

EQUAL WIDTH (EW) DENKLEMİNİN
B-SPLINE FONKSİYONLAR
YARDIMIYLA NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ
Zafer HELVACIOĞLU
Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Aralık - 2009

EQUAL WIDTH (EW) DENKLEMİNİN B-SPLINE FONKSİYONLAR
YARDIMIYLA NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Zafer HELVACIOĞLU

Dumlupınar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Yrd.Doç.Dr. Ahmet BOZ

Aralık - 2009

KABUL ve ONAY SAYFASI

Zafer HELVACIOĞLU 'nun YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı EQUAL WIDTH (EW) DENKLEMİNİN B-SPLINE FONKSİYONLAR YARDIMIYLA NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

20 / 01 / 2010

Üye : Prof.Dr.Atalay KÜÇÜKBURSA

Üye : Doç.Dr.Elçin YUSUFOĞLU

Üye : Yrd.Doç.Dr.Ahmet BOZ

Fen Bilimleri Enstitüsün Yönetim Kurulu'nun/...../..... gün ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr.Atalay KÜÇÜKBURSA

Enstitüsü Müdürü

EQUAL WIDTH (EW) DENKLEMİNİN B-SPLINE FONKSİYONLAR YARDIMIYLA NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

ZAFER HELVACIOĞLU

Matematik Bölümü , Yüksek Lisans Tezi 2009

Tez Danışmanı : Yrd. Doç.Dr Ahmet BOZ

ÖZET

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde spline ve B-spline fonksiyonlar, solitary dalgalar ile ilgili temel bilgiler verilmiş, sonlu elemanlar metodu yardımıyla uygulanacak yöntemler tanıtılmıştır. Ayrıca tez boyunca çalışılmış olan EW denklemi hakkında kısa bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde EW denkleminin nümerik çözümü için Kuadratik B-Spline Galerkin metodu uygulanmış ve üç test problemi çalışılmıştır.

Üçüncü bölümde EW denkleminin nümerik çözümü için En küçük kareler metodu ifade edilerek metodun uygulaması gerçekleştirilmiştir. Ayrıca iki test problemi çalışılmıştır.

Dördüncü bölümde EW denkleminin nümerik çözümü için Kübik B-spline kolokyeşin metodu ifade edilerek metodun uygulanması gerçekleştirilmiştir. Metodun etkinliğini göstermek için üç test problemi incelenmiştir. Sonraki bölümde Kübik Spline kolokyeşin metoduyla EW denkleminin nümerik çözümü incelenmiştir. Solitary dalgaların hareketini içeren test problemleri çalışılarak metodun etkinliği gösterilmiştir. Son bölümde EW denkleminin nümerik çözümü için kullanılan metodların karşılaştırılması yapılmıştır.

Anahtar kelimeler : B-spline , EW denklemi , Galerkin metodu , Kolokeyşin metodu.

**NUMERICAL SOLUTIONS OF THE EQUAL WIDTH EQUATION
BY USING B-SPLINE FUNCTIONS**

ZAFER HELVACIOĞLU

Mathematics, MSc Thesis, 2009

Thesis Adviser : Asist.Prof. Ahmet BOZ

SUMMARY

This dissertation consists of six chapters. In the first chapter, principles of spline and B-spline functions, Solitary waves is given and techniques to be implemented by the method of finite elements is introduced. Moreover, several brief information given about the EW-equation practised throughout the dissertation.

In the second chapter, method of Quadratic B-spline Galerkin was carried out for the numerical solution of EW-equation and three sample problems were studied.

In the third chapter, after being stated, method of least squares implemented for the numerical solution of EW-equation. Besides, two sample problems were studied.

In the fourth chapter, after being stated, method of cubic B-spline collocation implemented for the numerical solution of EW-equation. three sample problems were studied in order to point out the trenchancy of this method. The numerical solution of EW-equation using the method of cubic spline collocation examined in the next section. The impression of the method is expressed by studying sample problems including the motion of solitary waves. In the last section, a collation of the methods used to numerically solve the EW-equation is carried out.

Keywords : B-spline functions, EW equation, Galerkin method, Collocation method

TEŐEKKÜR

Tez alıŐmasının her aŐamasında yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan sayın hocam **Yrd.Do.Dr. Ahmet BOZ'** a iyi ve kÖtÖ gÖnlerimde varlığını hep hissettiren **eŐime** ve **iŐ arkadaşlarıma** teŐekkürlerimi sunarım.

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Cizelge</u>	<u>Sayfa</u>
1.1. $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığında , düğüm noktalarındaki değerler	4
1.2. $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ düğüm noktalarındaki değerleri	5
2.1. Solitary dalga büyüklüğü 0.3, $x_0 = 10.0, h = 0.03, \Delta t = 0.05, 0 \leq x \leq 30$	18
2.2. $d = 5, U_0 = 0.1$ Dalga Titreşiminin gelişimi.....	20
2.3. $U_0 = 2$, ile solitary dalga genişlikleri kuvvet uygulama periyodu $0 \leq t \leq 20, h = 0.4, \Delta t = 0.1, 0 \leq x \leq 260$	22
2. 4. sınır değer darbelerinin çeşitli süreleri için serbest dalgalar $t_0 = 20$	23
2.5. Solitary dalgaların gözlemi, $U_0 = 2$	23
2.6. $\Delta t = 20$ ile 6: Sınır değer etkisinin çeşitli genişlikleri için solitary dalgalar	24
3.1. $T=80$ 'de genliği 0.3, $0 \leq x \leq 30$ olan tek solitary dalga hata normları.....	30
3.2. Genliği 0.3 $\Delta x = 0.03, \Delta t = 0.03, 0 \leq x \leq 30$ olan tek solitary dalga değişkenleri ve hata normları.....	31
3.3. $T=80$, genliği 0.3, $0 \leq x \leq 20$ tek solitary dalganın hata normları.....	31
3.4. Genliği 0.09 $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.05, 0 \leq x \leq 20$ olan tek solitary dalganın değişkenleri ve hata normları.....	31
3.5. $t=80$ 'de genliği =0.3, $0 \leq x \leq 20$ tek solitary dalganın hata normları.....	31
3.6. Genliği 0.03 $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.1, 0 \leq x \leq 20$ olan dalganın değişken ve hata normları ..	32
4.2. Solitary dalga genliği 0.3, $x_0 = 15, 0 \leq x \leq 80, t = 40$ 'ta simülasyon sonuçları.....	42
4.3. Solitary dalga genliği 0.3, $x_0 = 10, 0 \leq x \leq 30, t = 80$ 'de simülasyon sonuçları.....	42
4.4. undular bore $d=5, U_0=0.1$ gelişimi	44
4.5. $d=2, U_0 = 0.1$ Öncü dalga gelişimi	45
4.6. Dalga genlikleri $U_0 = 1, h = 0.2, \Delta t = 0.05, 0 \leq x \leq 120$	47
5.1. genliği 0.3 olan solitary dalga, $x_0 = 10.0, h = 0.03, \Delta t = 0.05, 0 \leq x \leq 30$	55
5.2. $d=5, U_0 = 0.1$ undular bore gelişimi	57

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1. Kuadratik B-spline şekil fonksiyonu.....	3
1.2. Kuadratik B-spline fonksiyonu	3
1.3. Kübik B-spline fonksiyonu	5
2.1. $t=0,40-80$ zamanlarında Solitary dalga profili	18
2.2. Hata = (analitik-nümerik) çözümler, $t=80$ iken.....	19
2.3. çeşitli zamanlarda genişlik $d=5$ İlk profiller ve Ondülasyon Profilleri	21
2.4. $U_0 = 2, t = 100, h = 0.4, \Delta t = 0.1$ bu genişlik deki deney süresince kuvvet uygulanması sonucu üretilen serbest dalgalar.....	24
3.1. çözüm vektörünün her bir 500- zaman adımında alınmış resimleri, $d=5$	33
4.1. $t=0$ ve $t=80$ 'de solitary dalga profilleri	41
4.2. $t=80$ 'de hata= (analitik-nümerik)	41
4.3. $d=5$ ile çeşitli zamanlarda başlangıç profilleri ve dalga profilleri.....	44
4.4. $d=2$ çeşitli zamanlarda başlangıç profili ve dalga profilleri.....	46
4.5. Öncü dalgaların $d=5$ ve $d=2$ deki genlik gelişimi.	46
4.6. Dalgaların genliğinin zamansal gelişimi	48
4.7. $t=400$ zamanında çözüm profili	48
5.1. $t=0,80$ zamanında solitary dalga profili	54
5.2. $t=80$ zamanında hata dağılımı	55
5.3. $d=5$ ile çeşitli zamanlardaki ilk profilleri ve titreşim profilleri	56

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Kısaltmalar	Açıklama
EW	Equal Width Denklemi
RLW	Düzenlenmiş Uzun Dalga
KdV	Oluşum denklemi

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	iv
SUMMARY.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	x
1. GİRİŞ	1
1.1 Spline Fonksiyonlar:.....	1
1.2 B-Spline Fonksiyonlar.....	1
1.2.1. Kuadratik B-spline fonksiyonlar	2
1.2.2. Kübik B-spline fonksiyonlar	4
1.3 Solitary Dalgalar:.....	6
1.4 En Küçük kareler yöntemi:.....	6
1.5 Sonlu Elemanlar Metodu	8
1.5.1 Galerkin Metodu:	9
1.5.2 En Küçük Kareler Metodu:	9
1.5.3 Kolokeyşın Metodu:	10
1.6 EW Denklemleri:	10
2. EW DALGA DENKLEMİNİN KUADRATİK B-SPLINE SONLU ELEMANLAR	
METODUYLA ÇÖZÜMÜ.....	12
2.1. Ew Denkleminin Sayısal Çözümü İçin Kuadratik B-Spline Galerkin Metodu	12
2.2. Metodun Uygulanması.....	13
2.3 Test Problemleri	16
2.3.1 Solitary dalganın hareketi :.....	17
2.3.2 Dalga Titreşimi :.....	19
2.3.3 Dalga oluşumu :	21
2.3.4 Sonuç.....	24
3. EW DENKLEMİNİN EN KÜÇÜK KARELER METODUYLA ÇÖZÜMÜ.....	26
3.1. Ew Denkleminin Sayısal Çözümü İçin En Küçük Kareler Metodu.	26
3.2 Metodun Uygulanması.....	27

İÇİNDEKİLER (devamı)

3.3	Test Problemleri	29
3.3.1	Tek Solitary Dalganın Hareketi.....	29
3.3.2	Solitary Dalganın Gelişimi	32
3.3.3	Sonuç.....	33
4	EW DENKLEMİNİN KÜBİK B-SPLİNE SONLU ELEMENLAR METODUYLA	
	ÇÖZÜMÜ	35
4.1.	Ew Denklemının Sayısal Çözümü İçin Kübik B-Spline Kolokeyşın Metodu	35
4.2.	Metodun Uygulanması.....	36
4.3	Test Problemleri	38
4.3.1.	Solitary dalganın hareketi.....	39
4.3.2.	Dalga Oluşumu.....	42
4.3.3.	Yarı Sonsuz alanda dalga oluşumu.....	46
4.3.4	Sonuç.....	48
5.	EW DENKLEMİNİN KÜBİK SPLINE KOLOKEYŞIN METODUYLA ÇÖZÜMÜ	
	49	
5.1.	Ew Denklemının Kübik Spline Kolokeyşın Metoduyla Çözümü.....	49
5.2.	Metodun Uygulanması.....	49
5.3.	Test Problemleri	53
5.3.1.	Solitary Dalgaların Hareketi.....	54
5.3.2.	Dalga Hareketi.....	55
5.3.3.	Sonuç.....	58
6.	SONUÇLAR	59
	KAYNAKLAR DİZİNİ.....	60

1. GİRİŞ

1.1 Spline Fonksiyonlar:

Çok sayıdaki veri noktalarına bir tek eğri ile yaklaşmak büyük kolaylıklar sağlasa da bazı durumlarda büyük hatalara neden olabilir. Ayrıca bu amaç için kullanılan Newton ve Lagrange interpolasyon polinomlarının dereceleri, nokta sayısı çoğaldıkça artacağından bu tür polinomlarla yapılacak işlemler zorlaşır. Bu gibi durumlarda ard ardına gelen iki veri arasında birinci, ikinci, üçüncü yada daha yüksek dereceden fonksiyonlarla yaklaşımın yapıldığı spline interpolasyon yöntemi önerilmektedir. Spline interpolasyonu; tanımlanan aralık üzerinde, birbirlerini örtmeyen alt aralıklarda, daha küçük dereceden polinom bulma esasına dayanmaktadır.

Spline fonksiyonlar, aşağıdaki özellikleri sağlayan parçalı polinom fonksiyonlardır:

- Spline fonksiyonlar, düzgün fonksiyonlardır.
- Spline fonksiyonlar, uygun baza sahip olan sonlu boyutlu lineer uzaylardır.
- Spline fonksiyonların elle hesaplanması ve bilgisayar programlarının yapılması kolaydır.
- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri de spline fonksiyonlardır.
- Küçük dereceden spline fonksiyonlar çok esnektir ve polinomlar da ki gibi salınım sergilemezler.

1.2. B-Spline Fonksiyonlar

Spline fonksiyonların bir özel hali B-spline fonksiyonlardır. Farklı dereceden B-spline fonksiyonlar vardır. Örneğin 0. dereceden B-spline fonksiyonu

$$B_i^0 = \begin{cases} 1, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

formunda tanımlanır. Burada

$$\dots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots \text{ ve } \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \infty = -\lim_{i \rightarrow \infty} x_i$$

dir.

d , negatif olmayan bir tamsayı ve $x = (x_m)$, en az $d+2$ uzunluğunda, azalmayan, bir reel sayı dizisi olsun. $x = (x_m)$, dizisine düğüm vektörü yada düğüm dizisi denir. Bu durumda x düğümlerine sahip, d . dereceden, m . B-spline fonksiyonu $\phi_{m,d}$ in bazı özellikleri aşağıdaki şekilde verilebilir.

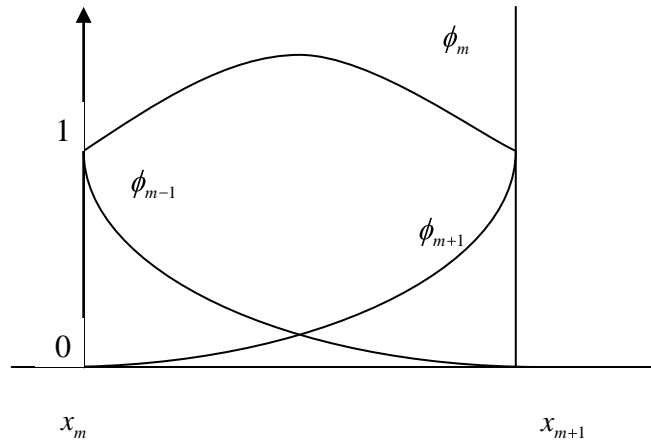
- m . B-spline fonksiyonu $\phi_{m,d}$, sadece $x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+d+1}$ düğümlerine bağlıdır
- Eğer $x \in (x_m, x_{m+d+1})$ ise $\phi_{m,d}(x) > 0$ dır. Burada $[x_m, x_{m+d+1}]$ kapalı aralığı $\phi_{m,d}$ in desteği olarak adlandırılır.
- Her bir $\phi_{m,d}^k(x)$, d . dereceden bir polinom olmak üzere $\phi_{m,d}$ B-spline fonksiyonu,
$$\phi_{m,d}(x) = \sum_{k=m}^{m+d} \phi_{m,d}^k(x) \phi_{k,0}(x)$$
 şeklinde yazılabilir.
- Eğer $z = x_m = \dots = x_{m+d} < x_{m+d+1}$ ise $\phi_{d,m}(z) = 1$ ve $i \neq m$ için $\phi_{i,d}(z) = 0$ dır.
- Eğer z sayısı x_m, \dots, x_{m+d+1} arasında t defa görünüyorsa $\phi_{m,d}$ in $0, 1, \dots, d-t$ inci mertebeden türevlerinin hepsi z noktasında süreklidir.

1.2.1. Kuadratik B-spline fonksiyonlar

$[a,b]$ aralığını $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, noktalarında eşit uzunluklu alt aralıklara bölelim. Bu alt aralıklar üzerinde oluşturulan kuadratik B-spline fonksiyonları $m=-1, 0, \dots, N$ ve $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere,

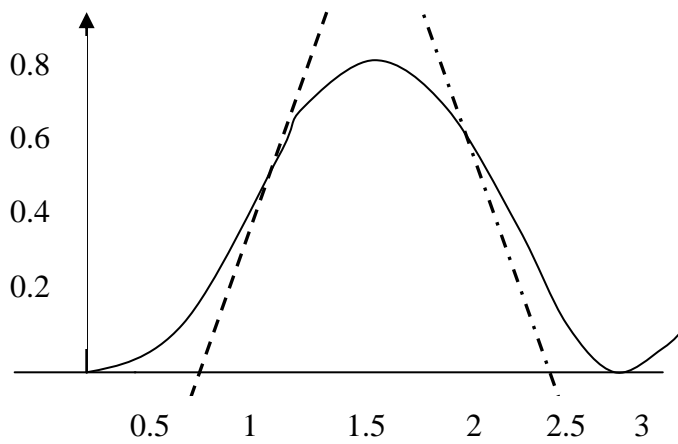
$$\phi_{m,2}(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2 + 3(x_m - x) & x \in [x_{m-1}, x_m], \\ (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2 & x \in [x_m, x_{m+1}], \\ (x_{m+2} - x)^2 & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}], \\ 0 & \text{diğer.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığındaki kuadratik B-spline şekil fonksiyonları Şekil 1.1 ile verilmiştir.



Şekil 1.1 Kuadratik B-spline şekil fonksiyonu

$\phi_m(x)$ kuadratik B-spline fonksiyonlardan oluşan $X_N = L\{\phi_{-1}, \phi_0, \dots, \phi_N, \phi_{N+1}\}$ kümesi, $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonların bir tabanıdır [3]. Şekil 1.2 de $\phi(x|0, 1, 2, 3)$ Kuadratik B-spline fonksiyonu, kendisine oluşturan polinom parçaları ile birlikte görülmektedir. Şekilde üç polinom $\phi(x|0, 1, 2, 3)$ Kuadratik B-spline fonksiyonunu oluştururken, fonksiyonun 1. mertebeden türevinin sürekli olabilmesi için birbirlerine nasıl bağlandıklarına dikkat edilmelidir.



Şekil 1.2 Kuadratik B-spline fonksiyonu

Kuadratik B-spline fonksiyonu $\phi_{m,2}(x)$ ve onun türevi, $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır. Düğüm noktalarının eşit aralıklı olması durumunda $\phi_{m,2}(x)$ Kuadratik B-spline fonksiyonun ve onun türev $\phi'_{m,2}(x)$ in, $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığında, düğüm noktalarındaki değerleri Çizelge 1.1 de verilmektedir. Burada h iki düğüm noktası arasındaki uzaklıktır.

