ADOMİAN AYRIŞTIRMA METODU YARDIMIYLA
LİNEER OLMAYAN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER
İÇİN BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

İsa DEMİRCİ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Ocak - 2010

ADOMIAN AYRIŞTIRMA METODU YARDIMIYLA LİNEER OLMAYAN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

İsa DEMİRCİ

Dumlupınar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Doç. Dr. Elçin YUSUFOĞLU

Ocak – 2010

KABUL ve ONAY SAYFASI

İsa DEMİRCİ'nin YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Adomian Ayrıştırma Metodu yardımıyla Lineer Olmayan Adi Diferansiyel Denklemler için Başlangıç Değer Probleminin Çözümü" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

…./…./2010

Üye : Doç. Dr. Elçin YUSUFOĞLU (Danışman)

Üye : Doç. Dr. Şükrü ŞENTÜRK

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ahmet BOZ

Fen Bilimleri Enstitüsünün Yönetim Kurulu'nun …./…./… gün ve …… sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr.Atalay KÜÇÜKBURSA
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ADOMIAN AYRIŞTIRMA METODU YARDIMIYLA LİNEER OLMAYAN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

İsa DEMİRCİ
Matematik, Yüksek Lisans Tezi, 2009
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Elçin YUSUFOĞLU

ÖZET

Bu çalışmada Adomian ayrıştırma metodu ile Lineer Olmayan Adi Diferansiyel Denklemler için Başlangıç Değer Probleminin yaklaşık çözümleri bulunmuştur.

Adi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için birçok yöntem geliştirilmiştir. Hızla gelişen bilgisayar teknolojisi sayesinde lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik çözüm metodları ile birlikte sayısal çözüm metodları da gelişmiştir. Çalışmada ele alınan Adomian Ayrıştırma Metodu, G. Adomian tarafından 1980'li yıllarda literatüre kazandırılmıştır. Biz Adomian Ayrıştırma Metodu'ndan bahsederken kısaca AAM kısaltmasını kullanacağız. AAM, lineer olmayan denklemlerin çözümünde kullanılan diğer klasik yöntemlere göre daha basit yöntemlerden birisidir. AAM ise Mühendislik problemlerine uygulanmış ve daha güvenli sonuçlar vermektedir. Bilinen Bazı Lineer Olmayan Fonksiyonlar için Adomian Polinomlarının ifadelerinin türetilmesi için Maple-10 programı geliştirilmiştir. Hesaplamalarda Maple-10 programı kullanılmıştır.

Birinci bölümde Temel Tanım ve Teoremlerle birlikte Başlangıç Değer Problemi için Varlık ve Teklik Teoremi ve İspatı verilmiştir. İkinci Bölüm'de; AAM ile ilgili Temel Bilgiler verilmiştir. İkinci Bölüm Birinci Kısım'da; Adomian Polinomlarının türetilmesi verilmiştir. İkinci Bölüm İkinci Kısım'da; Lineer Olmayan Denklemler sistemi için AAM'nin uygulanması verilmiştir. İkinci Bölüm Üçüncü Kısım'da; Lineer Olmayan Adi Diferansiyel Denklemler için AAM'nin uygulanması verilmiştir. İkinci Bölüm Dördüncü Kısım'da; Adi Diferansiyel Denklemler Sistemi için AAM'nin uygulanması verilmiştir. İkinci Bölüm Beşinci Kısım'da; AAM'nin Isı İletimi Problemine uygulaması İkinci Bölüm Altıncı Kısım'da; AAM'nin Dalga Denklemine uygulaması verilmiştir. Sonuç olarak; AAM bize yeteri kadar hassas sonuçlar bulmamızı sağlamıştır.

Anahtar Kelimeler: Adomian Ayrıştırma Metodu, Dalga denklemi, Lineer olmayan, Isı denklemi.

SOLUTION OF INITIAL VALUE PROBLEMS
FOR NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS
BY ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD

İsa DEMİRCİ
Mathematic, M.S. Thesis, 2009
Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Elçin YUSUFOĞLU

ABSTRACT

In this study, the approximate solutions of Initial Value Problems have been found for Nonlinear Ordinary Differential Equations by Adomian Decomposition Method.

The various methods have been developed for the numerical solutions of ordinary differential equations. By help of rapidly developing computer technology, numerical solution methods developed are accompanied with analytic solution methods of linear and nonlinear differential equations. Adomian Decomposition Method was carried out by G.Adomian in 1980s. When we mention about Adomian Decomposition Method, we will use ADM for short. The Adomian Decomposition Method is one of the simple method according to other classical methods for solutions of nonlinear equations.

ADM has been applied to the Engineering problems and gives more confident solutions. Maple-10 programme has been developed for deriving Adomian Polynoms' statements of some known nonlinear functions. Maple-10 programme has been used on calculations.

In Chapter 1, The Existence and Unity Theorem and its Proof for Initial Value Problem with Basic Description and Theorems are given. In chapter 2, basic information about ADM are given. Chapter 2 consists of six parts. In Part 1,it has been mentioned about how to derive Adomian Polynomials.In Part 2, the application of ADM for Nonlinear Differential Equations System has been given. In Part 3, ADM has been applied to Nonlinear Ordinary Differential Equations. In Part 4, the application of ADM for Ordinary Differential Equations System are given. In Part 5, the application of ADM to the Heat Distribution Problem and Part 6; the application of ADM to Wave Equations have been given.Thus, ADM has obtained to find enough sensitive results to the real solution.

Keywords: Adomian Decomposition Method, Heat equations, Nonlinear, Wave equations.

TEŞEKKÜR

Öncelikle tez konusunun seçilmesinde, çalışmanın yürütülmesi, planlaması ve sonuçlandırılması sürecinde her türlü desteği benden esirgemeyen, akademik tecrübesine saygı duyduğum, üstün bilgi ve birikimiyle yol göstererek, çalışmanın başarıyla sonuçlanmasını sağlayan, değerli danışman hocam Doç. Dr. Elçin YUSUFOĞLU'na şükranlarımı sunarım.

Çalışmam süresinde bana yardımını esirgemeyen eşime, dil yazım kurallarını gözden geçiren ve her türlü desteği sağlayan arkadaşım İsmail GÜLCÜ'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İsa DEMİRCİ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

ŞEKİLLER DİZİNİ ix

SİMGELER VE KISALTMALAR x

1. GİRİŞ 1

1.1. Temel Tanım ve Teoremler 1

1.2. Varlık ve Teklik Teoremi ve İspatı 5

1.2.1. İspatın metodu 7

1.2.2. İspat 8

1.3. Çözümlerin Başlangıç Şartları ve f Fonksiyonuna Bağlılığı 14

1.3.1. Başlangıç şartlarına bağlılık 14

1.3.2. f Fonksiyonuna Bağlılık 19

1.4. Sistemler ve Yüksek Mertebeli Denklemler İçin Varlık ve Teklik Teoremleri 22

1.4.1. Genel durum 22

1.4.2. Lineer durum 27

2. ADOMİAN AYRIŞTIRMA METODU İLE İLGİLİ TEMEL BİLGİLER 31

2.1. Adomian Polinomlarının Türetilmesi 32

2.1.1. h=F(y) için Adomian Polinomları 33

2.1.2. $F(y)=y^2$ için Adomian Polinomları 35

2.1.3. $F(y)=y^3$ için Adomian Polinomları 36

2.1.4. $F(y)=y\cdot y_x$ için Adomian Polinomları 37

2.1.5. $F(y)=y^2\cdot y_x$ için Adomian Polinomları 38

2.1.6. $F(y)=\sin(y)$ için Adomian Polinomları 39

2.2. Lineer Olmayan Denklemler Sistemi için AAM’nin Uygulanması 41

2.3. Lineer Olmayan Adi Diferansiyel Denklemlerin AAM ile Çözümü 47

2.4. Adi Diferansiyel Denklem Sistemleri için AAM’nin Uygulanması 55

2.5. AAM’nin Isı İletimi Problemine Uygulaması 61

2.5.1. Homojen sınır şartları altındaki homojen ısı denklemi 61

2.5.2. Homojen olmayan sınır şartları altındaki homojen ısı denklemi 62

2.5.3. Homojen sınır şartları altındaki homojen olmayan ısı denklemi 64

2.5.4. Homojen olmayan sınır şartları altındaki homojen olmayan ısı denklemi 65

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

2.6. AAM’nin Dalga Denklemine Uygulaması 66

2.6.1. Homojen sınır şartları altındaki homojen dalga denklemi 66
2.6.2. Homojen olmayan sınır şartları altındaki homojen dalga denklemi 67
2.6.3. Homojen sınır şartları altındaki homojen olmayan dalga denklemi 68
2.6.4. Homojen olmayan sınır şartları altındaki homojen olmayan dalga denklemi... 69

SONUÇ 71

KAYNAKLAR DİZİNİ 72

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

1.1. $\frac{b}{M} < a$ durumunda $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = \frac{b}{M}$ olur.. 6

1.2. Çözümlerin bağlılığı... 15

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	**Açıklamalar**
$O(x^n)$	n. mertebeye kadar olan Taylor Açılımı
A_n	Adomian Polinomu
L	Diferansiyel Operatörü
L^{-1}	Ters Operatör (İntegral Operatörü)
N	Lineer olmayan terimler
R	Lineer operatörün kalanı

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
AAM	Adomian Ayrıştırma Metodu
Maple-10	Matematikte kullanılan Bilgisayar programı

1. GİRİŞ

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

TANIM 1.1:

Verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşı gelen, her $n > N$ için

$|c_n - c| < \varepsilon$

olacak şekilde bir pozitif N sayısı var ise, reel sayıların bir $\{c_n\}$ dizisi c limitine yakınsar denir. Bunu, $\lim c_n = c$ yazarak gösteririz.

TANIM 1.2:

$\{f_n\}$, her biri $a \leq x \leq b$ reel aralığındaki bütün x'ler için tanımlı reel fonksiyonların bir dizisi olsun. Böyle bir $a \leq x \leq b$ aralığının belirli bir x noktası için $\{f_n(x)\}$ reel sayılarının x'e karşı gelen diziyi göz önüne alalım. $\forall x \in [a, b]$ için $\{f_n(x)\}$ dizisinin yakınsadığını varsayalım ve her $x \in [a, b]$ için $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ olsun. Bu durumda $\{f_n(x)\}$ fonksiyonlar dizisinin $a \leq x \leq b$'da noktasal yakınsadığını ve böyle tanımlı f fonksiyonunun $\{f_n(x)\}$ dizisinin limit fonksiyonu olduğunu söyleriz.

TANIM 1.3:

$\{f_n\}$, her biri $a \leq x \leq b$ reel aralığında tanımlı olan reel fonksiyonların dizisi olsun. Eğer verilen herhangi $\varepsilon > 0$ olmak üzere $\forall x \in [a,b]$ ve $\forall n > N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ için

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde tek bir $\tilde{N} \in N$ bulunabiliyorsa $\{f_n\}$ dizisi $a \leq x \leq b$ reel aralığında f'ye noktasal yakınsar denir.

Şimdi genelde sadece ε 'a değil x 'e de bağlı olan bu durum için N sayısını dikkatlice gözleyelim. Verilen bir ε için farklı N(x) sayıları genelde farklı x noktalarını gerektirir. Ancak, $\varepsilon > 0$ verilir ve $\forall x \in [a,b]$ ve $\forall n > N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ için

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

olacak şekilde tek bir $\tilde{N}$ sayısı varsa bu durumda $a \leq x \leq b$'de yakınsama düzgündür deriz. $\{f_n\}$ dizisi f'ye düzgün yakınsar deriz.

TANIM 1.4:

$\{f_n\}$, her biri $a \leq x \leq b$ reel aralığında tanımlı olan reel fonksiyonların dizisi olsun. herhangi $\varepsilon > 0$ verilsin. $\forall n > N \in \mathbb{N}$ (sadece ε 'a bağlı) ve $\forall x \in [a,b]$ için

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde tek bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{f_n\}$ dizisi f'ye düzgün yakınsar denir.

TEOREM 1.1:

Aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım.

1. $\{f_n\}$ $a \leq x \leq b$ aralığında f 'ye düzgün yakınsayan fonksiyonların dizisi olsun.
2. Her bir f_n fonksiyonu $a \leq x \leq b$ aralığında sürekli olsun.

Bu durumda f limit fonksiyonu $a \leq x \leq b$ aralığında süreklidir.

TEOREM 1.2:

Aşağıdaki şartlar sağlanmış olsun.

1) $\{f_n\}$, $a \leq x \leq b$ aralığında f 'ye düzgün yakınsayan fonksiyonların dizisi olsun.

2) Her bir f_n fonksiyonu $a \leq x \leq b$ aralığında sürekli olsun.

Bu durumda $a \leq \alpha < \beta \leq b$ şeklindeki her α, β için

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta f_n(x)dx = \int_\alpha^\beta \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$ olmaktadır.

TANIM 1.5:

Her biri $a \leq x \leq b$ reel aralığında tanımlı u_n , (n = 1,2,...) reel fonksiyonların $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ sonsuz serisini göz önüne alalım. Bu serinin kısmi toplamlar dizisi denen aşağıdaki biçimde tanımlı

$f_1 = u_1$

$f_2 = u_1 + u_2$

$f_3 = u_1 + u_2 + u_3$

…

$f_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

…

f_n dizisini göz önüne alalım. $\{f_n\}$ kısmi toplamlar dizisi $a \leq x \leq b$'de f'ye düzgün yakınsarsa $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sonsuz serisi $a \leq x \leq b$'de f'ye düzgün yakınsar deriz.

