

LİNEER OLMAYAN OLUŞUM DENKLEMLERİ
İÇİN RİCCATİ DENKLEM METODU

Hayati ÖLMEZ

Yüksek lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Haziran -2009

**LİNEER OLMAYAN OLUŞUM DENKLEMLERİ İÇİN
RİCCATİ DENKLEM METODU**

Hayati ÖLMEZ

Dumlupınar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ahmet BEKİR

Haziran - 2009

KABUL ve ONAY SAYFASI

Hayati ÖLMEZ'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı LİNEER OLMAYAN OLUŞUM DENKLEMLERİ İÇİN RİCCATİ DENKLEM METODU başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

22/06/2009

Üye: Yrd. Doç. Dr. Ahmet BEKİR

Üye: Yrd. Doç. Dr. Bülent SAKA

Üye: Yrd. Doç. Dr. Ahmet BOZ

Fen Bilimleri Enstitüsünün Yönetim Kurulu'nun/...../2009 gün ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Atalay KÜÇÜKBURSA
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

LİNEER OLMAYAN OLUŞUM DENKLEMLERİ İÇİN RİCCATİ DENKLEM METODU

Hayati ÖLMEZ

Matematik Anabilim Dalında, Yüksek Lisans Tezi, 2009

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ahmet BEKİR

ÖZET

Lineer olmayan diferensiyel denklemler fizik, kimya, biyoloji gibi bir çok alanda kullanılan denklemlerdir. Uygulamalı matematik ise bu denklemlerin çözümleri ve yeni çözüm yolları geliştirmekle ilgilenir.

Bu tez çalışması üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde adi ve kısmi türevli denklemler ve sınıflandırılmaları, lineer olmayan oluşum denklemleri ve soliton teorisine fiziksel bir bakış verilmiştir.

İkinci bölümde ise; lineer olmayan oluşum denklemlerinin tam çözümlerini bulmak için tanh yöntemi ve Riccati denklem yöntemleri verilerek, bu yöntemlerin bazı uygulamaları yapılmıştır.

Üçüncü bölümde ise; son zamanlarda geliştirilen ileri tanh yöntemi verilerek, lineer olmayan oluşum sistemlerine uygulamaları yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel denklem, Kısmi türevli denklem, Lineer olmayan oluşum denklemleri, Solitonlar, Tam çözümler.

NONLINEAR EVOLUTION EQUATIONS FOR RICCATI EQUATION METHOD

Hayati ÖLMEZ

Mathematics, M.Sc. Thesis, 2009

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Ahmet BEKİR

SUMMARY

Nonlinear differential equations which are equations that can be used many areas such as chemistry, physics and biology. Application mathematics is interested in with exact solution of this equations and improving new solution methods.

This thesis study consists of three chapters. In the first chapter, ordinary and partial differential equations and their classifications, nonlinear evolution equations and soliton theory in physics are given.

In the second chapter, tanh and Riccati equation methods are introduced in order to find exact solutions of nonlinear evolution equations and some applications of these methods are given.

In the third chapter, improved tanh method, which is developed recently, is given and applications of this method is shown for nonlinear evolution equations systems.

Keywords: Differential equations, Partial derivative equations, Nonlinear evolution equations, Solitons, Exact Solutions.

TEŞEKKÜR

Tez alışmamın her aşamasında büyük yardımlarını ve desteklerini grdğm tez danışmanım; Yrd. Do. Dr. Ahmet BEKİR hocama teŐekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
1. BÖLÜM	1
1.1. Giriş	1
1.2. Diferansiyel Denklemler	1
1.3. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler	2
1.4. Kısmi Türevli Denklemlerin Elde Edilmesi	4
1.5. Birinci Mertebeden Lineer Olmayan Denklemler	4
1.6. Lineer olmayan oluşum denklemleri	6
1.7. Soliton Teorisine Fiziksel Bakış	7
2. BÖLÜM	11
2.1. Tanh-Coth Metodu	11
2.2. Riccati Denklem Metodu	12
2.3. KdV Denkleminin Tanh-Coth Metodu ile Çözümü	12
2.4. KdV Denkleminin Riccati Denklem Metodu ile Çözümü	15
2.5. (2+1) Boyutlu Soliton Breaking Denklem Sisteminin Çözümleri	26
3. BÖLÜM	38
3.1. Lineer Olmayan Denklem İçin İleri Tanh Yöntemi	38
3.2. İleri Tanh Yönteminin Uygulamaları	39
KAYNAKLAR DİZİNİ	47

1. BÖLÜM

1.1. Giriş

Bu bölümde lineer olmayan oluşum denklemlerine temel teşkil edecek adi diferensiyel denklemler ve sınıflandırılmalarını, kısmi türevli diferensiyel denklemler ve sınıflandırılmalarını, birinci mertebeden lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemlerini vereceğiz.

Ayrıca tez içinde kullanılan lineer olmayan oluşum denklemlerini ve bu denklemlerin oluşturduğu soliton teorisine fiziksel bir bakışı tanımlayacağız.

1.2. Diferensiyel Denklemler

Tanım 1.1 Bir denklemde; belirli bir değişkene göre türev varsa, bu değişkene *bağımsız değişken*, denklemde türevi bulunan değişkene de *bağımlı değişken* adı verilir.

Tanım 1.2 Bir yada daha çok bağımlı değişkenin, bir yada daha çok bağımsız değişkene göre türevlerini içinde bulunduran bir denkleme *diferensiyel denklem* denir. Bu tanım kısaca, içinde türev (veya kısmi türev) bulunan denklemlere *diferensiyel denklem* denir, şeklinde de yapılabilir.

Tanım 1.3 Bir diferensiyel denklemde eğer bir tek bağımsız değişken varsa denkleme *adi (bayağı) diferensiyel denklem*, birden fazla bağımsız değişken varsa denkleme *kısmi diferensiyel denklem* denir.

Tanım 1.4 Bir diferensiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevin mertebesine *diferensiyel denklemin mertebesi* denir. Diferensiyel denklem, bağımlı değişkene ve bağımlı değişkenin türevlerine göre bir polinom şekline getirilebiliyorsa, denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevin kuvvetine (derecesine) *diferensiyel denklemin derecesi* adı verilir.

Genel olarak x - bağımsız, y - bağımlı değişkenli, n -inci mertebeden bir diferensiyel denklem

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \text{ yada } y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (1.1)$$

şeklinde yazılabilir. Bu tipden denklemlerin incelenmesinde önemli bir kavram da diferensiyel denklemlerin lineer olmasıdır.

Tanım 1.5 Eğer (1.1) n -inci mertebeden diferensiyel denkleminde $F; y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ değişkenlerine göre lineer bir fonksiyon ise denkleme *lineer diferensiyel*

denklem, aksi halde *lineer olmayan (nonlinear) diferensiyel denklem* denir. Buna göre n -inci mertebeden lineer diferensiyel denklemi, genel olarak, $a_0(x) \neq 0$ şartıyla;

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x), \quad (1.2)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Dikkat edilirse lineer denklemlerde, bağımsız değişkenin denklemde bulunuş şekli lineerliği hiçbir durumda etkilemez ve bağımlı değişkenle, onun türevleri birinci derecedendir, yani y -li terimlerin kuvveti birdir [1].

1.3. Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemler

Tanım 1.6. İçinde en az iki bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre çeşitli basamaktan kısmi türevlerini kapsayan eşitliklere (özdeşlik değil) bir kısmi türevli denklem denir.

z bağımlı; x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere bir kısmi türevli denklem genel olarak

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy}, \dots) = 0$$

şeklindedir. Burada,

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots$$

dir. N bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip kısmi türevli denklemlerin genel şekli, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $z = z(x)$ olmak üzere,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, z_{x_1}, \dots, z_{x_n}, z_{x_1 x_1}, z_{x_1 x_2}, \dots) = 0$$

formundadır. Burada x_1, x_2, \dots, x_n bağımsız değişkenleri; z ise bağımlı değişkeni göstermekte ve

$$z_{x_i} = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad z_{x_i y_j} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial y_j}; \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

dir.

Tanım 1.7. Bir kısmi türevli denklemde görülen en yüksek basamaktan kısmi türevin basamağına denklemin mertebesi denir.

Tanım 1.8. Bir kısmi türevli denklemi özdeş olarak sağlayan ve keyfi fonksiyon veya keyfi parametre kapsamayan bir fonksiyona bu kısmi türevli denklemin bir özel çözümü denir. Diğer taraftan bir kısmi türevli denklemin basamağı kadar (sürekli türetilebilir) keyfi fonksiyon kapsayan ve denklemi özdeş olarak sağlayan bir yüzey ailesine bu kısmi türevli denklemin genel çözümü denir.

NOT: İki bağımsız değişken kapsayan kısmi türevli denklemler için çoğu zaman

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

gösterimi kullanılır.

Tanım 1.9. Bir kısmi türevli denklemdaki bağımlı değişken (birden fazla bağımlı değişken olması halinde bağımlı değişkenler) ve bunların denklemdaki bütün kısmi türevleri birinci dereceden ve denklemi, bağımlı değişken ile onun türevli parantezinde yazdığımızda katsayılar yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonu oluyorsa bu denkleme lineerdir denir. Aksi halde lineer olmayan denklem adını alır.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan lineer kısmi türevli denklemlerin genel formları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$P(x, y)z_x + Q(x, y)z_y + R(x, y)z = S(x, y) \quad (1.3)$$

$$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + D(x, y)z_x + E(x, y)z_y + F(x, y)z = G(x, y) \quad (1.4)$$

(1.3) ve (1.4) denklemlerinde x, y bağımsız; z bağımlı değişkendir.

Tanım 1.10. Bir kısmi türevli denklem, denklemden bulunan en yüksek basamaktan kısmi türeğe göre (denklemden düşük basamaklı türevlerin ve bağımlı değişkenin bulunuş şekline göre bağımsız olarak) lineer ise bu denklem yarı – lineer (kuasi – lineer) adını alır.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan yarı – lineer denklemlerin genel şekilleri sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$P(x, y, z)z_x + Q(x, y, z)z_y = R(x, y, z), \quad (1.5)$$

$$A(x, y, z, z_x, z_y)z_{xx} + B(x, y, z, z_x, z_y)z_{xy} + C(x, y, z, z_x, z_y)z_{yy}$$

$$+ D(x, y, z, z_x, z_y) = 0 \quad (1.6)$$

UYARI: Her lineer denklem aynı zamanda yarı – lineerdir, fakat yarı – lineer bir denklem lineer olmayabilir.

Tanım 1.11. Bir kısmi türevli denklem yarı – lineer ve denklemde görülen en yüksek basamaktan türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise bu denkleme hemen – hemen lineerdir denir.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip ikinci basamaktan hemen – hemen lineer bir denklemin genel şekli

$$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + D(x, y, z, z_x, z_y) = 0 \quad (1.7)$$

formundadır.

1.4. Kısmi Türevli Denklemlerin Elde Edilmesi

Kısmi türevli denklemlerin çoğu fiziksel olayların analizinden ortaya çıkmıştır. Örneğin belli bir ortamda kararlı ısı denilen zamandan bağımsız ısı dağılımı, zamana bağlı ısı yayılması, değişik tipteki dalga yayılmaları gibi fiziksel olaylar kısmi türevli denklemler yardımıyla kolayca incelenebilmektedir. Fiziksel bir olayı matematiksel ifadelerle modelleyerek bir kısmi türevli denklem elde etmek mümkün olabilir. Kısmi türevli denklemin elde edilmiş yollarından birisi budur.