Çizelge 1.1 $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığında, düğüm noktalarındaki değerler

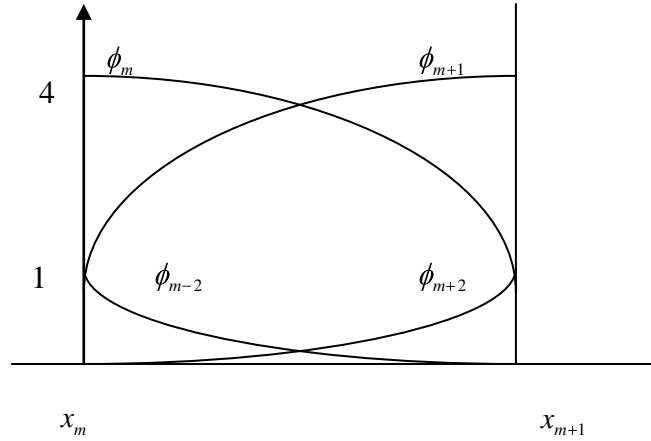
x	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
$\phi_{m,2}(x)$	0	1	1	0
$\phi'_{m,2}(x)$	0	$\frac{2}{h}$	$-\frac{2}{h}$	0

1.2.2. Kübik B-spline fonksiyonlar

$[a,b]$ aralığını $\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, noktalarında eşit uzunluklu alt aralıklara bölelim. Bu alt aralıklar üzerinde oluşturulan kübik B-fonksiyonları $m = -1, 0, \dots, N$ ve $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere,

$$\phi_{m,3}(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x_m - x_{m-2})^3, & x \in [x_{m-2}, x_{m-1}], \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) - 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3 & x \in [x_{m-1}, x_m], \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3 & x \in [x_m, x_{m+1}], \\ (x_{m+2} - x)^3 & x \in [x_{m+1}, x_{m+2}], \\ 0, & \text{diğer.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığındaki kübik B-spline şekil fonksiyonları Şekil 1.3 ile verilmiştir.



Şekil 1.3 Kübik B-spline fonksiyonu

$\phi_m(x)$ kübik B-spline fonksiyonlardan oluşan $X_N = L\{\phi_{-1}, \phi_0, \dots, \phi_N, \phi_{N+1}\}$ kümesi, $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonların bir tabanıdır [3]. Kübik B-spline fonksiyonu $\phi_{m,3}(x)$ ve onun türevi, $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır. Düğüm noktalarının eşit aralıklı olması durumunda $\phi_{m,3}(x)$ kübik B-spline fonksiyonun ve onun türev $\phi'_{m,3}(x)$ in ve onun ikinci türevi $\phi''_{m,3}(x)$ in $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığında, düğüm noktalarındaki değerleri Çizelge 1.2 de verilmektedir. Burada h iki düğüm noktası arasındaki uzaklıktır.

Çizelge 1.2 $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
$\phi_{m,3}(x)$	0	1	4	1	0
$\phi'_{m,3}(x)$	0	0	0	$-\frac{3}{h}$	0
$\phi''_{m,3}(x)$	0	$\frac{6}{h^2}$	$-\frac{12}{h^2}$	$\frac{6}{h^2}$	0

1.3 Solitary Dalgalar:

Solitary dalgaları soliton dalgalarına benzeyen dalgalar olarak ta tanımlanmaktadır, yani çarpışma sonrası özelliklerini korumaya çalışan dalgalardır. Bu sebeple solitonumsu dalgalar olarak ta adlandırılabilirler. Solitary dalgalarını keşfeden Russel (1844) dir.

Bu keşfinden sonra Russel, solitary dalgalarının özellikleri hakkında aşağıdaki önemli bilgilere ulaşmıştır.

- Yeterince büyük miktardaki su kütlesi, iki veya daha fazla solitary dalgası üretir.
- Normal dalgaların aksine solitary dalgaları asla birleşmezler. Bu sebeple küçük genliğe sahip bir solitary dalgası ile büyük genliğe sahip bir solitary dalgası birbirleri ile çarpıştıktan sonra, iki solitary dalgası birbirlerinden ayrılarak, şekillerinde bir bozulma olmadan yollarına devam edebilirler. Normal dalgalar, ya düzleşmeye başlar yada dikleşerek sönecek şekilde hareket ederlerken, solitary dalgaları kararlıdır ve uzun mesafelerde yolculuk yapabilirler.
- g yerçekimi ivmesi olmak üzere, h yüksekliğine sahip olan ve d derinliğindeki bir kanalda hareket eden bir solitary dalgası

$$v = \sqrt{g(+h)}$$

ile ifade edilen bir hıza sahiptir. Diğer bir ifade ile dalganın hızı, yüksekliğine ve suyun derinliğine bağlıdır.

Dolayısıyla büyük genlikli bir solitary dalgası, küçük genlikli bir solitary dalgasına göre daha hızlı hareket eder. Bir solitary dalgasının hızı genliği ile orantılı olduğundan, bir solitary dalga normal dalgalardan farklıdır.[21]

1.4. En Küçük kareler yöntemi: Gerçek yaşamın çeşitli alanlarında herhangi bir uygulama ile toplanan veriler tablo şekline getirilerek incelenir ve toplanan veriyi modelleyen bir fonksiyon bulunmaya çalışılır. Çoğu zaman bu veri tablosuna tam olarak uyan bir fonksiyon bulmak mümkün olmaz; veri tablosuna **en iyi uyan** fonksiyon belirlenmeye çalışılır. Bir veri

tablosuna **en iyi uyan** fonksiyonu bulma sürecine **Regresyon analizi** denir. Regresyon analizi yaparken en çok kullanılan yöntemlerden biri **en küçük kareler yöntemi**dir. Büyük matematikçi C. F. Gauss'un 18 yaşındayken (1795) geliştirdiği bu yöntem, ilk kez 1801 de Ceres astroidinin yörüngesinin belirlenmesinde kullanılmış ve ilk kez Gauss'un toplu eserlerinin yayınlandığı ciltlerden ikincisinde 1809 yılında yayınlanmıştır. Fransız matematikçi A. Legendre 1805 ve Amerikalı matematikçi R. Adrain de 1808 yıllarında aynı yöntemi Gauss'dan habersiz ve bağımsız olarak keşfetmişlerdir. En küçük kareler yöntemi, tıp, finans, mühendislik, ziraat, biyoloji ve sosyoloji gibi çeşitli bilim dallarında çeşitli değişkenler arasındaki ilişkiler belirlenirken kullanılan en önemli araçlar arasındadır.

Belli ölçümler sonucunda $i = 1, 2, \dots, n$ için (x_i, y_i) verileri elde edilmiş olsun.

Burada, her bir y_i in x_i ye bağlı olarak değiştiği varsayılmaktadır. (x_i, y_i) düzlemde noktalar olarak düşünüldüğünde, pratikte bu noktalar düzgün bir eğri üzerinde, başka bir deyimle, bilinen bir fonksiyonun grafiği üzerinde bulunmazlar. Hatta bazı durumlarda, (x_i, y_i) ler arasında ne tür bir bağıntı bulunduğu dahi bilinmeyebilir. Ancak, yapılan ölçümlerin doğası gereği, her $i = 1, 2, \dots, n$ için $y_i = f(x_i)$ olacak biçimde bir fonksiyonun var olduğu, ölçümlerde yapılan hata nedeniyle bu eşitliklerin bazıları veya hepsinin sağlanmadığı kabul edilebilir. Bu düşünceyle, ölçülen y_i değeri $f(x_i)$ için yaklaşık değer kabul edilerek bu yaklaşımdaki hatanın minimum olduğu f fonksiyonu belirlenmeye çalışılır. Bu amacı gerçekleştirmek için f fonksiyonunun bir takım parametrelere bağlı bir ifadesi bulunduğu varsayıp eldeki veriler yardımıyla bu parametreler belirlenmeye çalışılır. Örneğin, f fonksiyonu

$$y = f(x) = mx + b$$

ifadesinde olduğu gibi bir doğrusal fonksiyon veya

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

ifadesinde olduğu gibi bir karesel fonksiyon olabilir ki bu durumda belirlenmesi gereken parametreler a, b, c, m dir.

y_i değeri $f(x_i)$ için yaklaşık değer, $f(x_i) \approx y_i$, kabul edilince yapılan hata

$$y_i - f(x_i)$$

dir ve amaç, bu hatalar minimum olacak şekilde bir f fonksiyonu bulmaktır.

1.5 Sonlu Elemanlar Metodu

Sonlu Elemanlar Metodu'nun amacı, verilen diferansiyel denklemi ve sınır değer koşullarını yaklaşık olarak sağlayan aynı zamanda da bilinen basit fonksiyonlar aracılığı ile ifade edilebilen çözüm fonksiyonları bulmaktır. Sonlu Farklar Metodu, sürekli bir sistem olarak tanımlanan sınır değer problemini, düğüm noktası olarak adlandırılan N tane noktaya bölerek kesikli bir sistem haline dönüştürür. Böylelikle diferansiyel denklem eşitliği olarak tanımlanan sınır değer problemi bir grup çözülmesi gereken cebirsel eşitlik haline gelir.

Sonlu elemanlar ve sonlu farklar metotları arasında bir takım farklılıklar vardır. Bu farklılıklar aşağıda kısaca özetlenmiştir:

- Sonlu farklar metodunda, diferansiyel denklemdeki türev değerleri için bir yaklaşım yapılırken, sonlu elemanlar metodunda ise diferansiyel denklemin çözümü için bir yaklaşım yapılır.
- Çoğu fiziksel problem, türevler ve düzensiz sınırlar içeren sınır koşullarına sahiptir. Bu tip problemlerin sonlu farklar metodu ile çözümleri zordur. Ayrıca sonlu farklar metodu, problemin çözüm bölgesinin düzgün geometrik, şekiller olması durumunda iyi sonuç vermesine karşılık, sonlu elemanlar metodu hem düzgün, hem de düzgün olmayan karmaşık geometrik bölgelerdeki çözümlerde iyi sonuçlar vermektedir.
 - Sonlu farklar metodunun en önemli özelliği uygulanmasının kolay olmasıdır.
 - Bölünme noktaları arasındaki bir değer için, sonlu farklar metodu ile bir yaklaşım yapılamazken, sonlu elemanlar metodunda her bir alt aralığa karşılık interpolasyon polinomu tanımlandığından, bölünme noktaları arasındaki değerler için de bir yaklaşım yapılabilir.
 - Sonlu elemanlar yaklaşımı, genelde sonlu farklar yaklaşımından daha iyidir. Fakat bu durum probleme bağlıdır ve aksi örnekler bulunabilir.
- Sonlu farklar metotlarını elde etmek için Taylor serileri yeterli olurken, sonlu

elemanlar metodlarını elde etmek daha zor işlemler ve daha fazla bilgi gerektirir. [3]

1.5.1 Galerkin Metodu:

Ψ_i ağırlık fonksiyonunu $\Psi_i = A(\phi_j)$, ϕ_i yaklaşım fonksiyonuna eşit alınırsa bu Galerkin metodu olarak bilinir. Galerkin yaklaşımının cebirsel denklemleri

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = F_i \quad (18)$$

olup burada $A_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i A(\phi_j) dx dy$ ve $F_i = \int_{\Omega} [f - A(\phi_0)] \phi_i dx dy$ dir. [A] simetrik değildir.

1.5.2 En Küçük Kareler Metodu:

Bu yöntemde, c_j parametrelerini kalanının (R) karesinin integralinin minimizasyonu ile belirlenmesi halinde buna en küçük kareler yöntemi denir.

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \int_{\Omega} R^2(x, y, c_j) dx dy = 0 \quad (19)$$

veya

$$\int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial c_i} R dx dy = 0 \quad (20)$$

Görüldüğü gibi esas denklemde $\Psi_i = \partial R / \partial c_j$ şeklinde bir değişiklik meydana gelmiştir. Eğer A lineer bir operatörse, $\Psi_i = A(\phi_j)$ olacağından

$$\sum_{j=1}^N \int_{\Omega} A(\phi_i) A(\phi_j) dx \bar{c}_j = \int_{\Omega} A(\phi_i) [f - A(\phi_0)] dx \quad (21)$$

elde edilir. Bu da,

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = F_i \quad (22)$$

yazılabilir. Burada [A] simetriktir.

1.5.3 Kolokeyşın Metodu:

Kolokeyşın metodunda, çözüm bölgesi üzerinde seçilmiş N adet $x_i \equiv (x_i, y_i)$ noktasında kalan sıfırlanması istenir.

$$R(x_i, y_i, c_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (23)$$

x_i noktalarının seçimi iyi bir yaklaşık çözüm elde etmek için önemlidir. Kolokeyşın metodu $\Psi_i = \delta(x - x_i)$ ile şeklinde bir dönüşüm ile genel çözüm denklemine benzetilebilir. Burada $\delta(x)$ Dirac delta fonksiyonu olarak adlandırılır ve

$$\int_{\Omega} f(x) \delta(x - \xi) dx dy = f(\xi) \quad (24)$$

şeklinde verilir. Ağırlık fonksiyonların bu şekilde seçilmesi halinde ağırlıklı kalan ifadesi,

$$\int_{\Omega} \delta(x - x^i) R(x, c_j) dx dy = 0 \quad \text{veya} \quad R(x^i, c_j) = 0 \quad (25)$$

olur.

1.6 EW Denklemi:

EW denklemi matematikte çok fazla ilgi çekmemiştir, ancak Doğrusal Olmayan yayılma dalgalarında önemli bir rol oynamaktadır. EW denklemi önemli fiziksel olaylardan oldukça fazla sayıda olayı modeller. Bunların arasında sığ su dalgaları ve iyon akustik plazma dalgaları vardır. ([1],[2]) Morrison [6] bir boyutlu EW denklemini, doğrusal olmayan yayılma dalgalarından daha genel olan Düzenlenmiş Uzun Dalga (RLW) denklemine alternatif bir açıklama olarak sunmuşlardır. EW denklemi sınırlı olmayan bölgede analitik olarak çözülebilir olma avantajına sahiptir, ancak bazı sınır koşulları için çözümlenemeyebilir. Böylece EW denkleminin nümerik çözümleri bazı başlangıç ve sınır koşullarında gerçekleşir.

EW denkleminin sonlu elemanlar metoduna dayanan nümerik çözümleri ([9,13,14,15,16,17]) tarafından çalışılmıştır. Örneğin [9] çalışmasında EW denkleminin Kübik B-spline Galerkin metodu ile çözümünü elde etmiştir. Bu çalışmada solitary dalgaların yayılması ve etkileşimi gösterilmiştir.

Aynı zamanda, literatürde; kuadratik B-spline fonksiyonlarını şekil fonksiyonu olarak kullanan Petrov-Galerkin metodu; lineer konum-zaman şekil fonksiyonlarını kullanan en küçük kareler yöntemi ve kübik B-spline Kolokeyşin yöntemi problemde belirtilen bölge üzerinde EW denkleminin nümerik çözümünü elde etmek için uygulanan sayısal yöntemler olarak kullanılmıştır. ([13,14,15]) Böylece solitary dalgaların hareketi ve dalga oluşumları açıklanmıştır.

Diğer bir çalışmada; ([16,17]) kübik spline Kolokeyşin metodu ve kübik B-spline Kolokeyşin metodunu önermişlerdir. Bu çalışmalarda [4] çalışmasında verilen yöntem ile lineer olmayan terim lineerleştirilmiştir. Daha önce, dalga oluşumu, KdV ve RLW olarak bilinen oluşum denklemleri için araştırılmıştır ([10,11]).

Çalışmalar göstermiştir ki diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için B-spline fonksiyonların kullanılması daha geçerli nümerik çözümler oluşturmaktadır. ([7,9,13,14,15,16,17]) Bu çözümlerde kullanılan B-spline yaklaşım fonksiyonları düğüm noktasındaki B-spline fonksiyonlarının derecesinden bir derece daha düşük seviyede sürekli türevlere sahip olmalıdır.

Böylece , bağımlı değişkenlerin türevlerin daha doğru hesaplanması sağlanır. Bu çalışmada, Galerkin metodu kuadratik B-spline şekil fonksiyonları kullanılarak EW denkleminin sayısal çözümü için yapılandırılmıştır. Adi diferansiyel denklemlerin global matris sistemi, Global parametreler için tekrarlama bağıntısına sahip sonlu farklar yaklaşımı yardımıyla ayrıştırılır. Bu hesaplamalarda Thomas algoritması kullanılır.

2. EW DALGA DENKLEMİNİN KUADRATİK B-SPLINE SONLU ELEMANLAR METODUYLA ÇÖZÜMÜ

Bu çalışmada EW denklemi için Kuadratik B-spline sonlu elemanlar metodu verilmiştir. Uygulanan metot için solitary dalgaların hareketi ve dalgaların gelişimi gösterilmiştir. EW denklemi için sınır koşulları yardımıyla modellenen solitary dalgaların oluşumu gösterilmiştir. Sonuçların benzer algoritmalarla kıyaslanması yapılarak kuadratik B-spline Galerkin metodunun etkinliği gösterilmiştir.

2.1. EW Denkleminin Sayısal Çözümü İçin Kuadratik B-Spline Galerkin Metodu

EW denklemi, pozitif x-yönünde yayılan uzun dalgalar için ortaya çıkmıştır. EW denkleminin genel formu ,

$$U_t + UU_x - \alpha U_{xxt} = 0, \quad (2.1)$$

[6] şeklindedir. Burada α pozitif parametreyi , x ve t ise türevi gösterir. Bu çalışmada (2.1) EW denkleminin

$$U(a,t) = \beta_1, U(b,t) = \beta_2 \text{ ve } U_x(a,t) = U_x(b,t) = 0$$

sınır koşulları ve $\alpha \leq x \leq b$, bölgesi için daha sonra tanımlanacak $U(x,0)$ başlangıç koşulu yardımıyla nümerik çözümleri elde edilecektir.

$W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere Galerkin yöntemini uygulayalım .

$$\int_a^b W(U_t + UU_x - \alpha U_{xxt}) dx = 0$$

Interpolasyon (ara değer) fonksiyonu ve bunun birinci türevi , $\alpha \leq x \leq b$, aralığında integrandın ikinci türeve sahip olabilmesi için sürekli seçilmelidir. Kısmi integrasyon uygulandığında

$$\int_a^b [W(U_t + UU_x) + \alpha W_x U_{xt}] dx = 0 \quad (2.2)$$

integral denklemi elde edilir.

2.2. Metodun Uygulanması

[a,b] aralığını

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b,$$

olacak şekilde eşit aralıklara bölelim. Burada

$$h=(b-a)/N$$

dir.

Bu çalışmada aşağıdaki kuadratik B-spline fonksiyon kullanılacaktır.

$$B_l(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x_{l+2} - x)^2 - 3(x_l + 1 - x)^2 + 3(x_1 - x) & [x_l - 1, x_l], \\ (x_{l+2} - x)^2 - 3(x_l + 1 - x)^2 & [x_l, x_l + 1], \\ (x_{l+2} - x)^2 & [x_{l+1}, x_{l+2}], \\ 0 & \text{diğer.} \end{cases} \quad (3.1)$$

$a \leq x \leq b$ bölgesi üstünde tanımlı x_l düğüm noktalarındaki $Q_l(x)$, $l = -1, \dots, N$ Kuadratik B-Spline fonksiyonları (Prenter,1975) tarafından tanımlanmıştır. U_n yaklaşık çözümü kuadratik B-spline fonksiyonu olarak aşağıdaki gibi yazılabilir

$$U_N(x, t) = \sum_{l=-1}^N \delta_l(t) B_l(x), \quad (3.2)$$

Burada δ_l (2.1) Galerkin formundan hesaplanması gereken zamana bağlı parametrelerdir. Her kuadratik B-spline 3 eleman tarafından kaplandığı için $[x_l, x_{l+1}]$ aralığındaki her eleman 3 spline tarafından kaplanır. (3.1) de $\xi = x - x_l$, $0 \leq \xi \leq h$ dönüşümü yapıldığında

$$Q_l = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (h - \xi)^2 & \\ (h^2 + 2h\xi - 2\xi^2), & 0 \leq \xi \leq h \\ \xi^2 & \end{cases} \quad (3.3.)$$

elde edilir. Burada $Q_m, m = l-1, l, l+1$ bilinen B-spline şekil fonksiyonlarıdır.