TEOREM 1.3: (Weierstrass M-testi)

Aşağıdaki koşullar sağlanmış olsun,

1. $\{M_n\}$, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ sabit serisi yakınsak olacak şekilde pozitif sabitlerin bir dizisi olsun.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, her $a \leq x \leq b$ için ve her $(n = 1, 2,...)$ için $|u_n| \leq M_n$ olacak şekilde reel fonksiyonların bir serisi olsun.

Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ serisi $a \leq x \leq b$'de düzgün yakınsar.

TANIM 1.6: (İki Reel Değişkenli Fonksiyonlar; Lipschitz Şartı)

1. A'nın herhangi iki noktası tamamen A'nın içinde olan sürekli eğriyle birleştirilebilirse xy düzlemindeki A noktalarının kümesine bağlantılıdır denir.

2. A'nın her noktası, içi tamamen A'nın içinde olan bir çemberin merkezi ise xy düzlemindeki A noktalarının kümesine açık küme denir.

3. xy düzleminde açık bağlantılı kümeye bir bölge (domain) denir.

4. Bir P noktasına, bu noktayı içine alan her çember hem D bölgesinden hem de bölge dışından noktalar içeriyorsa D bölgesinin sınır noktası denir.

5. Sınır noktaları eklenmiş bir bölgeye kapalı bölge denir.

TANIM 1.7:

f, xy düzleminin bir D bölgesinde tanımlı bir reel fonksiyon ve (x_0,y_0), D'nin bir iç noktası olsun, $\varepsilon > 0$ isteksel sayısı verilsin.

$|x - x_0| < \delta$ ve $|y - y_0| < \delta$

olacak şekilde $\forall(x, y) \in D$ için $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$

olmak üzere ε'a, mukabil bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna (x_0, y_0)'da süreklidir denir.

TANIM 1.8:

D, xy düzleminin ya bir bölgesi veya kapalı bir bölgesi olacak şekilde f D'de tanımlı bir reel fonksiyon olsun. $\forall (x, y) \in D$ için $|f(x, y)| \leq M$ olacak şekilde bir pozitif M sayısı varsa f, D bölgesinde sınırlıdır denir.

TEOREM 1.4:

Eğer f ,

$R = \{(x, y) : a \leq y \leq b \text{ ve } c \leq y \leq d\}$

kapalı dikdörtgensel bölgede tanımlı ve sürekli ise, bu durumda f fonksiyonu R bölgesinde sınırlıdır.

TANIM 1.9:

f ; D, xy düzleminin kapalı bir bölgesi olacak şekilde D'de tanımlı olsun. $\forall (x, y_1)$ ve (x, y_2) $\in$ D için

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k|y_1 - y_2| \tag{1.1}$$

olacak şekilde bir k > 0 sabiti mevcutsa f fonksiyonu D'de (y'ye göre) Lipschitz şartını sağlar denir.

Lipschitz şartının geometrik anlamım araştıralım. (x, y_1) ve (x, y_2), D'de aynı apsisli herhangi iki nokta olsun, $z = f(x, y)$ yüzeyinde karşı gelen

$P_1[x, y_1, f(x, y_1)]$ ve $P_2[x, y_2, f(x, y_2)]$

noktalarını, göz önüne alalım ve

$(0 \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2})$ xy düzlemiyle

P_1 ve P_2 noktalarını birleştiren kirişin yaptığı açıyı göstersin. Bu durumda D'de (1.1) şartı elde edilirse $\tan\alpha$ mutlak değerle sınırlanır ve böylece P_1 ve P_2 noktalanın birleştiren kiriş xy düzlemine dik olmaktan uzak olarak sınırlanır. Ayrıca bu sınır $\forall (x, y_1)$ ve (x, y_2) $\in$ D için x 'den bağımsızdır.

f fonksiyonu D'de (1.1) şartını sağlarsa bu durumda x'in her değeri için y'nin sürekli fonksiyonudur. Ancak, (1.1) şartının x 'e göre f'nin sürekliliği ile ilgili hiç bir şartı sağlamadığım not edelim. Örneğin $[x]$ x 'den küçük veya eşit tamsayıyı göstermek üzere

$f(x,y) = y + [x]$

ile tanımlı f fonksiyonu herhangi sınırlı D bölgesinde Lipschitz şartını sağlar. Her bir sabit x için, y'nin sonuç fonksiyonu süreklidir. Bununla beraber bu f fonksiyonu x 'in tam değerleri için x 'e göre süreksizdir.

Şimdi f fonksiyonunun $\frac{\partial f}{\partial x}$ türevinin mevcut ve $(x,y)\in D$ için sınırlı olduğunu varsayalım. Bu durumda herhangi (x,y_1) ve $(x,y_2)\in D$ için diferansiyel hesabın ortalama değer teoremiyle

$$f(x,y_1)-f(x,y_2)=(y_1-y_2)\frac{\partial f(x,\zeta)}{\partial y}$$

olmak üzere $y_1<\zeta<y_2$ olan ζ sayısı mevcuttur Böylece $(x,\zeta)\in D$ olduğundan.

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|=\left|y_1-y_2\right|\left|\frac{\partial f(x,\zeta)}{\partial y}\right|\le \sup_{(x,y)\in D}\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|\left|y_1-y_2\right| \text{ dir.}$$

1.2 Varlık ve Teklik Teoremi ve İspatı

TEOREM 1.5: [1]

1. D, xy düzleminin bir bölgesi ve f aşağıdaki iki şartı sağlayan bir reel fonksiyon olsun;

(i) f, D'de sürekli,

(ii) f, D 'de (y'ye göre) Lipschitz şartını sağlıyor; yani, $\forall(x, y_1)$ $(x, y_2)\in D$ için

$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|\le k\left|y_1-y_2\right|$ olacak şekilde bir $k > 0$ sabiti mevcuttur.

2. (x_0,y_0), D'nin bir iç noktası; a ve b sabitleri,

R= $\{(x, y) : \left|x-x_0\right| \le a, \left|y-y_0\right| \le b\}$

dikdörtgeni D'de olacak şekilde; $(x,y)\in R$ için $M = \max\left|f(x,y)\right|$ ve $h = \min\left(a,\frac{b}{M}\right)$ olsun.

Bu durumda $\left|x-x_0\right|\le h$ aralığında

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),$$

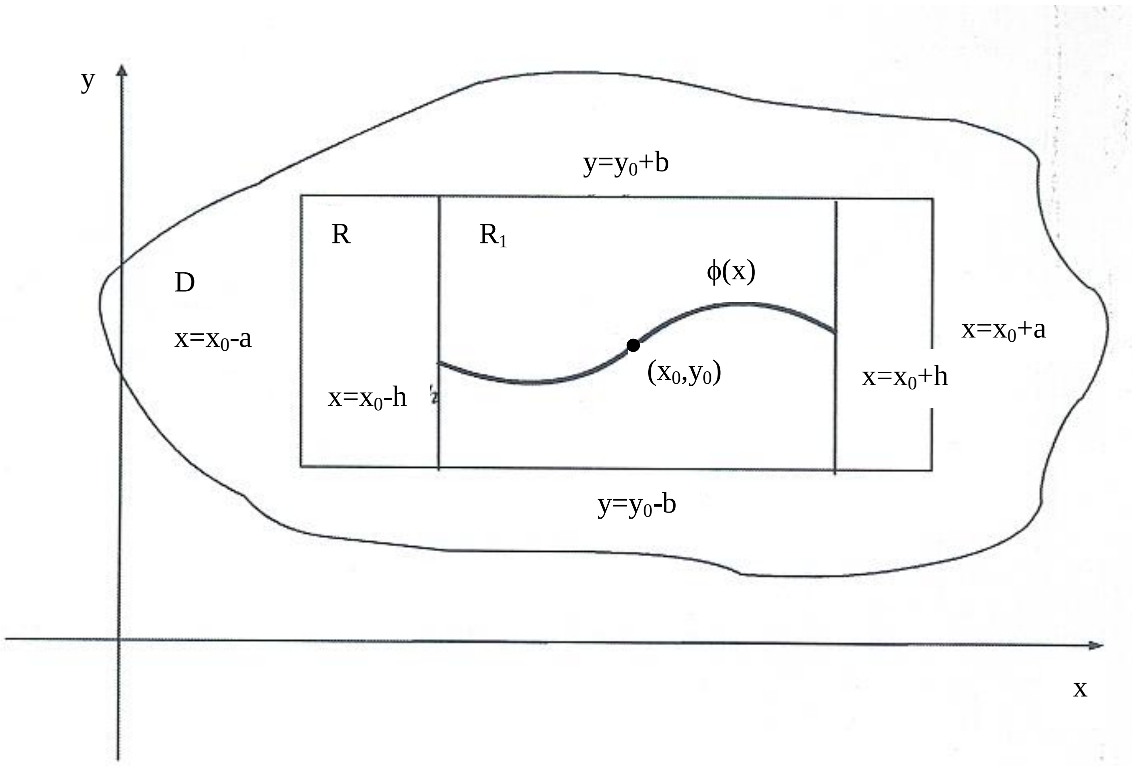
$$y(x_0)=y_0$$

başlangıç-değer probleminin bir tek ϕ çözümü vardır. Yani

(i) $\left|x-x_0\right|\le h$ aralığındaki her x için $\frac{d\phi(x)}{dx}=f(x,\phi(x))$,

(ii) $\phi(x_0)=x_0$ olacak biçimde $\left|x-x_0\right|\le h$ aralığında tanımlı bir tek diferansiyellenebilir reel ϕ fonksiyonu mevcuttur.

R, D'nin içinde olduğundan, f, R'de (i) ve (ii) şartlarını sağlar. f kapalı R dikdörtgensel bölgede sürekli olduğundan M sabiti mevcuttur, $a<|x-x_0|\leq h$ ise, bu halde $h=a$ ve ϕ çözümü, R bölgesinin tanımında kullanılan $|x-x_0|\leq a$ aralığındaki her x için tanımlıdır. Ancak $\frac{b}{M}<a$ ise, bu durumda $h=\frac{b}{M}<a$ olur ve böylece ϕ çözümü, sadece $|x-x_0|\leq h<a$, $|y-y_0|\leq b$ ile tanımlı daha küçük R dikdörtgeni ile birlikte daha küçük $|x-x_0|\leq h<a$ aralığındaki her x için değer alır. (Şekil 1.1).



Şekil 1.1 $\frac{b}{M}<a$ durumunda $h=\min(a, \frac{b}{M})=\frac{b}{M}$ olur.

1.2.1 İspatın metodu

Bu Teoremi ardışık yaklaşımlar metoduyla ispat edeceğiz. x , $|x-x_0| \le h$ aralığında olsun. Aşağıdaki gibi

$$\phi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left[t, y_0\right] dt \,,$$

$$\phi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left[t, \phi_1(t)\right] dt$$

$$\phi_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left[t, \phi_2(t)\right] dt$$

$$\ldots$$

$$\phi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left[t, \phi_{n-1}(t)\right] dt \tag{1.2}$$

ardışık yaklaşımlar (Picard ardışıkları) denen

$$\phi_1 ,\ \phi_2 ,\ \phi_3 ,\ldots, \phi_n ,\ldots$$

fonksiyonların bir dizisini tanımlayalım. İspatı aşağıda göstereceğimiz beş ana adıma böleceğiz.

1- (1.2) ile tanımlı $\{\phi_n(x)\}$ fonksiyonları mevcut ve sürekli türevlere sahip olup ayrıca da $|x-x_0| \le h$ aralığında $|\phi_n(x) - y_0| \le b$ eşitsizliğini sağlar; bu yüzden $f\ \left[x, \phi(x)\right]$ bu aralıkta tanımlıdır.

2- $\{\phi_n\}$ fonksiyonları $|x-x_0| \le h$ aralığında

$$|\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)| \le \frac{M}{k}\frac{(kh)^n}{n!}$$

eşitsizliğini sağlar.

3- $n \to \infty$ iken, $\{\phi_n\}$ fonksiyonları dizisi $|x-x_0| \le h$ aralığında sürekli bir ϕ fonksiyonuna düzgün yakınsar.

4- ϕ limit fonksiyonu, $|x-x_0| \le h$ aralığında $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ diferansiyel denkleminin $\phi(x_0) = y_0$ koşuluna uyan bir fonksiyondur.

5- ϕ limit fonksiyonu, $\left[x_0, x_0+h\right]$ aralığında $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ diferansiyel denklemini sağlayan ve $\phi(x_0)=y_0$ biçiminde olan tek diferansiyellenebilir fonksiyondur.

1.2.2 İspat

İspatı $\left[x_0, x_0+h\right]$ aralığı için gerçekleştireceğiz. $\left[x_0-h, x_0\right]$ aralığı için teoremin ispatı benzer şekilde yapılabilir.

1) Tüme varım yöntemi kullanacağız. n=1 kabul edelim.

$$\phi_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y_0)dt$$

ile tanımlı $\phi_1(x)$ fonksiyonunu ele alalım. $f(t,y_0)$ R de sürekli olduğu için $\phi_1(x)$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyonun üst sınırı değişen integrali ile temsil edilmiş olup, Analizden bilinen teorem gereği $\phi_1(x)$ fonksiyonu sürekli türevlere sahip olacaktır. Ayrıca da;

$$\left|\phi_1(x)-y_0\right|=\left|\int_{x_0}^{x} f(t,y_0)dt\right| \le \int_{x_0}^{x} \left|f(t,y_0)dt\right| \le M(x-x_0) \le b$$

eşitsizliği de sağlanmaktadır. Dolayısla $f(x,\phi_1(x))$ fonksiyonu $\left[x_0, x_0+h\right]$ aralığında tanımlıdır.