Bu kesimde, verilen bir yüzey ailesinin sağladığı en küçük basamaktan kısmi türevli denklemin nasıl elde edileceğini göreceğiz. Bunun için verilen yüzey ailesindeki bağımlı değişken bağımsız değişkenlere göre yeterince türetilip verilen yüzey ile hesaplanan türevleri arasında keyfi fonksiyonlar ve bunların türevleri yok edilir. Verilen yüzey ailesi, bu denklemin genel çözümü olabileceği gibi, genel çözümün parametrelere bağlı bir alt sınıfı da olabilir. Bu durumda verilen yüzeysel türevler arasında keyfi parametreler yok edilir.

1.5. Birinci Mertebeden Lineer Olmayan Denklemler

Bu kısımda, $p = z_x$, $q = z_y$ olmak üzere

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (1.8)$$

Birinci basamaktan genel kısmi türevli denklemini inceleyeceğiz. Burada F nin p ve q ya göre lineer olması gerekmemektedir.

Tanım. 1.12

$$G(x, y, z, a, b) = 0 \quad (1.9)$$

İki parametrelili bir yüzey ailesi, birinci basamaktan (1.8) denklemini sağlarsa bu yüzey ailesine (1.8) in tam integrali denir.

Tanım 1.13 Her noktasında, $G(x, y, z, a, b) = 0$ iki parametrelili yüzey ailesindeki her bir yüzeye teğet olan diğeri bir yüzeye (1.9) ile verilen yüzey ailesinin bir zarfı denir.

Zarf yüzeyi, (1.9) yüzey ailesinin sağladığı denklemini sağlar. Dolayısıyla zarf yüzeyi (1.8) denkleminin bir çözümlüdür. Zarf yüzeyi, (1.9) denklemindeki a ve b parametrelerine özel değerler verilerek elde edilemez.

Şimdi a ve b parametreleri arasında $b = \varphi(a)$ şeklinde bir fonksiyonel bağıntının olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$G(x, y, z, a, \varphi(a)) = 0 \quad (1.10)$$

Bir parametrelili yüzey ailesini elde ederiz. (1.10) ailesinin bir zarfını bulabilirsek bu da (1.8) denklemini sağlar. (1.10) ailesindeki φ fonksiyonu keyfi olduğundan (1.10) a, (1.8)'in genel integrali denir. (1.10) ailesinin bir zarfı

$$G(x, y, z, a, \varphi(a)) = 0$$

$$\frac{\partial G(x, y, z, a, \varphi(a))}{\partial a} = 0$$

denklemleri arasında a parametresinin yok edilmesiyle bulunur. İki parametrelili (1.9) yüzey ailesinin bir zarfını bulabilmek için

$$G(x, y, z, a, b) = 0$$

$$\frac{\partial G(x, y, z, a, b)}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial G(x, y, z, a, b)}{\partial b} = 0$$

Denklemleri arasında a ve b parametreleri yok edilir. Bu şekilde elde edilen zarfa verilen denklem için bir singüler integral veya singüler çözüm adı verilir [2].

1.6. Lineer olmayan oluşum denklemleri

Bağımsız değişkenlerinden biri t zaman olan kısmi türevli diferensiyel denklemlere oluşum denklemleri denilmektedir. Oluşum denklemleri $K[u]$; u ve u 'nun x değişkenine göre türevlerinin tanımlı fonksiyonu olmak üzere:

$$u_t = K[u], \quad (1.11)$$

formundadır. Eğer $K[u]$; u terimine göre lineer ise, bu tip denklemlere lineer oluşum denklemleri ve $K[u]$; u terimine göre lineer değil ise, bu tip denklemlere lineer olmayan oluşum denklemleri denilir.

Lineer dalga denklemi ve ısı iletimini tanımlayan denklemler lineer oluşum denklemlerine iki basit örnektir. Lineer olmayan oluşum denklemleri ise mekanik, fizik, kimya, biyoloji gibi bir çok daldaki problemlerde gözlenmektedir.

Bu tip denklemlere birkaç örnek verilmek istenirse:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.12)$$

formundaki birinci mertebeden lineer olmayan oluşum denklemi, bir boyutlu trafik çalışmalarından türetilmiştir. Bu durumda $u(x, t)$, t zamanında x konumundaki araçların yoğunluğunu göstermektedir. (1.12) denklemi, korunum kanunlarına sahip olan gaz dinamiği çalışmaları için bir model denklem olarak ta kullanılmaktadır.

İkinci mertebeden lineer olmayan oluşum denklemleri ile de karşılaşılabilir. Örneğin, anlık sıcaklığa bağlı olarak birim zamanda ısı üreten bir ısı kaynağıyla, bir cisimdeki ısı transferi incelenirse

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(k\nabla u) + f(u), \quad (1.13)$$

ile verilen lineer olmayan ısı denklemine ulaşılır. Yer değiştirmeye bağlı, lineer olmayan bir dış kuvvet nedeniyle zorlamalı titreşimi göz önüne alınırsa:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u), \quad (1.14)$$

formundaki lineer olmayan dalga denkleminde ulaşılır.

Kuantum mekaniğinde, aşağıdaki formlarda lineer olmayan oluşum denklemleri ile karşılaşılabilir.

Sine-Gorden denklemi:

$$u_{tt} - \nabla^2 u + \sin u = 0, \quad (1.15)$$

Klein-Gorden denklemi:

$$u_{tt} - \Delta u + mu + \gamma u^3 = 0, \quad (1.16)$$

Kübik Schrödinger denklemi:

$$iu_t - \Delta u + \gamma |u|^2 u = 0, \quad (1.17)$$

İkinci mertebeden denklemlere ilave olarak, yüksek mertebeden lineer olmayan oluşum denklemleri ile de karşılaşılabilir. Örneğın polimerler, camlar ve bunlar gibi ikili alaşımların faz geçişleri üzerinde yapılan çalışmalarda, aşağıda verilen Cahn-Hilliard denkleminde ulaşılır:

$$u_t + \epsilon \Delta^2 u = \Delta \Phi(u), \quad (1.18)$$

Bu denklemde ϵ belirli bir küçük sabit ve genellikle $\Phi(u) = u^3 - u$ olarak alınmaktadır. (1.1.8) denklemi dördüncü mertebeden bir oluşum denklemdir. Yüksek mertebeden oluşum denklemlerine diğeri bir örnek ise;

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (1.19)$$

şeklindeki denklemdir [3].

1.7. Soliton Teorisine Fiziksel Bakış

Bir fizik terimi olarak dalga, bir ortamda veya bir boşlukta yayılan ve genellikle enerjinin taşınmasına yol ačan titreşime verilen isimdir. En bilindik olanları, suda ilerleyen yüzey dalgalarıdır. Bununla birlikte ses, ışık ve atomun içindeki taneciklerin hareketleri de

dalga özellikleri gösterirler. En basit dalgada bile titreşimler, sabit bir frekans ve dalga boyu ile periyodik olarak salınım yaparlar.

Ses dalgaları gibi mekaniksel dalgalar ilerleyebilecekleri bir ortama ihtiyaç duyarlarken, elektromanyetik dalgalar bir ortama gereksinim duymazlar ve boşlukta bile yayılabilirler. Bir ortamdaki bir dalganın yayılması ortamın özelliklerine de bağlıdır.

Dalgalar, duran ve ilerleyen dalgalar olarak sınıflandırılabilirler. Duran dalgalar, pozisyonu sabit olarak kalan dalgalardır. Bu tip dalgalar, dalganın bulunduğu ortam dalganın hareket ettiği yönün tersine hareket ettiğinde veya durağan bir ortamda birbiri ile zıt yönde ilerleyen dalgaların girişmesi sonucunda oluşurlar. İlerleyen dalgalar ise, bir noktadan diğer bir noktaya madde taşınması söz konusu olmaksızın enerjinin yayılması ile oluşan dalgalardır.

Solitonlar ise aşağıdaki iki temel özelliği sağlayan lineer olmayan dalgalar olarak tanımlanabilir:

1) Şekil, hız gibi özellikleri değişmeksizin yayılan yerleşik (lokalize) dalgalardır.

2) Karşılıklı çarpışmaya karşı kararlıdır ve kendi özelliklerini çarpışma sonrasında koruyabilirler.

İlk özellik, solitary dalga şartıdır. İkinci şart ise parçacık özelliğine sahip bir dalga anlamına gelmektedir. Ayrıca solitary dalgalarının özellikleri hakkında Russel adlı bilim insanı tarafından aşağıdaki önemli bilgilere ulaşılmıştır bunlar :

a) Solitary dalgaları $h \operatorname{sech}^2(k(x-vt))$ şekline sahiptir.

b) Yeterince büyük miktardaki su kütlesi, iki veya daha fazla bağımsız solitary dalgası üretir.

c) Normal dalgaların aksine solitary dalgaları asla birleşmezler. Bu sebeple küçük genliğe sahip bir solitary dalgası ile büyük genliğe sahip bir solitary dalgası birbirleri ile çarpıştıktan sonra, iki solitary dalgası birbirlerinden ayrılarak şekillerinde bir bozulma olmadan yollarına devam edebilirler. Normal dalgalar, ya düzleşmeye başlar yada dikleşerek sönecek şekilde hareket ederlerken, solitary dalgaları kararlıdır ve uzun mesafelerde yolculuk yapabilirler.

d) g yerçekimi ivmesi olmak üzere h yüksekliğine sahip olan ve d derinliğindeki bir kanalda hareket eden bir solitary dalgası:

$$v = \sqrt{g(d+h)}, \quad (1.20)$$

ile ifade edilen bir hıza sahiptir. Diğer bir ifade ile dalganın hızı, yüksekliğine ve suyun derinliğine bağlıdır.

Dolayısıyla büyük genlikli bir solitary dalgası, küçük genlikli bir solitary dalgasına göre daha hızlı hareket eder. Bir solitary dalgasının hızı genliği ile orantılı olduğundan, bir solitary dalga normal dalgalardan farklıdır. Örneğin biri alçak biri yüksek iki ses aynı anda oluştuğunda, kulak her iki sesi de aynı anda duyacaktır. Fakat bu iletim esnasında solitary dalgaları kullanılsaydı, yüksek sesin daha önce duyulması gerekirdi. İnsan vücudundaki sinirler arasındaki iletişim ise normal dalgalarla yapılmazlar. Sıcak bir çay bardağı ele alındığında sıcaklık kademeli olarak hissedilirken, kor halindeki sıcak bir kömür parçasına veya sıcak bir fırına el yaklaştırıldığında, sıcaklık hemen hissedilir ve el geriye çekilir. Dolayısıyla sinirler bir nevi solitary dalgası oluşturarak beyine bilgiyi en kısa şekilde normal dalgalara göre daha hızlı olarak iletirler.