Yapılan dönüşümden sonra yaklaşık çözüm

$$U_N(\xi, t) = \sum_{j=l-1}^{l+1} \delta_j(t) Q_j(\xi) \quad (3.4)$$

Şeklinde yazılabilir.

(3.2,3.4) yaklaşımları ve (3.3) kuadratik b-spline fonksiyonları kullanılarak, $U(x, t)$ 'nin düğüm noktasındaki değerleri ve x_l düğüm noktalarındaki birinci türevleri eleman parametreleri türünden aşağıdaki şekilde verilebilir

$$\begin{aligned} U_l &= U(x_l) = \delta_{l-1} + \delta_l, \\ U_l' &= U'(x_l) = \frac{2}{h}(\delta_l - \delta_{l-1}), \end{aligned} \quad (3.5)$$

Burada “ ’ ” x e göre türevi belirtir .(2.2) integral denklemi

$$\int_{x_l}^{x_{l+1}} [W(U_t + UU_x) + \alpha W_x U_{xt}] dx = 0 \quad (3.6)$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

$Q_l(\xi)$ Quadratik B-spline şekil fonksiyonları ile $W(x)$ ağırlık fonksiyonunun alınması ve (3.4) ifadesinin (3.6) integral denkleminde yerine yazılması ile

$$\sum_{j=l-1}^{l+1} \left[\int_0^h Q_i Q_j d\xi \right] \delta_j^e + \alpha \sum_{j=l-1}^{l+1} \left[\int_0^h Q_i^l Q_j^l d\xi \right] \delta_j^e + \sum \sum \left[\int_0^h Q_i Q_k^l Q_j d\xi \right] \delta_k^e \delta_j^e = 0$$

denklemini elde edilir. Bu aynı zamanda matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir

$$[A^e + \alpha D^e] \delta^e + \delta^{eT} L^e \delta^e = 0$$

Burada $\delta^e = (\delta_{l-1}, \delta_l, \delta_{l+1})^e$ eleman parametreleridir, “ . ” zamana göre türevi belirtir. Eleman matrisleri integral yardımıyla ile

$$A_{ij}^e = \int_0^h Q_i Q_j d\xi, D_{ij}^e = \int_0^h Q_i^l Q_j^l d\xi \text{ ve } L_{ikj}^e = \int_0^h Q_i Q_k^l Q_j d\xi, \quad (3.7)$$

Şeklinde yazılabilir.

Burada i,j,k $[x_l, x_{l+1}]$ aralığında sadece $l-1, l, l+1$ değerlerini alır. A^e ve D^e matrisleri 3×3 boyutunda ve L^e $3 \times 3 \times 3$ boyutundadır . 3×3 matrisle bağlantılı olarak

$$B_{ij}^e = \sum_{k=l-1}^{l+1} L_{ijk}^e \delta_k^e, \quad (3.8)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece nümerik algoritma δ_k^e ye bağlı olarak uygulanır .

A^e, D^e ve B^e Eleman matrisleri cebirsel olarak REDUCE [7] yazılımı kullanılarak hesaplanmıştır. Bu hesaplamalar sonucunda

$$A^e = \frac{h}{30} \begin{pmatrix} 6 & 13 & 1 \\ 13 & 54 & 13 \\ 1 & 13 & 6 \end{pmatrix}, \quad D^e = \frac{1}{3h} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B_{11}^e = \frac{1}{30}(-10, -19, -1)\delta^e, \quad B_{12}^e = \frac{1}{30}(8, 12, 0)\delta^e,$$

$$B_{13}^e = \frac{1}{30}(2, 7, 1)\delta^e, \quad B_{21}^e = \frac{1}{30}(-19, -54, -7)\delta^e,$$

$$B_{22}^e = \frac{1}{30}(12, 0, -12)\delta^e, \quad B_{23}^e = \frac{1}{30}(7, 54, 19)\delta^e,$$

$$B_{31}^e = \frac{1}{30}(-1, -7, -2)\delta^e, \quad B_{32}^e = \frac{1}{30}(0, -12, -8)\delta^e,$$

$$B_{33}^e = \frac{1}{30}(1, 19, 10)\delta^e,$$

elde edilir. Tüm elemanların katkıların birleştirilmesi ile aşağıdaki denklem sistemini oluştur .

$$(A + \alpha D)\delta + B\delta = 0, \quad (3.9)$$

Burada

$$\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N)^T,$$

ve A, B, ve D , A^e, D^e, B^e , eleman matrislerden elde edilecektir.

(3.9) denkleminde δ zaman göre türev için sonlu fark yaklaşımı ve delta için Crank-Nicolson formülü kullanıldığında ,

$$\delta = \frac{1}{2}(\delta^{n+1} + \delta^n), \quad \delta = \frac{1}{\Delta t}(\delta^{n+1} - \delta^n),$$

t zaman aralığı ve δ^n , $n\Delta t$ zaman aralığında parametreler olmak üzere aşağıdaki tekrarlama bağıntısı elde edilir.

$$[A + \alpha D + \frac{\Delta t}{2} B]\delta^{n+1} = [A + \alpha D - \frac{\Delta t}{2} B]\delta^n, \quad (3.10)$$

Burada

$$\delta^n = (\delta_{-1}^n, \delta_0^n, \dots, \delta_N^n)^T,$$

$$\|U^{tam} - U_N\|_{\infty} = \max |U_j^{tam} - (U_N^n)_j|.$$

Önerilen algoritmanın korunum kanunları Olver [5] tarafından gösterilmiş olan değişkenlerin hesaplanması ile incelenmiştir. Burada

$$C_1 = \int_a^b U dx, C_2 = \int_a^b (U^2 + \alpha(U_x)^2) dx \text{ ve } C_3 = \int_a^b U^3 dx$$

sunulan nümerik algoritmanın geçerliliğini göstermek için üç örnek üstünde çalışılmıştır.

2.3.1 Solitary dalganın hareketi : Bu problem, EW denkleminin Solitary dalga çözümlerinden oluşmaktadır.

$$U(x,t) = 3c \operatorname{sech}^2(k[x - x_0 - vt]), \quad (5.1)$$

Burada

$$k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\alpha}}, \quad v = c$$

dir .

Bu denklem , c , sabit hızda $3c$ büyüklüğünde Başlangıç merkezi x_0 olan tek bir solitary dalgayı temsil etmektedir. Başlangıç koşulu

$$U(x,0) = 3c \operatorname{sech}^2(k(x - x_0)),$$

burada $c = 0.1$, $\alpha = 1.0$, $x_0 = 10$ ve sınır koşulları $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$ alınmıştır.

Problem $[a,b]=[0,30]$ aralığında , $t = 0$, $t_0 = 0$ zamanları için çözülmüştür. Hesaplama adım aralığını $H=0,03$ ve zaman aralığını $t=0,05$ olarak alırsınız. Değerler $([9,13,14,16,17])$ çalışmada kullanılan verilerle aynıdır.

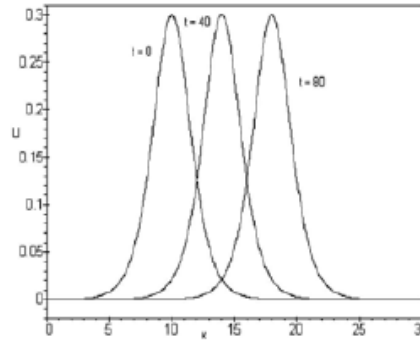
Çizelge 2.1' de seçilen zamanlar için L_2 ve L_{∞} hata normları verilmiştir. L_2 ve L_{∞} hata normlarından açıkça görülmektedir ki, önerilen metot solitary dalganın hareketini yerine getirmektedir, böylece sağa doğru korunmuş bir büyüklük ve şekil ile hareket etmektedir.

$T=0,40$ ve 80 zamanı olan solitary dalgalara ait hareketler Şekil 1'de grafik olarak verilmiştir. Bu grafikte hem sayısal hem de analitik çözümlerin hareketleri de verilmiştir . Bu çözümlerin profil çizimleri ayırt edilmez şekildedir. Zaman $t=80$ 'de hatanın dağılımı $0,3$

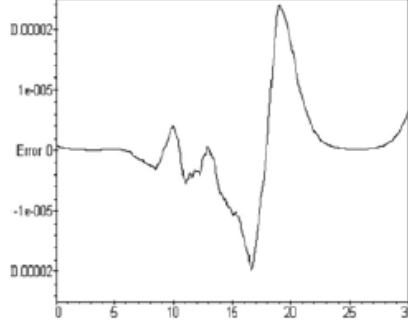
büyükliğindeki solitary dalgalar için şekil 2’de gösterilmiştir.. Maksimum hata dalga büyüklüğünün zirve yaptığı noktanın yakınında gözlemlenmiştir.Hata normlarının kıyaslanması, yakın zamandaki çalışmalar ile göstermektedir ki, kuadratik B-spline sonlu elemanlar metodu kullanıldığında en küçük hatalar bile fark edilebilir. C_1 ve C_3 değişkenlerindeki değişimlerde aynı zamanda bilgisayar hesaplaması yapılırken çok küçüktür ve sırasıyla $\%3.25 \times 10^{-7}$, $\%1.25 \times 10^{-7}$ ’den küçüktür, C_2 sabit kalır, böylece sayısal şemanın sonuçları çizelge 2.1 ‘de verilen en yüksek doğruluğu işaret etmektedir.

Çizelge 2.1 : Solitary dalga büyüklüğü 0.3, $x_0 = 10.0$, $h = 0.03$, $\Delta t = 0.05$, $0 \leq x \leq 30$.

Zaman	C_1	C_2	C_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0	1.19995	0.28800	0.05760	0.0	0.0
5	1.19992	0.28800	0.05759	0.026	0.033
10	1.19991	0.28798	0.05759	0.026	0.020
20	1.19997	0.28799	0.05760	0.017	0.012
40	1.19995	0.28798	0.05759	0.032	0.021
80	1.19998	0.28800	0.05759	0.040	0.024
80 Gardner 1997	1.1910	0.2855	0.05582	3.849	2.646
80 Daet 2004	1.19998	0.28798	0.05759	0.056	0.053
80 Saka 2003	1.19994	0.28800	0.05756	0.049	0.034
80 Irk 2003	1.20008	0.28800	0.05760	0.062	0.053



Şekil 2.1 : $t=0,40-80$ zamanlarında Solitary dalga profili



Şekil 2.2 : Hata = (analitik-nümerik) anında, t=80 iken

2.3.2 Dalga Titreşimi : Başlangıç koşulu

$$U(x, 0) = 0.5U_0(1 - \tanh(\frac{x-x_c}{d})) \quad (5.2)$$

$$U(a, t) = U_0, U(b, t) = 0,$$

sınır koşulları ile beraber gelişiminin modellenmesi için kullanılmıştır. Burada $U(x, 0)$ $T=0$ zamanında denge yüzeyinin üstünde suyun yükselmesini belirtir. Eq (5.2)'de d durgun su ve daha derin su arasındaki eğimi temsil eder ve U_0 büyüklüğü su seviyesindeki değişimin miktarını verir. Değişkenlerin C_1, C_2 ve C_3 değişimleri formüller ile çalışılabilir ([13]):

$$\frac{dC_1}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} U dx = \frac{1}{2} U_0^2 = 5 \times 10^{-3},$$

$$\frac{dC_2}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} (U^2 + \mu U_x^2) dx = \frac{2}{3} U_0^3 = 6.6667 \times 10^{-4},$$

$$\frac{dC_3}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} U^3 dx = \frac{3}{4} U_0^4 = 7.5 \times 10^{-5},$$

$-20 \leq x \leq 50$ aralığı, adım aralığı $h=0,05$ ve $\Delta t=0,05$, zaman aralığı alındığında $\alpha = 0.1666667$, $x_c = 0.0$ ve $d = 5$ kullanılarak, daha önceki çalışmalar ile kıyaslama yapılabilir. ([13,15,16,17]). Çizelge 2.2 'de sabit değerler, C_1, C_2, C_3 , pozisyon ve genlikleri çeşitli zaman adımlarında gösterilmiştir. $T=800.028$ zamanındaki titreşimin genliği 0.184 olarak ölçülmüştür. ([13,15,16,17]). $T=200,400,600$ ve 800 zamanlarındaki titreşimleri başlangıç profili ile beraber Şekil 2.3'de gösterilmiştir. Simülasyon ilerledikçe, titreşim artan

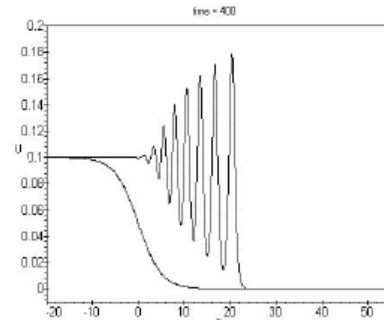
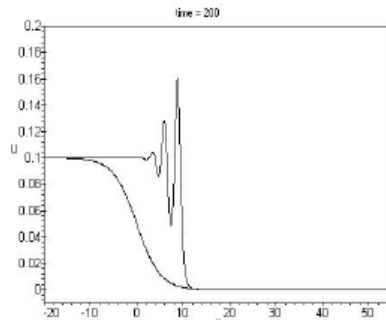
oran ve büyüme ile gelişmektedir. Titreşimlerin şekilleri referanslardaki diğer zaman dilimleri ile tutarlılık göstermektedir. (Şekil 2.3, [13,15]). C_1, C_2, C_3 teki değişiklik oranı, Çizelge 2.2 den aşağıda gösterildiği şekilde, zaman $t=800.028$ çalışılan zaman dikkate alındığında,

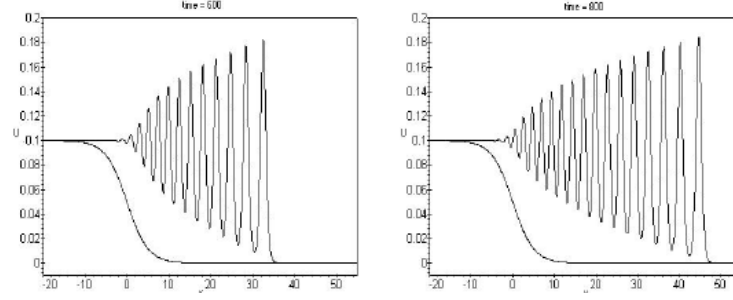
$$\frac{dC_1}{dt} = 5 \times 10^{-3}, \frac{dC_2}{dt} = 6.6693 \times 10^{-4}, \frac{dC_3}{dt} = 7.5 \times 10^{-5}$$
 bunlarda neredeyse değişkenlerin

kuramsal değişiklikleri ile aynıdır .

Çizelge 2.2 : $d = 5, U_0 = 0.1$ Dalga Titreşiminin gelişimi

Zaman	C_1	C_2	C_3	X	U
0	2.002579	0.175378	0.016278		
100.002	2.502576	0.242044	0.023778		
200.008	3.002570	0.308721	0.031277	8.800	0.16053
300.000	3.502566	0.375408	0.038777	14.500	0.17511
400.026	4.002813	0.442128	0.046281	20.400	0.17928
500.001	4.502808	0.508813	0.053780	26.450	0.18147
600.027	5.003036	0.575534	0.061284	32.500	0.18269
700.003	5.503035	0.642223	0.068784	38.600	0.18347
800.028	6.003291	0.708944	0.076287	44.750	0.18409
800 ([13])	6.027221	0.713333	0.07700	44.7	0.18376
800.028([15])	6.003096	0.708689	0.076281	44.75	0.18397
800(ref. ([16])	6.002359	0.708598	0.076271	44.750	0.18390
800 (ref. ([16])	6.002374	0.7086017	0.076271	44.75	0.18390





Şekil 2.3 : çeşitli zamanlarda genişlik $d=5$ İlk profiller ve Ondülasyon Profilleri

2.3.3 Dalga oluşumu : Dalgalar sığ bir su kanalında, sıvı yoğunluğunun oluşmasıyla veya bir uçtan dalga oluşturucu gibi bir mekanik cihazın hareketi ile oluşturulabilir. Takip edilecek olan nümerik test probleminde, serbest yüzeye ilk olarak müdahale edilmemiştir ve uzun yüzey dalgasının gelişimi EW denklemi ile sınır koşulları dikkate alınarak modellenmiştir.

$$U(0,t) = \begin{cases} U_0 \frac{t}{\tau}, & 0 \leq t \leq \tau, \\ U_0, & \tau < t < t_0 - \tau \\ U_0 \frac{t_0 - t}{\tau}, & t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \\ 0, & \text{diğer.} \end{cases}$$

Başlangıç durumu doğrusal olarak 0'dan U_0 'ya τ periyodunda gelişir, $t - 2\tau$ süresince sabit kalmaya devam eder, ardından τ süresi içinde 0'a geri döner. Sınır koşulunun etkisi EW denklemi için pozitif dalgalar oluşturmak üzere araştırılacaktır. Solitary dalgaların genliği sınır değerinin etkisi ile belirlenecektir ve solitary dalgaların sayısı hem büyüklüğe hem de sınır koşulunun periyoduna bağlı olarak bulunacaktır. $a=0$ 'dan uzaktaki daha ileri bir sınır durumu $b=0$ olarak problem bölgesinin $[a,b]$ sağ uç noktasına konulacaktır.

Algoritmanın ilk hesaplanmasında, $0 \leq x \leq 260$ aralığından $h = 0.4, t_0 = 20$,

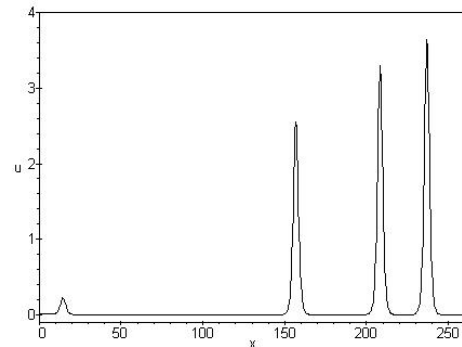
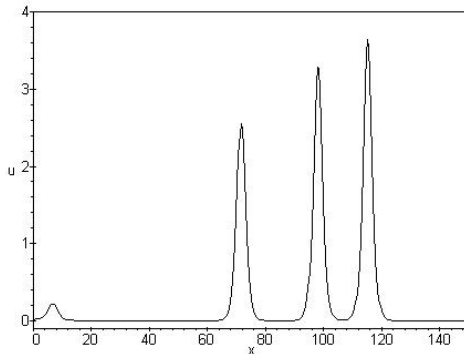
$\tau = 0.1$ ve $U_0 = 2$ parametreleri alınmıştır. $T=20$ zamanında, kuvvet kesildiğinde ; üç solitary dalga oluşturulmuş olur.

