

LİNEER OLMAYAN DENKLEMLERİN

ÇÖZÜMLERİ

Fikret TATAR

Yüksek lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Haziran - 2009

# LİNEER OLMAYAN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Fikret TATAR

Dumlupınar Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca  
Matematik Anabilim Dalında  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ahmet BEKİR

Haziran - 2009

**KABUL ve ONAY SAYFASI**

Fikret TATAR'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı LİNEER OLMAYAN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

...../...../2009

Üye: Yrd. Doç. Dr. Ahmet BEKİR

Üye: Yrd. Doç. Dr. Filiz TAŞCAN

Üye: Yrd. Doç. Dr. Dursun İPEK

Fen Bilimleri Enstitüsün Yönetim Kurulu'nun ...../...../2009 gün ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Atalay KÜÇÜKBURSA  
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

# LİNEER OLMAYAN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Fikret TATAR

Matematik Anabilim Dalında, Yüksek Lisans Tezi, 2009

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ahmet BEKİR

## ÖZET

Lineer olmayan denklemler fizik, kimya, biyoloji gibi bir çok alanda kullanılan denklemlerdir. Uygulamalı matematik ise bu denklemlerin çözümleri ve yeni çözüm yolları geliştirmekle ilgilenir. Bu çalışmada da lineer olmayan denklemlerin tam çözüm yollarından üstel fonksiyon yöntemi ve bu yöntemin çeşitli denklemlere uygulamaları yapılmıştır. Çalışmanın birinci bölümünde kısmi türevli diferensiyel denklemlere ilişkin genel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde ise üstel fonksiyon yönteminin tanıtımı yapılmıştır. Üçüncü bölümde üstel fonksiyon yönteminin çeşitli boyutlardaki, lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemler, denklem sistemleri ve lineer olmayan diferensiyel fark denklemlerine uygulaması yapılmıştır. Dördüncü bölümde ise çalışmadan elde edilen sonuçlar verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Diferensiyel denklem, Diferensiyel fark denklemi, Kısmi türevli denklem, Tam çözümler, Üstel fonksiyon yöntemi.

## **SOLUTION OF NONLINEAR EQUATIONS**

Fikret TATAR

Mathematics, M.Sc. Thesis, 2009

Supervisor: Assist. Prof.. Dr. Ahmet BEKİR

### **SUMMARY**

Nonlinear equations are equations that can be used many areas such as chemistry, physics and biology. Application mathematics is interested in with exact solution of this equations and improving new solution methods. In this study, solutions of exponential functions method that are nonlinear equations and application of this methods to other equations are done. In first part of study, general informations about partial differantial equations are given. In the second part of the study, exponential function method is introduced. In third part of the study, applications of exponential function method is done to nonlinear partial differential equations, equation systems and nonlinear difference-differential equations. In the last part of the study results of this study are given.

**Keywords:** Differential equations, Differential-difference equations, Partial derivative equations, Exact solutions, Exp-Function method.

## TEŞEKKÜR

Bu alıőmada katkılarından dolayı; başta danışman hocam Yrd. Do. Dr. Ahmet BEKİR beye ve tüm bölüm öğretim elemanlarına, çalıőmalarım süresinde her türlü desteğinden dolayı kuzenime, hayatımın anlamı her türlü mutluluğu ve sıkıntıyı birlikte yaőadığım biricik eőime ve ailesine, sevgileri tarife sığmayan kardeőlerim Fethi, Sefa ve Seren'e, yanımda olması bana huzur ve güven veren dünyanın en iyi insanı olan babama, eő ve emsalini hiç görmediğim hayatımdaki en önemli insan olan canım anneme sonsuz teşekkür ediyorum. Bu çalıőmayı gelmesini umutla beklediğim sevgili çocuğuma armağan ediyorum.

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET .....	iv
SUMMARY .....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
1. KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN TANITIMI .....	1
1.1. Genel Kavramlar .....	1
1.2. Kısmi Türevli Denklemlerin Genel Bir Sınıflandırması .....	3
1.3. Kısmi Türevli Denklemlerin Elde Edilmesi.....	4
1.4. Birinci Basamaktan Lineer Olmayan Denklemler .....	5
1.5. Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri.....	6
1.6. Soliton Teorisine Fiziksel Bakış .....	8
2. ÜSTEL FONKSİYON YÖNTEMİ.....	12
2.1. Yöntemin Genel Tanıtımı .....	12
2.2. Riccati Denkleminin Üstel Fonksiyon Yöntemi ile Çözümü.....	15
2.3. Lineer Olmayan Diferensiyel Fark Denklemleri.....	16
3. YÖNTEMİN UYGULAMALARI.....	18
3.1. Üstel Fonksiyon Yöntemini (1+1) Boyutlu Denkleme Uygulaması .....	18
3.2. Üstel Fonksiyon Yöntemini (2+1) Boyutlu Denkleme Uygulaması .....	20
3.3. Üstel Fonksiyon Yöntemini (3+1) Boyutlu Denkleme Uygulaması .....	23
3.4. Üstel Fonksiyon Yöntemini (1+1) Boyutlu Denkleme Sistemine Uygulaması .....	26
3.5. Üstel Fonksiyon Yöntemini (2+1) Boyutlu Denkleme Sistemine Uygulaması .....	30
3.6. Üstel fonksiyon yönteminin (1+1) boyutlu lineer olmayan diferensiyel fark denklemine uygulaması.....	32
3.7. Üstel fonksiyon yönteminin (2+1) boyutlu lineer olmayan diferensiyel fark denkleme sistemine uygulaması .....	36
4. SONUÇ .....	39
KAYNAKLAR DİZİNİ .....	40

## 1. KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN TANITIMI

### 1.1. Genel kavramlar

Bu kesimde kısmi türevli denklemlere ilişkin bazı tanım ve kavramları verilecektir.

**Tanım:** İçinde en az iki bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ile bağımsız değişkenlere göre çeşitli basamaktan kısmi türevlerini kapsayan eşitliklere (özdeşlik değil) bir kısmi türevli denklem denir.

$z$  bağımlı,  $x$  ve  $y$  bağımsız değişkenler olmak üzere bir kısmi türevli denklem genel olarak;

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots) = 0 \quad (1.1.1)$$

şeklindedir. Burada

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad (1.1.2)$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad (1.1.3)$$

$$z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad (1.1.4)$$

$$z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad (1.1.5)$$

$$z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad (1.1.6)$$

şekillerinde ifade edilebilir.  $n$  bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip kısmi türevli denklemlerin genel şekli:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.1.7)$$

ve

$$z = z(x) \quad (1.1.8)$$



olmak üzere

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, z_{x_1}, \dots, z_{x_n}, z_{x_1 x_1}, z_{x_1 x_2} \dots) = 0 \quad (1.1.9)$$

şeklindedir. Burada  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  bağımsız değişkenleri,  $(z)$  ise bağımlı değişkeni göstermekte, öte yandan  $(i, j = 1, 2, \dots, n)$  ise:

$$z_{x_i} = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad (1.1.10)$$

$$z_{x_i y_j} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial y_j}, \quad (1.1.11)$$

olarak ifade edilir.

**Tanım:** Bir kısmi türevli denklemde görülen en yüksek basamaktan kısmi türevin basamağına denir.

$$u_{tt} + au_t = c^2 u_{xx} \quad (1.1.12)$$

$(a, c)$  sabit sönümlü dalga denklemi ikinci basamaktan bir kısmi türevli denklemdir.

Adi türevli diferensiyel denklemlerin genel çözümleri, denklemin basamağı kadar keyfi sabit kapsayan ve her noktasından teğet doğruların çizilebildiği eğri aileleridir. Bu eğri aileleri  $xy$  - düzleminindedir. Kısmi türevli denklemlerin genel çözümleri ise denklemin basamağı kadar keyfi fonksiyon kapsayan ve her noktasından teğet düzlemlerin çizilebildiği yüzey aileleridir.

Adi türevli denklemlerde önceden verilen bir noktadan geçen çözümü araştırırken bir başlangıç veya sınır değer problemi ile karşılaşılır. Buna karşılık kısmi türevli denklemlerde ise önceden verilen bir eğriden geçen çözümün araştırılması cauchy problemi olarak ortaya çıkar.

**Tanım:** Bir kısmi türevli denklemi özdeş olarak sağlayan ve keyfi fonksiyon veya keyfi parametre kapsamayan bir fonksiyona bu kısmi türevli denklemin basamağı kadar ( sürekli türetilebilir ) keyfi fonksiyon kapsayan ve denklemi özdeş olarak sağlayan bir yüzey ailesine bu kısmi türevli denklemin genel çözümü denir. İki bağımsız değişken kapsayan kısmi türevli denklemler için:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad (1.1.13)$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad (1.1.14)$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad (1.1.15)$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad (1.1.16)$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad (1.1.17)$$

gösterimleri kullanılır.

## 1.2. Kısmi türevli denklemlerin genel bir sınıflandırması

Burada kısmi türevli denklemlerin genel bir sınıflandırılmasını yapılacaktır. Daha sonra, hemen hemen lineer denilen kısmi türevli denklem tipi kendi aralarında tekrar sınıflandırılacaktır.

**Tanım:** Bir kısmi türevli denklemdeki bağımlı değişken ( birden fazla bağımlı değişken olması halinde değişkenler ) ve bunların denklemdeki bütün kısmi türevleri birinci dereceden ve denklemi, bağımlı değişken ile onun türevleri parantezinde yazıldığında katsayılar yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonu oluyorsa bu denkleme lineerdir denir. Aksi halde lineer olmayan denklem adını alır.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan lineer kısmi türevli denklemlerin genel formları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$S(x, y) = P(x, y)z_x + Q(x, y)z_y + R(x, y)z \quad (1.2.1)$$

ve

$$\begin{aligned} G(x, y) &= A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + D(x, y)z_x \\ &+ E(x, y)z_y + F(x, y)z \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

yukarıdaki denklemlerde  $x, y$  bağımsız,  $z$  bağımlı değişkendir.

**Tanım:** Bir kısmi türevli denklem, denklemde bulunan en yüksek basamaktan kısmi türevlere göre (denklemdaki düşük basamaklı türevlerin ve bağımlı değişkenin bulunuş şeklinden bağımsız olarak) lineer ise bu denklem yarı lineer (kuasi lineer) adını alır.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan yarı lineer denklemin genel şekilleri sırası ile;

$$P(x, y, z)z_x + Q(x, y, z)z_y = R(x, y, z), \quad (1.2.3)$$

$$A(x, y, z, z_x, z_y)z_{xx} + B(x, y, z, z_x, z_y)z_{xy} + C(x, y, z, z_x, z_y)z_{yy} + D(x, y, z, z_x, z_y) = 0 \quad (1.2.4)$$

Her lineer denklem aynı zamanda yarı lineerdir, fakat yarı lineer bir denklem lineer olmayabilir.