Şimdi de $\phi_{n-1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f[t,\phi_{n-2}(t)]dt$ ile tanımlı $\phi_{n-1}(x)$ fonksiyonunun sürekli türevlere sahip olduğunu ve ayrıca da $f(x,\phi_{n-1}(x))$ fonksiyonunun $\left[x_0, x_0+h\right]$ aralığında tanımlı olduğunu varsayalım,

$\phi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\phi_{n-1}(t)dt$ ile tanımlı $\phi_n(x)$ fonksiyonunun da sürekli türevlere sahip olacağını, ayrıca da $f(x,\phi_n(x))$ in $\left[x_0, x_0+h\right]$ aralığında tanımlı olduğunu gösterelim.

Gerçekten $\phi_n(x)$ in de tanımından görüldüğü gibi bu fonksiyon da bir sürekli fonksiyonun üst sınırı değişen integralidir, dolayısıyla da sürekli türevi mevcuttur. Ayrıca da;

$$\left|\phi_n(x)-y_0\right|=\left|\int_{x_0}^{x} f(t,\phi_{n-1}(t))dt\right| \le \int_{x_0}^{x} \left|f(t,\phi_{n-1}(t))\right|dt \le M(x-x_0) \le h$$

eşitsizliği sağlanmaktadır. O halde $f(x,\phi_n(x))$ fonksiyonu $\left[x_0, x_0+h\right]$ aralığında tanımlı olacaktır. Böylece birinci adım tamamlanmış oldu.

2) Bu adımda tekrar tümevarımı uygulayalım. İlk adımda

$$|\phi_2(x)-\phi_1(x)| = \left|y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\phi_1(t))dt - y_0 \int_{x_0}^{x} f(t,\phi_0(x))dt\right| = \left|\int_{x_0}^{x} [f(t,\phi_1(t)) - f(t,\phi_0(t)]dt\right|$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} |f(t,\phi_1(t)) - f(t,\phi_0(t))|dt \leq k\int_{x_0}^{x} |\phi_1(t)-\phi_0(t)|dt = k\int_{x_0}^{x} |\phi_1(t)-y_0|dt$$

$$\leq kM\int_{x_0}^{x} (t-x_0)dt = kM\left.\frac{(t-x_0)^2}{2}\right|_{t=x_0}^{x} = kM\frac{(x-x_0)^2}{2} \leq kM\frac{h^2}{2} = \frac{M}{k}\frac{(kh)^2}{2}$$

eşitsizliğinin doğruluğunu göstereceğiz.

Şimdi de; $\left[x_0, x_0+h\right]$ aralığında

$$|\phi_{n-1}(x)-\phi_{n-2}(x)| \leq \frac{Mk^{n-2}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} \leq \frac{Mk^{n-2}}{(n-1)!}h^{n-1} = \frac{M}{k}\frac{(hk)^{n-1}}{(n-1)!}$$

olduğunu varsayalım.

Nihayet,

$$|\phi_n(x)-\phi_{n-1}(x)| \leq \frac{M}{k}\frac{(hk)^n}{n!}$$

olduğunu gösterelim.

$$|\phi_n(x)-\phi_{n-1}(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} \left[f(t,\phi_{n-1}(t)) - f(t,\phi_{n-2}(t))\right]dt\right|$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} |f(t,\phi_{n-1}(t)) - f(t,\phi_{n-2}(t))|dt \leq k\int_{x_0}^{x} |\phi_{n-1}(t)-\phi_{n-2}(t)|dt$$

$$\leq k\int_{x_0}^{x} \frac{Mk^{n-2}}{(n-1)!}(t-x_0)^{n-1}dt = \frac{Mk^{n-1}}{(n-1)!}\left.\frac{(t-x_0)^n}{n}\right|_{t=x_0}^{x}$$

$$= \frac{Mk^{n-1}}{(n-1)!}\frac{(x-x_0)^n}{n} = \frac{Mk^{n-1}}{n!}h^n = \frac{M}{k}\frac{(hk)^n}{n!} \qquad (1.5)$$

Böylece tüme varım bağıntısı yöntemiyle 2. adım gerçekleştirilmiş oldu.

3) Pozitif sabit terimli

$$\frac{M}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(kh)^n}{n!}=\frac{M}{k}\frac{kh}{1!}+\frac{M}{k}\frac{(kh)^2}{2!}+\frac{M}{k}\frac{(kh)^3}{3!}+...$$

serisinin

$$\frac{M}{k}\left[e^{kh}-1\right]$$

limitine yakınsayacağı açıktır. Ayrıca

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\phi_i(x)-\phi_{i-1}(x)\right]$$

fonksiyon serisi ve $\forall n\in\mathbb{N}$ ve $\left[x_0,x_0+h\right]$ aralığındaki her x için (1.5) eşitsizliğini sağlanacak biçimdedir. Bu yüzden Weierstrass M testi (Teorem 1.3) gereği

$$y_0+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\phi_i(x)-\phi_{i-1}(x)\right]$$

serisi $\left[x_0,x_0+h\right]$ aralığında düzgün yakınsak seri olacaktır. Bundan dolayı $\left\{S_n\right\}$ kısmi toplamlar dizisi de $\left[x_0,x_0+h\right]$ aralığında bir ϕ limit fonksiyonuna düzgün yakınsayacaktır. Fakat,

$$S_n(x)=y_0+\sum_{i=1}^{n}\left[\phi_i(x)-\phi_{i-1}(x)\right]=\phi_n(x)$$

olmaktadır.

Başka deyişle, ϕ_n dizisi ϕ ’ye $\left[x_0,x_0+h\right]$ aralığında yakınsar. Bu yüzden, her bir ϕ_n, $[x_0, x_0+h]$ aralığında sürekli olduğundan Teorem 1.1 gereği, ϕ limit fonksiyonunda $\left[x_0,x_0+h\right]$ aralığında sürekli olduğunu gösterir.

4) Her bir ϕ_n, $\left[x_0,x_0+h\right]$ aralığında $\left|\phi_n(x)-y_0\right|\le b$ eşitsizliğini de elde ederiz. Bu sebeple $f\left[t,\phi(t)\right]$ bu aralıkta tanımlıdır. $y_1=\phi(x)$ ve $y_2=\phi_n(x)$ seçerek (1.1) Lipschitz şartını uygulayabiliriz. Böyle yaparak, $x\in\left[x_0,x_0+h\right]$ için

$$\left|f\left[t,\phi(t)\right]-f\left[t,\phi_n(t)\right]\right|\le k\left|\phi(x)-\phi_n(x)\right| \tag{1.6}$$

buluruz. f ’in sürekliliği gereği ε>0, ∀n>N ve $\forall\, x\in\left[x_0,x_0+h\right]$ için $\left|\phi(x)-\phi_n(x)\right|<\frac{\varepsilon}{k}$ olacak şekilde N>0 mevcuttur. Bu yüzden, varsayımlar altında ∀n>N ve $\forall\, x\in\left[x_0,x_0+h\right]$ için

$$k\left|\phi(x)-\phi_n(x)\right| < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon \tag{1.7}$$

sağlanacaktır.

Böylece (1.6) ve (1.7)'dan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f\left[t,\phi_n(t)\right]$ ile tanımlı fonksiyonlar dizisinin $\left[x_0, x_0+h\right]$ da $f\left[t,\phi(t)\right]$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını görürüz. Ayrıca, $\forall n > \mathbb{N}$ için $f\left[t,\phi_n(t)\right]$ ile tanımlı fonksiyonların her biri bu aralıkta süreklidir. Teorem (1.2) gereği

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \lim_{n\to\infty}\phi_{n+1}(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f\left[t,\phi_n(t)\right]dt \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x}\lim_{n\to\infty} f\left[t,\phi_n(t)\right]dt = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left[t,\phi(t)\right]dt\end{aligned}$$

yazılabilir olacaktır.

Kısaca ϕ limit fonksiyonu $\left[x_0, x_0+h\right]$ da

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left[t,\phi(t)\right]dt$$

integral denklemini sağlar. Bir başka deyişle $\phi(x)$ fonksiyonu sadece sürekli değil, aynı zamanda da sürekli türeve sahiptir ve türevi de integral altı fonksiyona eşittir. Böylece, temel lemmadan, ϕ limit fonksiyonu $\left[x_0, x_0+h\right]$ da $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ diferansiyel denklemini sağlar ve $\phi(x_0)=y_0$ olacak şekildedir. Böylece $\left[x_0, x_0+h\right]$ aralığında yukarıda verilen temel başlangıç değer probleminin bir çözümünün varlığını ispatladık.

5) ϕ çözümünün tek olduğunu ispatlayalım. ψ'nin

$$\frac{d\psi}{dx} = f(x,\psi)$$

ve $\psi(x_0) = y_0$ olacak şekilde $\left[x_0, x_0+h\right]$'da tanımlı diferansiyellenebilir bir başka fonksiyon olduğunu kabul edelim. Bu durumda kesin olarak bazı $\left[x_0, x_0+\delta\right]$ üzerinde

$$\left|\psi(x)-y_0\right| \le b \tag{1.8}$$

sağlanmalıdır.

x_1 noktasını $x_0 \le x \le x_1$ özellikli x'ler ve $\left|\psi(x_1)-y_0\right| \le b$ için $\left|\psi(x)-y_0\right| \le b$ sağlanacak biçimde ele alalım. $x_1 < x_0 + h$ kabul edelim. Bu durumda

$$M_1 = \left| \frac{\psi(x_1) - y_0}{x_1 - x_0} \right| = \frac{b}{x_1 - x_0} > \frac{b}{h} \geq M$$

Diğer taraftan ise ortalama değer teoremi gereği $x_0 \leq \zeta \leq x_1$ özellikli öyle ζ noktası var ki

$$M_1 = |\psi'(\zeta)| = |f[x, \psi(\zeta)]| \leq M$$

eşitsizliği sağlanacaktır. Dolayısıyla bir çelişki söz konusudur. Bu yüzden $x_0 + h < x_1$ ve (1.8) eşitsizliği $x_0 \leq x < x_0 + h$ için sağlanacaktır. ve böylece $x_0 \leq x < x_0 + h$ aralığında

$$|\psi(x) - y_0| \leq b \tag{1.9}$$

sağlanacaktır.

ψ , $[x_0, x_0 + h]$ da $\psi(x_0) = y_0$ olacak şekilde $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ nin bir çözümü olduğundan, ψ ' nin $[x_0, x_0 + h]$ da

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, \psi(t)]dt \tag{1.10}$$

integral denklemini sağladığını görürüz. Şimdi tümevarımla $[x_0, x_0 + h]$ da

$$|\psi(x) - \phi_n(x)| \leq b \frac{k^n (x - x_0)^n}{n!} \tag{1.11}$$

olduğunu ispatlayacağız. $n = 1$ durumu açıktır. $[x_0, x_0 + h]$ da

$$|\psi(x) - \phi_{n-1}(x)| \leq b \frac{k^{n-1} (x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} \tag{1.12}$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda (1.2) ve (1.10) den

$$|\psi(x) - \phi_n(x)| \leq \left| \int_{x_0}^{x} \left\{ f\left[t, \psi(t) - f\left[t, \phi_{n-1}(t)\right]\right] \right\} dt \right|$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} \left| f\left[t, \psi(t) - f\left[t, \phi_{n-1}(t)\right]\right] \right| dt$$

elde ederiz. (1.12) de sırayla $y_1 = \psi(x)$ ve $y_2 = \phi_{n-1}(x)$ alarak (1.1) Lipschitz şartını uygularız. Bu yüzden

$$|\psi(x)-\phi_n(x)|\leq\int_{x_0}^{x}k|\psi(t)-\phi_{n-1}(t)|dt$$

buluruz. (1.15) varsayımıyla daha sonra (1.12) de $(n-1)$ 'in n ile yer değiştirmesiyle

$$|\psi(x)-\phi_n(x)|\leq\int_{x_0}^{x}k\frac{k^{n-1}b(t-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}dt$$

$$=\frac{k^n b}{(n-1)!}\left[\frac{(t-x_0)^n}{n}\right]_{x_0}^{x}=\frac{k^n b(x-x_0)^n}{n!}$$

elde ederiz.

Bu sebeple tümevarımla (1.11) eşitsizliği $\forall x\in[x_0,x_0+h]$ elde edilir. Böylece

$[x_0,x_0+h]$ da n=1, 2, … için

$$|\psi(x)-\phi_n(x)|\leq b\frac{(kh)^n}{n!}\tag{1.13}$$

buluruz.

Şimdi $\sum_{n=1}^{\infty}b\frac{(kh)^n}{n!}$ serisi yakınsar ve böylece $\lim_{n\to\infty}b\frac{(kh)^n}{n!}=0$ olur. Bu sebeple $[x_0,x_0+h]$ da $\psi(x)=\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)$. Bu aralıkta $\phi(x)=\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)$ olduğunu hatırlayalım. Böylece $[x_0,x_0+h]$ da

$$\psi(x)=\phi(x)$$

Dolayısıyla temel başlangıç-değer probleminin çözümü $[x_0,x_0+h]$ da tek çözüme sahip olduğunu ispatladık. İspatın başında altını çizdiğimiz gibi benzer muhakemeyi $[x_0-h,x_0]$ aralığında yapabiliriz. Böylece $[x_0-h,x_0+h]$ da $\phi(x_0)=y_0$ olacak şekilde $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ diferansiyel denklemi tek ϕ çözümüne sahiptir.