Küçük dalga gelişirken, etki bitmiştir, böylece dalga kuvvet veren fonksiyonun büyüklüğüne ulaşamaz. Bu yapılırken, küçük dalganın küçük bir gelişme göstererek sağa kaydığı

gözlemlenmiştir. Devamında kuvvet uygulanmaksızın, hiçbir solitary dalga oluşmamıştır ve sonuçlar tablo 3'te ve şekil 4'te gösterilmiştir. Problem de çeşitli genişlikler değerlendirilmiştir. Genişliklerin oluşumu sabit değildir, aslında dalgadan dalgaya değişiklik göstermektedir. Solitary dalganın maksimum genişliği 3.648'e ulaşmaktadır. $t=100$ ve 200 zamanında $U(x, y)$ 'nin tipik çözümleri ve Şekil 4'te tarif edilmiştir. Aynı parametre ile ilk durum, RLW denklemi kullanarak solitary dalga oluşturmak için kullanılmıştır. ([11]) Dalga genişliklerinin kıyaslanması Çizelge 2.3 'de $t=100$ zamanında yapılabilir. EW denkleminin RLW denkleminde daha az dalga oluşturduğu gözlemlenmiştir.

Çizelge 2.3 : $U_0 = 2$, ile solitary dalga genişlikleri kuvvet uygulama periyodu $0 \leq t \leq 20, h = 0.4, \Delta t = 0.1, 0 \leq x \leq 260$

Zaman	1	2	3	4	5
2.5					
5	2.684				
7.5	3.152				
10	3.349				
15	3.491	3.015			
20	3.543	3.253	2.654		
40	3.631	3.315	2.546	0.212	
60	3.614	3.298	2.555	0.213	
80	3.636	3.292	2.534	0.215	
100	3.648	3.286	2.555	0.217	
100 ([11])	3.76	3.52	3.06	2.33	1.07
150	3.648	3.305	2.541	0.220	
200.003	3.647	3.293	2.555	0.222	



Kuvvet uygulanarak oluşturulan solitary dalgalar arasındaki ilişki bir çok bilgisayar programı ile gösterilmiştir. Böylece program çeşitli kuvvet uygulama süreleri ve sabit sınır durumu genişliği

$U_0 = 2$ ile işlemlenmiştir. Oluşturulan solitary dalgaların zirve anı ve genişlikleri Çizelge 2.4'te gösterilmiştir. Sınır durumu daha uzun süre devam ettikçe daha fazla dalga oluşmuştur. Genişliklere göre, kuvvet uygulama süresi 50 olduğunda, zaman $t=100$ ile $t=200$ arasında genişliklerin ortalama ivmeleri hesaplanmıştır. O genişlikteki serbest dalga ivmeleri $v = \frac{\text{genlik}}{3}$ formülünden hesaplanmıştır. Hem serbest dalga hem de ortalama ivmeler neredeyse Çizelge 2.5 'teki değerler ile aynı değerleri teyit etmektedir.

Çizelge 2.4 : sınır değer darbelerinin çeşitli süreleri için serbest dalgalar $t_0 = 20$

Süre	Zaman	1	2	3	4	5	6	7	8
50	200	1.3868	2.5990	2.9464	3.2227	3.4209	3.5615	3.6595	3.7234
	Poz.	71.2	138.8	162.4	182.4	198.8	213.6	226.8	240
	100	1.3859	2.5929	2.9749	3.2505	3.4403	3.5787	3.6476	3.7073
	Poz.	24.8	51.2	63.6	74.7	84.4	94	104.4	116116
40	200	2.3905	2.8995	3.2438	3.4693	3.6319	3.7070		
	Poz.	52	68.8	82	93.6	104.4	116		
	100	2.3934	2.9012	3.2354	3.4788	3.6318	3.6987		
	Poz.	132.4	165.6	190	209.6	225.6	240		
30	200	1.3296	2.8137	3.2634	3.5425	3.6914			
	Poz.	77.2	166.8	198.8	222	239.2			
	100	1.3348	2.8177	3.2527	3.5489	3.6981			
	Poz.	32.8	72.8	90	103.6	116			
20	200	2.5550	3.2927	3.6470	0.2218				
	Poz.	156.8	206.4	236.8	14.4				
	100	3.6482	3.2857	2.5545	0.2170				

Çizelge 2.5 : Solitary dalgaların gözlemi, $U_0 = 2$

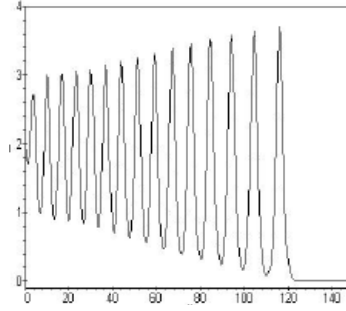
	1	2	3	4	5	6	7	8
Serbest dalga ivmesi	0.46	0.87	0.98	1.07	1.14	1.19	1.22	1.24
Ortalama ivme	0.464	0.876	0.988	1.077	1.144	1.196	1.224	1.24

Sınır kuvvetinin eğiminin etkisinin araştırılması için nümerik deneyler devam etmektedir. Kuvvetin süresinin sabit tutulduğu bir kuvvet uygulanarak ve kuvvet fonksiyonunun genişliğinin değişken olduğu durumda, solitary dalgalar harekete geçer. Bunlar Çizelge 2.6' da gösterilmiştir. Oluşturulmuş olan dalgaların genişlikleri çoğunlukla kuvvetin genişliğinden etkilenir.

Çizelge 2.6 : $\Delta_t = 20$ ile 6: Sınır değer etkisinin çeşitli genişlikleri için solitary dalgalar .

Sınır genişliği	zaman	1	2	3	4	5	6
4.0	100	4.6262	5.7537	6.4446	6.9488	7.2368	7.4041
3.0	100	1.7103	4.2137	4.8958	5.3258	5.5059	
1.0	100	0.7154	1.7103				

Son simülasyonda, sınır durumu problem süresince sürer, böylece $t_0 \rightarrow \infty$ olur. $T=100$ zamanı ile on beş tane solitary dalga oluşturulmuştur. Bu problem, solitary dalgaların sabit bir oranda oluştuğunu fakat problem boyunca büyümeye devam ettiğini göstermiştir.



Şekil 2.4 : $U_0 = 2, t = 100, h = 0.4, \Delta t = 0.1$
alınarak elde edilen serbest dalgalar

2.3.4 Sonuç

Sunulan metodun , kuadratik B-spline etkisi sebebiyle daha iyi yaklaşımlarını gerçekleştirdiğini görmüştük. L_2 ve L_∞ hata normları kabul edilebilir düzeyde küçüktür ve değişmez miktarlar C_1, C_2 ve C_3 iyi korunmuştur. Başlangıç durumundan öncü dalga gelişimi simüle edilmiştir.

Simülasyon daha uzun süre devam ederken , ondülasyon yavaşça ve bir dizi bağımsız solitary dalgaya doğru monoton olarak gelişmeye devam etmiştir. Dolayısıyla, sonlu elemanlar

metodunda kuadratik B-Spline'ların kullanımı, problem oluşturmadaki kolaylığı ve daha düşük bilgisayar maliyetinden dolayı uygundur.

3. EW DENKLEMİNİN EN KÜÇÜK KARELER METODUYLA ÇÖZÜMÜ

3.1. EW Denkleminin Sayısal Çözümü İçin En Küçük Kareler Metodu.

Eşit EW denklemi doğrusal uzay-zaman sonlu elemanlarının kullanımı ile en küçük kare tekniğiyle çözülmektedir. Tek bir solitary dalga hareketine ilişkin simülasyonlarında bu algoritmanın iyi doğruluğu gösterilmiştir. Keyfiyete tabi ile durumdan solitary bir dalga gelişimi EW ortamında incelenmiştir.

(RLW) denklemi

$$U_t + U_x + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxt} = 0, \quad (1)$$

Burada ε, μ pozitif parametrelerdir ve x ve t türevi ifade etmektedir; sığ su dalgaları ve iyon akustik plazma dalgaları [1,2] gibi çok sayıda fiziksel olayı tarif ettiği için doğrusal olmayan dağılan dalgaların incelenmesinde başlıca rol oynar. [3] alternatif bir çalışma sunmuşlardır, EW denklemi

$$U_t + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxt} = 0, \quad (2)$$

sığ su kanalında oluşturulmuş dalgaları modellemek için kullanıldığında değişkenler normalleştirilir, böylece mesafe x ve su seviyesi U su derinliği h 'yi ölçeklendirilir ve zaman t $\sqrt{h/g}$ 'ye ölçeklendirilir ki burada g yer çekimi ivmesidir. Fiziksel sınır şartları $U \rightarrow 0$ $[x] \rightarrow \infty$ şeklindedir. Herhangi bir dalga genliği 0.28'i [1] aştığında her iki tanımında geçerliliğini kaybeder .

EW denklemi kübik B-spline sonlu elemanlar yardımıyla Galerkin metodu kullanılarak [4,5] çalışılmıştır. Kuadratik B-spline sonlu elemanlar yardımıyla Petrov-Galerkin metodu kullanılarak [6] çalışılmıştır. Biz burada sayısal bir çözüm oluşturmak için en küçük kare tekniğini konum-zaman doğrusal elemanları [7,8] ile beraber kullanmaktayız. Bu modelin özelliklerini ve avantajlarını tartışmakta ve [5,6]'da tarif edilmiş olan sayısal algoritmalar ile solitary dalga modellemesindeki doğruluğunu kıyaslamaktayız. Sonuç olarak , keyfi başlangıç şartlarının gelişiminin simülasyonları gösterilmiştir.

3.2 Metodun Uygulanması

Konum-zaman sonlu elemanları kullanıldığında ve EW denkleminde en küçük kare yaklaşımını uygulandığında (2) varyasyonel prensipleri [7,8] dikkate almaktayız.

$$\delta \int_0^{-1L} \int_0^1 [U_t + \varepsilon U U_x - \mu U_{xx}]^2 dx dt = 0 \quad (3)$$

Doğrusal sonlu elemanların düzenli sonlu parçalanması $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = L$ olsun .

Boyutu $\Delta t = (x_{m+1}, x_m)$ olan tipik bir sonlu eleman yerel koordinatlar ile $\mu, \Delta t$

dönüştürülmüştür. Burada $x = x_m + \eta \Delta x, t = \tau \Delta t$ $0 \leq \eta \leq 1$ integral (3)'e, katkı yapmaktadır

$$\delta \int_0^1 \int_0^1 [U_\tau + \frac{\varepsilon \Delta t}{\Delta x} \hat{U} U_\eta - \frac{\mu}{\Delta x^2} U_{\eta\eta\tau}]^2 d\eta d\tau, \quad (4)$$

İntegral i basitleştirmek için \hat{U} nun bir eleman üzerinde bir sabit olarak kabul ediliyor. Bu ise,

$$\int_0^1 \int_0^1 [U_\tau + v U_\eta - b U_{\eta\eta\tau}] \delta [U_\tau + v U_\eta - b U_{\eta\eta\tau}] d\eta d\tau \quad (5)$$

olmasına sebebiyet verir. Burada $b = \mu / \Delta x^2$ ve $v = \varepsilon \hat{U} \Delta t / \Delta x$ her eleman üzerinde alınan yerel sabitlerdir. $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı üzerinde U'nun değişimi aşağıdaki şekildedir .

$$U^e = \sum_{j=1}^1 N_j (u_j + \tau \Delta u_j), \quad (6)$$

Burada N_1, N_2 konuma bağlı lineer baz fonksiyonlarıdır. Düğüm parametreleri u_1, u_2 zaman Δt 'deki $\Delta u_1, \Delta u_2$ artışları ile değişir. Yukarıda tanımlanan η yerel koordinat sistemi ile temel fonksiyonlar [9] $N_1 = 1 - \eta, N_2 = \eta$ şeklindedir.

$$\delta [U_\tau + v U_\eta - b U_{\eta\eta\tau}] = \sum_{j=1}^2 W_j u_j, \quad (7)$$

ve (6)'nın kullanılması ile

$$\delta U^e = \sum_{j=1}^2 N_j \tau \Delta u_j \quad (8)$$

$$W_j = N_j + \tau v N_j^l \quad (9)$$

elde edilir. Burada ${}^l \eta$ 'ye göre türevi ifade eder, böylece (5) denklemi

$$\int_0^1 \int_0^1 [U_\tau + vU_\eta - bU_{\eta\eta\tau}] [N_j + \tau v N_j] d\eta d\tau, \quad (10)$$

haline gelir. Kısmi integrasyon alınarak

$$\int_0^1 \int_0^1 [(U_\tau + vU_\eta)(N_j + \tau v N_j) + bU_{\eta\tau} N_j] d\eta d\tau, \quad (11)$$

elde edilir . (6) Denklemindeki U' değeri yerine yazılırsa

$$\sum_{k=1}^2 \int_0^1 \int_0^1 [(N_k \Delta u_k + v N_k (u_k + \tau \Delta u_k))(N_j + \tau v N_j) + b N_k^l N_j^l \Delta u_k] d\eta d\tau \quad , \quad (12)$$

elde edilir . (12)' ifadesi τ 'ye göre integre edilip matris formunda yazılırsa

$$[A^e + \frac{1}{2}(C^e + C^{eT}) + \frac{1}{3}B^e + bD^e] \Delta u^e + [C^e + \frac{1}{2}B^e] u^e, \quad (13)$$

oluşur .Burada

$$u^e = (u_1, u_2)^T$$

Düğüm parametreleri ile bağlantılıdır. Eleman matrisleri

$$A^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B^e = v^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, C^e = \frac{1}{2} v \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, D^e = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Ve

$$v = \frac{\varepsilon \Delta t}{2 \Delta x} (u_1 + u_2) \quad (15)$$

şeklinde oluşur. Bütün elemanların birleştirilmesi ile

$$[A + \frac{1}{2}(C + C^T) + \frac{1}{3}B + bD] \Delta u + [C + \frac{1}{2}B] u = 0, \quad (16)$$

matris denklemini elde edilir.

Burada $u = (u_0, u_1, \dots, u_N)^T$ bütün düğüm parametrelerini içerir. Bu şekilde $u = u^n$ ve

$\Delta u = u^{n+1} - u^n$ 'in tanımlanır. Burada üst simgeler zaman etiketleridir, denklem (16) yi şu şekilde yazabiliriz.

$$[A + \frac{1}{2}(C + C^T) + \frac{1}{3}B + bD] u^{n+1} = [A + \frac{1}{2}(C^T - C) - \frac{1}{6}B + bD] u^n \quad (17)$$

u^n 'nin zaman seviyesi $t = (n+1)\Delta t$ 'ye güncellenmesi için şema. (17)'in yazılımı şudur

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6} - b - \frac{1}{3}v_{m-1}^2\right)u_{m+1}^{n+1} + \left(\frac{2}{3} + 2b + \frac{1}{2}[v_{m-1} - v_m] + \frac{1}{3}[v_{m-1}^2 + v_m^2]\right)u_m^{n+1} + \left(\frac{1}{6} - b - \frac{1}{3}v_m^2\right)u_{m+1}^{n+1} \\ & = \left(\frac{1}{6} - b + \frac{1}{2}v_{m-1} - \frac{1}{6}v_{m-1}^2\right)u_{m-1}^n + \left(\frac{2}{3} + 2b - \frac{1}{6}[v_{m-1}^2 + v_m^2]\right)u_m^n + \left(\frac{1}{6} - b - \frac{1}{2}v_m + \frac{1}{3}v_m^2\right)u_{m+1}^n \end{aligned} \quad (18)$$

Burada v_m aşağıdaki ile verilmiştir.

$$v_m = \frac{\varepsilon \Delta t}{2\Delta x} (u_m^n + u_{m+1}^n) \quad (19)$$

$U(0,t)$ ve $U(L,t) = 0$ sınır koşulları, $u_0 = 0$ ve $u_N = 0$ olmasını gerektirir. Yukarıdaki yarı lineer denklemler bir matrisi oluşturur. Ortaya çıkan üçgensel matris formu Thomas algoritması kullanılarak doğrudan iterasyon gerektirmeden çözülebilir.

3.3 Test Problemleri

3.3.1 Tek Solitary Dalganın Hareketi

$U \rightarrow 0$ $x \rightarrow \pm\infty$ sınır koşullarına sahip EW denkleminin [3] solitary dalga çözümü

$$U(x,1) = 3c \operatorname{sech}^2(k[x - vt - x_0]), \quad (20)$$

şeklinde dir .

Burada $k^2 = 1/(4\mu)$ ve $v = \varepsilon c$ dalganın hızıdır. Beklenen bu çözümün yeterince geniş sonlu alanlar içinde geçerli olmasıdır. EW denkleminin için, RLW denkleminde olduğu gibi, sadece üç tane korunum kanunu vardır. [3,10]

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} U dx, I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (U^2 + \mu(U_x)^2) dx, I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} U^3 dx \quad (21)$$

I_1, I_2 ve I_3 değişkenlerini takip eden solitary dalga hareketi simülasyonlarında, sayısal

algoritmanın korunum kanunu takip edilmiştir. L_2 ve L_∞ hata normları

$$\begin{aligned} L_2 &= \left\| U^{tam} - U^n \right\|_2 = \left[h \sum_{j=1}^N |U_j^{tam} - U_j^n|^2 \right]^{1/2}, \\ L_\infty &= \left\| U^{tam} - U^n \right\|_\infty = \max_j |U_j^{tam} - U_j^n|, \end{aligned} \quad (22)$$

şeklindedir. Bu hata normları sayısal ve analitik çözümler arasındaki ortalama ve maksimum farkları ölçerler ve hareket devam ederken sayısal algoritmanın solitary dalganın pozisyonunu ve profilini ne kadar iyi tahmin ettiğini göstermek için kullanılır. İlk olarak 0.3 genliğe sahip tek solitary dalganın denklemini (20) $0 \leq x \leq 30$ alanı boyunca $x_0 = 10$ ile $t=80$ zamanı için inceliyoruz. Bu solitary dalga hareketinde $\varepsilon = \mu = 1$ alınmıştır. Çeşitli konum-zaman adımları kombinasyonları kullanılmıştır. Bakınız Çizelge 3.1 Metodun uygulanmasıyla ortaya çıkan en yüksek doğruluk ($L_\infty = 4.37 \times 10^{-3}$) konum-zaman adımı kombinasyonu 0,03/0,03 alındığında elde edilmiştir.

En doğru simülasyon için Çizelge 3.1'de L_2 ve L_∞ hata normlarındaki değişimler ve analitik değerleri aşağıdaki gibi bulunabilecek olan değişkenler I_1, I_2, I_3

$$I_1 = 6c/k = 1.2, \quad I_2 = 12c^2/k - 48kc^2/5, \quad I_3 = 144c^3/5k = 0.0576 \quad (23)$$

test problemi boyunca kaydedilmiştir, test probleminin uygulanması süresince I_1 , sadece %0,3 değişmiştir, I_2 %0,8'den az değişmiştir ve I_3 %1,2' kadar değişmiştir.

En küçük genlik 0.09 olan ve $0 \leq x \leq 20t$ aralığını kullanan tek bir solitary dalganın hareketini içeren ikinci bir simülasyonda Çizelge 3.3 ve Çizelge 3.4'te verilmiş olan sonuçlar elde edilmiştir. Bu test probleminde en küçük hata konum-zaman adımı kombinasyonu 0.05-0.05 ile elde edilmiştir. Değişkenlerin analitik değerleri

$I_1 = 0.3600, I_2 = 0.02592, I_3 = 0.001555$. Genliği 0.09 olan solitary dalganın bu hareketi, bir hata normuna 0.16×10^{-3} , in $t=80$ 'inde, en küçük kare algoritması ile gitmekteyken; I_1 %0.2'den az değişmektedir, I_2, I_3 miktarları dördüncü ondalıkta 1'e kadar değişmektedir.

