HOMOTOPİ PERTURBASYON METODU İLE

İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Yusuf ŞEBER

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Mayıs-2009

HOMOTOPİ PERTURBASYON METODU İLE
İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Yusuf ŞEBER

Dumlupınar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Doç. Dr. Elçin YUSUFOĞLU

Mayıs-2009

KABUL VE ONAY SAYFASI

Yusuf ŞEBER’in YÜKSEK LİSANS tezi olarak HOMOTOPİ PERTURBASYON METODU İLE İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

…../…../ 2009
(Sınav tarihi)

Üye : Prof. Dr. Gonca ONARGAN

Üye : Doç. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU

Üye : Doç. Dr. Elçin YUSUFOĞLU (Danışman)

Fen Bilimleri Enstitüsün Yönetim Kurulu'nun ....../...../..... gün ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

. Prof. Dr. Atalay KÜÇÜKBURSA

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

HOMOTOPİ PERTURBASYON METODU İLE İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Yusuf ŞEBER
Matematik Yüksek Lisans Tezi, 2009
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Elçin YUSUFOĞLU

ÖZET

Mühendislik ve fizik problemlerinde karşılaşılan integral denklemlerin ve integral denklem sistemlerinin oldukça fazla çeşidine ve varyasyonuna rastlamak mümkündür. Bu denklemlerin çözümü için bir çok yöntem geliştirilmiştir.

Bu tezde bazı integral denklem çeşitlerinin çözümü için, kullanışlı ve pratik bir yöntem olan Homotopi Perturbasyon Metodunun ve Modifiye Homotopi Perturbasyon Metodunun uygulaması incelenecektir. Ayrıca matematik programı Maple ile de bazı örneklerin çözümleri verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İntegral Denklem, Homotopi Perturbasyon Metodu, Modifiye Homotopi Perturbasyon Metodunu

HOMOTOPİ PERTURBASYON METODU İLE İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Yusuf ŞEBER
Mathematics Master's Thesis, 2009
Supervisor: Doç. Dr. Elçin YUSUFOĞLU

SUMMARY

Integral equations encountered in engineering and physics problems and integral equations rather than on the kind of system to coincide with and variations are possible. This equation was developed to solve a lot of ways.

This thesis for the solution of some kind integral equations, which are useful and practical method and the modified Homotopi Perturbasyon Methods of application will be reviewed Homotopi Perturbasyon Methods. Moreover, some examples of the mathematics program, solutions are given by Maple.

Key Words: Integral Equation, Homotopy Perturbation Method, Modified Homotopy Perturbation Method

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının gerçekleşmesinde, sahip olduğu bilgi birikimini benimle paylaşıp, bana yol gösteren ve katkılarıyla tezin bugünlere gelmesini sağlayan danışmanım Doç. Dr. Elçin YUSUFOĞLU 'a, çok değerli arkadaşım Yrd. Doç. Dr.Eyyüp GÜLBANDILAR sonsuz şükran ve saygılarımı sunar, çalışmalarım sırasında değerli destek ve fedakârlıklarını esirgemeyen eşim Şengül ŞEBER 'e teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\forall$	Her
$\exists$	Varlık, Var olmak
$\Rightarrow$	İse
$\Leftrightarrow$	Gerek ve yeter koşul
$\in$	Eleman
$\notin$	Eleman değil
$\subset$	Alt küme
$=$	Eşit
$\neq$	Eşit değil
$X \times Y$	X ile Y nin kartezyen çarpımı
$f: X \to Y$	f X den Y bir fonksiyon
$\|f\|$	f fonksiyonun normu
$\lvert f \rvert$	f fonksiyonun mutlak değeri
$boyX$	X vektör uzayının boyutu
$infK$	K nın en büyük alt sınırı
$supK$	K nın en küçük üst sınırı
$X \oplus Y$	X ve Y uzaylarının direkt toplamı
$X^{\perp}$	X in ortagonal tümleyeni
$C[a,b]$	$[a,b]$üzerinde sürekli fonksiyonlar sınıfı
$L_2[a,b]$	$[a,b]$ üzerinde karesi ile integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı

1. GİRİŞ

İntegral denklemler için genel bir tanım vermek mümkün olmamakla birlikte kabaca bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu denklemler olarak tanımlanabilir. Bu tanım integral denklemlerin tüm çeşitlerini kapsar nitelikte bir teori oluşturmamızı sağlamamaktadır. Bu nedenle integral denklemler ayrı ayrı çeşitler olarak incelenmektedir.

İntegral denklemlerle ilgili çalışmalar ilk olarak 19.yüzyılda başlamıştır. İlk olarak 1823 yılında ABEL ‘in mekanik problemlerini incelediği sıralarda integral denklemlere rastkadığı bilinmektedir. Fakat integral denklem deyimi Du Bois REYMOND ‘un (1888) ‘de yayınladığı makalesinde kullandığı anlaşılmaktadır[1].

İntegral denklemler konusu diferensiyel denklemler, operatörler teorisi gibi matematik konularıyla iç içe incelenmektedir. Bir çok denklem adi ve kısmi diferensiyel denklem olarak ifade edilebilir. Ayrıca matematiksel fizik ve uygulamalı matematikte bir çok alanda integral denklemler rol oynamaktadır. İntegral denklemlerin incelenmesi sırasında lineer cebir ve fonksiyonel analiz konularının da yer aldığı göze çarpmaktadır. Örneğin lineer integral denklemlerin konusu içerisinde görülen özvektör,öz fonksiyon ve vektör uzayları kavramları aynı zamanda lineer cebirin de temel kavramlarındandır[2].

İntegral denklemlere çok çeşitli şekillerde rastlamak mümkündür. Örneğin, hem bilinmeyen fonksiyonun türevi, hem de integral işareti altında bulunduğu denklemlere integro-diferensiyel denklem adı verilmektedir. Bu çeşitlilik integral denklemlerin çözümünde genel bir çözümün bulunmasını zorlaştırmaktadır. Bu nedenle araştırmalar her bir tür integral denklem için ayrı ayrı çözüm yöntemleri geliştirme şeklinde yürütülmektedir.

Bu tezde integral denklemlerin homotopi perturbaston metodu ile çözümü araştırılmaktadır. İntegral denklemlerin çözümünü oldukça kolaylaştıran bu yöntem Ji-Huan HE tarafından geliştirilmiştir. Ayrıca yöntemi bir basamak daha geliştirerek modifiye homotopi perturbasyon metodu ile de çözümler araştırılmıştır. Metodun integral denklemlere uygulanmasında Maple matematik yazılımı kullanılmıştır.

2. İNTEGRAL DENKLEMLER

2.1. İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması

2.1.1. Fredholm İntegral Denklemleri

λ bir parametre, $f(x)$ ve $K(x,t)$ bilinen fonksiyonlar $u(t)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere,

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.1}$$

$$f(x) = u(x) - \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.2}$$

şeklindeki denklemlere Fredholm integral denklemleri denir. Sırasıyla (2.1) ve (2.2) denklemlerine birinci ve ikinci tip Fredholm integral denklemleri adı verilir. x ve t reel değişkenler olup (a,b) aralığında değerler alırlar. $K(x,t)$ 'ye denklemin çekirdeği adı verilir. $K(x,t)$ çekirdeği (x,t) düzleminin bir $A = \{a \le x \le b, a \le t \le b\}$ karesi üzerinde tanımlanmış olup karesi ile integrallenebilir bir fonksiyondur, yani

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x,t)dxdt = B^2 < +\infty \tag{2.3}$$

sağlanacak şekilde bir B sayısı mevcuttur [2].

Örneğin,

$$\sin(x) = \int_0^1 e^{x-t}u(t)dt$$

denklemi birinci tip Fredholm integral denklemidir ve

$$u(x) = \cos(2x) + \int_0^{2\pi} \sin x \cos t\, u(t)dt$$

denklemi de ikinci tip bir Fredholm integral denklemidir.

2.1.2. Volterra İntegral Denklemleri

λ bir parametre, $f(x)$ ve $K(x,t)$ bilinen fonksiyonlar $u(t)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere,

$$f(x) = \int_a^x K(x,t)u(t)dt \tag{2.4}$$

$$f(x) = u(x) - \int_a^x K(x,t)u(t)dt \qquad (2.5)$$

şeklindeki denklemlere Volterra integral denklemleri denir. Sırasıyla (2.4) ve (2.5) denklemlerine sırasıyla birinci ve ikinci tip Volterra integral denklemleri adı verilir. Volterra integral denklemlerinin Fredholm integral denklemlerinden tek farkı integral üst sınırının değişken olmasıdır[2].

Örneğin,

$$e^{x^2/2} - 1 = \int_0^x \sin(x-t)u(t)dt$$

denklemi birinci tip Volterra integral denklemidir ve

$$u(x) = \cos(2x) + \int_0^x sinxcostu(t)dt$$

denklemi de ikinci tip bir Volterra integral denklemidir.

2.1.3. Homojen ve Homojen Olmayan İntegral Denklemler

İntegral denklemlerde homojen ve homojen olmayan denklemleri birbirinden ayırmak için şu 2.tip Fredholm integral denklemini göz önünde bulunduralım,

$$f(x) = u(x) - \int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (2.6)$$

$f(x)$ bilinen fonksiyonunun $f(x) = 0$ (veya hemen hemen $\forall x \in [a,b]$ için $f(x) = 0$) olması denklemin homojen integral denklem olarak sınıflandırılmasını sağlar[3]. $f(x) \neq 0$ ise bu durumda denkleme homojen olmayan integral denklem adı verilir.

2.1.4. Lineer ve Lineer olmayan İntegral Denklemler

İntegral denklemlerde lineerlik denklemde bulunan bilinmeyen $u(t)$ ‘in derecesinin bir olup olmaması ile ilgilidir.

İkinci tip homojen lineer Fredholm integral denklemi $f(x) = 0$ olmak üzere,

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (2.9)$$

şeklindedir. Örneğin,

$$u(x) = \int_0^\pi \sin(x-t)u(t)dt$$

denklemi ikinci tip homojen lineer Fredholm integral denklemidir.

Homojen olmayan ikinci tip Fredholm integral denklemi $f(x) \neq 0$ için,

$$u(x) - f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.10}$$

şeklindedir. Örneğin,

$$u(x) = \cos x + \int_0^{\pi} \sin(x-t)u(t)dt$$

şeklindedir.

İkinci tip homojen lineer Volterra integral denklemi $f(x) = 0$ olmak üzere,

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt \tag{2.11}$$

şeklindedir. Örneğin,

$$u(x) = \int_0^x e^{x-t}u(t)dt$$

denklemi ikinci tip homojen lineer Volterra integral denklemidir.

Homojen olmayan ikinci tip Volterra integral denklemi $f(x) \neq 0$ için,

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt \tag{2.12}$$

şeklindedir. Örneğin,

$$u(x) = e^x + \int_0^x e^{x-t}u(t)dt$$

şeklindedir.

Birinci tip lineer Fredholm integral denklemi ,

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.13}$$

şeklindedir. Örneğin,

$$e^x = \int_0^1 (x-t)u(t)dt$$

denklemi birinci tip homojen lineer Fredholm integral denklemidir.

Birinci tip lineer Volterra integral denklemi,

$$f(x) = \int_a^x K(x,t)u(t)dt \tag{2.14}$$

şeklindedir. Örneğin,

$$\sin x = \int_0^x e^{x-t}u(t)dt$$

denklemi birinci tip homojen lineer Volterra integral denklemidir.

Diğer yandan lineer olmayan Fredholm integral denklemi genel olarak,

$$f(x) = \int_a^b K(x,t,u(t))dt \tag{2.15}$$

şeklinde gösterilebilir. p sayısı $p > 0$ ve $p \neq 1$ olmak üzere,

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)[u(t)]^p dt$$

şeklindeki integral denklemler lineer olmayan denklemlerdir[3].

Ayrıca lineer olmayan Volterra integral denklemi genel olarak,

$$f(x) = \int_a^x K(x,t,u(t))dt$$

şeklinde gösterilebilir.

$$f(x) = \int_a^x K(x,t)\sin(u(t))dt$$

şeklindeki denklem lineer olmayan Volterra integral denklemidir [3].

2.2. İntegral .Denklemlerle İlgili Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.2.1: F cismi üzerinde tanımlı lineer uzay X olsun. X üzerinde $+: X \times X \to X$ toplama ve $.: F \times X \to X$ skalerle çarpma işlemleri tanımlı olsun, bu durumda X uzayı şu özellikleri sağlar,

1) X toplama işlemine göre değişmeli bir gruptur.

$f, g, h \in X$ olmak üzere,

(a) $\forall f, g \in X$ için $f+g \in X$ (kapalılık özelliği).

(b) $\forall f, g, h \in X$ için $(f+g)+h = f+(g+h)$ (birleşme özelliği).

(c) $\forall f \in X$ için $f+0 = 0+f$ olacak şekilde $0 \in X$ vardır (birim eleman).

(d) $\forall f \in X$ için $f+(-f) = (-f)+f = 0$ olacak şekilde $(-f) \in X$ vardır (ters eleman).

(e) $\forall f, g \in X$ için $f+g = g+f$ dir (değişme özelliği).

2) Skalerle çarpma işlemine göre kapalıdır.

(a) $\forall f \in X$ için $1.f = f$

(b) $\forall f \in X \; ve \; \forall \alpha \in F$ için $\alpha f \in X$

(c) $\forall f \in X \; ve \; \forall \alpha, \beta \in F$ için $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$

3) Dağılma özelliği sağlanır.

(a) $\forall f, g \in X \; ve \; \forall \alpha \in F$ için $\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$

(b) $\forall f \in X \; ve \; \forall \alpha, \beta \in F$ için $(\alpha+\beta)f = \alpha f + \beta f$

Tanım 2.2.2: Eğer X lineer uzayı üzerinde bir iç çarpım tanımlı ise, bu uzaya iç çarpım uzayı adı verilir. f ve g , X de birer kompleks sayı olmak üzere (f,g) olarak belirtilsin. Bu durumda iç çarpım şu özellikleri sağlar,

1) $(f,g) = (g,f)$

2) $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f,h) + \beta(g,h)$

3) $(f,f) \geq 0$ ve $(f,f) = 0$ ancak ve ancak $f = 0$ için

Not: (f,f)reel ise 1.özellikden $(f,f) = (f,f)$ dir. $(f,f)^{1/2} = \|f\|$ ifadesine f in normu adı verilir[2].

Tanım 2.2.3: X bir K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$\|.\|: X \to R_+, x \to \|x\|$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için,

(1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|;$

(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $(üçgen\ eşitsizliği)$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adı verilir ve bu durumda $(X, \|.\|)$ ikilisine bir normlu lineer uzay adı verilir.

Tanım 2.2.4 (Cauchy Dizisi):$(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve X in içinde bir dizi (f_n) olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > n_\varepsilon$ olduğunda $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir $n_\varepsilon \in N$ sayısı varsa (f_n) dizisine X de bir Cauchy dizisi adı verilir.

Bu tanımı daha kısa olarak şöyle yaza biliriz,

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in N \ni \forall m, n > n_\varepsilon \; için \; \|f_n - f_m\| < \varepsilon \Leftrightarrow (f_n)$

dizisi X de bir Cauchy dizisidir

Tanım 2.2.5 : H bir iç çarpım uzayı ve $\{f_n\}$ de H da bir Cauchy dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için aşağıdaki özelliği sağlayan bir $N(\varepsilon)$ varsa,

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon \text{ için } n, m > N(\varepsilon)$$

başka bir ifadeyle

$$\lim_{n,m \to \infty} \|f_n - f_m\| = 0$$

yani, eğer H içerisindeki her Cauchy dizisi H da bir elemana yakınsıyorsa H ya Hilbert uzayı adı verilir.

Böyle bir Cauchy dizisi yakınsak ise tek bir elemana yakınsamalıdır. Varsayalım ki,

$$\lim_{n_k \to \infty} f_{n_k} = g$$

$$\lim_{m_k \to \infty} f_{m_k} = h$$

olacak şekilde $\{f_n\}$ in iki alt dizisini alalım ve her biri farklı elemanlara yakınsasın, sonra

$$\|g - h\| = \left\|g - f_{n_k} + f_{n_k} - f_{m_k} + f_{m_k} - h\right\|$$

$$\leq \left\|g - f_{n_k}\right\| + \left\|f_{n_k} - f_{m_k}\right\| + \left\|f_{m_k} - h\right\|$$

yeterince büyük $n_k \; ve \; m_k$ için,

$\left\|g - f_{n_k}\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\|f_{n_k} - f_{m_k}\| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\|f_{m_k} - h\| < \frac{\varepsilon}{3}$

buradan

$\|g - h\| < \varepsilon$

g ve h , keyfi n_k, m_k ve ε dan bağımsız olduğundan, görülür ki,

$$\|g - h\| = 0$$

buradan da $g = h$ elde edilir[2].

2.2.1. Fredholm Alternatifi

Fredholm alternatifi bazı tip integral denklemlerin çözülebilirliğine karar vermek için kullanılan temel bir araçtır. Sonlu boyutlu iç çarpım uzayı X ve boyutu da n olsun. L de X üzerinde tanımlı operatör olsun ve $n \times n$ boyutlu bir matris ve L nin adjoint matriside L^*olarak verilsin.

(ϕ, ψ) , X uzayında tanımlı bir iç çarpım olsun, burada ϕ ve ψ X de keyfi vektörlerdir. L ve L^* arasında şu şekilde bir ilişki vardır,

$(L\phi, \psi) = (\phi, L^*\psi)$

L nin sıfır uzayı $N(L)$ şu şekilde tanımlanır,

$N(L) = \{\phi | L\phi = 0\}$

kolayca görülebilir ki $N(L)$ aslında X in bir alt uzayıdır. $v(L)$ ile $N(L)$ nin boyutu gösterilsin. $R(L)$ ile de L nin derecesi belirtilsin,

$R(L) = \{\phi | \phi = L\psi, herhangi\ \psi \in X\}$

olarak gösterilebilir, $R(L)$ nin de X in bir alt uzayı olduğu açıktır, boyutu da $\rho(L)$ ile gösterilsin[2].

Lemma 2.2.1: $v(L) + \rho(L) \leq n = boyX$

İspat: X in bir bazı $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n$ olsun. $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_\nu$ de $N(L)$ nin bir bazı olsun. Herhangi bir $\phi \in X$ için

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i$$

ifadesi için uygun bir skaler kümesi α_i olsun. Buradan

$$L\phi = \sum_{i=\nu+1}^{n} \alpha_i L\phi_i$$

dir, çünkü $1 \le i \le \nu(L)$ için $L\phi_i = 0$ olur. O halde $L\phi$, $R(L)$ nin genel bir elemanı ve en fazla $n - \nu(L)$ lineer bağımsız vektörün lineer kombinasyonu şeklindedir, bu nedenle

$$\rho(L) \le n - \nu(L)$$

olur[2].

Lemma 2.2.2: $\nu(L) + \rho(L^*) = n$

İspat: $R(L^*)$ ın ortagonal tümleyeni $R(L^*)^\perp$ ile gösterilsin. İlk olarak $N(L) \subset R(L^*)^\perp$ olduğunu gösterelim. $\phi \in N(L)$ olsun,

$$0 = (L\phi, \psi) = (\phi, L^*\psi) \quad her\ \psi\ için$$

ϕ her $L^*\psi$ ile ortagonal olduğundan

$$\phi \in R(L^*)^\perp$$

dır. ϕ , $N(L)$ de keyfi bir eleman olduğundan

$$N(L) \subset R(L^*)^\perp$$

bulunur.

Şimdi de tersini gösterelim $\phi \in R(L^*)^\perp$ olsun,

$$0 = (\phi, L^*\psi) = (L\phi, \psi) \quad her\ \psi\ için$$

yukarıdaki eşitlikten görülür ki kesinlikle $\phi \in N(L)$ dir, buradan

$$R(L^*)^\perp \subset N(L)$$

bu şekilde $N(L) = R(L^*)^{\perp}$ sonucuna varılır. Bu sonuçtan $N(L)$ ve $R(L^*)$ nin X in tümleyen alt uzayları olduğu sonucuna varılabilir, yani

$$X = N(L) \oplus R(L^*)$$

olur, bu şekilde X in elemanının $N(L)$ nin bir elemanı ve $R(L^*)$ nin bir elemanı şeklinde ayrıştırılabileceği anlamına gelmektedir. Buradan

$$v(L) + \rho(L^*) = n$$

olduğu görülür[2].

Lemma 2.2.3: $v(L) = v(L^*)$

İspat: Sonlu boyutlu uzayın iki kere adjointi $(L^{**}) = L$ şeklinde olsun, Lemma 2.2.1 ve Lemma 2.2.2 den,

$$v(L^*) \leq n - \rho(L^*) = v(L)$$

buradan

$$v(L) = v(L^{**}) \leq v(L^*) \leq v(L)$$

olur , o halde $v(L) = v(L^*)$ dır[2].