**Tanım:** Bir kısmi türevli denklem yarı lineer ve denklemde görülen en yüksek basamaktan türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise bu denkleme hemen hemen lineerdir denir.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip ikinci basamaktan hemen hemen lineer bir denklemin genel şekli;

$$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + D(x, y, z, z_x, z_y) = 0 \quad (1.2.5)$$

formundadır.

### 1.3. Kısmi türevli denklemlerin elde edilmesi

Kısmi türevli denklemlerin çoğu fiziksel olayların analizinden ortaya çıkmıştır. Örnek olarak belli bir ortamda kararlı ısı denilen zamandan bağımsız ısı dağılımı, zamana bağlı ısı yayılması, değişik tipteki dalga yayılmaları gibi fiziksel olaylar kısmi türevli denklemler yardımıyla kolayca incelenebilmektedir. Fiziksel bir olayı matematiksel ifadelerle modelleyerek bir kısmi türevli denklem elde etmek mümkün olabilir. Kısmi türevli denklemin elde edilmiş yollarından birisi budur. Ancak bu tip denklemlerin elde edilmiş şekli değil çözümleri üzerinde durulacaktır.

Bu kesimde verilen bir yüzey ailesinin sağladığı en küçük basamaktan kısmi türevli denklemin nasıl elde edildiği görülecektir. Bunun için verilen yüzey ailesindeki bağımlı değişken, bağımsız değişkenlere göre yeterince türetilip verilen yüzey ile hesaplanan türevler arasında keyfi fonksiyonlar ve bunların türevleri yok edilir. Verilen yüzey ailesi, bu denklemin genel çözümü olabileceği gibi, genel çözümün parametrelere bağlı bir alt sınıfı da olabilir. Bu durumda verilen yüzeyle türevler arasında keyfi parametreler yok edilir.

- a) Keyfi sabitlerin yok edilmesi
- b) Keyfi fonksiyonların yok edilmesi
- c) Geometrik problemler

#### 1.4. Birinci basamaktan lineer olmayan denklemler

Bu kısımda;

$$p = z_x, \quad (1.4.1)$$

$$q = z_y, \quad (1.4.2)$$

olmak üzere:

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (1.4.3)$$

birinci basamaktan genel kısmi türevli denklem incelenecektir. Burada  $F$ 'in  $p$  ve  $q$ 'a göre lineer olması gerekmemektedir.

**Tanım:** Aşağıdaki gibi:

$$G(x, y, z, a, b) = 0 \quad (1.4.4)$$

şeklindeki iki parametrelili bir yüzey ailesi, birinci basamaktan (1.4.3) denklemini sağlıyorsa bu yüzey ailesine (1.4.3)'ün tam integrali denir.

**Tanım:** Her noktasında,  $G(x, y, z, a, b) = 0$  iki parametrelili yüzey ailesindeki her bir yüzeye teğet olan diğer bir yüzeye (1.4.4) yüzey ailesini bir zarfı denir.

Zarf yüzeyi, (1.4.4) yüzey ailesini sağladığı denklemi sağlar. Dolayısıyla zarf yüzeyi (1.4.3) denkleminin bir çözümüdür. Zarf yüzeyi, (1.4.4)denklemindeki  $a$  ve  $b$  parametrelerine özel değerler verilerek elde edilmez.

Şimdi  $a$  ve  $b$  parametreleri arasında:

$$b = \varphi(a) \quad (1.4.5)$$

şeklinde bir fonksiyonel bağıntının olduğu varsayılırsa:

$$G(x, y, z, a, \varphi(a)) = 0 \quad (1.4.6)$$

Bir parametrelili yüzey ailesi elde edilir. (1.4.6) ailesinin bir zarfı bulunursa, bulunan bu değer (1.4.3) denklemini sağlar. (1.4.5) ailesindeki  $\varphi$  fonksiyonu keyfi olduğundan (1.4.5)'e (1.4.3)'ün genel integrali denir. (1.4.5) ailesinin bir zarfı;

$$G(x, y, z, a, \varphi(a)) = 0$$

$$\frac{\partial G(x, y, z, a, \varphi(a))}{\partial a} = 0, \quad (1.4.7)$$

denklemleri arasında  $a$  parametresinin yok edilmesi ile bulunur. İki parametrelili (1.4.4) yüzey ailesinin zarfını bulabilmek için

$$G(x, y, z, a, b) = 0,$$

$$\frac{\partial G(x, y, z, a, b)}{\partial a} = 0,$$

$$\frac{\partial G(x, y, z, a, b)}{\partial b} = 0,$$

denklemleri arasında  $a, b$  parametreleri yok edilir. Bu şekilde elde edilen zarfa verilen denklem için bir singüler integral veya singüler çözüm denir [1].

### 1.5. Lineer olmayan oluşum denklemleri

Bağımsız değişkenlerinde biri  $t$  zaman olan kısmi türevli diferensiyel denklemlere oluşum denklemleri denilmektedir. Oluşum denklemleri,  $K[u], u$  ve  $u$ 'un  $x$  değişkenine göre türevlerinin tanımlı fonksiyonu olmak üzere:

$$u_t = K[u], \quad (1.5.1)$$

formundadır. Eğer  $K[u], u$  terimine göre lineer ise, bu tip denklemlere lineer oluşum denklemleri ve  $K[u]; u$  terimine göre lineer değil ise, bu tip denklemlere lineer olmayan oluşum denklemleri denilir.

Lineer dalga denklemi veya bir teldeki titreşimi, ısı iletimini tanımlayan denklemler lineer oluşum denklemlerine iki basit örnektir. Lineer olmayan oluşum denklemleri ise mekanik, fizik, kimya, biyoloji gibi bir çok daldaki problemlerde gözlenmektedir.

Bu tip denklemlere birkaç örnek verilmek istenirse:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.5.2)$$

formundaki birinci mertebeden lineer olmayan oluşum denklemi, bir boyutlu trafik çalışmalarından türetilmiştir. Bu durumda  $u(x, t)$ ,  $t$  zamanında  $x$  konumundaki araçların yoğunluğunu göstermektedir. (1.5.2) denklemi, korunum kanunlarına sahip olan gaz dinamiği çalışmalarını için bir model denklem olarak ta kullanılmaktadır.

İkinci mertebeden lineer olmayan oluşum denklemleri ile de karşılaşılabilir. Örneğin, anlık sıcaklığa bağlı olarak birim zamanda ısı üreten bir ısı kaynağıyla, bir cisimdeki ısı transferi incelenirse

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(k\nabla u) + f(u), \quad (1.5.3)$$

ile verilen lineer olmayan ısı denkleminde ulaşıılır. Yer değiştirmeye bağlı, lineer olmayan bir dış kuvvet nedeniyle zorlamalı titreşimi göz önüne alınırsa:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u), \quad (1.5.4)$$

formundaki lineer olmayan dalga denkleminde ulaşıılır.

Kuantum mekaniğinde, aşığıdaki formlarda lineer olmayan oluşum denklemleri ile karşılaşılabilir.

Sine-Gorden denklemi:

$$u_{tt} - \Delta u + \sin u = 0, \quad (1.5.5)$$

Klein-Gorden denklemi:

$$u_{tt} - \Delta u + mu + \gamma u^3 = 0, \quad (1.5.6)$$

Kübik Schrödinger denklemi:

$$iu_t - \Delta u + \gamma |u|^2 u = 0, \quad (1.5.7)$$

İkinci mertebeden denklemlere ilave olarak, yüksek mertebeden lineer olmayan oluşum denklemleri ilede karşılaşılabılır. Örneğin polimerler, camlar ve bunlar gibi ikili alaşımların faz geçişleri üzerinde yapılan çalışmalarda, aşağıda verilen Cahn-Hilliard denklemine ulaşılır:

$$u_t + \epsilon \Delta^2 u = \Delta \Phi(u), \quad (1.5.8)$$

Bu denklemde  $\epsilon$  belirli bir küçük sabit ve genellikle  $\Phi(u) = u^3 - u$  olarak alınmaktadır. (1.5.8) denklemi dördüncü mertebeden bir oluşum denklemidir. Yüksek mertebeden oluşum denklemlerine diğer bir örnek ise;

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (1.5.9)$$

şeklindeki denklemdir.

## 1.6. Soliton teorisine fiziksel bakış

Bir fizik terimi olarak dalga, bir ortamda veya bir boşlukta yayılan ve genellikle enerjini taşınmasına yol açan titreşime verilen isimdir. En bilindik olanları, suda ilerleyen yüzey dalgalarıdır. Bununla birlikte ses, ışık ve atomun içindeki taneciklerin hareketleri de dalga özellikleri gösterirler. En basit dalgada bile titreşimler, sabit bir frekans ve dalga boyu ile periyodik olarak salınım yaparlar.

Ses dalgaları gibi mekaniksel dalgalar ilerleyebilecekleri bir ortama ihtiyaç duyarlarken, elektromanyetik dalgalar bir ortama gereksinim duymazlar ve boşlukta bile yayılabilirler. Bir ortamdaki bir dalganın yayılması ortamın özelliklerine de bağlıdır.

Dalgalar, duran ve ilerleyen dalgalar olarak sınıflandırılabilirler. Duran dalgalar, pozisyonu sabit olarak kalan dalgalarıdır. Bu tip dalgalar, dalganın bulunduğu ortam dalganın hareket ettiği yönün tersine hareket ettiğinde veya durağan bir ortamda birbiri ile zıt yönde ilerleyen dalgaların girişmesi sonucunda oluşurlar. İlerleyen dalgalar ise, bir noktadan diğer bir noktaya madde taşınması söz konusu olmaksızın enerjinin yayılması ile oluşan dalgalarıdır.

Solitonlar ise aşağıdaki iki temel özelliği sağlayan lineer olmayan dalgalar olarak tanımlanabilir:

1) Şekil, hız gibi özellikleri değişmeksizin yayılan yerleşik (lokalize) dalgalardır.

2) Karşılıklı çarpışmaya karşı kararlıdır ve kendi özelliklerini çarpışma sonrasında koruyabilirler.

İlk özellik, solitary dalga şartıdır. İkinci şart ise parçacık özelliğine sahip bir dalga anlamına gelmektedir. Ayrıca solitary dalgalarının özellikleri hakkında Russel adlı bilim insanı tarafından aşağıdaki önemli bilgilere ulaşılmıştır bunlar :

a) Solitary dalgaları  $h \operatorname{sech}^2(k(x - vt))$  şekline sahiptir.

b) Yeterince büyük miktardaki su kütlesi, iki veya daha fazla bağımsız solitary dalga üretir.

c) Normal dalgaların aksine solitary dalgaları asla birleşmezler. Bu sebeple küçük genliğe sahip bir solitary dalga ile büyük genliğe sahip bir solitary dalga birbirleri ile çarpıştıktan sonra, iki solitary dalga birbirlerinden ayrılarak şekillerinde bir bozulma olmadan yollarına devam edebilirler. Normal dalgalar, ya düzleşmeye başlar yada dikleşerek sönecek şekilde hareket ederlerken, solitary dalgaları kararlıdır ve uzun mesafelerde yolculuk yapabilirler.

d)  $g$  yerçekimi ivmesi olmak üzere  $h$  yüksekliğine sahip olan ve  $d$  derinliğindeki bir kanalda hareket eden bir solitary dalga:

$$v = \sqrt{g(d + h)}, \quad (1.6.1)$$

ile ifade edilen bir hıza sahiptir. Diğer bir ifade ile dalga hızı, yüksekliğine ve suyun derinliğine bağlıdır.