Çizelge 3.1 T=80'de genliği 0.3, $0 \leq x \leq 30$ olan tek solitary dalga hata normları

Δx	Δt	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.025	0.015	105.8	59.34
0.03	0.03	7.44	4.37
0.04	0.02	20.83	12.81
0.05	0.03	10.70	6.77
0.06	0.04	10.75	6.90
0.1	0.06	19.92	12.80

Çizelge 3.2 Genliği 0.3 $\Delta x = 0.03, \Delta t = 0.03, 0 \leq x \leq 30$ olan tek solitary dalga değişkenleri ve hata normları.

Method	Time	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_{\infty} \times 10^3$
Least-squares	0	1.2000	0.2880	0.0576	0.000	0.0001
	5	1.1990	0.2875	0.0574	0.501	0.393
	10	1.1985	0.2873	0.0573	0.900	0.618
	20	1.1981	0.2868	0.0572	1.573	0.927
	40	1.1967	0.2860	0.0570	3.475	2.136
	80	1.1964	0.2858	0.0569	7.444	4.373
Petrov-Galerkin quadratic [6]	80	1.1910	0.2855	0.0558	3.849	2.646

Çizelge 3.3 $t=80$, genliği 0.3, $0 \leq x \leq 20$ tek solitary dalganın hata normları

Δx	Δt	$L_2 \times 10^3$	$L_{\infty} \times 10^3$
0.025	0.02	21.9	12.4
0.03	0.03	2.69	1.80
0.05	0.05	0.217	0.156
0.1	0.1	0.371	0.245
0.2	0.2	0.779	0.553

Çizelge 3.4 Genliği 0.09 $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.05, 0 \leq x \leq 20$ olan tek solitary dalganın değişkenleri ve hata normları

Method	Time	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_{\infty} \times 10^3$
Least-squares	0	0.3600	0.0259	0.00156	0.00	0.02
	10	0.3599	0.0259	0.00156	0.02	0.02
	20	0.3599	0.0259	0.00155	0.04	0.03
	40	0.3597	0.0259	0.00155	0.09	0.07
	80	0.3593	0.0259	0.00155	0.22	0.16

Çizelge 3.5 $t=80$ 'de genliği =0.3, $0 \leq x \leq 20$ tek solitary dalganın hata normları

Δx	Δt	$L_2 \times 10^3$	$L_{\infty} \times 10^3$
0.05	0.05	0.259	0.166
0.1	0.1	0.0177	0.0127
0.15	0.15	0.0300	0.0254
0.2	0.2	0.0460	0.0383

Çizelge 3.6 Genliği 0.03 $\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.1, 0 \leq x \leq 20$ tek solitary dalganın değişkenleri ve hata normları

Method	Time	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_{\infty} \times 10^3$
Least-squares	0	0.1200	0.00288	0.000058	0.0017	0.0055
	40	0.1200	0.00288	0.000058	0.0084	0.0063
	80	0.1200	0.00288	0.000058	0.0177	0.0127

Genliği 0.03 olan tek bir solitary dalganın üçüncü bir hareketinde zaman $t=80$ 'de en küçük hatalar $L_2 = 0.018 \times 10^{-3}$ ve $L_{\infty} = 0.013 \times 10^{-3}$ konum-zaman adımı kombinasyonu $0.1/0.1$ ile elde edilmiştir, bakınız Çizelge 3.5

3.3.2 Solitary Dalganın Gelişimi

Başlangıç durumu [11]'den

$$U(x, 0) = 0.5U_0[1 - \tanh\{\frac{x-x_c}{d}\}], \quad (24)$$

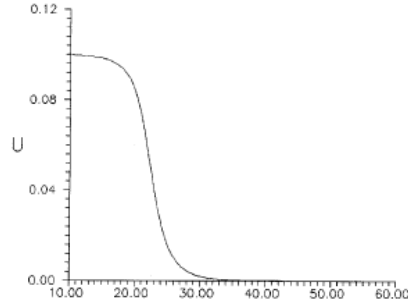
olarak alınmıştır. Burada $U(x, 0)$, $t=0.0$ zamanında denge yüzeyinin üstünde suyun yükselmesini ifade eder. Mevcut en küçük kareler algoritması $U(0, t) = U(L, t) = 0.0$ sınır koşullarını gerektirmektedir. Aşağıdaki başlangıç koşulunu

$$U(x, 0) = 0.5U_0[1 - \tanh\{\frac{abs(x) - x_c}{d}\}] \quad (25)$$

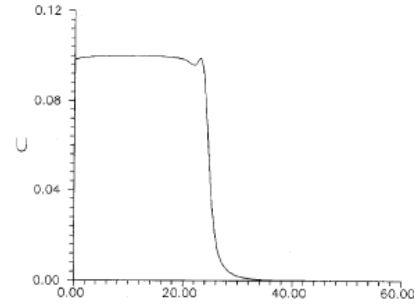
yardımıyla solitary dalganın gelişimini modellemek için kullanılmaktadır, $-60 \leq x \leq 60$ aralığı, konum adımı $\Delta x = 0.12$ ve zaman adımı $\Delta t = 0.1$ olarak seçildiğinde $\mu = 0.16666667, x_c = 20$ ve $d = 5.0$ için. Çizelge 3.7 de gösterildiği gibi dalga hareketi süresince korunum iyidir. $T=200$ zamanında 0.167 genliğe sahip dalga 0.056 hızı ile hareket etmektedir.

Çizelge 3.7 Dalga hareketinin $\Delta x = 0.12, \Delta t = 0.1, -60 \leq x \leq 60$ değişkenleri, pozisyonu ve genliği

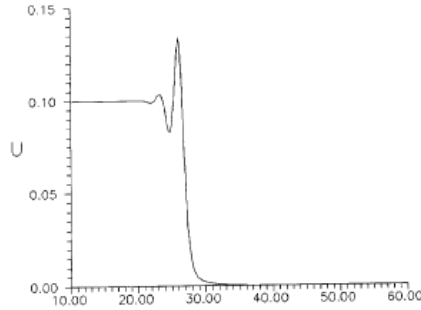
Time	I_1	I_2	I_3	Amplitude	Position
0	4.0000	0.3806	0.0370		
50	3.9996	0.3805	0.0370	0.1129	21.00
100	3.9977	0.3798	0.0369	0.1538	23.64
150	3.9928	0.3778	0.0366	0.1658	26.28
200	3.9851	0.03746	0.0361	0.1671	29.04



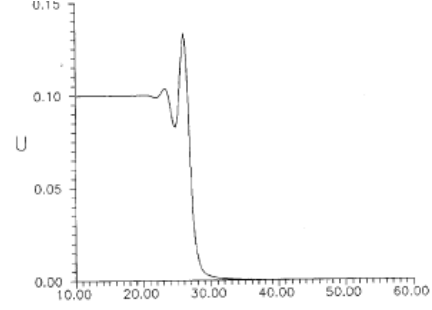
(A) Zaman=50



(B) Zaman =100



(C) Zaman =150



(C) Zaman =150

Şekil 3.1 çözüm vektörünün her bir 500- zaman adımında alınmış resimleri, $d=5$

3.3.3 Sonuç

İkinci bölümde düzenlenmiş olan lineer sonlu elemanlar ile konum-zaman en küçük kareler yaklaşımı, genişletilmiş bir zaman skalası üstünde güvenilir bir şekilde tek bir solitary dalganın genliğini, pozisyonunu ve ivmesini modellendiren algoritmaya götürmektedir.

Keyfi başlangıç koşulu ile solitary dalga gelişimi modellendirilmiştir. Dalga hareketleri profilin sağ tarafında hafifçe gelişmektedir. Test problemi sırasında, $d=5$ için dalga hareketi beklenen karakteristiğe sahiptir. Dalga hareketi daha uzun süreler ile işletildiğinde ondülasyon yavaşça ve monoton bir şekilde, bağımsız solitary dalgalar dizisine doğru gelişmeye devam eder. $T=400$ zamanında dalga hareketi, 0.172 genlikte olan ve ivmesi 0.0576 olan solitary dalga haline gelmiştir, buda bu genlikteki EW solitary dalgası için teorik ivme 0.0573 ile kıyaslanmaktadır. d beşten aşağıya doğru düştüğünde, dalga hareketi profilinde gelişen solitary dalgaların sayısının arttığı gözlemlenmiştir.

4 EW DENKLEMİNİN KÜBİK B-SPLİNE SONLU ELEMANLAR METODUYLA ÇÖZÜMÜ

4.1. EW Denkleminin Sayısal Çözümü İçin Kübik B-Spline Kolokeyşın Metodu

EW denkleminin Kübik b-spline ile Kolokeyşın metoduna dayanan sayısal çözümü araştırılmıştır. Sunulan metodun doğruluğu sayısal olarak korunum kanunları hesaplanarak gösterilmiştir, L_2 ve L_∞ normları tek bir solitary dalganın hareketi üzerine çalışılmıştır. EW denklemlerinin çözümü için Kolokeyşın şeması daha az hata elde edilmesine neden olmuştur ve uygulanması oldukça kolaydır. EW denklemi için dalgaların oluşumu çalışılmıştır.

Doğrusal olmayan dağınık dalga denklemleri, solitary dalgalar gibi çözümler göstermektedir. Bu gibi çözümlerin varlığı yoğun bir ilginin kaynağı olmuştur. Bu denklemler genel olarak analitik çözüme sahip değildir. Bu nedenle bu denklemlerin nümerik çözümleri lineer olmayan oluşumlar hakkında bir fikir elde etmek için gereklidir. Bu türdeki denklemler için birçok farklı örnekler vardır, her biri farklı fiziksel problemi modellemektedir. Soliton çözümü gibi çözümler sunan EW denklemini ele alalım. Bu çözümlerin temel özellikleri şu şekilde ifade edilebilir. Solitary dalgalar sabit hızda tek bir yönde şeklini değiştirmeden çoğalmaktadır, bir birinin içinden geçmektedir ve şekilleri benzersiz olmaktadır. Mevcut çalışma, Morisson ve çalışma arkadaşları tarafından önerilmiş olan EW denkleminin nümerik çözümüne odaklanmıştır ve aşağıdaki formdadır.

$$U_t + UU_x - \mu U_{xxt} = 0 \quad (1)$$

EW denklemini (1) sınır koşulları ile beraber

$$U(a, t) = \alpha_1, U(b, t) = \alpha_2 \text{ ve } U_x(a, t) = U_x(b, t) = 0 \quad a \leq x \leq b \text{ bölgesine almaktayız ve}$$

başlangıç şartı $u(x, 0)$. Bazı kısmi türevli denklemlerin nümerik çözümünde B-spline' fonksiyonların çeşitli derecelerinin kullanımı kolay algoritmalar elde etmek için gösterilmiştir. B-spline sonlu elemanlar metodunun çeşitli formları, doğru çözümler vermesi için şekil fonksiyonları kullanılarak gösterilmiştir ve bu fonksiyonlar B-spline fonksiyonların bir alt derecesine kadar düğüm noktalarında benzer fonksiyonların devamını gösterir. Kübik B-spline Galerkin sonlu elemanlar metodu, solitary dalgalar ile etkileşimi modellemek için EW denklemi ile kullanılmıştır. Kuadratik B-spline sonlu elemanlar yardımıyla Petrov-Galerkin metodunun kullanılması ile, solitary dalgaların hareketi incelenmiştir. EW denklemi için keyfi başlangıç

koşulu ile solitary dalgaların gelişimi lineer konum sonlu elemanları kullanan en küçük kare ler tekniğinin kullanımı ile incelenmiştir. Sınır kuvveti ile etkilenmiş bir dizi EW solitary dalgasının oluşumu, Petrov-Galerkin sonlu elemanlar metodunun kuadratik B-spline olarak alınan şekil fonksiyonuyla beraber uygulanması ile gösterilmiştir.

4.2. Metodun Uygulanması

[a,b] x_1, x_2, \dots, x_n noktaları ile ayrılmış olsun, şöyle ki

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_n = b \quad h = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (2)$$

Kübik B-spline fonksiyonlar (1) denkleminin $U(x,t)$ yaklaşık çözümünü bulmak için kullanılacaktır. x_j duran dalga profilinde $\phi_j, j = -1, \dots, N+1$ 'deki Kübik B-splinelar aralığı [a,b] üzerinde temel oluşturacak şekilde tanımlanmıştır. Bu nedenle, U_N yaklaşık çözüm U tam çözüm için kübik B-splinelar şeklinde ifade edilecektir; şöyle ki

$$U_N(x,t) = \sum_{j=-1}^{N+1} \delta_j(t) \phi_j(x) \quad (3)$$

Bunda, δ_j 'ler sınır koşullarından belirlenecek olan zamana bağlı parametrelerdir ve diferansiyel denkleminin Kolokeyşin formudur. Bir kübik B-spline dört elemanı kapsar.

$$\phi_j(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{j-2})^3 & [x_{j-2}, x_{j-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{j-1}) + 3h(x - x_{j-1})^2 - 3(x - x_{j-1})^3 & [x_{j-1}, x_j] \\ h^3 + 3h^2(x_{j+1} - x) + 3h(x_{j+1} - x)^2 - 3(x_{j+1} - x)^3 & [x_j, x_{j+1}] \\ (x_{j+2} - x)^3 & [x_{j+1}, x_{j+2}] \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (4)$$

Böylece dört kübik b-spline $\phi_{j-1}, \phi_j, \phi_{j+1}, \phi_{j+2}$, her bir elemanda bulunur. Tipik eleman

üstünden $[x_j, x_{j+1}]$ yaklaşık U_N aşağıdaki ile verilmiştir.

$$U_N = \sum_{i=j-1}^{j+2} \delta_i(t) \phi_i(x) \quad (5)$$

Burada $\phi_i(x)$ elemanı $\delta_i(t)$ eleman parametresi ile eleman şekil fonksiyonu gibi rol almaktadır. (5) formu tek bir eleman üstünde katkı sağlayan tüm kübik b-splineların

varyasyonunu göstermektedir. U 'nun düğüm noktalarındaki değerleri ve U', U'' türevleri δ_j eleman parametrelerine bağlı olarak aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$U(x_j) = \delta_{j-1} + 4\delta_j + \delta_{j+1}, \quad hU'(x_j) = 3(\delta_{j+1} - \delta_{j-1}), \quad h^2U''(x_j) = 6(\delta_{j-1} - 2\delta_j + \delta_{j+1}) \quad (6)$$

" "" $d = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1})$ vektörünün tüm eleman parametrelerini tanımladığını varsayalım. Crank-Nicholson yaklaşımı ile, d lineer olarak İki zaman seviyesi n ve $n+1$ 'in arasına eklenmiştir ve zamana göre türev $\frac{dd}{dt}$ standart sonlu farkların kullanımı ile korunmuştur böylece

$$d = \frac{1}{2}(d^n + d^{n+1}) \quad \frac{dd}{dt} = \frac{1}{\Delta t}(d^{n+1} - d^n) \quad (7)$$

Burada d^n $n\Delta t$ zamanındaki parametrelerdir ve Δt zaman adımıdır.

Kolokeyşin noktaları (2) deki düğüm noktalarına denk gelecek şekilde seçilmiştir. (3) ifadesinin (1) denkleminde yerine yazılmasıyla ve (6) ve(7) denklemlerinin kullanılmasıyla aşağıdaki sistem elde edilir.

$$\alpha_{j1}\delta_{j-1}^{n+1} + \alpha_{j2}\delta_j^{n+1} + \alpha_{j3}\delta_{j+1}^{n+1} = \alpha_{j3}\delta_{j-1}^n + \alpha_{j2}\delta_j^n + \alpha_{j1}\delta_{j+1}^n, \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (8)$$

burada

$$\alpha_{j1} = 1 - R_1 |R_2 z_j, \quad \alpha_{j2} = 4 + R_1, \quad \alpha_{j3} = 1 - R_1 + R_2 z_j$$

$$R_1 = \mu \frac{6}{h^2}, \quad R_2 = \frac{3\Delta t}{2h}, \quad z_j = \delta_{j-1} + 4\delta_j + \delta_{j+1}$$

Yukarıdaki $N+1$ denklem $N+3$ bilinmeyenden oluşur

$$d^n = (\delta_{-1}^n, \delta_0^n, \dots, \delta_N^n, \delta_{N+1}^n)$$

Sistemin tek çözümünü elde edebilmek için ilave iki sınır koşulan ihtiyaç vardır.

$$U(a, t) = U(b, t) = 0$$

Bu sınır koşullarının kullanımı ile $\delta_{-1}^n, \delta_{N+1}^n$ parametreleri sistemden elimine edilmiştir.

d^n vektörleri kullanılarak (8) sisteminden tekrarlama bağıntısı matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$A(d)d^{n+1} = B(d)d^n + r \quad (9)$$

Burada $A(d)$ ve $B(d)$, üçgensel matrislerdir ve r sınır koşullarından elde edilmiş olan bir vektördür. $\frac{1}{2}(d^{n+1} + d^n)$ 'ifadesine bağlı A ve B matrisleri için aşağıdaki iterasyon adımları,

$A(d)$ ve $B(d)$ matrisleri den lineer olmayan terimi yok etmede kullanılır.

* Yaklaşık A ve B , A^* ve B^* dan $d^0 = d^n + \frac{1}{2}(d^{n+1} + d^n)$ ile türetilmiştir.

* d^{n+1} yaklaşımını tekrar tanımlamak için iki veya daha çok iterasyon uygulanır.

(9)' sisteminde d^n 'in zaman gelişimini değerlendirmek için, d^0 ' başlangıç koşulunun , $[a,b]$ bölgesi üzerindeki kübik b-spline fonksiyonlar yardımıyla, $U(x,0)$ ' başlangıç koşulu dan hesaplanması gerekir.

$$U_N(x,0) = \sum_{j=-1}^{N+2} \delta_j^0(t) \phi_j(x),$$

burada δ_j^0 bilinmeyen parametrelerdir.

$$d^0 = (\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_N^0, \delta_{N+1}^0)$$

parametrelerini belirlemek için, aşağıdakileri karşılayan $U_N(x,0)$ 'e ihtiyacımız vardır,

$$U_N(x,0) = U(x_i,0), 0 \leq i \leq N, \quad (U_N)_x(a,0) = 0, \quad (U_N)_x(b,0) = 0$$

Yukarıdaki şartlar Thomas algoritmasının bir varyasyonunun kullanımı ile çözülen

$Ad^0 = b$ matris denkleminde götürmektedir.

4.3 Test Problemleri

Bu bölümde, önerilen metodun geçerliliğini göstermek için 3 test problemi çalışılmıştır.