Sonuç 2.2.1: $v(L) + \rho(L) = n$

İspat: Lemma 2.2.2 ve Lemma 2.2.3 den

$$n = v(L) + \rho(L^*) = v(L) + \rho(L)$$

bu da gösterir ki Lemma 2.2.1 deki eşitsizlik aslında eşitliktir. Bununla birlikte $N(L)$ ve $R(L)$,$N(L)$ ve $R(L^*)$ gibi tümleyen alt uzaylar değildirler. Bu durumda L nin self-adjoint yani $L = L^*$ olduğu söylenebilir[2].

Teorem 2.2.1 (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği): $(X, \langle .,. \rangle)$ bir iç çarpım uzayı ise $\forall x, y \in X$ için,

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

eşitsizliği vardır.

İspat:. $x = \theta$ veya $y = \theta$ ise eşitsizlik doğru olduğundan, $x \neq \theta$ ve $y \neq \theta$ olduğunu kabul edelim. $\forall \alpha \in K$ için iç çarpımın özellikleri kullanılarak,

$$0 \leq (x + \alpha y, x + \alpha y) = (x, x) + \bar{\alpha}(x, y) + \alpha(y, x) + |\alpha|^2 (y, y)$$

bulunur. Burada $\forall z \in C$ için $z\bar{z} = |z|^2$ ve $y \neq \theta$ olduğu göz önüne alınarak $\alpha = -\frac{(x,y)}{(y,y)}$ alınırsa

$$0 \leq (x, x) + -2\frac{\overline{(x, y)}}{(y, y)}(x, y) + \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} = (x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)}$$

yazılabilir. Buradan $|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$ eşitsizliğinin doğru olduğu ispatlanır.

$(X, (.,.))$ bir iç çarpım uzayı ve $x \in X$ olsun. x vektörünün normu

$$\|x\| = (x, x)^{1/2}$$

olarak tanımlanır. (2.2.3) tanımdan normun (1) ve (2) özelliklerini sağladığı görülür, üçgen eşitsizliğinin sağlandığı ise Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden görülür. Böylece $(X, (.,.))$ bir iç çarpım uzayı $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ normu ile bir normlu vektör uzayı olur ve bu durumda Cauchy-Schwarz eşitsizliği de

$$|(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\|$$

biçimini alır.

Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliği

$$\left|\int_a^b x(t)y(t)\,dt\right| \leq \left\{\int_a^b |x(t)|^2 dt \int_a^b |y(t)|^2 dt\right\}^{1/2}$$

Teorem 2.2.2: (Fredholm Alternatifi)

$$L\phi = f$$

denklemi ancak ve ancak $\nu(L) = 0$ ise, her f için tek bir çözüme sahiptir. Eğer $\nu(L) > 0$ ise, yukarıdaki denklem sadece $N(L^*)$ sıfır uzayına ortagonal f ler için çözüme sahiptir[2].

İspat: Eğer $\nu(L) = 0$ ise Sonuç 2.2.1 den $\rho(L) = n$ olduğu görülür, buradan $R(L)$ nin boyu tüm uzay kadardır. Bu durumda kesinlikle f, $R(L)$ ye aittir ve herhangi bir ϕ için $L\phi$ ile temsil edilebilir. Eğer ϕ_1 ve ϕ_2 gibi iki çözüm olsaydı, $L(\phi_1 - \phi_2) = 0$ olurdu, buna karşılık $\nu(L) = 0$ olduğundan $\phi_1 = \phi_2$ olduğu görülür.

Eğer $\nu(L) > 0$ ise, Lemma 2.2.2 den $L\phi = f$ denkleminin sadece $f \in R(L) = N^{\perp}(L^*)$ için çözümü olacaktır. Bu yüzden sadece $N(L^*)$ a ortagonal f ler için çözüm mevcuttur[2].

Tanım 2.2.6 : (**İntegral Operatörü)**

Eğer bir K operatörü aşağıdaki özelliğe sahip ise, bu durumdaki operatöre lineer operatör adı verilir.

$K(\alpha f + \beta g) = \alpha K f + \beta K g$

lineer operatör, $f \in L_2[0,1]$ ve $K(x,y)$, x, y için sürekli olmak üzere,

$$K f = \int_0^1 K(x,y) f(y) dy$$

şeklinde ise bu operatöre, lineer operatöre integral operatörü adı verilir[2].

Not: İntegral operatörleri tıpkı sonlu boyutlu uzaylardaki matrislerde olduğu gibi adjointlere sahiptir. Bu şekildeki adjointlerin temel özelliği şu bağıntı ile tanımlanır. Bu uzaydaki her f , g için,

$(Kf, g) = (f, K^* g)$

dir.

$$(Kf, g) = \int_a^b \int_a^b K(x,y) f(y) dy \overline{g(x)} dx$$

ve integral kuralını değiştirerek

$$(Kf, g) = \int_a^b f(y) \int_a^b \overline{\overline{K(x,y)} g(x)} dx dy$$

buluruz. Eğer

$$K^* g = \int_a^b \overline{K(x,y)} g(x) dx$$

olarak tanımlanırsa $(Kf,g) = (f,K^*g)$ bağıntısı sağlanmış olur. $K^*g = \int_a^b \overline{K(x,y)}g(x)dx$ ifadesinden görülür ki bir integral operatörün adjointide yine bir integral operatörüdür. Bu durum basitçe K çekirdeği ile de ilişkilendirilebilir. Açıkça,

$$K(x,y) = \overline{K(y,x)}$$

olduğunda, $K = K^*$ elde ederiz ya da eşdeğer olarak,

$$(Kf,g) = (f,Kg)$$

dir. Ve bu özelliğe sahip integral operatörüne self-adjoint adı verilir. Sınırlı self-adjoint bir integral operatörü $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$ şeklide çekirdeğe sahiptir[2].

Tanım 2.2.7 : Eğer bir K operatörü herhangibir M sabiti ve $\forall f \in H$ için,

$$\|Kf\| \leq M\|f\|$$

özelliğini sağlıyorsa sınırlıdır denir. Tüm M lerin en büyük alt sınırına K nın normu adı verilir ve $\|K\|$ ile gösterilir. Yani,

$$\|K\| = sup\frac{\|Kf\|}{\|f\|}$$

$f \neq 0$ şeklindedir[2].

Teorem 2.2.3 : Eğer K_1 ve K_2 her ikiside sınırlı operatörler ise, bunların çarpımı da sınırlıdır.

İspat :

$$\|K_1 f\| \leq M_1\|f\|$$

$$\|K_2 f\| \leq M_2\|f\|$$

buradan

$$\|K_1K_2f\| \leq M_1\|K_2f\| \leq M_1M_2\|f\|$$

olur[2].

Teorem 2.2.4 : $f(x) \in L_2[a,b]$ ve $K(x,y) \in C[a \leq x,y \leq b]$ için,

$$Kf = \int_a^b K(x,y)f(y)dy$$

şeklinde tanımlanan operatör sınırlıdır[2].

İspat: $K(x,y)$ kapalı ve sınırlı bir kümede sürekli olduğundan, sınırlı olmalıdır. Buradan, eğer $|K(x,y)| \leq M$ ise,

$$|Kf| = \left|\int_a^b K(x,y)f(y)dy\right|$$

$$\leq \int_a^b |K(x,y)|\,|f(y)|dy$$

$$\leq M\int_a^b |f(y)|dy$$

$$\leq M\int_a^b 1|f(y)|dy$$

Caucyh- Bunyakovsky eşitsizliğinden

$$\leq M\left(\int_a^b 1^2 dy\right)^{1/2}\left(\int_a^b |f(y)|^2 dy\right)^{1/2}$$

$$\leq M\sqrt{(b-a)^2}\,\|f\|$$

$$\leq M(b-a)\|f\|$$

ve buradan

$$\|Kf\| = \left[\int_a^b |Kf|^2 dx\right]^{1/2} \leq M(b-a)\|f\|$$

sonuç olarak

$$\|K\| \leq M(b-a)$$

elde edilir. O halde K operatörü sınırlıdır.

Teorem 2.2.5: $f(x) \in L_2[a,b]$ ve $K(x,y) \in L_2[a \leq x,y \leq b]$ olmak üzere,

$$Kf = \int_a^b K(x,y)f(y)dy$$

olarak tanımlanan operatörü sınırlıdır[2].

İspat:

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dxdy = M^2 < \infty$$

olsun, Cauchy- Bunyakovsky eşitsizliğinden

$$\|Kf\| = \left\{ \int_a^b \left| \int_a^b K(x,t) f(t) dt \right|^2 dx \right\}^{1/2}$$

$$\leq \left\{ \int_a^b \left(\left[\int_a^b |K(x,t)|^2 dt \int_a^b |f(t)|^2 dt \right]^{1/2} \right)^2 dx \right\}^{1/2}$$

$$= \left\{ \int_a^b \left(\left[\left(\int_a^b |K(x,t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \right] \right)^2 dx \right\}^{1/2}$$

$$= \left\{ \int_a^b \left[\left(\int_a^b |K(x,t)|^2 dt \right)^{1/2} \right]^2 \|f\|^2 dx \right\}^{1/2}$$

$$= \left\{ \int_a^b \left(\int_a^b |K(x,t)|^2 dt \right) dx \|f\|^2 \right\}^{1/2}$$

$$= \left\{ \int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dt\, dx \right\}^{1/2} \|f\|$$

$$= M\|f\|$$

dolayısıyla

$$\|Kf\| \leq M\|f\|$$

olur ki bu şekilde teorem ispatlanmış olur.

Tanım 2.2.8 : H bir Hilbert uzayı ve T , H da sınırlı bir operatör olsun. (T lineer operatör olmayabilir). $\forall f_1, f_2 \in H$ olmak üzere,

$$\|Tf_1 - Tf_2\| \leq \alpha \|f_1 - f_2\|$$

olacak şekilde pozitif bir $\alpha < 1$ sabiti varsa, T ye daralma operatörüdür denir [2].

Teorem 2.2.6 : T , H da bir daralma operatörü olsun,

$Tf = f$

denkleminin H da bir tek çözümü vardır. Bu çözüme T nin sabit noktası adı verilir.

İspat : Varsayalım ki f ve g gibi iki sabit nokta bulunsun,

$Tf = f$

$Tg = g$

buradan,

$\|f - g\| = \|Tf - Tg\| \leq \alpha\|f - g\|$

$(1 - \alpha)\|f - g\| \leq 0$

olur, $\|f - g\|$ negatif olmadığından $\|f - g\| = 0$ dır. Buradan $f = g$ olduğu görülür. Bu durumda denklemin çözümü varsa bir tek olmalıdır.

Denklemin çözümünün olduğunu göstermek için iterasyon kuralı oluşturacağız. Herhangi bir f_0 seçelim ve $\{f_n\}$ dizisini şu şekilde tanımlayalım,

$f_{n+1} = Tf_n \qquad n = 0,1,2,\ldots$

İlk olarak bu dizinin Cauchy dizisi olduğunu ve limitinin de aslında denklemin çözümü olduğunu göstermeliyiz. Aslında bir Cauchy dizisinin Hilbert uzayında bir tek limitinin olması gerektiğinden limit vardır. Bu limit f_0 ın seçiminden bağımsız olacağından, limit denkleminin tek çözümü olmalıdır.

$\|f_{n+1} - f_n\| = \|Tf_n - Tf_{n-1}\| \leq \alpha\|f_n - f_{n-1}\|$

yukarıdaki işlen arka arkaya yapılırsa

$\|f_{n+1} - f_n\| \leq \alpha\|f_n - f_{n-1}\| \leq \alpha^2\|f_{n-1} - f_{n-2}\| \leq \cdots \leq \alpha^n\|f_1 - f_0\|$

elde edilir.

Daha genel olarak, $n < m$ ise,

$\|f_n - f_m\| = \|(f_n - f_{n-1}) + (f_{n-1} - f_{n-2}) + \cdots + (f_{m+1} - f_m)\|$

$$\leq \|(f_n - f_{n-1})\| + \|f_{n-1} - f_{n-2}\| + \cdots + \|f_{m+1} - f_m\|$$

$$\leq (\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \cdots + \alpha^m)\|f_1 - f_0\|$$

$$\leq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots)\|f_1 - f_0\| = \frac{\alpha^m}{1-\alpha}\|f_1 - f_0\|$$

buradan,

$$\lim_{n,m\to\infty}\|f_n - f_m\| = 0$$

elde edilir. Bu şekilde $\{f_n\}$ in Cauchy dizisi olduğu görülür ve bu dizinin limiti f olarak gösterilir.

Şimdi f limitinin denklemin çözümü olduğunu gösterelim. T operatörü sürekli olduğundan,

$$Tf = T\left(\lim f_n\right) = \lim Tf_n = \lim f_{n+1} = f$$

ve buradan $Tf = f$ olduğu görülür[2].

Teorem 2.2.7 : T , H da bir operatör ve T nin $n.$ dereceden kuvveti T^n bir daralma operatörü olsun.

$$Tf = f$$

denkleminin H da tek çözümü f dir.

İspat: 2.2.6 teoreminden

$$T^n f = f$$

denkleminin tek çözümü olduğunu gösterebiliriz. Aslında keyfi başlangıç fonksiyonu için

$$\lim_{k\to\infty} T^{kn} f_0 = f$$

olduğunu bularak çözümü elde edebiliriz. $f_0 = Tf$ alınarak,

$$\lim_{k\to\infty} T^{kn} Tf = f$$

fakat $T^n f = f$ olduğundan, aynı zamanda $T^{kn} f = f$ olur, buradan

$$\lim_{k\to\infty} T^{kn}Tf = \lim_{k\to\infty} TT^{kn} = \lim_{k\to\infty} T\,f = Tf$$

buradan $Tf = f$ bulunur.

Bu sonucun tek olduğunu göstermek için,

$$Tf = f, Tg = g$$

alalım, aynı zamanda,

$$T^n f = f, T^n g = g$$

olacağından ve T^n de daralma operatörü olduğundan bu tek çözüm $f = g$ sabit nokta olacaktır[2].

2.2.2. Temel Varlık Teoremleri

$$\phi - \lambda K\phi = f$$

şeklindeki denklemi göz önünde bulunduralım. Burada f ,H Hilbert uzayında bir eleman ve K aşağıdaki özelliği sağlayan sınırlı bir operatördür,

$$\|K\phi_1 - K\phi_2\| \leq M\|\phi_1 - \phi_2\|$$

uygulamalarda ilgilenilen K operatörü integral operatörü olarak düşünülecektir.

$\phi - \lambda K\phi = f$ ifadesini şu şekilde yeniden yazabiliriz,

$$T\phi = \phi$$

burada

$$T\phi = f + \lambda K\phi$$

eğer $f \neq 0$ ise, T lineer olmayan bir operatördür, fakat K lineerdir[2].

Teorem 2.2.8: $\phi - \lambda K\phi = f$ denkleminin her f için bir tek çözümü vardır ve K operatörü yeterince küçük $|\lambda|$ için sınırlıdır.

İspat: $T\phi = f + \lambda K\phi$ olarak tanımlanan T için, $\|K\phi_1 - K\phi_2\| \leq M\|\phi_1 - \phi_2\|$ şartına uygun olarak,

$$\|T\phi_1 - T\phi_2\| = |\lambda| \|K\phi_1 - K\phi_2\| \leq |\lambda| M \|\phi_1 - \phi_2\|$$

bulunur. $|\lambda| M < 1$ için T daralma operatörüdür. Buradan $T\phi = \phi$ ve buna eşdeğer olarak $\phi - \lambda K\phi = f$,her f için tek çözüme sahiptir[2].

Açıklama 2.2.1: Bu teorem Fredholm integral denklemine uygulanabilir. $f(x)$, $L_2[a,b]$ de ve integral operatörüde sınırlı ise,

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x,y)\phi(y)dy = f(x)$$

sonra, K integral operatörünün sınırlı olduğu durumlar için $K(x,y)$nin koşullarını ele alalım sabit noktanın varlığı teoremi gereğince,

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} T^n f_0(x)$$

sonucu elde edilir, burada $f_0(x)$ keyfi bir başlangıç fonksiyonudur.

$$Tf_0 = f + \lambda K f_0$$

$$T^2 f_0 = T[f + \lambda K f_0] = f + \lambda K f + \lambda^2 K^2 f_0$$

$$\vdots$$

$$T^n f_0 = f + \lambda K f + \lambda^2 K^2 f + \cdots + \lambda^{n-1} K^{n-1} f + \lambda^n K^n f_0$$

ve sonuçta,

$$\phi = f + \lambda K f + \lambda^2 K^2 f + \cdots + \lambda^{n-1} K^{n-1} f + \lambda^n K^n f + \cdots$$

bulunur. Bu prosedür, T nin yeterince küçük $|\lambda|$ için daralma operatörü olması sonucu için de geçerlidir. K^n in anlamını açıklamak gerekirse, K integral operatörü için,

$$Kf(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy$$

$$K^2 f(x) = K\left[\int_a^b K(x,y)f(y)dy\right]$$

$$= \int_a^b K(x,z) \int_a^b K(z,y) f(y)dydz$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b K(x,z)K(z,y)\,dz\right] f(y)dy$$

buradan, K^2 integral operatörünün çekirdeği,

$$\int_a^b K(x,z)K(z,y)\,dz$$

şeklinde elde edilir. Daha genel olarak göstermek gerekirse,

$$K^n f(x) = \int_a^b K_n(x,y) f(y)\,dy$$

olarak gösterilebilir, burada $K_n(x,y)$ ardışık çekirdekleri şu şekildedir,

$$K_n(x,y) = \int_a^b K(x,z)K_{n-1}(z,y)\,dz \quad n = 2,3,\ldots$$

$$K_1(x,y) = K(x,y)$$

benzer biçimde,

$$K_{n+m}(x,y) = \int_a^b K_m(x,z)K_n(z,y)\,dz$$

şeklinde olduğu da söylenebilir[2].

Teorem 2.2.9:

$$\int_a^b \int_a^b |N(x,y)|^2 dxdy = p^2 < \infty$$

olmak üzere

$$\left\| \int_a^b K(x,y,\phi(y))\,dy \right\| \leq M\|\phi(y)\|$$

ve

$$|K(x,y,z_1) - K(x,y,z_2)| \leq N(x,y)|z_1 - z_2|$$

olduğunu varsayalım,

eğer $f(x) \in L_2[a,b]$ ise,

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y, \phi(y))dy = f(x) \tag{2.17}$$

lineer olmayan integral denkleminin $L_2[a,b]$ de $|\lambda|p < 1$ için tek çözümü vardır.

İspat:

$T\phi = f + \lambda K\phi$

operatörünü göz önünde bulunduralım. Burada K operatörü (2.17) de tanımlanan gibidir,

$$\|T\phi_1 - T\phi_2\| = |\lambda| \left\| \int_a^b [K(x,y,\phi_1) - K(x,y,\phi_2)]dy \right\|$$

$$\leq |\lambda| \left\{ \int_a^b \left| \int_a^b [|K(x,y,\phi_1) \quad K(x,y,\phi_2)|]dy \right|^2 dx \right\}^{1/2}$$

$$\leq |\lambda| \left\{ \int_a^b \left[\int_a^b |N(x,y)||\phi_1 - \phi_2|\, dy \right]^2 dx \right\}^{1/2},$$

$$= |\lambda| \left\{ \int_a^b \left[\int_a^b |N(x,y)\phi_1 - \phi_2|\, dy \right]^2 dx \right\}$$

$$= |\lambda| \left\{ \int_a^b \left(\left[\int_a^b |N(x,y)|^2 dy \right]^{1/2} \left[\int_a^b |\phi_1 - \phi_2|^2 dy \right]^{1/2} \right)^2 dx \right\}^{1/2}$$

$$= |\lambda| \left(\int_a^b \int_a^b |N(x,y)|^2 dx dy \right)^{1/2} \|\phi_1 - \phi_2\|$$

$$\leq |\lambda| p \|\phi_1 - \phi_2\|$$

buradan $|\lambda|p < 1$ için T daralma operatörüdür, dolayısıyla sabit noktası vardır. Bu sabit noktada (2.17) denkleminin çözümü olur[2].

Teorem 2.2.10 : $f(x) \in L_2[a,b]$ olsun. ($[0,1]$ sonlu aralığını, genelliği kaybetmeden göz önünde bulunduralım.) ve $K(x,y)$ nin $x, y \in [0,1]$ için sürekli olduğunu ve buradan $|K(x,y)| \leq M$ şeklinde sınırlı olduğunu varsayalım,

$$\phi(x) - \lambda \int_0^x K(x,y)\phi(y)dy = f(x) \tag{2.18}$$

denklemi $\forall f(x), \lambda \in L_2[a,b]$ için $\phi(x)$ şeklinde bir tek çözüme sahiptir.

