{S}^{'}_{\mathbb{D}})^3)$ üzerindeki Lie çarpımını $\mathfrak{G}^{'\,3}_{\mathbb{D}} = T_{(\mathbb{S}^{'}_{\mathbb{D}})^3}(e)$ uzayına taşırsak $\mathfrak{G}^{'\,3}_{\mathbb{D}}$ da reel

kısım olmayacağından $X_1\big|_{\overline{e_o}} = \overrightarrow{e_1}$, $X_2\big|_{\overline{e_o}} = \overrightarrow{e_2}$, $X_3\big|_{\overline{e_o}} = \overrightarrow{e_3}$ olacağından $\mathfrak{G}^{'\,3}_{\mathbb{D}}$ daki

[,] çarpımı baz vektörleri cinsinden

$$[\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}] = 2\overrightarrow{e_3}, [\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}] = -2\overrightarrow{e_1}, [\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}] = 2\overrightarrow{e_2}$$

olarak bulunur.

Teorem 4.4.1 Herhangi bir $Q_o = A_0\overrightarrow{e_0} + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$ birim bölünmüş dual kuaterniyonun adjoint gösterimi

$$\mathrm{Ad}\,Q_o = \begin{bmatrix} A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 & 2(A_1A_2 + A_0A_3) & 2(A_0A_2 + A_1A_3) \\ 2(A_0A_3 + A_1A_2) & A_0^2 - A_1^2 + A_2^2 - A_3^2 & 2(A_2A_3 - A_0A_1) \\ 2(A_1A_3 - A_0A_2) & 2(A_0A_1 + A_2A_3) & A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 + A_3^2 \end{bmatrix}$$

yarı - ortogonal dual matrisine karşılık gelir.

İspat : $\mathrm{Ad}Q_o = (\mathrm{Int}Q_o)'_e : \mathfrak{G}'^{3}_{\mathbb{D}} \to \mathfrak{G}'^{3}_{\mathbb{D}}$

$$\zeta \to \mathrm{Ad}Q_o(\zeta) = (\mathrm{Int}Q_o)'_e(\zeta) = \mathrm{d}(\mathrm{Int}Q_o)_e(\zeta)$$

$(\mathbb{S}'_{\mathbb{D}})^3$ üzerinde $\alpha(o) = 1$ ve $\alpha'(0) = \zeta$ olacak şekilde bir eğri $\alpha(t) = A_0(t) + A_1(t)\vec{e_1} + A_2(t)\vec{e_2} + A_3(t)\vec{e_3}$ olsun. Buradan

$$\mathrm{Ad}Q_o(\zeta) = (\mathrm{Int}Q_o)'_e(\zeta) = \mathrm{d}(\mathrm{Int}Q_o)_e(\zeta)\left((\mathrm{d}\alpha)(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|_o)\right)$$

$$= \mathrm{d}(Q_o\,\alpha\,Q_0^{-1})|_0(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|_o)$$

$$= Q_o\,(\mathrm{d}\alpha)|_0\,(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|_o)\,Q_0^{-1}$$

$$= Q_o\,\zeta\,Q_0^{-1}$$

elde edilir.

Sonuç olarak $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ bazına göre $\mathrm{Ad}Q_o$ lineer izomorfizmine karşılık gelen yarı - ortogonal dual matrisleri elde edilir. Burada $\mathrm{Ad}Q_o$

$$\mathrm{Ad}Q_o(\vec{e_1}) = Q_o\,\vec{e_1}\,Q_0^{-1}\ ,\ \mathrm{Ad}Q_o(\vec{e_2}) = Q_o\,\vec{e_2}\,Q_0^{-1}\ ,\ \mathrm{Ad}Q_o(\vec{e_3}) = Q_o\,\vec{e_3}\,Q_0^{-1}$$

özeliklerini sağlar. Matrislerin dual yarı - ortogonalliği hemen görülebilir. Sonuç olarak $\mathrm{Ad}(\mathbb{S}'_{\mathbb{D}})^3$ grubu dual yarı – ortogonal grubun alt grubudur.

Şimdi $\mathfrak{G}'^{3}_{\mathbb{D}}$ birim kürenin Killing formunu hesaplayalım. Bütün pürimajiner dual kuaterniyonların vektör uzayı $\mathbb{D}^4$ uzayı ile izomorfiktir.