Dolayısıyla büyük genlikli bir solitary dalga, küçük genlikli bir solitary dalga göre daha hızlı hareket eder. Bir solitary dalgasının hızı genliği ile orantılı olduğundan, bir solitary dalga normal dalgalardan farklıdır. Örneğin biri alçak biri yüksek iki ses aynı anda oluştuğunda, kulak her iki sesi de aynı anda duyacaktır. Fakat bu iletim esnasında solitary dalgaları kullanılsaydı, yüksek sesin daha önce duyulması gerekirdi. İnsan vücudundaki sinirler arasındaki iletişim ise normal dalgalarla yapılmazlar. Sıcak bir çay bardağı ele alındığında sıcaklık kademeli olarak hissedilirken, kor halindeki sıcak bir kömür parçasına veya sıcak bir



fırına el yaklaştırıldığında, sıcaklık hemen hissedilir ve el geriye çekilir. Dolayısıyla sinirler bir nevi solitary dalgası oluşturarak beyine bilgiyi en kısa şekilde normal dalgalara göre daha hızlı olarak iletirler.

Önceki yıllarda sonuçlar deneysel olarak kalmış ve bir denklem çözümü için solitary dalgaları elde edilememiştir. Bununla birlikte bir denklemin çözümünü veren solitary dalga problemleri araştırma konusu olmuştur. Ünlü matematikçi Kortoveg ve Vries tarafından

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} + \gamma u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0, \quad (1.6.2)$$

formundaki sığ su dalgalarının hareketini modelleyen denklem üzerinde çalışmaya başlanılmıştır. denklemden;

$u(x,t)$ , dalga genliğinin,

$c = \sqrt{gd}$ , küçük genlikli dalganın hızına,

$\varepsilon = c(d^2/6 - T/2pg)$ , Dağılma parametresine,

$\gamma$ , lineer olmayan parametreye,

$T$ , yüzey gerilimine,

$P$ , suyun yoğunluğuna

karşılık gelmektedir. (1.6.2) denkleminin

$$u(x,t) = \tilde{u}(x - vt), \quad (1.6.3)$$

formunda ve şekli değişmeyen bir hareketli dalga çözümüne sahip olduğu gösterilmiştir. Burada (1.6.3) ifadesi önceki kısımlarda belirtilen Russel'in solitary dalga tanımına uymaktadır. Böylece solitary dalgaların varlığı Korteweg ve Vries tarafından kanıtlanmıştır. Bununla birlikte dalgaların kararlılıkları ve iki solitary dalganın çarpışma sonrası şekillerinin değişip değişmeme konusu netlik kazanmamıştır. Netlik kazanmayan konu ile ilgili çalışmalar Kruskal ve Zabusky isimli bilim insanları tarafından incelenmiş, KdV denkleminin sonlu farklar metodu ile çözümleri araştırılırken, solitary dalgaların çarpışma sonrası şekillerini değiştirmedikleri görülmüştür. Bu özelliğin parçacıkların çarpışmasına benzediği bulunarak bu tip dalgalara soliton adı verilmiştir. Sonraki yıllarda konu ile ilgili Gardner, Greene, Kruskal ve

Miura isimli bilim insanları tarafından ters saçılma dönüşüm (TSD) metodu geliştirilerek, KdV denkleminin soliton çözümleri analitik olarak verilmiştir.

Soliton çözümleri, hem analitik hemde sayısal olarak elde edildikten sonra, soliton üzerinde çalışmalar hızlanmıştır. Günümüzde ilk kez bir su kanalında gözlenen solitary dalgası soliton olarak; akışkanlık mekaniği, temel parçacıklar fiziği, biyofizik gibi bir çok fizik alanında kullanılmaktadır. Solitonlar tarafından uzun mesafelerde yol alınabildiği için ; teorik olarak bir fiber optikte normal dalga yerine kullanılacak olan solitonlar sayesinde, taşınan sinyalde kayıp olmaksızın büyük miktarda bilgi binlerce kilometre boyunca taşınabilecektir. Bu sebeple, soliton elektronik ve telekomünikasyon alanlarında oldukça sık kullanılmaktadır. Yakın gelecekte ilerleyen çalışmalar neticesinde ve iletişim sektörü gibi bir çok yerde solitonların kullanılması beklenmektedir [2].

## 2. ÜSTEL FONKSİYON YÖNTEMİ

### 2.1. Yöntemin genel tanıtımı

Bu bölümde lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemlerin tam çözüm yöntemlerinden üstel fonksiyon yöntemi anlatılacaktır. Öncelikle kısmi türevli diferensiyel denklem adi diferensiyel denkleme çevrilecektir, üstel fonksiyon yöntemin genelinden bahsedilip, riccati denklemi verilecek ve lineer olmayan diferensiyel fark denklemlerine değinilecektir.

Bu yöntem ilk olarak He isimli bilim insanı tarafından tanımlanmış ve birçok bilim insanı tarafından çeşitli uygulamaları verilmiştir [3, 4].

Üstel fonksiyon yönteminde,  $c, d, p$  ve  $q$  pozitif tamsayılar,  $a_n$  ve  $b_m$  daha sonra belirlenecek katsayılar olmak üzere:

$$u(\xi) = \frac{\sum_{n=-c}^d a_n e^{(n\xi)}}{\sum_{-p}^q b_m e^{(m\xi)}}, \quad (2.1.1)$$

şeklinde çözüm aranır. Lineer olmayan en yüksek mertebeden terim ile en yüksek mertebeden lineer terimin dengelenmesinden  $c$  ile  $p$  ve  $d$  ile  $q$  dengelendiği görülebilir.  $c, d, p$  ve  $q$  in durumlarına göre tam çözümler elde edilebilir. Örneğin,  $c = d = p = q = 1$  alınırsa çözüm:

$$u(\xi) = \frac{a_{-1}e^{-\xi} + a_0 + a_1\xi}{b_{-1}e^{-\xi} + b_0 + b_1e^{\xi}}, \quad (2.1.2)$$

şeklinde bulunur.  $u(x, t)$  ifadesi indirgenmiş denklemde yerine yazılarak,  $e^{(n\xi)}$  in kuvvetlerine göre düzenlenirse, cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminden  $a_n$  ve  $b_m$  değerleri bulunarak hareketli dalga çözümleri elde edilebilir. Yöntemle ilgili verilen ön bilgilerden sonra yöntem daha geniş şekilde aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Genel olarak lineer olmayan denklem

$$F(u, u_t, u_x, u_{xt} \dots) = 0, \quad (2.1.3)$$

şeklinde verilen lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklem ele alınır.

$$\xi = kx + wt \quad (2.1.4)$$

$k, w$  sabitler olmak üzere verilen benzerlik dönüşümünü (hareketli dalga dönüşümünü) yapılır. İfadenin  $\xi$ , 'ye göre türevi alınırsa

$$H(u, u', u'', u''', \dots) = 0, \quad (2.1.5)$$

olarak adi diferensiyel denkleme dönüşür.

$$u_t + u^2 u_x + u_{xxx} = 0, \quad (2.1.6)$$

mKdv denklemini ele alındığında

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = w \frac{\partial u}{\partial \xi} = wu' \quad (2.1.7)$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = k \frac{\partial u}{\partial \xi} = ku' \quad (2.1.8)$$

$$u_{xx} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_x = \left( k \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_x = k \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} k = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = k^2 u'' \quad (2.1.9)$$

$$u_{xxx} = k^3 \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = k^3 u''' \quad (2.1.10)$$

böylece başta verilen kısmi türevli diferensiyel denklem olan mKdv denklemini:

$$wu + u^2 .ku' + k^3 .u''' = 0 \quad (2.1.11)$$

şeklindeki adi diferensiyel denkleme dönüşür.

Dönüşümün çözülebilir olması için adi diferensiyel denklemin lineer kısmının en yüksek mertebelisi ile lineer olmayan kısmının en yüksek mertebelisinin dengelenmesine bakılır.

$$u''' \text{ (En yüksek mertebeden lineer terim),} \quad (2.1.12)$$

$$u^2 .u' \text{ (En yüksek mertebeden lineer olmayan terim),} \quad (2.1.13)$$

$$u = \tau^m, \quad (2.1.14)$$

$$u^2 = \tau^{2m}, \quad (2.1.15)$$

$$u' = m\tau^{m-1}, \quad (2.1.16)$$

$$u'' = m(m-1)\tau^{m-2}, \quad (2.1.17)$$

$$u''' = m(m-1)(m-2)\tau^{m-3} \quad (2.1.18)$$

$$m\tau^{2m+m-1} \cong \tau^{m-3}, \quad (2.1.19)$$

$$3m-1 = m-3, \quad (2.1.20)$$

$$m = -1. \quad (2.1.21)$$

burada bulunan sonucun negatif çıkması dengelenmenin sağlandığını gösterir. Önceden de ifade edildiği gibi üstel fonksiyon yönteminde çözüm aranırken aşağıdaki verilen (2.1.1) deki genel ifadeden faydalanılır.

$$u(\xi) = \frac{\sum_{n=-c}^d a_n \cdot e^{(n\xi)}}{\sum_{m=-p}^q b_m \cdot e^{(m\xi)}},$$

daha sonra bu genel ifade açılarak

$$u(\xi) = \frac{a_c e^{c\xi} + \dots + a_{-d} e^{-d\xi}}{a_p e^{p\xi} + \dots + a_{-q} e^{-q\xi}}, \quad (2.1.22)$$

buradan hareketle

$$u(\xi) = \frac{c_1 e^{c\xi} + \dots}{c_2 e^{p\xi} + \dots} = \frac{c_1 e^{(p+c)\xi} + \dots}{c_2 e^{(2p)\xi} + \dots} = \frac{c_1 e^{(2p+c)\xi} + \dots}{c_2 e^{(3p)\xi} + \dots}, \quad (2.1.23)$$

$$u'(\xi) = \frac{c_3 e^{c\xi} + \dots}{c_4 e^{p\xi} + \dots} = \frac{c_3 e^{(p+c)\xi} + \dots}{c_4 e^{(2p)\xi} + \dots} = \frac{c_3 e^{(2p+c)\xi} + \dots}{c_4 e^{(3p)\xi} + \dots}, \quad (2.1.24)$$

fonksiyonun özelliğinden dolayı  $u' = u'' = u'''$  olur. Daha sonra ise  $u^2$  ve  $u^3$  yazılır.

$$u^2 = \frac{c_5 \cdot e^{(2c)\xi}}{c_6 \cdot e^{(3p)\xi}} = \frac{c_5 \cdot e^{(2c+p)\xi}}{c_6 \cdot e^{(3p)\xi}} = \frac{c_5 \cdot e^{(2c+2p)\xi}}{c_6 \cdot e^{(4p)\xi}}, \quad (2.1.25)$$

$$u^3 = \frac{c_7 \cdot e^{(3c)\xi}}{c_8 \cdot e^{(4p)\xi}} = \dots = \frac{c_7 \cdot e^{(3c+p)\xi}}{c_8 \cdot e^{(4p)\xi}}, \quad (2.1.26)$$

olarak bulunur [5, 6].