İspat :

$$T\phi = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,y)\phi(y)dy$$

operatörünü göz önünde bulunduralım. Eğer $T\phi$ nın sabit noktası varsa, bu sabit nokta (2.18) denkleminin çözümüdür. Sabit noktanın varlığını göstermek için, herhangi n için T^n in daralma operatörü olduğunu göstermeliyiz. Teorem 2.2.6 dan T nin bir tek sabit noktası vardır. O halde,

$$T^n\phi = f + \lambda Kf + \lambda^2 K^2 f + \dots + \lambda^{n-1}K^{n-1}f + \lambda^n K^n \phi$$

dir, burada

$$K^n\phi = \int_0^x K_n(x,y)\phi(y)\,dy$$

buradan,

$$\|T^n\phi_1 - T^n\phi_2\| = |\lambda|^n \left\| \int_0^x K_n(x,y)(\phi_1(y) - \phi_2(y))dy \right\|$$

bulunur. $K_n(x,y)$ yi belirtmek için $K_n(x,y) = \int_0^x K(x,z)K_{n-1}(z,y)\,dz \quad n = 2,3,\dots$ ifadesini Volterra çekirdeği için özelleştirirsek,

$$K_1(x,y) = K(x,y)$$

$$K_n(x,y) = \int_y^x K(x,z)K_{n-1}(z,y)\,dz \quad n = 2,3,\dots$$

şeklinde bulunur. $|K_1(x,y)| \leq M$ hipotezinden, tümevarım yöntemini kullanarak,

$$|K_n(x,y)| \leq \frac{M^n(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} \qquad 0 \leq y \leq x$$

$n = 1$ için yukarıdaki ifade doğrudur, eğer n için doğruysa,

$$|K_{n+1}(x,y)| \leq \int_y^x |K(x,z)||K_n(z,y)|\,dz$$

$$\leq \frac{M^{n+1}}{(n-1)!}\int_y^x (z-y)^{n-1}dz$$

$$= \frac{M^{n+1}(x-y)^n}{(n)!}$$

olur, buradan

$$\|T^n\phi_1 - T^n\phi_2\| \leq \frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!}\left\|\int_0^x (\phi_1(y) - \phi_2(y))dy\right\|$$

$$\leq \frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!}\|\phi_1(y) - \phi_2(y)\|$$

olur. Yeterince büyük n için

$$\frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!} < 1$$

olduğundan T^n daralma operatörüdür ve (2.18) denklemi tek çözüme sahiptir[2].

Teorem 2.2.11 : $f(x) \in L_2[0,1]$ için, $K(x,y) \in L_2[0 \leq x, y \leq 1]$ olsun,yani,

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(x,y)|^2 dxdy < \infty$$

bu burumda

$$\phi(x) - \lambda \int_0^x K(x,y)\phi(y)dy = f(x) \qquad (2.19)$$

denklemi her λ için tek çözüme sahiptir.

İspat :

$$A^2(x) = \int_0^x |K(x,y)|^2 dy,\ B^2(y) = \int_y^1 |K(x,y)|^2 dx$$

olarak alalım, hipotezden her ikisi de integrallenebilirdir,

$$\int_0^1 A^2(x)dx \leq N,\ \int_0^1 B^2(y)dy \leq N$$

olacak şekilde N için, $\rho(x)$ i şu şekilde tanımlayalım,

$$\rho(x) = \int_0^x A^2(y)dy \qquad \rho(1) \leq N$$

teorem 2.2.10 dan (2.19) denkleminin yerine eşdeğer olarak,

$$\phi(x) = f(x) + \lambda Kf + \lambda^2 K^2 f + \cdots + \lambda^{n-1}K^{n-1}f + \lambda^n K^n \phi \qquad (2.20)$$

denklemini yazalım, burada,

$$K^n\phi = \int_0^x K_n(x,y)\phi(y)\,dy$$

dir. $\|K^n\|$ i hesaplamak için $K_n(x,y)$ incelenirse,

$$K_2(x,y) = \int_y^x K(x,z)K(z,y)\,dz$$

ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden,

$$|K_2(x,y)|^2 \le \int_y^x |K(x,z)|^2 dz \int_y^x |K(z,y)|^2 dz \le A^2(x)B^2(y)$$

bulunur. Benzer olarak,

$$K_3(x,y) = \int_y^x K(x,z)K_2(z,y)\,dy$$

buradan,

$$|K_3(x,y)|^2 \le \int_y^x |K(x,z)|^2 dz \int_y^x |K_2(z,y)|^2 dz$$

$$\le A^2(x)B^2(y)\int_y^x A^2(z)dz = A^2(x)B^2(y)[\rho(x) - \rho(y)]$$

ardından tümevarımsal olarak gösterilebilir ki,

$$|K_n(x,y)|^2 \le A^2(x)B^2(y)\frac{[\rho(x) - \rho(y)]^{n-2}}{(n-2)!} \qquad n \ge 2$$

dır.(2.20) ifadesi yeniden şu şekilde yazılabilir,

$$\phi = T^n\phi, \qquad burada\, T\phi = f + \lambda K\phi$$

ve sonra yeterince büyük n için T^n in daralma operatörü olduğu görülür.

$$|T^n\phi_1 - T^n\phi_2|^2 = \left|\int_0^x K_n(x,y)[\phi_1(y) - \phi_2(y)]dy\right|^2$$

$$\le \int_0^x \frac{A^2(x)B^2(y)[\rho(x) - \rho(y)]^{n-2}}{(n-2)!}dy \times \int_0^x |\phi_1(y) - \phi_2(y)|^2 dy$$

$$\le \frac{A^2(x)[\rho(x)]^{n-2}}{(n-2)!}\int_0^1 B^2(y)dy\,\|\phi_1 - \phi_2\|^2$$

ifadeleri birleştirerek,

$$\|T^n\phi_1 - T^n\phi_2\|^2 \leq \frac{[\rho(1)]^{n-1}}{(n-1)!}\|\phi_1 - \phi_2\|^2 \leq \frac{N^n}{(n-1)!}\|\phi_1 - \phi_2\|^2$$

buradan $\frac{N^n}{(n-1)!} < 1$ olduğundan T nin bir daralma operatörü olacağı görülmektedir. Yeterince büyük n için (2.20) dolayısıyla (2.19) denklemlerinin $L_2[0,1]$ de bir tek çözümü vardır[2].

2.2.3. İntegral Denklemlerde Dejenere Çekirdek

İkinci tip Fredholm integral denklemini göz önünde bulunduralım. $K(x,y)$ çekirdek, $f(x)$ bilinen fonksiyon, λ parametre olmak üzere,

$$\phi(x) - \lambda\int_a^b K(x,y)\phi(y)dy = f(x)$$

denklemi

$$K(x,y) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)b_j(y)$$

şeklinde bir çekirdeğe sahip ise, bu çekirdeğe dejenere çekirdek adı verilir. Burada $a_j(x)$ ve $b_j(y)$ nin $L_2[a,b]$ nin elemanı olduğu ve $K(x,y)$ nin karesi integrallenebilir olduğu varsayılmaktadır. Ayrıca $\{a_j(x)\}$ fonsiyonlarının kümesininde lineer bağımsız olduğu kabul edilecektir.Yani,

$$\sum_{j=1}^{n} x_j a_j(x) = 0$$

ancak ve ancak $\alpha_j = 0$ için mümkündür. Eğer bu durum olmasaydı, herhangi bir $a_j(x)$ diğer terimlerin lineer bir kombinasyonu olarak yazılabilirdi ve sonuç olarak $K(x,y) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)b_j(y)$ ifadesinin terimlerinin sayısı n den $n-1$ e indirgenmiş olurdu. Benzer düşünce $\{b_j(y)\}$ kümesi içinde geçerlidir.

$a \leq x,y \leq b$ aralığı üzerinde sürekli ve lineer bağımsız olan $a_j(x)$ ve $b_j(y)$ $(j = 1,2,\dots,n)$ fonksiyonları için $K(x,y) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)b_j(y)$ dejenere çekirdeğine sahip

$$\phi(x) - \lambda\int_a^b\left[\sum_{j=1}^{n} a_j(x)b_j(y)\right]\phi(y)dy = f(x) \tag{2.21}$$

şeklindeki integral denklemi şu şekilde çözülür. (2.21) denklemini,

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \int_a^b b_j(y)\phi(y)dy \tag{2.22}$$

şeklinde yazalım.

$$\int_a^b b_j(y)\,\phi(y)\,dy = C_j \qquad (j = 1,2,\ldots,n)$$

notasyonu ile verilsin. Bu durumda (2.22)

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} C_j a_j(x) \tag{2.23}$$

şeklinde olacaktır. $\phi(y)$ bilinmeyen fonsiyon olduğundan C_j ler de bilinmeyen sabitlerdir.

Sonuç olarak dejenere çekirdekli bir integral denklemi çözme problemi , C_j $(j = 1,2,\ldots n)$ sabitlerini bulma problemine indirgenmiş oldu. (2.23) ifadesini (2.21) denkleminde yerine yazarsak,

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{C_i - \int_a^b b_i(y)\left[f(y) + \lambda \sum_{j=1}^{n} C_j a_j(y)\right] dy\right\} a_i(x) = 0$$

bulunur. $a_i(x)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olması nedeniyle buradan da

$$C_i - \int_a^b b_i(y)\left[f(y) + \lambda \sum_{j=1}^{n} C_j a_j(y)\right] dy = 0$$

veya

$$C_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} C_j \int_a^b a_j(x) b_i(y) dy = \int_a^b b_i(y) f(y) dy \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

bulunur. Kısalığı sağlamak için

$$a_{ji} = \int_a^b a_j(y) b_i(y) dy,\ f_i = \int_a^b b_i(y) f(y) dy$$

olarak gösterilsin.

$$C_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ji} C_j = f_i$$

veya açık ifadeyle,

$$(1 - \lambda a_{11})C_1 - \lambda a_{12}C_2 - \cdots - \lambda a_{1n}C_n = f_1$$

$$-\lambda a_{21}C_1 - (1 - \lambda a_{22})C_2 - \cdots - \lambda a_{2n}C_n = f_2$$

$$\vdots$$

$$-\lambda a_{n1}C_1 - \lambda a_{n2}C_2 - \cdots - (1 - \lambda a_{nn})C_n = f_n$$

buluruz.

Bilinmeyen C_j sabitlerini bulmak için elimizde n bilinmeyenli n adet lineer denklem mevcuttur. Bu denklem sisteminin determinantı,

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} (1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ & \vdots & & \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \cdots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}$$

dir. $\Delta(\lambda) \neq 0$ ise denklem sisteminin $C_1, C_2, \ldots, C_n$ i tek türlü belirleyen bir çözümü vardır ve bu çözüm aşağıdaki Cramer formüllerinden elde edilebilir.

$$C_k = \frac{1}{\Delta(\lambda)} = \begin{vmatrix} (1 - \lambda a_{11} & \cdots & -\lambda a_{1k-1} f_1 - \lambda a_{1k+1} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & \cdots & \lambda a_{2k-1} f_2 - \lambda a_{2k+1} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ & & \vdots & & \\ -\lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nk-1} f_n - \lambda a_{nk+1} & \cdots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}$$

burada $(k = 1,2, \ldots, n)$ dir. Sonuç olarak integral denklemin çözümü olan $\phi(x)$ foksiyonu

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} C_j a_j(x)$$

ile tanımlanır ve burada C_j $(j = 1,2, \ldots, n)$ katsayıları yukarıdaki Cramer formülünden elde edilebilir[3].

3. HOMOTOPİ PERTURBAYON METODUİLE İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Yöntemin temel düşüncesini ifade etmek için, lineer olmayan denklemi şu şekilde alalım,

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega \tag{3.1}$$

$$B\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0, \quad r \in \Gamma$$

burada A integral opereatörü, B sınırlı opereatör, $f(r)$ bilinen analitik fonksiyon ve Γ , Ω de sınırlı bir alandır.

A integral opereatörü L ve N şeklinde iki parçaya ayrılabilir, burada L lineer, N lineer olmayan operatördür.(3.1) denklemi yeniden yazılırsa,

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0$$

Homotopi tekniğini kullanarak $v(r,p): \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ olmak üzere homotopiyi oluşturalım,

$$H(v,p) = (1-p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(u) - f(r)] = 0, p \in [0,1], r \in \Omega \tag{3.2}$$

veya eşdeğer olarak

$$H(v,p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0 \tag{3.3}$$

burada $p \in [0,1]$ bir gömülme parametresi, u_0 ,(3.1) denkleminin sınır şartına uygun olan başlangıç değeridir. Açıkça, (3.2) ve (3.3) den

$$H(v,0) = L(v) - L(u_0) = 0$$

$$H(v,1) = A(v) - f(r) = 0$$

p değeri 0 dan 1 e değişirken $v(r,p)$ de , $u_0(r)$ den $u(r)$ ye değişim geçirir. Buna topolojide homotopi adı verilir. Homotopi perturbasyon metoduna göre (3.3) ve (3.4) denklemleri p gömülme parametresinin kuvvet serisine göre yeniden yazılabilir,

$$v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + \cdots$$

$p = 1$ olduğunda, sonuçta (3.1) denkleminin yaklaşık çözümü,

$$u = \lim_{p \to 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \tag{3.4}$$

olarak edilir. (3.4) de verilen serinin yakınsaklığı ayrıca incelenebilir. Bununla birlikte,lineer olmayan operatörün yakınsaklığı He' nin [5] önerdiği şekilde,

(1) $N(v)$ nin ikinci türevi v den küçük olmalıdır çünkü parametre nispeten büyük olabilir, örneğin $p \to 1$

(2) $L^{-1}\frac{\partial N}{\partial v}$ nin normu serinin yakınsadığı değerden küçük olmalıdır.

şartlarını sağlamalıdır[20].

Teorem 3.1.1: *X ve Y birer Banach uzayı olsun ve $N: X \to Y$ lineer olmayan daralma haritası olsun şöyle ki,bu operatör*

$$\forall v, \tilde{v} \in X; \quad \|N(v) - N(\tilde{v})\| \leq \gamma \|v - \tilde{v}\|, 0 < \gamma < 1$$

şartını sağlamış olsun. Sabit nokta teoremi gereği bu operatörün bir sabit noktası olacaktır,yani $N(u) = u$ olacak şekilde u sabit noktası vardır.

Homotopi perturbasyon metodu yardımıyla aşağıdaki özellikli dizi türetilmiş olsun,

$$V_n = N(V_{n-1}),\ V_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} u_i, n = 1,2,3 \ldots$$

$B_r(u) = \{u^* \in X \mid \|u^* - u\| < r\}$ *olmak üzere* $V_0 = v_0 = u_0 \in B_r(u)$ *olduğunu varsayalım bu durumda aşağıdakiler doğrudur,*

(i) $||V_n - u|| \leq \gamma^n ||v_0 - u||$

(ii) $V_n \in B_r(u)$,

(iii) $\lim_{n\to\infty} V_n = u$

İspat: (i) Tümevarım metodunu kullanarak, $n = 1$ için,

$||V_1 - u|| = ||N(V_0) - N(u)|| \leq \gamma||v_0 - u||$

yazılabilir, $n = k - 1$ için

$||V_{k-1} - u|| \leq \gamma^{k-1}||v_0 - u||$

olduğunu kabul edelim, $n = k$ durumuna bakalım,

$||V_k - u|| = ||N(V_{k-1}) - N(u)|| \leq \gamma||V_{k-1} - u|| \leq \gamma\gamma^{k-1}||v_0 - u|| = \gamma^k||v_0 - u||$

elde edilir.

(ii) (i) yi kullanarak

$$||V_n - u|| \leq \gamma^n||v_0 - u|| \leq \gamma^n r < r \Rightarrow V_n \in B_r(u)$$

elde edilir.

(iii)$||V_n - u| \leq \gamma^n||v_0 - u||$ ve $\lim_{n\to\infty}\gamma^n = 0$ olması nedeniyle, $\lim_{n\to\infty}||V_n - u|| = 0$ olduğunu söyleyebiliriz, buradan da,

$\lim\limits_{n\to\infty} V_n = u$

elde edilir[20].

3.1. İkinci Tip Fredholm İntegral Denklemleri

İlk olarak ikinci tip Fredholm integral denklemini göz önünde bulunduralım,

$$\phi(x) - \lambda\int_a^b K(x,y)\phi(y)dy = f(x) \tag{3.5}$$

ve

$$L(u) = u(x) \quad f(x) \quad \lambda\int_a^b K(x,y)u(y)dy \tag{3.6}$$

burada $a \leq x, y \leq b$ ve $u(x) = \phi(x)$ çözümü ile verilsin. Bu durumda $H(u,p)$ homotopisi şu şekilde tanımlanır,

$H(u,0) = F(u), \qquad H(u,1) = L(u)$

burada $F(u)$ fonksiyonel operatördür. Konveks homotopi şu şekilde seçilebilir,

$$H(u,p) = (1-p)F(u) + pL(u) = 0 \tag{3.7}$$

ve tam olarak tanımlanmış eğri boyunca, başlangıç noktası $H(u_0,0)$ den $H(\phi,1)$ bitiş noktasına kadar sürekli bir yol izler. H(u,p) konveks homotopisinin içerdiği p parametresi 0 dan 1 e monoton olarak artarken, $F(u) = 0$ aşikar problemi de sürekli olarak $L(u) = 0$ orijinal problemine dönüşür. $p \in [0,1]$ parametresine gömülme parametresi adı verilir. p ye göre açılım şu şekildedir,

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots \tag{3.8}$$

(3.8) ifadesi (3.7) de yerine yazılır ve p nin aynı kuvvetlerinin katsayıları elde edilen bağıntılardan $u_0, u_1, u_2, \ldots$ değerleri bulunur. $p \to 1$ iken,

$$\phi = \lim_{p\to 1} u = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \tag{3.9}$$

ifadesi (3.6) denkleminin çözümüne yakınsar. (3.9) serisinin yakınsaklık durumu ayrıca incelenmelidir, yakınsama oranı $L(u)$ ya bağlıdır. $F(u) = u(x) - f(x)$ alınırsa, (3.8) ve (3.6) yerine yazılırsa,

$p^0: u_0(x) - f(x) = 0 \Rightarrow u_0 = f(x),$

$p^1: u_1(x) - \int_a^b K(x,y)u_0(y)dy = 0 \Rightarrow u_1 = \int_a^b K(x,y)u_0(y)dy$

$\vdots$

ve genel olarak,

$u_0(x) = f(x),$

$u_{n+1}(x) = \int_a^b K(x,y)u_n(y)dy$

sonuç olarak (3.9) ifadesinden istenilen sonuca ulaşılabilir[9].

Örnek 3.1.1:

$$u(x) = \cos 2x + \int_0^{2\pi} \sin x \cos y\, u(y) dy$$

Fredholm integral denkleminin $u(x) = \cos 2x$ çözümüne sahip olduğu bilinmektedir. Buna göre homotopi pertubasyon metodunu uygulasak, konveks homotopi şu şekilde olur,

$H(u,p) = (1-p)F(u) + pL(u) = 0$

$F(u) = u(x) - f(x)$, $L(u) = u(x) - f(x) - \int_0^{2\pi} \sin x \cos y\, u(y) dy$ ve $f(x) = \cos 2x$ olarak alınırsa konveks homotopi şu şekilde olur,

$$H(u,p) = (1-p)(u(x) - f(x)) + p\left[u(x) - f(x) - \int_0^{2\pi} \sin x \cos y\, u(y) dy\right] = 0$$

$$= (u(x) - f(x)) - p\,(u(x) - f(x)) + p\,(u(x) - f(x)) - p\left[\int_0^{2\pi} \sin x \cos y\, u(y)\, dy\right] = 0$$

$$= u(x) - f(x) - p\left[\int_0^{2\pi} \sin x \cos y\, u(y) dy\right] = 0$$

olur, daha sonra $u = u_0 + pu_1 + p^2 u_2 + \cdots$ yukarıdaki ifadede yerine yazılırsa,

$$u_0(x) + pu_1(x) + p^2 u_2(x) + \cdots =$$

$$= f(x) + p\left[\int_0^{2\pi} \sin x \cos y\, (u_0(y) + pu_1(y) + p^2 u_2(y) + \cdots) dy\right]$$

elde edilir. p nin aynı kuvvetlerine göre katsayıları eşitlenerek aşağıdaki denklemler takımı elde edilebilir,

$p^0 : u_0(x) - \cos 2x = 0 \Rightarrow u_0 = \cos 2x,$

$p^1 : u_1(x) - \int_0^{2\pi} \sin x \cos y\, u_0(y) y dy = 0 \Rightarrow u_1(x) = \int_0^{2\pi} \sin x \cos y \cos 2y\, dy$

$u_1(x) = 0$

$p^2 : u_2(x) - \int_0^{2\pi} \sin x \cos y\, u_1(y) y dy = 0 \Rightarrow u_2(x) = 0$

$\vdots$

burada, $u_1 = u_2 = \cdots = 0$ elde edilir. $u(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ ifadesi istenen çözüm olduğundan

$$u(x) = \cos 2x + 0 + 0 + \cdots = \cos 2x$$

elde edilir[3].