Önceki yıllarda sonuçlar deneysel olarak kalmış ve bir denklem çözümü için solitary dalgaları elde edilememiştir. Bununla birlikte bir denklemin çözümünü veren solitary dalga problemleri araştırma konusu olmuştur. Ünlü matematikçi Kortoweg -de Vries tarafından

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} + \gamma u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0, \quad (1.21)$$

formundaki sığ su dalgalarının hareketini modelleyen denklem üzerinde çalışmaya başlamışlardır. Denklemden;

$u(x,t)$, dalga genliğine,

$c = \sqrt{gd}$, küçük genlikli dalganın hızına,

$\varepsilon = c(d^2/6 - T/2pg)$, dağılma parametresine,

γ , lineer olmayan parametreye,

T , yüzey gerilimine,

p , suyun yoğunluğuna

karşılık gelmektedir. (1.21) denkleminin

$$u(x,t) = \tilde{u}(x - vt), \quad (1.22)$$

formunda ve şekli değişmeyen bir hareketli dalga çözümüne sahip olduğu gösterilmiştir. Burada (1.22) ifadesi önceki kısımlarda belirtilen Russel'in solitary dalga tanımına uymaktadır. Böylece solitary dalgaların varlığı Korteweg de Vries tarafından kanıtlanmıştır. Bununla birlikte dalgaların kararlılıkları ve iki solitary dalganın çarpışma sonrası şekillerinin değişip değişmeme konusu netlik kazanmamıştır. Netlik kazanmayan konu ile ilgili çalışmalar Kruskal ve Zabusky isimli bilim insanları tarafından incelenmiş, KdV denkleminin sonlu farklar metodu ile çözümleri araştırılırken, solitary dalgaların çarpışma sonrası şekillerini değiştirmedikleri görülmüştür. Bu özelliğin parçacıkların çarpışmasına benzediği bulunarak bu tip dalgalara soliton adı verilmiştir. Sonraki yıllarda konu ile ilgili Gardner, Grene, Kruskal ve Miura isimli bilim insanları tarafından ters saçılma dönüşüm (TSD) metodu geliştirilerek, KdV denkleminin soliton çözümleri analitik olarak da verilmiştir [4].

Soliton çözümleri, hem analitik hemde sayısal olarak elde edildikten sonra, soliton üzerinde çalışmalar hızlanmıştır. Günümüzde ilk kez bir su kanalında gözlenen solitary dalgası soliton olarak; akışkanlık mekaniği, temel parçacıklar fiziği, biyofizik gibi birçok fizik alanında kullanılmaktadır. Solitonlar tarafından uzun mesafelerde yol alınabildiği için; teorik olarak bir fiber optikte normal dalga yerine kullanılacak olan solitonlar sayesinde, taşınan sinyalde kayıp olmaksızın büyük miktarda bilgi binlerce kilometre boyunca taşınabilecektir. Bu sebeple, soliton elektronik ve telekomünikasyon alanlarında oldukça sık kullanılmaktadır. Yakın gelecekte ilerleyen çalışmalar neticesinde radar ve iletişim sektörü gibi birçok yerde solitonların kullanılması beklenmektedir [5].

2. BÖLÜM

Bu bölümde tezimize temel teşkil edecek olan Tanh-Coth metodu ile Riccati denklem metotları verilecek ve bu yöntemlerin lineer olmayan oluşum denklemlerine uygulamaları yapılacaktır.

2.1. Tanh-Coth Metodu

Bu yöntem ilk olarak Wazwaz [6] tarafından bulunmuş çeşitli bilim insanları tarafından geliştirilmiştir [7,8]. Bu yöntemin diğer yöntemlerle karşılaştırılması Wazwaz tarafından yapılmıştır [9,10].

$$P(U, U_t, U_x, U_{xx}, U_{xxx}, \dots) = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde lineer olmayan kısmi türevli denklemi ele alalım.

$$\xi = (x - ct), \quad U(x,t) = U(\xi)$$

Şeklinde hareketli dalga dönüşümü uygulanırsa,

$$\theta(U, U', U'', U''', \dots) = 0 \quad (2.2)$$

şeklinde adi diferensiyel denklem elde edilir. Bu diferensiyel denklemde,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = U' \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = U' \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = U'' \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.3)$$

türevleri alınabilir.

Böylece Tanh-Coth metodu kullanılarak genişletilmiş kısmi türevli denklemin çözümü

$$U(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^M a_k \cdot \phi^k + \sum_{k=1}^M b_k \cdot \phi^{-k} \quad (m > 0) \quad (b_k = 0, 1 \leq k \leq M) \quad (2.4)$$

M parametresi, lineer olmayan en yüksek mertebeden terim ile en yüksek mertebeden lineer terimin dengelenmesiyle bulunur.

ϕ fonksiyonu, Riccati denklemine göre,

$$\phi' = A + B \cdot \phi + C \cdot \phi^2$$

olup A,B ve C sabitleri

$$\phi' = \frac{d\phi(\xi)}{d\xi}, \quad \xi = x - At$$

dir.

2.2. Riccati Denklem Metodu

Riccati denklemi,

$$\phi' = A + B\phi + C\phi^2 \quad (2.5)$$

olmak üzere A ve C keyfi sabitleri ve $B = 0$ için aşağıdaki ϕ değerleri bulunur. KdV denklemi için değerleri,

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{2}, \quad C = -\frac{1}{2}, \quad \phi' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\phi^2 &\Rightarrow \phi_1 = \tanh \frac{\xi}{2}, \quad \coth \frac{\xi}{2} \\ A = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2}, \quad \phi' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\phi^2 &\Rightarrow \phi_2 = \tanh \xi \pm \sec \xi, \quad \phi_3 = \tan \frac{\xi}{2} - \cot \frac{\xi}{2} \\ A = 1, \quad C = -1, \quad \phi' = 1 - \phi^2 &\Rightarrow \phi_4 = \tanh \xi, \quad \coth \xi \\ A = 1, \quad C = 1, \quad \phi' = 1 + \phi^2 &\Rightarrow \phi_5 = \tanh \xi, \quad \phi_6 = -\coth \xi \\ A = 1, \quad C = -4, \quad \phi' = 1 - 4\phi^2 &\Rightarrow \phi_7 = \frac{1}{2} \tanh 2\xi, \quad \frac{1}{2} \coth 2\xi \\ A = 1, \quad C = 4, \quad \phi' = 1 + 4\phi^2 &\Rightarrow \phi_8 = \frac{1}{2} \tanh 2\xi, \quad -\frac{1}{2} \coth 2\xi \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.3. KdV Denkleminin Tanh-Coth Metodu ile Çözümü

KdV denklemi lineer olmayan terimi uu_x ve dağılım terimi u_{xxx} ile tanımlanır.

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (2.7)$$

Dalga değişkeni $\xi = x - ct$ 'yi kullanarak (2.7) denklemini,

$$-cu' + 6uu' + u''' = 0,$$

adi diferensiyel denklemine dönüştürürüz.

Bu denklemin bir kez integrali alınarak ve integral sabiti sıfır kabul edilerek

$$-cu + 3u^2 + u'' = 0, \quad (2.8)$$

elde edilir.

u'' ile u^2 dengelenirse,

$$m + 2 = 2m, \quad (2.9)$$

olduğundan,

$$m = 2 \text{ bulunur.} \quad (2.10)$$

Tanh-Coth metoduna göre sonlu açılımı aşağıdaki gibi alabiliriz.

$$u(\xi) = a_0 + a_1 Y + a_2 Y^2 + \frac{b_1}{Y} + \frac{b_2}{Y^2}. \quad (2.11)$$

(2.11) sonlu açılımını (2.8) denkleminde yerine yazarsak ve Y ' nin artan kuvvetlerinin katsayılarını toplarsak; a_0, a_1, a_2, b_1, b_2 ve μ için cebirsel denklemlerden oluşan bir sistem ve bu sistemi çözerek altı tane durum elde ederiz:

(i) Birinci durum:

$$a_0 = -\frac{c}{6}, \quad a_1 = b_1 = b_2 = 0, \quad a_2 = \frac{c}{2}, \quad \mu = \frac{1}{2}\sqrt{-c}. \quad (2.12)$$

(ii) İkinci durum:

$$a_0 = -\frac{c}{6}, \quad a_1 = b_1 = a_2 = 0, \quad b_2 = \frac{c}{2}, \quad \mu = \frac{1}{2}\sqrt{-c}. \quad (2.13)$$

(iii) Üçüncü durum:

$$a_0 = \frac{c}{2}, \quad a_1 = b_1 = b_2 = 0, \quad a_2 = -\frac{c}{2}, \quad \mu = \frac{1}{2}\sqrt{c}. \quad (2.14)$$

(iv) Dördüncü durum:

$$a_0 = \frac{c}{2}, \quad a_1 = b_1 = a_2 = 0, \quad a_2 = -\frac{c}{2}, \quad \mu = \frac{1}{2}\sqrt{c}. \quad (2.15)$$

(v) Beşinci durum:

$$a_0 = \frac{c}{12}, \quad a_1 = b_1 = 0, \quad a_2 = b_2 = \frac{c}{8}, \quad \mu = \frac{1}{4}\sqrt{c}. \quad (2.16)$$

(vi) Altıncı durum:

$$a_0 = \frac{c}{4}, \quad a_1 = b_1 = 0, \quad a_2 = b_2 = -\frac{c}{8}, \quad \mu = \frac{1}{4}\sqrt{c}. \quad (2.17)$$

c , serbest parametre olarak alınmıştır.

Birinci durum aşağıdaki çözümü verir;

$$u_1(x, t) = -\frac{c}{6} \left(1 - 3 \tanh^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{-c} (x - ct) \right] \right), \quad c < 0 \quad (2.18)$$

ve periyodik çözüm

$$u_2(x, t) = -\frac{c}{6} \left(1 + 3 \tan^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{c} (x - ct) \right] \right), \quad c > 0 \quad (2.19)$$

İkinci durum aşağıdaki soliton çözümünü verir;

$$u_3(x, t) = -\frac{c}{6} \left(1 - 3 \coth^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{-c} (x - ct) \right] \right), \quad c < 0 \quad (2.20)$$

ve periyodik çözüm

$$u_4(x, t) = -\frac{c}{6} \left(1 + 3 \cot^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{c} (x - ct) \right] \right), \quad c > 0. \quad (2.21)$$

Üçüncü durum aşağıdaki soliton çözümünü verir;

$$u_5(x, t) = \frac{c}{2} \sec^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{c} (x - ct) \right], \quad c > 0 \quad (2.22)$$

ve periyodik çözüm

$$u_6(x, t) = \frac{c}{2} \sec^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{-c} (x - ct) \right], \quad c < 0 \quad (2.23)$$

Dördüncü durum aşağıdaki çözümü verir;

$$u_7(x,t) = -\frac{c}{2} \operatorname{csc} h^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{c}(x-ct) \right], \quad c > 0 \quad (2.24)$$

ve periyodik çözüm

$$u_8(x,t) = \frac{c}{2} \operatorname{csc}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{-c}(x-ct) \right], \quad c < 0 \quad (2.25)$$

Beşinci durum aşağıdaki çözümü verir;

$$u_9(x,t) = \frac{c}{12} \left(1 + \frac{3}{2} \left(\tanh^2 \left[\frac{1}{4} \sqrt{-c}(x-ct) \right] + \operatorname{coth}^2 \left[\frac{1}{4} \sqrt{-c}(x-ct) \right] \right) \right), \quad c < 0 \quad (2.26)$$

ve periyodik çözüm

$$u_{10}(x,t) = \frac{c}{12} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\tan^2 \left[\frac{1}{4} \sqrt{c}(x-ct) \right] + \cot^2 \left[\frac{1}{4} \sqrt{c}(x-ct) \right] \right) \right), \quad c > 0 \quad (2.27)$$

Altıncı durum aşağıdaki çözümü verir;

$$u_{11}(x,t) = \frac{c}{8} \left(2 - \left(\tanh^2 \left[\frac{1}{4} \sqrt{c}(x-ct) \right] + \operatorname{coth}^2 \left[\frac{1}{4} \sqrt{c}(x-ct) \right] \right) \right), \quad c > 0 \quad (2.28)$$

ve periyodik çözüm

$$u_{12}(x,t) = \frac{c}{8} \left(2 + \left(\tan^2 \left[\frac{1}{4} \sqrt{-c}(x-ct) \right] - \cot^2 \left[\frac{1}{4} \sqrt{-c}(x-ct) \right] \right) \right), \quad c > 0 \quad (2.29)$$

genelleştirilmiş Tanh metodunu kullanarak altı çift çözüm elde edilmiştir [11].

