Matematik Anabilim Dalı

Eylül – 2009

2-KATEGORİLER

Sabri ONARAN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Eylül – 2009

2-KATEGORİLER

Sabri ONARAN

Dumlupınar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Doç. Dr. Erdal ULUALAN

Eylül – 2009

KABUL VE ONAY SAYFASI

Sabri ONARAN'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "2-KATEGORİLER" baslıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

…/…/2009

<u>İmza</u>

Üye :

Üye :

Üye :

Fen Bilimleri Enstitüsün Yönetim Kurulu'nun ....../...../..... gün ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Atalay KÜÇÜKBURSA

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

2-KATEGORİLER

Sabri ONARAN
Matematik, Yüksek Lisans Tezi, 2009
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Erdal ULUALAN

ÖZET

Bu tez 6 bölümden oluşmaktadır. 1. bölümde tezde kullanılacak olan temel kavramlar verilmiştir. Diğer bölümlerde 3-tip cebirsel modellerin kategoriksel olarak kendi aralarındaki ilişkileri incelenmiştir. Sonuç olarak braided regüler çaprazlanmış modüller kategorisi ile çaprazlanmış kareler kategorisi arasındaki ilişki inşa edilmiştir.

Bilindiği gibi 1-kategoriler cebirsel model olarak 2-tip topolojik yapılara karşılık gelirler. Bunlar arasında çaprazlanmış modüller, cat^1-gruplar, 2-gruplar gibi yapılar vardır. Bu tezde 3-tip cebirsel modeller incelendiği için tezin adı 2-kategoriler olarak verilmiştir. Bu 3-tip cebirsel modeller arasında braided regüler çaprazlanmış modüller, 2-çaprazlanmış modüller, kuadratik modüller, cat^2-gruplar gibi yapılar var olduğundan tezde bu yapıların aralarındaki ilişki incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: 2-Çaprazlanmış Modüller, 3-Tip Cebirsel Modeller, Braided Çaprazlanmış Modül, Braided Regüler Çaprazlanmış Modüller, Cat^2-Gruplar, Çaprazlanmış Modüller, Kuadratik Modüller,

2-CATEGORİES

Sabri ONARAN
Mathematics, MSc. Thesis, 2009
Thesis Advicer: Assoc. Prof. Dr. Erdal ULUALAN

SUMMARY

This thesis consists of six chapters. In the first chapter, we give basic informations for thesis. In other chapters, we investigate as categorical the connections between 3-tpes of algebraic models. As a result we give a close relation between braided regular crossed modules and crossed squares.

As known, 1-categories are corresponding 2-types as algebraic models. In these concepts, such as crossed modules, cat^1-groups, 2-groups structres are exist. In this thesis, since 3-types are investigated, the name of thesis is given as 2-categories. In these concepts such as braided regular crossed modules, quadratic modules, 2-crossed modules and cat^2-groups are exist.

Keywords: Braided Crossed Module, Braided Regular Crossed Module, Cat^2-Groups, Crossed Modules, 2-Crossed Modules, Quadratic Modules, 3-Type Algebraic Models.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmamı yöneten ve bu tezin hazırlanması sırasında, çalışma boyunca vakit ayırarak ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, her zaman destek olan değerli hocam sayın

Doç. Dr. Erdal ULUALAN'a

sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca zor zamanlarımda hep yanımda olan, ömür boyu unutulmayacak maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, her daim yanımda olan değerli dostlarım Yurdanur ASA, Samet MERT, Halil İLKİMEN, Erhan BAŞAR'a teşekkür ederim. Aileme, sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Sabri ONARAN

Kütahya, 2009

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\{-,-\}$	Peiffer Lifting Dönüşümü
$\langle x, y \rangle$	Peiffer Çarpımı

Kısaltmalar	**Açıklama**
BRCM	Braided Regüler Çaprazlanmış Modüller Kategorisi
Cat^1	Cat^1-Gruplar Kategorisi
Cat^2	Cat^2-Gruplar Kategorisi
Crs^2	Çaprazlanmış kareler kategorisi
Grp	Gruplar Kategorisi
QM	Kuadratik Modüller Kategorisi
Simp Grp	Simplisel Gruplar Kategorisi
X Mod	Çaprazlanmış Modüller Kategorisi
X_2 Mod	2-Çaprazlanmış Modüller Kategorisi

1. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezde kullanılacak olan bazı temel kavramlardan ayrıntılı bir şekilde bahsedeceğiz.

Bir simplisel grup G, $n \geq 0$ için G_n gruplarının bir ailesi ve

$$d_i^n : G_n \longrightarrow G_{n-1},\ s_j^n : G_n \longrightarrow G_{n+1}\ \ 0 \leq i, j \leq n$$

olmak üzere simplisel özdeşliklerini sağlayan (G_n, d_i, s_j) üçlüsüdür. Genel anlamda bir simplisel grup $\Delta^{op}[n]$ kategorisinden gruplar kategorisine tanımlı bir funktordur.

$\boldsymbol{\Delta^{op}[n]}$: $[n] = \{0 < 1 < 2 < \cdots < n\}$ olmak üzere sıralı kümesini göz önüne alalım. $n < m$ olmak üzere $f : [n] \longrightarrow [m]$ morfizmini sıra koruyan yani $i \leq j$ için $f(i) \leq f(j)$ olan monoton bir fonksiyon olsun. Böyle fonksiyonlara operatör diyelim. Şimdi iki özel operatörden bahsedeceğiz. Birincisi;

$\delta_i^n : [n-1] \longrightarrow [n]\ \ 0 \leq i \leq n$ olmak üzere;

$$\delta_i^n(x) = \begin{cases} x; & x < i \\ x+1; & x \geq i \end{cases}$$

ile tanımlı olsun. Diğeri ise;

$\sigma_j^n : [n+1] \longrightarrow [n]\ \ \ 0 \leq j \leq n$ için

$$\sigma_j^n(x) = \begin{cases} x; & x \leq j \\ x-1; & x > j \end{cases}$$

ile tanımlı olsun.

Örneğin $\delta_i^2 : [1] \longrightarrow [2],\ 0 \leq i \leq 2$ olmak üzere;

$\delta_0^2 : [1] \longrightarrow [2]$ $\qquad$ $\delta_1^2 : [1] \longrightarrow [2]$ $\qquad$ $\delta_2^2 : [1] \longrightarrow [2]$

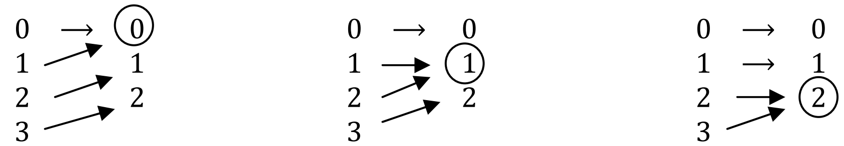
$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 0 \\ 1 & & 1 \\ & & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 0 \\ 1 & & 1 \\ & \searrow & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 0 \\ 1 & \longrightarrow & 1 \\ & & 2 \end{array}$$

oluşturulur. Görüldüğü gibi burada $0, 1, 2$ sırasıyla açıkta kalmıştır. Yine $\sigma_j^n : [n+1] \longrightarrow [n]$ olmak üzere; $0 \leq j \leq n$ için

$$\sigma_j^n(x) = \begin{cases} x; & x \leq j \\ x-1; & x > j \end{cases}$$

örten dönüşümü için; $\sigma_j^2: [3] \longrightarrow [2]$ operatörünü inceleyelim:

$\sigma_0^{(2)}: [1] \longrightarrow [2]$ $\sigma_1^{(2)}: [1] \longrightarrow [2]$ $\sigma_2^{(2)}: [1] \longrightarrow [2]$



olur. Burada da görüldüğü gibi sırasıyla $0, 1, 2$ ye iki farklı eleman karşılık gelmektedir. Her bir $f: [n] \longrightarrow [m]$ operatörü δ_i ve σ_j lerin çeşitli bileşkelerinden oluşur.

Herhangi iki $[n]$ ve $[m]$ sıralı kümeleri için; $f: [n] \longrightarrow [m]$ operatörünü göz önüne alalım. $[m]$ de açıkta kalan öğeler $i_1, i_2, \dots, i_n$ olsun. Bunların büyükten küçüğe sıralanışı $i_n \geq i_{n-1} \geq \cdots \geq i_1$ olsun. Yine f operatörü altında $j_i \in [n]$ olmak üzere $f(j) = f(j+1)$ özelliğine sahip öğeler $j_1, j_2, \dots, j_n$ olsun. Bunların da küçükten büyüğe doğru sıralanışı

$j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_n \leq n-1$ olmak üzere;

$f = \delta_{i_n} \circ \delta_{i_{n-1}} \circ \dots \circ \delta_{i_1} \circ \sigma_{j_1} \circ \sigma_{j_2} \circ \dots \circ \sigma_{j_n}$

şeklinde adi anlamda bileşke olarak tanımlanabilir.

Örnek 1.1. $f: [3] \longrightarrow [2]$; $f(0) = 0,\ f(1) = 0,\ f(2) = 1,\ f(3) = 2$ şeklinde bir örten f dönüşümünü göz önüne alalım.

$j_1 = 0$ olup;

$f: [3] \longrightarrow [2] = \sigma_0^2: [3] \longrightarrow [2]$ olur. Çünkü

$\sigma_0^2(0) = 0,\ \sigma_0^2(1) = 0,\ \sigma_0^2(2) = 1,\ \sigma_0^2(3) = 2$ olur.

Örnek 1.2. $f: [3] \longrightarrow [1]$; $f(0) = 0,\ f(1) = 0,\ f(2) = 1,\ f(3) = 1$ olarak tanımlayalım. O halde $j_1 = 0,\ j_2 = 2$ olup;

$f = \sigma_0 \circ \sigma_1$ olur.

$f: [3] \xrightarrow{\sigma_2^2} [2] \xrightarrow{\sigma_0^1} [1]$

şeklinde olur. Çünkü

$f(0) = \sigma_0 \circ \sigma_2(0) = \sigma_0(0) = 0$

$f(1) = \sigma_0 \circ \sigma_2(1) = \sigma_0(1) = 0$

$f(2) = \sigma_0 \circ \sigma_2(2) = \sigma_0(2) = 1$

$f(3) = \sigma_0 \circ \sigma_2(3) = \sigma_0(2) = 1$

olur.

Örnek 1.3. $f: [3] \longrightarrow [1]$; $f(0) = 0,\ f(1) = 0,\ f(2) = 1,\ f(3) = 1$ olsun. $[3]$ de açıkta kalan öğeler; 2 ve 3'tür. $3 > 2$ şeklinde yazılıp $j_1 = 0,\ j_2 = 2$ olup; $0 < 2$ olur. O halde

$f = \delta_3 \circ \delta_2 \circ \sigma_0 \circ \sigma_2$ dir.

$[3] \xrightarrow{\sigma_2^2} [2] \xrightarrow{\sigma_0^1} [1] \xrightarrow{{\delta_2}^2} [2] \xrightarrow{{\delta_3}^3} [3]$ olur.

$f(0) = \delta_3 \circ \delta_2 \circ \sigma_0 \circ \sigma_2(0) = \delta_3 \circ \delta_2 \circ \sigma_0(0) = \delta_3 \circ \delta_2(0) = \delta_3(0) = 0$

$f(1) = \delta_3 \circ \delta_2 \circ \sigma_0 \circ \sigma_2(1) = \delta_3 \circ \delta_2 \circ \sigma_0(1) = \delta_3 \circ \delta_2(0) = 0$

$f(2) = \delta_3 \circ \delta_2 \circ \sigma_0 \circ \sigma_2(2) = \delta_3 \circ \delta_2 \circ \sigma_0(2) = \delta_3 \circ \delta_2(1) = \delta_3(1) = 1$

$f(3) = \delta_3 \circ \delta_2 \circ \sigma_0 \circ \sigma_2(3) = \delta_3 \circ \delta_2 \circ \sigma_0(2) = \delta_3 \circ \delta_2(1) = 1$

olur.

Örnek 1.4. $f: [3] \longrightarrow [1]$; $f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(2) = 1$ olsun. f yi δ_i ve σ_j lerin kompozisyonu şeklinde yazalım. Varış kümesinde açıkta kalan tek eleman 2'dir. $f(j) = f(j+1)$ özelliğine sahip tek $j = 1$ olur. O halde $f = \delta_2 \circ \sigma_1$ olur. Yani;

$f: [2] \xrightarrow{\sigma_0^1} [1] \xrightarrow{{\delta_2}^2} [2]$

olur.

$f(0) = \delta_2 \circ \sigma_1(0) = \delta_2(0) = 0$

$f(1) = \delta_2 \circ \sigma_1(1) = \delta_2(1) = 1$

$f(2) = \delta_2 \circ \sigma_1(2) = \delta_2(1) = 1$

olarak bulunur.

Örnek 1.5. $f: [3] \longrightarrow [0]$; $f(0) = 0,\ f(1) = 0,\ f(2) = 0,\ f(3) = 0$ olsun.

$f: [3] \longrightarrow [0]: [3] \xrightarrow{\sigma_2^2} [2] \xrightarrow{\sigma_1^1} [1] \xrightarrow{\sigma_0^0} [2]$

olarak alınarak;

$$f(0) = {\sigma_2}^2 \circ {\sigma_1}^1 \circ {\sigma_0}^0(0) = {\sigma_2}^2 \circ {\sigma_1}^1(0) = {\sigma_2}^2(0) = 0$$

$$f(1) = {\sigma_2}^2 \circ {\sigma_1}^1 \circ {\sigma_0}^0(1) = {\sigma_2}^2 \circ {\sigma_1}^1(0) = {\sigma_2}^2(0) = 0$$

$$f(2) = {\sigma_2}^2 \circ {\sigma_1}^1 \circ {\sigma_0}^0(2) = {\sigma_2}^2 \circ {\sigma_1}^1(1) = {\sigma_2}^2(1) = 1$$

$$f(0) = \sigma_0^0 \circ {\sigma_1}^1 \circ {\sigma_2}^2(0) = \sigma_0^0 \circ {\sigma_1}^1(0) = \sigma_0^0(0) = 0$$

$$f(1) = \sigma_0^0 \circ {\sigma_1}^1 \circ {\sigma_2}^2(1) = \sigma_0^0 \circ {\sigma_1}^1(1) = \sigma_0^0(1) = 0$$

$$f(2) = \sigma_0^0 \circ {\sigma_1}^1 \circ {\sigma_2}^2(2) = \sigma_0^0 \circ {\sigma_1}^1(2) = \sigma_0^0(1) = 0$$

$$f(3) = \sigma_0^0 \circ {\sigma_1}^1 \circ {\sigma_2}^2(3) = \sigma_0^0 \circ {\sigma_1}^1(2) = \sigma_0^0(1) = 0$$

olur. Böylece $f = \sigma_0^0 \circ {\sigma_1}^1 \circ {\sigma_2}^2$ şeklinde yazılabilir.

Bu durumda $\Delta[n]$ kategorisini

$$\begin{tikzcd}
\Delta[n]: [0] \arrow[r, shift left=2, "\delta_0^1 \delta_1^1"] \arrow[r, shift left=1] & {[1]} \arrow[l, shift left=1, "\sigma_0^0"] \arrow[r, shift left=3, "{\delta_0^2, \delta_1^2, \delta_2^2}"] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, shift left=1] & {[2]} \arrow[l, shift left=0] \arrow[l, shift right=1, "{\sigma_0^1, \sigma_1^1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. $\Delta^{op}[n]$ kategorisi ise objeler aynı kalmak suretiyle morfizmlerin yönünü ters çevirerek elde ederiz. Yani

$$\begin{tikzcd}
\Delta^{op}[n]: \cdots & {[2]} \arrow[r, shift left=3, "{\delta_0^2, \delta_1^2, \delta_2^2}"] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, shift left=1] & {[1]} \arrow[l, shift left=0] \arrow[l, shift right=1, "{\sigma_0^1, \sigma_1^1}"] \arrow[r, shift left=2, "\delta_0^1 \delta_1^1"] \arrow[r, shift left=1] & {[0]} \arrow[l, shift left=1, "\sigma_0^0"]
\end{tikzcd}$$

olur. Bu δ_i ve σ_j operatörleri simplisel özellikleri sağlar.

Tanım 1.6. C bir kategori olsun. C nin objelerini aynen almak suretiyle, morfizmlerinin yönünü ters çevirerek yeni bir kategori elde ederiz. Bu kategoriye C nin oppozit veya dual kategorisi denir ve C^{op} ile gösterilir.