Örnek 3.1.2 :

$$u(x) = \cos x + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin x\, u(y)dy$$

İkinci tip lineer Fredholm integral denkleminin $u(x) = \cos(x) + \sin(x)$ şeklinde analitik çözüme sahip olduğu bilinmektedir. Buna göre homotopi pertubasyon metodunu uygulasak, konveks homotopi şu şekilde olur,

$$H(u,p) = (1-p)F(u) + pL(u) = 0$$

$F(u) = u(x) - f(x)$, $L(u) = u(x) - f(x) - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin x\, u(y)dy$ ve $f(x) = \cos x$ olarak alınırsa konveks homotopi şu şekilde olur,

$$H(u,p) = (1-p)(u(x) - f(x)) + p\left[u(x) - f(x) - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin x\, u(y)dy\right] = 0$$

$$= (u(x) - f(x)) - p\,(u(x) - f(x)) + p\,\big(u(x) - f(x)\big) - p\left[\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin x\, u(y)dy\right] = 0$$

$$= u(x) - f(x) - p\left[\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin x\, u(y)dy\right] = 0$$

olur, daha sonra $u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots$ yukarıdaki ifadede yerine yazılırsa,

$$u_0(x) + pu_1(x) + p^2u_2(x) + \cdots =$$

$$-f(x) + p\left[\int_0^{\pi/2} \sin x\,(u_0(y) + pu_1(y) + p^2u_2(y) + \cdots)dy\right]$$

elde edilir. p nin aynı kuvvetlerine göre katsayıları eşitlenerek aşağıdaki denklemler takımı elde edilebilir,

$$p^0: u_0(x) - \cos x = 0 \Rightarrow u_0 = \cos x,$$

$p^1: u_1(x) - \int_0^{\pi/2} \sin x\, u_0(y)dy = 0 \Rightarrow u_1(x) = \int_0^{\pi/2} \sin x \cos y\, dy$

$u_1(x) = \frac{1}{2}\sin(x)$

$p^2: u_2(x) - \int_0^{\pi/2} \sin x \frac{1}{2}\sin(y)dy = 0 \Rightarrow u_2(x) = \frac{1}{4}\sin(x)$

$\vdots$

bulunur. Buradan $u(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ ifadesi istenen çözüm olduğundan

$u(x) = \cos x + \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{4}\sin(x) + \cdots + \frac{1}{2^n}\sin(x) + \cdots = \cos x + \sin(x)$ elde edilir[17].

Denklemin Maple ile çözüm programı ek 1 de verilmiştir.

3.2. Birinci Tip Fredholm İntegral Denklemi

$$\int_a^b K(x,y)\phi(y)dy = f(x) \tag{3.10}$$

birinci tip integral denklemini göz önünde bulunduralım. Bu durumda konveks homotopi şu şekilde olacaktır,

$H(u,p) = (1-p)F(u) + pL(u) = 0$

$F(u) = u(x)$, $L(u) = f(x) - \int_a^b K(x,y)u(y)dy$ alınırsa,

$$H(u,p) = (1-p)u(x) + pf(x) - p\int_a^b K(x,y)u(y)dy = 0 \tag{3.11}$$

ve tam olarak tanımlanmış eğri boyunca, başlangıç noktası $H(0,0)$ den $H(\phi,1)$ bitiş noktasına kadar sürekli bir yol izler.

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots \tag{3.12}$$

ifadesi tanımlanarak (3.10) de yerine yazılır ve p nin kuvvetlerine göre denklem tekrar yazılırsa,

$p^0: u_0(x) = 0$

$p^1: u_1(x) = u_0(x) + f(x) - \int_a^b K(x,y)u_0(y)dy \Rightarrow u_1(x) = f(x),$

$p^2: u_2(x) = u_1(x) - \int_a^b K(x,y)u_1(y)dy$

$\vdots$

$p^n: u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_a^b K(x,y) u_n(y) dy$

veya

$u_{n+1} = (I - K) u_n = (I - K)^n u_1$

burada K operatörü şu şekildedir[14],

$$K = \int_a^b K(x,y)(.)dy$$

$\{u_n\}$ fonksiyonlar dizisinin yakınsaklığı için $\|I - K\| < 1$ olmalıdır. Çözümde yine $\lim_{p \to 1} u = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ şeklinde elde edilecektir. Eğer çözülen denklemin çekirdeği dejenere ise, yani $K(x,y) = A(x) \times B(t)$ şeklinde ise, yakınsaklık için,

$$\left|1 - \int_a^b K(t,t)dt\right| < 1$$

eşitsizliğini sağlamalıdır[9].

Örnek 3.2.1 :

$$\int_0^{1/2} e^{x+y} u(y) dy = \frac{1}{2} e^x (e - 1), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

Birinci tip Fredholm integral denkleminin $u(x) = e^x$ şeklinde çözüme sahip olduğu bilinmektedir. Burada $\left|1 - \int_0^{1/2} K(y,y)\, dy\right| = 0.141 \leq 1$ dir. Burada konveks homotopi şu şekilde yazılabilir,

$H(u,p) = (1-p)F(u) + pL(u) = 0$

veya $F(u) = u(x)$ ve $L(u) = \frac{1}{2} e^x (e-1) - \int_0^{1/2} e^{x+y} u(y) dy$ olmak üzere,

$$H(u,p) = (1-p)u(x) + p\left[\frac{1}{2} e^x (e-1) - \int_0^{1/2} e^{x+y} u(y) dy\right] = 0$$

şeklindedir. $u = u_0 + pu_1 + p^2 u_2 + \cdots$ ifadesi elde edilen konveks homotopi de yerine yazılırsa ve p nin aynı kuvvetlerine göre katsayıları eşitlenerek aşağıdaki denklemler takımı elde edilebilir,

$p^0: u_0(x) = 0,$

$p^1: u_1(x) = u_0(x) + \frac{1}{2}e^x(e-1) - \int_0^{1/2} e^{x+y} u_0(y)dy \Rightarrow u_1(x) = \frac{1}{2}e^x(e-1),$

$p^2: u_2(x) = u_1(x) - \int_0^{1/2} e^{x+y} u_1(y)dy \Rightarrow u_2(x) = \frac{1}{2}e^x(e-1) - \int_0^{1/2} e^{x+y} \frac{1}{2} e^y(e-1)dy$

$= -\frac{1}{2}e^x(e-1)\frac{e-3}{2},$

$p^3: u_3(x) = u_2(x) - \int_0^{1/2} e^{x+y} u_2(y)dy$

$\Rightarrow u_3(x) = -\frac{1}{2}e^x(e-1)\frac{e-3}{2} - \int_0^{1/2} e^{x+y} - \frac{1}{2}e^y(e-1)\frac{e-3}{2}dy,$

$= -\frac{1}{2}e^x(e-1)\left(\frac{e-3}{2}\right)^2,$

$\vdots$

buradan $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ den sonuç olarak,

$$u(x) - \frac{1}{2}e^x(e-1)\left[1 - \frac{e-3}{2} + \left(\frac{e-3}{2}\right)^2 - \left(\frac{e-3}{2}\right)^3 + \cdots\right] - e^x$$

çözümü elde edilir[9,15].

Denklemin Maple ile çözüm programı ek 2 de verilmiştir.

Örnek 3.2.2 :

$$\int_0^{\pi/2} xyu(y)dy = x,$$

birinci tip Fredholm integral denkleminin $u(x) = \sin x$ çözümüne sahip olduğu bilinmektedir, burada $\left|1 - \int_0^{\pi/2} K(y,y)\,dy\right| = 0.292 \leq 1$ dir. Burada konveks homotopi şu şekilde yazılabilir,

$H(u,p) = (1-p)F(u) + pL(u) = 0$

veya $F(u) = u(x)$ ve $L(u) = x - \int_0^{\pi/2} xyu(y)dy,$

olmak üzere,

$$H(u,p) = (1-p)u(x) + p\left[x - \int_0^{\pi/2} xyu(y)\,dy,\right] = 0$$

şeklindedir. $u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots$ ifadesi elde edilen konveks homotopi de yerine yazılırsa ve p nin aynı kuvvetlerine göre katsayıları eşitlenerek aşağıdaki denklemler takımı elde edilebilir,

$p^0: u_0(x) = 0,$

$p^1: u_1(x) = u_0(x) + x - \int_0^{\pi/2} xyu_0(y)dy, \Rightarrow u_1(x) = x,$

$p^2: u_2(x) = u_1(x) - \int_0^{\pi/2} xyu_1(y)dy \Rightarrow u_2(x) = -x\frac{\pi^3-24}{24},$

$p^3: u_3(x) = u_2(x) - \int_0^{\pi/2} xyu_2(y)dy \Rightarrow u_3(x) = x\left(\frac{\pi^3-24}{24}\right)^2$

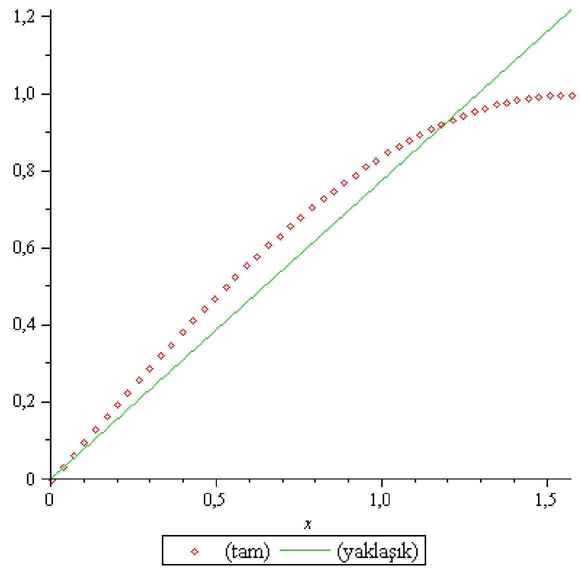
$p^4: u_3(x) = u_3(x) - \int_0^{\pi/2} xyu_3(y)dy \Rightarrow u_4(x) = -x\left(\frac{\pi^3-24}{24}\right)^3$

$\vdots$

buradan $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ den sonuç olarak,

$$u(x) = x\left[1 - x\frac{\pi^3-24}{24} + x\left(\frac{\pi^3-24}{24}\right)^2 - x\left(\frac{\pi^3-24}{24}\right)^3 + \cdots\right]$$

buradan $u(x) = \frac{24x}{\pi^3}$ şeklinde denklemin diğer bir çözümü elde edilir[9].



Şekil 3.1 Örnek 3.2.2 in tam çözüm ve yaklaşık çözüm karşılaştırması

Şekil 3.1 de görülmektedir ki denklemin tam çözümü ile homotopi perturbasyon metodu uygulanarak bulunan sonuç arasında küçük x ler için uyumluluk söz konusudur.

3.3. İkinci Tip Volterra İntegral Denklemi

İkinci tip integral denklemini şu şekilde göz önünde bulunduralım,

$$\phi(x) - \lambda \int_0^x K(x,y)\phi(y)dy = f(x) \tag{3.13}$$

$$L(u) = u(x) - f(x) - \lambda \int_0^x K(x,y)\phi(y)dy = 0 \tag{3.14}$$

$u(x) = \phi(x)$ tam çözümü ile verilsin. Homotopi şu şekilde tanımlanır,

$H(u,0) = F(u), \quad H(u,1) = L(u)$

burada $F(u)$ fonksiyonel operatördür. Konveks homotopi şu şekilde seçilebilir,

$$H(u,p) = (1-p)F(u) + pL(u) = 0 \tag{3.15}$$

ve tam olarak tanımlanmış eğri boyunca, başlangıç noktası $H(u_0,0)$ den $H(\phi,1)$ bitiş noktasına kadar sürekli bir yol izler. Konveks homotopiye yerleştirilmiş olan p parametresi 0 dan 1 e monoton olarak artarken, $F(u) = 0$ aşikar problemi de sürekli olarak $L(u) = 0$ orijinal problemine dönüşür. $p \in [0,1]$ parametresine homotopi parametresi adı verilir. p ye göre açılım şu şekildedir,

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots \quad (3.16)$$

(3.16) ifadesi (3.15) de yerine yazılır ve p nin aynı kuvvetlerine göre yazılarak $u_0, u_1, u_2, \ldots$ değerleri bulunur. $p \to 1$ iken,

$$\phi = \lim_{p\to 1} u = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \quad (3.17)$$

ifadesi (3.14) denkleminin çözümüne yakınsar. (3.17) serisi çoğu durumda yakınsaktır ve yakınsama oranı $L(u)$ ya bağlıdır. $F(u) = u(x) - f(x)$ alınırsa, (3.16) ve (3.14) yerine yazılırsa,

$p^0: u_0 - f(x) = 0 \Rightarrow u_0 = f(x),$

$p^1: u_1 - \int_0^x K(x,y)u_0(y)dy = 0 \Rightarrow u_1 = \int_0^x K(x,y)u_0(y)dy$

$\vdots$

ve genel olarak,

$u_0(x) = f(x),$

$u_{n+1} = \int_0^x K(x,y)u_n(y)dy$

sonuç olarak (3.13) serisinden istenilen sonuca ulaşılabilir. Görüldüğü gibi Volterra ve Fredholm integral denklemleri arasında metodun uygulanması açısından hiçbir fark yoktur.

Örnek 3.3.1 :

$$u(x) = e^x + \int_0^x e^{x-y}u(y)dy$$

ikinci tip lineer Volterra integral denkleminin $u(x) = e^{2x}$ çözümüne sahip olduğu bilinmektedir. Homotopi perturbasyon metodunu uygulamak için, konveks homotopiyi şu şekilde tanımlayalım,

$$H(u,p) = (1-p)F(u) + pL(u) = 0 \quad (3.18)$$

$F(u) = u(x) - e^x, L(u) = u(x) - e^x - \int_0^x e^{x-y}u(y)dy$ olarak alınırsa ifade şu şekilde olur,

$$H(u,p) = (1-p)(u(x) - e^x) + p\left[u(x) - e^x - \int_0^x e^{x-y}u(y)dy\right] = 0$$

$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots$ ifadesi elde edilen konveks homotopi (3.14) de yerine yazılırsa ve p nin aynı kuvvetlerine göre katsayıları eşitlenerek aşağıdaki denklemler takımı elde edilebilir,

$p^0 : u_0(x) = f(x) \Rightarrow u_0(x) = e^x,$

$p^1 : u_1(x) - \int_0^x e^{x-y}u_0(y)dy = 0 \Rightarrow u_1(x) = \int_0^x e^{x-y}e^y dy \Rightarrow u_1(x) = xe^x,$

$p^2 : u_2(x) - \int_0^x e^{x-y}u_1(y)dy = 0 \Rightarrow u_2(x) = \int_0^x e^{x-y}xe^x dy \Rightarrow u_2(x) = \frac{x}{2}e^x$

$p^3 : u_3(x) - \int_0^x e^{x-y}u_2(y)dy = 0 \Rightarrow u_3(x) = \int_0^x e^{x-y}\frac{x}{2}e^x dy \Rightarrow u_3(x) = \frac{x^3}{6}e^x$

$\vdots$

buradan $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ den sonuç olarak,

$$u(x) = e^x + xe^x + \frac{x}{2!}e^x + \frac{x^3}{3!}e^x + \cdots = e^x\left(1 + x + \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) = e^{2x}$$

ve $u(x) = e^{2x}$ çözümü elde edilir[3].

Örnek 3.3.2 :

$$u(x) = (1+x) + \int_0^x (x-y)u(y)dy$$

ikinci tip lineer Volterra integral denkleminin $u(x) = e^x$ çözümüne sahip olduğu bilinmektedir. homotopi perturbasyon metodunu uygulamak için, konveks homotopiyi şu şekilde tanımlayalım,

$$H(u,p) = (1-p)F(u) + pL(u) = 0 \tag{3.19}$$

$F(u) = u(x) - (1+x), L(u) = u(x) - (1+x) - \int_0^x (x-y)u(y)dy$ olarak alınırsa ifade şu şekilde olur,

$$H(u,p) = (1-p)(u(x) - (1+x)) + p\left[u(x) - (1+x) - \int_0^x (x-y)u(y)dy\right] = 0$$

$u = u_0 + pu_1 + p^2 u_2 + \cdots$ ifadesi elde edilen konveks homotopi (3.15) de yerine yazılırsa ve p nin aynı kuvvetlerine göre katsayıları eşitlenerek aşağıdaki denklemler takımı elde edilebilir,

$p^0 : u_0(x) = f(x) \Rightarrow u_0(x) = (1 + x),$

$p^1 : u_1(x) - \int_0^x (x - y) u_0(y) dy = 0 \Rightarrow u_1(x) = \int_0^x (x - y)(1 + y) dy \Rightarrow u_1(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2,$

$p^2 : u_2(x) - \int_0^x (x - y) u_1(y) dy = 0 \Rightarrow u_2(x) = \int_0^x (x - y)\left(\frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2}y^2\right) dy = \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{24}x^4$

$p^3 : u_3(x) - \int_0^x (x - y) u_2(y) dy = 0 \Rightarrow u_3(x) = \int_0^x (x - y)\left(\frac{1}{120}y^5 + \frac{1}{24}y^4\right) dy = \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{720}x^6$

$\vdots$

buradan $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ den sonuç olarak,

$$u(x) = (1 + x) + \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) + \left(\frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{24}x^4\right) + \left(\frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{720}x^6\right) + \cdots = e^x$$

ve $u(x) = e^x$ çözümü elde edilir[17].

Denklemin Maple ile çözüm programı ek 3 de verilmiştir.

3.4. İntegral Denklem Sistemleri

İntegral denklem sistemini genel olarak şu şekilde ifade edelim,

$$F(x) = G(x) - \int_a^b K(x, y) F(y) dy \qquad (3.20)$$

burada,

$$K(x, y) = k_{ij}(x, y)$$

$$F(x) = [f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)]$$

$$G(x) = [g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)]$$

K ve G bilinen fonksiyonlar, F çözümüne ulaşılmak istenen fonksiyondur. (3.20) denklem sisteminin i. denklemini şu şekilde gösterelim,

$$f_i(x) = g_i(x) + \int_a^b \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(x,y) f_j(y) dy \qquad i = 1,2,\dots n$$

homotopi pertubasyon metodunu uygulamak için, konveks homotopiyi tanımlarsak,

$$H_i(F,p) = (1-p)F_i(F) + pL_i(F) = 0 \tag{3.21}$$

şeklindedir, burada

$H_i(F,0) = f_i(x) - g_i(x), H_i(F,1) = f_i(x) - g_i(x) - \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(x,y) f_j(y)\, dy$ dir.

$p \in [0,1]$ homotopi parametresi için, p, 0 dan 1 e monoton olarak artarken, $F_i(F)$ de sürekli olarak $L_i(F)$ e dönüşür. p ye göre açılım

$$f_i = f_{i0} + pf_{i1} + p^2 f_{i2} + \cdots \tag{3.22}$$

şeklinde ifade edilir. Daha sonra (3.22) açılımı (3.21) de yerine yazılırsa,

$$H_i(F,p) = (1-p)(f_{i0}(x) + pf_{i1}(x) + p^2 f_{i2}(x) + \cdots - g_i(x))$$

$$+p\left[\left(f_{i0}(x) + pf_{i1}(x) + p^2 f_{i2}(x) + \cdots - g_i(x)\right)\right]$$

$$-\int_a^b \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(x,y)\left(f_{j0}(y) + pf_{j1}(y) + p^2 f_{j2}(y) + \cdots\right) dy = 0$$

şeklinde elde edilir, sonra p nin aynı kuvvetlerine göre katsayıları eşitlenerek aşağıdaki denklemler takımı elde edilebilir,

$p^0: f_{i0}(x) = g_i(x),$

$p^1:, f_{i1}(x) = \int_a^b \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(x,y)\left(f_{j0}(y)\right) dy$

$p^2: f_{i2}(x) = \int_a^b \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(x,y)\left(f_{j1}(y)\right) dy$

$p^3: f_{i3}(x) = \int_a^b \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(x,y)\left(f_{j2}(y)\right) dy$

$\vdots$

genel olarak

$f_{i0}(x) = g_i(x)$

$f_{im}(x) = \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(x,y)\big(f_{j,m-1}(y)\big)\,dy$

olarak yazılabilir. Sonuçta,

$f_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_{1i} = f_{10} + f_{11} + f_{12} + \cdots$

$f_2(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_{2i} = f_{20} + f_{21} + f_{22} + \cdots$

$\vdots$

şeklinde denklem sisteminin çözümleri bulunur[14].