2.4. KdV Denkleminin Riccati Denklem Metodu ile Çözümü

$$U_t + 6UU_x + U_{xxx} = 0 \quad (2.30)$$

KdV denklemini ele alalım. Bu denkleme $\xi = x - \lambda t$ dönüşümü uygulanırsa,

$$U_t = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial U}{\partial \xi}$$

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi}$$

$$U_{xx} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}$$

$$U_{xxx} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \right) = \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3}$$

kısmi türevleri bulunur.

Bu türevleri denklemde yerlerine yazarsak,

$$-\lambda \frac{\partial U}{\partial \xi} + 6U \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0$$

$$U' = \frac{\partial U}{\partial \xi} \text{ olduğuna göre}$$

$-\lambda U' + 6UU' + U''' = 0$ denkleminin ξ ye göre integralini alırsak,

$$-\lambda U + \underbrace{3U^2}_{N.L} + \underbrace{U''}_L = 0 \quad (2.31)$$

N.L ~ L dengelemesi yapılırsa,

$$U^2 \sim U''$$

$$U = \vartheta^M, \quad U^2 = \vartheta^{2M}$$

$$U' = \frac{\vartheta^{M+1}}{M}, \quad U'' = \frac{\vartheta^{M+2}}{M(M+1)}$$

$$U^2 \sim U'' \Rightarrow \vartheta^{2M} \cong \vartheta^{M+2} \Rightarrow 2M = M+2 \Rightarrow M = 2$$

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \phi + a_{II} \phi^2 + b_{II} \phi^{-1} + b_1 \phi^{-2}$$

Dolayısıyla ϕ ve ϕ^{-1} 'in katsayıları sıfır kabul edilirse,

$$U(\xi) = a_0 + a_1 \phi^2 + b_1 \phi^{-2} \quad (2.32)$$

$$\phi' = A + B\phi + C\phi^2$$

$$\begin{aligned}
U'(\xi) &= 2a_0\phi' - 2b_1\phi^{-3}\phi' \\
&= -\lambda a_0 - \lambda\phi^2 - \lambda b_0\phi^{-2} + 3a_0^2 + 6a_0a_1\phi^2 + 3a_1^2\phi^4 + 6a_0b_1\phi^{-2} + 6a_1b_1 + 3b_1^2\phi^{-4} \\
&+ 2a_1A + 4a_1AB\phi + 4a_1AB\phi + 4a_1B^2\phi^2 + 4a_1BC\phi^3 + 6a_1AC\phi^2 + 6a_1BC\phi^3 \\
&+ 4b_1B^2\phi^{-2} + 4b_1BC\phi^{-1} + 2b_1AC\phi^{-2} + 2b_1BC\phi^{-1} + 2b_1C^2 = 0
\end{aligned}$$

ϕ^n derecelerine göre her birini sıfıra eşitlersek, ($0 \leq n \leq 8$) için 8 tane sistem yazılır.

$$\begin{aligned}
\phi^4 : 3a_1^2 + 6a_1C^2 &= 0 \\
\phi^3 : 4a_1BC + 6a_0a_1 + 4a_1B^2 + 6a_1AC &= 0 \\
\phi^2 : -\lambda a_1 + 6a_0a_1 + 4a_1B^2 + 6a_1AC &= 0 \\
\phi : 4a_1AB &= 0 \\
\phi^0 : -\lambda a_0 + 3a_0^2 + 6a_1b_1 + 2a_1A + 2b_1C^2 &= 0 \quad (2.33) \\
\phi^{-1} : 6b_1BC &= 0 \\
\phi^{-2} : -\lambda b_1 + 6a_0b_1 + 8b_1AC + 4b_1B^2 &= 0 \\
\phi^{-3} : 10b_1AB &= 0 \\
\phi^{-4} : 3b_1^2 + 6b_1A^2 &= 0
\end{aligned}$$

$B = 0$ için Maple yardımıyla 6 çözümü vardır.

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\frac{2}{3}AC \quad a_1 = -2C^2 \quad b_1 = 0 \quad \lambda = 4AC \\
a_0 &= -\frac{2}{3}AC \quad a_1 = 0 \quad b_1 = -2A^2 \quad \lambda = 4AC \\
a_0 &= -2AC \quad a_1 = -2C^2 \quad b_1 = 0 \quad \lambda = -4AC \\
a_0 &= -2AC \quad a_1 = 0 \quad b_1 = -2A^2 \quad \lambda = -4AC
\end{aligned} \quad (2.34)$$

$$a_0 = -4AC \quad a_1 = -2C^2 \quad b_1 = -2A^2 \quad \lambda = -16AC$$

$$a_0 = \frac{4}{3}AC \quad a_1 = -2C^2 \quad b_1 = -2A^2 \quad \lambda = 16AC$$

Yukarıdaki değerler için $U(\xi)$ aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$U_I(x, t) = -\frac{2}{3}AC - 2C^2(\phi(\xi))^2, \quad \lambda = 4AC$$

$$U_{II}(x, t) = -\frac{2}{3}AC - 2A^2(\phi(\xi))^{-2}, \quad \lambda = 4AC$$

$$U_{III}(x, t) = -2AC - 2C^2(\phi(\xi))^2, \quad \lambda = -4AC \quad (2.35)$$

$$U_{IV}(x, t) = -2AC - 2A^2(\phi(\xi))^{-2}, \quad \lambda = -4AC$$

$$U_V(x, t) = -4AC - 2C^2(\phi(\xi))^2 - 2A^2(\phi(\xi))^{-2}, \quad \lambda = -16AC$$

$$U_{VI}(x, t) = \frac{4}{3}AC - 2C^2(\phi(\xi))^2 - 2A^2(\phi(\xi))^{-2}, \quad \lambda = 16AC$$

A ve C keyfi sabitleri ve ϕ için trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonlar elde edilir

Sırayla (2.35)'deki denklemlerle ve (2.6)'daki özel çözümleri uygularsak farklı çözümleri aşağıdaki gibi olur.

I. DURUM: $U_I(x, t)$ ele alalım.

$$a_0 = -\frac{2}{3}AC \quad a_1 = -2C^2 \quad b_1 = 0 \quad \lambda = 4AC$$

denklemini için (2.6) değerlerini yerine yazarsak,

$$A = \frac{1}{2} \text{ ve } C = -\frac{1}{2} \text{ için;}$$

$$U_I(\xi) = \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

$$U_2(\xi) = -\frac{1}{2} \operatorname{csc} h^2\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

olup ve $\lambda = -1$ elde edilir.

$$A = \frac{1}{2} \text{ ve } C = \frac{1}{2} \text{ için;}$$

$$U_3(\xi) = -\frac{1}{6} \left(1 + 3(\tan \xi \mp \sec \xi)^2\right)$$

$$U_4(\xi) = -\frac{1}{6} \left(1 + 3 \tan^2\left(\frac{1}{2}\xi\right)\right)$$

$$U_5(\xi) = -\frac{1}{6} \left(1 + 3 \cot^2\left(\frac{1}{2}\xi\right)\right)$$

olup ve $\lambda = 1$ elde edilir.

$$A = 1 \text{ ve } C = -1 \text{ için;}$$

$$U_6(\xi) = \frac{2}{3} (1 - 3 \tanh^2 \xi)$$

$$U_7(\xi) = \frac{2}{3} (1 - 3 \operatorname{coth}^2 \xi)$$

olup ve $\lambda = -4$ elde edilir.

$$A = 1 \text{ ve } C = 1 \text{ için;}$$

$$U_8(\xi) = -\frac{2}{3} (1 + 3 \tan^2 \xi)$$

$$U_9(\xi) = -\frac{2}{3} (1 + 3 \cot^2 \xi)$$

olup ve $\lambda = 4$ elde edilir.

$$A = 1 \text{ ve } C = -4 \text{ için;}$$

$$U_{10}(\xi) = \frac{8}{3} (1 + 3 \tanh^2 2\xi)$$

$$U_{11}(\xi) = \frac{8}{3}(1 - 3 \coth^2 2\xi)$$

olup ve $\lambda = -16$ elde edilir

$A = 1$ ve $C = 4$ için;

$$U_{12}(\xi) = -\frac{8}{3}(1 + \tan^2 2\xi)$$

$$U_{13}(\xi) = -\frac{8}{3}(1 + 3 \cot^2 2\xi)$$

olup ve $\lambda = 16$ elde edilir

II. DURUM: $U_{ii}(x, t)$ ele alalım.

$$a_0 = -\frac{2}{3}AC \quad a_1 = 0$$

$$b_1 = -2A^2 \quad \lambda = 4AC$$

denklemini için (2.6) değerlerini yerine yazarsak,

$A = \frac{1}{2}$ ve $C = -\frac{1}{2}$ için;

$$U_{14}(\xi) = \frac{1}{6} \left(1 - 3 \tanh^2 \left(\frac{1}{2} \xi \right) \right)$$

$$U_{15}(\xi) = \frac{1}{6} \left(1 - 3 \coth^2 \left(\frac{1}{2} \xi \right) \right)$$

olup ve $\lambda = 16$ elde edilir

$A = \frac{1}{2}$ ve $C = \frac{1}{2}$ için;

$$U_{16}(\xi) = -\frac{1}{6} \left(1 + \frac{3}{(\tan \xi \mp \sec \xi)^2} \right)$$

$$U_{17}(\xi) = -\frac{1}{6} \left(1 + 3 \tan^2 \left(\frac{1}{2} \xi \right) \right)$$

$$U_{18}(\xi) = -\frac{1}{6} \left(1 + 3 \cot^2 \left(\frac{1}{2} \xi \right) \right)$$

olup ve $\lambda = 1$ elde edilir.

$A = 1$ ve $C = -1$ için; $U_6(\xi)$ ve $U_7(\xi)$ elde edilip $\lambda = -4$ 'tür.

$A = 1$ ve $C = 1$ için; $U_8(\xi)$ ve $U_9(\xi)$ elde edilip $\lambda = 4$ 'tür.

$A = 1$ ve $C = -4$ için,

$$U_{19}(\xi) = \frac{8}{3} (1 - 3 \tanh^2 2\xi)$$

$$U_{20}(\xi) = \frac{8}{3} (1 - 3 \coth^2 2\xi)$$

olup $\lambda = -16$ 'dır.

$A = 1$ ve $C = 4$ için;

$$U_{21}(\xi) = -\frac{8}{3} (1 + 3 \tan^2 2\xi)$$

$$U_{22}(\xi) = -\frac{8}{3} (1 + 3 \cot^2 2\xi)$$

olup ve $\lambda = 16$ 'dır.