Simplisel özellikler şunlardır:

1. $\delta_i^{n+1} \circ \delta_j^n = \delta_{j+1}^{n+1} \circ \delta_i^n \quad i \leq j$
2. $\sigma_j^n \circ \sigma_i^{n+1} = \sigma_j^n \circ \sigma_{j+1}^{n+1} \quad i \leq j$
3. $\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1} = \delta_i^n \circ \sigma_{j-1}^{n-1} \quad i < j$
4. $\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1} = id \qquad i = j$ veya $i = j + 1$
5. $\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1} = \delta_{i-1}^n \circ \sigma_j^{n-1} \quad i > j + 1.$

$\boldsymbol{G}$, $\Delta^{\boldsymbol{op}}[n]$ den $\boldsymbol{Grp}$ ye tanımlı funktor olduğundan

$\boldsymbol{G}([n]) = G_n$, $\boldsymbol{G}(\delta_i) = d_i$, $\boldsymbol{G}(\sigma_j) = s_j$ dersek;

$d_i^n : G_n \longrightarrow G_{n-1}$ $\quad 0 \leq i \leq n \quad$ $s_i^n : G_n \longrightarrow G_{n+1}$ $\quad 0 \leq j \leq n$ olmak üzere birer grup homomorfizması ve G_n ler grup olmak üzere bir simplisel grubu, simplisel özellikleri sağlayan d_i ve s_j homomorfizmaları ile birlikte,

$$
\begin{tikzcd}
G: \cdots & G_n \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift left=2] & G_{n-1} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift left=2] & \cdots \arrow[r] & G_2 \arrow[r, shift left, "\delta_0^2,\, \delta_1^2,\, \delta_2^2"] & G_1 \arrow[l, shift left, "\sigma_0^1,\, \sigma_1^1"] \arrow[r, shift left, "\delta_0^1 \delta_1^1"] & G_0 \arrow[l, shift left, "\sigma_0^0"]
\end{tikzcd}
$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

$\boldsymbol{G} : \Delta^{\boldsymbol{op}}[\boldsymbol{n}] \longrightarrow \boldsymbol{Grp}$ tanımdan $\boldsymbol{G}([n]) = G_n$;

$\boldsymbol{G}(\delta_i^n) = d_i : G_n \longrightarrow G_{n-1} = \boldsymbol{G}([n]) \longrightarrow \boldsymbol{G}([n-1])$

$\boldsymbol{G}(\sigma_j^n) = s_j : G_n \longrightarrow G_{n+1}$

tanımlı bir funktor olduğundan bileşke işlemini korur. d_i ve s_j ler bir grup homomorfizmasıdır. d_i lere yüz operatörü, s_j lere ürüteç operatörü adı verilir. Böylece yukarıda oluşturulan $\boldsymbol{G}$ funktoru

$$
\begin{tikzcd}
\Delta^{op}[n]: \arrow[dd, "G"'] & \cdots & {[2]} \arrow[dd, bend left] \arrow[r, shift left, "\delta_0^2,\, \delta_1^2,\, \delta_2^2"] & {[1]} \arrow[dd, bend left] \arrow[l, shift left, "\sigma_0^1,\, \sigma_1^1"] \arrow[r, shift left, "\delta_0^1 \delta_1^1"] & {[0]} \arrow[dd, bend left] \arrow[l, shift left, "\sigma_0^0"] \\
 & & & & \\
Grp: \ G: & \cdots & G_2 \arrow[r, shift left, "\delta_0^2,\, \delta_1^2,\, \delta_2^2"] & G_1 \arrow[l, shift left, "\sigma_0^1,\, \sigma_1^1"] \arrow[r, shift left, "\delta_0^1 \delta_1^1"] & G_0 = G([0]) \arrow[l, shift left, "\sigma_0^0"]
\end{tikzcd}
$$

şeklinde tanımlanmış olur.

Burada s_j operatörlerine üreteç operatörü denmesinin sebebi şudur:

$m < n$ olmak üzere $f : [n] \longrightarrow [m]$ operatörünü $[m]$ de açıkta kalan, $j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq m - 1$ olmak üzere $f : \sigma_{j_1} \circ \sigma_{j_2} \circ \ldots \circ \sigma_{j_k}$ şeklinde yazabiliriz. Bu yazılış tektir. Yani her f örten operatörünü σ_j lerin bileşkesi şeklinde tek türlü yazabildiğimiz için; σ_j lerin oluşturduğu küme, $[n] \longrightarrow [m]$ tanımlı tüm örten operatörlerin oluşturduğu kümenin bir üreteci olacaktır. Bu yüzden σ_j lere üreteçler denir. $\boldsymbol{G}(\sigma_j\ ) = s_j$ olduğundan s_j lere üreteç operatörü adı verilir.

Tanım 1.7. Verilen bir $\boldsymbol{G}$ simplisel grubu için, $(\boldsymbol{NG}, \partial)$ Moore kompleksi

$$NG_n = Kerd_0^n \cap Kerd_1^n \ldots \cap Kerd_{n-1}^n = \bigcap_{i=0}^{n-1} Kerd_i^n$$

ve $\partial_n \colon NG_n \longrightarrow NG_{n-1}$, d_n^n ile verilen homomorfizmler olmak üzere

$$NG\colon \ \ldots NG_3 \overset{d_3^3}{\rightarrow} NG_2 \overset{d_2^2}{\rightarrow} NG_1 \overset{d_1^1}{\rightarrow} NG_0 = G_0$$

bir komplekstir. Bu komplekse G simplisel grubunun Moore Kompleksi denir.

$$NG_0 = G_0$$

$$NG_1 = Kerd_0^1$$

$$NG_2 = Kerd_0^2 \cap Kerd_1^2$$

$NG_3 = Kerd_0^3 \cap Kerd_1^3 \cap Kerd_2^3$ dür.

Tanım 1.8. $\boldsymbol{G}$ bir simplisel grup olsun. $\boldsymbol{G}$ nin n. Homotopi grubu $\pi_n(\boldsymbol{G})$, $\boldsymbol{NG}$, Moore kompleksinin *n.* homolojisine eşittir. Yani

$$\pi_n(\boldsymbol{G}) \cong H_n(\boldsymbol{NG}, \partial) = \frac{Ker\partial_n}{I_m\partial_{n+1}} = \frac{Kerd_n^n \cap NG_n}{d_{n+1}(NG_{n+1})} = \frac{\bigcap_{i=0}^n Kerd_i}{d_{n+1}(\bigcap_{i=0}^n Kerd_i^{n+1}}$$

$\partial_n \colon NG_n \longrightarrow NG_{n-1}$ olmak üzere;

$$\partial_n' \colon {}^{NG_n}/_{\partial_{n+1}(NG_{n+1})} \longrightarrow NG_{n-1}$$

$$\partial_n'(x + \partial_{n+1}(NG_{n+1}) = \partial_n(x)$$

ile tanımlı operatörü göz önüne alırsak; $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ olduğundan ∂_n' iyi tanımlıdır. Böylece

$$\pi_n(G) = \frac{Kerd_n^n \cap NG_n}{d^{n+1}{}_{n+1}(NG_{n+1})}$$

yerine;

$$\pi_n(G) = Ker\left(\partial_n' \colon {}^{NG_n}/_{\partial_{n+1}(NG_{n+1})} \longrightarrow NG_{n-1}\right)$$

şeklinde daha öz olarak yazabiliriz.

Tanım 1.9. $\Delta \times \Delta([p],[q])$ kategorisini düşünelim. $\boldsymbol{G}_{.,.}:(\Delta \times \Delta)^{op} \longrightarrow \boldsymbol{Grp}$ kontravariant funktora bisimplisel grup denir. Böylece bir $\boldsymbol{G}_{.,.}$ bisimplisel grubu; (p,q) çifti için bir $G_{p,q}$ grubu karşılık gelmekte olup;

$$d_i^h : G_{p,q} \longrightarrow G_{p-1,q} \qquad 0 \leq i \leq p$$

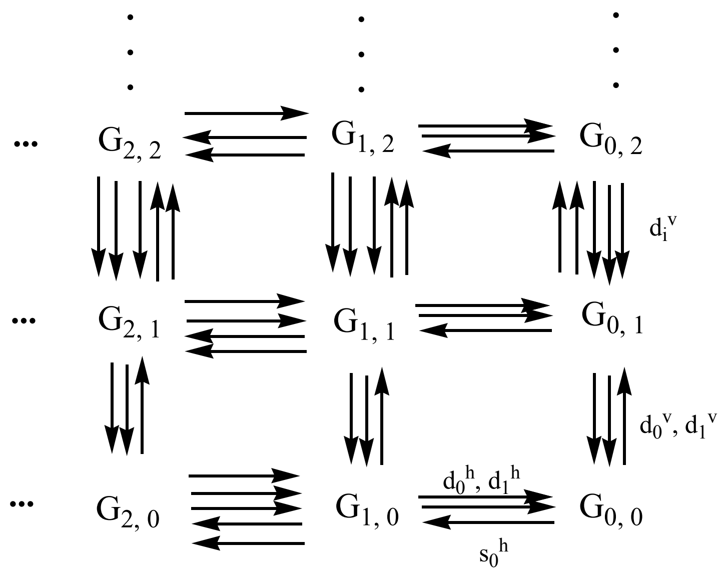
$$s_i^h : G_{p,q} \longrightarrow G_{p+1,q}$$

yatay operatörler,

$$d_j^v : G_{p,q} \longrightarrow G_{p,q-1}$$

$$s_j^v : G_{p,q} \longrightarrow G_{p,q+1} \qquad 0 \leq j \leq p$$

dikey operatörler yardımıyla aşağıdaki diyagramdaki gibidir:



2. 2-ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERDEN SİMPLİSEL GRUPLARA

Çaprazlanmış Modüller Whitehead tarafından 1949'da [42] da 2-tip homotopi yapısına sahip topolojik uzaylara karşılık gelen bir cebirsel model olarak tanımlanmıştır. Bu yapı, cat^1-gruplar, simplisel gruplar (Moore kompleks ≤ 1) yapıları ile denktir.

2-Çaprazlanmış Modüller ise Conduché tarafından [17] de 3-tip topolojik yapılara karşılık gelen cebirsel model olarak tanımlanmışlardır. Conduché ayrıca [17] de 2-çaprazlanmış modüller kategorisi ile Moore kompleksinin boyutu ≤ 2 olan simplisel gruplar kategorisinin denk olduğunu göstermiştir. Mutlu ve Porter [34] de tanımladıkları $F_{\alpha,\beta}$ fonksiyon çiftlerinin bir simplisel grubun Moore kompleksindeki görüntülerinden yararlanarak bu denkliği farklı bir yolla yeniden ispatlamışlardır. Bu bölümde ileriki bölümlerde bize faydası olacağından bu ispatı kısaca vereceğiz. Tanımları vermeden önce bazı ön bilgiler verelim.

M ve P iki grup olsun. $P \times M \longrightarrow M$ fonksiyonu için

$(p, m) \longmapsto {}^{p}m$

aşağıdaki şartlar sağlanırsa P, M'ye etki ediyor denir. $p \in P$ nin $m \in M$ üzerindeki etkisi ${}^{p}m$ ile gösterilir.

1. $e_p \in P$ birim olmak üzere

${}^{e_p}m = m$

2. $p_1, p_2 \in P$ olmak üzere

${}^{p_1}\left({}^{p_2}m\right) = {}^{(p_1 p_2)}m$

dir.

3. $p_1, p_2 \in P$ olmak üzere

${}^{p}(m_1 m_2) = {}^{p}m_1\, {}^{p}m_2$

dir.

4. ${}^{p}1_m = 1_m$

özellikleri sağlanmalıdır.

Örnek 2.1. Bir grup kendisi üzerine eşlenik ile etki edebilir. Gerçekten de,

$M \times M \longrightarrow M$

$(m, m') = {}^{m}m' = mm'm^{-1}$ olsun.

1. $^{e_m}m' = e_m m'^{e_m^{-1}} = m'$ dür.

2. $^{p_1p_2}m' = p_1p_2m'^{p_2^{-1}p_1^{-1}} = p_1(^{p_2}m')p_1^{-1} = {}^{p_1}(^{p_2}m')$

3. $^{p}(mm') = pmm'^{p^{-1}} = pmp^{-1}pm'^{p^{-1}} = {}^{p}m\,{}^{p}m'$

4. $^{p}(1_m) = p1_m p^{-1} = 1_m$ olur.

Çaprazlanmış modüller J. H. C. Whitehead tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.2. P ve M iki grup ve P, M ye etki etsin. $\partial\colon M \longrightarrow P$ bir grup homomorfizmi olmak üzere her $p \in P$ ve $m \in M$ için;

CM1): $\partial(\,^{p}m) = p(\partial_m)p^{-1}$

özelliği sağlanıyorsa ∂'ya ön-çaprazlanmış modül denir.

Ek olarak her $m, m' \in M$ için

CM2): $^{\partial_m}m' = mm'm^{-1}$

oluyorsa ∂'ya çaprazlanmış modül denir. $\partial\colon M \longrightarrow P$ bir ön-çaprazlanmış modül ise

$$m^{-1}(m')^{-1}m(m')^{\partial(m)}$$

elemanına Peiffer çarpımı denir ve $\langle m, m'\rangle$ ile gösterilir. Yani

$$\langle m, m'\rangle = m^{-1}(m')^{-1}m(m')^{\partial(m)}$$

dir. Şimdi Conducé [15] den 2-çaprazlanmış modül tanımını verelim.

Tanım 2.3. Grupların

$$L \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} N$$

kompleksini göz önüne alalım. $\partial_1\colon M \longrightarrow P$ bir ön çaprazlanmış modül olsun.

a) N nin M ve L üzerine etkisi var olsun. ∂_2 ve ∂_1 birer N-grup homomorfizması olsun.

b) $\{\,,\}\colon M \times M \longrightarrow L$ bir N-equivarient fonksiyonu Peiffer Lifting dönüşümü olarak adlandırılsın.

Bu veriler için aşağıdaki şartlar sağlanmalıdır.

1. $m, m' \in M$ için $\partial_2\{m, m'\} = \langle m, m'\rangle = {}^{\partial_1 m}m'm(m')^{-1}m^{-1}$

2. $l, l' \in L$ için $\{\partial_2 l, \partial_2 l'\} = [l', l] = l'l(l')^{-1}l^{-1}$

3. $m, m', m'' \in M$ için

i) $\{mm', m''\} = {}^{\partial_1 m}\{m', m''\}\{m, m'm''m'^{-1}\}$

ii) $\{m, m'm''\} = \{m, m'\}\ {}^{mm'm^{-1}}\{m\ \ , m''\}$ dür.

4. $m \in M$ ve $l \in L$ için

$\{m, \partial_2 l\}\{\partial_2 l, m\} = {}^{\partial_1 m}l\ \ l^{-1}$

5. $n \in N$ için ${}^{n}\{m, m'\} = \{{}^{n}m, {}^{n}m'\}$ dür.

Teorem 2.4. [15], [32] de 2-çaprazlanmış modüllerin $\boldsymbol{X_2Mod}$ kategorisi, simplisel grupların $\boldsymbol{SimpGrp \leq 2}$ kategorisi ile denktir.

Bunun ispatı için $F_{\alpha,\beta}$ larla nasıl yapıldığını görmek amacıyla A. Mutlu ve T. Porter [32] ye göz atalım.

2.1 Hiper Çaprazlanmış Kompleks Çiftleri

Bunun için $F_{\alpha,\beta}$ hiperçaprazlanmış kompleks çiftlerini hatırlamalıyız. [34].

$[n] = \{0 < 1 < 2 < \cdots < n\}$ sıralı kümesini göz önüne alalım. $0 \leq r \leq n$ olmak üzere $s(n, n-r)$ kümesi $f: [n] \longrightarrow [n-r]$ örten operatörlerin oluşturduğu küme olsun. Bu durumda;

$\alpha_j^n: [n+1] \longrightarrow [n] \quad 0 \leq j \leq n$

olmak üzere

$$\alpha_j^n(x) = \begin{cases} x, & x \leq j \\ x-1, & x > j \end{cases}$$

ile tanımlı örten operatörleri için f nin α_j lerin çeşitli bileşkelerinden oluştuğunu biliyoruz.

Burada $f: [n] \longrightarrow [n-r]$örten operatörü, $j \in [n]$ve $j \neq n$olmak üzere $f(j) = f(j+1)$ özelliğindeki $j_1, j_2, \ldots, j_k$ elemanları için küçükten büyüğe doğru sıralandığından;

$j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_k \leq n-1$

olmak üzere

$f = \sigma_{j_1} \circ \sigma_{j_2} \circ \ldots \circ \sigma_{j_n}$

şeklinde yazılabilindiğini biliyoruz. Örneğin $f: [3] \longrightarrow [1]$ operatörü $f(0) = 0,\ f(1) = 0,\ f(2) = 1,\ f(3) = 1$ şeklinde tanımlandığında $j_1 = 0$ ve $j_2 = 2$ olup

$$f = \sigma_0 \circ \sigma_2$$

olur. Gerçekten de

$$f: [3] \xrightarrow{\sigma_2^2} [2] \xrightarrow{\sigma_0^1} [1]$$

olup

$$f(0) = \sigma_0 \circ \sigma_2(0) = \sigma_0(0) = 0$$

$$f(1) = \sigma_0 \circ \sigma_2(1) = \sigma_0(1) = 1 - 1 = 0$$

$$f(2) = \sigma_0 \circ \sigma_2(2) = \sigma_0(2) = 1$$

$$f(3) = \sigma_0 \circ \sigma_2(3) = \sigma_0(2) = 1$$

olur. Burada $\sigma_j^n: [n+1] \longrightarrow [n],\ 0 \leq j \leq n$ için

$$\sigma_j^n(x) = \begin{cases} x, & n \leq j \\ x - 1, & n > j \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

Buna göre;

$$0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_r \leq n - 1$$

olmak üzere;

$$f = \alpha_{i_1} \circ \alpha_{i_2} \circ \ldots \circ \alpha_{i_r}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $s(n, n-r)$ kümesini,

$$\{(i_r, \ldots, i_1): 0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n - 1\}$$

kümesi ile eşleyelim. Çünkü $f = \alpha_{i_1} \circ \alpha_{i_2} \circ \ldots \circ \alpha_{i_r}$ yazılışı tek türlüdür.

$$S(n) = \bigcup_{0 \leq r \leq n} S(n, n-r)$$

olsun. Bu durumda

$$S(2) = S(2,2) \cup S(2,1) \cup S(2,0)$$

dır. $S(2,2)$ nin tek öğesi birim olup $\emptyset_2$ ile gösterilir. $S(2,1)$ in öğeleri (1) ve $(\ 0)$ dır. $S(2,0)$ ın tek öğesi $(1,0)$ dır. Yani

$S(2) = \{\emptyset_2 < (\ 1) < (\ 0) < (1, 0)\}$

şeklinde olur.

$S(3) = S(3, 3) \cup S(3, 2) \cup S(3, 1) \cup S(3, 0)$

olup;

$S(3) = \{\emptyset_3, (\ 1), (\ 0), (2), (2, 0), (2, 1), (1, 0), (2, 1, 0)\}$

şeklindedir.