Örnek 3.4.1 :

$$f_1(x) = g_1(x) + \int_0^1 (x-y)^3 f_1(y)dy + \int_0^1 (x-y)^2 f_2(y)dy$$

$$f_2(x) = g_2(x) + \int_0^1 (x-y)^4 f_1(y)dy + \int_0^1 (x-y)^3 f_2(y)dy$$

$g_1(x) = -\frac{1}{20} + \frac{11}{30}x - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3$ ve $g_2(x) = \frac{1}{30} - \frac{19}{60}x + \frac{17}{20}x^2 - \frac{11}{12}x^3 - \frac{1}{3}x^4$ ve $f_1(x) = x^2$ ve $f_2(x) = -x + x^2 + x^3$ çözümüne sahip olduğu bilinmektedir. Buradan konveks homotopi yazılırsa,

$$H_1(F,p) = (1-p)\big(f_1(x) - g_1(x)\big) + p\big(f_1(x) - g_1(x)\big)$$
$$-p\int_0^1 (x-y)^3 f_1(y)dy - p\int_0^1 (x-y)^2 f_2(y)dy = 0 \qquad (3.23)$$

$$H_2(F,p) = (1-p)\big(f_2(x) - g_2(x)\big) + p\big(f_2(x) - g_2(x)\big)$$
$$-p\int_0^1 (x-y)^4 f_1(y)dy - p\int_0^1 (x-y)^3 f_2(y)dy = 0 \qquad (3.24)$$

olarak ifade edilebilir. $p \in [0,1]$ homotopi parametresi için $f_i = f_{i0} + pf_{i1} + p^2 f_{i2} + \cdots$ ifadesi (3.19) ve (3.20) denklemlerinde yerine yazılır ve p nin aynı kuvvetlerine göre katsayıları eşitlenerek aşağıdaki denklemler takımı elde edilebilir,

$$p^0: \begin{array}{l} f_{10}(x) = g_1(x) \Rightarrow f_{10}(x) = -\frac{1}{20} + \frac{11}{30}x - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \\ f_{20}(x) = g_2(x) \Rightarrow f_{20}(x) = \frac{1}{30} - \frac{19}{60}x + \frac{17}{20}x^2 - \frac{11}{12}x^3 - \frac{1}{3}x^4 \end{array}$$

p^1:

$$f_{11}(x) = \int_0^1 (x-y)^3 f_{10}(y)dy + \int_0^1 (x-y)^2 f_{20}(y)dy$$
$$\Rightarrow f_{11}(x) = -\frac{89}{1800} + \frac{11}{30}x - \frac{161}{240}x^2 + \frac{61}{180}x^3$$
$$f_{21}(x) = \int_0^1 (x-y)^4 f_{10}(y)dy + \int_0^1 (x-y)^3 f_{20}(y)dy$$
$$\Rightarrow f_{21}(x) = \frac{209}{6300} - \frac{1601}{5040}x + \frac{41}{48}x^2 - \frac{133}{144}x^3 - \frac{61}{180}x^4$$

p^2:

$$f_{12}(x) = \int_0^1 (x-y)^3 f_{11}(y)dy + \int_0^1 (x-y)^2 f_{21}(y)dy$$
$$\Rightarrow f_{11}(x) = -\frac{1}{1600} + \frac{1}{2016}x - \frac{163}{60400}x^2 + \frac{1}{200}x^3$$
$$f_{22}(x) = \int_0^1 (x-y)^4 f_{11}(y)dy + \int_0^1 (x-y)^3 f_{21}(y)dy$$
$$\Rightarrow f_{22}(x) = \frac{53}{252000} + \frac{11}{20160}x - \frac{101}{33600}x^2 - \frac{571}{100800}x^3 - \frac{1}{200}x^4$$

⋮

sonuçta,

$$f_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_{1i} = f_{10} + f_{11} + f_{12} + \cdots$$

$$f_2(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_{2i} = f_{20} + f_{21} + f_{22} + \cdots$$

serileri hesaplanarak sonuçlara ulaşılır[14].

Örnek 3.4.2 :

$$f_1(x) = -x^2 - \frac{2}{3}x^4 + xf_2(x) + 2\int_0^x xf_1(y) + f_2(y)dy$$

$$f_2(x) = x - \frac{x^2}{4} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}(x + x^2)f_1(x) + \frac{1}{2}\int_0^x (f_1(y) - f_2(y)dy$$

Volterra tipi integral denklem sistemi $f_1(x) = x^2, f_2(x) = x$ çözümüne sahip olduğu bilinmektedir.

$g_1(x) = -x^2 - \frac{2}{3}x^4, g_2(x) = x - \frac{x^2}{4} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4$ olmak üzere,

$$L_1(f_1, f_2) = f_1(x) - g_1(x) - \left(-xf_2(x) + 2\int_0^x xf_1(y) + f_2(y)dy\right) = 0$$

$$L_2(f_1,f_2) = f_2(x) - g_2(x) - \left(-\frac{1}{2}(x+x^2)f_1(x) + \frac{1}{2}\int_0^x (f_1(y) - f_2(y)dy\right) = 0$$

$$F_1(f_1,f_2) = f_1(x) - g_1(x)$$

$$F_2(f_1,f_2) = f_2(x) - g_2(x)$$

alınırsa, konveks homotopiler şu şekilde seçilebilir,

$$H_1(f_1,f_2,p) = (1-p)F_1(f_1,f_2) + pL_1(f_1,f_2)$$

$$H_2(f_1,f_2,p) = (1-p)F_2(f_1,f_2) + pL_2(f_1,f_2)$$

yada

$$H_1(f_1,f_2,p) = f_1(x) - g_1(x) - p\left(-xf_2(x) + 2\int_0^x xf_1(y) + f_2(y)dy\right) = 0 \quad (3.25)$$

$$H_2(f_1,f_2,p) = f_2(x) - g_2(x) - p\left(-\frac{1}{2}(x+x^2)f_1(x) + \frac{1}{2}\int_0^x (f_1(y) - f_2(y)dy\right) = 0 \quad (3.26)$$

elde edilir, $p \in [0,1]$ homotopi parametresi için $f_i = f_{i0} + pf_{i1} + p^2 f_{i2} + \cdots$ ifadesi (3.25) ve (3.24) denklemlerinde yerine yazılır ve p nin aynı kuvvetlerine göre katsayıları eşitlenerek aşağıdaki denklemler takımı elde edilebilir,

$$p^0: \begin{array}{l} f_{10}(x) - g_1(x) \rightarrow f_{10}(x) -- -x^2 - \frac{2}{3}x^4 \\ f_{20}(x) = g_2(x) \Rightarrow f_{20}(x) = x - \frac{x^5}{4} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 \end{array}$$

$$p^k: \begin{array}{l} f_{1k}(x) = xf_{2,k-1}(x) + 2\int_0^x (xf_{1,k-1}(y) + f_{2,k-1}(y))dy \\ f_{2k}(x) = -\frac{1}{2}(x+x^2)f_{1,k-1}(x) + \frac{1}{2}\int_0^x (f_{1,k-1}(y) - f_{2,k-1}(y))dy \end{array}$$

sonuçta,

$$f_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_{1i} = f_{10} + f_{11} + f_{12} + \cdots$$

$$f_2(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_{2i} = f_{20} + f_{21} + f_{22} + \cdots$$

serileri hesaplanarak sonuçlara ulaşılır. Fakat pratikte bu serilerin sonuçlarını elde etmek oldukça zordur bu nedenle homotopiyi şu şekilde ifade edelim,

$$H_1(f_1,f_2,p) = f_1(x) - g_1(x) - \left(2\int_0^x [(1-p)(xy^2+y) + p(xf_1(y) + f_2(y))]dy\right) = 0 \quad (3.27)$$

$$H_2(f_1,f_2,p) = f_2(x) - g_2(x) + \left(\frac{1}{2}\int_0^x [(1-p)(y^2-y) + (f_1(y) - f_2(y))]dy\right) = 0 \quad (3.28)$$

$p \in [0,1]$ homotopi parametresi için $f_i = f_{i0} + pf_{i1} + p^2 f_{i2} + \cdots$ ifadesi (3.27) ve (3.28) denklemlerinde yerine yazılır ve p nin aynı kuvvetlerine göre katsayıları eşitlenerek aşağıdaki denklemler takımı elde edilebilir,

$$p^0: \begin{aligned} f_{10}(x) &= g_1(x) + 2\int_0^x (xy^2 + y)dy = x^2 \\ f_{20}(x) &= g_2(x) - \frac{1}{2}\int_0^x (y^2 - y)dy = x \end{aligned}$$

$$p^1: \begin{aligned} f_{11}(x) &= 2\int_0^x \left(-xy^2 - y + xf_{10}(y) + f_{20}(y)\right)dy = 0 \\ f_{21}(x) &= -\frac{1}{2}\int_0^x \left(-y^2 + y + f_{10}(y) - f_{20}(y)\right)dy = 0 \end{aligned}$$

$$p^2: \begin{aligned} f_{12}(x) &= 2\int_0^x \left(xf_{11}(y) + f_{21}(y)\right)dy = 0 \\ f_{22}(x) &= -\frac{1}{2}\int_0^x \left(f_{11}(y) - f_{21}(y)\right)dy = 0 \end{aligned}$$

$\vdots$

bu şekilde işleme devam edersek $f_{13}(x) = f_{14}(x) = f_{15}(x) = \cdots = 0$ ve $f_{23}(x) = f_{24}(x) = f_{25}(x) = \cdots = 0$ olarak elde edilir. Bu durumda çözümler $f_1(x) = x^2$ ve $f_2(x) = x$ olarak bulunabilir[13].

3.5. İntegro-diferensiyel Denklemler

Birinci dereceden Fredholm tipi integro-diferensiyel denklemi göz önünde bulunduralım,

$$\phi'(x) = q(x)\phi(x) + f(x) + \int_a^b K(x,y)\phi(y)dy \quad (3.29)$$

$\phi(0) = A$ başlangıç şartı ile verilsin.

$$L(u) = u'(x) - q(x)\phi(x) - f(x) - \int_a^b K(x,y)u(y)dy = 0 \quad (3.30)$$

$\phi(x) = u(x)$ tam çözümü ile birlikte ele alalım. Bu durumda $H(u,p)$ homotopisi şu şekilde tanımlanır,

$H(u,0) = F(u), \qquad H(u,1) = L(u)$

burada $F(u)$ fonksiyonel operatördür. Konveks homotopi şu şekilde seçilebilir,

$$H(u,p) = (1-p)F(u) + pL(u) = 0$$
(3.31)

ve tam olarak tanımlanmış eğri boyunca, başlangıç noktası $H(u_0,0)$ den $H(\phi,1)$ bitiş noktasına kadar sürekli bir yol izler. Konveks homotopiye yerleştirilmiş olan p parametresi 0 dan 1 e monoton olarak artarken, $F(u)=0$ aşikar problemi de sürekli olarak $L(u)=0$ orijinal problemine dönüşür. $p \in [0,1]$ parametresine homotopi parametresi adı verilir. p ye göre açılım şu şekildedir,

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots \tag{3.32}$$

(3.32) ifadesi (3.31) de yerine yazılır ve p nin aynı kuvvetlerine göre yazılarak $u_0, u_1, u_2, \ldots$ değerleri bulunur. $p \to 1$ iken,

$$\phi = \lim_{p\to 1} u = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \tag{3.33}$$

ifadesi (3.29) denkleminin çözümüne yakınsar. (3.33) serisi çoğu durumda yakınsaktır ve yakınsama oranı $L(u)$ ya bağlıdır. $F(u) = u'(x) - q(x)u(x) - f(x)$ alınır , (3.32) ifadesi (3.31) de yerine yazılır ve denklem p nin aynı kuvvetlerine göre yeniden yazılırsa ,

$$p^0: u_0'(x) - q(x)u_0(x) - f(x) = 0, \quad u_0(0) = A,$$

$$p^1: u_1'(x) - q(x)u_1(x) - \int_a^b K(x,y)u_0(y)dy = 0 \Rightarrow u_1(0) = 0$$

$\vdots$

ve genel olarak,

$$u_0'(x) = q(x)u_0(x) + f(x) = 0, u_0(0) = A$$

$$p^n: u_n'(x) - q(x)u_n(x) - \int_a^b K(x,y)u_{n-1}(y)dy = 0 \Rightarrow u_n(0) = 0$$

sonuç olarak (3.33) ifadesinden istenilen sonuca ulaşılabilir[18].

Örnek 3.5.1 :

$$u'(x) = 3e^{3x} - \frac{1}{3}(2e^3 + 1)x + \int_0^1 3xyu(y)dy, u(0) = 1$$

Fredholm integro-diferensiyel denkleminin $u(x) = e^{3x}$ çözümüne sahip olduğu bilinmektedir. Homotopi perturbasyon metodunu uygulamak için, konveks homotopiyi şu şekilde tanımlayalım,

$$H(u,p) = (1-p)F(u) + pL(u) = 0 \tag{3.34}$$

$F(u) = u'(x) - 3e^{3x} - \frac{1}{3}(2e^3+1)x, L(u) = u'(x) - 3e^{3x} - \frac{1}{3}(2e^3+1)x - \int_0^1 3xyu(y)dy$

olarak alınırsa ifade şu şekilde olur,

$$H(u,p) = (1-p)\left(u'(x) - 3e^{3x} - \frac{1}{3}(2e^3+1)\right)$$

$$+p\left[u'(x) - 3e^{3x} - \frac{1}{3}(2e^3+1)x - \int_0^1 3xyu(y)dy\right] = 0$$

$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots$ ifadesi elde edilen konveks homotopi (3.34) de yerine yazılırsa ve p nin aynı kuvvetlerine göre katsayıları eşitlenerek aşağıdaki denklemler takımı elde edilebilir,

$p^0: u_0'(x) - f(x) \rightarrow u_0'(x) - 3e^{3x} - \frac{1}{3}(2e^3+1)x, u_0(0) - 1$

$u_0(x) = e^{3x} - \frac{1}{3}x^2e^3 - \frac{1}{6}x^2$

$p^1: u_1'(x) = \int_0^1 3xyu_0(y)dy, u_1(0) = 0$

$u_1(x) = e^{3x} - \frac{1}{8}x^2e^3 - \frac{1}{16}x^2$

$p^2: u_2'(x) = \int_0^1 3xyu_1(y)dy, u_2(0) = 0$

$u_2(x) = \frac{55}{384}x^2(2e^3+1) + 1$

$\vdots$

buradan $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ den sonuç olarak,

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots = e^{3x} - \frac{1}{3}x^2e^3 - \frac{1}{6}x^2 + e^{3x} - \frac{1}{8}x^2e^3 - \frac{1}{16}x^2$$

$$+\frac{55}{384}x^2(2e^3+1) + \cdots = e^{3x}$$

ve $u(x) = e^{3x}$ tam çözümü elde edilir[18].

Örnek 3.5.2:

$$u'(x) = (x+1)e^{x} - x + \int_0^1 xu(y)dy\,, u(0) = 0$$

Fredholm integro-diferensiyel denkleminin $u(x) = xe^{x}$ çözümüne sahip olduğu bilinmektedir. Homotopi perturbasyon metodunu uygulamak için, konveks homotopiyi şu şekilde tanımlayalım,

$$H(u,p) = (1-p)F(u) + pL(u) = 0 \qquad (3.35)$$

$F(u) = u'(x) - (x+1)e^{x} + x, L(u) = u'(x) - (x+1)e^{x} + x - \int_0^1 xu(y)dy$ olarak alınırsa ifade şu şekilde olur,

$$H(u,p) = (1-p)\left(u'(x) - (x+1)e^{x} + x\right) + p\left[u'(x) - (x+1)e^{x} + x - \int_0^1 xu(y)dy\right] = 0$$

$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots$ ifadesi elde edilen konveks homotopi (3.35) de yerine yazılırsa ve p nin aynı kuvvetlerine göre katsayıları eşitlenerek aşağıdaki denklemler takımı elde edilebilir,

$p^0: u_0'(x) = f(x) \Rightarrow u_0'(x) = (x+1)e^{x}, u_0(0) = 0$

$u_0(x) = xe^{x} - \frac{1}{2}x^2$

$p^1: u_1'(x) = \int_0^1 xu_0(y)dy, u_1(0) = 0$

$u_1(x) = \frac{5}{12}x^2$

$p^2: u_2'(x) = \int_0^1 xu_1(y)dy, u_2(0) = 0$

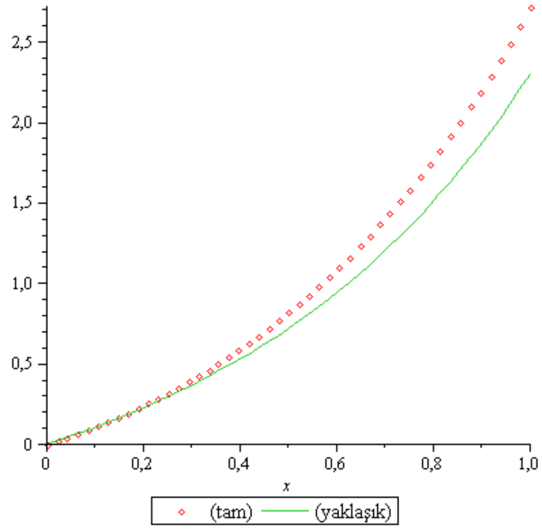
$u_2(x) = \frac{5}{72}x^2$

$\vdots$

buradan $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ den sonuç olarak,

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots = xe^x - \frac{5}{12}x^2$$

şeklinde yaklaşık çözüm elde edilir[18].



Şekil 3.2 Örnek 3.5.2 in tam çözüm ve yaklaşık çözüm karşılaştırması

Şekil 3.2 den görülmektedir ki denklemin tam çözümü ile homotopi perturbasyon metodu uygulanarak bulunan sonuç arasında küçük x ler için uyumluluk söz konusudur.

Denklemin Maple ile çözüm programı ek 4 de verilmiştir.

3.6. Lineer Olmayan İntegral Denklemler

Homotopi perturbasyon metodunun lineer olmayan denklemler içinde uygulamaları mevcuttur. Bunun için ikinci tip Fredholm ve Volterra intgeral denklemlerini göz önünde bulunduralım.

İkinci tip lineer olmayan Fredholm integral denklemi,

$$u(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,y)\{R(u) + N(u)\}dy \tag{3.36}$$

İkinci tip lineer olmayan Volterra integral denklemi,

$$u(x) = f(x) + \int_0^x K(x,y)\{R(u) + N(u)\}dy \tag{3.37}$$

olarak gösterilsin. Burada $u(x)$ bilinmeyen fonksiyon, $R(u)$ ve $N(u)$ u nun lineer veya lineer olmayan fonksiyonları, $K(x,y)$ çekirdek olarak verilmiştir. Homotopi perturbasyon metodunu uygulamak için,

$$L(u) = u(x) - f(x) - \int_0^1 K(x,y)\{R(u) + N(u)\}dy = 0 \tag{3.38}$$

ikinci tip lineer olmayan Fredholm integral denklemini göz önünde bulunduralım. Bu durumda $H(u,p)$şu şekildedir,

$H(u,0) = F(u), \quad H(u,1) = L(u)$

burada $F(u)$ fonksiyonel operatördür. Konveks homotopi şu şekilde seçilebilir,

$$H(u,p) = (1-p)F(u) + pL(u) = 0 \tag{3.39}$$

ve tam olarak tanımlanmış eğri boyunca, başlangıç noktası $H(u_0,0)$ den $H(U,1)$ bitiş noktasına kadar sürekli bir yol izler. Konveks homotopiye yerleştirilmiş olan p parametresi 0 dan 1 e monoton olarak artarken, $F(u) = 0$ aşikar problemi de sürekli olarak $L(u) = 0$ orijinal problemine dönüşür. $p \in [0,1]$ parametresine homotopi parametresi adı verilir. p ye göre açılım şu şekildedir,

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots \tag{3.40}$$

(3.40) ifadesi (3.39) de yerine yazılır ve p nin aynı kuvvetlerine göre yazılarak $u_0, u_1, u_2, \ldots$ değerleri bulunur. $p \to 1$ iken,

$$U = \lim_{p\to 1} u = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \tag{3.41}$$

ifadesi (3.38) denkleminin çözümüne yakınsar. (3.41) serisi çoğu durumda yakınsaktır ve yakınsama oranı $L(u)$ ya bağlıdır. $F(u) = u(x) - f(x)$ alınırsa ve (3.40) ve (3.38) konveks homotopi (3.39) da yerine yazılırsa ve p nin aynı kuvvetlerine göre denklem yeniden yazılırsa,

$p^0: u_0(x) = f(x)$

$p^1: u_1(x) = \int_0^1 K(x,y)\{R(u_0) + N(u_0)\}dy$

$\vdots$

ve genel olarak,

$u_0(x) = f(x),$

$$u_{n+1}(x) = \int_0^1 K(x,y)\{R(u_n) + N(u_n)\}dy$$

sonuç olarak (3.41) ifadesinden istenilen sonuca ulaşılabilir[19].