III. DURUM: $U_{iii}(x, t)$ ele alalım.

$$a_0 = -2AC, a_1 = -2C^2, b_1 = 0, \quad \lambda = -4AC$$

denklemini için (2.6) değerlerini yerine yazarsak,

$$A = \frac{1}{2} \text{ ve } C = -\frac{1}{2} \text{ için, } U_1(\xi) \text{ ve } U_2(\xi) \text{ elde edilip } \lambda = -1 \text{ 'dir.}$$

$$A = \frac{1}{2} \text{ ve } C = \frac{1}{2} \text{ için,}$$

$$U_{23}(\xi) = -\frac{1}{2} \left(1 + (\tan \xi \mp \sec \xi)^2 \right)$$

$$U_{24}(\xi) = -\frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \left(\frac{1}{2} \xi \right) \right)$$

$$U_{25}(\xi) = -\frac{1}{2} \left(1 + \cot^2 \left(\frac{1}{2} \xi \right) \right)$$

olup ve $\lambda = -1$ 'dir.

$$A = 1 \text{ ve } C = -1 \text{ için,}$$

$$U_{26}(\xi) = 2 \operatorname{sech}^2(\xi)$$

$$U_{27}(\xi) = -2 \operatorname{csch}^2(\xi)$$

olup ve $\lambda = 4$ 'tür.

$$A = 1 \text{ ve } C = 1 \text{ için,}$$

$$U_{28}(\xi) = -2 \sec^2 \xi$$

$$U_{29}(\xi) = -2 \csc^2 \xi$$

olup ve $\lambda = -4$ 'tür.

$$A = 1 \text{ ve } C = -4 \text{ için,}$$

$$U_{30}(\xi) = 8 \operatorname{sech}^2 2\xi$$

$$U_{31}(\xi) = -8 \operatorname{csch}^2 2\xi$$

olup ve $\lambda = 16$ 'dir.

$$A = 1 \text{ ve } C = 4 \text{ için,}$$

$$U_{32}(\xi) = -8 \sec^2 2\xi$$

$$U_{33}(\xi) = -8 \sec^2 2\xi$$

olup ve $\lambda = -16$ 'dır.

IV. Durum $U_{IV}(x, t)$ ele alalım

$$a_0 = -2AC \quad a_1 = 0 \quad b_1 = -2A^2 \quad \lambda = -4AC$$

denklemini için (2.6) değerlerini yerine yazarsak,

$$A = \frac{1}{2} \text{ ve } C = -\frac{1}{2} \text{ için, } U_1(\xi) \text{ ve } U_2(\xi) \text{ elde edilip } \lambda = 1 \text{ 'dir}$$

$$A = \frac{1}{2} \text{ ve } C = \frac{1}{2} \text{ için,}$$

$$U_{34}(\xi) = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(\tan \xi \mp \sec \xi)^2} \right)$$

$$U_{35}(\xi) = -\frac{1}{2} \left(\sec^2 \left(\frac{1}{2} \xi \right) \right)$$

$$U_{36}(\xi) = -\frac{1}{2} \left(\csc^2 \left(\frac{1}{2} \xi \right) \right)$$

olup ve $\lambda = -1$ 'dır.

$$A = 1 \text{ ve } C = -1 \text{ için; } U_{26}(\xi) \text{ ve } U_{27}(\xi) \text{ elde edilip } \lambda = 4 \text{ 'tür.}$$

$$A = 1 \text{ ve } C = 1 \text{ için; } U_{28}(\xi) \text{ ve } U_{29}(\xi) \text{ elde edilip } \lambda = -4 \text{ 'tür.}$$

$$A = 1 \text{ ve } C = -4 \text{ için; } U_{30}(\xi) \text{ ve } U_{31}(\xi) \text{ elde edilip } \lambda = 16 \text{ 'dır.}$$

$$A = 1 \text{ ve } C = 4 \text{ için; } U_{32}(\xi) \text{ ve } U_{33}(\xi) \text{ elde edilip } \lambda = -16 \text{ 'dır.}$$

V. Durum

$U_V(x, t)$ ele alalım

$$a_0 = -4AC, \quad a_1 = -2C^2, \quad b_1 = -2A^2, \quad \lambda = -16AC$$

denklemini için (2.6) değerlerini yerine yazarsak,

$$A = \frac{1}{2} \text{ ve } C = -\frac{1}{2} \text{ için,}$$

$$U_{37}(\xi) = 1 - \frac{1}{2} \tanh^2\left(\frac{1}{2}\xi\right) - \frac{1}{2} \coth^2\left(\frac{1}{2}\xi\right)$$

olup $\lambda = 4$ 'tür.

$$A = \frac{1}{2} \text{ ve } C = \frac{1}{2} \text{ için,}$$

$$U_{38}(\xi) = 1 - \frac{1}{2} (\tan \xi \mp \sec \xi)^2 - \frac{1}{2} (\tan \xi \mp \sec \xi)^{-2}$$

$$U_{39}(\xi) = 1 - \frac{1}{2} \tan^2\left(\frac{1}{2}\xi\right) - \frac{1}{2} \cot^2\left(\frac{1}{2}\xi\right)$$

olup $\lambda = -4$ 'tür.

$$A = 1 \text{ ve } C = -1 \text{ için,}$$

$$U_{40}(\xi) = 4 - 2 \tanh^2 \xi - 2 \coth^2 \xi$$

olup $\lambda = 16$ 'dır.

$$A = 1 \text{ ve } C = 1 \text{ için,}$$

$$U_{41}(\xi) = -4 - 2 \tan^2 \xi - 2 \cot^2 \xi$$

olup $\lambda = -16$ 'dır.

$$A = 1 \text{ ve } C = -4 \text{ için,}$$

$$U_{42}(\xi) = 16 - 8 \tanh^2 2\xi - 8 \coth^2 2\xi$$

olup $\lambda = 64$ 'tür.

$$A = 1 \text{ ve } C = 4 \text{ için,}$$

$$U_{43}(\xi) = -16 - 8 \tan^2 2\xi - 8 \cot^2 2\xi$$

olup $\lambda = -64$ 'tür.

VI. Durum

$U_{vi}(x, t)$ ele alalım

$$a_o = \frac{4}{3}AC \quad a_1 = -2C^2 \quad b_1 = -2A^2 \quad \lambda = 16AC$$

denklemini için (2.6) değerlerini yerine yazarsak,

$$A = \frac{1}{2} \text{ ve } C = -\frac{1}{2} \text{ için,}$$

$$U_{44}(\xi) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \tanh^2\left(\frac{1}{2}\xi\right) - \frac{1}{2} \coth^2\left(\frac{1}{2}\xi\right)$$

olup $\lambda = -4$ 'tür.

$$A = \frac{1}{2} \text{ ve } C = \frac{1}{2} \text{ için,}$$

$$U_{45}(\xi) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} (\tan \xi \mp \sec \xi)^2 - \frac{1}{2} (\tan \xi \mp \sec \xi)^{-2}$$

$$U_{46}(\xi) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \tan^2\left(\frac{1}{2}\xi\right) - \frac{1}{2} \cot^2\left(\frac{1}{2}\xi\right)$$

olup $\lambda = 4$ 'tür.

$$A = 1 \text{ ve } C = -1 \text{ için,}$$

$$U_{47}(\xi) = -\frac{4}{3} - 2 \tanh^2 \xi - 2 \coth^2 \xi$$

olup $\lambda = -16$ 'dir.

$$A = 1 \text{ ve } C = 1 \text{ için,}$$

$$U_{48}(\xi) = \frac{4}{3} - 2 \tan^2 \xi - 2 \cot^2 \xi$$

olup $\lambda = 16$ 'dir.

$A = 1$ ve $C = -4$ için,

$$U_{49}(\xi) = -\frac{16}{3} - 8 \tanh^2 2\xi - 8 \coth^2 2\xi$$

olup $\lambda = -64$ 'tür.

$A = 1$ ve $C = 4$ için,

$$U_{50}(\xi) = -\frac{16}{3} - 8 \tan^2 2\xi - 8 \cot^2 2\xi$$

olup $\lambda = 64$ 'tür.

Sonuç olarak KdV denkleminin 50 tane trigonometrik ve hiperbolik çözümleri elde edilmiş oldu. Bu çözümler literatürdeki diğer çözümlerle karşılaştırıldığında çözümlerin bir kısmının benzer bir kısmının da yeni olduğu söylenebilir [12]. Yine bazı bilim insanları tarafından bu metot farklı denklemlere uygulamaları yapılmıştır [13].

2.5. (2+1) Boyutlu Soliton Breaking Denklem Sisteminin Çözümleri

(2+1)-boyutlu soliton breaking denklem sistemi

$$U_t + \gamma U_{xy} + 4\gamma V_x + 4\gamma U_x V = 0$$

$$U_y = V_x$$

şeklinde tanımlanır [14]. Bu denkleme

$$\xi = x + y - \beta t$$

şeklinde hareketli dalga dönüşümünü uygulayalım.

$$U_t = \frac{dU}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} = -\beta U'$$

$$U_x = \frac{dU}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = U'$$

$$U_{xx} = \frac{d(U')}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = U''$$

$$U_{\text{xyy}} = \frac{d(U'')}{d\xi} \frac{d\xi}{dy} = U'''$$

$$V_x = \frac{dv}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = V'$$

Bulduğumuz ifadeleri (2+1)-boyutlu soliton breaking denklem sisteminde yerine yazarsak denkleminiz,

$$-\beta U' + \gamma U''' + 4\gamma UV' + 4\gamma U'V = 0 \quad (2.36)$$

$$U' = V'$$

$U' = V'$ denkleminin her iki tarafını integrallersek ve integral sabitini sıfır alırsak,

$$U = V \quad (2.37)$$

bulunur. (2.37) denklemini (2.36) denkleminde yerine

$$-\beta U' + \gamma U''' + 4\gamma U \cdot U' + 4\gamma U' U = 0$$

bu ifadeyi de integralleyip integral sabitini sıfır kabul edersek denkleminiz,

$$-\beta U + 4\gamma U^2 + \gamma U'' = 0 \quad (2.38)$$

elde edilir. Bu ifadeyi dengelersek,

$$U = V^m, U' = mV^{m+1}, U'' = m(m+1)V^{m+2}, U^2 = V^{2m}$$

$$U = U^2 \Rightarrow V^{m+2} = V^{2m}$$

$$\Rightarrow m+2 = 2m \quad (2.39)$$

$$\Rightarrow m = 2 \quad (2.40)$$

Tanh – Coth metodu için genişletilmiş denklem çözümünü Y ve Y^{-1} almayarak aşağıdaki gibi kabul edelim.

$$U(\xi) = S(Y) = a_0 + a_1 Y^2 + \frac{b_1}{Y^2} \quad (2.41)$$

(2.41) denklemini (2.38) denkleminde yerine yazıp Y^j ($j=0, \dots, 8$) ifadelerinin katsayılarını sıfıra eşitlersek aşağıdaki gibi dokuz denklem bulunur.

$$\begin{aligned}
6\gamma a_1 C^2 + 4\gamma a_1^2 &= 0, \\
10\gamma a_1 BC &= 0, \\
8\gamma a_0 a_1 + 8\gamma a_1 AC + 4\gamma a_1 B^2 - \beta a_1 &= 0, \\
6\gamma a_1 AB &= 0, \\
8\gamma a_1 b_1 + 4\gamma a_0^1 - \beta a_0 + 2\gamma b_1 C^2 + 2\gamma a_1 A^2 &= 0, \\
6\gamma b_1 BC &= 0, \\
4\gamma b_1 B^2 + 8\gamma a_0 b_1 + 8\gamma b_1 AC - \beta b_1 &= 0, \\
10\gamma b_1 AB &= 0, \\
4\gamma b_1^2 + 6\gamma b_1 A^2 &= 0,
\end{aligned} \tag{2.42}$$

$B = 0$ için Maple yardımıyla bu sistemin altı farklı çözümü olduğunu kolayca gösterebiliriz.