$S(n)$ kümesinden yararlanarak $P(n)$ kümesini, (α, β) çiftlerinin oluşturduğu küme olarak seçelim. Öyle ki $\alpha, \beta \in S(n),\ \alpha \cap \beta = \emptyset,\ \alpha < \beta$ olsun. $\#\alpha,\ \alpha$ nın içerdiği öğe sayısı ve $\#\beta,\ \beta$ nın içerdiği öğe sayısı olmak üzere $F_{\alpha,\beta}$ hiper çaprazlanmış kompleks çiftleri;

$F_{\alpha,\beta}: NG_{n-\#\alpha} \times NG_{n-\ \#\beta} \longrightarrow NG_n$

olmak üzere aşağıdaki komutatif diyagram ile elde edilir.

$$\begin{tikzcd}
NG_{n\text{-}\#\alpha} \text{ x } NG_{n\text{-}\#\beta} \arrow[r, "F_{\alpha,\beta}"] \arrow[d, "s_\alpha \text{ x } s_\beta"'] & NG_n \\
G_n \text{ x } G_n \arrow[r, "\mu"'] & G_n \arrow[u, "\pi"']
\end{tikzcd}$$

Yani $F_{\alpha,\beta} = p\mu\big(s_\alpha \times s_\beta\big)$ dır.

Burada,

$\mu: G_n \times G_n \longrightarrow G_n$

$(x, y) \longmapsto [x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$

komutatör dönüşümüdür.

$p: G_n \longrightarrow NG_n,\ p = p_{n-1}p_{n-2} \dots p_0$ olup $0 \leq j \leq n-1$ için $p_j(x) = x\big(s_j d_j x^{-1}\big)$ ile tanımlıdır.

$\alpha = (i_r, \dots, i_1) < \beta = (j_s, \dots, j_1)\ \ \alpha \cap \beta = \emptyset$ olmak üzere

$s_\alpha: NG_{n-\#\alpha} \longrightarrow G_n\ \ s_\alpha: s_{i_r} s_{i_{r-1}} \dots s_{i_1}$

$$s_\beta : NG_{n-\#\beta} \longrightarrow G_n \;\; s_\beta : s_{j_s} s_{j_{s-1}} \dots s_{j_1}$$

şeklinde tanımlıdırlar. I_n, NG_n içinde, $x_\alpha \in NG_{n-\#\alpha}$ ve $y_\beta \in NG_{n-\#\beta}$ olmak üzere;

$$F_{\alpha,\beta}(x_\alpha, y_\beta) = p[s_\alpha(x_\alpha), s_\beta(y_\beta)]$$

elemanları ile üretilen bir normal alt grup olsun.

I_n, NG_n içinde, $x_\alpha \in NG_{n-\#\alpha}$ ve $y_\beta \in NG_{n-\#\beta}$ olmak üzere $F_{\alpha,\beta}(x_\alpha, y_\beta)$ elemanları tarafından üretilen bir normal alt grup olduğunda,

$$\partial_n(I_n) = \partial_n(NG_n)$$

olduğunu ve $I, J \subseteq [n-1]$, $I \cup J = [n-1]$ ve

$$K_I = \bigcap_{i \in I} Kerd_i^n$$

ve

$$K_J = \bigcap_{j \in J} Kerd_j^n$$

olmak üzere $G_n = D_n$ alarak, her n için

$$\prod_{I,J} [K_I, K_J] \subseteq \partial_n(NG_n) = \partial_n(I_n)$$

olduğunu ve $n = 2, 3, 4$ için

$$\partial_n(I_n) = \partial_n(NG_n) = \prod_{I,J} [K_I, K_J]$$

olduğu A. Mutlu ve T. Porter [32] tarafından gösterilmiştir. Değişmeli cebirler için [2] ve Lie cebirler için [1] e bakınız.

Şimdi I_n, NG_n içindeki normal alt grubun $n = 2$ ve $n = 3$ için üreteç elemanlarını ve bunların görüntülerini kısaca [34] den verelim.

n=2 için

$$\partial_2(I_2) = [K_{\{I\}}, K_{\{J\}}] = [Kerd_1^1, Ker\ d_0^1] = \partial_2(NG_2)$$

dir.

n=3 olduğunda, NG_3 içinde I_3 normal alt grubunun üreteç elemanlarını bulmaya çalışalım.

n=3 olduğundan;

$S(3) = \{\emptyset_3, (0), (1), (2), (1,0), (2,1), (2,0), (2,1,0)\}$

olarak bulmuştuk.

$\alpha, \beta \in S(3), \alpha \cap \beta = \emptyset$ olacak şekildeki $\alpha, \beta \in P(3)$ leri göz önüne alırsak; I_3 normal alt grubunun üreteç elemanları NG_3 deki

$F_{(2,1)(0)},\quad F_{(2,0)(1)},\quad F_{(1,0)(2)},\quad F_{(2)(1)},\quad F_{(1)(0)},\quad F_{(2)(0)}$

dönüşümlerinin görüntülerinden oluşan elemanlar olacaktır. Böylece literatürde oldukça iyi bilinen aşağıdaki sonucu verebiliriz. [34].

Sonuç 2.1.1. Çaprazlanmış modüller ile Moore kompleksinin boyutu ≤ 1 olan simplisel grupların oluşturduğu kategoriler denktir.

İspat: G bir simplisel grup ve Moore kompleksinin boyutu ≤ 1 olsun. O halde $NG_2 = 1$ ve $\partial_2(NG_2) = [Kerd_1^1, Ker\ d_0^1] = 1$ olacaktır.

$\partial_1 \colon NE_1 \longrightarrow NG_0$

bir ön çaprazlanmış modüldür. Çünkü $x \in NG_0$ ve $y \in NG_1$ ise ${}^{x}y = (s_0x)y(s_0x^{-1})$ olup;

$\partial_1({}^{x}y) = d_1(s_0xys_0x^{-1}) = xd_1yx^{-1} = x\partial_1(y)x^{-1}$

olur. Diğer yandan $x, y \in NG_1$ için

${}^{\partial_1 x}y = s_0d_1xys_0d_1x^{-1}$

dir. Bunun xyx^{-1} e denk olması gerekir. $x, y \in NG_1$ için I_2 nin NG_2 deki üreteç elemanlarının;

$F_{(1)(0)}(x,y) = s_0xs_1ys_0x^{-1}s_1xs_1y^{-1}s_1x^{-1} \ \in NG_2 = I_2$

olduğunu biliyoruz. $\partial_2(NG_2) = \partial_2(I_2) = 1$ olup;

$\partial_2\left(F_{(1)(0)}(x,y)\right) = (s_0d_1x)y(s_0d_1x)^{-1}xy^{-1}x^{-1} \in \partial_2(NG_2) = 1$

olup;

${}^{\partial_1 x}y = (s_0d_1x)y(s_0d_1x)^{-1} = xyx^{-1}$

olur. Yani $\partial_2(NG_2) = \{1\}$ olduğunda

$$^{\partial_1 x}y = xyx^{-1}$$

CM2) aksiyomu sağlanır. Burada

$$F_{(0)(1)}(x,y) = [s_0x, s_1y][s_1y, s_1x]$$
$$= s_0xs_1ys_0x^{-1}s_1y^{-1}s_1ys_1xs_1y^{-1}s_1x^{-1}$$
$$= s_0xs_1ys_0x^{-1}s_1xs_1y^{-1}s_1x^{-1}$$

dir.

$$d_2\left(F_{(0)(1)}(x,y)\right) = (s_0d_1x)y(s_0d_1x)^{-1}xy^{-1}x^{-1} \in \partial_2(NG_2)$$
$$= {}^{\partial_1 x}yxy^{-1}x^{-1}$$
$$= \langle x,y\rangle$$

olur. Sol etkiye göre

$$\langle x,y\rangle = {}^{\partial_1 x}yxy^{-1}x^{-1}$$

dir. Dolayısıyla herhangi bir G simplisel grubu için

$$NG_1/\partial_2(NG_2) \cap D_2 \xrightarrow{\partial_1} NG_1$$

bir çaprazlanmış modül olacaktır. $Simp\ Grp \leq 1$ olduğunda $\partial_2(NG_2) = 1$ olacağından, $NG_1 \xrightarrow{\partial_1} NG_0$ çaprazlanmış modül olur.

Tersine $\partial_1 : M \longrightarrow N$ bir çaprazlanmış modül olduğunda $G_0 = N$ ve $G_1 = M \rtimes N$ alalım.

$M \rtimes N,\ (m,n)(m',n') = (m^n m', nn')$ işlemine göre bir gruptur.

$$d_1(m,n) = (\partial_1 m)n$$

$$d_0(m,n) = n$$

$$s_0(n) = (1,n)$$

alalım. M ve N iki grup ve N, M üzerine bir grup etkisi var olduğundan

$$M \rtimes N,\ (m,n)(m',n') = (m^n m', nn')$$

işlemiyle grup olan yapıya M ve N nin yarı-direkt çarpım grubu denir.

$d_1^1: M \rtimes N \longrightarrow N$

$(m, n) \longmapsto (\partial_1 m)n$

$d_0^1: M \rtimes N \longrightarrow N$

$(m, n) \longmapsto n$

$s_0^0: N \longrightarrow M \rtimes N$

$n \longmapsto (1, n)$

Bir grup homomorfizması ve simplisel özdeşlikleri sağlar. Gerçekten

$$
\begin{aligned}
d_1\big((m,n)(m',n')\big) &= d_1(m^n m', nn') \\
&= \partial_1(m^n m')nn' \\
&= \partial_1 m \partial_1({}^n m')nn' \\
&= (\partial_1 m)n\partial_1(m')n^{-1}nn' \\
&= (\partial_1 m)n\partial_1(m')n' \\
&= d_1(m,n)d_1(m',n')
\end{aligned}
$$

olur. Yani bir 1-truncated simplisel grup $\{M \rtimes N, N\}$ elde ederiz.

Şimdi $\partial_2(NG_2) = \{1\}$ olduğunu gösterelim.

$\partial_2(NG_2) = [Ker d_1^1, Ker\ d_0^1]$

olduğunu biliyoruz. O halde bu komutatörden bir eleman alıp, birim olduğunu gösterirsek ispat biter.

$d_0^1: M \rtimes N \longrightarrow N$

$(m, n) \longmapsto n$

olup $Ker\ d_0^1 = \{(m, 1): m \in M\}$ dir.

$d_1^1: M \rtimes N \longrightarrow N$

$(m, n) \longmapsto (\partial_1 m)n$

olup $Kerd_1^1 = \{(m, \partial_1 m^{-1}) : m \in M\}$ olur. O halde

$[(m,1),(x,\partial_1 x^{-1})] \in [Kerd_1^1, Ker\ d_0^1]$ için;

$$[(m,1),(x,\partial_1 x^{-1})] = (m,1)(x,\partial_1 x^{-1})(m^{-1},1)\left({}^{\partial_1 x}x^{-1}, \partial_1 x\right)$$

$$= (m,1)(x,\partial_1 x^{-1})(m^{-1},1)(x^{-1},\partial_1 x)$$

$$= (mx, \partial_1 x^{-1})(m^{-1}x^{-1}, \partial_1 x)$$

$$= \left(mx\ {}^{\partial_1 x^{-1}}(m^{-1}x^{-1}),\ \partial_1 x^{-1}\partial_1 x\right)$$

$$= (mx\, x^{-1}m^{-1}x^{-1}x, 1)$$

$$= (1,1)$$

olur. Yani

$$[Kerd_1^1, Ker\ d_0^1] = (1,1) \in M \rtimes N = G_1$$

olur.

$$\partial_2(NG_2) = [Kerd_1^1, Ker\ d_0^1] = \{1\}$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

A. Mutlu ve T. Porter n=3 için hesaplamalar yaparak; [34] de

$I, J \subseteq [2],\ I \cup J = [2]$ olmak üzere;

$$\partial_3(NG_3 \cap D_3] = \partial_3(I_3 \cap D_3) = \prod_{I,J}[K_I, K_J]$$

olduklarını göstermiştir. Burada

$$\partial_3(NG_3 \cap D_3] = [Kerd_2, Kerd_0 \cap Kerd_1][Kerd_1, Kerd_0 \cap Kerd_2]$$

$$[Kerd_0, Kerd_1 \cap Kerd_2]\ [Kerd_0 \cap Kerd_2, Kerd_0 \cap Kerd_1]$$

$$[Kerd_0 \cap Kerd_1, Kerd_1 \cap Kerd_2][Kerd_0 \cap Kerd_2, Kerd_1 \cap Kerd_2]$$

şeklindedir.

Buna göre X_2Mod ile Simp Grp ≤ 2 arasındaki denkliği $F_{\alpha,\beta}$ yardımıyla [34] den verelim.

Önerme 2.1.2. ***G*** bir simplisel grup olsun.

$$NG_2/\partial_3(NG_3 \cap D_3) \xrightarrow{\partial_2} NG_1 \xrightarrow{\partial_1} NG_0$$

yapısı bir 2-çaprazlanmış modüldür. $x, y \in NG_1$ için; Peiffer Lifting dönüşümü

$$\{x, y\}: NG_1 \times NG_1 \longrightarrow NG_2/\partial_3(NG_3 \cap D_3)$$

$$(x, y) \longmapsto [s_0x, s_1y^{-1}, s_1x]\partial_3(NG_3 \cap D_3) = [s_0x, s_1y][s_1y, s_1x]$$

olarak tanımlanır.

İspat: 2-çaprazlanmış modülün bazı aksiyomlarının sağlandığını gösterelim. Detaylı bilgi için [34] ve [17] e bakınız.

2CM1): $\partial_2\{x, y\} = d_2\,(s_0x, s_1y\; s_0x^{-1}s_1x\; s_1y^{-1}\; s_1x^{-1})$

$$= s_0d_1\, x, y\; s_0d_1\, x^{-1}xy^{-1}x^{-1}$$

$$= {}^{\partial_1 x}yxy^{-1}x^{-1}$$

$$= \langle x, y\rangle$$

olur.

2CM2): $a, b \in NG_2$ için

$$\partial_3\left(F_{(0)(1)}(a, b)\right) = [s_0d_2\, a, s_1d_2\, b][s_1d_2\, b, s_1d_2\, a][a, b] \in \partial_3(NG_3 \cap D_3)$$

olup;

$$\{\partial_2 a, \partial_2 b\} = [s_0d_2\, a, s_1d_2\, b][s_1d_2\, b, s_1d_2\, a]$$

$$\equiv [b, a]\; mod\partial_3(NG_3 \cap D_3)$$

olur.

2CM3):

a) $a \in NG_2$ ve $x \in NG_1$ olmak üzere,

$$\partial_3\left(F_{(0)(2,1)}(a, x)\right) = [s_0d_2\, a, s_1x][s_1x, s_1d_2\, a][a, s_1x] \in \partial_3(NG_3 \cap D_3)$$

olup;

$$\{\partial_2 a, x\} = [s_0 d_2\, a, s_1 x][s_1 x, s_1 d_2\, a]$$

$$\equiv [s_1 x, a]\ mod \partial_3(NG_3 \cap D_3)$$

$$= s_1 x a s_1 x^{-1} a^{-1}$$

$$= {}^{x}a a^{-1}$$

olur.

b) $a \in NG_2$ ve $x \in NG_1$ için

$$\partial_3\left(F_{(2,0)(1)}(a, x)\right) = [s_0 x, s_1 d_2\, a][s_1 d_2\, a, s_1 x][s_1 x, a][a, s_0 x] \in \partial_3(NG_3 \cap D_3)$$

olup,

$$\{x, \partial_2 a\} = [s_0 x, s_1 d_2\, a][s_1 d_2\, a, s_1 x]$$

$$\equiv [s_0 x, a][a, s_1 x]$$

$$= s_0 x a\, s_0 x^{-1} a^{-1} a\, s_1 x a^{-1} s_1 x^{-1}$$

$$= ({}^{\partial_1 x}a)\,({}^{x}a^{-1})$$

olup;

$$\{x, \partial_2 a\}\{\partial_2 a, x\} = {}^{\partial_1 x}a\,({}^{x}a^{-1})({}^{x}a)a^{-1}$$

$$= {}^{\partial_1 x}a\, a^{-1}$$

bulunur. Diğer aksiyomların ispatı için [34] ye bakınız. Sonuç olarak

$$NG_2 / \partial_3(NG_3 \cap D_3) \xrightarrow{\partial_2} NG_1 \xrightarrow{\partial_1} NG_0$$

$$(x, y) \longmapsto \{x, y\} = \overline{[s_0 x, s_1 y][s_1 y, s_1 x]}$$

Peiffer lifting dönüşümü ile bir 2-çaprazlanmış modül olur. böylece ilk olarak Conduché [17] tarafından ispatlanan ve daha sonra $F_{\alpha,\beta}$ yapıları kullanılarak yeniden Mutlu ve Porter [34] tarafından ispatlanan literatürde iyi bilinen aşağıdaki sonucu verebiliriz.

2.2 2-Çaprazlanmış Modül İle Simplisel Grup Arasındaki İlişki

Önerme 2.2.1. 2-çaprazlanmış modüller kategorisi ile Moore kompleksinin boyutu ≤ 2 olan simplisel gruplar kategorisi denktir.

İspat: Bir önceki önermede

$$NG_2/_{\partial_3(NG_3 \cap D_3)} \xrightarrow{\partial_2} NG_1 \xrightarrow{\partial_1} NG_0$$

$$\{-,-\}: NG_1 \times NG_1 \longrightarrow {}^{NG_2}/_{\partial_3(NG_3 \cap D_3)}$$

$$(x, y) \longmapsto \overline{[s_0x, s_1y][s_1y, s_1x]}$$

in bir 2-çaprazlanmış modül olduğunu [34] den gösterdik. Eğer $\boldsymbol{G}$, Moore kompleksi ≤ 2 olan bir simplisel grup ise $\partial_3(NG_3 \cap D_3) = 1$ olup;

$$NG_2 \xrightarrow{\partial_2} NG_1 \xrightarrow{\partial_1} NG_0$$

bir 2-çaprazlanmış modül olup

$$\boldsymbol{Simp\ Grp\ \leq 2 \longrightarrow X_2\ Mod}$$

şeklinde bir funktor tanımlamış oluruz. Tersine; [34] den

$$L \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} N$$

bir 2-çaprazlanmış modül ise

$$G_0 = N,$$

$$G_1 = M \rtimes N,$$

$$G_2 = (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N)$$

alarak 2-truncated simplisel grup elde ederiz ve

$$\begin{aligned}\partial_3(NG_3 \cap D_3) = {} & [Kerd_2, Kerd_0 \cap Kerd_1][Kerd_1, Kerd_0 \cap Kerd_2] \\ & [Kerd_0, Kerd_1 \cap Kerd_2]\ [Kerd_0 \cap Kerd_2, Kerd_0 \cap Kerd_1] \\ & [Kerd_0 \cap Kerd_1, Kerd_1 \cap Kerd_2][Kerd_0 \cap Kerd_2, Kerd_1 \cap Kerd_2] = \{1\}\end{aligned}$$

olduğu gösterilebilir. Yani Moore kompleksinin boyu ≤ 2 olan bir simplisel grup elde edilmiş olur.