Örnek 3.6.1:

$$u(x) = \sinh(x) - 1 + \int_0^1 (\cosh(t)^2 + u(t)^2)dy$$

ikinci tip lineer olmayan Fredholm integral denklemi $u_0(x) = \sinh(x)$ başlangıç çözümü ile birlikte verilsin. Homotopi perturbasyon metodunu uygulamak için, konveks homotopiyi şu şekilde tanımlayalım,

$$H(u,p) = (1-p)F(u) + pL(u) = 0 \tag{3.42}$$

$F(u) = u(x) - \sinh(x)$, $L(u) = u(x) - \sinh(x) + 1 - \int_0^1 (\cosh(t)^2 + u(t)^2)dy$ olarak alınırsa ifade şu şekilde olur,

$$H(u,p) = (1-p)(u(x) - \sinh(x)) + p\left[u(x) - \sinh(x) + 1 - \int_0^1 (\cosh(t)^2 + u(t)^2)dy\right] = 0$$

veya

$$= (u(x) - \sinh(x)) + p - p\left[\int_0^1 (\cosh(t)^2 + u(t)^2)dy\right] = 0$$

$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots$ ifadesi elde edilen konveks homotopi (3.39) de yerine yazılırsa ve p nin aynı kuvvetlerine göre katsayıları eşitlenerek aşağıdaki denklemler takımı elde edilebilir,

$$p^0: u_0(x) = \sinh(x),$$

$$p^1: u_1(x) = -1 + \int_0^1 (\cosh(t)^2 + u_0(t)^2)dy \Rightarrow u_1(x) = 0,$$

$$p^2: u_2(x) = \int_0^1 2u_0(t)u_1(t)dy \Rightarrow u_2(x) = 0$$

$$p^3: u_3(x) = \int_0^1 2u_0(t)u_2(t) + u_1(t)^2 dy \Rightarrow u_3(x) = 0$$

$\vdots$

buradan sonuç olarak,

$$U(x)=\lim_{p\to 1}u(x)=u_0+u_1+u_2+\cdots$$

$$U(x)=\sinh(x)+0+0+\cdots=\sinh(x)$$

ve $U(x)=\sinh(x)$ tam çözümü elde edilir[19].

Örnek 3.6.2:

$$u(x)=e^x+\frac{1}{2}x(e^{2x}-1)-\int_0^x xu(y)^2dy$$

ikinci tip lineer olmayan Fredholm integral denklemi $u_0(x)=e^x$ başlangıç çözümü ile birlikte verilsin. Homotopi perturbasyon metodunu uygulamak için, konveks homotopiyi şu şekilde tanımlayalım,

$$H(u,p)=(1-p)F(u)+pL(u)=0 \qquad (3.43)$$

$F(u)=u(x)-e^x, L(u)=u(x)-e^x-\frac{1}{2}x(e^{2x}-1)+\int_0^x xu(y)^2dy$ olarak alınırsa ifade şu şekilde olur,

$$H(u,p)=(1-p)(u(x)-e^x)+p\left[u(x)-e^x-\frac{1}{2}x(e^{2x}-1)+\int_0^x xu(y)^2dy\right]=0$$

veya

$$=(u(x)-e^x)-p\left(\frac{1}{2}x(e^{2x}-1)\right)+p\left[\int_0^x xu(y)^2dy\right]=0$$

$u=u_0+pu_1+p^2u_2+\cdots$ ifadesi elde edilen konveks homotopi (3.43) de yerine yazılırsa ve p nin aynı kuvvetlerine göre katsayıları eşitlenerek aşağıdaki denklemler takımı elde edilebilir,

$p^0: u_0(x)=e^x$,

$p^1: u_1(x)=\frac{1}{2}x(e^{2x}-1)-\int_0^x xu_0(y)^2dy \Rightarrow u_1(x)=0,$

$p^2: u_2(x)=\int_0^x 2xu_0(y)u_1(t)dy \Rightarrow u_2(x)=0$

$p^3: u_3(x)=\int_0^1 x(2u_0(t)u_2(t)+u_1(t)^2)dy \Rightarrow u_3(x)=0$

$\vdots$

buradan sonuç olarak,

$$U(x) = \lim_{p\to 1} u(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

$$U(x) = e^x + 0 + 0 + \cdots = e^x$$

ve $U(x) = e^x$ çözümü elde edilir[19].

4. MODİFİYE HOMOTOPİ PERTURBASYON METODU İLE İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

4.1. İkinci Tip Fredholm İntegral Denklemi

Homotopi pertubasyon metodunun yakınsama oranını hızlandırmak için modifiye homotopi perturbasyon metodunu geliştirelim. İkinci tip lineer Fredholm integral denklemi şu şekilde olsun,

$$\phi(x) - \int_0^1 K(x,y)\phi(y)dy = f(x) \tag{4.1}$$

denklemin çekirdeği $K(x,y) = \sum_{i=1}^{N} g_i(x)h_i(y)$ şeklinde yazılabiliyorsa bu çekirdeğe dejenere adı verilir. Modifiye homotopi perturbasyon metodunun denkleme uygulanabilmesi için göz önünde bulundurduğumuz denklemin de dejenere sahip olması gerekir.

Konveks homotopi şu şekilde tanımlansın,

$$H(u,p,m) = (1-p)F(u) + pL(u) + p(1-p)\left[\sum_{i=1}^{N} m_i g_i(x)\right] = 0$$

burada $m = [m_i], (i = 1,2,\dots,N)$ hızlandırıcı parametre olarak adlandırılır ve

$m_i = 0, i = 1,2,\dots,N$ için,

$$H(u,p,0) = H(u,p)$$

şeklinde olduğu görülür ki, bu da aslında standart homotopidir. (4.1) denklemini çekirdeğini $K(x,y) = g(x)h(y)$ şeklinde olduğunu varsayalım. Konveks homotopi

$$H(u,p,m) = (1-p)F(u) + pL(u) + p(1-p)[mg(x)] = 0$$

şeklinde olsun, burada $F(u) = u(x) - f(x)$ ve $L(u) = u(x) - f(x) - \int_0^1 g(x)h(y)u(y)dy$

buradan

$$H(u,p,m) = (1-p)(u(x) - f(x)) + p\left[u(x) - f(x) - \int_0^1 g(x)h(y)u(y)dy\right]$$

$+p(1-p)[mg(x)] = 0$

veya

$$= (u(x) - f(x)) + pg(x)\int_0^1 h(y)u(y)dy + mpg(x) + mp^2 g(x) = 0 \qquad (4.2)$$

yazılır. $p \in [0,1]$ homotopi parametresi için, $u = u_0 + pu_1 + p^2 u_2 + \cdots$ ifadesi (4.2) de yerine yazılır ve denklem p nin aynı kuvvetlerine göre yeniden yazılırsa,

$p^0: u_0(x) - f(x) = 0 \Rightarrow u_0(x) = f(x),$

$p^1: u_1(x) + mg(x) - g(x)\int_0^1 h(y)u_0(y)dy,$

$u_1(x) = (c-m)g(x)$ burada $c = \int_0^1 h(y)f(y)dy$

$p^2: u_2(x) - mg(x) - g(x)\int_0^1 h(y)u_1(y)dy = 0$

$u_2(x) = [m + (c-m)\alpha]g(x)$ burada $\alpha = \int_0^1 h(y)g(y)dy$

$p^3: u_3(x) = \int_0^1 h(y)u_2(y)dy$

$\vdots$

genel olarak

$u_{n+1}(x) = \int_0^1 h(y)u_n(y)dy \;, n = 2,3, \ldots$

buradan $u_2(x) = 0$ yapan m değerini bulursak, $u_2(x) = 0$ için $u_3 = u_4 = \cdots = 0$ olacağından tam çözüme sadece, $u(x) = u_0(x) + u_1(x)$ işlemiyle ulaşabiliriz. Bu durumda tüm x değerleri için

$$m + (c-m)\alpha = 0$$

veya

$$m = \frac{c\alpha}{\alpha - 1} = \frac{\left[\int_0^1 h(y)f(y)dy\right]\left[\int_0^1 h(y)g(y)dy\right]}{\int_0^1 h(y)g(y)dy - 1}$$

bulunur.

Şimdi genel durumu göz önünde bulunduralım,

$$K(x,y)=\sum_{i=1}^{N} g_i(x)h_i(y)$$

buradan konveks homotopi şu şekilde seçilebilir,

$$H(u,p,m)=(1-p)F(u)+pL(u)+p(1-p)\left[\sum_{i=1}^{N} m_i g_i(x)\right]=0$$

sonra benzer işlemler yapılarak p nin aynı kuvvetlerine göre denklem şu şekilde yeniden yazılabilir,

$p^0: u_0(x)=f(x),$

$p^1: u_1(x)=-\sum_{i=1}^{N} m_i g_i(x)+\sum_{i=1}^{N} g_i(x)\int_a^b h_i(t)u_0(t)dt,$

$$=\sum_{i=1}^{N}\left[\left[\int_a^b h_i(t)f(t)dt-m_i\right]g_i(x)\right.$$

$p^2: u_2(x)=\sum_{i=1}^{N} m_i g_i(x)+\sum_{i=1}^{N} g_i(x)\int_a^b h_i(t)u_1(t)dt$

$$=\sum_{i=1}^{N}\left[\left[\int_a^b h_i(t)u_1(t)dt+m_i\right]g_i(x)\right.$$

⋮

genel olarak

$u_{n+1}(x)=\sum_{i=1}^{N} g_i(x)\int_a^b h_i(t)u_n(t)dt \ ,n=2,3,\dots$

şeklinde ifade edilebilir. Bundan sonra $u_2=u_3=u_4=\cdots=0$ yapan $m_i, i=1,2,\dots,N$ değerini bulmamız gerekir, bunun için $u_2=0$ sağlayan $m_i, i=1,2,\dots,N$ değerini bulmamız gerekir

$$\int_a^b h_i(t)u_1(t)dt+m_i, \qquad \forall x\in[a,b]$$

sonra u_1 i yerine yazarsak,

$$m_i + \sum_{j=1}^{N} \int_a^b h_i(t)\left[\left[\int_a^b h_j(t) f(t)dt - m_j\right] g_j(t)dt = 0\right.$$

burada

$$c_j = \int_a^b h_j(t) f(t)dt, b_{ij} = \int_a^b h_i(t)\, g_j(t)dt$$

olarak alırsak,

$$m_i + \textstyle\sum_{j=1}^{N} b_{ij}(c_j - m_j) = 0, \quad i = 1,2,\dots,N \tag{4.3}$$

bu durumda $m_i, i = 1,2,\dots,N$ değerlerini (4.3) lineer denklem sisteminden elde edebiliriz, bunun için $\boldsymbol{B}$ matris, $\boldsymbol{m}$ ve $\boldsymbol{c}$ vektörler olmak üzere,

$$\boldsymbol{B} = \lfloor b_{ij} \rfloor, \qquad \boldsymbol{m} = \lfloor m_j \rfloor, \quad \boldsymbol{c} = \lfloor c_j \rfloor$$

olarak alınırsa,(4.3)

$$(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{m} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{c}$$

şeklinde yazılabilir ve eğer $(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I})$ singüler değilse,

$$\boldsymbol{m} = (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{c}$$

buradan da $m_i, i = 1,2,\dots,N$ değerleri bulunur[15].

Örnek 4.1.1 :

$$u(x) = e^{3x} - \frac{1}{9}(2e^3 + 1)x + \int_0^1 xyu(y)dy$$

ikinci tip Fredholm integral denkleminin $u(x) = e^{3x}$ çözümüne sahip olduğu bilinmektedir. Modifiye homotopi perturbasyon metodunu uygulamak için, konveks homotopi şu şekilde tanımlansın,

$$H(u,p,m) = (1-p)F(u) + pL(u) + p(1-p)[mg(x)] = 0$$

burada

$F(u) = u(x) - e^{3x} - \frac{1}{9}(2e^3 + 1)x, L(u) = u(x) - e^{3x} - \frac{1}{9}(2e^3 + 1)x - \int_0^1 xyu(y)dy$ ve

$k(x,y) = g(x)h(y) = xy, g(x) = x, h(y) = y$ olarak verilsin. Yukarıda anlatılan metod gereğince,

$u_0(x) = f(x)$

$u_1(x) = (c - m)g(x)$ burada $c = \int_0^1 h(y)f(y)dy$

İçin $u(x) = u_0(x) + u_1(x)$ ifadesini hesaplamalıyız.

$u_0(x) = e^{3x} - \frac{1}{9}(2e^3 + 1)x$

$u_1(x) = \left[\int_0^1 y\left(e^{3y} - \frac{1}{9}(2e^3 + 1)y\right)dy - m\right]x$

buradan sonuca ulaşılmak için m hesaplanmalıdır,

$$m = \frac{\left[\int_0^1 h(y)f(y)dy\right]\left[\int_0^1 h(y)g(y)dy\right]}{\int_0^1 h(y)g(y)dy - 1} = \frac{\left[\int_0^1 y\left(e^{3y} - \frac{1}{9}(2e^3 + 1)y\right)dy\right]\left[\int_0^1 y^2 dy\right]}{\int_0^1 y^2 dy - 1}$$

$$= \frac{\left(\frac{4}{27}e^3 + \frac{2}{27}\right)\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - 1} = -\frac{2}{27}e^3 - \frac{1}{27}$$

buradan

$$u_1(x) = \left[\left(\frac{4}{27}e^3 + \frac{2}{27}\right) - \left(-\frac{2}{27}e^3 - \frac{1}{27}\right)\right]x = \left(\frac{6}{27}e^3 + \frac{3}{27}\right)x = \frac{1}{9}(2e^3 + 1)x$$

ve sonuç olarak,

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) = e^{3x} - \frac{1}{9}(2e^3 + 1)x + \frac{1}{9}(2e^3 + 1)x = e^{3x}$$

elde edilir[9,15].

4.2. Birinci Tip Fredholm İntegral Denklemi

$$\int_a^b K(x,y)\phi(y)dy = f(x) \tag{4.4}$$

birinci tip Fredholm integral denklemini göz önünde bulunduralım, $K(x,y) = g(x)h(t)$ şeklinde dejenere çekirdek olsun. Konveks homotopi şu şekilde seçilebilir,

$H(u,p,m) = (1 - p)F(u) + pL(u) + p(1 - p)[mg(x)] = 0$

burada $F(u) = u(x)$ ve $L(u) = \int_0^1 g(x)h(y)u(y)dy - f(x)$ ve $f(x) = cg(x)$ buradan,

(4.1) de anlatılan yönteme benzer işlemler uygulanırsa,

$p^0: u_0(x) = 0,$

$p^1: u_1(x) = (c-m)g(x),$

$p^2: u_2(x) = u_1(x) + mg(x) - g(x)\int_a^b h(y)u_1(y)dy,$

$= [c-(c-m)\alpha]g(x), buradaa\ \alpha = \int_a^b h(y)g(y)dy = \int_a^b k(t,t)dt$

$p^3: u_3(x) = u_2(x) - g(x)\int_a^b h(y)u_2(y)dy$

$\vdots$

genel olarak

$u_{n+1}(x) = u_n(x) - g(x)\int_a^b h(y)u_n(y)dy \ \ , n = 2,3,\ldots$

$u_2 = u_3 = u_4 = \cdots = 0$ yapan m değerini bulmak için u_2 den,

$c - (c-m)\alpha = 0, \qquad \forall x \in [a,b]$

ve buradan da,

$$m = c - \frac{c}{\alpha}, \alpha \neq 0 \tag{4.5}$$

elde edilir. Sonuç olarak $u(x) = u_0(x) + u_1(x)$ istenen çözümü bulunur.

Şimdi genel durum için varsayalım ki $K(x,y) = \sum_{i=1}^N g_i(x)h_i(y)$ şeklinde olsun ve $f(x) = \sum_{i=1}^N c_i g_i(x)$ olarak alınırsa, (4.1) de anlatılan yönteme benzer işlemler uygulanırsa

$$H(u,p,m) = (1-p)u(x) + p\left[\int_a^b \sum_{i=1}^N g_i(x)h_i(t)dt\right] + p(1-p)\left[\sum_{i=1}^N m_i g_i(x)\right] = 0 \tag{4.6}$$

$p \in [0,1]$ homotopi parametresi için, $u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots$ ifadesi (4.6) de yerine yazılır ve denklem p nin aynı kuvvetlerine göre yeniden yazılırsa,

$p^0: u_0(x) = 0,$

$p^1: u_1(x) = \sum_{i=1}^{N}(c_i \quad m_i) g_i(x),$

$p^2: u_2(x) = \sum_{i=1}^{N}\left[c_i - \sum_{j=1}^{N}(c_j - m_j)\, b_{ij}\right], g_i(x)$ burada $b_{ij} = \int_a^b h_i(y) g_j(y) dy$

$\vdots$

genel olarak

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \sum_{i=1}^{N} g_i(x) \int_a^b h_i(y) u_n(y) dy \quad , n = 2,3,\ldots$$

$u_2 = u_3 = u_4 = \cdots = 0$ yapan m değerini bulmak için u_2 den elde edilen şu lineer denklem sistemini çözmeliyiz,

$$\sum_{i=1}^{N}\left[c_i - \sum_{j=1}^{N}(c_j - m_j) b_{ij}\right] = 0, \quad i = 1,2,\ldots,N, \forall x \in [a,b] \qquad (4.7)$$

veya matris şeklinde ifade edersek,, bunun için $\boldsymbol{B}$ matris, $\boldsymbol{m}$ ve $\boldsymbol{c}$ vektörler olmak üzere,

$\boldsymbol{B} = [b_{ij}], \qquad \boldsymbol{m} = [m_j], \quad \boldsymbol{c} = [c_j], \qquad j = 1,2,\ldots,N$

olarak alınırsa,

$$\boldsymbol{Bm} = (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{c} \qquad (4.8)$$

şeklinde yazılabilir ve eğer $(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I})$ singüler değilse,

$\boldsymbol{m} = (\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{I})\boldsymbol{c}$

buradan da $m_i, i = 1,2,\ldots,N$ değerleri bulunur[15].

Örnek 4.2.1:

$$\int_0^{1/2} e^{x+y} u(y) dy = \frac{1}{2} e^x (e - 1), \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}$$

birinci tip integral denkleminin $u(x) = e^x$ çözümüne sahip olduğu bilinmektedir, burada $\left|1 - \int_0^{1/2} K(y,y)\, dy\right| = 0.141 < 1$ dir. Denkleme modifiye homotopi perturbasyon metodunu uygulamak için,

$g(x) = e^x, \qquad h(y) = e^y, \qquad c = \frac{1}{2}(e - 1)$

olarak alınırsa,(4.5) den,

$$m = c - \frac{c}{\alpha}, \alpha = \int_0^{1/2} e^{2t} dt = \frac{1}{2}(e-1),$$

buradan $m = \frac{1}{2}e - \frac{3}{2}$ ve sonuç olarak

$$u_1(x) = \left[\frac{1}{2}(e-1) - \frac{1}{2}e - \frac{3}{2}\right] e^x = e^x$$

buradan da denklemin çözümü $u(x) = u_0(x) + u_1(x) = e^x$ olarak elde edilir[15].

Örnek 4.2.2:

$$\int_0^1 (ye^x + 1) u(y) dy = \frac{1}{3}e^x + \frac{1}{2}$$

birinci tip Fredholm integral denkleminin $u(x) = x$ çözümüne sahip olduğu bilinmektedir. Denkleme modifiye homotopi perturbasyon metodunu uygulamak için,

$$c_1 = \frac{1}{3}, c_2 = \frac{1}{2}, g_1(x) = e^x, g_2(x) = 1, h_1(y) = y, h_2(y) = 1,$$

olmak üzere, (4.8) kuralını kullanırsak,

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ e-1 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ e-1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ e-1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3}(e-1) \end{bmatrix}$$

buradan m_1 ve m_2 değerleri,

$$m_1 = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}(e-1)}{1 - \frac{1}{2}(e-1)}, m_2 = \frac{\frac{1}{6}(e-1)}{1 - \frac{1}{2}(e-1)}$$

sonuç olarak,

$$u_1(x) = (c_1 - m_1)g_1(x) + (c_2 - m_2)g_2(x)$$

$$= \frac{1}{12-6(e-1)}e^{x} + \frac{6-4(e-1)}{12-6(e-1)}$$

ve

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) = \frac{1}{12-6(e-1)}e^{x} + \frac{6-4(e-1)}{12-6(e-1)}$$

sonucu elde edilir, fakat tam sonuca ulaşılamamıştır[15].