## 2.2. Riccati denkleminin üstel fonksiyon yöntemi ile çözümü

Aşağıdaki şekilde verilen benzerlik dönüşümü:

$$\eta = k\xi + \xi_0 \quad (2.2.1)$$

ve

$$k\phi' - l_0 - \phi^2 = 0 \quad (2.2.2)$$

şeklindeki ifade yardımı ile aşağıdaki genel ifade yazılır.

$$\phi(\eta) = \frac{\sum_{l=-p}^q a_l e^{(l\eta)}}{\sum_m^f b_m e^{(m\eta)}}, \quad (2.2.3)$$

daha sonra ifadedeki dengelenmeye bakılır. Sonuçların kontrolleri yapıldığında  $f = q$  ve  $e = p$  olarak bulunur. İşlem kolaylığı açısından  $f = q = 1$  ve  $e = p = 1$  şeklinde kabul edilir ve ifade açılır.

$$\phi(\eta) = \frac{a_1 e^{(\eta)} + a_0 + a_{-1} e^{(-\eta)}}{b_1 e^{(\eta)} + b_0 + b_{-1} e^{(-\eta)}}, \quad (2.2.4)$$

ve bunun neticesinde

$$\phi_1 = \frac{-\sqrt{-l_0} b_1 e^{(\sqrt{-l_0}\xi + \xi_0)} + a_{-1} e^{(-\sqrt{-l_0}\xi - \xi_0)}}{b_1 e^{(\sqrt{-l_0}\xi + \xi_0)} + \sqrt{-\frac{1}{l_0}} a_{-1} e^{(-\sqrt{-l_0}\xi - \xi_0)}}, \quad (2.2.5)$$

olarak bulunur. Sonraki adımda  $a_{-1}$  ile  $b_1$  keyfi sabitler olmak üzere:

$$\varphi_2 = \frac{-i\sqrt{l_0}b_1e^{(i\sqrt{l_0}\xi+\xi_0)} + a_{-1}e^{(-i\sqrt{l_0}\xi-\xi_0)}}{b_1e^{(i\sqrt{l_0}\xi+\xi_0)} - i\sqrt{\frac{1}{l_0}}a_{-1}e^{(-i\sqrt{l_0}\xi-\xi_0)}} \quad (2.2.6)$$

olarak bulunur. Keyfi sabitler  $a_{-1}$  ve  $b_1$  ile birlikte  $i^2 = -1$  olmak üzere;

$$\phi_3 = \frac{-\sqrt{-l_0}b_1e^{(2\sqrt{-l_0}\xi+\xi_0)} + a_0 - \sqrt{-l_0}b_{-1}e^{(-2\sqrt{-l_0}\xi-\xi_0)}}{\frac{a_0^2 + l_0b_0^2}{4l_0b_{-1}}e^{(2\sqrt{-l_0}\xi+\xi_0)} + b_0 + b_{-1}e^{(-2\sqrt{-l_0}\xi-\xi_0)}} \quad (2.2.7)$$

Bazı özel eşitliklerde  $\xi_0 = 0, b_1 = i, a_{-1} = \pm\sqrt{l_0}$  olduğu zaman (2.2.5) :

$$\varphi = -\sqrt{-l_0} \tan(\sqrt{-l_0}\xi), \quad (2.2.8)$$

ve

$$\varphi = -\sqrt{-l_0} \cot(\sqrt{-l_0}\xi), \quad (2.2.9)$$

Şayet (2.2.6) da  $\xi_0 = 0, b_1 = i, a_{-1} = \pm\sqrt{l_0}$  olarak yerine konulursa eşitlik:

$$\varphi = \sqrt{l_0} \tanh(\sqrt{l_0}\xi) \quad (2.2.10)$$

ve

$$\varphi = -\sqrt{l_0} \coth(\sqrt{l_0}\xi) \quad (2.2.11)$$

olarak bulunur [7].

### 2.3. Lineer olmayan diferensiyel fark denklemleri

Üstel fonksiyon metodu için

$$\begin{aligned} &F(u_{n+p_1}(x), u_{n+p_2}(x), \dots, u_{n+p_k}(x), u'_{n+p_1}(x), u'_{n+p_2}(x), \dots, \\ &u'_{n+p_k}(x), \dots, u_{n+p_1}^{(r)}(x), u_{n+p_2}^{(r)}(x), \dots, u_{n+p_k}^{(r)}(x)) = 0 \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

şeklinde lineer olmayan diferensiyel fark denklemini ele alınırsa.  $k_i, \lambda_j$  ve  $c$  sabitler olmak üzere:

$$u_n(x) = U(\xi_n) \equiv U_n, \quad \xi_n = \sum_{i=1}^s k_i n_i + \sum_{j=1}^h \lambda_j x_j + c, \quad (2.3.2)$$

$$u_{n+p}(x) = U(\xi_{n+p}) \equiv U_{n+p}, \quad \xi_{n+p} = \sum_{i=1}^s k_i (n_i + p) + \sum_{j=1}^h \lambda_j x_j + c, \quad (2.3.3)$$

şeklinde hareketli dalga dönüşümü uygulanırsa

$$G(U_{n+p_1}, \dots, U_{n+p_k}, U'_{n+p_1}, \dots, U'_{n+p_k}, \dots, U_{n+p_1}^{(r)}, \dots, U_{n+p_k}^{(r)}) = 0. \quad (2.3.4)$$

şeklinde adi diferensiyel fark denklemi elde edilir.

Bu yöntemde,  $e, f, p$  ve  $q$  homojenleştirilmiş denge prensibinden belirlenecek pozitif tamsayılar,  $a_n$  ve  $b_m$  daha sonra belirlenecek katsayılar olmak üzere, (2.3.4) denkleminin çözümü;

$$u_n(n, x, t) = U_n(\xi) = \frac{\sum_{n=-f}^e a_n \exp(n\xi)}{\sum_{m=-q}^p b_m \exp(m\xi)} \quad (2.3.5)$$

şeklinde aranır. Bu durumda

$$u_{n-i}(n, x, t) = U_{n-i}(\xi) = \frac{\sum_{n=-f}^e a_n e^{n(\xi-id)}}{\sum_{m=-q}^p b_m e^{m(\xi-id)}}, \quad (2.3.6)$$

$$u_{n+i}(n, x, t) = U_{n+i}(\xi) = \frac{\sum_{n=-f}^e a_n e^{n(\xi+id)}}{\sum_{m=-q}^p b_m e^{m(\xi+id)}}, \quad (2.3.7)$$

yazılabilir.  $U_n(\xi), U_{n-i}(\xi)$  ve  $U_{n+i}(\xi)$  ifadeleri indirgenmiş (2.3.4) denklemde yerine yazılarak,  $e^{(j\xi)}$  in kuvvetlerine göre düzenlenirse, cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminden  $a_n$  ve  $b_m$  değerleri bulunarak hareketli dalga çözümleri elde edilebilir [8].



### 3. YÖNTEMİN UYGULAMALARI

#### 3.1. Üstel fonksiyon yönteminin (1+1)boyutlu denkleminin uygulaması

Üstel fonksiyon yönteminin uygulanmasının yapılacağı atom altı fizikte kendi eksenini etrafında dönmeyen parçacıkların tanımlanmasında kullanılan Klein Gordon denklemi ele alınır.

$$u_{tt} - u_{xx} - u + u^3 = 0 \quad (3.1.1)$$

benzerlik dönüşümü ise:

$$\xi = kx + wt \quad (3.1.2)$$

olarak ifade edilir. Gerekli dönüşüm gerçekleştirildiğinde, ifade:

$$(w^2 - k^2)u'' - u + u^3 = 0 \quad (3.1.3)$$

haline dönüşür. Bundan sonra ifadenin lineer olmayan kısmının en yüksek mertebeli ile lineer olmayan kısmın en yüksek mertebelisinin dengelenmesine bakılır. Lineer kısmın en yüksek mertebeli  $u''$  özel olarak:

$$u'' = \frac{c_1 e^{(3p+c)\xi} + \dots + d_1 e^{-(3q+c)\xi}}{c_2 e^{(4p)\xi} + \dots + d_2 e^{-(4q)\xi}} \quad (3.1.4)$$

olarak açılır. Lineer olmayan kısmın en yüksek mertebeli  $u^3$  ise özel olarak;

$$u^3 = \frac{c_3 e^{(3c+p)\xi} + \dots + d_3 e^{-(3d+q)\xi}}{c_4 e^{(4p)\xi} + \dots + d_4 e^{-(4q)\xi}} \quad (3.1.5)$$

olarak açılır. Bu ifadelerin ilk ve son terimlerinin dengelenmesine bakılır, şayet dengelenme sağlanıyorsa, ifadelerin geneli hakkında dengelenme sağlanıyordur sonucu çıkarılabilir.

$$3p + c = 3c + p, \quad (3.1.6)$$

$$p = c, \quad (3.1.7)$$

benzer şekilde

$$3q + d = 3d + q, \quad (3.1.8)$$

$$q = d, \quad (3.1.9)$$

olarak bulunur. Çözüm aranırken işlem kolaylığı için  $p = c = q = d = 1$  olarak çözüm aranır.

$$u(\xi) = \frac{a_1 e^\xi + a_0 + a_{-1} e^{-\xi}}{b_1 e^\xi + b_0 + b_{-1} e^{-\xi}} \quad (3.1.10)$$