3. 2-ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER VE ÇAPRAZLANMIŞ KARELER

3.1 Cat^2-Gruplar ve Çaprazlanmış Kareler

Cat^1-gruplar çaprazlanmış modüllere kategoriksel olarak denk bir yapıdır ve ilk olarak Loday tarafından [33] de tanımlanmıştır. Loday aynı zamanda 3-tip cebirsel bir model olarak çaprazlanmış kareyi tanımlamış ve cat^2-gruplar kategorisine denk olduğunu göstermiştir. Bu bölümde cat^2-gruplar ve çaprazlanmış kare arasındaki ilişkiyi vereceğiz. Bu denklik ileride bize faydalı olacaktır. Şimdi Loday tarafından yapılan çaprazlanmış kare tanımını verelim.

Tanım 3.1.1. Grupların çaprazlanmış karesi,

$$\mu = \left(\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda^1"'] & M \arrow[d, "\mu"] \\ N \arrow[r, "\nu"'] & P \end{tikzcd}\right)$$

P nin L, M, N üzerine sol etkileri vardır. Bu yapı $l \in L, m, m' \in M, n, n' \in N, p \in P$ için aşağıdaki aksiyomları sağlar.

i) $\mu, \nu, \lambda, \lambda', \mu\lambda$ homomorfizmaları birer çaprazlanmış modüllerdir ve λ, λ' ikilisi, P nin etkisini korurlar.

ii) $h(mm', n) = h({}^{m}m', {}^{m}n)h(m, n)$,

iii) $h(m, nn') = h(m, n)h({}^{n}m, {}^{n}n')$,

iv) $\lambda h(m, n) = m{}^{n}m^{-1}$,

v) $\lambda' h(m, n) = {}^{m}nn^{-1}$,

vi) $h(\lambda l, n) = l{}^{n}l^{-1}$,

vii) $h(m, \lambda' l) = {}^{m}ll^{-1}$,

viii) $h\left({}^{p}m, {}^{p}n\right) = {}^{p}h(m, n)$.

Tanım 3.1.2. $\boldsymbol{G}$ bir grup olmak üzere s bir endomorfizma ve t de hedef görüntü olmak üzere oluşturulan $(\boldsymbol{G}, s, t)$ üçlüsüne

i) $st = t, ts = s$,

ii) $[\mathrm{Ker}\, s, \mathrm{Ker}\, t] = 1$.

şartıyla birlikte bir cat^1-grup denir.

Şimdi Loday tarafından ispatlanan ve literatürde iyi bilinen aşağıdaki sonucu kısaca verelim.

Sonuç 3.1.3. Cat^1-gruplar ile çaprazlanmış modüller denktir.

$(\boldsymbol{G}, s, t)$ üçlüsü bir cat^1-grup olsun. $C = \mathrm{Ker}\, s$, $B = Im\ s$ ve $\partial = t\backslash_C$ kısıtlaması olmak üzere $\partial: C \to B$, bir çaprazlanmış modül olur.

Tersine eğer $\partial: C \to B$ bir çaprazlanmış modül ise,

$c \in C, b \in B$ için $s(c, b) = (1, b),\ t(c, b) = (1, \partial(c)b)$

olacak şekilde s, t tanımlanır. Bu durumda $\boldsymbol{G} = C \rtimes B$ için $(\boldsymbol{G}, s, t)$ üçlüsü bir cat^1-grup olur. Gerçekten de

i) $\quad st(c, b) = s(1, \partial cb) = (1, (\partial c)b) = t(c, b)$

$ts(c, b) = t(1, b) = (1, b) = s(c, b)$

olur. Yani $st = t$ ve $ts = s$ olur.

ii) $\quad s(c, b) = (1, b) \Longrightarrow (c, b) \in Kers \Leftrightarrow b = 1$ yani $(c, 1) \in Kers$ olur.

$t(c, b) = (1, (\partial c)b) \ \Longrightarrow (c, b) \in Kert \Leftrightarrow (\partial c)b = 1 \Longrightarrow b = (\partial c)^{-1}$

olup $(c, (\partial c)^{-1}) \in Kert$ olur.

$[(c, 1), (c, (\partial c)^{-1})] = 1$ olduğundan $[Kers, Kert] = 1$ olur.

Tanım 3.1.4. ***G*** bir grup olsun ve bağımsız iki cat^1-grup yapısı üzerinde tanımlansın. Daha açık olarak.

$i, j = 1, 2,\ i \neq j$ için

$(\boldsymbol{G}, s_i, t_i),\ i = 1, 2$ bir cat^1-gruptur ve $(\boldsymbol{G}, s_1, t_1, s_2, t_2)$ 5-lisi bir cat^2-grup oluşturur.

$$\left(\begin{array}{ccc} G & \overset{s_1}{\underset{t_1}{\rightrightarrows}} & G \\ \| & & \| \\ G & \overset{s_2}{\underset{t_2}{\rightrightarrows}} & G \end{array}\right) \begin{array}{l} \sim \text{cat}^1\text{-grup} \\ \\ \sim \text{cat}^1\text{-grup} \end{array}$$

öyle ki aşağıdaki şartlar sağlanır.

i) $\quad i, j = 1, 2,\ i \neq j$ için

$s_is_j = s_js_i$, $t_it_j = t_jt_i$, $s_it_j = t_js_i$ dir.

ii) $(\boldsymbol{G}, s_i, t_i)$ ve $(\boldsymbol{G}, s_i, t_i)$ ~ cat^1-gruptur.

Şimdi ileriki bölümlerde kullanacağımız cat^2-gruplar ile çaprazlanmış kareler arasındaki ilişkiyi verelim.

Aşağıdaki önerme Loday tarafından ispatlanmıştır.

Önerme 3.1.5. Cat^2-grupların kategorisi ile çaprazlanmış kareler kategorisi denktir.

İspat: Birbirinden bağımsız olan iki cat^1-grup yapısı için, $\partial: C \to B$ çaprazlanmış modülü ile $C = \ker s$, $B = Im\ s$ ve $\partial = t\backslash_C$ kısıtlaması $(\boldsymbol{G}, s_1, t_1)$ cat^1-grubu verilsin. Cat^1-grupların bir morfizması ∂, C üzerinde B cat^1-grup yapısının bir sınırlaması $(\boldsymbol{G}, s_2, t_2)$'dir. Böylece çaprazlanmış modüllerin bir morfizması aşağıdaki gibidir.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\ s_1 \cap \mathrm{Ker}\ s_2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Im}\ s_1 \cap \mathrm{Ker}\ s_2 \arrow[d] \\
\mathrm{Ker}\ s_1 \cap \mathrm{Im}\ s_2 \arrow[r] & \mathrm{Im}\ s_1 \cap \mathrm{Im}\ s_2
\end{tikzcd}$$

Burada her bir morfizma, doğal etki ile bir çaprazlanmış modüldür.

Eğer $x \in Im\ s_1 \cap \mathrm{Ker}\, s_2$ ve $y \in Ker\ s_1 \cap \mathrm{Im}\, s_2$ ise o zaman

$[x, y] \in \mathrm{Ker}\, s_1 \cap \mathrm{Ker}\, s_2$

elde edilir. Yani h dönüşümü;

h: $Im\ s_1 \cap \mathrm{Ker}\, s_2 \times Ker\ s_1 \cap \mathrm{Im}\, s_2 \longrightarrow Ker\ s_1 \cap \mathrm{Ker}\, s_2$

$(x, y) \longmapsto [x, y]$

dir. Çaprazlanmış kare aksiyomlarının sağlandığı kolayca gösterilebilir.

Tersine

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda"'] & M \arrow[d, "\mu"] \\
N \arrow[r, "\nu"'] & P
\end{tikzcd}$$

bir çaprazlanmış kare olsun. Bu durumda $(L,N) \longrightarrow (M,P)$ bir çaprazlanmış modül morfizmi olarak değerlendirilebilir.

$L \longrightarrow N$ çaprazlanmış modülünden $(L \rtimes N, s, t)$ şeklinde bir cat[1]-grup ve $M \longrightarrow P$ çaprazlanmış modülünden $(M \rtimes P, s', t')$ şeklinde bir cat[1]-grup tanımlayabiliriz. $(L,N) \longrightarrow (M,P)$ morfizmi yardımıyla cat[1]-grupların

$$\partial: (L \rtimes N, s, t) \to (M \rtimes P, s', t')$$

bir morfizmini tanımlayabiliriz.

$(m,p) \in M \rtimes P$ ve $(l,n) \in L \rtimes N$ üzerindeki etkisi

$$^{(m,p)}(l,n) = \left({}^{m}\!\left({}^{p}l\right)h\left(m, {}^{p}n\right), {}^{p}n\right)$$

ile tanımlanır. Bu etkiyi kullanarak $\boldsymbol{G} = (L \rtimes N) \rtimes (M \rtimes P)$ grubunu tanımlayabiliriz. Buradan;

$$s_1(l,n,m,p) = s'(m,p)$$

$$t_1(l,n,m,p) = t'(m,p)$$

$$s_2(l,n,m,p) = s(l,n)$$

$$t_2(l,n,m,p) = t(l,n)$$

alarak; $\big((L \rtimes N) \rtimes (M \rtimes P) s_1, t_1, s_2, t_2\big)$ cat[2]-grubunu tanımlayabiliriz. Sonuç olarak $(\boldsymbol{G}, s_1, t_1, s_2, t_2)$ cat[2]-grubuna karşılık gelen çaprazlanmış kare

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\ s_1 \cap \mathrm{Ker}\ s_2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Im}\ s_1 \cap \mathrm{Ker}\ s_2 \arrow[d] \\
\mathrm{Ker}\ s_1 \cap \mathrm{Im}\ s_2 \arrow[r] & \mathrm{Im}\ s_1 \cap \mathrm{Im}\ s_2
\end{tikzcd}$$

olup $h: (x,y) \longmapsto [x,y]$ dir. Burada $Ker\ s_1 \longrightarrow Im\ s_1$ ve $Ker\ s_2 \longrightarrow Im\ s_2$ $\boldsymbol{G}$ deki konjuge etkisiyle birer çaprazlanmış modüldür.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda^1"'] & M \arrow[d, "\mu"] \\
N \arrow[r, "\nu"'] & P
\end{tikzcd}$$

Çaprazlanmış karesine karşılık gelen cat[1]-gruplar $(L \rtimes N, s, t)$, $(M \rtimes P, s', t')$ olup $M \rtimes P$ nin $L \rtimes N$ üzerindeki etkiye göre $\left((L \rtimes N) \rtimes (M \rtimes P) s_1, t_1, s_2, t_2\right)$ bir cat[2]-grup olacaktır.

3.2 Simplisel Gruplardan Çaprazlanmış Karelere

Aşağıda vereceğimiz funktor, Porter [35] tarafından simplisel gruplardan çaprazlanmış $n - k\ddot{u}p$ lere tanımlı $\boldsymbol{M}(-, \boldsymbol{n})$ funktorunun 2-boyutlu hali olacaktır. Yani simplisel gruplardan çaprazlanmış karelere bir funktor oluşturacağız. Detaylı bilgi için [35] ve [36] e bakınız.

G bir simplisel grup olsun.

$$\begin{tikzcd} NG_2/\partial_3(NG_3) \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "\overline{\partial_2}"'] & NG_1 \arrow[d, "\mu"] \\ \overline{NG_1} \arrow[r, "\mu'"'] & G_1 \end{tikzcd}$$

diyagramını gözönüne alalım. $NG_1 = Ker d_0^1, \overline{NG_1} = d_1^1$ dir. G_1 , ${}^{NG_2}/_{\partial_3(NG_3)}$ üzerine s_1 vasıtasıyla etki ettiğinden $\overline{NG_1}$ in NG_1 ve ${}^{NG_2}/_{\partial_3(NG_3)}$ üzerine μ' ile, NG_1 in ${}^{NG_2}/_{\partial_3(NG_3)}$ ve $\overline{NG_1}$ üzerine μ ile etkisi vardır. Hem μ hem de μ' içine dönüşümler olduklarından bütün etkiler konjuge etkidir. h dönüşümü ise aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$h: NG_1 \times \overline{NG_1} \longrightarrow {}^{NG_2}/_{\partial_3(NG_3)}$$

$$(x, \bar{y}) \longmapsto h(x, y) = \overline{[s_1 y, s_1 y s \circ y^{-1}]} \partial_3(NG_3)$$

dir. Bu funktoru

$$\boldsymbol{M}(-, \boldsymbol{2}): \boldsymbol{Simp\ Grp} \longrightarrow \boldsymbol{Crs^2}$$

ile göstereceğiz.

3.3 2-Çaprazlanmış Modüllerden Çaprazlanmış Karelere

Conduché, Brown'a yazdığı bir mektupta (ayrıca [18] ya bakınız.)

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda^1"'] & M \arrow[d, "\mu"] \\ N \arrow[r, "\nu"'] & P \end{tikzcd}$$

çaprazlanmış karesinden,

$$L \xrightarrow{(\lambda^{-1},\lambda')} M \rtimes N \xrightarrow{\mu\nu} P$$

şeklinde bir 2-çaprazlanmış modül yapısının varlığından bahsetmektedir. Şimdi

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda^1"'] & M \arrow[d, "\mu"] \\ N \arrow[r, "\nu"'] & P \end{tikzcd}$$

çaprazlanmış karesinden bir cat^2-grup elde edildiğini biliyoruz. Mutlu ve Porter [36] de herhangi verilen bir çaprazlanmış kareden Nerve funktorunu kullanarak bir bisimplisel grup elde etmişlerdir. Bu bisimplisel gruptan Artin-Mazur kullanarak bir simplisel grup ve Moore kompleksinden ise bir 2-çaprazlanmış modül elde etmişlerdir. Arvasi ve Ulualan [7] de cat^2-gruplar ve çaprazlanmış karelerin arasındaki denkliği kullanarak bir bisimplisel grup elde edip, bu bisimplisel gruptan Artin-Mazur [3] kodiyagonal funktoru kullanarak bir simplisel grup elde edip; bazı izomorfizmler yardımıyla bu simplisel grubun Moore kompleksinde bir 2-çaprazlanmış modülün var olduğunu göstermişlerdir.

Conducé ise [18] de bir bisimplisel gruptan Moore bikompleksini göz önüne alıp, Moore bikompleksin bir çaprazlanmış kare verdiğini göstermiştir. Buna göre bir önerme olarak Moore bikompleksinin boyu ≤ 1 olan bisimplisel gruplar ile çaprazlanmış kareler denktir diyebiliriz. Fakat bu tezde bu iddiaya derinlemesine girmeyeceğiz. O halde elde edilen cat^2-gruptan aşağıdaki diyagramı oluşturabiliriz.

$$
\begin{tikzcd}
(L \rtimes N) \rtimes (M \rtimes P) \arrow[r, shift left, "s'"] \arrow[r, shift right, "t'"'] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & M \rtimes P \arrow[d, shift right, "s_M"'] \arrow[d, shift left, "t_M"] \\
N \rtimes P \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right, "s_N\,,\ t_N"'] & P
\end{tikzcd}
$$

Buradaki kaynak ve hedef dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$l \in L, m \in M, p \in P$ için

$s\big((l,n),(m,p)\big) = (n,p),$

$s'\big((l,n),(m,p)\big) = (m,p),$

$t\big((l,n),(m,p)\big) = \big((\lambda' l)n, \mu(m)p\big),$

$t'\big((l,n),(m,p)\big) = \big((\lambda l)^{(\nu n)}m, \nu(n)p\big),$

$s_N(n,p) = p$

$t_N(n,p) = \nu(n)p$

$s_M(m,p) = p$

$t_M(m,p) = \mu(m)p.$

Bu cat^2-gruptan aşağıdaki gibi bir bisimplisel grup elde ederiz.

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] & (L^N) \rtimes ((L^N) \rtimes (M^P)) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] & M \rtimes (M \rtimes P) \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] \\
((L^L \rtimes N) \rtimes ((M^M) \rtimes P) \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & (L^N) \rtimes (M^P) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & M \rtimes P \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
N \rtimes (N \rtimes P) \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & (N \rtimes P) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & P
\end{tikzcd}
$$

Burada $L^N = L \rtimes N, M^P = M \rtimes P$ olarak ifade edilmiştir. Detaylı bilgi için [7] ye bakınız. Burada $M \rtimes P$ nin M üzerindeki etkisi ${}^{(m,p)}m' = {}^{\mu(m)p}m'$ ile verilmektedir.

$(n,p) \in N \rtimes P$ nin N üzerindeki etkisi ${}^{(n,p)}n' = {}^{v(n)p}n'$ dür. Yani

$d'^{v}_{0}(m,p) = t_M(m,p) = \mu(m)p$

$d'^{v}_{1}(m,p) = s_M(m,p) = p$

$d'^{h}_{0}(n,p) = t_N(n,p) = v(n)p$

$d'^{h}_{1}(n,p) = s_N(n,p) = p$

olur. Şimdi bu elde edilen bisimplisel gruptan simplisel grup tanımlayacağız. Bunun için Artin-Mazur codiagonal funktorunu inceleyelim.

3.4 Artin-Mazur Codiagonal Funktoru (Bisimplisel Gruplardan Simplisel Gruplara)

Bu bölümde [3] den Artin-Mazur kodiyagonal funktorunu hatırlayalım.