1. Çözüm

$$a_0 = -\frac{3}{2}AC, a_1 = 0, b_1 = -\frac{3}{2}A^2, B = -4AC\gamma \tag{2.43}$$

2. Çözüm

$$a_0 = -\frac{1}{2}AC, a_1 = 0, b_1 = -\frac{3}{2}A^2, B = 4AC\gamma \tag{2.44}$$

3. Çözüm

$$a_0 = -\frac{3}{2}AC, a_1 = -\frac{3}{2}C^2, b_1 = 0, \beta = -4AC\gamma \tag{2.45}$$

4. Çözüm

$$a_0 = -\frac{1}{2}AC, a_1 = -\frac{3}{2}C^2, b_1 = 0, \beta = 4AC\gamma \tag{2.46}$$

5. Çözüm

$$a_0 = AC, a_1 = -\frac{3}{2}C^2, b_1 = -\frac{3}{2}A^2, \beta = 16AC\gamma \quad (2.47)$$

6. Çözüm

$$a_0 = -3AC, a_1 = -\frac{3}{2}C^2, b_1 = -\frac{3}{2}A^2, \beta = -16AC\gamma \quad (2.48)$$

Bu altı çözümü (2.41) denkleminde yerine yazarsak aşağıdaki genel çözümleri elde ederiz.

$$U_i = -\frac{3}{2}AC - \frac{3}{2}A^2Y^{-2}(\xi), \beta = -4AC\gamma \quad (2.49)$$

$$U_{ii} = -\frac{1}{2}AC - \frac{3}{2}A^2Y^{-2}(\xi), \beta = 4AC\gamma \quad (2.50)$$

$$U_{iii} = -\frac{3}{2}AC - \frac{3}{2}C^2Y^2(\xi), \beta = -4AC\gamma \quad (2.51)$$

$$U_{iv} = -\frac{1}{2}AC - \frac{3}{2}C^2Y^2(\xi), \beta = 4AC\gamma \quad (2.52)$$

$$U_v = AC - \frac{3}{2}C^2Y^2(\xi) - \frac{3}{2}A^2Y^{-2}(\xi), \beta = 16AC\gamma \quad (2.53)$$

$$U_{vi} = -3AC - \frac{3}{2}C^2Y^2(\xi) - \frac{3}{2}A^2Y^{-2}(\xi), \beta = -16AC\gamma \quad (2.54)$$

A ve C sabitlerdir. Bu denklemlerin her birine Riccati koşullarını uygulayalım.

I. Durum

$A = \frac{1}{2}$ ve $C = -\frac{1}{2}$ ele alalım,

$$U_1 = -\frac{3}{8}\operatorname{csch}^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \text{ ve } V_1 = -\frac{3}{8}\operatorname{csch}^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (2.55)$$

ve

$$U_2 = \frac{3}{8}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \text{ ve } V_2 = \frac{3}{8}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (2.56)$$

olup $\beta = \gamma$ dir.

$$A = \frac{1}{2} \text{ ve } C = -\frac{1}{2}$$

$$U_3 = -\frac{3}{8} \csc^2(\xi) \text{ ve } V_3 = -\frac{3}{8} \csc^2(\xi) \quad (2.57)$$

ve

$$U_4 = -\frac{3}{8} \sec^2(\xi) \text{ ve } V_4 = -\frac{3}{8} \sec^2(\xi) \quad (2.58)$$

$$U_5 = -\frac{3}{8} \left[1 + \frac{1}{(\tan \xi \mp \sec \xi)^2} \right] \quad (2.59)$$

olup $\beta = -\gamma$ dir.

$$A = 1 \text{ ve } C = -1 \text{ için,}$$

$$U_6 = -\frac{3}{2} \operatorname{csch}^2(\xi) \text{ ve } V_6 = -\frac{3}{8} \operatorname{csch}^2(\xi) \quad (2.60)$$

$$U_7 = \frac{3}{2} \operatorname{sech}^2(\xi) \text{ ve } V_7 = \frac{3}{2} \operatorname{sech}^2(\xi) \quad (2.61)$$

olup $\beta = 4\gamma$ dir.

$$A = 1 \text{ ve } C = 1 \text{ için,}$$

$$U_8 = -\frac{3}{2} \csc^2(\xi) \text{ ve } V_8 = -\frac{3}{8} \csc^2(\xi) \quad (2.62)$$

$$U_9 = -\frac{3}{2} \sec^2(\xi) \text{ ve } V_9 = -\frac{3}{2} \sec^2(\xi) \quad (2.63)$$

olup $\beta = -4\gamma$ dir.

$$A = 1 \text{ ve } C = -4 \text{ için,}$$

$$U_{10} = \frac{3}{8} [16 - \operatorname{coth}^2(2\xi)] \text{ ve } V_{10} = \frac{3}{8} [16 - \operatorname{coth}^2(2\xi)] \quad (2.64)$$

$$U_{11} = \frac{3}{8} [16 - \tanh^2(2\xi)] \text{ ve } V_{11} = \frac{3}{8} [16 - \tanh^2(2\xi)] \quad (2.65)$$

olup $\beta = 16\gamma$ dır.

$A = 1$ ve $C = 4$ için,

$$U_{12} = -\frac{3}{8} [16 + \cot^2(2\xi)] \text{ ve } V_{12} = -\frac{3}{8} [16 + \cot^2(2\xi)] \quad (2.66)$$

$$U_{13} = -\frac{3}{8} [16 + \tan^2(2\xi)] \text{ ve } V_{13} = -\frac{3}{8} [16 + \tan^2(2\xi)] \quad (2.67)$$

olup $\beta = -16\gamma$ dır.

II. Durum

$U_{ii}(x, t)$ ele alalım.

$A = \frac{1}{2}$ ve $C = -\frac{1}{2}$ için,

$$U_{14} = \frac{1}{8} \left[1 - 3\coth^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] \text{ ve } V_{14} = \frac{1}{8} \left[1 - \coth^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] \quad (2.68)$$

$$U_{15} = \frac{1}{8} \left[1 - \tanh^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] \text{ ve } V_{15} = \frac{1}{8} \left[1 - 3\tanh^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] \quad (2.69)$$

olup $\beta = -\gamma$ dır.

$A = \frac{1}{2}$ ve $C = \frac{1}{2}$ için,

$$U_{16} = -\frac{1}{8} [1 + 3\cot^2(\xi)] \text{ ve } V_{16} = \frac{1}{8} [1 + \cot^2(\xi)] \quad (2.70)$$

$$U_{17} = -\frac{1}{8} [1 + 3\tan^2(\xi)] \text{ ve } V_{17} = -\frac{1}{8} [1 + 3\tan^2(\xi)] \quad (2.71)$$

$$U_{18} = -\frac{1}{8} \left[1 + \frac{3}{(\tan \xi \mp \sec \xi)^2} \right] \text{ ve } V_{18} = -\frac{1}{8} \left[1 + \frac{3}{(\tan \xi \mp \sec \xi)^2} \right] \quad (2.72)$$

olup $\beta = \gamma$ dir.

$A = 1$ ve $C = -1$ için,

$$U_{19} = \frac{1}{2} [1 - 3 \coth^2(\xi)] \text{ ve } V_{19} = \frac{1}{2} [1 - 3 \coth^2(\xi)] \quad (2.73)$$

$$U_{20} = \frac{1}{2} [1 - 3 \tanh^2(\xi)] \text{ ve } V_{20} = \frac{1}{2} [1 - 3 \tanh^2(\xi)] \quad (2.74)$$

olup $\beta = -4\gamma$ dir.

$A = 1$ ve $C = 1$ için,

$$U_{21} = -\frac{1}{2} [1 + 3 \cot^2(\xi)] \text{ ve } V_{21} = -\frac{1}{2} [1 + 3 \cot^2(\xi)] \quad (2.75)$$

$$U_{22} = -\frac{1}{2} [1 + 3 \tan^2(\xi)] \text{ ve } V_{22} = -\frac{1}{2} [1 + 3 \tan^2(\xi)] \quad (2.76)$$

olup $\beta = 4\gamma$ dir.

$A = 1$ ve $C = -4$ için,

$$U_{23} = 2 - \frac{3}{8} \coth^2(2\xi) \text{ ve } V_{23} = 2 - \frac{3}{8} \coth^2(2\xi) \quad (2.77)$$

$$U_{24} = 2 - \frac{3}{8} \tanh^2(2\xi) \text{ ve } V_{24} = 2 - \frac{3}{8} \tanh^2(2\xi) \quad (2.78)$$

olup $\beta = -16\gamma$ dir.

$A = 1$ ve $C = 4$ için,

$$U_{25} = -2 - \frac{3}{8} \cot^2(2\xi) \text{ ve } V_{25} = -2 - \frac{3}{8} \cot^2(2\xi) \quad (2.79)$$

$$U_{26} = -2 - \frac{3}{8} \tan^2(2\xi) \text{ ve } V_{26} = -2 - \frac{3}{8} \tan^2(2\xi) \quad (2.80)$$

olup $\beta = 16\gamma$ dir.

III. Durum

$U_{iii}(x, t)$ ele alalım.

$A = \frac{1}{2}$ ve $C = -\frac{1}{2}$ için, çözümler U_1, U_2 ve V_1, V_2 dir.

$A = \frac{1}{2}$ ve $C = \frac{1}{2}$ için,

$\beta = -\gamma$ olup çözümler U_3, U_4, U_5, V_3, V_4 ve V_5 dir.

$A = 1$ ve $C = -1$ için,

$\beta = 4\gamma$ olup çözümler U_6, U_7, V_6 ve V_7 dir.

$A = 1$ ve $C = 1$ için,

$\beta = -4\gamma$ olup çözümler U_8, U_9, V_8 ve V_9 dir.

$A = 1$ ve $C = -4$ için,

$$U_{27} = 6 \operatorname{sech}^2(2\xi) \text{ ve } V_{27} = 6 \operatorname{sech}^2(2\xi) \quad (2.81)$$

$$U_{28} = -6 \operatorname{csch}^2(2\xi) \text{ ve } V_{28} = -6 \operatorname{csch}^2(2\xi) \quad (2.82)$$

olup $\beta = 16\gamma$ dır.

$A = 1$ ve $C = 4$ için,

$$U_{29} = -6 \sec^2(2\xi) \text{ ve } V_{29} = -6 \sec^2(2\xi) \quad (2.83)$$

$$U_{30} = -6 \csc^2(2\xi) \text{ ve } V_{30} = -6 \csc^2(2\xi) \quad (2.84)$$

olup $\beta = -16\gamma$ dır.

IV. Durum

$U_{iv}(x, t)$ ele alalım.

$A = \frac{1}{2}$ ve $C = -\frac{1}{2}$ için, çözümler U_{14} , U_{15} , V_{14} ve V_{15} dir.

$A = \frac{1}{2}$ ve $C = \frac{1}{2}$ için,

$\beta = \gamma$ olup çözümler U_{16} , U_{17} , U_{18} , V_{16} , V_{17} ve V_{18} dir.

$A = 1$ ve $C = 1$ için,

$\beta = 4\gamma$ olup çözümler U_{21} , U_{22} , V_{21} ve V_{22} dir.

$A = 1$ ve $C = -4$ için,

$$U_{31} = 2[1 - 3 \tanh^2(2\xi)] \text{ ve } V_{31} = 2[1 - 3 \tanh^2(2\xi)] \quad (2.85)$$

$$U_{32} = 2[1 - 3 \coth^2(2\xi)] \text{ ve } V_{32} = 2[1 - 3 \coth^2(2\xi)] \quad (2.86)$$

olup $\beta = 16\gamma$ dir.