Metodun geçerliliği L_2 ve L_∞ hata normlarının kullanımı ile ölçülmüştür, tanımı;

$$\|U - U_N\|_2^2 = h \sum_{j=0}^N |(U_j - (U_N^n)_j)|^2$$

$$\|U - U_N\|_\infty = \max_j |U_j(U_N^n)_j|$$

Güvenilir sağlam çözümler elde etmek için, ayrık korunum kanunları EW denkleminin düzgün çözümlerinin hesaplanmasında önemlidir. Etkili bir nümerik algoritma için, oluşum denklemlerinin sabitlerinin korunum özelliklerini koruması gerekir. Sırası ile aşağıdaki integraller ile verilmiş olan, kütle korunması, momentum ve enerjiye ilişkin nümerik çözümlerin üç değişkenini çalışacağız:

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_a^b U dx \cong h \sum_{j=1}^N U_j^n, \quad C_3 = \int_a^b U^3 dx \cong h \sum_{j=1}^N (U_j^n)^3, \\ C_2 &= \int_a^b (U^2 + \mu(U_x)^2) dx \cong h \sum_{j=1}^N (U_j^n)^2 + \mu((U'_j)^n), \end{aligned} \quad (11)$$

(11) toplamları ile gösterilen integraller quadretürler için yamuklar kuralının uygulaması ile ifade edilebilir. $U_j^n, (U'_j)^n$ ve $(U_j^n)^n$ değerleri, sistem (8)'den δ_j^n parametrelerinin bulunmasından sonra denklem (6)'dan hesaplanmıştır.

4.3.1. Solitary dalganın hareketi

(1)' denkleminin solitary dalga çözümü aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\begin{aligned} U(x,0) &= 3c \operatorname{sech}^2(k(x-x_0-vt)) \\ \text{burada } k &= 1/2\sqrt{1/\mu}, \quad v=c \end{aligned}$$

Bu çözüm $3c$ büyüklüğüne sahip ve k dalganın genişliğini karşılık gelen solitary dalga ile ilgilidir, başlangıç x_0 'dadır ve sağa doğru şekil değiştirmeden sabit bir hız ile yayılmaktadır. Bu denklem, solitary dalgaların her birinin aynı genişlikte olmasıyla EW adını almaktadır. Başlangıç şartı şöyledir,

$$U(x,0) = 3c \operatorname{sech}^2(k(x-x_0)) \quad (13)$$

Daha önceki çalışma [9] ile karşılaştırmak amacıyla, parametreler

$c = 0.1, \mu = 1, x_0 = 10, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ olarak seçilmiştir. $[0,30]$ aralığı eşit boyda $h=0.03$ alınarak 400 elemana bölünmüştür ve zaman artımı ise $\Delta t = 0.05$ kullanılmıştır. $T=80$

zamanına kadar olan zamanlar için Tablo 1’de EW denklemi için L_2 ve L_∞ hata normları ve üç değişken kaydedilmiştir. Solitary dalganın başlangıç koşulu ve grafik çözümü Şekil 1’de gösterilmiştir.

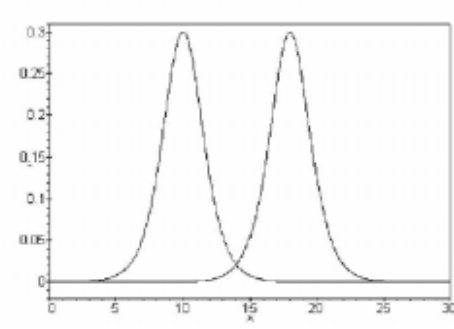
Bu grafikten, sağa hareket eden solitary dalga, ilk dalga ve $t=80$ zamanında ki çözüm ile karşılaştırıldığında orijinal formuna yakın hareket elde edilmiştir. $T=80$ zamanında düğüm noktalarında hataların dağılımı grafik olarak şekil 4.2’de 0,3 genliğine sahip tek solitary dalga için gösterilmiştir, Burada çözüm bölgesi üzerinde en büyük hata sol sınır üzerinde yoğunlaşmıştır. ve -4.8×10^{-5} ve 2.1×10^{-5} arasında salınım gerçekleşmiştir. C_1, C_2, C_3 hareket sabitleri analitik olarak aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır.

$$C_1 = 6c/k = 1.2, C_2 = 12c^2/k + 48kc^2\mu/5 = 0.288, C_3 = 144c^3/5 = 0.0576$$

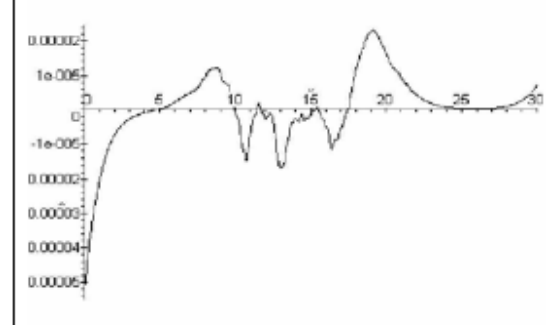
Bu çalışmada C_1, C_2, C_3 değerlerinin maksimum değişimi analitik değerlerinden yüzde 1.25×10^{-5} , 2.5×10^{-5} , 1.25×10^{-5} daha azdır. Oysa Gardner’ın çalışmasında bu değerler yüzde 1.11×10^{-2} , 3.13×10^{-3} , 2.23×10^{-3} , şeklindedir. Aynı tabloda en küçük kareler metodu kullanılarak tek solitary dalga çözümü zaman adımı $\Delta t = 0.03$ iken sunulmuştur. Referansın sonuçları ile kıyaslama yapılarak [9,10] Kübik Kolokeyşin metodu kullanıldığında L_2 ve L_∞ hata normlarında iyileşme elde edilmiştir.

Çizelge 4.1 Solitary dalga genliği 0.3, $x_0 = 10, h = 0.03, \Delta t = 0.05, 0 \leq x \leq 30$

Zaman	C_1	C_2	C_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0	1.19995	0.28800	0.05760	0.0	0.0
5	1.19999	0.28800	0.05760	0.021	0.033
10	1.20010	0.28804	0.05761	0.048	0.033
20	1.20015	0.28805	0.05761	0.064	0.046
40	1.20005	0.28800	0.05760	0.049	0.052
80	1.19998	0.28798	0.05769	0.056	0.053
80 ()	1.20010	0.28802	0.05761	0.132	0.078
80 (ref. [9])	1.1910	0.2855	0.05582	3.849	2.646
80 (ref. [10])	1.1964	0.2858	0.0569	7.444	4.373



Şekil 4.1 t=0 ve t=80 'de solitary dalga profilleri



Şekil 4.2 t=80'de hata= (analitik-nümerik)

Daha fazla karşılaştırma yapmak için genliği 3.0 olan solitary dalganın hareketi modellenmiştir ve referans [6,9]'da verilen t=40 zamanında $0 \leq x \leq 80$ alanındaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bakınız çizelge 4.2. Bu tabloda üç korunmuş C_1, C_2, C_3 sabitleri L_2 ve L_∞ hata normları çeşitli konum-zaman kombinasyonlarında kaydedilmiştir. Sunulan metodun kullanımı ile , Petrov-Galerkin şemasından Kuadratik B-splinelar ve en düşük kareler şemasındakinden daha doğru sonuçlar elde edildiği görülmüştür. Ancak $h=0.2$ ve $\Delta t = 0.1$ seçimi ile L_2 normundaki Kübik B-Spline Galerkin şemasından biraz daha büyük hata vermiştir. Daha küçük genlik istersek ve [6,9] çalışmasının tablosundaki kıyaslamayı farklı bir zaman ve t=80 zamanında konum adımları ile yaparsak, sonuçlar Çizelge 4.3'te listelenmiştir ve sunulan şemanın başarısı çeşitli konum-zaman kombinasyonları ile doğrulanmıştır.

Çizelge 4.2 Solitary dalga genliği 0.3, $x_0 = 15$, $0 \leq x \leq 80$, $t = 40$ 'ta simülasyon sonuçları
Çeşitli konum-zaman kombinasyonları

h	Δ_t	C_1	C_2	C_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.2	0.2	12.00060	28.80230	57.60610	252.869	138.0913
0.1	0.2	12.00050	28.80165	57.60463	222.500	119.8813
0.2	0.1	12.00010	28.80053	57.60130	95.670	53.9152
0.1	0.1	12.00023	27.80085	57.60250	63.380	34.6775
0.06667	0.05	12.00021	28.80143	57.60430	16.136	9.0130
0.05	0.05	11.99997	28.79944	57.59833	17.189	9.3597
0.04	0.04	12.00137	28.80644	57.61935	6.65184	3.9033
0.2 [6]	0.1	11.9999	28.7998	57.5995	54.2	
0.2 [9]	0.1	12.0001	28.7895	57.6018	123.8	

Çizelge 4.3 Solitary dalga genliği 0.3, $x_0 = 10$, $0 \leq x \leq 30$, $t = 80$ 'de simülasyon sonuçları
Çeşitli konum-zaman kombinasyonları

h	Δ_t	C_1	C_2	C_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.025	0.015	1.19994	0.28796	0.05759	0.06699	0.05310
0.03	0.03	1.2001	0.28802	0.05761	0.13175	0.07749
0.04	0.02	1.19991	0.28794	0.05758	0.10591	0.06746
0.05	0.03	1.19997	0.28796	0.05759	0.17186	0.09125
0.06	0.04	1.20001	0.28799	0.05760	0.21388	0.13128
0.1	0.06	1.20003	0.28800	0.05760	0.44739	0.28253
0.03 [10]	0.03				7.44	

4.3.2. Dalga Oluşumu

uzun yatay bir kanalda durgun suyun alanına derin bir su akıntısı akarsa, bir delik oluşur. Daha önce bu konuda yazan kişiyi takip ederek öncü deliğin gelişimini incelemek için, aşağıdaki başlangıç koşulu yardımıyla

$$U(x,0) = 0.5U_0(1 - \tanh((x - x_c)/d)) \quad (14)$$

$U(x,0)$, $t=0.0$ zamanında denge yüzeyinin üstünde su seviyesinin yükselmesini ifade eder; durgun su ve daha derin su arasındaki eğimi temsil eder ve U_0 büyüklüğü su seviyesindeki değişikliğin miktarını verir ve $x = x_c$ 'de merkezleştirilmiştir. $[a,b]$ aralığında nümerik çözümü hesaplamak için, sınır koşulunu $U \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$ ve $U \rightarrow U_0$, $x \rightarrow -\infty$ olarak kabul etmek için, $U(a,t) = U_0, U(b,t) = 0$ olarak kabul edilmiştir. İlk algoritma $t=800$ zamanına kadar taşınmıştır. $\mu = 0.16666667$, x_c ve $d = 5$ ile $a = -20 \leq x \leq b = 50$ aralığı $h=0.05$ konum adımı ve zaman adımı $\Delta t = 0.05$ olarak alınmıştır; bunlar referans [9]'un sonuçları ile karşılaştırmak için alınmıştır. Çizelge 4.4 C_1, C_2, C_3 değerlerini ve sunulan Kolokeyşin metodu için öncü dalga pozisyonunu ve genliğini içermektedir. Öncü dalga genliği zaman $t=800$ için 0.184 olarak ölçülmüştür; buda Gardner'in test problemine uygundur. Şekil 3 hem başlangıç hem de salınım profillerini $t=0.0, 200, 400, 600, 800$ zamanlarında göstermektedir. Zaman $t=400$ 'de sunulan şemanın profili şekil 3'te referans [9]'un profiline uymaktadır. C_1, C_2, C_3 değerlerinin varyasyonları [9] formüller ile çalışılabilir;

$$\frac{dC_1}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} U dx = \frac{1}{2} U_0^2 = M_1, \quad \frac{dC_3}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} U^3 dx = \frac{3}{4} U_0^4 = M_3,$$

$$\frac{dC_2}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} (U + \mu(U_x)^2) dx = \frac{2}{3} U_0^3 = M_2,$$

Formüllere göre, önceden tahmin edilen teorik değerler

$$M_1 = 5.03 \times 10^{-3}, \quad M_2 = 6.66667 \times 10^{-4}, \quad M_3 = 7.5 \times 10^{-5} \quad \text{olarak hesaplanmıştır.}$$

Değişkenlerdeki nümerik değişim oranı Tablo 4 deki değerler kullanılarak

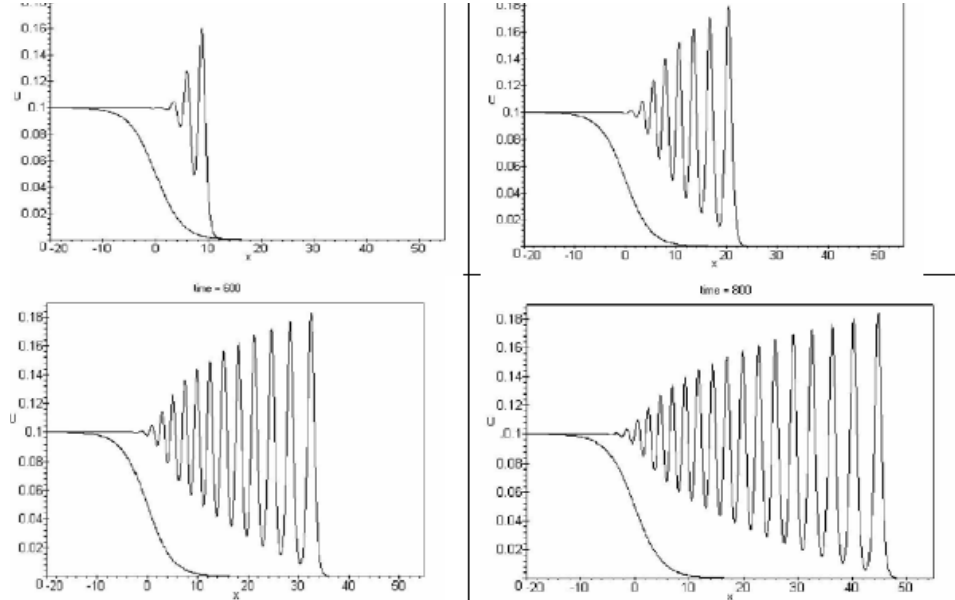
$$M_1 = 5.00065 \times 10^{-3}, \quad M_2 = 6.66669 \times 10^{-4}, \quad M_3 = 7.5005 \times 10^{-5} \quad \text{hesaplanır.}$$

Bu değerler referans [9]'da verilmiş, $M_1 = 5.03 \times 10^{-3}$, $M_2 = 6.72 \times 10^{-4}$, $M_3 = 7.59 \times 10^{-5}$ değerlere oldukça yakındır.

Çizelge 4.4 Öncü dalga gelişimi $d=5$, $U_0=0.1$ gelişimi

Zaman	C_1	C_2	C_3	X	U
0	2.002579	0.175378	0.016277		
100	2.502395	0.242008	0.023772		
200	3.002354	0.308289	0.030866	8.80	0.16047
300	3.502342	0.375315	0.038440	14.50	0.17504
400	4.002584	0.442003	0.046274	20.40	0.17923
500	4.502592	0.508658	0.053774	26.05	0.18137
600	5.002832	0.575343	0.061277	32.50	0.18262
700	5.502838	0.641999	0.068777	38.60	0.18341
800	6.003096	0.708689	0.076281	44.75	0.18397
800 [9]	6.027221	0.713333	0.07700	44.7	0.18376

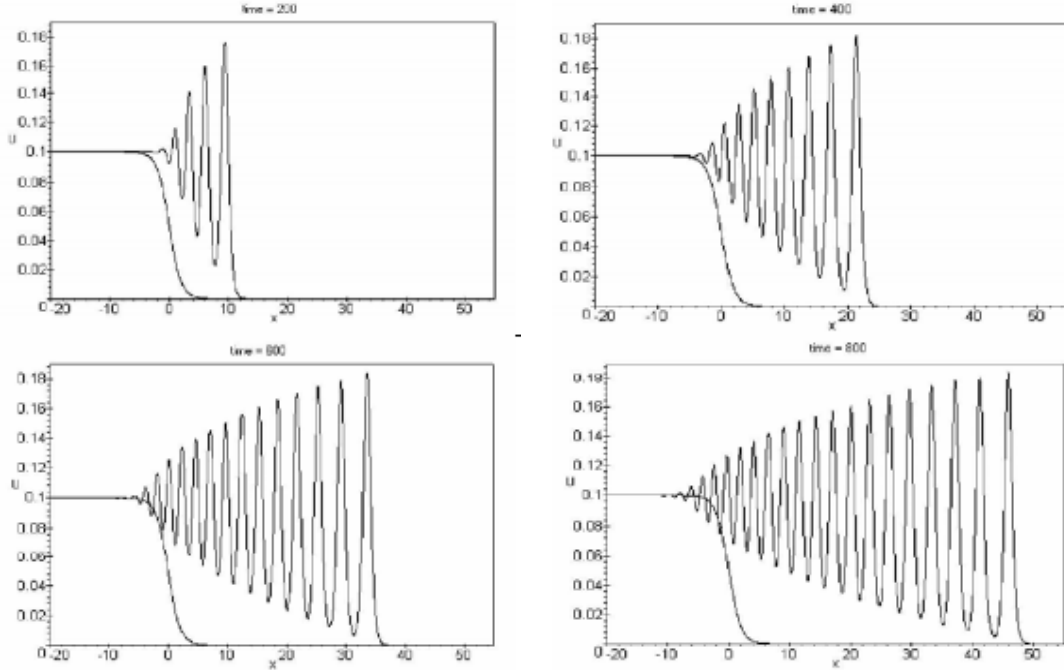
Yukarıdaki başlangıç koşulu (14) ile algoritma, $d=2$ dalga parametresi kullanılarak, üç değişkeni elde etmek ve salınım profillerinin perspektif görünümünü elde etmek için yeniden çalıştırılmıştır; sonuçlar Tablo 5'te gösterilmiştir.

**Şekil 4.3** $d=5$ ile çeşitli zamanlarda başlangıç profilleri ve dalga profilleri

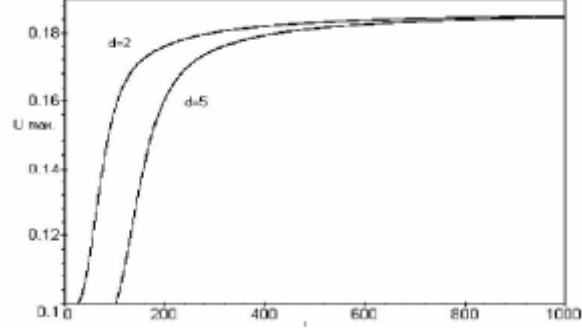
Şekil 4.4 $t=0, 200, 400, 600$ ve 800 zamanlarında daha dik bir ilk dalga ile öncü dalga gelişimini göstermektedir, öncü dalga daha erken belirmiş ve daha dik bir eğim seçildiğinde dalga sayısı en az iki dalga daha fazla olacak şekilde artmıştır. C_1, C_2, C_3 miktarlarında artışın oranı, $d=2$ 'nin $M_1 = 5.00087 \times 10^{-3}$, $M_2 = 6.66674 \times 10^{-4}$, $M_3 = 7.5011 \times 10^{-5}$ seçimi ile hesaplanmıştır.

Çizelge 4.5 $d=2, U_0=0.1$ Öncü dalga gelişimi

Zaman	C_1	C_2	C_3	X	U
0	2.002479	0.190258	0.018525		
100	2.502497	0.257189	0.026025	3.7	0.15724
200	3.002508	0.323846	0.033525	9.40	0.17597
300	3.502391	0.390499	0.041025	15.30	0.18007
400	4.002724	0.457183	0.048528	21.35	0.18201
500	4.502702	0.523833	0.056027	27.45	0.18314
600	5.002946	0.590522	0.063530	33.55	0.18367
700	5.502954	0.657177	0.071030	39.70	0.18428
800	6.003194	0.723867	0.078534	45.85	0.18460
800 [9]	5.944366	0.712677	0.076876	45.7	0.18392



Şekil 4.4 d=2 çeşitli zamanlarda başlangıç profili ve dalga profilleri



Şekil 4.5 Öncü dalgaların d=5 ve d=2 deki genlik gelişimi.