$\boldsymbol{G}.,.$ bir bisimplicial grup olsun.

$$G_{(n)} = \prod_{p+q=n} G_{p,q}$$

ve $\nabla_n \subset G_{(n)}$ olmak üzere; $G_{(n)}$ nin $(x_0, \dots, x_n)$ bir elemanı ile $x_p \in G_{p,n-p}$, ∇_n olması için gerek ve yeter şart, her bir $p = 0, \dots, n-1$ için

$$d_0^v(x_p) = d_{p+1}^h(x_{p+1})$$

olmasıdır. Böylece oluşturacağımız simplisel grubun bileşenleri ∇_n lerdir ve ∇_n lerin elemanları ise $x_p \in G_{p,n-p}$ olmak üzere $(x_0, \dots, x_n) \in \nabla_n$ler için

$$d_0^v(x_p) = d_{p+1}^h(x_{p+1}) \qquad 0 \le p \le n-1$$

sağlanır. Sonra ∇_n ve ∇_{n-1} arasındaki yüz ve dejenere operatörlerinden bahsedelim.

$j = 0, \dots, n,$ için

$D_j : \nabla_n \to \nabla_{n-1}$ ve $S_j : \nabla_n \to \nabla_{n+1}$,

$$D_j(x) = \left(d_j^v(x_0), d_{j-1}^v(x_1), \dots, d_1^v(x_{j-1}), d_j^h(x_{j+1}), d_j^h(x_{j+2}), \dots, d_j^h(x_n)\right)$$

$$S_j(x) = \left(s_j^v(x_0), s_{j-1}^v(x_1), \dots, s_0^v(x_j), s_j^h(x_j), s_j^h(x_{j+1}), \dots, s_j^h(x_n)\right)$$

ile tanımlanır. Böylece $\nabla(\boldsymbol{G}.,.) = \{\nabla_n \colon D_j, S_j\}$ bir simplisel grup olur.

ÖRNEK 3.4.1.

$n = 0$ için

$G_{(0)} = G_{0,0}$

sağlanır.

$n = 1$ için

$\nabla_1 \subset G_{(1)} = G_{1,0} \times G_{0,1}$

olur ve

$$\nabla_1 = \{(g_{1,0}, g_{0,1}) \colon d_0^v(g_{1,0}) = d_1^h(g_{0,1})\}$$

ile birlikte homomorfizmalar aşağıdaki gibidir;

$$D_0^1(g_{1,0}, g_{0,1}) = (d_0^v g_{1,0}, d_0^h g_{0,1}),$$

$$D_1^1(g_{1,0}, g_{0,1}) = (d_1^v g_{1,0}, d_1^h g_{0,1}),$$

$$S_0^0(g_{0,0}) = (s_0^v g_{0,0}, s_0^h g_{0,0}).$$

$n = 2$ için

$$\nabla_2 \subset G_{(2)} = \prod_{p+q=2} G_{p,q} = G_{2,0} \times G_{1,1} \times G_{0,2}$$

olur ve

$$\nabla_2 = \{(g_{2,0}, g_{1,1}, g_{0,2}) : \ d_0^v(g_{2,0}) = d_1^h(g_{1,1}), d_0^v(g_{1,1}) = d_2^h(g_{0,2})\}.$$

Şimdi cat^2-gruptan elde edilen bisimplisel gruba Artin-Mazur kodiyagonal funktorunu uygulayarak ∇_0, ∇_1 ve ∇_2 yi elde edelim.

$G_{(0)} = G_{0,0} \cong P$ dir. 1-simplekslerin grubu, $(g_{1,0}, g_{0,1}) = ((m,p),(n,p'))$ den oluşan

$$\nabla_1 \subset G_{(1)} = G_{1,0} \times G_{0,1} = (M \rtimes P) \times (N \rtimes P)$$

nin bir kümesidir. Burada $\mu(m)p = p'$ olur. Örneğin;

$$G_1 = \{((m,p),(n,p')) \colon d_0^v(m,p) = \mu(m)p = p' = d_1^h(n,p')\}$$

dir.

$(m_1, p_1, n_1, \mu(m_1)p_1)$ ve $(m_2, p_2, n_2, \mu(m_2)p_2)$ elemanlarının birleşimi ve değişimi kuralından

$$\left(m_1{}^{p_1}m_2, p_1p_2, n_1{}^{\mu(m_1)p_1}n_2, \mu\left(m_1{}^{p_1}m_2\right)p_1p_2\right)$$

olur. Bu elemanların G_1 alt grubu, $N \rtimes (M \rtimes P)$ ye izomorfiktir. Burada P, ${}^{m}n = {}^{\mu m}n$ yolu ile N üzerinde M etkisi vardır. Bu izomorfizmin tanımlaması aşağıdaki gibidir.

$$f: \quad G_1 \quad \longrightarrow \; N \rtimes (M \rtimes P)$$

$$(m, p, \mu(m)p \longmapsto (n, m, p).$$

G_1 ile $N \rtimes (M \rtimes P)$ tanımından, d_0 ve , d_1 in tanımına aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$d_0(n, m, p) = v(n)\mu(m)p$$

$$d_1(n, m, p) = p.$$

Şimdi $\nabla_2 = G_2$ yi tanımlayacağız. 2-simplisel grup

$$\nabla_2 \subset G_{(2)} = G_{2,0} \times G_{1,1} \times G_{0,2}$$

$$= M \rtimes (M \rtimes P) \times \big((L \rtimes N) \rtimes (M \rtimes P)\big) \times \big(N \rtimes (N \rtimes P)\big)$$

nin G_2 alt kümesinin

$$\big((m_2, m_1, p), (l, n, m, p'), (n_2, n_1, p'')\big)$$

elemanları için Artin-Mazur funktoruna göre aşağıdakiler sağlanır:

$$d_0^v(m_2, m_1, p) = d_1^h(l, n, m, p')$$

$$d_0^v(l, n, m, p') = d_2^h(n_2, n_1, p'').$$

Bu durum bize özel düzenlemelerle

$$d_0^v(m_2, m_1, p) = (m_1, \mu(m_2)p)$$

$$d_1^h(l, n, m, p') = s'(l, n, m, p') = (m, p')$$

$$d_0^v(l, n, m, p') = t(l, n, m, p') = (\lambda'(l)n, \mu(m)p')$$

$$d_2^h(n_2, n_1, p'') = (n_2, p'')$$

den $m_1 = m,\ \mu(m_2)p = p',\ \lambda'(l)n = n_2,\ \mu(m)p' = p''$ arasındaki bağlantıyı verir. Böylece G_2 nin elemanlarının şekline aşağıdaki gibi sahip oluruz:

$$\big((m_2, m_1, p), \big((l, n), (m_1, \mu(m_2)p)\big), (\lambda'(l)n, n_1, \mu(m_1 m_2)p)\big).$$

Biz böylece aşağıdaki izomorfizm sonucuna varırız:

$$f:\ G_2 \longrightarrow (L \rtimes (N \rtimes M) \rtimes \big(N \rtimes (M \rtimes P)\big)$$

$$\big((m_2, m_1, p), \big((l, n), (m_1, \mu(m_2)p)\big), (\lambda'(l)n, n_1, \mu(m_1 m_2)p)\big) \longrightarrow$$

$$\big(\big(l, (n, m_1)\big), \big(n_1, (m_2, p)\big)\big).$$

Bu yüzden bir 2-truncated simplisel grup $G^{(2)}$ ile yüz ve üreteçler ile aşağıdakiler elde edilir:

$$G^{(2)}:\quad L \rtimes (N \rtimes M) \rtimes N \rtimes (M \rtimes P) \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow\\ \longleftarrow}\; N \rtimes (M \rtimes P) \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow}\; P$$

$d_0^1(n, m, p) = v(n)\mu(m)p$,

$d_1^1(n, m, p) = p$,

$s_0(p) = (1, 1, p)$,

$d_0^2\big(\big(l, (n, m_1)\big), \big(n_1, (m_2, p)\big)\big) = \big(n_1, (\lambda l)^{v(n)} m_1, v(n)\mu(m_2)p\big)$,

$d_1^2\big(\big(l, (n, m_1)\big), \big(n_1, (m_2, p)\big)\big) = (n_1, (\lambda' l)n, m_1 m_2, p)$,

$d_2^2\big(\big(l, (n, m_1)\big), \big(n_1, (m_2, p)\big)\big) = (n, m_2, p)$,

$s_0^1(n, m, p) = \big(\big(1. (1, m)\big), \big(n, (1, p)\big)\big)$,

$s_1^1(n, m, p) = \big(\big(1, (n, 1)\big), \big(1, (m, p)\big)\big)$.

Şimdi [7] den aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 3.4.2. $\boldsymbol{G}^{(2)}$ simplisel grubunun Moore kompleksi çaprazlanmış karenin mapping cone kompleksine denktir ve bu mapping cone kompleksi bir 2-çaprazlanmış modül yapısına sahiptir.

İspat: $\boldsymbol{G}^{(2)}$ simplisel grubunun Moore kompleksini oluşturalım.

$NG_0 = G_0 = P$

$G_1 = N \rtimes (M \rtimes P)$

$NG_1 = Kerd_0^1$

$d_0^1 : G_1 \longrightarrow G_0$

$d_0^1(n, m, p) = v(n)\mu(m)p$ olup;

$(n, m, p) \in Kerd_0^1 \Leftrightarrow p = \mu(m)^{-1}v(n)^{-1}$

olmalıdır. O halde;

$(n, m, \mu(m)^{-1}v(n)^{-1}) \in Kerd_0^1$

olur. Diğer yandan $f_1 : NG_1 \longrightarrow M \rtimes N$, $\left(n^{-1}, m^{-1}, \mu(m)v(n)\right) \longmapsto (m, n)$ bir izomorfizm olup, bu izomorfizm ile;

$$G^{(2)} : \quad L \rtimes (N \rtimes M) \rtimes N \rtimes (M \rtimes P) \begin{smallmatrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{smallmatrix} N \rtimes (M \rtimes P) \begin{smallmatrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{smallmatrix} P$$

$\partial_1(m, n) = d_1\left(n^{-1}, m^{-1}, \mu(m)v(n)\right) = \mu(m)v(n)$

ile tanımlayabiliriz. Burada $\left(n^{-1}, m^{-1}, \mu(m)v(n)\right) \in Kerd_0^1$ dir. Çünkü

$d_0{}'\left(n^{-1}, m^{-1}, \mu(m)v(n)\right) = v(n^{-1})\mu(m^{-1})\mu(m)v(n) = 1$

olur. Böylece

$NG_0 \cong P$

$NG_1 = M \rtimes N$

$\partial_1 : M \rtimes N \longrightarrow P$

$\partial_1(m, n) = \mu(m)v(n)$

elde edilir. Şimdi NG_2 yi araştıracağız.

$x = \Big(\big(l, (n, m_1)\big), \big(n_1, (m_2, p)\big)\Big) \in L \rtimes (N \rtimes M) \rtimes N \rtimes (M \rtimes P) \cong G_2$

olsun. d_0^2 ve d_1^2 tanımlarını kullanarak, $x \in Kerd_0^2$ olması için;

$$d_0^2(x) = \left(n_1, \lambda l^{\,v(n)} m_1, v(n)\mu(m_2)p\right) = (1,1,1) \Leftrightarrow$$

$$n_1 = 1, \lambda l^{\,v(n)} m_1 = 1, v(n)\mu(m_2)p = 1$$

olur.$x \in Kerd_1^2$ olması için;$d_1^2(x) = (n_1.\lambda'(l)n, m_1 m_2, p) = (1,1,1)$ olup;

$$n_1.\lambda'(l)n = 1, m_1 m_2 = 1, p = 1$$

olur. Buradan

$$n = (\lambda' l)^{-1}$$

$$1 = (\lambda l)^{v(n)} m_1 = (\lambda l)^{v(\lambda' l^{-1})} m_1 = (\lambda l)^{v\lambda l^{-1}} m_1 = (\lambda l)(\lambda l)^{-1} m_1 (\lambda l) = m_1(\lambda l)$$

$$\Rightarrow m_1 = (\lambda l)^{-1}$$

olur.

$m_2 = {m_1}^{-1} \Rightarrow m_2 = (\lambda l)$ olup; $x \in Kerd_0^2 \cap Kerd_1^2$ olması için gerek ve yeter şart

$$x = \left(l, (\lambda' l^{-1}, \lambda l^{-1}), (1, \lambda l, 1)\right)$$

olup;

$$Kerd_0^2 \cap Kerd_1^2 \cong L$$

bulunur. Buradan

$$d_2^2 \big/ _{Kerd_0^2 \cap Kerd_1^2} \left(l, (\lambda' l^{-1}, \lambda l^{-1}), (1, \lambda l, 1)\right) = (\lambda' l^{-1}, \lambda l, 1) \in N \rtimes (M \rtimes P)$$

bulunur. Burada $(\lambda' l^{-1}, \lambda l, 1) \in Kerd_0^1$ dir. Çünkü

$$d_0^1(\lambda' l^{-1}, \lambda l, 1) = v\lambda' l^{-1} \mu \lambda l.1 = 1$$

olup;

$$f_1 : N \rtimes (M \rtimes P) \longrightarrow (M \rtimes N)$$

$$(n, m, p) \longmapsto (m^{-1}, n^{-1})$$

izomorfizmini kullanarak;

$$\partial_2(l) = f_1 \, {d_2^2}\Big/_{Kerd_0^2 \,\cap\, Kerd_1^2} \big(l, (\lambda' l^{-1}, \lambda l^{-1}), (1, \lambda l, 1)\big)$$

$$= f_1(\lambda' l^{-1}, \lambda l, 1)$$

$$= (\lambda l^{-1}, \lambda' l) \in M \rtimes N$$

olur. Böylece verilen bir

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda^1"'] & M \arrow[d, "\mu"] \\
N \arrow[r, "\nu"'] & P
\end{tikzcd}$$

çaprazlanmış karenin mapping cone kompleksi

$$L \xrightarrow{(\lambda^{-1}, \lambda')} M \rtimes N \xrightarrow{\mu\nu} P$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\{(m, n), (c, a)\} = h(m, nan^{-1})$$

şeklinde Peiffer lifting tanımlanır. Bu yapının bir 2-çaprazlanmış modül olduğunu görmek için [7] ye bakınız. Böylece

$$\begin{tikzcd}
NG_2 / \partial_3(NG_3) \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "\overline{\partial_2}"'] & NG_1 = \mathrm{Ker}\, d_0 \arrow[d, "\mu"] \\
\overline{NG_1} = \mathrm{Ker}\, d_1 \arrow[r, "\mu'"'] & G_1
\end{tikzcd}$$

bir çaprazlanmış kare olduğundan bir simplisel gruptan yeni bir 2-çaprazlanmış modül yapısını

$${NG_2}\Big/_{\partial_3 NG_3} \longrightarrow Kerd_0 \rtimes Kerd_1 \xrightarrow{\ i\ } G_1$$

şeklinde elde etmiş oluruz.

4. 2-ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERDEN KUADRATİK MODÜLLERE

Kuadratik Modüller H. J. Baues tarafından [13] de 3-tip cebirsel bir model olarak tanımlanmıştır. Baues [13] de simplisel gruplardan kuadratik modüller kategorisine bir funktor oluşturmuştur. Arvasi ve Ulualan ise [7] de $F_{\alpha,\beta}$ fonksiyonlarının görüntülerini kullanarak Moore kompleksinin boyu ≤ 2 olan simplisel gruplardan kuadratik modüllere bir funktor oluşturmuşlardır. Ayrıca Conducé'nin [17] de tanımladığı 2-çaprazlanmış modüller kategorisinden kuadratik modüller kategorisine bir funktoru [7] de tanımlayıp bu funktorun homotopi gruplarını koruduğunu göstermişlerdir. Yani oluşturulan bu funktorlar altında, 2-çaprazlanmış modülün homotopi grupları olan π_1, π_2 ve π_3 gruplarının, elde edilen kuadratik modülün homotopi grupları olan $\pi_1{}', \pi_2{}'$ ve $\pi_3{}'$ gruplarına izomorf olduklarını göstermişlerdir. Bu bölümde kısaca bu oluşumlar verilecektir.

$\partial\colon M \longrightarrow N$ bir ön-çaprazlanmış modül olması için N nin M üzerine grup etkisi olması gerekir. $N \times M \longrightarrow M$, $(n,m) \longmapsto {}^{n}m$ ile gösterilen fonksiyon için

1. ${}^{1_n}m = m,$
2. ${}^{n_1}({}^{n_2}m) = {}^{(n_1 n_2)}m$
3. ${}^{n}(m_1 m_2) = {}^{n}(m_1)\,{}^{n}(m_2)$
4. ${}^{n}1_m = 1_m$

özellikleri sağlanmalıdır. N, M üzrine etki ediyorsa M ye nir N-grup denir, M bir N-grup ve $\partial\colon M \longrightarrow N$ bir grup homomorfizmi olmak üzere her $n \in N$ ve $m \in M$ için $\partial({}^{n}m) = n(\partial m)n^{-1}$ oluyorsa, ∂ ya ön-çaprazlanmış modül dendiğini biliyoruz.

Bir nil(2)-modül ise; $\partial\colon M \longrightarrow N$ bir ön-çaprazlanmış modül olup; $P_3(\partial) = 1$ şartını sağlamalıdır. Burada $P_3(\partial)$, M nin üçlü Peiffer elemanları tarafından üretilen normal alt gruptur. $\partial\colon M \longrightarrow N$ ön-çaprazlanmış modülündeki Peiffer elemanları ise $x, y \in M$ için üçlü Peiffer'ler

$\langle x, y\rangle = \left({}^{\partial x}y\right)xy^{-1}x^{-1}$ olmak üzere

$\langle\langle x, y\rangle, z\rangle, \langle x, \langle y, z\rangle\rangle$

şeklinde tanımlıdır.

Bir $\boldsymbol{G}$ grubu için $G^{ab} = \boldsymbol{G}/[\boldsymbol{G},\boldsymbol{G}]$ $\boldsymbol{G}$ nin abelyenleştirilmesi olsun. $\boldsymbol{G}/[\boldsymbol{G},\boldsymbol{G}]$ abelyendir. Gerçekten de;

$$x[\boldsymbol{G},\boldsymbol{G}]y[\boldsymbol{G},\boldsymbol{G}] = xy[\boldsymbol{G},\boldsymbol{G}]$$

$$= \underbrace{xyy^{-1}x^{-1}}_{\in[\boldsymbol{G},\boldsymbol{G}]} yx[\boldsymbol{G},\boldsymbol{G}]$$

$$= yx[\boldsymbol{G},\boldsymbol{G}]$$

olur. $\partial: M \longrightarrow N$ ön-çaprazlanmış modül ise;

$$\partial^{cr} = M^{cr} = {}^{M}\!/_{P_2(\partial)} \longrightarrow N$$

∂ ya bağlı bir çaprazlanmış modüldür. Burada $P_2(\partial) = \langle M, M\rangle$ dir. M nin Peiffer normal alt grubudur. $x, y \in M$ için $\langle x, y\rangle = \left({}^{\partial x}y\right)xy^{-1}x^{-1}$ elemanları tarafından türetilen normal alt gruptur.