Teorem 4.4.2 Birim bölünmüş dual kürenin Killing bilineer formu invaryanttır.

İspat: $K : \mathfrak{G}'^{3}_{\mathbb{D}} \times \mathfrak{G}'^{3}_{\mathbb{D}} \to \mathbb{D}$

$$(X, Y) \to K(X, Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}X.\mathrm{Ad}Y)$$

Herhangi $X = X_1\vec{e_1} + X_2\vec{e_2} + X_3\vec{e_3}$ ve $Y = Y_1\vec{e_1} + Y_2\vec{e_2} + Y_3\vec{e_3}$ birim bölünmüş dual küreleri için

$$[\,X, Y\,] = 2\,X \wedge Y \quad \text{ve} \quad g_{\mathbb{D}}\,(\,X, Y\,) = -X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\text{Ad}\,X\,(\,\overrightarrow{e_1}\,) = \; 0\,\overrightarrow{e_1} + 2\,X_3\,\overrightarrow{e_2} - 2\,X_2\,\overrightarrow{e_3}$$

$$\text{Ad}\,X\,(\,\overrightarrow{e_2}\,) = \; 2\,X_3\,\overrightarrow{e_1} + 0\,\overrightarrow{e_2} + 2\,X_1\,\overrightarrow{e_3}$$

$$\text{Ad}\,X\,(\,\overrightarrow{e_3}\,) = \; -\,2\,X_2\,\overrightarrow{e_1} - 2\,X_1\,\overrightarrow{e_2} + 0\,\overrightarrow{e_3}$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitliklerden Ad X dönüşümünün matrisini $\{\,\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}\,\}$ bazına göre

$$\text{Ad}\,X = \begin{bmatrix} 0 & 2X_3 & -2X_2 \\ 2X_3 & 0 & -2X_1 \\ -2X_2 & 2X_1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. Benzer şekilde

$$\text{Ad}\,Y = \begin{bmatrix} 0 & 2Y_3 & -2Y_2 \\ 2Y_3 & 0 & -2Y_1 \\ -2Y_2 & 2Y_1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$K\,(X, Y\,) = \text{Tr}\,(\,\text{AdX.AdY}\,)$$

$$= \text{Tr}\begin{bmatrix} 4X_3Y_3 - 4X_2Y_2 & -4X_2Y_1 & -4X_3Y_1 \\ 4X_1Y_2 & 4X_3X_3 - 4X_1Y_1 & -4X_2Y_3 \\ 4X_1Y_3 & -4X_2Y_3 & 4X_2Y_2 - 4X_1Y_1 \end{bmatrix}$$

$$= 8\,(\,-X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3\,)$$

$$= 8\,g_{\mathbb{D}}\,(\,X.\,Y\,)$$

elde edilir. Buradan Killing formun $\mathfrak{G}^{'\,3}_{\mathbb{D}}$ de bir dual metrik tensör olduğu görülür.

Yukarda K nın $g_{\mathbb{D}}(\ ,\ )$ ile denk olduğu gösterildi. . O halde $(\mathbb{S}^{'}_{\mathbb{D}})^3$ Lie grubunun adjoint temsili $\mathrm{Ad}(\mathbb{S}^{'}_{\mathbb{D}})^3$ iç çarpımı korur.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}:\ (\mathbb{S}^{'}_{\mathbb{D}})^3 &\to L\left((\mathbb{S}^{'}_{\mathbb{D}})^3, (\mathbb{S}^{'}_{\mathbb{D}})^3\right) \\ Q &\to \mathrm{ad}\,Q = L_{q*} \circ R_{q*^{-1}} \end{aligned}$$

dönüşümü $\mathbb{D}^3$ de iç çarpımı koruyan dönüşümdür. Dolayısıyla

$$\mathrm{ad}\ (\mathbb{S}^{'}_{\mathbb{D}})^3 \subset O\,(\mathbb{D}^3)$$

bir alt gruptur. Burada $O\,(\mathbb{D}^3)$, ortogonal dual matrislerin cümlesidir.

$\forall Q \in (\mathbb{S}^{'}_{\mathbb{D}})^3$ için $\mathrm{Ad}Q$ nun iç çarpımı koruması, $\mathrm{Ad}Q$ nun bir dönme tanımlayacağını belirtir. Şimdi de $\mathrm{Ad}Q$ nun tanımladığı dönmeyi, eksenini ve dönme açısını hesaplayalım.