4.3. İntegro-diferensiyel Denklemler

$$\phi'(x) = q(x)\phi(x) + f(x) + \int_a^b k(x,t)\phi(t)dt, \quad a \le x \le b \tag{4.9}$$

$\phi(0) = A$ başlangıç şartı ile birinci dereceden integro-diferensiyel denklemi göz önünde bulunduralım.

$$L(u) = u'(x) - q(x)u(x) + f(x) + \int_a^b k(x,t)u(t)dt \tag{4.10}$$

$\phi(x) = u(x)$ tam çözümü ile birlikte ele alalım. Bu durumda $H(u,p)$ homotopisi şu şekilde tanımlanır,

$H(u,0) = F(u), \qquad H(u,1) = L(u)$

burada $F(u)$ fonksiyonel operatördür. Konveks homotopi şu şekilde seçilebilir,

$$H(u,p) = (1-p)F(u) + pL(u) = 0$$

(4.11)

ve tam olarak tanımlanmış eğri boyunca, başlangıç noktası $H(u_0,0)$ den $H(\phi,1)$ sonuç noktasına kadar sürekli bir yol izler. Konveks homotopiye yerleştirilmiş olan p parametresi 0 dan 1 e monoton olarak artarken, $F(u) = 0$ aşikar problemi de sürekli olarak $L(u) = 0$ orijinal problemine dönüşür. $p \in [0,1]$ parametresine homotopi parametresi adı verilir. p ye göre açılım şu şekildedir,

$$u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots \tag{4.12}$$

$p \to 1$ iken,

$$\phi = \lim_{p\to 1} u = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \tag{4.13}$$

ifadesi (4.10) denkleminin çözümüne yakınsar. (4.13) serisi çoğu durumda yakınsaktır ve yakınsama oranı $L(u)$ ya bağlıdır. $F(u) = u'(x) - q(x)u(x) - f(x)$ alınır , (4.12) açılımı (4.11) de yerine yazılır ve denklem p nin aynı kuvvetlerine göre yeniden yazılırsa ,

$$p^0 : u_0'(x) - q(x)u_0(x) - f(x) = 0, \quad u_0(0) = A,$$

$$p^1 : u_1'(x) \quad q(x)u_1(x) \quad \int_a^b k(x,t)u_0(t)dt = 0 \rightarrow u_1(0) = 0$$

$\vdots$

ve genel olarak,

$$u_0'(x) = q(x)u_0(x) + f(x) = 0, u_0(0) = A$$

$$p^n : u_n'(x) - q(x)u_n(x) - \int_a^b k(x,t)u_{n-1}(t)dt = 0 \rightarrow u_n(0) = 0$$

sonuç olarak (4.13) ifadesinden istenilen sonuca ulaşılabilir.

Şimdi modifiye homotopi perturbasyon metodunu lineer Fredholm integral denklemine uygulayalım. Denklemin çekirdeğinin $k(x,t) = \sum_{i=1}^{N} g_i(x)h_i(t)$ formunda olduğunu varsayalım. Bu durumda yani konveks homotopi şu şekilde ifade edilebilir,

$$H(u,p,m) = (1-p)F(u) + pL(u) + p(1-p)\left[\sum_{i=1}^{N} m_i g_i(x)\right] = 0 \tag{4.14}$$

burada $m = [m_i]$,$m_i, i = 1,2, \dots, N$ olmak üzere, hızlandırıcı parametre adı verilir.
$m_i = 0, i = 1,2, \dots, N$ için

$$H(u,p,0) = H(u,p)$$

dir, ki bu standart homotopidir. Varsayalım ki $k(x,t) = g(x)h(t)$ olsun, bu durumda (4.9) denklemi,

$$\phi'(x) - q(x)\phi(x) + f(x) + \int_a^b g(x)\,h(t)\phi(t)dt \tag{4.15}$$

şeklinde yazılabilir. (4.14) deklemini

$$H(u,p,m) = (1-p)F(u) + pL(u) + p(1-p)mg(x) = 0 \tag{4.16}$$

olarak gösterelim, burada $F(u) = u'(x) - q(x)u(x) - f(x)$ ve $L(u) = u'(x) - q(x)\phi(x) - f(x) - \int_a^b g(x)h(t)u(t)dt = 0$ dir. Buradan (4.16) i yeniden yazarsak,

$$H(u,p,m) = (1-p)u'(x) - q(x)u(x) - f(x) + p\left[u'(x) - q(x)\phi(x) - f(x) - \int_a^b g(x)h(t)u(t)dt\right] + p(1-p)mg(x) = 0$$

veya

$$u'(x) - q(x)u(x) - f(x) - pg(x)\left[\int_a^b h(t)u(t)dt\right] + mpg(x) - m^2pg(x) = 0 \quad (4.17)$$

şeklinde olur. $u = u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots$ açılımı (4.17) da yerine yazılır ve p nin aynı kuvvetlerine göre denklem yeniden yazılırsa,

$$p^0: u_0'(x) - q(x)u_0(x) - f(x) = 0, \quad u_0(0) = A$$

çözümü de,

$$u_0(x) = \exp\left(\int_a^x q(s)ds\right)\left[\int_a^x \exp\left(-\int_a^t q(s)ds\right)f(t)\,dt\right]$$

$$p^1: u_1'(x) - q(x)u_1(x) - g(x)\int_a^b h(t)u_0(t)dt + mg(x) = 0 \Rightarrow u_1(0) = 0$$

veya

$$u_1'(x) - q(x)u_1(x) = (c-m)g(x), \quad u_1(0) = 0$$

burada $c = \int_a^b h(t)u_0(t)dt$ dir. Sonuç olarak da,

$$u_1(x) = (c-m)\exp\left(\int_a^x q(s)ds\right)\left[\int_a^x \exp\left(-\int_a^t q(s)ds\right)g(t)\,dt\right]$$

$$p^2: u_2'(x) - q(x)u_2(x) - g(x)\int_a^b h(t)u_1(t)dt - mg(x) = 0, \qquad u_2(0) = 0$$

veya

$$u_2'(x) - q(x)u_2(x) = [m + (c-m)\alpha]g(x), \qquad u_2(0) = 0$$

burada $\alpha = \int_a^b h(t)\exp\left(\int_a^t q(s)ds\right)\left[\int_a^t \exp\left(-\int_a^y q(s)ds\right)g(y)\,dy\right]dt$

sonuç olarak da,

$$u_2(x) = [m + (c-m)\alpha]\exp\left(\int_a^x q(s)ds\right)\left[\int_a^x \exp\left(-\int_a^t q(s)ds\right)g(t)\,dt\right]$$

$$p^3: u_3'(x) - q(x)u_3(x) - g(x)\int_a^b h(t)u_2(t)dt = 0, \qquad u_3(0) = 0$$

$\vdots$

ve genel olarak,

$$p^n: u_n'(x) - q(x)u_n(x) - g(x)\int_a^b h(t)u_{n-1}(t)dt = 0, \qquad u_n(0) = 0,\ n = 3,4,\dots$$

çözümü de,

$$u_n(x) = \int_a^b h(t)u_{n-1}(t)dt\exp\left(\int_a^x q(s)\,ds\right)\left[\int_a^x \exp\left(-\int_a^t q(s)\,ds\right)g(t)\,dt\right]$$

şeklindedir. Şimdi $u_2 = u_3 = u_4 = \cdots = 0$ yapan m değerini bulmalıyız böylece denklemin çözümü $u(x) = u_0(x) + u_1(x)$ eşitliğinde elde edilebilir. Bunun için $u_2 = 0$ için,

$$[m + (c-m)\alpha] = 0$$

ifadesinden m değerini hesaplamamız gerekir,

$$m = \frac{c\alpha}{\alpha - 1} = \frac{\left[\int_a^b h(t)u_0(t)dt\right]\left[\int_a^b h(t)\exp\left(\int_a^t q(s)ds\right)\left[\int_a^t \exp\left(-\int_a^y q(s)ds\right)g(y)\,dy\right]dt\right]}{\left[\int_a^b h(t)\exp\left(\int_a^t q(s)ds\right)\left[\int_a^t \exp\left(-\int_a^y q(s)ds\right)g(y)\,dy\right]dt\right] - 1}$$

burada

$$\left[\int_a^b h(t)\exp\left(\int_a^t q(s)ds\right)\left[\int_a^t \exp\left(-\int_a^y q(s)ds\right)g(y)\,dy\right]dt\right] \neq 1$$

dir.

Şimdi de genel durumu göz önünde bulunduralım,

$$k(x,t) = \sum_{i=1}^{N} g_i(x)h_i(t)$$

olsun, konveks homotopiyi şu şekilde seçelim,

$$H(u,p,m) = (1-p)F(u) + pL(u) + p(1-p)\left[\sum_{i=1}^{N} m_i g_i(x)\right] = 0$$

buradan, daha önce kullandığımız yöntemdeki işlemleri benzer şekilde kullanarak, p nin aynı kuvvetlerine göre denklemi yeniden yazarsak,

$p^0: u_0'(x) - q(x)u_0(x) - f(x) = 0, \quad u_0(0) = A$

çözümü de,

$u_0(x) = \exp\left(\int_a^x q(s)ds\right)\left[\int_a^x \exp\left(-\int_a^t q(s)ds\right) f(t)\, dt\right]$

$p^1: u_1'(x) - q(x)u_1(x) = -\sum_{i=1}^N m_i g_i(x) + \sum_{i=1}^N g_i(x) \int_a^b h_i(t)u_0(t)dt = 0 \Rightarrow u_1(0) = 0$

veya

$u_1'(x) - q(x)u_1(x) = \sum_{i=1}^N \left[\int_a^b h_i(t)u_0(t)dt - m_i\right] g_i(x), \; u_1(0) = 0$

sonuç olarak da,

$u_1(x) = \sum_{i=1}^N \left[\int_a^b h_i(t)u_0(t)dt - m_i\right] \exp\left(\int_a^x q(s)ds\right)\left[\int_a^x \exp\left(-\int_a^t q(s)ds\right) g_i(t)\, dt\right]$

$p^2: u_2'(x) - q(x)u_2(x) = \sum_{i=1}^N m_i g_i(x) + \sum_{i=1}^N g_i(x) \int_a^b h_i(t)u_1(t)dt = 0, \quad u_2(0) = 0$

veya

$u_2'(x) - q(x)u_2(x) = \sum_{i=1}^N \left[\int_a^b h_i(t)u_1(t)dt + m_i\right] g_i(x), \quad u_2(0) = 0$

sonuç olarak da,

$u_2(x) = \sum_{i=1}^N \left[\int_a^b h_i(t)u_1(t)dt + m_i\right] \exp\left(\int_a^x q(s)ds\right)\left[\int_a^x \exp\left(-\int_a^t q(s)ds\right) g_i(t)\, dt\right]$

$\vdots$

ve genel olarak,

$p^n: u_n'(x) - q(x)u_n(x) = \sum_{i=1}^N g_i(x) \int_a^b h_i(t)u_{n-1}(t)dt, \quad u_n(0) = 0, n = 3,4, \ldots$

çözümü de,

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^N \left(\int_a^b h_i(t)u_{n-1}(t)dt\right) \exp\left(\int_a^x q(s)ds\right)\left[\int_a^x \exp\left(-\int_a^t q(s)ds\right) g(t)\, dt\right]$$

olarak bulunur. Şimdi $u_2(x) = 0$ yapan m değerini bulmalıyız böylece $u_3 = u_4 = \cdots = 0$ olacağından denklemin çözümü $u(x) = u_0(x) + u_1(x)$ eşitliğinde elde edilebilir. Buradan $\forall x \in [a, b]$ için,

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\int_a^b h_i(t) u_1(t) dt + m_i \right] = 0 \qquad (4.18)$$

olmalıdır. u_1 ifadesi (4.18) da yerine yazılırsa,

$$\sum_{j=1}^{N} \left[\int_a^b h_j(t) u_0(t) dt + m_j \right] \int_a^b h_i(t) \exp\left(\int_a^t q(s) ds \right) \left[\int_a^t \exp\left(- \int_a^y q(s) ds \right) g_j(y)\, dy \right] dt + m_i = 0$$

burada

$$c_j = \int_a^b h_j(t) u_0(t) dt,\ b_{ij} = \int_a^b h_i(t) \exp\left(\int_a^t q(s) ds \right) \left[\int_a^t \exp\left(- \int_a^y q(s) ds \right) g_j(y)\, dy \right] dt$$

olarak alınırsa,

$$\sum_{i=1}^{N} b_{ij}(c_j - m_j) + m_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, N \qquad (4.19)$$

yazılabilir. Bu şekilde $m_i, i = 1, 2, \ldots, N$ değerleri, (4.19) de ki lineer denklem sisteminden elde edilebilir. $\boldsymbol{B}$ matris $\boldsymbol{m}$ ve $\boldsymbol{c}$ vektörler olarak tanımlansın, buradan

$$\boldsymbol{B} = [b_{ij}], \qquad \boldsymbol{m} = [m_j], \qquad \boldsymbol{c} = [c_j]$$

alınırsa, (4.19)

$$(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{m} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{c}$$

olarak yazılabilir. Eğer $(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I})$ singüler değilse

$$\boldsymbol{m} = (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I})^{-1} \boldsymbol{B} \boldsymbol{c}$$

den $m_i, i = 1, 2, \ldots, N$ değerleri bulunabilir[18].

Örnek 4.3.1 :

$$u'(x) = 3e^{3x} - \frac{1}{3}(2e^3 + 1)x - \int_0^1 3xt u(t) dt, \qquad u(0) = 1$$

Fredholm integro diferensiyel denkleminin $u(x) = e^{3x}$ çözümüne sahip olduğu bilinmektedir.

Denkleme modifiye homotopi peturbasyon metodunu uygularsak,

$$u_0'(x) = f(x), \quad u(0) = 1$$

$$u_1'(x) = (c - m)g(x), u_1(0) = 0 \; burada \; c = \int_a^b h(t)u_0(t)$$

ve sonuç olarak da,

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x)$$

bulunmalıdır. Bunun için denklemden
$f(x) = 3e^{3x} - \frac{1}{3}(2e^3 + 1)x, q(x) = 0, a = 0, b = 1, A = 1, g(x) = 3x \; ve \; h(t) = t$ olarak elde edilir. Bu değerleri kullanarak,

$$u_0(x) = \int_a^x f(t)dt = e^{3x} - \left(\frac{1}{3}e^3 + \frac{1}{6}\right)x^2$$

$$u_1(x) = (c - m)\left[\int_a^x g(t)dt\right]$$

dir. Buradan

$$c = \int_0^1 t\left(e^{3t} - \left(\frac{1}{3}e^3 + \frac{1}{6}\right)t^2\right)dt = \frac{5}{72} + \frac{5}{36}e^3, \alpha = \int_0^1 t\left[\int_0^t 3y dy\right]dt = \frac{3}{8}$$

ve sonuç olarak da,

$$m = \frac{c\alpha}{\alpha - 1} = -\frac{1}{24} - \frac{1}{12}e^3$$

bulunur, o halde

$$u_1(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{9} + \frac{2}{9}e^3\right)x^2$$

ve çözüm,

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) = e^{3x}$$

olarak bulunur[18].

Örnek 4.3.2

$u'(x) = (x+1)e^x - x + \int_0^1 xu(t)dt, \qquad u(0) = 0$

Fredholm integro-diferensiyel denkleminin $u(x) = xe^x$ çözümüne sahip olduğu bilinmektedir.

Bu durumda $f(x) = (x+1)e^x - x, q(x) = 0, a = 0, b = 1, A = 0, g(x) = x \; ve \; h(t) = 1$ olarak elde edilir. Modifiye homotopi perturbasyon yöntemini denklemi uygularsak,

$$u_0'(x) = f(x), \quad u(0) = 1$$

$$u_1'(x) = (c-m)g(x), u_1(0) = 0 \; burada \; c = \int_a^b h(t)u_0(t)$$

ve sonuç olarak da,

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x)$$

sonucu bulmalıyız. O halde,

$u_0'(x) = (x+1)e^x - x$ için $u_0(x) = \int_a^x ((t+1)e^t - x)dt = xe^x - \frac{1}{2}x^2$

$$c = \int_0^1 te^t - \frac{1}{2}t^2 dt = \frac{5}{6}, \alpha = \int_0^1 1\left[\int_0^t ydy\right]dt = \frac{1}{6}$$

buradan da

$$m = \frac{c\alpha}{\alpha - 1} = -\frac{1}{6}$$

olarak bulunur, o halde

$$u_1(x) = \frac{1}{2}x^2$$

ve çözüm,

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) = xe^x$$

olarak bulunur[18].

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] Bocher, M., An Introduction to the Study of Integral Equations,New York(1913).

[2] H.Hochstadt, İntegral Equation, A Wiley-İnterscience Publication (1973)

[3]M.Krasnov,A.Kiselev,G.Makeronko, İntegral Denklemler, Çev.C.Cerit,İstanbul(1976)

[4]B.Musayev,M.Alp, Fonksiyonel Analiz, Kütahya (2000)

[5] J.H. He, Homotopy perturbation technique, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 178 (3–4) 257–262 (1999).

[6] J.H. He, A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems, Internat. J. Non-Linear Mech. 35 (1) 37–43 (2000).

[7] J.H. He, Homotopy perturbation method: A new nonlinear analytical technique, Appl. Math. Comput. 135 ,73–79 (2003).

[8] J.H. He, Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method, Appl. Math. Comput. 156 ,527–539 (2004).

[9] S. Abbasbandy, Numerical solutions of the integral equations: Homotopy perturbation method and Adomian’s decomposition method, Appl.Math. Comput. 173 (2–3) 493–500 (2006).

[10] S. Abbasbandy, Application of He’s homotopy perturbation method to functional integral equations, Chaos Solitons Fractals 31 (5) 1243–1247 (2007).

[11] M. Ghasemi, M. Tavassoli Kajani, E. Babolian, Numerical solutions of the nonlinear Volterra–Fredholm integral equations by using homotopy perturbation method, Appl. Math. Comput. 188 446–449 (2007).

[12] He JH. Asymptotology by homotopy perturbation method. Appl Math Comput 156(3):591–6(2004);.

[13] E. Yusufoğlu (Agadjanov), A homotopy perturbation algorithm to solve a system of Fredholm–Volterra type integral equations, Mathematical and Computer Modelling (2007)

[14] M. Javidi , A. Golbabai, A numerical solution for solving system of Fredholm integral equations by using homotopy perturbation method, Applied Mathematics and Computation 189, 1921–1928 (2007)

[15] Golbabai A, Keramati B, Modified homotopy perturbation method for solving Fredholm integral equations, Chaos, Solitons & Fractals (2006).

[16] S. Abbasbandy, Modified homotopy perturbation method for nonlinear equations and comparison with Adomian decomposition method, Applied Mathematics and Computation 172 ,431–438 (2006)

[17] A.Adowi,F.Awawdeh, A Numerical Method For Solving Linear İntegral Equation ,İnt. J. Comtemp . Math Sciences, Vol.4 ,no:485-496.(2009).

[18] E. Yusufoğlu (Agadjanov), Improved Homotopy Perturbasyon Method For Solving Fredholm Type İntegro-Differential Equation, Chaos, Solitons & Fractals 28-37 (2007).