Tanım 4.1. Grupların aşağıdaki gibi bir

$$\begin{tikzcd}
 & C \otimes C \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] & \\
L \arrow[r, "\delta"'] & M \arrow[r, "\partial"'] & N
\end{tikzcd}$$

diyagramını göz önüne alalım. Eğer

QM1) $\partial: M \longrightarrow N$ bir nil(2)-modül ve $w: C \otimes C \longrightarrow M$ Peiffer komutatör dönüşümdür.

$$C = (M^{cr})^{ab} = {}^{M^{cr}}\!/_{[M^{cr}, M^{cr}]}$$

ve $M \longrightarrow C,\ x \longmapsto \bar{x}$ ile verilen bölüm dönüşümü olmak üzere;

$$M^{cr} = {}^{M}\!/_{P_2(\partial)}$$

dir.

QM2) $\partial\delta = 1$ ve $x, y \in M$ için;

$$\delta w(\bar{x} \otimes \bar{y}) = w(\bar{x} \otimes \bar{y}) = \langle x, y\rangle = \left({}^{\partial x}y\right)xy^{-1}x^{-1}$$

olur.

QM3) L bir N-grup olup $a \in L,\ m \in M$ için

$$^{\partial m}a = w\left(\bar{x} \otimes \overline{\delta a}\right)\left(\overline{\delta a} \otimes \bar{x}\right)$$

olur.

QM4) $a, b \in L$ için

$$w\left(\overline{\delta a} \otimes \overline{\delta b}\right) = [b, a]$$

olur. Bu özellikler sağlanıyorsa verilen diyagrama bir kuadratik modül denir.

4.1 Funktorun Oluşturulması

Bu bölümde [7] de Arvasi ve Ulualan tarafından oluşturulan 2-çaprazlanmış modüller kategorisinden kuadratik modüller kategorisi olan funktorun oluşturulmasından bahsedilecektir. Buna göre

$$C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$$

bir 2-çaprazlanmış modül olsun. $\partial_1 : C_1 \longrightarrow C_0$ bir ön-çaprazlanmış modül olduğunu biliyoruz. P_3, C_1 in $x, y, z \in C_1$ olmak üzere;

$$\langle\langle x, y\rangle, z\rangle, \langle x, \langle y, z\rangle\rangle$$

elemanları tarafından üretilen normal alt grubu olsun. ∂_1 bir ön-çaprazlanmış modül olduğundan,

$$\partial_1(P_3) = 1 \text{ olup } P_3 \subseteq Ker\partial_1$$

olur. Böylece ${C_1}/{P_3}$ bir bölüm grubu tanımlanabilir. Bu durumda;

$$ {C_1}/{P_3} \xrightarrow{\overline{\partial_1}} C_0$$

$\overline{\partial_1}(x + P_3) = \partial_1(x)$ ile tanımlı bir homomorfizm vardır.

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "q_1"] \arrow[dr, "\partial_1"'] & C_1/P_3 \arrow[d, "\overline{\partial_1}"] \\ & C_0 \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramını oluşturabiliriz. Yani $\overline{\partial_1} q_1 = \partial_1$ dir. Diğer yandan, $P_3{}'$, C_2 in $x, y, z \in C_1$ olmak üzere;

$$\{\langle x, y \rangle, z\}, \{x, \langle y, z \rangle\}$$

elemanları tarafından üretilen normal alt grubu olsun. Bu durumda

$$M = {C_1}/{P_3}$$

ve

$$L = {C_2}/{P_3{}'}$$

bölüm grupları vardır. Diğer yandan

$$\partial_2\{\langle x, y \rangle, z\} = \langle \langle x, y \rangle, z \rangle$$

ve

$$\partial_2\{x, \langle y, z \rangle\} = \langle x, \langle y, z \rangle \rangle$$

olduğundan $\partial_3(P_3{}') = P_3$ bulunur. Böylece

$$L = {C_2}/{P_3{}'} \xrightarrow{\delta} {C_1}/{P_3} = M$$

$$\delta(x + P_3{}') = \partial_2(x) + P_3$$

iyi tanımlı homomorfizm olur. Çünkü $\partial_2(P_3') = P_3$ dür.

$$q_2 \colon C_2 \longrightarrow {C_2}/{P_3{}'}$$

bölüm dönüşümü olmak üzere aşağıdaki komutatif diyagramı elde ederiz.

$$\begin{tikzcd}
C_2 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "q_2"'] & C_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "q_1"] & C_0 \arrow[d, Rightarrow, "id"] \\
{C_2}/{P_3} \arrow[r, "\delta"'] & {C_1}/{P_3} \arrow[r, "\delta"'] & C_0
\end{tikzcd}$$

$C = (M^{cr})^{ab}$ olsun. Burada $M = {C_1}/{P_3}$ olmak üzere; $x' \in {C_1}/{P_3}$ yani;

$q_1(x) \in {C_1}/{P_3}$ ve $\overline{q_1(x)} \in C$ olmak üzere $w: C \otimes C \longrightarrow L$ kuadratik dönüşümü

$\overline{q_1 x} \otimes \overline{q_1 y} = q_2\{x, y\}$

ile tanımlayabiliriz. Bu durumda bu kuadratik dönüşüm ile birlikte;

$$\begin{tikzcd} & C \otimes C \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] & \\ C_2/P_3' \arrow[r, "\delta"'] & C_1/P_3 \arrow[r, "\partial"'] & C_0 \end{tikzcd}$$

bir kuadratik modül olur.

Kuadratik modül aksiyomlarının sağlandığını görmek için [7] ye bakınız. Şimdi aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 4.1.1. 2-çaprazlanmış modüllerin homotopi grupları ile bu funktor altında elde edilen kuadratik modülün homotopi grupları birbirine izomorftur.

İspat:

$C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 = C$

2-çaprazlanmış modülünün homotopi grupları

$\pi_0(C) = 1, \qquad \pi_1(C) = {C_0}/{\partial_1 C_1}, \qquad \pi_2(C) = \dfrac{Ker\partial_1}{Im\partial_2}, \qquad \pi_3(C) = Ker\partial_2,$

$i \geq 4$ için $\pi_i(C) = \{1\}$ dir.

C', 2-çaprazlanmış modülünden elde edilen kuadratik modül olsun. Yani;

$$\begin{tikzcd} & C \otimes C \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] & \\ L \arrow[r, "\delta"'] & M \arrow[r, "\partial"'] & N \end{tikzcd}$$

olsun. C' nin homotopi grupları,

$\pi_0(C') = \{1\}$,

$\pi_1(C') = {}^{N}/_{\partial\ \ (M)}$,

$\pi_2(C') = \dfrac{Ker\partial}{Im\delta}$,

$\pi_3(C') = Ker\partial\ \ $,

$i \geq 4$ için $\pi_i(C') = \{1\}$ dir.

Buna göre $i = 0, 1, 2, 3$ için

$\pi_i(C) \cong \pi_i(C')$

olduğunu göstermeliyiz.

$\pi_0(C') = \{1\} \cong \pi_0(C)$

ve $i \geq 4$ için $\pi_i(C') = \{1\} \cong \pi_i(C)$ olacağı açıktır.

$\pi_1(C') = {}^{N}/_{\partial\ \ (M)}$

dir. $N = C_0$ dır. $M = {}^{C_1}/_{P_3}$ olup $\partial\ \ (M) = \partial_1 C_1$ dir. Çünkü $\partial_3(P_3) = 1$ dir. O halde;

$\pi_1(C') = {}^{N}/_{\partial\ \ (M)} = {}^{C_0}/_{\partial_1 C_1} = \pi_1(C)$

olur.

$\pi_2(C') = \dfrac{Ker\partial}{Im\delta}$

dır.

$\partial: {}^{C_1}/_{P_3} \longrightarrow C_0$

olup;

$x + P_3 \longmapsto \partial_1(x)$

$Ker\partial\ \ = {}^{Ker\partial_1}/_{P_3}$

olur.

$$\delta: {}^{C_2}\!/_{P_3{}'} \longrightarrow {}^{C_1}\!/_{P_3},$$

$$\delta(x + P_3') \longmapsto \partial_2(x) + P_3$$

olup,

$\delta(P_3') = P_3$ olduğundan

$$Im\delta = {}^{Im\partial_2}\!/_{P_3}$$

olur. Buradan;

$$\pi_2(C') = \frac{Ker\partial}{Im\delta} \cong {}^{Ker\partial_1}\!/_{Im\partial_2} = \pi_2(C)$$

olur. Burada 3. İzomorfizm teoremi uygulanmıştır. Gerçekten de

$${}^{Im\partial_2}\!/_{P_3} \trianglelefteq {}^{Ker\partial_1}\!/_{P_3}$$

olup; $P_3 \subset Im\partial_2$ olduğundan;

$${}^{M}\!/_{N} \trianglelefteq {}^{G}\!/_{N}$$

iken

$$\frac{{}^{G}\!/_{N}}{{}^{M}\!/_{N}} \cong {}^{G}\!/_{M}$$

idi. Yani,

$${}^{Ker\partial_1/P_3}\!\Big/_{Im\partial_2/P_3} \cong {}^{Ker\partial_1}\!/_{Im\partial_2}$$

kullanılmıştır. Şimdi $\pi_3(C') \cong \pi_3(C)$ olduğunu gösterelim.

$$\pi_3(C') = Ker\delta = \{xP_3' : \partial_2(x) + P_3 = P_3\}$$

$$= \{xP_3' : \partial_2(x) \in P_3\}$$

olur. $xP_3' \in \pi_3(C')$ ise, öyle bir $x'P_3' \in \pi_3(C')$ vardır ki, $xP_3' = x'P_3'$ olduğunda $x' \in Ker\partial_2$ olur. Bunu gösterelim.

$$\partial_2\{<x,y>,z\} = \partial_2 <xy,z>$$

yani $\partial_2(P_3') = P_3$ olduğundan,

$$\partial_2(x) \in P_3 \text{ ise } \partial_2(x) = \partial_2(w)$$

yani $w \in P_3'$ vardır. Böylece;

$$\partial_2(xw^{-1}) = 1$$

yani $xw^{-1} \in Ker\partial_2$ olup; $x' = xw^{-1}$ alınabilir. Dolayısıyla, $xP_3' = xw^{-1}P_3' = x'P_3'$ olup, $x' \in Ker\partial_2$ olur.

$$\alpha: \pi_3(C') \longrightarrow \pi_3(C), \qquad xP_3' \longmapsto x'$$

$$\beta: \pi_3(C) \longrightarrow \pi_3(C'), \qquad \beta(x) = xP_3'$$

tanımlanarak $\alpha \circ \beta = id$ ve $\beta \circ \alpha = id$ olur. Yani $\pi_3(C') \cong \pi_3(C)$ elde edilir.

Burada;

$$\pi_3(C') = Ker\delta = \{xP_3' : \partial_2(x) \in P_3\}$$

olup,

$$\left.\begin{array}{c} Ker\delta \longrightarrow Ker\partial_2 \\ xP_3' \longmapsto x' \end{array}\right) \text{ bir izomorfizmdir.}$$

$xP_3' \in \pi_3(C')$ ise, $\partial_2(x) \in P_3$ olduğundan bir $w \in P_3'$ için $\partial_2(x) = \partial_2(w)$ olacak şekilde $w \in P_3'$ vardır. Buradan $\partial_2(xw^{-1}) = 1$ olup $xw^{-1} \in Ker\partial_2$ olur.

$x' = xw^{-1}$ alınırsa;

$$\begin{array}{c} \pi_3(C') = Ker\delta \longrightarrow \pi_3(C) = Ker\partial_2 \\ xP_3' \longmapsto xw^{-1} \end{array}$$

iyi tanımlı bir izomorfizmdir. Burada, $w \in P_3'$ ve $\partial_2(x) = \partial_2(w)$ dir. Çünkü $\partial_2(P_3') = P_3$ dür.

$$\pi_3(C') \cong \pi_3(C)$$

izomorfizmini tekrar yapalım.

$$\pi_3(C') = Ker\delta = \{xP_3' : \partial_2(x) \in P_3\}$$

olur. $\partial_2(P_3') = P_3$ ve $\partial_2(x) \in P_3$ olduğundan; bir $w \in P_3'$ vardır ki $\partial_2(x) = \partial_2(w)$ yazılır. Buradan, $\partial_2(xw^{-1}) = 1$ olup $xw^{-1} \in Ker\partial_2$ olur.

$x' = xw^{-1}$ alınırsa;

$xP_3' = x'P_3'$

olur. Çünkü $w^{-1} \in P_3'$ dür.

Buradan;

$\alpha : \pi_3(C') \longrightarrow \pi_3(C)$, $\qquad xP_3' \longmapsto x'$

$\beta : \pi_3(C) \longrightarrow \pi_3(C')$, $\qquad \beta(x) = xP_3'$

olmak üzere;

$\alpha \circ \beta(x) = \alpha(xP_3) = x$ olur. Çünkü $x \in Ker\partial_2$ olur.

$\beta \circ \alpha(xP_3') = \beta(x') = \beta(xw^{-1}) = xw^{-1}P_3' = xP_3'$ olur. Çünkü $w^{-1} \in P_3'$ dür. Dolayısıyla

$Ker\delta \cong Ker\partial_2$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

5. SİMPLİSEL GRUPLARDAN KUADRATİK MODÜLLERE

Arvasi ve Ulualan [7] de Mutlu ve Porter tarafından verilen $F_{\alpha,\beta}$ fonksiyon çiftlerinin görüntülerinden yararlanarak Baues tarafından verilen simplisel gruplar ve kuadratik modüller arasındaki ilişkiyi yeniden ispatlamışlardır. Bu ispatlama yöntemini bu bölümde vereceğiz. Bunun için önce $F_{\alpha,\beta}$ fonksiyon çiftlerini hatırlayacağız.

Hatırlayacağımız gibi [34] de N_3 normal alt grubunun üreteç elemanları Mutlu ve Porter tarafından aşağıdaki gibi verilmişti.

$x_1 \in NG_1$ ve $y_1 \in NG_2$ için

$$F_{(1,0)(2)}(x_1, y_2) = [s_1s_0x_1, s_2y_2][s_2y_2, s_2s_0x_1]$$

$$F_{(2,0)(1)}(x_1, y_2) = [s_2s_0x_1, s_1y_2][s_1y_2, s_2s_1x_1][s_2s_1x_1, s_2y_2][s_2y_2, s_2s_0x_1]$$

$x_2 \in NG_2$ ve $y_1 \in NG_1$ için

$$F_{(0)(2,1)}(x_2, y_1) = [s_0x_2, s_2s_1y_1][s_2s_1y_1, s_1x_1][s_2x_2, s_2s_1y_1]$$

ve $x_2, y_2 \in NG_2$ olmak üzere

$$F_{(0)(1)}(x_2, y_2) = [s_0x_2, s_1y_2][s_1y_2, s_1x_2][s_2x_2, s_2y_2]$$

$$F_{(0)(2)}(x_2, y_2) = [s_0x_2, s_2y_2]$$

$$F_{(1)(2)}(x_2, y_2) = [s_1x_2, s_2y_2][s_2y_2, s_2x_2]$$

Arvasi ve Ulualan [7] de bu görüntüleri kullanarak bir simplisel gruptan bir kuadratik modül elde etmişlerdir. ***G*** bir simplisel grup ve $G_3 = D_3$ olsun.

$P_3(\partial_1)$, NG_1 in $x, y, z \in NG_1$ olmak üzere;

$$\langle x, \langle y, z\rangle\rangle = {}^{\partial_1(x)}\langle y, z\rangle x \langle y, z\rangle^{-1}x^{-1}$$

$$\langle\langle x, y\rangle, z\rangle = {}^{\partial_1(\langle x,y\rangle)}z\langle x, y\rangle z^{-1}\langle x, y\rangle^{-1}$$

elemanları tarafından üretilen normal alt grup olsun. $\partial_1(P_3(\partial_1)) = 1$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

$P_3{}'$ ise; ${}^{NG_2}/_{\partial_3(NG_3)}$ ün,

$$w(\langle x, y\rangle, z) = [s_0\langle x, y\rangle, s_1z][s_1z, s_1\langle x, y\rangle]$$

ve

$$w(x, \langle y, z\rangle) = [s_0 x, s_1\langle y, z\rangle][s_1\langle y, z\rangle, s_1 x]$$

elemanları tarafından üretilen normal alt grubu olsun.

$$L = {}^{{}^{NG_2}/_{\partial_3(NG_3)}}\Big/_{P_3}{}',$$

ve

$$M = {}^{NG_1}/_{P_3}$$

alarak;

$$\begin{tikzcd} & C \otimes C \arrow[dl, "\omega"'] \arrow[d, "w"] & \\ L \arrow[r, "\delta"'] & M \arrow[r, "\partial"'] & N \end{tikzcd}$$

şeklinde bir kuadratik modül elde ederiz. Buradan;

$C = (M^{cr})^{ab},\ x \in NG_1$ için; $q_1(x) \in M$ ve $\overline{q_1 x} \in C$ olmak üzere;

$w: C \otimes C \longrightarrow L$

$\overline{q_1 x} \otimes \overline{q_1 y} = q_2(s_0 x s_1 y s_0 x^{-1} s_1 x s_1 y^{-1} s_1 x^{-1} \partial_3 NG_3)$

şeklinde kuadratik dönüşümdür.