$Q = A_0\overrightarrow{e_0} + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$ birim bölünmüş kuaterniyon ve

$g_{\mathbb{D}}(\overrightarrow{V_Q}, \overrightarrow{V_Q}) = -A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 > 0$ olsun. Bu durumda $N_Q = 1$ ve $\overrightarrow{V_Q}$ spacelike (uzaysı) bir vektör olacağından $Q = \cosh\psi + \overrightarrow{\varepsilon_1}\sinh\psi$ şeklinde de yazabiliriz. Burada

$$\cosh\psi = A_0,\ \sinh\psi = \sqrt{-A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}\ ,\ \overrightarrow{\varepsilon_1} = \frac{A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{-A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}}\ ;$$

$g(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_1}) = \varepsilon_1^2 = 1$ dır ve $\overrightarrow{\varepsilon_1}$ birim bölünmüş spacelike kuaterniyon vektördür.

Şimdi $\mathrm{Ad}Q\ (\overrightarrow{\varepsilon_1})$ u hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}Q\ (\overrightarrow{\varepsilon_1}) &= (\cosh\psi + \overrightarrow{\varepsilon_1}\sinh\psi) \times (\overrightarrow{\varepsilon_1}) \times (\cosh\psi - \overrightarrow{\varepsilon_1}\sinh\psi) \\ &= (\cosh\psi \cdot \overrightarrow{\varepsilon_1} + \overrightarrow{\varepsilon_1} \times \overrightarrow{\varepsilon_1}\sinh\psi) \times (\cosh\psi - \overrightarrow{\varepsilon_1}\sinh\psi) \\ &= (\cosh\psi \cdot \overrightarrow{\varepsilon_1} + \sinh\psi) \times (\cosh\psi - \overrightarrow{\varepsilon_1}\sinh\psi) \end{aligned}$$

$$= \cos^2 h\psi \cdot \overrightarrow{\varepsilon_1} + \sin^2 h\psi \cdot \overrightarrow{\varepsilon_1}$$

$$= \overrightarrow{\varepsilon_1}$$

Eğer $Q = A_0\overrightarrow{e_0} + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$ birim bölünmüş kuaterniyon ve

$g(\overrightarrow{V_Q}, \overrightarrow{V_Q}) = -A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 < 0$ ise $N_Q = 1$ ve $\overrightarrow{V_Q}$ timelike (zamansı) bir vektör olacağından $Q = \cos\psi + \overrightarrow{\varepsilon_1}\sin\psi$ şeklinde de yazabiliriz. Burada

$$\cos\psi = A_0 \,,\ \sin\psi = \sqrt{A_1^2 - A_2^2 - A_3^2} \,,\ \overrightarrow{\varepsilon_1} = \frac{A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2 - A_3^2}} \ ;$$

$g(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_1}) = \varepsilon_1^2 = -1$ dır ve $\overrightarrow{\varepsilon_1}$ birim bölünmüş timelike kuaterniyon vektördür.

Şimdi $\mathrm{Ad}Q\,(\overrightarrow{\varepsilon_1})$ u hesaplayalım.

$$\mathrm{Ad}Q\,(\overrightarrow{\varepsilon_1}) = (\cos\psi + \overrightarrow{\varepsilon_1}\sin\psi) \times (\overrightarrow{\varepsilon_1}) \times (\cos\psi - \overrightarrow{\varepsilon_1}\sin\psi)$$

$$= (\cos\psi \cdot \overrightarrow{\varepsilon_1} + \overrightarrow{\varepsilon_1} \times \overrightarrow{\varepsilon_1}\sin\psi) \times (\cos\psi - \overrightarrow{\varepsilon_1}\sin\psi)$$

$$= (\cos\psi \cdot \overrightarrow{\varepsilon_1} + \sin\psi) \times (\cos\psi - \overrightarrow{\varepsilon_1}\sin\psi)$$

$$= \cos^2\psi \cdot \overrightarrow{\varepsilon_1} + \sin^2\psi \cdot \overrightarrow{\varepsilon_1}$$