TEOREM 1.6:

1. f, $D=\{(x,y):a<x<b,-\infty<y<+\infty\}$ biçimindeki sınırsız D bölgesinde sürekli olsun.

2. f, bu sınırsız bölgede (y 'ye göre) Lipschitz şartını sağlasın. Yani $\forall(x,y_1)$, $(x,y_2)\in D$ için

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le k|y_1-y_2|$$

olacak şekilde $k>0$ sayısının mevcut olduğunu varsayalım.

Bu durumda $\frac{dy}{dx}=f(x,y),\ y(x_0)=y_0$ probleminin (x_0,y_0), D'nin herhangi noktası olmak üzere $a<x<b$ açık aralığının tümünde tanımlıdır. Özellikle $a=-\infty$ ve $b=+\infty$ olursa ϕ, her $-\infty<x<+\infty$ için tanımlıdır.

Örneğin $-\infty<x<+\infty$ için F sürekli olmak üzere $\frac{dy}{dx}=F(x)y,\ y(x_0)=y_0$ başlangıç değer probleminin bir çözümü ve her $x\in(-\infty,+\infty)$ için tanımlıdır.

1.3 Çözümlerin Başlangıç Şartları ve f Fonksiyonuna Bağlılığı

1.3.1 Başlangıç şartlarına bağlılık

Şimdi başlangıç şartında ve f fonksiyonundaki küçük değişime $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ diferansiyel denkleminin nasıl bağlı olduğunu ele alalım. Böyle küçük değişimlerin çözümünde sadece küçük değişimlere sebep olduğu görülecektir. Uygun kısıtlamalar altında bunun gerçek olduğunu gösterelim.

Önce $y(x_0)=y_0$ başlangıç şartında küçük değişimin sonucunu ele alalım. f sürekli olsun ve D bölgesinde y' ye göre Lipschitz şartını sağlasın. (x_0,y_0) noktası D'nin bir noktası olsun. Bu durumda Teorem 1.5 ile

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$
$$y(x_0)=y_0$$

başlangıç değer problemi yeterince küçük $|x-x_0|\le h_0$ aralığı üzerinde tanımlı tek ϕ çözümüne sahiptir. Şimdi y'nin başlangıç değerinin y_0 dan Y_0' a değiştirildiğini varsayalım. İlk ele alacağımız şey,

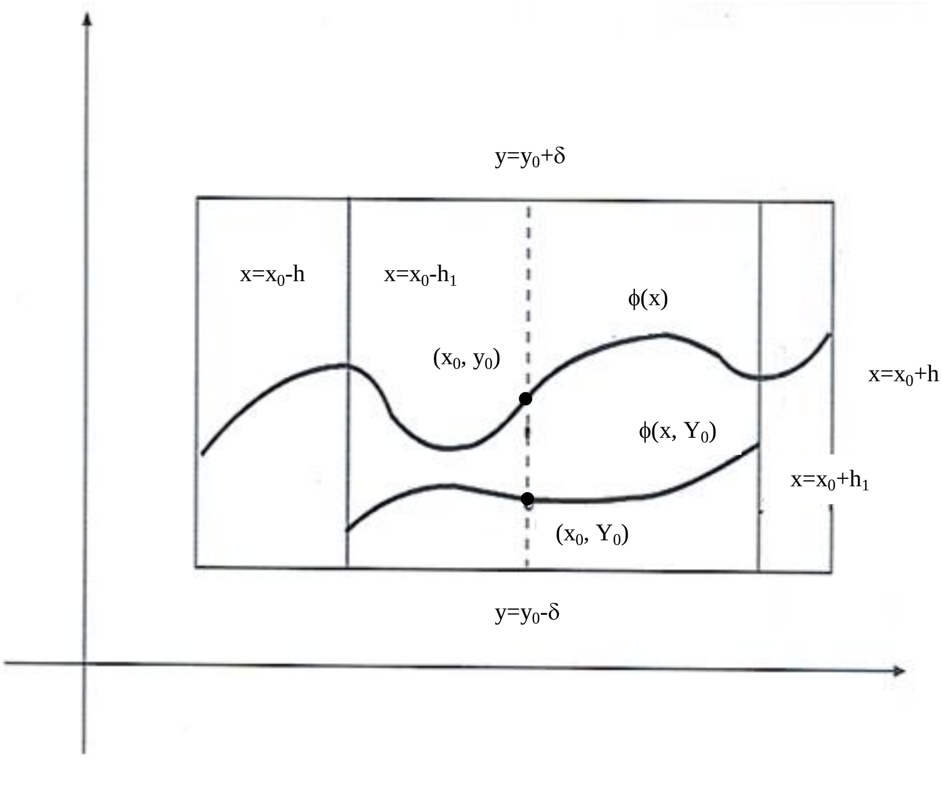
$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$
$$y(x_0)=Y_0 \tag{1.14}$$

yani başlangıç değer probleminin de yeterince küçük $|x - x_0| \leq h_0$ aralığı üzerinde tanımlı tek çözüme sahip olup olmadığıdır. Y_0, $|y_0 - Y_0|$ yeterince küçük olmak üzere bu halde (1.14) probleminin böyle $|x - x_0| \leq h_1$ aralığı üzerinde tek çözüme sahip olduğunu belirtebiliriz. Gerçekte

$$R = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} \subset D$$

olsun ve Y_0, $|y_0 - Y_0| \leq \frac{b}{2}$ olacak şekilde seçilmiş olsun. Bu durumda Teorem 10.7 in (1.14) problemine uygulanması, bu problemin $|x - x_0| \leq h_1$ için R bulunan ve tanımlı tek ψ çözümüne sahip olduğunu gösterir. Burada $h_1 = \min\left(a, \frac{b}{2M}\right)$ ve $M = \max_{(x,y)\in R} |f(x, y)|$ alınmıştır. Burada her Y_0, $|y_0 - Y_0| \leq \delta$ için (1.14) problemi $|x - x_0| \leq h$ üzerinde $\phi(x, Y_0)$ tek çözümüne sahip olacak şekilde $\delta>0$ ve $h>0$ var olduğunu kabul edebiliriz (Şekil 1.2)

Şimdi başlangıç şartı üzerinde çözümlerin bağlılığını ele alan temel teoremi ifade edecek bir durumdayız.



Şekil 1.2 Çözümlerin bağlılığı.

TEOREM 1.7:

1. f sürekli ve xy düzlemin D bölgesinde k Lipschitz sabitiyle y'ye göre Lipschitz şartını sağlasın. (x_0, y_0), D nin bir noktası olsun.

2. Her bir Y_0 için Y_0, $|y_0 - Y_0| \leq \delta$ olmak üzere $\delta>0$ ve $h>0$'ın mevcut olduğunu $|x - x_0| \leq h$ aralığında (1.14)

başlangıç değer probleminin $\phi(x, Y_0)$ tek çözümüne sahip olduğunu varsayalım.

Bu durumda ϕ, $y_0 = Y_0$ iken (1.14) nin tek çözümünü $\tilde{\phi}, Y_0 = \tilde{y}_0$ iken (1.14) nin çözümünü gösterirse, bu durumda $|x - x_0| \leq h$ aralığında

$$\left|\tilde{\phi}(x) - \phi(x) \leq \delta_1 e^{hk}\right|$$

olur. Burada $|\tilde{y}_0 - y_0| = \delta_1 \leq \delta$ dır.

Bu nedenle, (1.14) probleminin $\phi(x, Y_0)$ çözümü $y_0 = Y_0$ durumunda Y_0 başlangıç değerinin sürekli fonksiyonudur.

İSPAT:

Teorem 1.5' den

$$\phi = \lim_{x \to \infty} \phi_n$$

olduğunu biliyoruz. Burada

$$\phi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left[t, \phi_{n-1}(t)\right] dt \qquad n = (1, 2, 3, ...)$$

ve $\phi_0(x) = y_0$; $|x - x_0| \leq h$

Benzer tarzda,

$$\tilde{\phi} = \lim_{x \to \infty} \tilde{\phi}_n$$

olur. Burada

$$\tilde{\phi}_n(x) = \tilde{y}_0 + \int_{x_0}^{x} f\left[t, \tilde{\phi}_{n-1}(t)\right] dt \qquad n = (1, 2, 3, ...)$$

ve $\tilde{\phi}_0(x) = \tilde{y}_0; |x - x_0| \leq h$

k, Lipschitz sabiti olmak üzere $\left[x_0, x_0 + h\right]$ üzerinde

$$\left|\tilde{\phi}_n(x)-\phi_n(x)\right| \le \delta_1 \sum_{j=0}^{n} \frac{k^j (x-x_0)^j}{j!} \tag{1.15}$$

olduğunu tümevarımla gösterelim. Böylece $\left[x_0, x_0+h\right]$ üzerinde

$$\left|\tilde{\phi}_{n-1}(x)-\phi_{n-1}(x)\right| \le \delta_1 \sum_{j=0}^{n-1} \frac{k^j (x-x_0)^j}{j!} \tag{1.16}$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}\left|\tilde{\phi}_n(x)-\phi_n(x)\right| &= \left|\tilde{y}_0 + \int_{x_0}^{x} f\left[t,\tilde{\phi}_{n-1}(t)\right]dt - \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left[t,\phi_{n-1}(t)\right]dt\right)\right| \\ &\le \left|\tilde{y}_0 - y_0\right| + \int_{x_0}^{x} \left|f\left[t,\tilde{\phi}_{n-1}(t)\right] - f\left[t,\phi_{n-1}(t)\right]\right| dt\end{aligned}$$

olur. Lipschitz şartını uygulayarak

$$\left|f\left[t,\tilde{\phi}_{n-1}(t)\right] - f\left[t,\phi_{n-1}(t)\right]\right| \le k\left|\tilde{\phi}_{n-1}(x)-\phi_{n-1}(x)\right|$$

elde ederiz ve böylece $\left|\tilde{y}_0 - y_0\right| = \delta_1$ olduğundan

$$\left|\tilde{\phi}_n(x)-\phi_n(x)\right| \le \delta_1 + k\int_{x_0}^{x} \left|\tilde{\phi}_{n-1}(t)-\phi_{n-1}(t)\right| dt$$

olur. (1.16) kabulünü kullanarak

$$\begin{aligned}\left|\tilde{\phi}_n(x)-\phi_n(x)\right| &\le \delta_1 + k\int_{x_0}^{x} \delta_1 \sum_{j=0}^{n-1} \frac{k^j\left(t-x_0\right)^j}{j!}\, dt \\ &= \delta_1 + k\delta_1 \sum_{j=0}^{n-1} \frac{k^j}{j!} \int_{x_0}^{x} \left(t-x_0\right)^j dt \\ &= \delta_1\left[1 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{k^{j+1}\left(x-x_0\right)^{j+1}}{\left(j+1\right)!}\right]\end{aligned}$$

elde ederiz.

$$\delta_1\left[1 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{k^{j+1}\left(x-x_0\right)^{j+1}}{\left(j+1\right)!}\right] = \delta_1 \sum_{j=0}^{n} \frac{k^j\left(x-x_0\right)^j}{j!}$$

olduğundan $(n-1)$ 'i n ile yer değiştirerek (1.16)'yı

$$\left|\tilde{\phi}_n(x)-\phi_n(x)\right| \le \delta_1 \sum_{j=0}^{n} \frac{k^j\left(x-x_0\right)^j}{j!}$$

şeklinde elde ederiz.

Ayrıca $\left[x_0, x_0+h\right]$ üzerinde

$$\left|\tilde{\phi}_1(x)-\phi_1(x)\right| = \left|\tilde{y}_0 + \int_{x_0}^{x} f\left[t,\tilde{y}_0(t)\right]dt - \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left[t,y_0(t)\right]dt\right)\right|$$

$$\leq \left|\tilde{y}_0 - y_0\right| + \int_{x_0}^{x} \left|f\left[t,\tilde{y}_0(t)\right] - f\left[t,y_0(t)\right]\right|dt$$

$$\leq \delta_1 + \int_{x_0}^{x} k\left|\tilde{y}_0 - y_0\right|dt = \delta_1 + k\delta_1\left(x-x_0\right)$$

elde ederiz. Bu nedenle $n=1$ için (1.15) sağlanır. Böylece tümevarım tamamlanır ve $\left[x_0, x_0+h\right]$ üzerinde (1.15) elde edilir.

Benzer fikirleri $\left[x_0-h, x_0\right]$ üzerinde kullanarak, $\left|x-x_0\right| \leq h$ üzerindeki her x ve $n=1,2,3,...$ için

$$\left|\tilde{\phi}_n(x)-\phi_n(x)\right| \leq \delta_1 \sum_{j=0}^{n} \frac{k^j\left(x-x_0\right)^j}{j!} \leq \delta_1 \sum_{j=0}^{n} \frac{(kh)^j}{j!}$$

buluruz. $n \to \infty$ alarak

$$\left|\tilde{\phi}(x)-\phi(x)\right| \leq \delta_1 \sum_{j=0}^{n} \frac{(kh)^j}{j!}$$

sonucuna ulaşılır. Fakat $\sum_{j=0}^{n} \frac{(kh)^j}{j!} = e^{kh}$ ve böylece $\left|x-x_0\right| \leq h$ üzerinde istenen

$$\left|\tilde{\phi}(x)-\phi(x)\right| \leq \delta_1 e^{kh}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Hükmün kalan ifadesinin doğruluğu açıktır.