$\delta: L \longrightarrow M, \qquad \bar{x} \in {}^{NG_2}/_{\partial_3(NG_3)}$

olmak üzere;

$\delta(\bar{x} + P_3') = \overline{\partial_2}(\bar{x}) + P_3$,

$\delta: M \longrightarrow N = NG_0,$

$x \in NG_1$ için $\partial\big(x + P_3\ \big) = d_1(x)$ ile tanımlıdır.

Kuadratik modül aksiyomlarının sağlandığını gösterelim.

QM1): $\partial : {}^{NG_1}/_{P_3(\partial_1)} \longrightarrow NG_0$ ın bir nil(2)-modül olduğu açıktır.

QM2): $q_1x, q_1y \in {}^{NG_1}/_{P_3(\partial_1)} = M$ ve $\{q_1x\}, \{q_1y\} \in C$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}\delta w\{q_1x\} \otimes \{q_1y\} &= \delta q_2(s_0xs_1ys_0x^{-1}s_1xs_1y^{-1}s_1x^{-1}\partial_3NG_3)\\ &= q_1\overline{\partial_2}(s_0xs_1ys_0x^{-1}s_1xs_1y^{-1}s_1x^{-1}\partial_3NG_3)\\ &= q_1(s_0d_1xys_0d_1x^{-1}xy^{-1}x^{-1})\\ &= {}^{\partial_1q_1x}(q_1y)q_1x(q_1y)^{-1}(q_1x)^{-1}\\ &= \langle q_1x, q_1y\rangle\end{aligned}$$

olur.

QM3): $q_2a \in L,\ a \in NG_2$ olmak üzere; $q_1x \in M$ için

$$\begin{aligned}w(\{\delta q_2a\} \otimes \{q_1x\}) &= w(\{q_1\partial_2a\} \otimes \{q, x\})\\ &= q_2(s_0d_2as_1xs_0d_2a^{-1}s_1d_2as_1x^{-1}s_1d_2a^{-1})\end{aligned}$$

olup; $a \in NG_2$ ve $x \in NG_1$ için,

$$\begin{aligned}\partial_3\left(F_{(1,0)(2)}(a, x)\right) &= s_0d_2as_1xs_0d_2a^{-1}s_1d_2as_1x^{-1}s_1d_2a^{-1}\\ &= [s_0d_2a, s_1x][s_1x, s_1d_2a][a, s_1x] \in \partial_3(NG_3)\end{aligned}$$

olup;

$$\begin{aligned}w(\{\delta q_2a\} \otimes \{q_1x\}) &\equiv q_2([s_1x, a]) mod\ \partial_3(NG_3)\\ &= q_2(s_1xas_1x^{-1}a^{-1})\\ &= q_2(x_a)q_2(a^{-1})\end{aligned}$$

olur.

$$w(\{q_1x\} \otimes \{q_1\partial_2a\}) = q_2(s_0xs_1d_2as_0x^{-1}s_1xs_1d_2a^{-1}s_1x^{-1})$$

olup;

$$\partial_3\left(F_{(\ )(\ )}(x, a)\right) = [\ s \circ x, s_1d_2a][s_1d_2a, s_1x][s \circ x, a][a, s_1x] \in \partial_3(NG_3)$$

olacaktır ve

$w(\{q_1x\} \otimes \{q_1\partial_2 a\}) \equiv q_2([a, s_1x][s_0x, a]$

$= q_2(as_1xa^{-1}s_1x^{-1}s_0x\, as_0x^{-1}a^{-1})$

$= q_2(a)q_2(\,^{x}a^{-1})q_2\left(^{\partial_1 x}a\right)q_2(a^{-1})$

olur. Buradan;

$w\{\delta q_2 a\} \otimes \{q_1x\}\{q_1x\} \otimes \{\delta q_2 a\}$

$= q_2(\,^{x}a)q_2(a^{-1})q_2(a)q_2(\,^{x}a^{-1})q_2\left(^{\partial_1 x}a\right)q_2(a^{-1})$

$= {}^{\partial_1(q_1x)}\big(q_2(a)\big).\,q_2(a^{-1})$

olur.

QM4): $q_2a, q_2b \in L$ için;

$w(\delta q_2 a) \otimes (\delta q_2 b) = w(q_1\partial_2 a) \otimes (q_1\partial_2 b)$

$= q_2(s_0d_2as_1d_2bs_0d_2b^{-1}s_1d_2bs_1d_2a^{-1}s_1d_2b^{-1})$

olup; $a, b \in NG_2$ için,

$\partial_3\left(F_{(1)(0)}(a, b)\right) = [\, s_0d_2a, s_1d_2b][s_1d_2b, s_1d_2a][a, b] \in \partial_3(NG_3)$

olduğundan

$w(\delta q_2 a) \otimes (\delta q_2 b) \equiv q_2[b, a] mod \partial_3(NG_3)$

$= [q_2b, q_2a]$

bulunur.

Sonuç olarak

$$C \otimes C \xrightarrow{w} {}^{NG_2/\partial_3(NG_3)}\Big/_{P_3{}'} \longrightarrow {}^{NG_1}/_{P_3} \longrightarrow NG_0$$

şeklinde bir kuadratik modül oluşturmuş oluruz.

Önerme 5.1. ***G*** bir simplisel grup, ***G*** nin sınıflandırılmış uzayının homotopi grupları π_i ve ***G*** nin birleşmiş kuadratik modülünün homotopi grupları $\pi_i{}'$ olmak üzere $i = 0, 1, 2, 3$ için $\pi_i \cong \pi_i'$ sağlanır.

İspat: ***G*** bir simplisel grup olmak üzere ***G*** nin Moore kompleksinin homolojisi ile ***G*** nin homotopi grupları arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

$$\pi_n(\boldsymbol{G}) \cong H_n(\boldsymbol{NG}) \cong \frac{Ker\ d_{n-1}^{n-1} \cap NG_{n-1}}{d_n^n(NG_n)}$$

Böylece ***G*** nin homotopi grupları $\pi_n(\boldsymbol{G}) = \pi_n$

$$\pi_n = \begin{cases} NG_0/d_1(NG_1) & n = 1, \\ \dfrac{Ker\ d_1 \cap NG_1}{d_2(NG_2)} & n = 2, \\ \dfrac{Ker\ d_2 \cap NG_2}{d_3(NG_3)} & n = 3, \\ 0 & n = 0\ veya\ n > 3 \end{cases}$$

dir. ***G*** nin birleşmiş kuadratik modülünün homotopi grupları $\pi_i{}'$ aşağıdaki gibidir.

$$\pi_n' = \begin{cases} NG_0/\partial(M) & n = 1, \\ Ker\ \partial/Im\ \delta & n = 2, \\ Ker\ \delta & n = 3, \\ 0 & n = 0\ veya\ n > 3. \end{cases}$$

$n = 1, 2, 3,$ için $\pi_i \cong \pi_i'$ olduğunu iddia ediyoruz. Böylece $M = NG_1/P_3(\partial_1)$ ve $d_1\big(P_3(\partial_1)\big) = 1$ den

$$\partial(M) = \partial(NG_1/P_3(\partial_1)) = d_1(NG_1)$$

ve

$$\pi_1' = NG_0/\partial(M) \cong NG_0/d_1(NG_1) = \pi_1$$

denklemlerini elde ederiz.

$$Ker\ \partial = \frac{Ker\ d_1 \cap NG_1}{P_3(\partial_1)}$$

ve

$Im\ \delta = d_2(NG_2)/P_3(\partial_1)$

ikilisinden aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\pi_2' = \frac{Ker\ \partial}{Im\ \delta} = \frac{Ker\ d_1 \cap NG_1/P_3(\partial_1)}{d_2(NG_2)/P_3(\partial_1)} \cong \frac{Ker\ d_1 \cap NG_1}{d_2(NG_2)} = \pi_2$$

$P_3'(\partial_1)$ aşağıdaki ikiliden oluştuğunu biliyoruz.

$s_0(\langle x,y\rangle)s_1 z s_0(\langle x,y\rangle)^{-1}s_1(\langle x,y\rangle)s_1 z^{-1}s_1(\langle x,y\rangle)^{-1}$

ve

$s_0 x s_1(\langle y,z\rangle)s_0 x^{-1}s_1 x s_1(\langle y,z\rangle)^{-1}s_1 x^{-1}$.

Böylece

$d_2(s_0(\langle x,y\rangle)s_1 z s_0(\langle x,y\rangle)^{-1}s_1(\langle x,y\rangle)s_1 z^{-1}s_1(\langle x,y\rangle)^{-1})$

$= {}^{d_1\langle x,y\rangle}z\langle x,y\rangle(z^{-1})\langle x,y\rangle^{-1}$

$= \langle\langle x,y\rangle,z\rangle \in P_3(\partial_1)$

ve

$d_2(s_0 x s_1(\langle y,z\rangle)s_0 x^{-1}s_1 x s_1(\langle y,z\rangle)^{-1}s_1 x^{-1})$

$= s_0 d_1 x\langle y,z\rangle s_0 d_1 x^{-1}(x)\langle y,z\rangle^{-1}x^{-1}$

$= {}^{d_1 x}\langle y,z\rangle x\langle y,z\rangle^{-1}x^{-1}$

$= \langle x,\langle y,z\rangle\rangle \in P_3(\partial_1)$

den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$d_2\big(P_3'(\partial_1)\big) = P_3(\partial_1)$

5.1 Sonuçlar

Bu çalışmada aşağıdaki diyagram oluşturulmuştur.

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Simp\ Grp} \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[d] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
X_2\ \mathrm{Mod} \arrow[r] & \mathrm{QM} & \mathrm{Crs}^2 \arrow[l] \arrow[ll, bend left]
\end{tikzcd}$$

Sonuç 1: Herhangi bir

$$\mu = \left(\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda^1"'] & M \arrow[d, "\mu"] \\
N \arrow[r, "\nu"'] & P
\end{tikzcd} \right)$$

çaprazlanmış karesinin

$$\big((L \rtimes N) \rtimes (M \rtimes P), s, t, s', t'\big)$$

şeklinde bir cat^2-gruba denk olduğunu kullanarak, bu cat^2-grupla ilişkili aşağıdaki diyagramı oluşturduk.

$$\begin{tikzcd}
(L \rtimes N) \rtimes (M \rtimes P) \arrow[r, shift left, "s'"] \arrow[r, shift right, "t'"'] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & M \rtimes P \arrow[d, shift right, "s_M"'] \arrow[d, shift left, "t_M"] \\
N \rtimes P \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right, "s_N\,,\ t_N"'] & P
\end{tikzcd}$$

Burada,

$s_N(n,p) = p$,

$t_N(n,p) = \nu(n)p$,

$s_M(m,p) = p$,

$t_m(m,p) = \mu(m)p$,

$s(l,n,m,p) = (n,p),$

$s'\big(l,n,(m,p)\big) \;= (m,p),$

$t(l,n,m,p) = (\lambda'(l)n, v(n)p),$

$t'(l,n,m,p) = \big(\lambda l^{v(n)}m, \mu(m)p\;\big)$

şeklinde tanımlıdır. Yukarıdaki diyagramdan Nerve funktorunu kullanarak;

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] & (L^N)\rtimes((L^N)\rtimes(M^P)) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] & M\rtimes(M\rtimes P) \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] \\
((L^L\rtimes N)\rtimes((M^M)\rtimes P) \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & (L^N)\rtimes(M^P) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & M\rtimes P \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
N\rtimes(N\rtimes P) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & (N\rtimes P) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & P
\end{tikzcd}$$

bisimplisel grubunu elde ettik. Burada

$d_0^v(m,p) = \mu(m)p,$

$d_0^h(m,p) = p\;,$

$d_0^h(n,p) = v(n)p,$

$d_1^h(n,p) = p$

şeklinde tanımlıdırlar. Bu bisimplisel gruba Artin-Mazur Kodiagonal funktorunu uygulayarak;

$G_0 = P,\; G_1 = (M \rtimes P) \times (N \rtimes P)$ öyleki,

$(m,p,n,p') \in G_1 \Longrightarrow d_0^v(m,p) = d_1^h(n,p')$

yani $p' = \mu(m)p$ olmak üzere

$$\nabla_1 = \{(m,p,n,\mu(m)p):\;\; m \in M, \qquad p \in P, \qquad n \in N\} \cong N \rtimes (M \rtimes P)$$

olduğunu ve

$$\nabla_2 \subset G_2 = \big(M \rtimes (M \rtimes P)\big) \times \big((L \rtimes N) \rtimes (M \rtimes P)\big) \times \big(N \rtimes (N \rtimes P)\big)$$

$\Longrightarrow \big((m_1, m_2, p), (l, n_1, m, p'), (n_2, n_3, p'')\big) \in G_2$ ise;

$d_0^v(m_1, m_2, p) = d_1^h(l, n_1, m, p')$ ve

$d_0^v(l, n_1, m, p') = d_1^h(n_2, n_3, p'')$

olmak şartıyla;

$$\nabla_2 \cong \big(L \rtimes (N \rtimes M)\big) \times \big(N \rtimes (M \rtimes P)\big)$$

olduğunu gösterek $d_0^2,\ d_1^2,\ d_2^2$ homomorfizmlerini tanımlayarak

$$G^{(2)}\ :\quad L \rtimes (N \rtimes M) \rtimes N \rtimes (M \rtimes P) \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow\\ \longleftarrow}\; N \rtimes (M \rtimes P) \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow}\; P$$

2-truncated simplisel grubunu oluşturduk. Bu 2-truncated simplisel grubu $G^{(2)}$ nin Moore kompleksi için

$$N(G^2)_0 = P, \qquad N(G^2)_1 \cong M \rtimes N, \qquad N(G^2)_2 \cong L$$

olduğunu ve $\partial_2 = (\lambda^{-1}, \lambda'),\ \partial_1 = \mu v$ olmak üzere

$$L \xrightarrow{\ \partial_2\ } M \rtimes N \xrightarrow{\ \partial_1\ } P$$

cone kompleksinin görüntüsünü tanımladık.

Sonuç 2: $F_{\alpha,\beta}$ ları kullanarak [7] den $\boldsymbol{Simp\ Grp} \longrightarrow \boldsymbol{QM}$ funktorunu oluşturduk.

Sonuç 3: $\boldsymbol{X_2\ Mod} \longrightarrow \boldsymbol{QM}$ funktorunu [7] verip homotopi modüllerinin izomorf olduğunu gösterdik.

6. BRAİDED REGÜLER ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

$\boldsymbol{C}$ small kategori olmak üzere, $\boldsymbol{C}$ deki her morfizm bir izomorfizm ise $\boldsymbol{C}$ ye grupoid denir. Bir $\boldsymbol{C}$ grupoidi (C_1, C_0) ile gösterilir. Burada C_1, morfizmlerin kümesi, C_0 ise objelerin kümesidir.

$$s, t : C_1 \longrightarrow C_0$$

ve

$$c : C_0 \longrightarrow C_1$$

şeklinde morfizmler vardır. $sc = tc = 1$ dir. $a, b \in C_1$ için $t(a) = s(b)$ ise $a \circ b$ kompozisyonu vardır. Öyleki $s(a \circ b) = s(a)$ve $t(a \circ b) = t(b)$ dir. Her bir $a \in C_1$ için $a^{-1} \in C_1$ vardır ve $s(a^{-1}) = t(a)$ ve $t(a^{-1}) = s(a)$ olup $a \circ a^{-1} = c_{s(a)}$ ve $a^{-1} \circ a = c_{t(a)}$ dır.

$\boldsymbol{C} = (C_1, C_0)$ şeklindeki bir grupoid için $p, q \in C_0$ olduğunda $C_1(p, q)$ hom-set olarak adlandırılır ve

$$C_1(p, q) = \{a \in C_1 : \ s(a) = p \ ve \ t(a) = q\}$$

ile tanımlıdır.

Eğer her p, q için $C_1(p, q)$ boş ise yani denk olarak $s = t$ ise $\boldsymbol{C}$ ye total disconnected grupoid adı verilir. Bir (C_1, C_0) grupoidi için $C_1(p) = C_1(p, p)$ bir gruptur.

Tanım 6.1. C_1 ve C_2 aynı obje kümesi üzerinde iki grupoid olsun. Yani (C_1, C_0) ve (C_2, C_1) iki grupoid ve (C_2, C_0) total disconnected grupoid olsun. C_1 in C_2 üzerindeki etkisi

$$C_1 \times C_2 \longrightarrow C_2$$

$$(a, x) \longmapsto x^a$$

ile tanımlı bir fonksiyon olup; aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. x^a nın tanımlı olması için $t(x) = s(a)$ ve buradan $t(x^a) = t(a)$ dır.
2. $x, y \in C_2(p)$ ve $a \in C_1(p, q)$ olmak üzere;

$$(x \circ y)^a = x^a \circ y^a, \qquad {e_p}^a = e_q$$

olur.

3. $a \in C_1(p, q)$ ve $b \in C_1(q, r)$ ve $x \in C_2(p)$ olmak üzere

$$x^{a \circ b} = (x^a)^b, \qquad x^{e_p} = x$$

dir.

Tanım 6.2. C_1 ve C_2, C_0 obje kümesi üzerinde birer grupoid, C_2 total disconnected ve C_1 in C_2 üzerine grupoid etkisi var olsun. $\delta : C_2 \longrightarrow C_1$ bir funktor ve C_0 üzerinde özdeşlik olsun. Yani

$$\begin{tikzcd} C_2 \arrow[r, "\delta"] & C_1 \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & C_0 \arrow[l, bend left, "e"] \end{tikzcd}$$

olsun. C_2, C_0 üzerinde total disconnected olmak üzere

CM1) $\delta(x^a) = a \circ \delta(x) \circ a^{-1}$

CM2) $x^{\delta y} = y \circ x \circ y^{-1}$

$x, y \in C_2(p)$ ve $a \in C_1(p, q)$ özellikleri sağlanıyorsa δ ya grupoidler üzerinde çaprazlanmış modül denir.

Tanım 6.3. U bir monoid ve

$$\begin{tikzcd} C : C_2 \arrow[r, "\delta"] & C_1 \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & C_0 \end{tikzcd}$$

bir çaprazlanmış modül olsun. $i = 0, 1, 2$ için

$$\begin{array}{ll} U \times C_i \longrightarrow C_i, & C_i \times U \longrightarrow C_i \\ (u, c) \longmapsto u.c & (c, u) \longmapsto c.u \end{array}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonları için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, U nun $\boldsymbol{C}$ çaprazlanmış modülü üzerinde bir etkisi vardır denir.