Hem yumuşak hem de dik başlangıç profilleri için öncü dalganın büyümesi $t=1000$ zamanına kadar $-20 \leq x \leq 1000$ alanında şekil 4.5'te gösterilmiştir; bundan sınırlayıcı bir değer gözlemlenmiştir. Daha önceki simülasyonlardaki [9] ile aynı olan sınırlayan değer 0.184 kaydedilmiştir.

4.3.3. Yarı Sonsuz alanda dalga oluşumu

yarı-sonsuz bir alanda dalgaların oluşumu sınır koşulunun $x=0$ olarak kullanılması ile modellendirilmiştir.

$$U(x,0) = \begin{cases} U_0 \frac{t}{\tau} & , 0 \leq t \leq \tau \\ U_0 & , \text{diğer} \end{cases}$$

Burada $U(x,t)$ yüzeyin denge seviyesinin üstünde yükselmesini ifade etmektedir ve kısa bir zaman dilimi için τ sabit kuvveti, U_0 'in oluşturulması için $U_0 t / \tau$ sabit kuvveti uygulanmıştır. Sağ uçtaki sınır koşulu $U \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$ olarak kullanılmıştır. Hesaplama,

$\mu = 1, h = 0.2, \Delta t = 0.05, U_0 = 2$ parametreleri $0 \leq x \leq 120$ aralığından alınmıştır. [11] ile karşılaştırma yapabilmek için bu değerler seçilmiştir. Nümerik problem de $t=400$ zamanına kadar çalıştırılmıştır ve oluşturulmuş solitary dalgaların genlik değerleri tablo 6'da çeşitli zamanlarda kaydedilmiştir. Aynı tabloda dalga pozisyonları ve bu dalgaların oluştuğu zaman verilmiştir. Öncü dalga yaklaşık olarak $t=19$ zamanında belirmeye başlamışken, [11]'de öncü dalganın

oluşluğu zamanı $t=27$ 'de belirtmiştir. Dalga oluşumunun erken döneminde [11]'de kaydedilmiş olan dalgardan daha yüksek genliğe sahip dalgalar kaydedilmiştir. Örneğin $t=0$ zamanında, öncü dalganın maksimum dalga yüksekliği 1.384 iken, [11] deki Tablo 2'de bu 1.11'dir. Buna rağmen, $t=200$ zamanında, aynı sayıda solitary dalga oluşturuldu ve sunulan metotta solitary dalgaların büyüklükleri [11]'dekinden çoğunlukla 3. basamakta; biraz daha büyük oldu. $T=400$ zamanında grafik çözümü göstermektedir ki, şekil 4.7'de görüldüğü gibi yirmi dokuz dalga yayılmıştır. Şekil 4.6'da, oluşturulmuş dalgaların genliğinin zamana göre gelişimi $t=200$ zamanında grafiklendirilmiştir. Bu şekilden, oluşturulma zamanından sonra dalga genliklerinin yüksekliğinin 1.5 a yükseldiğini ve istikrarlı bir şekilde büyümeye devam ettiğini gözlemlemekteyiz. Yeni dalgalar, ilk dört dalganın oluşma zamanından sonra, 13.25 'lik zaman periyotlarında oluşturulmaktadır.

Çizelge 4.6 Dalga genlikleri $U_0 = 1, h = 0.2, \Delta t = 0.05$, $0 \leq x \leq 120$

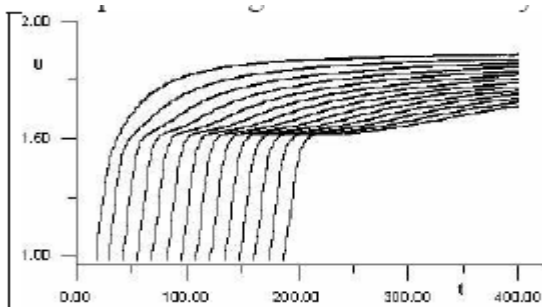
Zaman	1	2	3	4	5	6	7
30	1.384						
40	1.512	1.362					
50	1.593	1.500	1.265				
60	1.652	1.548	1.487	1.121			
70	1.695	1.592	1.525	1.452	1.011		
80	1.721	1.630	1.553	1.520	1.381		
100	1.764	1.691	1.616	1.552	1.529	1.489	1.122
120	1.790	1.726	1.663	1.603	1.550	1.531	1.514
140	1.806	1.751	1.698	1.646	1.593	1.551	1.531
200	1.832	1.793	1.765	1.724	1.687	1.652	1.617
200 [11]	1.81	1.77	1.74	1.70	1.67	1.63	1.59
400	1.852	1.838	1.821	1.803	1.787	1.770	1.754
Dalga poz.	104.32	93.6	84.2	75.2	66.8	69.0	51.4

Oluşma zamanı	19.25	30.8	43.25	56.049	69.2	82.45	95.70
Oluşma t. [11]	27.00	38.30	50.75	63.55	76.5	89.65	102.90

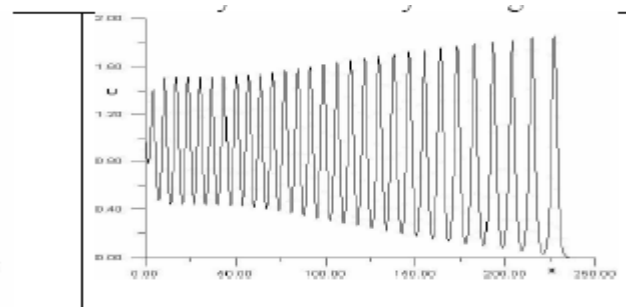
Zaman	8	9	10	11	12	13	14
120	1.375						
140	1.522	1.482	1.128				
200	1.581	1.553	1.536	1.52	1.517	1.506	1.381
200 [11]	1.54	1.51	1.51	1.51	1.51	1.48	1.12
400	1.736	1.721	1.703	1.684	1.669	1.653	1.637
Dalga poz.	44.2	37.2	30.4	23.8	17.0	10.6	4.2
Oluşma zamanı	108.952	122.253	135.504	148.754	162.005	175.256	188.507
Oluşma t. [11]	116.15	129.40	142.70	155.95	169.20	182.50	195.75

4.3.4 Sonuç

Kübik B-spline Kolokeyşin metodu EW denklemi için nümerik çözümler elde etmek üzere düzenlenmiştir. Hesaplamaların karşılaştırılması, sunulan metodun, [10,11] şemalarındakiinden daha iyi sonuçlar üretebileceğini göstermiştir, Ancak bu sonuç Galerkin sonlu eleman metodu karşısında daha başarılı olamamıştır. Tek solitary dalga çözümünün simülasyonu çalışma süresince güvenilir olduğu şeklen de gösterilmiştir.



Şekil 4.6 Dalgaların genliğinin zamansal gelişimi



Şekil 4.7 t=400 zamanında çözüm profili

Bu sonuçlar mevcut çalışmanın doğruluğunu göstermiştir. Sonuçlar, sunulan metodun; sonlu eleman metodu gibi diğer pek çok nümerik şemadan daha kolay uygulanabilir olduğunu, fourier spektral metodunun bu türdeki doğrusal olmayan problemlerde başarı ile uygulanabileceğini göstermiştir.

5. EW DENKLEMİNİN KÜBİK SPLINE KOLOKEYŞİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ

5.1. EW Denkleminin Kübik Spline Kolokeyşin Metoduyla Çözümü

EW denkleminin nümerik çözümleri için kübik spline Kolokeyşin metodu tanımlanmıştır. Metodu doğrulamak için solitary dalgaların göçü ve hareketinin oluşumu incelenmiştir. Benzer algoritma ile sonuçlar karşılaştırılmıştır.

$$U_t + UU_x - \mu U_{xxt} = 0, \quad (1)$$

şeklindeki EW denklemin ele alalım .

Burada, t ve x alt simgeleri türevi ifade eder ve μ pozitif bir parametredir ve Morrison ve çalışma arkadaşları tarafından lineer olmayan yayılan dalgaların [6] tanımlanması için model denklem olarak tanıtılmıştır. Bu denklem lineer olmayan yayılan dalgalar için, daha iyi bilinen RLW ve KdV denkleminin bir alternatiftir. Bu denklemlerde solitary dalgalar vardır. Bu dalgalar lineer olmayan ortamda dalga formlarını ve hızlarını etkileşimden sonra bile koruyarak çoğalmaktadırlar. Çok az analitik çözüm bilinmektedir. Bu nedenle nümerik metotlar EW denkleminin araştırılması için faydalı bir araçtır. Denklemin nümerik çalışmaları sunulmuştur: kübik b-splineları kullanan Galerkin metodu bir deneme olmuştur ve text fonksiyonları EW denklemini çözmek üzere Gardner ve çalışma arkadaşları tarafından düzenlenmiştir [23,24]. Kuadratik b-spline lar ile beraber Petrov- Galerkin metodu [26,27] çalışmalarında verilmiştir. Zaki, kareler metodunu kullanarak EW denklemlerine nümerik çözüm elde etmiştir [11]. Denklemin spektral çözümü [20] tarafından sunulmuştur. B-splinelar ile birleştirilmiş Kolokeyşin metoduna dayanan bir çözüm Dağ ve çalışma arkadaşlarınca araştırılmıştır [15]. Biz, EW denkleminin çözümünü elde etmek için kübik spline eş dizim tekniğini kullandık. Bu teknik kısmi türev denklemlerinin [4,25,22] nümerik çözümü için geliştirilmiştir. Bu prosedür EW denklemlerinin nümerik çözümünü alabilmek için yeniden formüle edilmiştir. Metodun uygulanması üçgen matris sistemi sonucunu vermiştir. Sistemi çözmek için Thomas algoritması kullanılmıştır.

5.2. Metodun Uygulanması

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

x_i 'de bir ayrılma olsun ve $h = x_i - x_{i-1} > 0$ olsun. Fonksiyon U , birinci türevi U' ve ikinci türevi U'' [a,b] aralığında sırasıyla x_i düğüm noktasında aşağıdaki ile tanımlanmış olsun:

$$U(x_i) = U_i, \quad U'(x_i) = U'_i, \quad U''(x_i) = U''_i$$

Kübik spline bir fonksiyondur $S_p(U, x) = S_p(x)$, bu fonksiyon [a,b] üstündeki birinci ve ikinci türevi ile beraber süreklidir ve aşağıdakini karşılar

$$S_p(x_i) = U_i, \quad S'_p(x_i) = m_i, \quad S''_p(x_i) = M_i \quad (2)$$

Kübik spline fonksiyonunun formülü şöyledir:

$$S_p(x) = \frac{(x_i - x)^3 M_{i-1} + (x - x_{i-1})^3 M_i}{6h} + \frac{(x_i - x)U_{i-1} + (x - x_{i-1})U_i}{h} - \frac{h}{6}((x_i - x)M_{i-1} + (x - x_{i-1})M_i) \quad (3)$$

Burada integral sabiti fonksiyonun sürekliliği gereğince ve ilk türev değerleri Düğüm noktalarında değerlendirilmiştir. Aşağıdaki kübik spline ilişkileri [1] EW denkleminin nümerik prosedürü için kullanılacaktır:

$$M_i + 4M_i + M_{i+1} = \frac{6}{h^2}(U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}) \quad (4)$$

$$m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = \frac{3}{h}(U_{i+1} - U_{i-1}) \quad (5)$$

$$m_{i+1} - m_i = \frac{h}{2}(M_i + M_{i+1}) \quad (6)$$

$$m_i = \frac{h}{3}M_i + \frac{h}{6}M_{i-1} + \frac{U_i - U_{i-1}}{h} \text{ veya} \quad (7)$$

$$m_i = \frac{h}{3}M_i + \frac{h}{6}M_{i+1} + \frac{U_{i+1} - U_i}{h} \quad (8)$$

$$M_i = \frac{2m_{i-1}}{h} + \frac{4m_i}{h} - 6\frac{U_i - U_{i-1}}{h^2} \text{ veya} \quad (9)$$

$$M_i = -\frac{4m_i}{h} - \frac{2m_{i+1}}{h} + 6\frac{U_{i+1} - U_i}{h^2} \quad (10)$$

Bu ilişkilerle alakalı detaylar [19] tarafından yazılmış olan kitapta bulunabilir. EW denklemini ,

$$U_t - \mu U_{xxt} = -UU_x \quad (11)$$

dir . U_i için yaklaşık bir çözüm,

$$(U_t)_i - \mu(M_t)_i = -U_i m_i$$

çözümü şeklinde düşünerek yapılandırılabilir.

Zaman türev terimleri $(U_t)_i$ ve $(M_t)_i$ sıradan sonlu fark prosedüründe saklanmıştır ve doğrusal olmayan terim $U_i m_i$, bitişik zaman seviyeleri n ve n+1 arasına yerleştirilmiştir:

$$(U_i^{n+1} - U_i^n) - \mu(M_i^{n+1} - M_i^n) = (\phi - 1)\Delta t(U_i m_i)^n - \phi\Delta t(U_i m_i)^{n+1} \quad (12)$$

Denklemden [12] $\phi = 0$ ise; şema kesindir, $\phi = 1$ örtük şemayı verir ve Crank-Nicholson şeması $\phi = 1/2$ ile elde edilmiştir.

Denklemin (12)'deki doğrusal olmayan terim aşağıdaki terimin Rubin ve Graves'de [4] olduğu gibi, kullanılmasıyla doğrusallaştırılabilir

$$(U_i m_i)^{n+1} = U_i^{n+1} m_i^n + U_i^n m_i^{n+1} - U_i^n m_i^n \quad (13)$$

Böylece, EW denklemi için fark denklemini elde ederiz

$$U_i^{n+1}(1 + \phi\Delta t m_i^n) = U_i^n + \mu M_i^{n+1} - \mu M_i^n - (1 - \phi)\Delta t(U_i^n m_i^{n-1} + U_i^{n-1} m_i^n - U_i^n m_i^{n-1}) - \phi\Delta t(U_i^n m_i^{n+1} - U_i^n m_i^n) \quad (14)$$

(14) denkleminin yeniden düzenlenmesi ile, aşağıdaki formülle yazılır

$$U_i^{n+1} = F_i + G_i m_i^{n+1} + S_i M_i^{n+1} \quad (15)$$

Burada

$$F_i = \frac{U_i^n - \mu M_i^n - (1 - \phi)\Delta t(U_i^n m_i^{n-1} + U_i^{n-1} m_i^n - U_i^{n-1} m_i^{n-1}) + \phi\Delta t U_i^n m_i^n}{1 + \phi\Delta t m_i^n}$$

$$G_i = \frac{\phi\Delta t U_i^n}{1 + \phi\Delta t m_i^n}$$

$$S_i = \frac{\mu}{1 + \phi\Delta t m_i^n}$$

(15) denklemi, U_i , m_i ve M_i için ilişkilerin kullanılması (4-109 vasıtasıyla, üç ayrı üçgen denkleme indirilebilir. (7-8) formülünü kullanarak, (15) denklemi, U_{i-1} , U_i ve U_{i+1} arasında skala denklem setlerine dönüştürülebilir.

$$A_i U_{i-1}^{n+1} + B_i U_i^{n+1} + C_i U_{i+1}^{n+1} = D_i \quad (16)$$

Burada

$$\begin{aligned} A_i = & 72S_{i-1}S_iS_{i+1} + 12h^2G_{i-1}G_iS_{i+1} - 36hG_{i-1}S_iS_{i+1} + 3h^3G_{i-1}G_iG_{i+1} \\ & - 12h^2G_{i-1}S_iG_{i+1} + h^4G_iG_{i+1} - 24hS_{i-1}G_iS_{i+1} - 6h^2S_{i-1}G_iG_{i+1} \\ & + 24hS_{i-1}S_iG_{i+1} + 4h^3G_iS_{i+1} - 12h^2S_iS_{i+1} - 4h^3S_iG_{i+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_i = & 60hG_{i-1}S_iS_{i+1} + 4h^4G_{i-1}G_{i+1} + 24h^2G_{i-1}S_iG_{i+1} + 6h^2G_{i-1}G_iS_{i+1} \\ & + 14h^3G_{i-1}S_{i+1} - 60hS_{i-1}S_iG_{i+1} - 14h^3S_{i-1}G_{i+1} - 144S_{i-1}S_iS_{i+1} \\ & - 48h^2S_{i-1}S_{i+1} + 6h^2S_{i-1}G_iG_{i+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_i = & 4h^3G_{i-1}S_iS_{i+1} + 4h^3G_{i-1}S_i + h^4G_{i-1}G_i - 3h^3G_{i-1}G_{i+1} \\ & - 12h^2G_{i-1}S_iG_{i+1} - 24hS_{i-1}G_iS_{i+1} - 12h^2S_{i-1}G_iG_{i+1} - 72S_{i-1}S_iS_{i+1} \\ & + 36hS_{i-1}G_{i+1} - 12h^2S_{i-1}S_i - 6h^2G_{i-1}G_iS_{i+1} - 24hG_{i-1}S_iS_{i+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_i = & -14h^3S_{i-1}F_iG_{i+1} + 4h^3F_{i-1}G_iS_{i+1} - 48h^2S_{i-1}F_iS_{i+1} + 4h^3G_{i-1}S_iF_{i+1} \\ & + 14h^3G_{i-1}F_iS_{i+1} + 4h^4G_{i-1}F_iG_{i+1} - 12h^2F_{i-1}S_iS_{i+1} - h^4F_{i-1}G_iG_{i+1} \\ & + h^4G_{i-1}G_iF_{i+1} - 12h^2S_{i-1}S_iF_{i+1} - 4h^3S_{i-1}G_iF_{i+1} - 4h^4F_{i-1}S_iG_{i+1} \end{aligned}$$

düğüm noktalarındaki yaklaşık değerler U_i , denklem sisteminin (16) kullanılması ile

hesaplanabilir. İlk türev m_i ve ikinci türev M_i için hesaplama sırasıyla (4-5) sistemlerinin

çalıştırılması ile elde edilebilir. $U(x_0, t) = \alpha_1$, $U(x_N, t) = \alpha_2$ Uç sınırlarındaki şartlar

sisteme (16) uygulanmıştır. Sistem (16) U_i, m_i ve M_i 'nin, daha önceki iki zaman adımından

hesaplanmasını gerektirdiğinden, ilk zaman adımındaki çözüm, sistemde $\phi = 1$ 'nin yerinin

alınması ile hesaplanır. Bunun anlamı, formül için, daha önceki zaman adımından sadece

U_i, m_i ve M_i 'nin gerekli olmasıdır. Sonraki zaman adımları için, 0 ve 1 arasında ϕ 'nin

herhangi bir değeri kullanılabilir. Hesaplamamızda örtük şemanın tamamını kullandık. Bu hata

aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$\begin{aligned}
& k\mu^2 \left[\frac{1}{2}(U_{tt})_i^n + \phi(U)_i^n (U_{xt})_i^n + \phi(U_x)_i^n (U_t)_i^n \right] + h\mu^2 \left[\frac{1}{6}(U_{xxt})_i^n + \frac{1}{2}(U_x)_i^n \right. \\
& \left. (U_{XX})_i^n + \frac{1}{6}(U)_i^n (U_{xxx})_i^n \right] + kh^2\mu^2 \left[\frac{1}{6}\phi(U_t)_i^n (U_{xxx})_i^n + \phi(U_x)_i^n (U_{xxT}) + (17) \right. \\
& \left. \frac{1}{2}\phi(U_{xxx})_i^n (U_{xt})_i^n - \frac{1}{2}\phi(U_x)_i^n (U_t)_i^n - \frac{1}{2}\phi(U_x)_i^n ((U_x)_i^n)^2 \right] + \dots
\end{aligned}$$

Yukarıdaki daha yüksek sıra terimleri dikkate alınmamıştır. Bu nedenle (17) denklemini kesinlik hatasını $\phi \in [0,1]$ için $O(k + h^2 + kh^2)$ olarak verir. U değişkeni UU_x lineer olmayan terimde (1) denklemde Von Neuman kararlılık analizini uygulayarak, fark şeması (16)'nın $\phi \in [1/2, 1]$ için koşulsuz olarak kararlı olduğu bulunabilir.