$$= \overrightarrow{\varepsilon_1}$$

$\overrightarrow{\varepsilon_2^{\,2}} = -1,\ \overrightarrow{\varepsilon_3^{\,2}} = 1,\ \overrightarrow{\varepsilon_1}\,\overrightarrow{\varepsilon_2} = -\overrightarrow{\varepsilon_2}\,\overrightarrow{\varepsilon_1} = \overrightarrow{\varepsilon_3}$ olacak şekilde $\{\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_3}\}$ ortonormal baz sistemi alınırsa $\mathrm{Ad}Q$ dönüşümü altında $\overrightarrow{\varepsilon_2}$ ve $\overrightarrow{\varepsilon_3}$ birim bölünmüş kuaterniyonların görüntüsünü

$$\mathrm{Ad}Q\,(\overrightarrow{\varepsilon_2}) = \cos 2\psi\overrightarrow{\varepsilon_2} + \sin 2\psi\overrightarrow{\varepsilon_3}$$

$$\mathrm{Ad}Q\,(\overrightarrow{\varepsilon_3}) = -\sin 2\psi\overrightarrow{\varepsilon_2} + \cos 2\psi\overrightarrow{\varepsilon_3}$$

olur. Böylece $\mathrm{Ad}Q$, $\vec{\varepsilon}_1$ dönme eksenli , 2ψ dönme açılı bir dönmedir. Bu dönme $2\psi = 2\theta + 2\theta^*$ dual açı şeklinde olup 2θ açılık dönmeye ve $2\theta^*$ kadar kaymaya karşılık gelir.

$$\det[\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \mathrm{Ad}\,\alpha\ \vec{\varepsilon}_2] = \det[\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3 \sin 2\psi + \vec{\varepsilon}_2 \cos 2\psi]$$

$$= \det[\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3 \sin 2\psi] + \det[\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3 \cos 2\psi]$$

$$= \sin 2\psi$$

ve $0 < \psi < \frac{1}{2}\pi$ için $\sin 2\psi > 0$ olduğundan $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \mathrm{Ad}\,\alpha\ \vec{\varepsilon}_2\}$ bir sağ - sistem oluşturur. $\mathrm{Ad}Q$ bir sağ-sistemi bir sağ - sisteme dönüştürdüğünden yön koruyan bir kongrüanstır. Ayrıca determinantı $+1$ dir. Sonuç olarak $\mathrm{Ad}\ Q \in SO\mathbb{D}_1^3$ tür. Dolayısıyla $\mathrm{Ad}(\mathbb{S}'_{\mathbb{D}})^3$ ile $SO\mathbb{D}_1^3$ izomorfiktirler. Ancak

$$\mathrm{Ad} : (\mathbb{S}'_{\mathbb{D}})^3 \rightarrow \mathrm{ad}(\mathbb{S}'_{\mathbb{D}})^3$$

dönüşümü, α ve $-\alpha$ için aynı dönmeleri verdiğinden birebir değildir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] Ata, E., 2004, Simplektik Diferensiyel Geometri Üzerine, Doktora tezi Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

[2] Deniz Hava Deniz, 1992, Kuaterniyonların Lie Grubu, Lie Cebiri Yapıları ve Dönme Operatörü Olarak Kullanımı, Yüksek Lisans tezi Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

[3] Hacısalihoğlu, H.H., 2000, Lineer Cebir I, Ankara.

[4] Hacısalihoğlu, H.H., 1983, Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fak. Yayınları, Math. No.2.

[5] Hacısalihoğlu, H.H., 1996, Lineer Cebir II, Ankara.

[6] Hacısalihoğlu, H.H., 2000, Diferensiyel Geometri 1. Cilt, Ankara.

[7] Hacısalihoğlu, H.H., 2000, Diferensiyel Geometri 2. Cilt, Ankara.

[8] Karger, A. ve Novak, J., 1985, Space Kinematics and Lie Groups, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland.

[9] Kula, L., 2003, Split Quaternions and Geometric Applications, D.P.T. in Mat., Ankara Unv.

[10] O'Neill, B., 1983, Semi Riemannian Geometry, Acedemic Pres., New York.

[11] Puri, R.R., 2001, Mathematical Methods of Quantum Optics, Springer.

[12] Yaylı Y, Çalışkan A, Uğurlu H.H, The E.Study Maps Of Circles On Dual Hyperbolic And Lorentzian Ünit Spheres. Math. Proc. R. Ir. Acad. 102 A (2002) No.1, 37-47