BA1) Her $i = 0, 1, 2$ için $U \times C_i \longrightarrow C_i$ U nun C_i ler üzerindeki sol etkisi ve $C_i \times U \longrightarrow C_i$ fonksiyonları U nun C_i ler üzerindeki sağ etkisini belirler.

BA2) U nun C_i ler üzerindeki sol ve sağ etkileri C_i lerin grupoid yapısını korur. Özellikle $s, t: C_1 \longrightarrow C_0$, dönüşümleri her etkiye göre U-equiverianttır. Yani

$s(u, c_1) = u.s(c_1) \in C_0$,

$t(u, c_1) = u.t(c_1) \in C_0$

dır.

BA3) U nun her etkisi C_2 üzerindeki grup işlemini korur. Yani, $x \in C_2(p)$ ve $u \in U$ için $u.x \in C_2(u.p)$ ve $x.u \in C_2(p.u)$ olur.

BA4) U nun etkisinin, C_1 in C_2 üzerindeki etkisiyle uyumludur. Yani,

$x \in C_2(p)$ ve $a \in C_1(p,q)$ ve $u \in U$ olmak üzere

$$u.(x^a) = (u.x)^{u.a} \in C_2(u.q)$$
$$(x^a.u) = (x.u)^{a.u} \in C_2(q.u)$$

olur.

BA5) $\delta: C_2 \longrightarrow C_1$ morfizmi U -equivarienttir. Yani

$$\delta(u.c_2) = u.\delta(c_2)$$
$$\delta(c_2.u) = \delta(c_2).u$$

dur.

$$\delta: \ C_2 \longrightarrow C_1 \rightrightarrows C_0$$

grupoid üzerinde bir çaprazlanmış modül ve C_0 bir monoid ve C_0 ın δ üzerine bir bietkisi varsa δ ya semi-regular çaprazlanmış modül denir. Eğer δ bir semi-regular çaprazlanmış modül ve C_0 bir grup ise δ ya regular çaprazlanmış modül adı verilir.

Tanım 6.4.

$$C: \ C_2 \xrightarrow{\delta} C_1 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} C_0$$

Grupoid üzerinde regular çaprazlanmış modül olsun. Eğer

$\{-,-\}: C_1 \times C_1 \longrightarrow C_2$

Aşağıdaki özellikleri sağlayan ve braiding dönüşümü olarak adlandırılan bir fonksiyon varsa $\boldsymbol{C}$ ye $\{-,-\}$ ile birlikte braided regular çaprazlanmış modül denir.

B1. $\{a,b\} \in C_2(ta\ tb)$, $\{1_e,b\} = 1_{tb}$, $\{a,1_e\} = 1_{ta}$, $1_e \in C_1(e)$ birim morfizm ve $e \in C_0$ ise C_0 grubunun birimidir.

B2. $\{a, b \circ b^1\} = \{a,b\}^{t(a).b^1} \circ \{a^1, b\}$

B3. $\{a \circ a^1, b\} = \{a^1, b\} \circ \{a,b\}^{a^1.t(b)}$

B4. $\delta\{a,b\} = (t(a).b)^{-1} \circ \left(a^{-1}.s(b)\right) \circ (s(a).b) \circ \left(a.t(b)\right)$

B5. $\{a,\delta y\} = (t(a).y)^{-1} \circ (s(a).y)^{a.q}\ eğer\ y \in C_2(q)$ ise

B6. $\{\delta x,b\} = (x.s(b)^{p.b})^{-1} \circ \left(x.t(b)\right)\ eğer\ x \in C_2(p)$ ise

B7. $p.\{a,b\} = \{p.a,b\},\ \{a,b\}.p = \{a,p.b\},\ \{a.p,b\} = \{a,p.b\}$ dir.

6.1 Braided Regüler Çaprazlanmış Modüllerden Çaprazlanmış Karelere

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda^1"'] & M \arrow[d, "\mu"] \\ N \arrow[r, "\nu"'] & P \end{tikzcd}$$

bir çaprazlanmış kare olsun. Bu çaprazlanmış kareden

$$L \xrightarrow{(\lambda^{-1},\lambda')} M \rtimes N \xrightarrow{\mu\nu} P$$

şeklinde bir 2-çaprazlanmış modül olduğunu biliyoruz.

[8] de bu çaprazlanmış kareden; bir cat^2-grup göz önüne alıp bu cat^2-gruptan bir bisimplisel grup ve bu bisimplisel yapıdan Artin-Mazur kodiyagonal funktoru kullanarak;

$$G^{(2)} :\quad L \rtimes (N \rtimes M) \rtimes N \rtimes (M \rtimes P) \; \substack{\longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow} \; N \rtimes (M \rtimes P) \; \substack{\longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow} \; P$$

şeklinde bir 2-truncated simplisel yapı elde etmiştir. Bu $G^{(2)}$ nin Moore kompleksinden

$$L \xrightarrow{(\lambda^{-1},\lambda')} M \rtimes N \xrightarrow{\mu\nu} P$$

çaprazlanmış karenin mapping cone kompleksine izomorf olduğunu gösterdik. Şimdi bu mapping cone kompleksten bir braided regular çaprazlanmış modülü elde edelim.

$C_0 = P = G^{(2)}$ olsun. P nin $M \rtimes N$ üzerindeki etkisini kullanarak

$C_1 = (M \rtimes N) \rtimes P \cong N{G_1}^{(2)} \rtimes s_0(G_0^{(2)}$

yi tanımlayalım.

$s(m,n,p) = \mu(m)\nu(n)p$

ve

$$t(m,n,p) = p$$

olsun. C_1 deki grupoid işlemi

$$\mu(m')\nu(n')p' = p$$

olmak üzere;

$$(m,n,p) \circ (m',n',p') = \left(m^{\nu(n)}m', nn', p'\right)$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan;

$$t(m,n,p) \circ (m',n',p') = t\left(m^{\nu(n)}m', nn', p'\right) = p' = t(m',n',p')$$

ve

$$s\left(m^{\nu(n)}m', nn', p'\right) = \mu\left(m^{\nu(n)}m'\right)\nu(n)\nu(n')p'$$

$$= \mu(m)\nu(n)\mu(m')\nu(n)^{-1}\nu(n)\nu(n')p'$$

$$= \mu(m)\nu(n)\,\underbrace{\mu(m')\nu(n')p'}_{p}$$

$$= \mu(m)\nu(n)p$$

$$= s(m,n,p)$$

olur. Böylece

$$\begin{tikzcd} (M \rtimes N) \rtimes P \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & P \arrow[l, bend left=50, "e"] \end{tikzcd}$$

şeklinde bir grupoid yapısı elde ederiz. C_0 ın C_1 üzerindeki bietkisi;

$$p.(m,n,q) = \left({}^{p}m, {}^{p}n, pq\right)$$

$$(m,n,q).p = (m,n,qp)$$

ile verilir. Diğer yandan

$$C_2 = L \rtimes P \cong NG_2^{(2)} \rtimes s_0 s_0\left(NG_2^{(2)}\right)$$

olsun. C_2 deki grupoid işlemi

$$(l,p) \circ (l',p) = (ll',p)$$

ile verilsin. C_0 ın C_2 üzerindeki bietkisi

$$p.(l,q) = \left({}^{p}l, pq \right)$$

$$(l,q).p = (l, qp)$$

ile tanımlanabilir. Böylece regüler bir çaprazlanmış modül elde ederiz.

$$C_2 \xrightarrow{\delta} C_1 \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} C_0$$

Yani

$$C: \ L \rtimes P \xrightarrow{\delta^1} (M \rtimes N) \rtimes P \rightrightarrows P$$

olup;

$$\delta'(l,p) = (\lambda^{-1}(l), \lambda'(l), p)$$

ile tanımlanır. Bu yapıdaki braiding dönüşümü ise;

$$\{(m,n,p),(m',n',p')\} = (h\left({}^{v(n^{-1})}m^{-1}, n^{-1}({}^{p}m')n), pp' \right)$$

ile tanımlıdır. Böylece

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\lambda^1"'] & M \arrow[d, "\mu"] \\ N \arrow[r, "\nu"'] & P \end{tikzcd}$$

şeklinde verilen bir çaprazlanmış kareye karşılık gelen braided regüler çaprazlanmış mödül

$$C: \ L \rtimes P \xrightarrow{\delta^1} (M \rtimes N) \rtimes P \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} P$$

şeklinde olur.

Tersine

$$C_2 \xrightarrow{\delta} C_1 \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} C_0$$

Bir braided regüler çaprazlanmış modül olsun. Buradan elde edilen 2-truncated simplisel grubu

$$G' = (C_2(e) \times M) \times (M \times C_0) \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; M \times C_0 \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow}\; C_0$$

olduğunu gösterdik. G' nün Moore kompleksinin boyunun ≤ 2 olduğunu ispatladık. Şimdi bu G' simplisel grubunun Moore kompleksini inceleyelim.

$G_0 = NG_0$ dır. $G_1 = M \rtimes C_0$ ve $d_0^1(M,p) = p$ olup;

$(m,p) \in Ker\ d_0^1 \Leftrightarrow p = \{1\}$

olmalıdır. Yani

$Ker\ d_0^1 = NG_1' \cong M$

olur. Diğer yandan;

$\overline{NG_1} = Ker\ d_1^1 = \{(m,p): p = t(m)^{-1}, m \in M, p \in P\}$

olur. Benzer şekilde d_0^2 ve d_1^2 nin tanımından

$Ker\ d_0^2 \cap Ker\ d_1^2 = NG_2' = C_2(e)$

olduğu görülür. O halde $\boldsymbol{G}$ bir simplisel grup olmak üzere

$\boldsymbol{M}(-,\boldsymbol{2})$: $\boldsymbol{Simp\ Grp} \longrightarrow \boldsymbol{Crs^2}$

funktoru için

$$\begin{tikzcd} NG_2/\partial_3(NG_3) \arrow[r] \arrow[d] & NG_1 \arrow[d] \\ \overline{NG_1} \arrow[r] & G_1 \end{tikzcd}$$

yapısının bir çaprazlanmış kare olduğunu biliyoruz. G' ye $\boldsymbol{M}(-,\boldsymbol{2})$ funktorunu uygularsak;

$\partial_3(NG_3') = 1, \qquad NG_0' = G_0 = C_0, \qquad NG_1' = M, \qquad \overline{NG_1'} = \overline{M}, \qquad NG_2' = C_2(e)$

olup

$$
M(G',2) = \begin{tikzcd}
C_2(e) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta^1"'] & M \arrow[d, "\mu"] \\
\overline{M} \arrow[r, "\mu^1"'] & M \rtimes C_0
\end{tikzcd}
$$

çaprazlanmış karesini elde ederiz.

Böylece aşağıdaki önermeyi ispat etmiş olduk.

Önerme 6.1.1. Braided regüler çaprazlanmış modüller kategorisi ile çaprazlanmış kareler kategorisi denktir.

Böylece 5. bölümde elde ettiğimiz diyagramı aşağıdaki gibi genişletebiliriz.

$$
\begin{tikzcd}
& \mathbf{Simp\ Grp} \le 2 \arrow[dl, "{[8]}"'] \arrow[d, "{[16], [32]}"] \arrow[dr, "{[36]}"] \arrow[drr, "{[7]}"] & & \\
\mathbf{BRCM} \arrow[r, "{[13]}"'] \arrow[rr, leftrightarrow, bend right=40] & \mathbf{X_2\ Mod} \arrow[r, "{[7]}"'] & \mathbf{Crs^2} \arrow[r, "{[7]}"'] & \mathbf{QM}
\end{tikzcd}
$$

Bu diyagramdaki numaralar kaynaklar kısmındaki ilgili yayınları temsil etmektedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] Akça, Z. and Arvasi, Z., 2002, Simplicial and crossed Lie algebras, Homology, Homotopy and Applications, Vol.4 No.1, pp.43-57,.

[2] Anrde, M., 1970, Homologie des algebres commutatives. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenchaften, 206 Springer-Verlag.

[3] Artin, M., and Mazur, B., 1996, On the Van Kampen theorem, Topology, 5, pp.179-189.

[4] Arvasi, Z., and Porter, T., 1997, Higher dimensional Peiffer elements in simplicial commutative algebras, Theory and Applications of Categories, (3)(7), pp.160-181.

[5] Arvası, Z., 1997, Crossed squares and 2-crossed modules of commutative algebras, Theory and Applications of Categories, Vol. 3, No. 7, pp.160-181.

[6] Arvasi, Z., Koçak, M. and Ulualan, E., 2005, Braided crossed modules and reduced simplicial groups, Taiwanese Journal of Mathematics, Vol.9, No.3 pp. 477-488 (September).

[7] Arvasi, Z., and Ulualan, E., 2006, On Algebraic models for homology 3-types, J. Homotopy and Releated Structures, Vol.1 No.1, pp.1-27.

[8] Arvası, Z., and Ulualan, E., 2007, 3-Types of simplicial groups and braided crossed modules, homology, Homotopy and Applications, Vol.9 No.1, pp.139-161.

[9] Arvası, Z., and Porter, T., 1997, Higher dimensional Peiffer elements in simplicial commutative algebras, Theory and Applications of Categories, Vol. 2, No.1, pp.1-23..

[10] Arvası, Z., and Porter, T., 1998, Freeness conditions for 2-crossed module of commutative algebras, Applied Categorical Structure, 6, pp 455-477.

[11] Arvası, Z., and Porter, T., Freeness conditions for crossed squares of commutative algebras, In preparation.

[12] Baues, J., 1991, Combinatorial homotopy and 4- dimensional compleves, Walter de Gruyter, Berlin.

[13] Brown, R., and Gilbert, N.D., 1988, Algebraic models of 3-types and automorphism structures for crossed modules… Proceeding London of Mathematical society 59.

[14] Brown, R., an Loday, J. L., 1987, Van Kampen theorems fo diagram of spaces, Topology, 26, pp.311-335.

[15] Carrasco, P. and Cegarra, A. M., 1991, Group-theoretic Algebraic Models for Homotopy Types, Jour. Pure Applied Algebra, 75, pp.195-235

[16] Conduche, D., 1984, Modules croises generalises de longueur 2, J. Pure and Applied Algebra, 34, pp.155-178.

[17] Conduche, D., 2003, Simplicial crossed modules and mapping cones, Georgian Mathematical Journal, 10, No.4, pp.623-636.

[18] Crans, A. S., 2004, Lie 2-Algebras, Ph.D. Thesis, Macquarie University.

[19] Curtıs, E. B., 1971, Simplicial homotopy theory, Adv. in Math., 6, pp.107-209.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

[20] Duskın, J., 1975, Simplicials methods and the interpretation of triple cohomology, Memoires A.M.S., Vol.3, p.163.

[21] Ellıs, G. J., 1984, Crossed modules and their higher dimensional analogues, Ph.D. Theises, U.C.N.W., Bangor.

[22] Ellıs, G. J., 1988, Higher dimensional crossed modules of algebras, J. Pure and Applied Algebra, 52, pp.277-282.

[23] Ellis, G. J., 1993, Homotopical aspects of Lie algebras, J.Austral. Math. Soc. (Series A), 54, pp.393-419.

[24] Ellıs, G. J., 1993, Crossed squraes and combinatorial homotopy, Math. Z., 214, pp.93-110.

[25] Ellis, G. J. and Steıner, R., 1987, Higher dimensional crossed modules and homotopy groups of (n+1)-ads., J. Pure and Applied Algebra, 46, pp.117-136.

[26] Garzon, A.R. and Miranda, J.G., 1997, Homotopy Theory for (braided) Cat-Groups.Chairs de Topologie Geometrie Differentielle Categoriques Vol. XXXVII-2.

[27] Guın-Wallery, D. and Loday, J. L., 1981, Obstruction al Excision en K-theorie algebrique, Springer Lecture Notes in Math., 854, pp.179-216.

[28] Illusie, L., 1972, Complex cotanget et deformation I, Lectures Notes in Math 239 (1971); II, p.283.

[29] Kan, D. M., 1958, A combinatorial definition of homotopy groups, Annals of Maths. 61, pp.288-312.

[30] Kassel, C. and Loday, J. L., 1982, Extensions centrales d'algebres de Lie, Ann. Ist. Fourier (Grenoble), 33, pp.119-142.

[31] Lavendhomme, R. and Roisin, J. R., 1980, Cohomologie non abelienne de structures algebriques, J. Algebra, 67, no.2, pp.385-414.

[32] Loday, J. L., 1982, Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups, J. Pure and Applied Algebra, 24, pp.179-202.

[33] Mutlu, A. and Porter, T., 1988, Aplications of peiffer pairings in the moore compleks of a simplicial groups, Theory and Aplications of Categories, Vol: 4, No:7, pp. 148-173.

[34] Mutlu, A. and Porter, T., 1998, Freness Condition for 2-Crossed Modules and Compleves, TAC, Vol: 4, No: 8, pp. 174, 194.

[35] Mutlu, A. and Porter, T., Crossed squares and 2-crossed modules, Preprint, (2003).

[36] Porter, T., 1993, n-type of simplicial groups and crossed n-cubes, Topology, 32, No.1, 61, pp.5-24.

[37] Porter, T., 1987, Some Categorical Results in the theory of crossed modules in commutative algebras, Journal of Algebra, 109, pp 415-429.

[38] Ulualan, E., Braiding for Categorical and Crossed Lie Algebras and Simplicial Lie Algebras, Turkish Journal of Mathematics (Yayıma kabul edildi).

[39] Ulualan, E., 2004, Değişmeli cebirler üzerinde kuadratik modüller, Doktora Tezi.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

[40] Ulualan, E., 2004, Reduced quadratic modules and simplicial groups, algebras, Groups and Geometrics, Vol.21, pp.489-502.

[41] Ulualan, E., Relation among algebraic models for homotopy 3- types, Turkish Journal of Mathematics. (Yayıma kabul edildi).

[42] Whıtehead, J. H. C., 1949, Combinatorial homotopy II, bull. Amer. Math. Soc., 55, pp.453- 496.