şeklinde çözüm aranır.  $u''$  ve  $u^3$  hesaplanarak denklemde gerekli yerlere yazıldığında;

$$\frac{1}{A} [E_3 e^{3\xi} + E_2 e^{2\xi} + E_1 e^\xi + E_0 + E_{-1} e^{-\xi} + E_{-2} e^{-2\xi} + E_{-3} e^{-3\xi}] = 0 \quad (3.1.11)$$

ifadenin katsayıları 0'a eşitlendiğinde

$$A = (b_{-1} e^{-\xi} + e^\xi + b_0)^3 \quad (3.1.12)$$

$$E_3 = a_1(a_1^2 - 1) \quad (3.1.13)$$

$$E_2 = (w^2 - k^2 - 1)a_0 + 3a_1^2 a_0 + (k^2 - w^2 - 2)a_1 b_0 \quad (3.1.14)$$

$$E_1 = 3a_1^2 a_{-1} - 4k^2 a_{-1} + w^2 a_1 b_0^2 - w^2 a_0 b_0 - k^2 a_1 b_0^2 + k^2 a_0 b_0 - a_1 b_0^2 - 2a_0 b_0 + 3a_1 a_0^2 + 4w^2 a_{-1} - 4w^2 a_1 b_{-1} + 4k^2 a_1 b_{-1} - a_{-1} - 2a_1 b_{-1}, \quad (3.1.15)$$

$$E_0 = -3k^2 a_{-1} b_0 + 3w^2 a_1 b_{-1} b_0 + 3w^2 a_{-1} b_0 - 6w^2 a_0 b_{-1} + 6k^2 a_0 b_{-1} - 2a_0 b_{-1} + 6a_1 a_{-1} a_0 - 2a_{-1} b_0 - 3k^2 a_1 b_{-1} b_0 + a_0^3 - a_0 b_0^2 \quad (3.1.16)$$

$$E_{-1} = -3a_{-1}^2 a_1 - a_1 b_{-1}^2 - 2a_0 b_0 b_{-1} + w^2 a_{-1} b_0^2 - k^2 a_{-1} b_0^2 - a_{-1} b_0^2 - w^2 a_0 b_{-1} b_0 + k^2 a_0 b_{-1} b_0 + 3a_0^2 a_{-1} + 4w^2 a_1 b_{-1}^2 - 4w^2 a_{-1} b_{-1} - 4k^2 a_1 b_{-1}^2 + 4k^2 a_{-1} b_{-1} - 2a_{-1} b_{-1}, \quad (3.1.17)$$

$$E_{-2} = 3a_{-1}^2 a_0 + w^2 a_0 b_{-1}^2 - 2a_{-1} b_{-1} b_0 - k^2 a_0 b_{-1}^2 - a_0 b_{-1}^2 + k^2 a_{-1} b_{-1} b_0 - w^2 a_{-1} b_{-1} b_0, \quad (3.1.18)$$

$$E_{-3} = a_{-1}^3 - a_{-1} \cdot b_{-1}^2 \quad (3.1.19)$$

Buradan da katsayılar;

$$a_{-1} = -\frac{1}{4}b_0^2 \quad (3.1.20)$$

$$a_0 = 0 \quad (3.1.21)$$

$$a_1 = 1 \quad (3.1.22)$$

$$b_{-1} = \frac{1}{4}b_0^2 \quad (3.1.23)$$

$$w = \sqrt{k^2 + 2} \quad (3.1.24)$$

$$b_0 = \text{keyfi sabit} \quad (3.1.25)$$

olarak bulunur. Böylece çözüm:

$$u = \frac{e^{(kx+wt)} - \frac{1}{4}b_0^2 e^{-(kx+wt)}}{e^{(kx+wt)} + b_0 + \frac{1}{4}b_0^2 e^{-(kx+wt)}} \quad (3.1.26)$$

şeklinde olur.

Eğer  $b_0 = 2$ ,  $w = (k^2 + 2)^{1/2}$  olarak alınır ve (3.1.26) da yerine yazılırsa ifade:

$$u(x, t) = i(\csc(kx + (k^2 + 2)^{1/2} t) - \tan(kx + (k^2 + 2)^{1/2} t)) \quad (3.1.27)$$

şeklini alır [9].

### 3.2. Üstel fonksiyon yönteminin (2+1) boyutlu denkleme uygulaması

Üstel fonksiyon yönteminin uygulamasının yapılacağı akışkanlar mekaniği, katı hal fiziği, kimyasal kinematik benzeri bir çok alanda kullanılan Calogero ve Degasperis denklemi ele alınır [10].

$$u_{xxx} - 2u_y u_{xx} - 4u_x u_{xy} + u_{xt} = 0 \quad (3.2.1)$$

benzerlik dönüşümü ise

$$\xi = kx + ly + wt \quad (3.2.2)$$

şeklinde olur. Gerekli dönüşüm işlemi gerçekleştirildikten sonra integrasyon sabiti sıfır kabul edilip denklemin yeni hali:

$$k^2 lu''' - 6lk^2 u'u'' + wu'' = 0 \quad (3.2.3)$$

olur. Denklemin integrali alındığında yeni hali:

$$k^2 lu'' - 3lk^2 (u')^2 + wu' = 0 \quad (3.2.4)$$

şeklinde olur. Bu denklemin lineer kısmının en yüksek mertebeli ile lineer olmayan kısmının en yüksek mertebelisinin dengelenmesine bakılır. Lineer kısmın en yüksek mertebeli  $u'''$  özel olarak:

$$u''' = \frac{c_1 e^{(7p+c)\xi} + \dots + d_1 e^{-(7q+d)\xi}}{c_2 e^{(8p)\xi} + \dots + d_2 e^{-(8q)\xi}} \quad (3.2.5)$$

Lineer olmayan kısmın en yüksek mertebeli  $(u')^2$  ise özel olarak aşağıdaki gibi açılabilir.

$$(u')^2 = \frac{c_3 e^{(6p+2c)\xi} + \dots + d_3 e^{-(2d+6q)\xi}}{c_4 e^{(8p)\xi} + \dots + d_4 e^{-(8q)\xi}} \quad (3.2.6)$$

bu ifadelerin ilk ve son terimler dengelenmesine bakılır, dengelenme varsa geneli de dengeleniyor denilebilir.

$$7p + c = 6p + 2c \quad (3.2.7)$$

$$p = c \quad (3.2.8)$$

benzer şekilde

$$-(7q + d) = -(2d + 6q) \quad (3.2.9)$$

$$q = d \quad (3.2.10)$$

çözümdeki işlem kolaylığı açısından  $p = c = q = d = 1$  olarak alınır:

$$u(\xi) = \frac{a_1 e^\xi + a_0 + a_{-1} e^{-\xi}}{e^\xi + b_0 + b_{-1} e^{-\xi}} \quad (3.2.11)$$

çözümdeki işlemler matematiksel programlar yardımı ile yapıldığında katsayılar hesaplanabilir ve bu katsayılar

1. Durum:

$$a_{-1} = 0 \quad (3.2.12)$$

$$a_0 = a_1 b_0 + 2b_0 \quad (3.2.13)$$

$$a_1 = \text{keyfi sabit} \quad (3.2.14)$$

$$b_{-1} = 0 \quad (3.2.15)$$

$$b_0 = \text{keyfi sabit} \quad (3.2.16)$$

$$w = -k^2 l \quad (3.2.17)$$

bulunan katsayıları yerine yazıldığında:

$$u_1(x, t) = a_1 + \frac{2b_0}{e^\xi + b_0}, \quad (3.2.18)$$

olarak bulunur. Daha sonra (3.2.17) den hareketle:

$$u_2(x, t) = a_1 + \frac{2b_0}{\cosh(kx + ly - 4k^2 lt) + i \sin(kx + ly - 4k^2 lt) + b_0}, \quad (3.2.19)$$

ve son olarak:

$$u_3(x, t) = a_1 + \frac{2b_0}{\cos(kx + ly - 4k^2 lt) + i \sin(kx + ly - 4k^2 lt) + b_0}, \quad (3.2.20)$$

elde edilir.

2. Durum:

$$a_{-1} = 4b_{-1} \quad (3.2.21)$$

$$a_0 = 0 \quad (3.2.22)$$

$$a_1 = 0 \quad (3.2.23)$$

$$b_{-1} = \text{keyfi sabit} \quad (3.2.24)$$

$$w = -4k^2l \quad (3.2.25)$$

bulunan katsayılar yerine yazılırsa:

$$u_4(x, t) = \frac{4b_{-1}e^{-\xi}}{e^{\xi} + b_{-1}e^{-\xi}} \quad (3.2.26)$$

olarak bulunur.  $b_{-1} = 1$  ve  $w = -4k^2l$  olarak kabul edilirse:

$$u_5(x, t) = 2 - 2 \tanh(kx + ly - 4k^2lt) \quad (3.2.27)$$

ve son olarak

$$u_6(x, t) = 2 - 2i \tan(kx + ly - 4k^2lt) \quad (3.2.28)$$

şeklinde bulunur [11]. Bu sonuçlar Fan'ın sonuçları ile karşılaştırılabilir [12].

### 3.3 Üstel fonksiyon yönteminin (3+1) boyutlu denkleme uygulaması

Üstel fonksiyon yönteminin uygulamasının yapılacağı mühendislik alanı, kimyasal fizik, jeokimya, biyoloji gibi alanlarda kullanılan Kadomstev-Petviashvili denklemi [13, 14] ele alınır.

$$u_{xt} - 6u_x^2 + 6uu_{xx} - u_{xxxx} - u_{yy} - u_{zz} = 0 \quad (3.3.1)$$

benzerlik dönüşümü ise:

$$\xi = kx + ly + mz + wt \quad (3.3.2)$$

şeklinde olur. Gerekli dönüşümler yapıldığında denklemin yeni hali:

$$(kw - l^2 - m^2)u'' - 6k^2(u')^2 + 6k^2uu'' - ku'''' = 0 \quad (3.3.3)$$

şekline dönüşür. Bundan sonra denklemin lineer kısmının en yüksek mertebeli ile lineer olmayan kısmın en yüksek mertebelisinin dengelenmesine bakılır. Lineer kısmın en yüksek mertebeli  $u''''$  özel olarak aşağıdaki gibi açılabilir.

$$u'''' = \frac{c_1 e^{(15p+c)\xi} + \dots + d_1 e^{-(15q+d)\xi}}{c_2 e^{(16p)\xi} + \dots + d_2 e^{-(16q)\xi}} \quad (3.3.4)$$

lineer olmayan kısmın en yüksek mertebeli  $(u')^2$  ise özel olarak aşağıdaki gibi açılabilir.

$$(u')^2 = \frac{c_3 e^{2(c+7p)\xi} + \dots + d_3 e^{-2(d+7q)\xi}}{c_4 e^{(16p)\xi} + \dots + d_4 e^{-(16q)\xi}} \quad (3.3.5)$$

Özel olarak açılımları verilen bu ifadelerin ilk ve son terimlerinde dengelenme gerçekleşiyorsa ifadelerin genelinde dengelenme gerçekleşir.