[19] D.D. Ganji, G.A. Afrouzi , H. Hosseinzadeh, R.A. Talarposhti, Application of homotopy-perturbation method to the second kind of nonlinear integral equations, Physics Letters A 371, 20–25 (2007)

[20] J. Biazar, H. Ghazvini, Convergence of the homotopy perturbation method for partial differential equations, Nonlinear Analysis: Real World Applications (2008),

EKLER

Ek 1:

Örnek 3.1.2 de verilen denklemin Maple ile çözüm programı şu şekildedir,

```
> restart;
> k:=(x,t)->1/2*sin(x);
```

$$k := (x, t) \to \frac{1}{2} \sin(x)$$

```
>
> g:=(x)->cos(x);
```

$$g := x \to \cos(x)$$

```
> for i from 0 to 5 do
h[i]:=expand(p*int(k(x,t)*u[i](t)*p^i,t=0..Pi/2));
od;
```

$$h_0 := \frac{1}{2} p \sin(x) \left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} u_0(t)\, dt \right)$$

$$h_1 := \frac{1}{2} \sin(x)\, p^2 \left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} u_1(t)\, dt \right)$$

$$h_2 := \frac{1}{2} \sin(x)\, p^3 \left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} u_2(t)\, dt \right)$$

$$h_3 := \frac{1}{2} \sin(x)\, p^4 \left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} u_3(t)\, dt \right)$$

$$h_4 := \frac{1}{2} \sin(x)\, p^5 \left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} u_4(t)\, dt \right)$$

$$h_5 := \frac{1}{2} \sin(x)\, p^6 \left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} u_5(t)\, dt \right)$$

```
> aa:=-sum(h[r],r=0..5)+expand((1-p)*(sum(u[z](x)*p^z,z=0..5)-
g(x)))+expand(p*(sum(u[q](x)*p^q,q=0..5)-g(x)));
```

$$aa := -\frac{1}{2}\sin(x)\,p^2\left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} u_1(t)\,dt\right) - \frac{1}{2}\sin(x)\,p^3\left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} u_2(t)\,dt\right) - \frac{1}{2}\sin(x)\,p^4\left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} u_3(t)\,dt\right) - \frac{1}{2}\,p\sin(x)\left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} u_0(t)\,dt\right) - \frac{1}{2}\sin(x)\,p^5\left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} u_4(t)\,dt\right) - \frac{1}{2}\sin(x)\,p^6\left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} u_5(t)\,dt\right) + u_1(x)\,p + u_2(x)\,p^2 + u_3(x)\,p^3 + u_4(x)\,p^4 + u_5(x)\,p^5 - \cos(x) + u_0(x)$$

```
> for l from 0 to 5 do
a[l]:=coeff(aa,p,l);
od;
```

$$a_0 := -\cos(x) + u_0(x)$$

$$a_1 := -\frac{1}{2}\sin(x)\left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} u_0(t)\,dt\right) + u_1(x)$$

$$a_2 := -\frac{1}{2}\sin(x)\left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} u_1(t)\,dt\right) + u_2(x)$$

$$a_3 := -\frac{1}{2}\sin(x)\left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} u_2(t)\,dt\right) + u_3(x)$$

$$a_4 := -\frac{1}{2}\sin(x)\left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} u_3(t)\,dt\right) + u_4(x)$$

$$a_5 := -\frac{1}{2}\sin(x)\left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} u_4(t)\,dt\right) + u_5(x)$$

```
> for j from 0 to 5 do
u[j](x):=solve(a[j]=0,u[j](x));
u[j](t):=subs(x=t,u[j](x));
od;
```

$$u_0(x) := \cos(x)$$

$$u_0(t) := \cos(t)$$

$$u_1(x) := \frac{1}{2}\sin(x)$$

$$u_1(t) := \frac{1}{2}\sin(t)$$

$$u_2(x) := \frac{1}{4}\sin(x)$$

$$u_2(t) := \frac{1}{4}\sin(t)$$

$$u_3(x) := \frac{1}{8}\sin(x)$$

$$u_3(t) := \frac{1}{8}\sin(t)$$

$$u_4(x) := \frac{1}{16}\sin(x)$$

$$u_4(t) := \frac{1}{16}\sin(t)$$

$$u_5(x) := \frac{1}{32}\sin(x)$$

$$u_5(t) := \frac{1}{32}\sin(t)$$

```
> for c from 0 to 5 do
factor(u[c](x));
od;
```

$$\cos(x)$$

$$\frac{1}{2}\sin(x)$$

$$\frac{1}{4}\sin(x)$$

$$\frac{1}{8}\sin(x)$$

$$\frac{1}{16}\sin(x)$$

$$\frac{1}{32}\sin(x)$$

```
> restart;
>
> cos(x)+sum(((1)^n)*1/(2^n)*sin(x),n=1..infinity);
```

$$\cos(x) + \sin(x)$$

Ek 2:

Örnek 3.2.1 de verilen denklemin Maple ile çözüm programı şu şekildedir,

```
> k:=(x,t)->exp(x+t);
```

$$k := (x, t) \rightarrow e^{x+t}$$

```
> f:=(x)->1/2*exp(x)*(e-1);
```

$$f := x \rightarrow \frac{1}{2}\, e^{x}\, (e - 1)$$

```
> for i from 0 to 5 do
g[i]:=expand(p*int(k(x,t)*u[i](t)*p^i,t=0..1/2));
od;
```

$$g_0 := p\left(\int_0^{\frac{1}{2}} e^{x}\, e^{t}\, u_0(t)\, dt\right)$$

$$g_1 := p^2 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} e^x e^t u_1(t)\, dt \right)$$

$$g_2 := p^3 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} e^x e^t u_2(t)\, dt \right)$$

$$g_3 := p^4 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} e^x e^t u_3(t)\, dt \right)$$

$$g_4 := p^5 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} e^x e^t u_4(t)\, dt \right)$$

$$g_5 := p^6 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} e^x e^t u_5(t)\, dt \right)$$

```
> aa:=sum(g[r],r=0..5)+expand((1-p)*sum(u[z](x)*p^z,z=0..5))-
p*f(x);
```

$$aa := p \left(\int_0^{\frac{1}{2}} e^x e^t u_0(t)\, dt \right) + p^2 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} e^x e^t u_1(t)\, dt \right) + p^3 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} e^x e^t u_2(t)\, dt \right) + p^4 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} e^x e^t u_3(t)\, dt \right) + p^5 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} e^x e^t u_4(t)\, dt \right) + p^6 \left(\int_0^{\frac{1}{2}} e^x e^t u_5(t)\, dt \right) + u_0(x) + u_1(x)\, p + u_2(x)\, p^2 + u_3(x)\, p^3 + u_4(x)\, p^4 + u_5(x)\, p^5 - p\, u_0(x) - u_1(x)\, p^2 - u_2(x)\, p^3 - u_3(x)\, p^4 - u_4(x)\, p^5 - u_5(x)\, p^6 - \frac{1}{2}\, p\, e^x\, (e - 1)$$

```
> for l from 0 to 5 do
a[l]:=coeff(aa,p,l);
od;
```

$$a_0 := u_0(x)$$

$$a_1 := \int_0^{\frac{1}{2}} e^x e^t u_0(t)\, dt + u_1(x) - u_0(x) - \frac{1}{2}\, e^x\, (e - 1)$$

$$a_2 := \int_0^{\frac{1}{2}} e^x e^t u_1(t)\, dt + u_2(x) - u_1(x)$$

$$a_3 := \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^x \, \mathrm{e}^t \, u_2(t) \, \mathrm{d}t + u_3(x) - u_2(x)$$

$$a_4 := \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^x \, \mathrm{e}^t \, u_3(t) \, \mathrm{d}t + u_4(x) - u_3(x)$$

$$a_5 := \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^x \, \mathrm{e}^t \, u_4(t) \, \mathrm{d}t + u_5(x) - u_4(x)$$

```
> for j from 0 to 5 do
u[j](x):=solve(a[j]=0,u[j](x));
u[j](t):=subs(x=t,u[j](x));
od;
```

$$u_0(x) := 0$$

$$u_0(t) := 0$$

$$u_1(x) := \frac{1}{2} \mathrm{e}^x e - \frac{1}{2} \mathrm{e}^x$$

$$u_1(t) := \frac{1}{2} \mathrm{e}^t e - \frac{1}{2} \mathrm{e}^t$$

$$u_2(x) := \frac{3}{4} \mathrm{e}^x e - \frac{3}{4} \mathrm{e}^x - \frac{1}{4} \mathrm{e}^{x+1} e + \frac{1}{4} \mathrm{e}^{x+1}$$

$$u_2(t) := \frac{3}{4} \mathrm{e}^t e - \frac{3}{4} \mathrm{e}^t - \frac{1}{4} \mathrm{e}^{t+1} e + \frac{1}{4} \mathrm{e}^{t+1}$$

$$u_3(x) := \frac{9}{8} \mathrm{e}^x e - \frac{9}{8} \mathrm{e}^x - \frac{3}{4} \mathrm{e}^{x+1} e + \frac{3}{4} \mathrm{e}^{x+1} + \frac{1}{8} \mathrm{e}^{x+2} e \\ - \frac{1}{8} \mathrm{e}^{x+2}$$

$$u_3(t) := \frac{9}{8} \mathrm{e}^t e - \frac{9}{8} \mathrm{e}^t - \frac{3}{4} \mathrm{e}^{t+1} e + \frac{3}{4} \mathrm{e}^{t+1} + \frac{1}{8} \mathrm{e}^{t+2} e \\ - \frac{1}{8} \mathrm{e}^{t+2}$$

$$u_4(x) := \frac{27}{16} \mathrm{e}^x e - \frac{27}{16} \mathrm{e}^x - \frac{27}{16} \mathrm{e}^{x+1} e + \frac{27}{16} \mathrm{e}^{x+1} \\ + \frac{9}{16} \mathrm{e}^{x+2} e - \frac{9}{16} \mathrm{e}^{x+2} - \frac{1}{16} \mathrm{e}^{x+3} e + \frac{1}{16} \mathrm{e}^{x+3}$$

$$u_4(t) := \frac{27}{16} \mathrm{e}^t e - \frac{27}{16} \mathrm{e}^t - \frac{27}{16} \mathrm{e}^{t+1} e + \frac{27}{16} \mathrm{e}^{t+1} + \frac{9}{16} \mathrm{e}^{t+2} e \\ - \frac{9}{16} \mathrm{e}^{t+2} - \frac{1}{16} \mathrm{e}^{t+3} e + \frac{1}{16} \mathrm{e}^{t+3}$$

$$u_5(x) := \frac{81}{32}\,e^x\,e - \frac{81}{32}\,e^x - \frac{27}{8}\,e^{x+1}\,e + \frac{27}{8}\,e^{x+1} + \frac{27}{16}\,e^{x+2}\,e - \frac{27}{16}\,e^{x+2} - \frac{3}{8}\,e^{x+3}\,e + \frac{3}{8}\,e^{x+3} + \frac{1}{32}\,e^{x+4}\,e - \frac{1}{32}\,e^{x+4}$$

$$u_5(t) := \frac{81}{32}\,e^t\,e - \frac{81}{32}\,e^t - \frac{27}{8}\,e^{t+1}\,e + \frac{27}{8}\,e^{t+1} + \frac{27}{16}\,e^{t+2}\,e - \frac{27}{16}\,e^{t+2} - \frac{3}{8}\,e^{t+3}\,e + \frac{3}{8}\,e^{t+3} + \frac{1}{32}\,e^{t+4}\,e - \frac{1}{32}\,e^{t+4}$$

```
> for c from 0 to 5 do
factor(u[c](x));
od;
```

$$0$$

$$\frac{1}{2}\,e^x\,(e-1)$$

$$\frac{1}{4}\,(e-1)\left(3\,e^x - e^{x+1}\right)$$

$$\frac{1}{8}\,(e-1)\left(9\,e^x - 6\,e^{x+1} + e^{x+2}\right)$$

$$\frac{1}{16}\,(e-1)\left(27\,e^x - 27\,e^{x+1} + 9\,e^{x+2} - e^{x+3}\right)$$

$$\frac{1}{32}\,(e-1)\left(81\,e^x - 108\,e^{x+1} + 54\,e^{x+2} - 12\,e^{x+3} + e^{x+4}\right)$$

```
> restart;
> sum((1/(2^(n+1)))*exp(x)*((3-exp(1))^n)*(exp(1)-
1),n=0..infinity);
```

$$e^x$$

Ek 3:

Örnek 3.3.2 de verilen denklemin Maple ile çözüm programı şu şekildedir,

```
> k:=(x,t)->x-t;
```

$$k := (x,t) \rightarrow x - t$$

```
>
> g:=(x)->x+1;
```

$$g := x \rightarrow x + 1$$

```
> for i from 0 to 5 do
h[i]:=expand(p*int(k(x,t)*u[i](t)*p^i,t=0..x));
od;
```

$$h_0 := p\left(\int_0^x \left(u_0(t)\,x - u_0(t)\,t\right)\,dt\right)$$

$$h_1 := p^2\left(\int_0^x \left(u_1(t)\,x - u_1(t)\,t\right)\,dt\right)$$

$$h_2 := p^3 \left(\int_0^x \left(u_2(t)\, x - u_2(t)\, t \right) \mathrm{d}t \right)$$

$$h_3 := p^4 \left(\int_0^x \left(u_3(t)\, x - u_3(t)\, t \right) \mathrm{d}t \right)$$

$$h_4 := p^5 \left(\int_0^x \left(u_4(t)\, x - u_4(t)\, t \right) \mathrm{d}t \right)$$

$$h_5 := p^6 \left(\int_0^x \left(u_5(t)\, x - u_5(t)\, t \right) \mathrm{d}t \right)$$

```
> aa:=-sum(h[r],r=0..5)+expand((1-p)*(sum(u[z](x)*p^z,z=0..5)-
g(x)))+expand(p*(sum(u[q](x)*p^q,q=0..5)-g(x)));
```

$$aa := -1 - p^4 \left(\int_0^x \left(u_3(t)\, x - u_3(t)\, t \right) \mathrm{d}t \right) - x - p^5 \left(\int_0^x \left(u_4(t)\, x - u_4(t)\, t \right) \mathrm{d}t \right) - p^3 \left(\int_0^x \left(u_2(t)\, x - u_2(t)\, t \right) \mathrm{d}t \right) - p^6 \left(\int_0^x \left(u_5(t)\, x - u_5(t)\, t \right) \mathrm{d}t \right) - p \left(\int_0^x \left(u_0(t)\, x - u_0(t)\, t \right) \mathrm{d}t \right) - p^2 \left(\int_0^x \left(u_1(t)\, x - u_1(t)\, t \right) \mathrm{d}t \right) + u_1(x)\, p + u_2(x)\, p^2 + u_3(x)\, p^3 + u_4(x)\, p^4 + u_5(x)\, p^5 + u_0(x)$$

```
> for l from 0 to 5 do
a[l]:=coeff(aa,p,l);
od;
```

$$a_0 := -1 - x + u_0(x)$$

$$a_1 := -\left(\int_0^x \left(u_0(t)\, x - u_0(t)\, t \right) \mathrm{d}t \right) + u_1(x)$$

$$a_2 := -\left(\int_0^x \left(u_1(t)\, x - u_1(t)\, t \right) \mathrm{d}t \right) + u_2(x)$$

$$a_3 := -\left(\int_0^x \left(u_2(t)\, x - u_2(t)\, t \right) \mathrm{d}t \right) + u_3(x)$$

$$a_4 := -\left(\int_0^x \left(u_3(t)\, x - u_3(t)\, t \right) \mathrm{d}t \right) + u_4(x)$$

$$a_5 := -\left(\int_0^x \left(u_4(t)\, x - u_4(t)\, t \right) \mathrm{d}t \right) + u_5(x)$$

```
> for j from 0 to 5 do
u[j](x):=solve(a[j]=0,u[j](x));
u[j](t):=subs(x=t,u[j](x));
od;
```

$$u_0(x) := x + 1$$

$$u_0(t) := t + 1$$

$$u_1(x) := \frac{1}{6}\, x^3 + \frac{1}{2}\, x^2$$

$$u_1(t) := \frac{1}{6}\, t^3 + \frac{1}{2}\, t^2$$

$$u_2(x) := \frac{1}{120}\, x^5 + \frac{1}{24}\, x^4$$

$$u_2(t) := \frac{1}{120}\, t^5 + \frac{1}{24}\, t^4$$

$$u_3(x) := \frac{1}{5040}\, x^7 + \frac{1}{720}\, x^6$$

$$u_3(t) := \frac{1}{5040}\, t^7 + \frac{1}{720}\, t^6$$

$$u_4(x) := \frac{1}{362880}\, x^9 + \frac{1}{40320}\, x^8$$

$$u_4(t) := \frac{1}{362880}\, t^9 + \frac{1}{40320}\, t^8$$

$$u_5(x) := \frac{1}{39916800}\, x^{11} + \frac{1}{3628800}\, x^{10}$$

$$u_5(t) := \frac{1}{39916800}\, t^{11} + \frac{1}{3628800}\, t^{10}$$

```
> for c from 0 to 5 do
factor(u[c](x));
od;
```

$$x + 1$$

$$\frac{1}{6}\, x^2\, (x + 3)$$

$$\frac{1}{120}\, x^4\, (x + 5)$$

$$\frac{1}{5040}\, x^6\, (x + 7)$$

$$\frac{1}{362880}\, x^8\, (x + 9)$$

$$\frac{1}{39916800}\, x^{10}\, (x + 11)$$

```
> restart;
>
> sum((x+((2*n)-1))*(x^(2*(n-1)))*(1/(((2*n)-
1)!)),n=1..infinity);
```

$$\sinh(x) + \cosh(x)$$

```
> convert(%,exp);
```

$$e^x$$

Ek 4:

Örnek 3.5.2 de verilen denklemin Maple ile çözüm programı şu şekildedir,

```
> k:=(x,t)->x;
```

$$k := (x, t) \to x$$

```
> f:=(x)->(x+1)*exp(x)-x;
```

$$f := x \to (x + 1)\, e^x - x$$

```
> for i from 0 to 5 do
g[i]:=expand(p*int(k(x,t)*u[i](t)*p^i,t=0..1));
od;
```

$$g_0 := p\, x \left(\int_0^1 u_0(t)\, dt \right)$$

$$g_1 := p^2\, x \left(\int_0^1 u_1(t)\, dt \right)$$

$$g_2 := p^3\, x \left(\int_0^1 u_2(t)\, dt \right)$$

$$g_3 := p^4\, x \left(\int_0^1 u_3(t)\, dt \right)$$

$$g_4 := p^5\, x \left(\int_0^1 u_4(t)\, dt \right)$$

$$g_5 := p^6\, x \left(\int_0^1 u_5(t)\, dt \right)$$

```
> aa:=expand((1-p)*(diff(sum(u[z](x)*p^z,z=0..5),x)-
f(x)))+expand(p*(diff(sum(u[s](x)*p^s,s=0..5),x)-f(x)))-
sum(g[r],r=0..5);
```

$$aa := x + \frac{d}{dx}\, u_0(x) - p^5\, x \left(\int_0^1 u_4(t)\, dt \right) + \left(\frac{d}{dx}\, u_1(x) \right) p - p\, x \left(\int_0^1 u_0(t)\, dt \right) - p^2\, x \left(\int_0^1 u_1(t)\, dt \right) - p^3\, x \left(\int_0^1 u_2(t)\, dt \right) - p^4\, x \left(\int_0^1 u_3(t)\, dt \right) - p^6\, x \left(\int_0^1 u_5(t)\, dt \right) + \left(\frac{d}{dx}\, u_2(x) \right) p^2 + \left(\frac{d}{dx}\, u_3(x) \right) p^3 + \left(\frac{d}{dx}\, u_4(x) \right) p^4 + \left(\frac{d}{dx}\, u_5(x) \right) p^5 - e^x\, x - e^x$$

```
> for l from 0 to 5 do
a[l]:=coeff(aa,p,l);
od;
```

$$a_0 := x + \frac{d}{dx}\, u_0(x) - e^x\, x - e^x$$

$$a_1 := \frac{d}{dx}\, u_1(x) - x \left(\int_0^1 u_0(t)\, dt \right)$$

$$a_2 := -x \left(\int_0^1 u_1(t)\, dt \right) + \frac{d}{dx}\, u_2(x)$$

$$a_3 := -x \left(\int_0^1 u_2(t)\, dt \right) + \frac{d}{dx} u_3(x)$$

$$a_4 := -x \left(\int_0^1 u_3(t)\, dt \right) + \frac{d}{dx} u_4(x)$$

$$a_5 := -x \left(\int_0^1 u_4(t)\, dt \right) + \frac{d}{dx} u_5(x)$$

```
> for j from 0 to 5 do
dsolve({a[j]=0,u[j](0)=0},u[j](x));
u[j](x):=op(2,%);
u[j](t):=subs(x=t,u[j](x));
od;
```

$$u_0(x) = -\frac{1}{2} x^2 + e^x x$$

$$u_0(x) := -\frac{1}{2} x^2 + e^x x$$

$$u_0(t) := -\frac{1}{2} t^2 + e^t t$$

$$u_1(x) = \frac{5}{12} x^2$$

$$u_1(x) := \frac{5}{12} x^2$$

$$u_1(t) := \frac{5}{12} t^2$$

$$u_2(x) = \frac{5}{72} x^2$$

$$u_2(x) := \frac{5}{72} x^2$$

$$u_2(t) := \frac{5}{72} t^2$$

$$u_3(x) = \frac{5}{432} x^2$$

$$u_3(x) := \frac{5}{432} x^2$$

$$u_3(t) := \frac{5}{432} t^2$$

$$u_4(x) = \frac{5}{2592} x^2$$

$$u_4(x) := \frac{5}{2592} x^2$$

$$u_4(t) := \frac{5}{2592} t^2$$

$$u_5(x) = \frac{5}{15552} x^2$$

$$u_5(x) := \frac{5}{15552} x^2$$

$$u_5(t) := \frac{5}{15552}\, t^2$$

```
>
> for c from 0 to 5 do
factor(u[c](x));
od;
```

$$-\frac{1}{2}\, x\left(x - 2\, e^x\right)$$

$$\frac{5}{12}\, x^2$$

$$\frac{5}{72}\, x^2$$

$$\frac{5}{432}\, x^2$$

$$\frac{5}{2592}\, x^2$$

$$\frac{5}{15552}\, x^2$$

```
> restart;
> -1/2*x^2+exp(x)*x+sum((5/(12*6^n))*x^2,n=1..infinity);
```

$$-\frac{5}{12}\, x^2 + e^x\, x$$