5.3. Test Problemleri

EW denkleminin nümerik çözümünü iki standart problem için elde etmekteyiz. Düğüm noktalarında, belirlenen zaman adımlarından sonra L_2 ve L_∞ hata normlarının sırasıyla hesaplanması ile Analitik ve nümerik metotların arasında ki farkın hesaplanmasıyla doğruluk ölçülmüştür.

$$\begin{aligned}
\|(U^{tam})^n - U^n\|_2^2 &= h \sum_{j=0}^N |(U_j^{tam})^n - U_j^n|^2, \\
\|(U^{tam})^n - U_j^n\|_\infty &= \max_j |(U_j^{tam})^n - U_j^n|
\end{aligned}$$

EW denklemini için, sadece üç tane çok terimli değişken [4] vardır. Güvenilir bir çözüm elde etmek için korunum kanunlarının soyutlanması

$$\begin{aligned}
C_1 &= \int_a^b U dx \cong h \sum_{m=1}^N U_m^n, \\
C_2 &= \int_a^b (U^2 + \mu(U_x)^2) dx \cong h \sum_{m=1}^N [(U_m^n)^2 + \mu((U_x)_m^n)^2], \\
C_3 &= \int_a^b U^3 dx \cong h \sum_{m=1}^N (U_m^n)^3,
\end{aligned}$$

Zaman içinde değişmez olarak kalmalıdır. Solitary dalga çözümünde bu değişkenler sayısal algoritmanın korunumunu kontrol etmek için araştırılmıştır.

5.3.1. Solitary Dalgaların Hareketi

(1) denkleminin solitary dalga çözümüne bakalım

$$U(x,t) = 3c \operatorname{sech}^2(k[x - x_0 - vt]), \quad k = \frac{1}{\sqrt{4\mu}}, \quad v = c$$

Bu denklem $3c$ büyüklüğünde ilk olarak x_0 'da merkezleştirilmiş ve sabit hızda v . sağa doğru hareket eden tek bir solitary dalgayı temsil etmektedir.

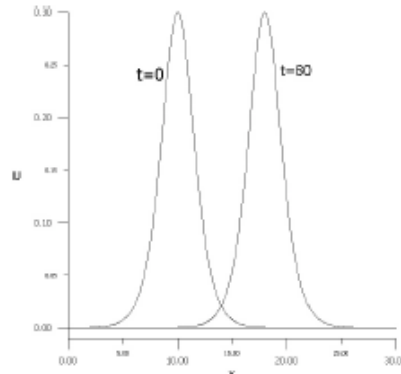
İlk durumu

$$U(x,0) = 3c \operatorname{sech}^2(k(x - x_0))$$

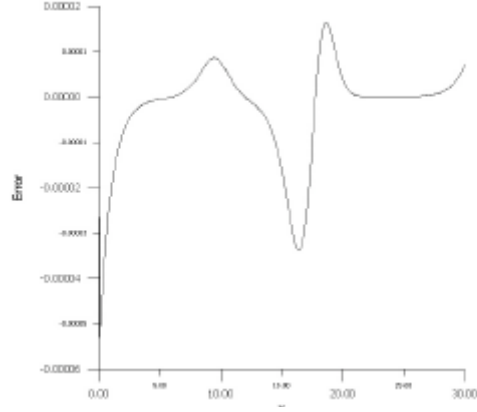
$c = 0.1, \mu = 1$, ve $x_0 = 10$ sabitleri ve sınır durumu

$$U(a,t) = 0, U(b,t) = 0$$

Daha önceki parametre çalışmalarına [10,11,12,13] denk düşmesi için kullanılmıştır. Tek bir solitary dalganın simülasyonu olan ilk problem eşit uzunluk $h=0,03$ 'ün 1000 elemanı ve zaman adımı $t=0,05$ kullanılarak incelenmiştir. L_2 ve L_∞ hata normları ve değişkenler seçilen zamanlarda $t=80$ 'e kadar gösterilmiştir. Tablo 5.1 'den görüldüğü gibi, solitary dalganın sağa doğru neredeyse formunu hiç değiştirmeden hareket edebileceği kadar, L_2 ve L_∞ hatası küçük bulunmuştur. C_1, C_2, C_3 'teki miktarlar, bilgisayardaki çalışma süresince sabit kalmıştır. $T=80$ zamanında solitary dalga çözümü, $t=0$ zamanında ilk çözüm ile karşılaştırılması için şekil 'de görselleştirilmiştir, burada, çözüm profilinin formülünü korumaktadır. $T=80$ zamanında hatanın dağılımı, genliği 0.3 olan solitary dalgalar için şekil 5.2'de tarif edilmiştir. Maksimum hata alanın sağ ucuna yakın kısımda oluşmuştur.



Şekil 5.1 $t=0,80$ zamanında solitary dalga profili



Şekil 5.2 t=80 zamanında hata dağılımı

Çizelge 5.1 genliği 0.3 olan solitary dalga, $x_0 = 10.0, h = 0.03, \Delta t = 0.05, 0 \leq x \leq 30$

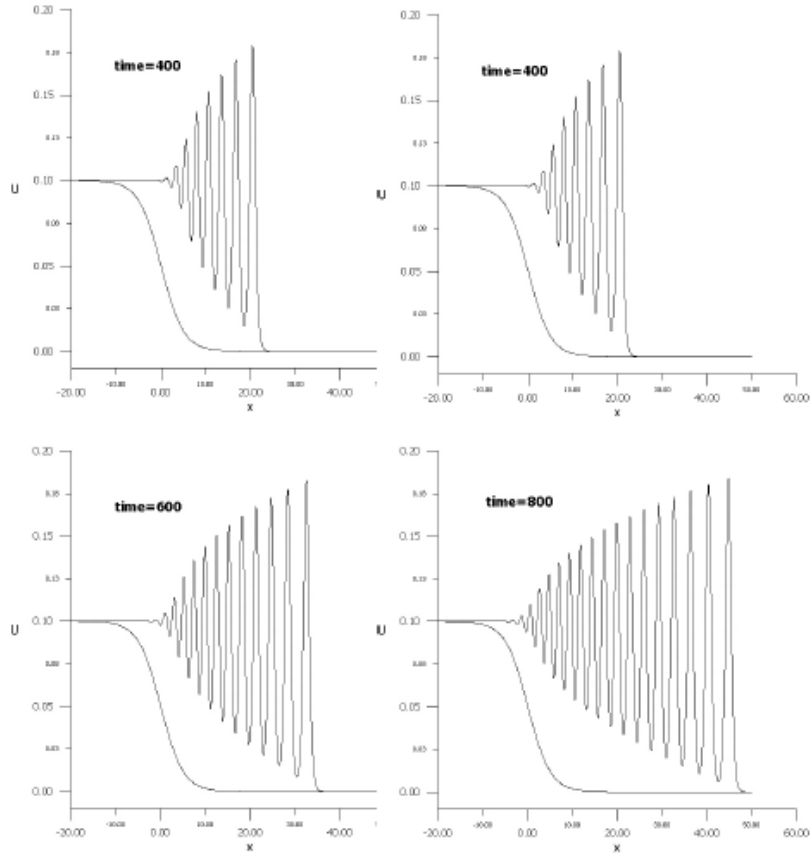
Zaman	C_1	C_2	C_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0	1.199953	0.288002	0.057601	0.0	0.0
5	1.199996	0.288000	0.057600	0.017	0.033
10	1.200022	0.288000	0.057600	0.027	0.033
20	1.200047	0.288000	0.057600	0.038	0.046
40	1.200060	0.288000	0.057600	0.047	0.052
80	1.200047	0.288000	0.057600	0.062	0.053
80 (ref. [13])	1.19998	0.28798	0.057590	0.056	0.053
80 (ref. [10])	1.1910	0.2855	0.05582	3.849	2.646
80 (ref. [11])	1.1964	0.2858	0.0569	7.444	4.373

5.3.2. Dalga Hareketi

$$U(x,0) = 0.5U_0(1 - \tanh((x - x_c)/d)) \quad (18)$$

Ve sınır durumu $U(a,t) = U_0, U(b,t) = 0$ $\mu = 0.16666667$, $d = 5, U_0 = 0.1$ parametreleri kullanılarak daha önceki çalışmalar [10,13] ile karşılaştırma yapılmıştır.

$-20 \leq x \leq 50$ aralığı konum adımı $h=0,05$ ve $\Delta t = 0,05$ ile kullanılmıştır. Dik hareket simülasyonu $t=800$ zamanına kadar çalıştırılmıştır. Problem için öncü hareket muhafaza edilen miktarları C_1, C_2, C_3 pozisyonu ve genliği çeşitli zaman adımlarında kayıt edilmiştir. Şekil 5.3 $t=20,400,600$ ve 800 zamanlarında titreşim profillerini ilk profilleri ile beraber gösterir. Simülasyon devam ettikçe, titreşimler artan oran ve büyüme ile gelişmeye başlamıştır. Hareketlerin şekilleri referanslardaki (şekil 5.3, [10,13]) diğer zamanlar ile tutarlılık gösterir. $T=800$, zamanında öncü hareket genliği 0.184 olarak ölçülmüştür, buda şemaların [10,13] deki ile aynı olduğunu gösterir



Şekil 5.3 $d=5$ ile çeşitli zamanlardaki ilk profilleri ve titreşim profilleri

Çizelge 5.2 $d=5$, $U_0=0.1$ öncü dalga gelişimi

Zaman	C_1	C_2	C_3	X	U
0	2.0025865	0.1753783	0.0162776		
100	2.5024173	0.2420110	0.0237725		
200	3.0023837	0.3086654	0.0312715	8.80	0.16047
300	3.5023771	0.3753209	0.0387714	14.50	0.17504
400	4.0023758	0.4419769	0.0462715	20.40	0.17926
500	4.5023755	0.5086331	0.0537716	26.50	0.18135
600	5.0023755	0.5752893	0.0612716	32.50	0.18264
700	5.5023755	0.6419455	0.0687717	38.60	0.18344
800	5.5023755	0.7086017	0.0762718	44.75	0.18390
800 (ref. [13])	6.0023740	0.708689	0.076281	44.75	0.18397
800 (ref. [10])	6.003096	0.713333	0.07700	44.7	0.18376

C_1, C_2, C_3 değişkenlerinin değişimi [10] formülü ile çalışılabilir.

$$\frac{dC_1}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} U dx = \frac{1}{2} U_0^2 = 5.03 \times 10^{-3}$$

$$\frac{dC_2}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} (U^2 + \mu U_x^2) dx = \frac{2}{3} U_0^3 = 6.66667 \times 10^{-4}$$

$$\frac{dC_3}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} U^3 dx = \frac{3}{4} U_0^4 = 7.5 \times 10^{-5}$$

C_1, C_2, C_3 'teki zamana göre değişim oranları tablo 2'den $t=800$ zamanı ile aşağıdaki gibi çalışılabilir

$$\frac{dC_1}{dt} = 5 \times 10^{-3}, \quad \frac{dC_2}{dt} = 6.66654 \times 10^{-4}, \quad \frac{dC_3}{dt} = 7.5 \times 10^{-5}$$

ki bunlar neredeyse değişkenlerin teorik varyasyonları ile aynıdır.

5.3.3. Sonuç

Kübik spline prosedürünün güvenilir şekilde, solitary dalgaların genliği, pozisyonunu temsil edebileceğini ve titreşimlerin algoritmanın çalıştırılması sırasında tutarlı kaldığını göstermiş olduk. Solitary dalgaların üç değişkeni sabit kalmaktadır ve öncü titreşim gelişimi için değişkenlerin zamandaki değişimi teorik varyasyonlar ile aynıdır, böylece çözüm algoritmasının ölçülü olduğu düşünülebilir. Böylece bu teknik, kısmi türev denklemlerinin nümerik çözümlerinin güvenilir olduğunu gösterir.

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada, EW denkleminin Kuadratik B-spline Galerkin, Kübik B-spline Kolokeyşin ve Kübik Spline Kolokeyşin sonlu elamanlar metoduyla çözümleri ve Küçük kareler metoduyla çözümleri incelenmiştir. Denklemin B-spline Kolokeyşin ve Galerkin metotlarıyla çözümleri bir araya getirilmiştir. Nümerik çözümlerin etkinliğini göstermek için çeşitli test problemleri çalışılmıştır. İkinci bölümde uygulanan Kuadratik B-spline Galerkin metodunun sonuçları incelendiğinde C_1, C_2, C_3 korunum sabitlerinin korunduğu ve analitik çözüm ile nümerik sonuçların uyumlu olduğu görülmüştür. EW denkleminin nümerik çözümü için uygulanan yöntemler ile Galerkin yöntemi kıyaslandığında metodun etkinliği görülmüştür.

Çalışmanın ikinci bölümünde uygulanan test problemlerinden solitary dalga hareketi için genlik 0.3 $X_0 = 10, h = 0.03, \Delta t = 0.05$ $0 \leq x \leq 30$ verileri kullanıldığında C_1, C_2, C_3 sabitleri korunmakta ve L_2, L_∞ hata normları 10^3 hassasiyetinde elde edilmektedir. Benzer veriler kullanılarak en küçük kareler yöntemi uygulandığında L_2, L_∞ hata normları yine istenilen hassasiyetlerde elde edilmiştir. Fakat Galerkin yöntemi, en küçük kareler yöntemine göre daha iyi sonuçlar vermektedir. Dördüncü bölümde birinci test probleminde yine daha önceki veriler kullanılarak kübik B-spline Kolokeyşin yöntemi uygulanmış farklı zaman değerleri için L_2, L_∞ hata normları ile C_1, C_2, C_3 korunum sabitleri hesaplanmıştır.

Elde edilen sonuçlar en küçük kareler yönteminden iyi fakat kuadratik Galerkin yönteminden kötüdür. Aynı durum Kübik spline Kolokeyşin yöntemi için de geçerlidir. Bu durum diğer test problemlerinden de görülebilir. Buradan da anlıyoruz ki Kuadratik Galerkin B-spline Galerkin yöntemi tez oyunca uygulanan yöntemler arasında en iyi sonuç veren yöntemdir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- [1] Peregrine, D.H. 1966. Calculations of the development of an undular bore, *J. Fluid. Mech.* 25: 321–330.
- [2] Benjamin, T. B., Bona, J. L. and Mahony, J.J. 1972. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philos. Trans. Roy. Soc., London A272*: 47–78.
- [3] Prenter, P.M 1975. *Splines and variational methods*, J. Wiley.
- [4] Rubin, S.G. and Graves, R.A. 1975. Cubic spline Approximation for problems in fluid mechanics, *Philos. Nasa TR R-436*, Washington, D. C.
- [5] Olver, P.J. 1979. Euler operators and conservation laws of the BBM equations, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 85: 143–159.
- [6] Morrison, P. J., Meiss, J.D. and Carey, J.R. 1981. Scattering of RLW solitary waves, *Physica 11D*: 324–336.
- [7] Hearn, A.C. 1986. REDUCE users manual version 3.2, Northwest Computer Algorithm.
- [8] Gardner, L. R. T. and Gardner, G. A. 1990. Solitary wave of the regularised long wave equations, *J. Comput. Physics* 91: 441–459.
- [9] Gardner, L. R. T. and Gardner, G. A. 1992. Solitary waves of the equal width wave equation, *J. Comput. Physics* 101: 218–223.
- [10] Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., and Dağ, I. 1993. Hermite infinite elements and graded quadratic B-spline finite elements, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 36: 3317–3332.
- [11] Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., and Dağ, I. 1995. A B-spline finite element methods for the regularized long wave equation, *Comm. Numer. Methods Eng.* 11: 59–68.
- [12] Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., and Dağ, I. 1995. Boundary forced RLW equation, *Nuovo Cimento* 110B: 1487–1496.
- [13] Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., Ayoub, F. A. and Amein, N. K. 1997. Simulations of the EW undular bore, *Comm. Numer. Methods Eng.* 13: 583–592.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devamı)

- [14] Zaki, S. I. 2000. A least-squares finite element scheme for the EW equation, *Comput. Met. Appl. Mech. Engrg.* 189: 587–594.
- [15] Dağ, I. and Saka, B. 2004. A Cubic B-spline collocation method for the EW equation, *Mathematical and Computational Applications* 9: 381–392.
- [16] Saka, B., Irk, D. and Dağ, I. 2003. A numerical study of the equal width equation, *Hadronic Journal Supplement* 18: 99–116.
- [17] Irk, D., Saka, B. and Dağ, I. 2003. Cubic spline collocation method for the equal Width equation, *Hadronic Journal Supplement* 18: 201–214.
- [18] J.L. Bona, W.G. Pritchard, L.R. Scott, Numerical schemes for a model of nonlinear dispersive waves, *J. Comput. Phys.* 60 (1985) 167-186.
- [19] J. H. Ahlberg, E. N. Nilson and J. L. Walsh, *The theory of splines and their applications*, Academic press, (1967).
- [20] B. Garcia-Archilla, A spectral method for the equal width equation, *J. Comput. Physics.*, 125,395-402, (1996).
- [21] Irk, D 2007 Bazı kısmi türevli diferansiyel denklem sistemlerinin B-spline sonlu elemanlar çözümü, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi
- [22] P. Wang and R. Kahawita, Numerical integration of partial differential equations using cubic splines, *Intern. J. Computer. Math.* 13, 271-286, (1983).
- [23] L. R. T. Gardner and G. A. Gardner, Solitary wave of the regularised long wave equations, *J. Comput. Physics.* 91, 441- 459, (1990).
- [24] L. R. T. Gardner and G. A. Gardner, Solitary waves of the equal width wave equation, *J. Comput. Physics.* 101, 218-223, (1992).
- [25] S. G. Rubin and P. K. Khosla, Higher-order numerical solutions using cubic splines, *AIAA Journal*, vol 14, no 7, 851-858, (1976).

KAYNAKLAR DİZİNİ (devamı)

[26] L. R. T. Gardner, G. A. Gardner, F. A. Ayoub and N. K. Ameen, Simulations of the EW undular bore, *Commum. Numer. Methods Eng.* 13, 583-592, (1997).

[27] S. I. Zaki., Solitary waves induced by the boundary forced equation, *Comput. Met. Appl. Mech. Engrg.*,190, 4881-4887, (2001).