Buradan, ifade edilen şartlar altında $\tilde{\phi}$ ve ϕ çözümlerinin başlangıç değerleri yeterince küçük miktarda farklılaşırsa bu durumda $\left|x-x_0\right| \leq h$ aralığının her noktasında keyfi küçük miktarda farklılaşacaktır. Geometrik olarak bu, mukabil integral eğrisi her başlangıca yeterince yaklaşırsa aralığındaki her x için bir diğerine keyfi olarak yaklaşacağı anlamına gelir.

1.3.2 f Fonksiyonuna Bağlılık

f fonksiyonu değişirse $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ diferansiyel denkleminin nasıl değişeceğini ele alalım.

TEOREM 1.8:

1. xy düzleminin D bölgesinde aşağıdakilerin sağlandığını varsayalım.

(i) f ,sürekli bir fonksiyon olmakla beraber $k>0$ Lipschitz sabitiyle y 'ye göre Lipschitz şartını sağlamış olsun.

(ii) F sürekli olsun.

(iii) $\forall(x,y) \in D$ için $\left|F(x,y) - f(x,y)\right| < \varepsilon$ olsun.

2. (x_0, y_0) D'nin bir noktası olsun ve ayrıca da aşağıdaki koşullar sağlanmış olsun

(i) ϕ ,

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

Başlangıç değer probleminin çözümüdür.

(ii) ψ ,

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

Başlangıç değer probleminin bir çözümüdür.

(iii) $|x - x_0| \le h$ için $[x, \phi(x)]$ ve $[x, \psi(x)] \in D$ dir.

Bu durumda $|x - x_0| \le h$ üzerinde

$$\left|\phi(x) - \psi(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{k}\left(e^{kh} - 1\right)$$

Eşitsizliği sağlanacaktır.

İSPAT:

$\bar{\phi}_0(x)=\psi(x)$ olsun ve $\{\bar{\phi}_n\}$,

$$\bar{\phi}_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f\left[t,\bar{\phi}_{n-1}(t)\right]dt\ ,\ |x\text{-}x_0|\le h\ ,\ (n=1,2,3,...)$$

ile tanımlı fonksiyonlar dizisi olsun. Bu durumda $\bar{\phi}=\lim_{n\to\infty}\bar{\phi}_n,\bar{\phi}(x_0)=y_0$ fonksiyonu $|x-x_0|\le h$ üzerinde $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$'nin çözümüdür. $\frac{dy}{dx}=f(x,y),\ y(x_0)=y_0$ başlangıç değer problemi 1-koşulları gereği $|x-x_0|\le h$ üzerinde tek çözüme sahiptir. Böylece 2-koşullarından, $|x-x_0|\le h$ üzerinde $\bar{\phi}(x)=\phi(x)$ ve $\lim_{n\to\infty}\bar{\phi}_n=\bar{\phi}$ sonuçları elde edilecektir. 2-koşulları takımından

$$\psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} F[t,\psi(t)]dt\ ,\ |x\text{-}x_0|\le h$$

elde ederiz.

Tümevarımla, $[x_0,x_0+h]$'da

$$\left|\bar{\phi}_{n-1}(x)-\psi(x)\right|\le\varepsilon\sum_{j=1}^{n}\frac{k^{j-1}(x-x_0)^j}{j!} \tag{1.17}$$

olduğunu gösterelim. Böylece, bu aralıkta

$$\left|\bar{\phi}_{n-1}(x)-\psi(x)\right|\le\varepsilon\sum_{j=1}^{n-1}\frac{k^{j-1}(x-x_0)^j}{j!} \tag{1.18}$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}\left|\bar{\phi}_n(x)-\psi(x)\right| &= \left|y_0+\int_{x_0}^{x} f\left[t,\bar{\phi}_{n\text{-}1}(t)\right]dt-y_0-\int_{x_0}^{x}F[t,\psi(t)]dt\right| \\ &\le \int_{x_0}^{x}\left|f\left[t,\bar{\phi}_{n\text{-}1}(t)\right]-F[t,\psi(t)]\right|dt\end{aligned}$$

yazabiliriz.

Şimdi $F(x,y)=f(x,y)+\delta(x,y)$ yazalım. Bu durumda

$$\left|\bar{\phi}_n(x)-\psi(x)\right|\le\int_{x_0}^{x}\left|f\left[t,\bar{\phi}_{n\text{-}1}(t)\right]-f[t,\psi(t)]-\delta[t,\psi(t)]\right|dt$$

olacaktır.

$|A-B| \le |A|+|B|$ eşitsizliğini uygulayarak ve f ile Lipschitz şartını sağlayarak

$$\left|\overline{\phi}_n(x)-\psi(x)\right| \le \int_{x_0}^{x}\left|f\left[t,\overline{\phi}_{n-1}(t)\right]-f\left[t,\psi(t)\right]\right|dt+\int_{x_0}^{x}\left|\delta\left(t,\psi(t)\right)\right|dt$$

buluruz. Şimdi (1.17) kabulünü ve

$$\delta(t,y)=|F(x,y)-f(x,y)| \le \varepsilon$$

gerçeğini kullanarak

$$\left|\overline{\phi}_n(x)-\psi(x)\right| \le k\varepsilon\sum_{j=1}^{n-1}\frac{k^{j-1}}{j!}\int_{x_0}^{x}(t-x_0)^j dt+\int_{x_0}^{x}\varepsilon dt$$

$$=\varepsilon\sum_{j=1}^{n-1}\frac{k^j(x-x_0)^{j+1}}{(j+1)!}+\varepsilon(x-x_0)$$

$$=\varepsilon\sum_{j=1}^{n}\frac{k^{j-1}(x-x_0)^j}{j!}$$

buluruz. Buradan n ile $(n-1)$ yer değiştirerek (1.18) elde edilir.

1-(iii) koşulu $[x_0, x_0+h]$ üzerinde

$$\left|\overline{\phi}_1(x)-\psi(x)\right| \le \int_{x_0}^{x}\left|f\left[t,\psi(t)\right]-F\left[t,\psi(t)\right]\right|dt \le \int_{x_0}^{x}\varepsilon dt=\varepsilon(x-x_0)$$

olduğunu gösterir. Buradan $n=1$ için (1.17)'nin doğruluğu elde edilir. Bu nedenle tümevarım tamamlanır ve böylece $n=1,2,3,...$ için $[x_0, x_0+h]$ üzerinde (1.17) sağlanmış olur. $[x_0-h, x_0]$ üzerinde benzer muhakemeleri kullanılarak, $|x-x_0| \le h$ üzerindeki her x için ve $n=1,2,3,...$ için

$$\left|\overline{\phi}_n(x)-\psi(x)\right| \le \varepsilon\sum_{j=1}^{n}\frac{k^{j-1}|x-x_0|^j}{j!} \le \frac{\varepsilon}{k}\sum_{j=1}^{n}\frac{(kh)^j}{j!}$$

elde ederiz. $n\to\infty$ alınarak,

$$\left|\overline{\phi}(x)-\psi(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{k}\sum_{j=1}^{n}\frac{(kh)^j}{j!}$$

buluruz. Fakat $\sum_{j=1}^{n}\frac{(kh)^j}{j!}=e^{kh}-1$ dir.Bu nedenle $|x-x_0| \le h$ üzerinde

$$\left|\overline{\phi}_n(x)-\psi(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{k}(e^{kh}-1)$$

istenen eşitsizliği elde ederiz.

Böylece ifade edilen hipotezler altında, ε yeterince küçük ise, ϕ, ψ çözümleri arasındaki fark $|x - x_0| \leq h$ üzerinde yeterince küçüktür.

1.4 Sistemler ve Yüksek Mertebeli Denklemler İçin Varlık ve Teklik Teoremleri

1.4.1 Genel durum

İlk işimiz, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ n bilinmeyen

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
\frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\
&\vdots \\
\frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)
\end{aligned} \tag{1.19}$$

biçimindeki n birinci mertebe diferansiyel denklem sistemini içeren başlangıç değer problemi için temel varlık ve teklik teoremidir. Burada $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ $(n+1)$ boyutlu $(x, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ uzayının D bölgesinde tanımlı ve n sürekli reel fonksiyonlardır.

TANIM 1.10:

(1.19) sisteminin bir çözümüyle $a \leq x \leq b$ reel aralığı üzerinde tanımlı

$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots, \phi_n$

n -sürekli diferansiyellenebilir reel fonksiyonların kümesini anlayacağız öyle ki

$[x, y_1, y_2, \ldots, y_n] \in D$

ve

$\forall x \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi_1(x)}{dx} &= f_1(x, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n) \\
\frac{d\phi_2(x)}{dx} &= f_2(x, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n) \\
&\vdots \\
\frac{d\phi_n(x)}{dx} &= f_n(x, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)
\end{aligned}$$

Teorem (1.7)’e karşı gelen, (1.19) sistemiyle alakalı aşağıdaki teoremi ele alacağız. İspatı Teorem (1.7)’ini ispatına paralel olduğundan ayrıntıları ihmal ederek ispatı ana hatlarıyla vereceğiz.

TEOREM 1.9:

1. $f_1, f_2, ..., f_n$ fonksiyonları; $(x_0, c_1, c_2, ..., c_n)$, $(n+1)$ boyutlu reel $(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ uzayının bir noktası ve $a, b_1, b_2, ..., b_n$ pozitif sabitler olmak üzere,

$$|x - x_0| \le a \ , \ |y_1 - c_1| \le b_1, ..., |y_n - c_n| \le b_n$$

ile tanımlı R, $(n+1)$ boyutlu dikdörtgende sürekli olsun. $M, (x, y_1, y_2, ..., y_n) \in R$ ve $i = 1, 2, ..., n$ için

$$|f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)| \le M$$

olacak şekilde bir sabit olsun. Ayrıca

$$h = \min\left(a, \frac{b_1}{M}, \frac{b_2}{M}, ..., \frac{b_n}{M}\right).$$

2. f_i fonksiyonları R’de k Lipschitz sabitiyle Lipschitz şartını sağlasın. Yani k>0 sabiti var olmak üzere

$$|f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n) - f_i(x, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, ..., \tilde{y}_n)| \le k(|\tilde{y}_1 - y_1| + ... + |\tilde{y}_n - y_n|) \tag{1.20}$$

eşitsizliği sağlansın. Burada $(x, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, ..., \tilde{y}_n), (x, y_1, y_2, ..., y_n) \in R$ ve $i = 1, 2, ..., n$.

Bu durumda

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$$

denklem sisteminin $|x - x_0| \le h$ için

$$\phi_1(x_0) = c_1, \phi_2(x_0) = c_2, ..., \phi_n(x_0) = c_n$$

olan tek bir $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ çözümü vardır.

İSPAT:

$i = 1, 2, \ldots, n$ için

$\phi_i(x_0) = c_i$

ve önce

$$\phi_{i,j} = c_i + \int_{x_0}^{x} f_i\left(x, \phi_{1,j-1}, \phi_{2,j-1}, \ldots, \phi_{n,j-1}\right) dt \qquad (1.21)$$

(i=1,2,...,n; j=1,2,...) ile $\phi_{i,j}(x)$ fonksiyonlarını tanımlayalım.

daha sonra $\phi_{i,j}$ fonsiyonlarının hepsinin $|x - x_0| \leq h$ üzerinde tanımlı

$$\left|\phi_{i,j}(x) - c_i\right| \leq b_i$$

$$\left|\phi_{i,j}(x) - \phi_{i,j-1}(x)\right| \leq \frac{M(kn)^{j-1}(x - x_0)^j}{j!}$$

bağıntılarını sağlayan sürekli fonksiyonlar olduğunu matematik tümevarımla göstereceğiz. (1.21) formülü ve (1.20) Lipschitz şartı da aşağıdaki eşitsizliği başka bir tümevarımla ispatlar:

(i=1,2,...,n; j=1,2,...), $|x - x_0| \leq h$

böylece

$$\left|\phi_{i,j}(x) - \phi_{i,j-1}(x)\right| \leq \frac{M(knh)^j (x - x_0)^j}{knj!}, \quad (i=1,2,...,n),(j=1,2,...) \qquad (1.22).$$

Bu bizi her (i=1,2,...,n) için

$$\phi_{i,j}(x) = \phi_{i,0}(x) + \sum_{p=1}^{j}\left[\phi_{i,p} - \phi_{i,p-1}\right], \; j=1,2,...$$

ile tanımlı $\left\{\phi_{i,j}(x)\right\}$ dizisinin ϕ_i sürekli fonksiyonuna düzgün yakınsadığı görülür. Daha sonra her ϕ_i nin $|x - x_0| \leq h$ üzerinde

$$\phi_i = c_i + \int_{x_0}^{x} f_i\left(x, \phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\right) dt$$

integral denklemini sağladığını görebiliriz. Buradan $|x - x_0| \leq h$ üzerinde

$$\frac{d\phi_i}{dx} = f_i\left(x, \phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\right)$$

$$\phi_i(x_0) = c_i, \qquad (i=1,2,...,n)$$

elde ederiz.

Varlığın ispatının genel hatları böylece tamamlanır. Teorem 1.7 için verilen $n=1$ durumununkine paralel olduğu açıktır. Sunulan durumda tekliğin ispatı da (teorem 1.7)'ninkine paraleldir.

$$\frac{d^n y}{dx^n}=f\left(x,y,\frac{dy}{dx},...,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \tag{1.23}$$

biçimindeki n. mertebe diferansiyel denklemle birlikte temel başlangıç değer problemi için varlık ve teklik teoremini elde etmek için kullanılabilir.