$$15p + c = 2(c+7p), \quad (3.3.6)$$

$$15p + c = 2c + 14p, \quad (3.3.7)$$

$$p = c. \quad (3.3.8)$$

benzer şekilde

$$15q + d = 2(d + 7q), \quad (3.3.9)$$

$$d = q \quad (3.3.10)$$

Dengelenenin gerçekleştiği görüldükten sonra işlem kolaylığı açısından  $p = c = q = d = 1$  olarak kabul edilip çözüm aranır:

$$u(\xi) = \frac{a_1 e^\xi + a_0 + a_{-1} e^{-\xi}}{e^\xi + b_0 + b_{-1} e^{-\xi}} \quad (3.3.11)$$

katsayılar ise:

$$a_{-1} = \frac{1}{12} b_{-1} (8m^2 + 2l^2 + m + 2), \quad (3.3.12)$$

$$a_0 = 0, \quad (3.3.13)$$

$$a_1 = \frac{1}{12} (8m^2 + 2l^2 + m - 22), \quad (3.3.14)$$

$$b_{-1} = \text{keyfî sabit}, \quad (3.3.15)$$

$$b_0 = 0, \quad (3.3.16)$$

$$k = -\frac{1}{2}, \quad (3.3.17)$$

$$w = -\frac{3}{2} l^2 + \frac{1}{4} m, \quad (3.3.18)$$

Buradan  $u(x, t)$  çözümleri,

$$= \frac{\frac{1}{12} (8m^2 + 2l^2 + m - 22) e^{(kx+ly+mz+wt)} + \frac{1}{12} b_{-1} (8m^2 + 2l^2 + m + 2) e^{-(kx+ly+mz+wt)}}{e^{(kx+ly+mz+wt)} + b_{-1} e^{-(kx+ly+mz+wt)}} \quad (3.3.19)$$

daha sonra  $w = -\frac{3}{2} l^2 + \frac{1}{4} m$  ve  $b_{-1} = 1$  olarak kabul edilirse:

$$u_2(x, t) = 8m^2 + 2l^2 + m - 10 - 12 \tanh \left[ -\frac{x}{2} + ly + mz + \left( -\frac{3}{2} l^2 + \frac{1}{4} m \right) t \right] \quad (3.3.20)$$

$$u_3(x, t) = 8m^2 + 2l^2 + m - 10 - 12i \tan \left[ -\frac{x}{2} + ly + mz + \left( -\frac{3}{2} l^2 + \frac{1}{4} m \right) t \right] \quad (3.3.21)$$

bunların dışında  $p = c = 2$  ve  $q = d = 1$  olarak kabul edilirse:

$$u(\xi) = \frac{a_2 e^{2\xi} + a_1 e^\xi a_0 + a_{-1} e^{-\xi}}{e^{2\xi} + b_1 e^\xi + b_0 + b_{-1} e^{-\xi}} \quad (3.3.22)$$



olarak bulunur. Buradan da katsayılar:

$$a_{-1} = 0, \quad (3.3.23)$$

$$a_0 = -\frac{1}{6k^2} b_1 (m^2 b_1 - 6k^2 a_1 - kwb_1 + l^2 b_1 + k^4 b_1), \quad (3.3.24)$$

$$a_1 = \text{keyfi sabit}, \quad (3.3.25)$$

$$a_2 = \frac{1}{6k^2} (k^4 + l^2 - kw + m^2), \quad (3.3.26)$$

$$b_{-1} = 0, \quad (3.3.27)$$

$$b_0 = 0, \quad (3.3.28)$$

$$b_1 = \text{keyfi sabit}, \quad (3.3.29)$$

buradan da sonuç olarak  $u(\xi) =$

$$\frac{\frac{1}{6k^2} (k^4 + l^2 - kw + m^2).e^{2\xi} + a_1.e^\xi - \frac{1}{6k^2} b_1 (m^2 b_1 - 6k^2 a_1 - kwb_1 + l^2 b_1 + k^4 b_1)}{e^{(2\xi)} + b_1.e^{(\xi)}} \quad (3.3.30)$$

olarak bulunur [15].

Bulunan bu sonuçla üstel fonksiyon yönteminin, lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemin farklı boyutlardaki denklemlerine uygulaması yapılmış olmaktadır. Bundan sonra üstel fonksiyon yöntemin farklı boyutlardaki lineer olmayan kısmi türevli denklem sistemlerine uygulaması yapılacaktır.

### 3.4 Üstel fonksiyon yönteminin (1+1) boyutlu denklem sistemine uygulaması

Üstel fonksiyon yönteminin uygulamasının yapılacağı akışkanlar dinamiği, bilgi taşınması medya ve haberleşme alanında kullanılan fiber optik kablolarda bilginin taşınabilmesi için kullanılan Drinfeld-Sokolov denklem sistemi [16, 17] ele alınır.

$$u_t + (v^2)_x = 0 \quad (3.4.1)$$

$$v_t - v_{xxx} + 3vu_x + uv_x = 0 \quad (3.4.2)$$

denklemleri için:

$$\eta = kx + wt \quad (3.4.3)$$

şeklindeki benzerlik dönüşümü sayesinde dönüşüm yapılırsa, denklemler:

$$-wu' + k(v^2)' = 0 \quad (3.4.4)$$

ve

$$-wv' - k^3v''' + 3kvu' + 3kuv' = 0 \quad (3.4.5)$$

haline dönüşür. Buradan da denklemlerin integrali alınır.

$$w^2v + k^3wv'' - 3k^2v^3 = 0 \quad (3.4.6)$$

ve

$$wu = kv^2 \quad (3.4.7)$$

olarak bulunur. (3.4.7) denkleminin lineer kısmının en yüksek mertebeli ile lineer olmayan kısmının en yüksek mertebeli:

$$v'' = \frac{c_1 e^{[(3+p)\eta]} + \dots}{c_2 e^{[(4p)\eta]} + \dots}, \quad (3.4.8)$$

ve

$$v^3 = \frac{c_3 e^{[(c+3p)\eta]} + \dots}{c_4 e^{[(4p)\eta]} + \dots}, \quad (3.4.9)$$

olarak açılabilir. Dengelenmeye bakılırsa:

$$3c + p = c + 3p \quad (3.4.10)$$

$$p = c \quad (3.4.11)$$

ve

$$q = d \quad (3.4.12)$$

olarak bulunur. Buradan  $p = c = q = d = 1$  olarak kabul edildiğinde açılım:

$$v_\eta = \frac{a_1 e^\eta + a_0 + a_{-1} e^{(-\eta)}}{e^\eta + b_0 + b_{-1} e^{(-\eta)}} \quad (3.4.13)$$

ifade edilen açılım başlangıç denkleminde yerine yazıldığında ve gerekli hesaplamalar yapıldığında katsayılar

$$a_{-1} = -\frac{(k^4 b_0^2 - 12a_0^2)\sqrt{3}}{24k^2}, \quad (3.4.14)$$

$$a_0 = a_0, \quad (3.4.15)$$

$$b_{-1} = \frac{k^4 b_0^2 - 12a_0^2}{4k^2}, \quad (3.4.16)$$

$$w = \frac{1}{2}k^3, \quad (3.4.17)$$

olarak bulunur. Buradan da;

$$u(x, t) = \frac{k}{w} \frac{\left[ a_1 e^{(kx - \frac{1}{2}k^3 t)} + a_0 + \frac{(k^4 b_0^2 - 12a_0^2)\sqrt{3} e^{(-kx + \frac{1}{2}k^3 t)}}{24k^2} \right]^2}{\left[ e^{(kx - \frac{1}{2}k^3 t)} + b_0 + \frac{(k^4 - 12a_0^2) e^{(-kx + \frac{1}{2}k^3 t)}}{4k^2} \right]^2} \quad (3.4.18)$$

sonucu başka bir formatta:

$$u(x, t) = \frac{k}{w} \frac{\left[ 2a_1 \cos(Kx - \frac{1}{2}K^3 t) + a_0 \right]^2}{\left[ 2 \cos(Kx - \frac{1}{2}K^3 t) + b_0 \right]^2} \quad (3.4.19)$$

şeklinde ifade edilir.(3.1.19) daha önce verilen (3.4.6) da yerine yazılırsa:

$$w^2 a_1 - 3k^2 a_1^3 = 0, \quad (3.4.20)$$

$$2w^2 a_0 b_0 - 4k^3 w a_1 b_{-1} - 9k^2 a_0^2 a_1 + w^2 a_1 b_0^2 - 9k^2 a_{-1} a_1 - k^3 w_0 b_0 + 4k^3 w a_{-1} + 2w^2 a_1 b_{-1} + w^2 a_{-1} + k^3 w a_1 b_0^2 = 0, \quad (3.4.21)$$

$$2w^2 a_0 b_0 b_{-1} - k^3 w a_{-1} b_0^2 - k^3 a_0 b_{-1} b_0 + 4k^3 w a_1 b_{-1}^2 - 4k^3 w a_{-1} b_{-1} + w^2 a_{-1} b_0^2 - 9k^2 a_0^2 a_{-1} + 2w^2 a_{-1} b_{-1} - 9k^2 a_1 a_{-1}^2 + w^2 a_{-1} b_{-1}^2 = 0, \quad (3.4.22)$$

$$-k^3 w a_{-1} b_0 b_{-1} + 2w^2 b_0 a_{-1} b_{-1} + k^3 w a_0 b_{-1}^2 + w^2 a_0 b_{-1}^2 - 9k^2 w a_0 a_{-1}^2 = 0, \quad (3.4.23)$$

$$-3k^2 a_{-1}^3 + w^2 a_{-1} b_{-1}^2 = 0. \quad (3.4.24)$$

eşitlikleri yardımı ile

$$a_0 = a_0, \quad (3.4.25)$$

$$w = \frac{1}{2} k^3, \quad (3.4.26)$$

$$a_{-1} = -\frac{(k^4 b_0^2 - 12a_0^2)\sqrt{3}}{24k^2}, \quad (3.4.27)$$

$$b_{-1} = \frac{(k^4 b_0^2 - 12a_0^2)}{4k^4} \quad (3.4.28)$$

$b_0, a_0$  keyfi sabitler olmak üzere bulunan değerler yerlerine yazılırsa

$$u(x, t) = \frac{k}{w} \frac{\left[ a_1 e^{(kx - \frac{1}{2}k^3 t)} + a_0 + \frac{(k^4 b_0^2 - 12a_0^2)\sqrt{3} e^{(-k + \frac{1}{2}k^3 t)}}{24k^2} \right]^2}{\left[ e^{(kx - \frac{1}{2}k^3 t)} + b_0 + \frac{(k^4 b_0^2 - 12a_0^2) e^{(kx + \frac{1}{2}k^3 t)}}{4k^4} \right]^2} \quad (3.4.29)$$

olarak bulunur. Bulunan ifade başka bir formatta ise

$$u(x,t) = \frac{k \left[ 2a_1 \cos \left[ Kx - \frac{1}{2} K^3 t \right] + a_0 \right]^2}{w \left[ 2 \cos \left[ Kx - \frac{1}{2} K^3 t \right] + b_0 \right]^2} \quad (3.4.30)$$

olur [18].