$A = 1$ ve $C = 4$ için,

$$U_{33} = -2[1 + 3 \tan^2(2\xi)] \text{ ve } V_{33} = -2[1 + 3 \tan^2(2\xi)] \quad (2.87)$$

$$U_{34} = -2[1 + 3 \cot^2(2\xi)] \text{ ve } V_{34} = -2[1 + 3 \cot^2(2\xi)] \quad (2.88)$$

olup $\beta = -16\gamma$ dir.

V. Durum

$U_v(x, t)$ ele alalım.

$A = \frac{1}{2}$ ve $C = -\frac{1}{2}$ için,

$$U_{35} = V_{35} = -\frac{1}{8} \left[2 + 3 \tan^2\left(\frac{\xi}{2}\right) + 3 \coth^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] \quad (2.89)$$

olup $\beta = -4\gamma$ dir.

$A = \frac{1}{2}$ ve $C = \frac{1}{2}$ için,

$$U_{36} = V_{36} = \frac{1}{8} \left[2 - 3 \tan^2 \left(\frac{\xi}{2} \right) - 3 \cot^2 \left(\frac{\xi}{2} \right) \right] \quad (2.90)$$

$$U_{37} = V_{37} = \frac{1}{8} \left[2 - 3 (\tan \xi \mp \sec \xi)^2 - 3 (\tan \xi \mp \sec \xi)^{-2} \right] \quad (2.91)$$

olup $\beta = 4\gamma$ dir.

$A = 1$ ve $C = -1$ için,

$$U_{38} = V_{38} = -\frac{1}{2} \left[2 + 3 \tanh^2 (\xi) + 3 \cot^2 (\xi) \right] \quad (2.92)$$

olup $\beta = -16\gamma$ dir.

$A = 1$ ve $C = 1$ için,

$$U_{39} = V_{39} = \frac{1}{2} \left[2 - 3 \tan^2 (\xi) - 3 \cot^2 (\xi) \right] \quad (2.93)$$

olup $\beta = 16\gamma$ dir.

$A = 1$ ve $C = -4$ için,

$$U_{40} = V_{40} = -4 - 6 \tanh^2 (2\xi) - \frac{3}{8} \coth^2 (2\xi) \quad (2.94)$$

olup $\beta = -64\gamma$ dir.

$A = 1$ ve $C = 4$ için,

$$U_{41} = V_{41} = 4 - 6 \tan^2 (2\xi) - \frac{3}{8} \cot^2 (2\xi) \quad (2.95)$$

olup $\beta = 64\gamma$ dir.

VI. Durum

$U_{vi} (x, t)$ ele alalım.

$A = \frac{1}{2}$ ve $C = -\frac{1}{2}$ için,

$$U_{42} = V_{42} = \frac{3}{8} \left[1 - \tanh^2 \left(\frac{\xi}{2} \right) - \coth^2 \left(\frac{\xi}{2} \right) \right] \quad (2.96)$$

olup $\beta = 4\gamma$ dir.

$A = \frac{1}{2}$ ve $C = \frac{1}{2}$ için,

$$U_{43} = V_{43} = -\frac{3}{8} \left[1 + \tan^2 \left(\frac{\xi}{2} \right) + \cot^2 \left(\frac{\xi}{2} \right) \right] \quad (2.97)$$

$$U_{44} = V_{44} = -\frac{3}{8} \left[1 + (\tan \xi \mp \sec \xi)^2 + (\tan \xi \mp \sec \xi)^{-2} \right] \quad (2.98)$$

olup $\beta = -4\gamma$ dir.

$A = 1$ ve $C = -1$ için,

$$U_{45} = V_{45} = \frac{3}{2} \left[2 - \tanh^2 (\xi) - \coth^2 (\xi) \right] \quad (2.99)$$

olup $\beta = 16\gamma$ dir.

$A = 1$ ve $C = 1$ için,

$$U_{46} = V_{46} = -\frac{3}{2} \left[2 + \tan^2 (\xi) + \cot^2 (\xi) \right] \quad (2.100)$$

olup $\beta = -16\gamma$ dir.

$A = 1$ ve $C = -4$ için,

$$U_{47} = V_{47} = 12 - 6 \tanh^2 (2\xi) - \frac{3}{8} \coth^2 (2\xi) \quad (2.101)$$

olup $\beta = 64\gamma$ dir.

$A = 1$ ve $C = 4$ için,

$$U_{48} = V_{48} = -12 - 6 \tan^2(2\xi) - \frac{3}{8} \cot^2(2\xi) \quad (2.102)$$

olup $\beta = -64\gamma$ dır.

Böylece, (2+1)-boyutlu soliton breaking denklem sisteminin 48 tane trigonometrik ve hiperbolik çözümleri elde edilmiş olur [15].

3. BÖLÜM

Bu bölümde ise Tanh yönteminin geliştirilmiş olan ileri Tanh yöntemi verilerek lineer olmayan oluşum denklemlerine uygulamaları yapılmıştır.

3.1. Lineer Olmayan Denklem İçin İleri Tanh Yöntemi

Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemi göz önüne alalım [16].

$$N(u, u_t, u_x, u_{xx}, \dots) = 0 \quad (2.103)$$

Bu denklemin çözümünü bulmak için

$\xi = k(x + wt)$ olmak üzere $U(x, t) = U(\xi)$ dönüşümünü uygulayalım. Burada k ve w , sırasıyla dalga sayısı ve dalga hızını göstermektedir.

O halde,

$$\begin{aligned} u_t &= kwu'(\xi) \\ u_x &= ku'(\xi) \\ u_{tt} &= k^2w^2u''(\xi) \\ &\vdots \end{aligned}$$

şeklindeki türevler bulunup (2.103) denkleminde yerlerine yazılırsa bu denklem

$$N(u, u', u'', \dots) = 0 \quad (2.104)$$

adi diferensiyel denklemine dönüşmektedir.

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^N a_i F^i(\xi) \text{ şeklinde tanımlayalım.} \quad (2.105)$$

Burada N , lineer olan en yüksek mertebeli terim ile lineer olmayan en yüksek mertebeli terim arasındaki dengeleme sonucu bulunur ve $F(\xi)$ in Riccati denklemine göre çözüm parametreleri şunlardır;

$$F(\xi) = CF^2 + A \quad (2.106)$$

Burada A ve C ler sabitlerdir. A, C ve $F(\xi)$ arasındaki bağıntı ise aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

	A	C	$F(\xi)$
1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\coth \xi \pm \csc h \xi, \tanh \pm \operatorname{sech} \xi$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sec \xi + \tan \xi, \xi - \cot \xi$
3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sec \xi - \tan \xi, \xi + \cot \xi$
4	1	-1	$\tanh \xi, \coth \xi$
5	-1	-1	$\cot \xi$
6	1	1	$\tan \xi$

3.2. İleri Tanh Yönteminin Uygulamaları

Modifiye dispersive water wave denklem sistemini ele alalım [17-18].

$$\begin{aligned} u_t &= -\frac{1}{4}v_{xx} + \frac{1}{2}(uv_x + vu_x), \\ v_t &= -u_{xx} - 2uu_x + \frac{3}{2}vv_x \end{aligned} \quad (2.107)$$

Bu denklem sisteminin çözümünü bulmak için

$\xi = (x + wt)$ olmak üzere, $u(x, t) = u(\xi)$, $v(x, t) = v(\xi)$ dönüşümlerini ele alalım.

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi, \\ u_t &= wu_\xi, \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi}, \\ v_x &= v_\xi, \\ v_{xx} &= v_{\xi\xi}, \\ v_t &= wv_\xi \end{aligned}$$

türevleri denklemde yerlerine yazarsak,

$$wu' = -\frac{1}{4}v'' + \frac{1}{2}(uv' + vu'), \quad wv' = -u'' - 2uu' + \frac{3}{2}vv'$$

olur.

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^N a_i F^i(\xi) \quad \text{ve} \quad F' = cF^2 + A \quad \text{olmak üzere,}$$

$$N, v'' \text{ ile } uv' \text{ arasındaki dengeleme } N+2 = N+N+1 \Rightarrow N=1,$$

$$M, u'' \text{ ile } vv' \text{ arasındaki dengeleme } M+2 = N+N+1 \Rightarrow M=1$$

olarak bulunur.

O halde,

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^L a_i F^i(\xi), \quad v(\xi) = \sum_{j=0}^L b_j F^j(\xi)$$

$$u(\xi) = a_0 + a_1 F(\xi), \quad v(\xi) = b_0 + b_1 F\xi \text{ olur.}$$

Türevleri alınırsa;

$$u' = a_1 F' = a_1 (cF + A), \quad v' = b_1 F' = b_1 (cF^2 + A)$$

$$u'' = a_1 F'' = a_1 (2cFF') = a_1 (2cF(cF^2 + A)),$$

$$v'' = b_1 F'' = b_1 (2cFF') = b_1 (2cF(cF^2 + A))$$

bulunur. Denklemde yerlerine yazarsak.

$$-\frac{1}{4}(2c^2 b_1 F^3 + 2cb_1 AF) + \frac{1}{2}((a_0 + a_1 F)(b_1 cF^2 + b_1 A) + (b_0 + b_1 F)(a_1 cF^2 + a_1 A))$$

$$-w(ca_1 F^2 + a_1 A) = 0,$$

$$-(2a_1 c^2 F^3 + 2a_1 cAF) - 2(a_0 + a_1 F)(a_1 cF^2 + a_1 A) + \frac{3}{2}(b_0 + b_1 F)(b_1 cF^2 + b_1 A)$$

$$-w(cb_1 F^2 + b_1 A) = 0$$

bulunur.

Gerekli düzenlemeler yapılarak;

$$-Awa_1 + \frac{1}{2}Aa_1b_0 + \frac{1}{2}Aa_0b_1 = 0,$$

$$-Cwa_1 + \frac{1}{2}Ca_1b_0 + \frac{1}{2}Ca_0b_1 = 0,$$

$$-\frac{1}{2}ACb_1 + Aa_1b_1 = 0$$

$$-\frac{1}{2}c^2b_1 + ca_1b_1 = 0$$

$$-2Aa_1a_0 - Awb_1 + \frac{3}{2}Ab_0b_1 = 0,$$

$$-2Ca_1a_0 - Cwb_1 + \frac{3}{2}Cb_0b_1 = 0,$$

$$-2ACa_1 - 2Aa_1^2 + \frac{3}{2}Ab_1^2 = 0$$

$$-2c^2b_1 - 2ca_1^2 + \frac{3}{2}cb_1^2 = 0$$

olduğu görülür.

a_0, a_1, b_0, b_1 ve w ler bulunur, tablo yardımı ile de çözüme ulaşılır.