TANIM 1.11:

f, reel $(n+1)$ boyutlu $(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)})$ uzayının D bölgesinde tanımlı ve sürekli reel fonksiyonlar olmak üzere

$$\frac{d^n y}{dx^n}=f\left(x,y,\frac{dy}{dx},...,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. (1.23) denkleminin çözümüyle,

$$\left[\left(x,\phi(x),\phi'(x),...,\phi^{(n-1)}(x)\right)\right]\in D$$

ve $\forall x\in[a,b]$ için

$$\phi^{(n)}(x)=f\left(x,\phi(x),\phi'(x),...,\phi^{(n-1)}(x)\right)$$

olacak biçimde $a\le x\le b$ aralığında ϕ reel fonksiyonunun sürekli n. türevlere (böylece daha düşük mertebeli türevlere) sahip olmasını anlarız.

TEOREM 1.10:

f, reel $(n+1)$ boyutlu $\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right)$ uzayının D bölgesinde sürekli olmak ve (1.20) biçimindeki Lipschitz şartını sağlamak üzere (1.23)

$$\frac{d^n y}{dx^n}=f\left(x,y,\frac{dy}{dx},...,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. $\left(x_0,c_0,c_1,...,c_{n-1}\right)$,D'nin bir noktası olsun. Bu durumda

$$\phi\left(x_0\right)=c_0,\phi'(x_0)=c_1,...,\phi^{(n-1)}(x_0)=c_{n-1} \tag{1.24}$$

olmak üzere $x=x_0$ civarındaki $|x-x_0|\le h$ üzerinde tanımlı n. mertebeden diferansiyel denkleminin bir tek ϕ çözümü mevcuttur.

İSPAT:

$$y_1 = y,\ y_2 = \frac{dy}{dx},\ ...,\ y_n = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

olsun. Bu durumda n. mertebeden (1.23) diferansiyel denklemi n birinci mertebe denklem sistemine denktir:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_3 \\ &\vdots \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} &= y_n \\ \frac{dy_n}{dx} &= f\left[x, y_1, y_2, ..., y_n\right] \end{aligned} \qquad . \qquad (1.25)$$

ϕ, (1.24) şartlarını sağlayan (1.23) denkleminin bir çözümü ise, bu durumda $\phi_1,\phi_2,...,\phi_n$ fonksiyonlarının sıralı kümesi (1.25) sisteminin

$$\phi_1(x_0) = c_0, \phi_2(x_0) = c_1, ..., \phi_n(x_0) = c_{n-1} \qquad (1.26)$$

f şartlarını sağlayan bir çözümüdür. Burada $\phi_1 = \phi', ..., \phi_n = \phi^{(n-1)}$ olur. Sonuç olarak $\phi_1,\phi_2,...,\phi_n$ (1.26) şartlarını sağlayan (1.25)'in bir çözümüyse, bu halde ϕ fonksiyonu, $\phi = \phi_1$ olmak üzere, (1.24) şarlarını sağlayan (1.23) denkleminin bir çözümüdür.

$(x_0, c_0, c_1, ..., c_{n-1})$, D'nin bir noktası olduğundan, f fonksiyonu, ifade edilen hipotezleri R'de sağlayacak şekilde, bu nokta etrafında $(n+1)$ boyutlu bir R dikdörtgeni vardır. Buradan, (1.25) sistemi R'de Teorem 1.12'in bütün şartlarını sağlar. Böylece (1.26) şartlarını sağlayan ve $x = x_0$ noktası civarında yeterince küçük $|x - x_0| \leq h$ aralığında tanımlı olan (1.25) sisteminin tek bir $\phi_1,\phi_2,...,\phi_n$ çözümü mevcuttur. Bu nedenle $\phi = \phi_1$ alınırsa (1.23) ve (1.24)'ün (1.25) ve (1.26) ile yukarıda not edilen denklikten istenen sonucu buluruz.

1.4.2 Lineer durum

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx}&=a_{11}(x)y_1+\dots+a_{1n}(x)y_n+F_1(x)\\\frac{dy_2}{dx}&=a_{21}(x)y_1+\dots+a_{2n}(x)y_n+F_2(x)\\&\vdots\\\frac{dy_n}{dx}&=a_{n1}(x)y_1+\dots+a_{nn}(x)y_n+F_n(x)\end{aligned}\right\}\qquad(1.27)$$

lineer sistemini ele alalım. Burada a_{ij} katsayıları ve F_i fonksiyonları $(i,j=1,2,...,n)$

$a\le x\le b$ aralığında süreklidir. Önce bir lemma ve ispatını verelim.

LEMMA 1.1:

a_{ij} ve F_i fonksiyonları $(i,j=1,2,...,n)$ $a\le x\le b$ aralığında sürekli olsun. Bu durumda $f_i(x,y_1,y_2,...,y_n)=a_{i1}(x)y_1+...+a_{in}(x)y_n+F_i(x)$ ile tanımlı f_i fonksiyonları

$a\le x\le b$, $-\infty\le y_i\le\infty$, $(i=1,2,...,n)$

üzerinde Lipschitz şartını sağlar. Yani $a\le x\le b$ aralığındaki her x ve $\bar{y}_1,\bar{y}_2,...,\bar{y}_n$ ile $\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,...,\tilde{y}_n$; $(i=1,2,...,n)$ reel sayılarının herhangi iki kümesi için

$$\left|f(x,\bar{y}_1,\bar{y}_2,...,\bar{y}_n)-f(x,\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,...,\tilde{y}_n)\right|\le k\left(|\bar{y}_1-\tilde{y}_1|+...+|\bar{y}_n-\tilde{y}_n|\right)$$

olacak biçimde bir $k>0$ sabiti mevcuttur.

İSPAT:

a_{ij} fonksiyonlarının her biri $a\le x\le b$ aralığında sürekli olduğundan, bu fonksiyonların her birine karşı gelerek, $x\in[a,b]$ için $|a_{ij}(x)|\le k$ olur. Bu halde, $\forall x\in[a,b]$ ve $\bar{y}_1,\bar{y}_2,...,\bar{y}_n$ ile $\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,...,\tilde{y}_n$ reel sayıların herhangi iki kümesi için

$$\begin{aligned}&\left|f(x,y_1,y_2,...,y_n)-f(x,\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,...,\tilde{y}_n)\right|\\&=\left|a_{i1}(x)y_1+...+a_{in}(x)y_n+F_i(x)-\left[a_{i1}(x)\tilde{y}_1+...+a_{in}(x)\tilde{y}_n+F_i(x)\right]\right|\\&=\left|a_{i1}(x)[y_1-\tilde{y}_1]+a_{i2}(x)[y_2-\tilde{y}_2]+...+a_{in}(x)[y_n-\tilde{y}_n]\right|\\&\le a_{i1}(x)|y_1-\tilde{y}_1|+a_{i2}(x)|y_2-\tilde{y}_2|+...+a_{in}(x)|y_n-\tilde{y}_n|\\&\le k\left(|y_1-\tilde{y}_1|+|y_2-\tilde{y}_2|+...+|y_n-\tilde{y}_n|\right)\end{aligned}$$

Şimdi (1.27) lineer sistemi ile ilgili temel varlık teoremini verebiliriz.

TEOREM 1.11:

1. (1.27) lineer sistemindeki a_{ij} katsayı ve F_i fonksiyonları $(i,j=1,2,...,n)$ $a \le x \le b$ aralığında sürekli olsun.
2. $x_0 \in [a,b]$ ve $c_1, c_2, ..., c_n$ n reel sabitlerin bir kümesi olsun.

Bu durumda (1.27) lineer sisteminin $a \le x \le b$ aralığında tanımlı

$\phi_1(x_0) = c_1, \phi_2(x_0) = c_2, ..., \phi_n(x_0) = c_n$

Başlangıç şartını sağlayan tek bir

$\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$

çözümü mevcuttur.

İSPAT:

(1.27) lineer sistemi Teorem 1.9'da ele alınan (1.27) sisteminin özel durumudur ve ispatın ana hatları Teorem 1.9 için verilenlere paraleldir. Önce $\phi_{i,j}$ fonksiyonunu

$$\phi_{i,0}(x) = c_i \qquad (i=1,2,...,n)$$

ve $a \le x \le b$ aralığında

$$\phi_{i,j}(x) = c_i + \int_{x_0}^{x} \left[a_{i1}(t)\phi_{1,j-1} + ... + a_{in}(t) y_{n,j-1} + F_i(t) \right] dt \tag{1.28}$$

ile tanımlayalım. Böyle tanımlanan $\phi_{i,j}$ fonksiyonları $a \le x \le b$ aralığında süreklidir. Ayrıca hipotez vasıtasıyla $a \le x \le b$ $(i=1,2,...,n)$

$$\left| a_{i1}(x)c_1 + ... + a_{in}(x)c_n + F_i(x) \right| \le M$$

olacak biçimde bir $M>0$ sabiti vardır.

Lemmadan dolayı

$$a_{i1}(x)y_1 + ... + a_{in}(x)y_n + F_i(x)$$

ile tanımlı fonksiyonlar $a \le x \le b$ aralığında Lipschiz şartını sağlar. Bu nedenle (1.28) formülünü ve bu Lipschiz şartını $a \le x \le b$ $(i,j=1,2,...,n)$ olmak üzere aşağıdaki

$$\left| \phi_{i,j}(x) - \phi_{i,j-1}(x) \right| \le \frac{M(kn)^{j-1}(x-x_0)^j}{j!}$$

eşitsizliği tümevarımla elde etmek için kullanabiliriz. Böylece

$$H = \max\left(|a - x_0|, |b - x_0| \right)$$

olmak üzere

$$\left|\phi_{i,j}(x)-\phi_{i,j-1}(x)\right| \le \frac{M}{kn}\frac{(knH)^j}{j!} \tag{1.29}$$

$a \le x \le b$ $(i=1,2,...,n\ ,\ j=1,2,...)$. (1.29) eşitsizliği Teorem 1.12'deki (1.22) eşitsizliğine karşı gelir. Teorem 1.12 için verilen ispatın kalanı $a \le x \le b$ için sunulan duruma taşınır ve istenen sonuç elde edilir.

Şimdi n. mertebeden lineer diferansiyel denklemle birlikte başlangıç değer problemi için temel varlık teoremini verebilecek birikime sahibiz.

TEOREM 1.12:

1. $a_0(x)=0; a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ ve F , $a \le x \le b$ aralığında sürekli olmak üzere

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=F(x) \tag{1.30}$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

2. x_0 , $a \le x \le b$ aralığının bir noktası ve $c_0, c_1, ..., c_{n-1}$ n reel sabitlerin bir kümesi olsun.

Bu durumda (1.30) probleminin

$$\phi(x_0)=c_0, \phi'(x_0)=c_1, ..., \phi^{(n-1)}(x_0)=c_{n-1} \tag{1.31}$$

başlangıç şartlarını sağlayan tek bir ϕ çözümü vardır ve bu çözüm $a \le x \le b$ aralığının tamamında tanımlıdır.

İSPAT:

Teorem 1.13'ın ispatındaki gibi

$$y_1 = y,\ y_2 = \frac{dy}{dx},\ ...,\ y_n = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

alırız. Daha sonra n. mertebeden (1.30) diferansiyel denklemi aşağıdaki lineer sisteme denk olur:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx} = y_2 \\
&\frac{dy_1}{dx} = y_3 \\
&\vdots \\
&\frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n \\
&\frac{dy_n}{dx} = -\frac{a_n(x)}{a_0(x)}y_1 - \frac{a_{n-1}(x)}{a_0(x)}y_2 - \ldots - \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y_n + \frac{F(x)}{a_0(x)}
\end{aligned}\right\} \qquad (1.32)$$

ϕ, (1.30) ın (1.31) şartlarını sağlayan çözümü ise bu durumda $\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n$,sıralı kümesi, $\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n$ olmak üzere

$$\phi_1(x_0) = c_0, \phi_2(x_0) = c_1, \ldots, \phi_n(x_0) = c_{n-1} \qquad (1.33)$$

Şartlarını sağlayan (1.32) lineer sisteminin bir çözümüdür.

(1.32) sistemi, Teorem 1.11'nin uyguladığı (1.27) lineer sisteminin basitçe özel bir halidir. Bu nedenle (1.32) sistemi,(1.33) şartlarını sağlayan $a \le x \le b$ aralığının tamamında tanımlı tek bir $\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n$ çözümüne sahiptir. Böylece $\phi = \phi_1$ alırsak (1.32) ve (1.33)'ün (1.30) ve (1.31) ile yukarıda belirtilen denkliği istenen sonucu verir.

SONUÇ:

x_0, $a_0(x) \neq 0$ ve $a_0, a_1, \ldots, a_n$ katsayılarının hepsinin sürekli olduğu bir $a \le x \le b$ aralığının bir noktası olmak üzere, ϕ fonksiyonu

$$\phi(x_0) = 0, \phi'(x_0) = 0, \ldots, \phi^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad (1.34)$$

Bu durumda $a \le x \le b$ aralığındaki her x için $\phi(x) = 0$ olur.

İSPAT:

Önce ϕ 'nin her $x \in [a,b]$ için $\phi(x) = 0$ olacaktır. Fakat Teorem 1.16 ile (1.34) başlangıç şartıyla birlikte başlangıç değer problemi $a \le x \le b$ aralığında tek çözüme sahiptir. Bundan dolayı ifade edilen sonuç gerçeklenir.