### 3.5. Üstel fonksiyon yönteminin (2+1) boyutlu denklem sistemine uygulaması

Üstel fonksiyon yönteminin uygulamasının yapılacağı fiber optikler, plazma fiziği ve yine benzeri alanlarda kullanılan Konopelchenko-Dubrovsky [19] denklem sistemi ele alınır.

$$u_t - u_{xxx} - 6buu_x - \frac{3}{2}a^2u^2u_x - v_y + 3au_xv = 0 \quad (3.5.1)$$

$$u_y = u_x \quad (3.5.2)$$

denklemleri

$$u(x,t) = u(\xi) \quad (3.5.3)$$

ve

$$\xi = kx + ly + wt \quad (3.5.4)$$

şeklindeki ifade yardımı ile:

$$wu' - k^3u''' - 6bkuu' + \frac{3}{2}a^2ku^2u' - 3lv' + 3aku'v = 0 \quad (3.5.5)$$

$$lu' = kv' \quad (3.5.6)$$

olarak bulunur ve daha sonra:

$$lu = kv \quad (3.5.7)$$

olur ki bulunan ifadeler yardımı ile denklem:

$$\left(w - \frac{3l^2}{k}\right)u + \frac{3}{2}(al - bk)u^2 + \frac{1}{2}a^2ku^3 - k^2u'' = 0 \quad (3.5.8)$$

haline dönüşür. Bundan sonra lineer kısmın en yüksek mertebeli ile lineer olmayan kısmın en yüksek mertebeli dengelenmesi incelenir. Lineer kısmın en yüksek mertebeli:

$$u'' = \frac{c_1 e^{[(3p+c)\xi]} + \dots + d_1 e^{[-(3q+d)\xi]}}{c_2 e^{[4p\xi]} + \dots + d_2 e^{[-4q\xi]}} \quad (3.5.9)$$

lineer olmayan kısmın en yüksek mertebeli:

$$u^3 = \frac{c_3 e^{[(3c+p)\xi]} + \dots + d_3 e^{[-(3d+q)\xi]}}{c_4 e^{[4p\xi]} + \dots + d_4 e^{[-4q\xi]}} \quad (3.5.10)$$

olur. Buradan da ilk ve son terimlerin:

$$3p + c = 3c + p, \quad (3.5.11)$$

$$p = c \quad (3.5.12)$$

ayrıca

$$-(3q + d) = -(3d + q), \quad (3.5.13)$$

ve

$$q = d \quad (3.5.14)$$

bulunarak dengelenmenin sağlandığı görülür. Daha sonra çözüm için  $p = c = q = d = 1$  olarak kabul edilir ve katsayılar hesaplanır.

$$a_{-1} = 0, \quad (3.5.15)$$

$$a_0 = \text{keyfî sabit}, \quad (3.5.16)$$

$$a_1 = 0, \quad (3.5.17)$$

$$b_{-1} = \frac{1}{16} \frac{a_0^2 (a^2 k^2 + b^2 l^2 - k^3 b^2 - 2akbl)}{k^4}, \quad (3.5.18)$$

$$b_0 = \frac{1}{2} \frac{a_0 (bl - ak)}{k^2}, \quad (3.5.19)$$

$$w = \frac{k^3 + 3l^2}{k}, \quad (3.5.20)$$

katsayılar yerlerine yazılırsa;

$$u_1(x, t) = \frac{a_0}{e^{(\xi)} + \frac{1}{2} \frac{a(bl - ak)}{k^2} + \frac{a_0^2(a^2k^2 + b^2l^2 - k^3b^2 - 2akbl)}{k^4}} e^{-(\xi)}. \quad (3.5.21)$$

şayet  $w = \frac{k^3 + 3l^2}{k}$  konulursa, eşitlik:

$$u_2(x, t) = \frac{-16a_0k^4}{(a_0^2M - 16k^4) \sinh(\xi) - (a_0^2M + 16k^4) \cosh(\xi) - 8a_0k^2(bl - ak)} \quad (3.5.22)$$

ve

$$u_2(x, t) = \frac{-16a_0k^4}{(a_0^2M - 16k^4) i \sin(\xi) - (a_0^2M + 16k^4) \cos(\xi) - 8a_0k^2(bl - ak)} \quad (3.5.23)$$

ayrıca burada ,

$$M = a^2k^2 + b^2l^2 - k^3b^2 - 2akbl \quad (3.5.24)$$

ve

$$\xi = kx + ly + \left( \frac{k^3 + 3l^2}{k} \right) t \quad (3.5.25)$$

olarak ifade edilir [20].

### 3.6. Üstel fonksiyon yönteminin (1+1) boyutlu lineer olmayan diferensiyel fark denkleminin uygulaması

Üstel fonksiyon yönteminin uygulamasının yapılacağı özellikle fizik, dna molekül zinciri, biyolojik makro moleküller gibi bir çok alanda kullanılan lineer olmayan diferensiyel fark denklemler ele alınır [21].

$$\frac{du_n(t)}{dt} = (\alpha + \beta u_n + \gamma u_n^2)(u_{n-1}(t) - u_{n+1}(t)), \quad (3.6.1)$$

denklemini ele alınır ve  $\alpha, \beta$  ve  $\gamma = 0$  olarak düşünülürse lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem:

$$u_t + 6\alpha u u_x + 6\beta u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \quad (3.6.2)$$

olur.

$$\xi_n = dn + ct + \zeta \quad (3.6.3)$$

şeklindeki benzerlik dönüşümü yardımı ile ifade:

$$cu'_n = (\alpha + \beta u_n + \gamma u_n^2)(u_{n-1} - u_{n+1}). \quad (3.6.4)$$

halini alır. Dengelenme işleminin rehberliğinde  $q = f$  ve  $p = e$  olur.  $p = f = p = e = 1$  olarak kabul edilirse (3.6.4) de bulunan

$$u_n = \frac{a_{-1}e^{(-\xi_n)} + a_0 + a_1e^{(\xi_n)}}{b_{-1}e^{(-\xi_n)} + b_0 + e^{(\xi_n)}}, \quad (3.6.5)$$

$$u_{n+1} = \frac{a_{-1}e^{(-\xi_n-d)} + a_0 + a_1e^{(\xi_n+d)}}{b_{-1}e^{(-\xi_n-d)} + b_0 + e^{(\xi_n+d)}}, \quad (3.6.6)$$

$$u_{n-1} = \frac{a_{-1}e^{(-\xi_n+d)} + a_0 + a_1e^{(\xi_n-d)}}{b_{-1}e^{(-\xi_n+d)} + b_0 + e^{(\xi_n-d)}}, \quad (3.6.7)$$

şeklinde açılır. Bu ifadeler indirgenmiş denklemde yerine yazılır. Bu eşitlikte  $e^{(\xi)}$ 'li ifadeler sıfıra eşitlenerek  $a_{-1}, a_0, a_1, b$  ve  $c$  sabitleri elde edilir.

1. Durum:

$$a_{-1} = b_{-1} \left[ -\frac{\beta}{2\gamma} \mp \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{2\gamma} \tanh(d) \right], \quad (3.6.8)$$

$$a_0 = 0, \quad (3.6.9)$$

$$a_1 = \left[ -\frac{\beta}{2\gamma} \mp \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\gamma} \tanh(d) \right], \quad (3.6.10)$$



$$b_{-1} = \text{keyfi sabit}, \quad (3.6.11)$$

$$b_0 = 0, \quad (3.6.12)$$

$$c = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{2\gamma} \tanh(d), \quad (3.6.13)$$

$$d = \text{keyfi sabit} \quad (3.6.14)$$

katsayılar yerine yazıldığında:

$$u_n = \frac{-\frac{\beta}{2\gamma} [e^{\xi_n} + b_{-1}e^{-\xi_n}] \pm \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\gamma} \tanh(d) [e^{\xi_n} \mp b_{-1}e^{-\xi_n}]}{b_{-1}e^{-\xi_n} + e^{\xi_n}} \quad (3.6.15)$$

olur. Bununla birlikte  $\xi_n = dn + \left[ \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{2\gamma} \tanh(d) \right] t + \zeta$  ve  $b_{-1} = -1$  olarak alınırsa:

$$u_n = -\frac{\beta}{2\gamma} \pm \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\gamma} \tanh(d) \tanh(\xi_n), \quad (3.6.16)$$

şayet  $b_{-1} = 1$  olarak kabul edilip yerine yazılırsa

$$u_n = -\frac{\beta}{2\gamma} \pm \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\gamma} \tanh(d) \coth(\xi_n), \quad (3.6.17)$$

olarak bulunur.

2. Durum:

$$a_{-1} = 0, \quad (3.6.18)$$

$$a_0 = b_0 \left[ -\frac{\beta}{2\gamma} \mp \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\gamma} \tanh\left(\frac{d}{2}\right) \right], \quad (3.6.19)$$

$$a_1 = -\frac{\beta}{2\gamma} \pm \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\gamma} \tanh\left(\frac{d}{2}\right), \quad (3.6.20)$$

$$b_{-1} = 0, \quad (3.6.21)$$

$$b_0 = \text{keyfi sabit}, \quad (3.6.22)$$

$$c = \frac{\beta^2 + 4\alpha\gamma}{\gamma} \tanh\left(\frac{d}{2}\right), \quad (3.6.23)$$

$$d = \text{keyfi sabit} \quad (3.6.24)$$

katsayılar yerine yazılırsa:

$$u_n = \frac{-\frac{\beta}{2\gamma} [b_0 - e^{(\xi_n)}] \pm \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\gamma} \tanh\left(\frac{d}{2}\right) [b_0 \mp e^{(\xi_n)}]}{b_0 + e^{(\xi_n)}} \quad (3.6.25)$$

beraberinde  $\xi_n = dn + \left[ \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{2\gamma} \tanh\left(\frac{d}{2}\right) \right] t + \zeta$  dir.

3.Durum:

$$a_0 = \text{keyfi sabit}, \quad (3.6.26)$$

$$a_{-1} = \frac{\beta\gamma \cosh(d)}{\beta^2 - 4\alpha\gamma} a_0^2, \quad (3.6.27)$$

$$a_1 = -\frac{\beta}{2\gamma}, \quad (3.6.28)$$

$$b_{-1} = \frac{2\gamma^2 \cosh(d)}{\beta^2 - 4\alpha\gamma} a_0^2, \quad (3.6.29)$$

$$b_0 = \text{keyfi sabit}, \quad (3.6.30)$$

$$c = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{2\gamma} \sinh(d), \quad (3.6.31)$$

$$d = \text{keyfi sabit} \quad (3.6.32)$$

katsayılar yerine yazılırsa:

$$u_n = \frac{\frac{\beta\gamma \cosh(d)}{\beta^2 - 4\alpha\gamma} a_0^2 e^{(-\xi_n)} + a_0 - \frac{\beta}{2\gamma} e^{(\xi_n)}}{\frac{2\gamma^2 \cosh(d)}{\beta^2 - 4\alpha\gamma} a_0^2 e^{(-\xi_n)} + e^{(\xi_n)}} \quad (3.6.33)$$

beraberinde 
$$\xi_n = dn + \left[ \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{2\gamma} \sinh(d) \right] t + \zeta$$

şeklindedir [22].