O halde,

$\xi = (x + wt)$ olmak üzere denklemin çözümü;

Durum 1; $A = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$ ise

$$F(\xi) = \coth \xi \pm \csc h\xi$$

$$F(\xi) = \tanh \xi \pm i \sec h\xi$$

$$u_{11} = \mp \frac{w}{2} - \frac{1}{4}(\coth \xi \mp \csc h\xi), \quad v_{11} = w \mp \frac{1}{2}(\coth \xi \mp \csc h\xi)$$

$$u_{12} = \mp \frac{w}{2} - \frac{1}{4}(\tanh \xi \mp i \sec h\xi), \quad v_{12} = w \mp \frac{1}{2}(\tanh \xi \mp i \sec h\xi)$$

Durum 2; $A = C = \frac{1}{2}$ ise

$$u_{21} = \mp \frac{w}{2} + \frac{1}{4}(\sec \xi \mp \tan \xi), \quad v_{21} = w \mp \frac{1}{2}(\sec \xi \mp \tan \xi)$$

$$u_{22} = \mp \frac{w}{2} + \frac{1}{4}(\csc \xi - \cot \xi), \quad v_{22} = w \mp \frac{1}{2}(\csc \xi - \cot \xi)$$

Durum 3; $A = C = -\frac{1}{2}$ ise

$$u_{31} = \mp \frac{w}{2} - \frac{1}{4}(\sec \xi + \tan \xi), \quad v_{31} = w \mp \frac{1}{2}(\sec \xi + \tan \xi)$$

$$u_{32} = \mp \frac{w}{2} - \frac{1}{4}(\csc \xi - \cot \xi), \quad v_{32} = w \mp \frac{1}{2}(\csc \xi - \cot \xi)$$

Durum 4; $A = 1, C = -1$ ise

$$u_{41} = \mp \frac{w}{2} - \frac{1}{2} \tanh \xi, \quad v_{41} = w \mp \tanh \xi$$

$$u_{42} = \mp \frac{w}{2} - \frac{1}{2} \coth \xi, \quad v_{42} = w \mp \coth \xi$$

Durum 5; $A = C = -1$ ise

$$u_{51} = \mp \frac{w}{2} + \frac{1}{2} \tan \xi, \quad v_{51} = w \mp \tan \xi$$

Durum 6; $A = C = 1$ ise

$$u_{61} = \mp \frac{w}{2} - \frac{1}{2} \cot \xi, \quad v_{61} = w \mp \cot \xi$$

olarak bulunur.

Şimdi ise Abrahams-Tsuneto reaksiyon difüzyon sistemini [19-20] ele alalım.

$$u_t = u_{xx} + (1 - u^2 - v^2)u, \quad (2.108)$$

$$v_t = v_{xx} + (1 - u^2 - v^2)v. \quad (2.109)$$

Bu denklemlerin hareketli dalga çözümlerini bulabilmek için aşağıdaki dönüşümleri ele alalım.

$$u(x, t) = U(\xi), \quad v(x, t) = V(\xi), \quad \xi = k(x + \omega t). \quad (2.110)$$

(2.110) denklemlerini (2.108) ve (2.109) denklemlerinde uygularsak,

$$-\frac{1}{4}V'' + \frac{1}{2}(UV' + VU') - \omega U' = 0, \quad (2.111)$$

$$-U'' - 2UU' + \frac{3}{2}VV' - \omega V' = 0,$$

şeklinde lineer olmayan adi diferensiyel denklemler elde edilir. (2.111) denklemlerinde lineer olmayan en yüksek mertebeden terim ile en yüksek mertebeden lineer terimin dengelenmesinden yani $V'' \sim UV'$ ve $U'' \sim VV'$ dengelenerek $n=1$ bulunur.

$$U(\xi) = a_0 + a_1 F(\xi), \quad V(\xi) = b_0 + b_1 F(\xi). \quad (2.112)$$

Burada $F' = CF^2 + A$ olmak üzere (2.112) denklemini gerekli türevler alınarak (2.111) denkleminde yerine yazıp gerekli düzenlemeleri yapıp F^j in kuvvetlerine göre F^j nin sırasıyla katsayılarını sıfıra eşitlersek $a_0, a_1, b_0, b_1, \omega, k$ dan oluşan aşağıda verilen denklem sistemi bulunur.

$$-a_0 + a_0^3 + \omega k a_1 + a_0 b_0^2 = 0,$$

$$-a_1 - 2k^2 a_1 + 3a_0^2 a_1 + a_1 b_0^2 + 2a_0 b_0 b_1 = 0,$$

$$\omega k a_1 + 3a_0 a_1^2 + 2a_1 b_0 b_1 + a_0 b_1^2 = 0,$$

$$-2k^2 a_1 + a_1^3 + a_1 b_1^2 = 0,$$

$$-b_0 + a_0^2 b_0 + b_0^3 + k \omega b_1 = 0,$$

$$-2a_0 a_1 b_0 - 2k^2 b_1 + a_0^2 b_1 + 3b_0^2 b_1 = 0,$$

$$a_1^2 b_0 + k \omega b_1 + 2a_0 a_1 b_1 + 3b_1^2 b_0 = 0,$$

$$-2k^2 b_1 + a_1^2 b_1 + b_1^3 = 0.$$

A , C ve $F(\xi)$ durumlarına göre 6 farklı çözümler ailesi bulunur.

1.durum: $A = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{2}$ için $F(\xi) = \coth \xi + \csc h \xi$

$$u_{11} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \left[1 + \coth \left(\frac{1}{4} (3t - \sqrt{2}x) \right) \right],$$

$$v_{11} = \pm \left[1 + \coth \left(\frac{3t}{2} - \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + \csc h \left(\frac{3t}{2} - \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right],$$

$$u_{12} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \left[1 + \coth \left(\frac{1}{4} (3t + \sqrt{2}x) \right) \right],$$

$$v_{12} = \pm \left[1 + \coth \left(\frac{3t}{2} + \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + \csc h \left(\frac{3t}{2} + \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right].$$

2.durum: $A = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{2}$ için $F(\xi) = \csc \xi - \cot \xi$

$$u_{21} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \left[1 + \tanh \left(\frac{1}{4} (3t - \sqrt{2}x) \right) \right],$$

$$v_{21} = \pm \left[1 + \tanh \left(\frac{1}{4} (3t - \sqrt{2}x) \right) \right],$$

$$u_{22} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \left[1 + \tanh \left(\frac{1}{4} (3t + \sqrt{2}x) \right) \right],$$

$$v_{22} = \pm \left[1 + \tanh \left(\frac{1}{4} (3t + \sqrt{2}x) \right) \right].$$

3.durum: $A = -\frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2}$ için $F(\xi) = \csc \xi + \cot \xi$

$$u_{31} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \left[1 + \coth \left(\frac{1}{4} (3t - \sqrt{2}x) \right) \right],$$

$$v_{31} = \pm \left[1 + \coth \left(\frac{1}{4} (3t - \sqrt{2}x) \right) \right],$$

$$u_{32} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \left[1 + \coth \left(\frac{1}{4} (3t + \sqrt{2}x) \right) \right],$$

$$v_{32} = \pm \left[1 + \coth \left(\frac{1}{4} (3t + \sqrt{2}x) \right) \right],$$

4.durum: $A = 1, C = -1$ için $F(\xi) = \tanh \xi$

$$u_{41} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \left[-1 + \tanh \left(\frac{1}{4} (-3t + \sqrt{2}x) \right) \right],$$

$$v_{41} = \left[\pm 1 + \tanh \left(\frac{1}{4} (\pm 3t \mp \sqrt{2}x) \right) \right],$$

$$u_{42} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \left[1 + \tanh \left(\frac{1}{4} (3t + \sqrt{2}x) \right) \right],$$

$$v_{42} = \pm \left[1 + \tanh \left(\frac{1}{4} (3t + \sqrt{2}x) \right) \right].$$

5.durum: $A = -1, C = -1$ için

$$u_{51} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \left[-1 + \coth \left(\frac{1}{4} (-3t + \sqrt{2}x) \right) \right],$$

$$v_{51} = \left[\pm 1 + \coth \left(\frac{1}{4} (\pm 3t \mp \sqrt{2}x) \right) \right],$$

$$u_{52} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \left[1 + \coth \left(\frac{1}{4} (-3t + \sqrt{2}x) \right) \right],$$

$$v_{52} = \left[\pm 1 + \coth \left(\frac{1}{4} (\mp 3t \pm \sqrt{2x}) \right) \right],$$

6.durum: $A=1, C=1$ için

$$u_{61} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \left[-1 + \tanh \left(\frac{1}{4} (-3t + \sqrt{2x}) \right) \right],$$

$$v_{61} = \left[\pm 1 + \tanh \left(\frac{1}{4} (\pm 3t \mp \sqrt{2x}) \right) \right],$$

$$u_{62} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \left[1 + \tanh \left(\frac{1}{4} (3t + \sqrt{2x}) \right) \right],$$

$$v_{62} = \left[\pm 1 \pm \tanh \left(\frac{1}{4} (3t + \sqrt{2x}) \right) \right].$$

KAYNAKLAR DİZİNİ

- [1] Özer, M. N. ve Eser, D., Diferensiyel denklemler ve uygulamaları, Birlik ofset Eskişehir, 2000.
- [2] Koca, K., Kısmi türevli denklemler, Eğitim ve Gündüz yayıncılık, Ankara, 2001.
- [3] Ablowitz, M. J. ve Segur, H., Solitons and inverse scattering transform, SIAM, Philadelphia, 1981.
- [4] Ablowitz, M. J. ve Clarkson, P. A., Solitons, nonlinear evolutions and iverse scattering transform, Cambridge, Cambridge University Pres, 1991.
- [5] Irk, D., Bazı Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemlerinin B-spline Sonlu Elemanlar Çözümleri, Doktora tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, 2007.
- [6] Wazwaz, A.M., The tanh-coth method for solitons and kink solutions for nonlinear parabolic equations, Applied Mathematics and Computation, **188**, 1467-1475, 2007.
- [7] Bekir, A., Çevikel, A.C., Solitary wave solutions of two nonlinear physical models by tanh-coth method, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **14**, 1804-1809, 2009.
- [8] Sierra, C.A.G., Salas, A.H., The generalized tanh-coth method to special types of the fifth-order KdV equation, Applied Mathematics and Computation, **203**, 873-880, 2008.
- [9] Wazwaz, A.M., The Hirota's direct method and the tanh-coth method for multiple-soliton solutions of the Sawada-Kotera-Ito seventh-order equation, Applied Mathematics and Computation, **199**, 133-138, 2008.
- [10] Wazwaz, A.M., Solitary wave solutions of the generalized shallow water wave (GSWW) equation by Hirota's method, tanh-coth method and Exp-function method Applied Mathematics and Computation, **202**, 275-286, 2008.
- [11] Wazwaz, A. M., The extended tanh method for abundant solitary wave solutions of nonlinear wave equations, Applied Mathematics and Computation, **187**, 1131-1142, 2006.
- [12] Wazwaz, A.M., The tanh-coth method combined with the Riccati equation for solving the KdV equation, Arab Journal of Mathematics and Mathematical Analysis, **1**, 27-34, 2007.
- [13] Bekir, A., The tanh-coth method combined with the Riccati equation for solving nonlinear equation, Chaos, Solitons & Fractals, **40**, 1467-1474, 2009.
- [14] Hirota, R., Ohta, Y., Hierarchies of Coupled Soliton Equations. I, J. Phys. Soc. Japan, **60**, 798-809, 1991.
- [15] Bekir, A., The tanh-coth method combined with the Riccati equation for solving nonlinear coupled equation in mathematical physics, (incelemede)

KAYNAKLAR DİZİNİ (devamı)

- [16] Alabdullatif, M., Abdusalam, H.A., New exact travelling wave solutions for some famous nonlinear partial differential equations using the improved tanh-function method, *International Journal of Computer Mathematics*, **83**, 741 – 751, 2006.
- [17] Kupershmidt, B., Mathematics of dispersive water wave, *Communications in Mathematics and Physics*, **99**, 51, 1985.
- [18] Zha, Z., Mu, W. and Xu, T., *Mathematica Applicata*, **9**, 15, 1996.
- [19] Abrahams, E. and Tsuneto, T., Time variation of the Ginzburg–Landau order parameter. *Physics Review*, **152**, 416, 1966.
- [20] Gu, Y. and Guo, B., *Journal of Applied Science*, **17**, 337, 1999.