2. ADOMİAN AYRIŞTIRMA METODU İLE İLGİLİ TEMEL BİLGİLER

Ayrıştırma Metodu 1980'lerin başından itibaren Adomian [2-4] tarafından verilmiştir. Biz bu metottan bahsederken kısaca AAM kısaltmasını kullanacağız. AAM'ndan [4] yola çıkarak Lineer Olmayan Denklemler Sistemi, Lineer olmayan Diferansiyel Denklemler ve Lineer Olmayan Denklemler Sisteminin değişik başlangıç şartları altındaki analitik ve yaklaşık çözümleri bazı fiziksel problemlerin çözümü, AAM ile hesaplanmıştır. Bu metod çözümü kesin bir sonuca hızla yaklaştıran sonsuz bir seri toplamı olarak düşünülür.

K.Abboui ve Y.Cherruault AAM'yi $f(x)$ lineer olmayan bir fonsiyon olduğunda $f(x)=0$ denklemini çözmek için uygulamışlardır [5].

[6] kaynağında Lineer Denklemler Sistemi için uygulanan Jakobi İterasyon Metodu ile AAM'nin denkliği tartışılmıştır. Bu makalede ayrıca Volterra integral denklemine AAM'nin bir uygulaması konu edilmiştir. Bazı Lineer olmayan fonksiyonlar için Adomian Polinomlarının hesaplanması [7] incelenmiştir. Bu metodun yakınsaklık problemi [8-11]'de Abboui ve Y.Cherruault tarafından yapılmıştır. AAM'nin Kısmi türevli denklemlere uygulamaları [12-18]'de ve kaynaklarda gösterilen atıflarda gerçekleştirilmiştir. AAM'nin çeşitli uygulamaları [19-30] kaynaklarında yer almaktadır.

Biz diferansiyel denklemi

$$Lu + Ru + Nu = g \tag{2.1}$$

olarak inceleyeceğiz. Burada u bilinmeyen, L en yüksek mertebeden türev operatörü, R bir diferansiyel operatör olup, mertebesi L'nin mertebesinden küçüktür. Nu, u'ya göre lineer olmayan terimdir. g ise kaynak fonksiyon olup, bilinendir. L'nin ters operatörü L^{-1} mevcut olsun. O halde (2.1) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u = f - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu) \tag{2.2}$$

Burada f fonsiyonu g'nin integrali ile bir polinomun toplamına eşit olup, polinomun derecesi L'nin mertebesinin bir eksiğinden büyük olamamaktadır. AAM gereği

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \tag{2.3}$$

kabul edeceğiz.

Nu lineer olmayan terimi

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, ..., u_n) \tag{2.4}$$

şeklinde seçilecektir. Burada A_k' lar Adomian polinomlarıdır. Ayrıca A_0 sadece u_0'a; A_1 u_0 ve u_1'e; A_2 u_0, u_1, u_2'ye; nihayet A_n ise sadece u_0, u_1, u_2, …, u_n lere bağlıdır. A_n polinomları

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n} N\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k\right), \ n>0 \tag{2.5}$$

formülüyle belirlebilirdir. $Nu = F(u)$ kabul ederek Adomian polinomlarının birkaçını (2.5) yardımıyla türetirsek, aşağıdaki listeyi verebiliriz.

$$\begin{aligned}
A_0 &= F(u_0) \\
A_1 &= u_1 F'(u_0) \\
A_2 &= u_2 F'(u_0) + \frac{1}{2!}u_1^2 F''(u_0) \\
A_3 &= u_3 F'(u_0) + u_1 u_2 F''(u_0) + \frac{1}{3!}u_1^3 F'''(u_0) \\
A_4 &= u_4 F'(u_0) + (\frac{1}{2!}u_2^2 + u_1 u_3)F''(u_0) + \frac{1}{2!}u_1^2 u_2 F'''(u_3) + \frac{1}{4!}u_1^4 F^{(iv)}(u_0) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.6}$$

(2.3)'ü (2.1)'de yerine yazarak (2.4) denklemini de dikkate alırsak aşağıdaki bağıntıları elde edebiliriz.

$$u_0(x) = f(x)$$

$$u_{n+1}(x) = -L^{-1}\left[Ru_n - A_n\right], \ n>0 \tag{2.7}$$

Böylece (2.3) te (2.7) yi kullanarak çözümü bulmak mümkündür.

Bir sonraki kısımda Adomian polinomlarının hesaplanmasının örnekleri verilmiştir.

2.1 Adomian Polinomlarının Türetilmesi

Bazı Lineer olmayan terimleri içeren fonksiyonlar için Adomian Polinom ifadelerini türetelim. İlk kısımda Maple-10 kullanıldı ve sonuçlar listelendi.

2.1.1 h=F(y) için Adomian Polinomları

$$h=F\left(y_0+sy_1+s^2y_2+s^3y_3+s^4y_4+s^5y_5+s^6y_6+s^7y_7+s^8y_8+s^9y_9+s^{10}y_{10}\right) \tag{2.8}$$

$$A_0=h\big|_{s=0}=F\left(y_0\right)$$

$$A_1=\left.\frac{dh}{ds}\right|_{s=0}=(D(F))(y_0)y_1$$

$$A_2=\frac{1}{2!}\left.\frac{d^2h}{ds^2}\right|_{s=0}=\frac{1}{2}(D^{(2)}(F))\left(y_0\right)y_1^2+(D(F))\left(y_0\right)y_2$$

$$A_3=\frac{1}{3!}\left.\frac{d^{(3)}h}{ds^{(3)}}\right|_{s=0}=\frac{1}{6}(D^{(3)}(F))\left(y_0\right)y_1^3+(D^{(2)}(F))\left(y_0\right)y_1y_2+(D(F))\left(y_0\right)y_3$$

$$A_4=\frac{1}{4!}\left.\frac{d^{(4)}h}{ds^{(4)}}\right|_{s=0}=\frac{1}{24}(D^{(4)}(F))\left(y_0\right)y_1^4+\frac{1}{2}(D^{(3)}(F))\left(y_0\right)y_1^2y_2$$

$$+\frac{1}{2}(D^{(2)}(F))\left(y_0\right)y_2^2+(D^{(2)}(F))\left(y_0\right)y_1y_3+(D(F))\left(y_0\right)y_4$$

$$A_5=\frac{1}{5!}\left.\frac{d^{(5)}h}{ds^{(5)}}\right|_{s=0}=\frac{1}{120}(D^{(5)}(F))\left(y_0\right)y_1^5+\frac{1}{6}(D^{(4)}(F))\left(y_0\right)y_1^3y_2+\frac{1}{2}(D^{(3)}(F))\left(y_0\right)y_1y_2^2$$

$$+\frac{1}{2}(D^{(3)}(F))\left(y_0\right)y_1^2y_3+(D^{(2)}(F))\left(y_0\right)y_2y_3+(D^{(2)}(F))\left(y_0\right)y_1y_4+(D(F))\left(y_0\right)y_5$$

$$A_6=\frac{1}{6!}\left.\frac{d^{(6)}h}{ds^{(6)}}\right|_{s=0}=\frac{1}{720}(D^{(6)}(F))\left(y_0\right)y_1^6+\frac{1}{24}(D^{(5)}(F))\left(y_0\right)y_1^4y_2+\frac{1}{4}(D^{(4)}(F))\left(y_0\right)y_1^2y_2^2$$

$$\frac{1}{6}(D^{(4)}(F))\left(y_0\right)y_1^3y_3+\frac{1}{6}(D^{(3)}(F))\left(y_0\right)y_2^3+(D^{(3)}(F))\left(y_0\right)y_1y_2y_3+\frac{1}{2}(D^{(3)}(F))\left(y_0\right)y_1^2y_4$$

$$+\frac{1}{2}(D^{(2)}(F))\left(y_0\right)y_3^2+(D^{(2)}(F))\left(y_0\right)y_2y_4+(D^{(2)}(F))\left(y_0\right)y_1y_5+(D(F))\left(y_0\right)y_6$$

$$A_7=\frac{1}{7!}\left.\frac{d^{(7)}h}{ds^{(7)}}\right|_{s=0}=\frac{1}{2}(D^{(3)}(F))\left(y_0\right)y_2^2y_3+\frac{1}{120}(D^{(6)}(F))\left(y_0\right)y_1^5y_2+\frac{1}{24}(D^{(5)}(F))\left(y_0\right)y_1^4y_3$$

$$+\frac{1}{5040}(D^{(7)}(F))\left(y_0\right)y_1^7+(D^{(2)}(F))\left(y_0\right)y_1y_6+(D^{(2)}(F))\left(y_0\right)y_2y_5+(D^{(2)}(F))\left(y_0\right)y_3y_4$$

$$+\frac{1}{2}(D^{(3)}(F))\left(y_0\right)y_1^2y_5+\frac{1}{6}(D^{(4)}(F))\left(y_0\right)y_1^3y_4+(D(F))\left(y_0\right)y_7+\frac{1}{6}(D^{(4)}(F))\left(y_0\right)y_1y_2^3$$

$$+\frac{1}{12}(D^{(5)}(F))\left(y_0\right)y_1^3y_2^2+\frac{1}{2}(D^{(4)}(F))\left(y_0\right)y_1^2y_2y_3+\frac{1}{2}(D^{(3)}(F))\left(y_0\right)y_1y_3^2+(D^{(3)}(F))\left(y_0\right)y_1y_2y_4$$

$$A_8 = \frac{1}{8!}\frac{d^{(8)}h}{ds^{(8)}}\bigg|_{s=0} = \frac{1}{2}(D^{(3)}(F))(y_0)y_1^2y_6 + \frac{1}{48}(D^{(6)}(F))(y_0)y_1^4y_2^2 + \frac{1}{720}(D^{(7)}(F))(y_0)y_1^6y_2$$

$$+\frac{1}{6}(D^{(5)}(F))(y_0)y_1^3y_3y_2 + (D^{(3)}(F))(y_0)y_1y_2y_5 + (D^{(3)}(F))(y_0)y_1y_3y_4 + \frac{1}{6}(D^{(4)}(F))(y_0)y_1^3y_5$$

$$+\frac{1}{2}(D^{(4)}(F))(y_0)y_1^2y_4y_2 + \frac{1}{12}(D^{(5)}(F))(y_0)y_1^2y_2^3 + \frac{1}{4}(D^{(4)}(F))(y_0)y_1^2y_3^2 + \frac{1}{2}(D^{(3)}(F))(y_0)y_2y_3^2$$

$$+\frac{1}{2}(D^{(4)}(F))(y_0)y_1y_2^2y_3 + (D(F))(y_0)y_9 + \frac{1}{120}(D^{(6)}(F))(y_0)y_1^5y_3 + (D^{(2)}(F))(y_0)y_2y_6$$

$$+\frac{1}{40320}(D^{(8)}(F))(y_0)y_1^8 + \frac{1}{2}(D^{(3)}(F))(y_0)y_2^2y_4 + \frac{1}{24}(D^{(5)}(F))(y_0)y_1^4y_4 + (D^{(2)}(F))(y_0)y_1y_7$$

$$+(D^{(2)}(F))(y_0)y_3y_5 + \frac{1}{2}(D^{(2)}(F))(y_0)y_4^2 + \frac{1}{24}(D^{(4)}(F))(y_0)y_2^4$$

$$A_9 = \frac{1}{9!}\frac{d^{(9)}h}{ds^{(9)}}\bigg|_{s=0} = \frac{1}{36}(D^{(6)}(F))(y_0)y_1^3y_2^3 + \frac{1}{2}(D^{(6)}(F))(y_0)y_1y_4^2 + (D(F))(y_0)y_9$$

$$+\frac{1}{720}(D^{(7)}(F))(y_0)y_1^6y_3 + \frac{1}{2}(D^{(3)}(F))(y_0)y_1^2y_7 + (D^{(2)}(F))(y_0)y_1y_9 + (D^{(2)}(F))(y_0)y_3y_6$$

$$+\frac{1}{120}(D^{(6)}(F))(y_0)y_1^5y_4 + (D^{(2)}(F))(y_0)y_2y_7 + (D^{(2)}(F))(y_0)y_4y_5 + (D^{(3)}(F))(y_0)y_1y_6y_2$$

$$+\frac{1}{240}(D^{(7)}(F))(y_0)y_1^5y_2^2 + \frac{1}{24}(D^{(6)}(F))(y_0)y_1^4y_2y_3 + \frac{1}{4}(D^{(5)}(F))(y_0)y_1^2y_3y_2^2 + \frac{1}{6}(D^{(3)}(F))(y_0)y_3^3$$

$$+\frac{1}{2}(D^{(4)}(F))(y_0)y_1^2y_3y_4 + \frac{1}{362880}(D^{(9)}(F))(y_0)y_1^9 + \frac{1}{6}(D^{(5)}(F))(y_0)y_1^3y_4y_2 + (D^{(3)}(F))(y_0)y_1y_3y_5$$

$$+(D^{(3)}(F))(y_0)y_2y_3y_4 + \frac{1}{2}(D^{(4)}(F))(y_0)y_1y_3^2y_2 + \frac{1}{2}(D^{(4)}(F))(y_0)y_1^2y_2y_5 + \frac{1}{2}(D^{(4)}(F))(y_0)y_2^2y_1y_4$$

$$+\frac{1}{5040}(D^{(8)}(F))(y_0)y_1^7y_2 + \frac{1}{12}(D^{(5)}(F))(y_0)y_1^3y_3^2 + \frac{1}{2}(D^{(3)}(F))(y_0)y_2^2y_5 + \frac{1}{6}(D^{(4)}(F))(y_0)y_2^3y_3$$

$$+\frac{1}{24}(D^{(5)}(F))(y_0)y_1^4y_5 + \frac{1}{24}(D^{(5)}(F))(y_0)y_2^4y_1 + \frac{1}{6}(D^{(4)}(F))(y_0)y_1^3y_6$$