### 3.7. Üstel fonksiyon yönteminin (2+1) boyutlu lineer olmayan diferensiyel fark denklem sistemine uygulaması

Üstel fonksiyon yönteminin uygulamasının yapılacağı fizik, mekanik mühendisliği gibi alanlarda kullanılan Toda lattice denklemi ele alınır.

$$\frac{\partial^2 y_n}{\partial x \partial t} = e^{(y_{n-1} - y_n)} - e^{(y_n - y_{n+1})} \quad (3.7.1)$$

denklem:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = e^{(y_{n-1} - y_n)} - 1 \quad (3.7.2)$$

şeklinde ifade edilebilir ve daha sonra

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} = \left( \frac{\partial u_n}{\partial t} + 1 \right) (u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) \quad (3.7.3)$$

haline dönüşür.

$$u_n = u_n(\xi_n) \quad (3.7.4)$$

ve

$$\xi_n = d_n + c_1 x + c_2 t + \xi_0 \quad (3.7.5)$$

yardımı ile benzerlik dönüşümü yapılırsa ifade aşağıdaki gibi olur.

$$c_1 c_2 u_n'' = (c_2 u_n' + 1)(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) \quad (3.7.6)$$

Dengelenme işleminin rehberliğinde  $q = f$  ve  $p = e$  olur. Buradan çıkartılan netice itibari ile dengelenmenin sağlandığı anlaşılır.  $p = f = p = e = 1$  olarak kabul edilirse (3.7.6) da bulunan:

$$u_n = \frac{a_1 e^{(\xi_n)} + a_0 + a_{-1} e^{(-\xi_n)}}{b_1 e^{(\xi_n)} + b_0 + e^{(-\xi_n)}}, \quad (3.7.7)$$

$$u_{n-1} = \frac{a_1 e^{(\xi_n-d)} + a_0 + a_{-1} e^{(-\xi_n+d)}}{b_1 e^{(\xi_n-d)} + b_0 + e^{(-\xi_n+d)}}, \quad (3.7.8)$$

$$u_{n+1} = \frac{a_1 e^{(\xi_n+d)} + a_0 + a_{-1} e^{(-\xi_n-d)}}{b_1 e^{(\xi_n+d)} + b_0 + e^{(-\xi_n-d)}}. \quad (3.7.9)$$

bundan sonra yapılan işlemler neticesinde katsayılar bulunur.

1. Durum:

$$a_{-1} = \frac{a_1}{b_1} - \frac{(e^{(2d)} - 1)^2}{2c_2 e^{(2d)}}, \quad (3.7.10)$$

$$a_0 = 0, \quad (3.7.11)$$

$$a_1 = \text{keyfi sabit}, \quad (3.7.12)$$

$$b_0 = 0, \quad (3.7.13)$$

$$b_1 = \text{keyfi sabit}, \quad (3.7.14)$$

$$c_1 = \frac{(e^{(2d)} - 1)^2}{4c_2 e^{(2d)}}, \quad (3.7.15)$$

$$c_2 = \text{keyfi sabit} \quad (3.7.16)$$

olarak bulunur ve bulunan katsayılar gerekli yerlere yazıldığında:

$$u_n = \frac{a_1 e^{\left(\frac{nd + (e^{(2d)} - 1)^2}{4c_2 e^{(2d)}}\right)x + c_2 t + \xi_0} + \left(\frac{a_1}{b_1} - \frac{(e^{(2d)} - 1)^2}{2c_2 e^{(2d)}}\right) e^{\left(\frac{-nd - (e^{(2d)} - 1)^2}{4c_2 e^{(2d)}}\right)x - c_2 t - \xi_0}}{b_1 e^{\left(\frac{nd + (e^{(2d)} - 1)^2}{4c_2 e^{(2d)}}\right)x + c_2 t + \xi_0} + e^{\left(\frac{-nd - (e^{(2d)} - 1)^2}{4c_2 e^{(2d)}}\right)x - c_2 t - \xi_0}} \quad (3.7.17)$$

2. Durum:

$$a_{-1} = \text{keyfi sabit}, \quad (3.7.18)$$

$$a_0 = \text{keyfi sabit}, \quad (3.7.19)$$

$$a_1 = \frac{b_0(a_0 - a_{-1}b_0) - \frac{a_0^2 c_2 e^{(d)}}{(e^{(d)} - 1)^2} + \frac{a_{-1} c_2 \cdot (a_0 - a_{-1}b_0) [(b_0 + c_2)e^{(2d)} + b_0]}{(e^{(d)} - 1)^4}}{,} \quad (3.7.20)$$

$$b_0 = \text{keyfi sabit}, \quad (3.7.21)$$

$$b_1 = \frac{b_0^2}{4} \frac{\left[ c_2(a_{-1}b_0 - a_0) + \frac{1}{2}b_0(e^{(d)} - 1)^2 \right]^2}{(e^{(d)} - 1)^4}, \quad (3.7.22)$$

$$c_1 = \frac{(e^{(d)} - 1)^2}{c_2 e^{(d)}}, \quad (3.7.23)$$

$$c_2 = \text{keyfi sabit} \quad (3.7.24)$$

olarak bulunur ve katsayılar uygun yerlere yazılırsa sonuç aşağıdaki gibi olur [23].

$$u_n = \frac{a_1 e^{\left(\frac{nd + (e^{(d)} - 1)^2}{c_2 e^{(d)}}\right)x + c_2 t + \xi_0} + a_0 + a_{-1} e^{\left(\frac{-nd - (e^{(d)} - 1)^2}{c_2 e^{(d)}}\right)x - c_2 t - \xi_0}}{\left(\frac{b_0^2}{4} - \frac{\left[ c_2(a_{-1}b_0 - a_0) + \frac{1}{2}b_0(e^{(d)} - 1)^2 \right]^2}{(e^{(d)} - 1)^4}\right) e^{\left(\frac{(e^{(d)} - 1)^2}{c_2 e^{(d)}}\right)x + c_2 t + \xi_0} + b_0 + e^{\left(\frac{-nd - (e^{(d)} - 1)^2}{c_2 e^{(2d)}}\right)x - c_2 t - \xi_0}} \quad (3.7.25)$$

#### 4. SONUÇ

Bu çalışmada lineer olmayan kısmi türevli denklemler, denklem sistemleri ile diferensiyel fark denklemlerinin, üstel fonksiyon yöntemleriyle soliton ve periyodik çözümleri bulunmuştur. Benzer şekilde bu yöntemler diğer lineer olmayan kısmi türevli denklemlere, denklem sistemlerine ve diferensiyel fark denklemlerine de uygulanabilir. Elde edilen sonuçlar literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılabilir. Bu makaledeki hesaplamalar *Maple* paket programı ile yapılmıştır.

Bu yöntem ile elde edilen çözümlerin, tanh ve genişletilmiş tanh yöntemi ile sinüs-cosinüs yöntemlerinden daha geniş çözümlere sahip olduğu söylenebilir. Buna dayanak olarak tanh ve genişletilmiş tanh yöntemiriccati yardımcı denklemlerine dayalı yöntemler iken üstel fonksiyon yöntemi daha geneldir. Riccati denkleminin daha geniş çözümlerine sahiptir. Benzer şekilde Klein-Gordon denkleminin üstel fonksiyon yöntemi ile çözümü ile elde edilen sonuçları ile aynı denklemin tanh ve sinüs-cosinüs yöntemi ile çözümlerinin sonuçları kıyaslandığında, diğer yöntemlerin çözüm sonuçları üstel fonksiyon yönteminin çözümlerinden ancak alt bir çözümünü ifade eder. Üstel fonksiyon yönteminin çözümleri daha kapsamlıdır.

## KAYNAKLAR DİZİNİ

- [1] Koca K., Kısmi Türevli Denklemler, Gündüz Yayıncılık, 2001.
- [2] İrk D., Bazı Kısmi Türevli Diferensiyel Denklem Sistemlerinin B-spline Sonlu Elemanlar Çözümleri, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Doktora tezi, 2007.
- [3] He JH., Wu XH., Exp-Function Method for Nonlinear Wave Equations, Chaos Solitons Fractals, 30, 3, (2006), 700-708.
- [4] He JH., Wu XH., Solitary Solutions Periodic Solutions and Compacton- Like Solutions using the Exp-Function Method, Computers Mathematics with Applications, 54, 7-8, (2007), 966-986.
- [5] Abdou M., He JH., New Periodic Solutions for Nonlinear Evolution Equations using Exp-Function Method, Chaos Solitons Fractals, 34, 5, (2007), 1421-1429.
- [6] Wu XH., He JH., Exp-Function Method and its Application to Nonlinear Equations, Chaos Solitons Fractals, 38, 3, (2008), 903-910.
- [7] Dai C., Chen J., Exact Solution of (2+1)-Dimensional Stochastic Broer-Kaup Equation, 373, 14, (2009) 1218-1225.
- [8] S-D. Zhu., Exp-function Method for the Hybrid-Lattice System, International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 8, 3, (2007), 461-464.
- [9] Boz A., Bekir A., Exact Solutions for Nonlinear Evolution Equations using Exp-Function Method, Physics Letters A, 372, 10, (2008), 1619-1625.
- [10] Calogero F., Degasperis A., Nuovo Cimento B, (1977), 39-54.
- [11] Bekir A., Boz A., Application of Exp-Function Method for (2+1)-Dimensional Nonlinear Evolution Equations, Chaos Solitons and Fractals, 40, 1, (2009) 458-465.
- [12] Fan E., Zhang H., A note on the homogeneous balance method, Physics Letters A 246, (1998), 403.
- [13] Zhao H., Bai C., New doubly periodic and multiple soliton solutions of the generalized (3+1)-dimensional Kadomtsev-Petviashvili equation with variable coefficients, Chaos Solitons Fractals, 30, (2006), 217-226.
- [14] Chen Y., Yan Z., Zhang H., New explicit solitary wave solutions for (2+1)-dimensional Boussinesq equation and (3+1)-dimensional KP equation, Physics Letters A, 307, (2003), 107-113.
- [15] Bekir A., Boz A., Application of Exp-function method for (3+1)-dimensional nonlinear evolution equations, 56, (2008), 1451-1456.
- [16] Wang JP., J Non Math Appl, 9, (2002), 213.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (devamı)**

- [17] Goktas U., Heremaan E., Symbolic Computation of Conserved Densities for Systems of Nonlinear Evolution Equations, *Journal of Symbolic Computation*, 24, (1997), 591.
- [18] He JH., Abdou M., New periodic solutions for nonlinear evolution equations using Exp-function method, *Chaos Solitons and Fractals*, 34, (2007), 1421-1429.
- [19] Konopelchenko BG., DubrovskyVG., Some new integrable nonlinear evolution equations in (2+1)-dimensions, *Physics Letters A*, 102, (1984), 15-7.
- [20] Bekir A., Boz A., Application of Exp-Function Method for(2+1)-Dimensional Nonlinear Evolution Equations, *Chaos Solitons and Fractals*, 40, 1, (2009) 458-465
- [21] Wadati M., *Prog Theor Phys Suppl*, 59, ( 1976), 36.
- [22] Dai C., Cen X., Wu S., The Application of He's exp-function method to a nonlinear differantial-difference equation, *Chaos Solitons and Fractals*, (2008).
- [23] Zhu SD., Discrete (2+1)-dmensional Toda lattice equation via Exp-function method, *Physics Letters A*, 372, (2008), 654-657.