$$A_{10} = \frac{1}{10!}\frac{d^{(10)}h}{ds^{(10)}}\bigg|_{s=0} = (D^{(2)}(F))(y_0)y_1y_9 + \frac{1}{40320}(D^{(9)}(F))(y_0)y_2y_1^8 + \frac{1}{48}(D^{(6)}(F))(y_0)y_1^4y_3^2$$

$$+\frac{1}{48}(D^{(6)}(F))(y_0)y_1^2y_2^4 + \frac{1}{144}(D^{(7)}(F))(y_0)y_1^4y_2^3 + \frac{1}{3628800}(D^{(10)}(F))(y_0)y_1^{10}$$

$$+\frac{1}{120}(D^{(7)}(F))(y_0)y_1^5y_2y_3 + \frac{1}{24}(D^{(6)}(F))(y_0)y_1^4y_2y_4 + \frac{1}{2}(D^{(4)}(F))(y_0)y_1^2y_6y_2$$

$$+\frac{1}{12}(D^{(6)}(F))(y_0)y_1^3y_2^2y_3 + (D^{(3)}(F))(y_0)y_1y_7y_2 + (D^{(3)}(F))(y_0)y_1y_6y_3$$

$$+\frac{1}{4}(D^{(5)}(F))(y_0)y_1^2y_2^2y_4+(D^{(3)}(F))(y_0)y_1y_4y_5+\frac{1}{6}(D^{(5)}(F))(y_0)y_1^3y_5y_2$$

$$+(D^{(3)}(F))(y_0)y_2y_3y_5+\frac{1}{2}(D^{(4)}(F))(y_0)y_1y_2^2y_5+\frac{1}{6}(D^{(5)}(F))(y_0)y_2^3y_1y_3$$

$$+\frac{1}{4}(D^{(5)}(F))(y_0)y_1^2y_3^2y_2+\frac{1}{6}(D^{(5)}(F))(y_0)y_1^3y_3y_4+\frac{1}{2}(D^{(2)}(F))(y_0)y_5^2$$

$$+\frac{1}{120}(D^{(5)}(F))(y_0)y_2^5+(D(F))(y_0)y_{10}+(D^{(4)}(F))(y_0)y_1y_2y_3y_4$$

$$+\frac{1}{2}(D^{(3)}(F))(y_0)y_2^2y_6+\frac{1}{4}(D^{(4)}(F))(y_0)y_1^2y_4^2+\frac{1}{5040}(D^{(8)}(F))(y_0)y_1^7y_3$$

$$+\frac{1}{6}(D^{(4)}(F))(y_0)y_1^3y_7+\frac{1}{1440}(D^{(8)}(F))(y_0)y_1^6y_2^2+\frac{1}{2}(D^{(3)}(F))(y_0)y_4^2y_2$$

$$+\frac{1}{2}(D^{(3)}(F))(y_0)y_3^2y_4+\frac{1}{6}(D^{(4)}(F))(y_0)y_3^3y_1+\frac{1}{2}(D^{(3)}(F))(y_0)y_1^2y_9$$

$$+\frac{1}{720}(D^{(7)}(F))(y_0)y_1^6y_4+(D^{(2)}(F))(y_0)y_2y_9+\frac{1}{120}(D^{(6)}(F))(y_0)y_1^5y_5$$

$$+(D^{(2)}(F))(y_0)y_6y_4+(D^{(2)}(F))(y_0)y_3y_7+\frac{1}{24}(D^{(5)}(F))(y_0)y_1^4y_6$$

$$+\frac{1}{6}(D^{(4)}(F))(y_0)y_2^3y_4+\frac{1}{4}(D^{(4)}(F))(y_0)y_2^2y_3^2+\frac{1}{2}(D^{(4)}(F))(y_0)y_1^2y_3y_5$$

2.1.2 $F(y)=y^2$ için Adomian Polinomları

$$h=\left(y_0+sy_1+s^2y_2+s^3y_3+s^4y_4+s^5y_5+s^6y_6+s^7y_7+s^8y_8+s^9y_9+s^{10}y_{10}\right)^2 \tag{2.9}$$

$$A_0=h\big|_{s=0}=y_0^2$$

$$A_1=\frac{dh}{ds}\bigg|_{s=0}=2y_0y_1$$

$$A_2=\frac{1}{2!}\frac{d^2h}{ds^2}\bigg|_{s=0}=y_1^2+2y_0y_2$$

$$A_3=\frac{1}{3!}\frac{d^{(3)}h}{ds^{(3)}}\bigg|_{s=0}=2y_1y_2+2y_0y_3$$

$$A_4=\frac{1}{4!}\frac{d^{(4)}h}{ds^{(4)}}\bigg|_{s=0}=y_2^2+2y_1y_3+2y_0y_4$$

$$A_5=\frac{1}{5!}\frac{d^{(5)}h}{ds^{(5)}}\bigg|_{s=0}=2y_2y_3+2y_1y_4+2y_0y_5$$

$$A_6 = \frac{1}{6!}\frac{d^{(6)}h}{ds^{(6)}}\bigg|_{s=0} = y_3^2 + 2y_2y_4 + 2y_1y_5 + 2y_0y_6$$

$$A_7 = \frac{1}{7!}\frac{d^{(7)}h}{ds^{(7)}}\bigg|_{s=0} = 2y_3y_4 + 2y_2y_5 + 2y_1y_6 + 2y_0y_7$$

$$A_8 = \frac{1}{8!}\frac{d^{(8)}h}{ds^{(8)}}\bigg|_{s=0} = y_4^2 + 2y_3y_5 + 2y_2y_6 + 2y_1y_7 + 2y_0y_8$$

$$A_9 = \frac{1}{9!}\frac{d^{(9)}h}{ds^{(9)}}\bigg|_{s=0} = 2y_4y_5 + 2y_3y_6 + 2y_2y_7 + 2y_1y_8 + 2y_0y_9$$

$$A_{10} = \frac{1}{10!}\frac{d^{(10)}h}{ds^{(10)}}\bigg|_{s=0} = y_5^2 + 2y_4y_6 + 2y_3y_7 + 2y_2y_8 + 2y_1y_9 + 2y_0y_2$$

2.1.3 $F(y) = y^3$ için Adomian Polinomları

$$h = \left(y_0 + sy_1 + s^2y_2 + s^3y_3 + s^4y_4 + s^5y_5 + s^6y_6 + s^7y_7 + s^8y_8 + s^9y_9 + s^{10}y_{10}\right)^3 \quad (2.10)$$

$$A_0 = h\big|_{s=0} = y_0^3$$

$$A_1 = \frac{dh}{ds}\bigg|_{s=0} = 3y_0^2y_1$$

$$A_2 = \frac{1}{2!}\frac{d^2h}{ds^2}\bigg|_{s=0} = 3y_0y_1^2 + 3y_0^2y_2$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}\frac{d^{(3)}h}{ds^{(3)}}\bigg|_{s=0} = y_1^3 + 6y_0y_1y_2 + 3y_0^2y_3$$

$$A_4 = \frac{1}{4!}\frac{d^{(4)}h}{ds^{(4)}}\bigg|_{s=0} = 3y_1^2y_2 + 3y_0y_2^2 + 6y_0y_1y_3 + 3y_0^2y_4$$

$$A_5 = \frac{1}{5!}\frac{d^{(5)}h}{ds^{(5)}}\bigg|_{s=0} = 3y_1y_2^2 + 3y_1^2y_3 + 6y_0y_2y_3 + 6y_0y_1y_4 + 3y_0^2y_5$$

$$A_6 = \frac{1}{6!}\frac{d^{(6)}h}{ds^{(6)}}\bigg|_{s=0} = y_2^3 + 6y_1y_2y_3 + 3y_1^2y_4 + 3y_0y_3^2 + 6y_0y_2y_4 + 6y_0y_1y_5 + 3y_0^2y_6$$

$$A_7 = \frac{1}{7!}\frac{d^{(7)}h}{ds^{(7)}}\bigg|_{s=0} = 3y_2^2y_3 + 3y_1y_3^2 + 6y_1y_2y_4 + 3y_1^2y_5 + 6y_0y_2y_5 + 6y_0y_1y_6 + 6y_0y_3y_4 + 3y_0^2y_7$$

$$A_8 = \frac{1}{8!}\frac{d^{(8)}h}{ds^{(8)}}\bigg|_{s=0} = 3y_2y_3^2 + 3y_2^2y_4 + 6y_1y_3y_4 + 6y_1y_2y_5 + 3y_1^2y_6 + 3y_0y_4^2 + 6y_0y_3y_5 + 6y_0y_2y_6$$

$$+6y_0y_1y_7 + 3y_0^2y_8$$

$$A_9=\frac{1}{9!}\frac{d^{(9)}h}{ds^{(9)}}\bigg|_{s=0}=6y_2y_3y_4+6y_0y_1y_8+6y_1y_3y_5+6y_0y_2y_7+6y_0y_3y_6+3y_1y_4^2+6y_0y_4y_5$$

$$+6y_1y_2y_6+3y_2^2y_5+3y_1^2y_7+3y_0^2y_9+y_3^3$$

$$A_{10}=\frac{1}{10!}\frac{d^{(10)}h}{ds^{(10)}}\bigg|_{s=0}=6y_0y_1y_9+6y_2y_3y_5+3y_3^2y_4+6y_0y_4y_6+6y_1y_2y_7+6y_1y_3y_6+6y_1y_4y_5$$

$$+6y_0y_3y_7+6y_0y_2y_8+3y_1^2y_8+3y_2y_4^2+3y_0y_5^2+3y_2^2y_6+3y_0^2y_{10}$$

2.1.4 $F(y)=y\cdot y_x$ için Adomian Polinomları

$$h=\left(y_0+sy_1+s^2y_2+s^3y_3+s^4y_4+s^5y_5+s^6y_6+s^7y_7+s^8y_8+s^9y_9+s^{10}y_{10}\right)\cdot$$
$$\left(t_0+st_1+s^2t_2+s^3t_3+s^4t_4+s^5t_5+s^6t_6+s^7t_7+s^8t_8+s^9t_9+s^{10}t_{10}\right) \tag{2.11}$$

$$A_0=h|_{s=0}=y_0t_0$$

$$A_1=\frac{dh}{ds}\bigg|_{s=0}=y_1t_0+y_0t_1$$

$$A_2=\frac{1}{2!}\frac{d^2h}{ds^2}\bigg|_{s=0}=y_2t_0+y_1t_1+y_0t_2$$

$$A_3=\frac{1}{3!}\frac{d^{(3)}h}{ds^{(3)}}\bigg|_{s=0}=y_0t_3+y_2t_1+y_1t_2+y_0t_3$$

$$A_4=\frac{1}{4!}\frac{d^{(4)}h}{ds^{(4)}}\bigg|_{s=0}=y_4t_0+y_3t_1+y_2t_2+y_1t_3+y_0t_4$$

$$A_5=\frac{1}{5!}\frac{d^{(5)}h}{ds^{(5)}}\bigg|_{s=0}=y_5t_0+y_4t_1+y_3t_2+y_2t_3+y_1t_4+y_0t_5$$

$$A_6=\frac{1}{6!}\frac{d^{(6)}h}{ds^{(6)}}\bigg|_{s=0}=y_6t_0+y_5t_1+y_4t_2+y_3t_3+y_2t_4+y_1t_5+y_0t_6$$

$$A_7=\frac{1}{7!}\frac{d^{(7)}h}{ds^{(7)}}\bigg|_{s=0}=y_7t_0+y_6t_1+y_5t_2+y_4t_3+y_3t_4+y_2t_5+y_1t_6+y_0t_7$$

$$A_8=\frac{1}{8!}\frac{d^{(8)}h}{ds^{(8)}}\bigg|_{s=0}=y_8t_0+y_7t_1+y_6t_2+y_5t_3+y_4t_4+y_3t_5+y_2t_6+y_1t_7+y_0t_8$$

$$A_9=\frac{1}{9!}\frac{d^{(9)}h}{ds^{(9)}}\bigg|_{s=0}=y_9t_0+y_8t_1+y_7t_2+y_6t_3+y_5t_4+y_4t_5+y_3t_6+y_2t_7+y_1t_8+y_0t_9$$

$$A_{10}=\frac{1}{10!}\frac{d^{(10)}h}{ds^{(10)}}\bigg|_{s=0}=y_{10}t_0+y_9t_1+y_8t_2+y_7t_3+y_6t_4+y_5t_5+y_4t_6+y_3t_7+y_2t_8+y_1t_9+y_0t_{10}$$

2.1.5 $F(y)=y^2\cdot y_x$ için Adomian Polinomları

$$h=\left(y_0+sy_1+s^2y_2+s^3y_3+s^4y_4+s^5y_5+s^6y_6+s^7y_7+s^8y_8+s^9y_9+s^{10}y_{10}\right)^2\cdot$$
$$\left(t_0+st_1+s^2t_2+s^3t_3+s^4t_4+s^5t_5+s^6t_6+s^7t_7+s^8t_8+s^9t_9+s^{10}t_{10}\right) \tag{2.12}$$

$$A_0=h|_{s=0}=y_0^2t_0$$

$$A_1=\frac{dh}{ds}\bigg|_{s=0}=2y_1t_0+y_0^2t_1$$

$$A_2=\frac{1}{2!}\frac{d^2h}{ds^2}\bigg|_{s=0}=y_1^2t_0+2y_0y_1t_1+2y_0y_2t_0+y_0^2t_2$$

$$A_3=\frac{1}{3!}\frac{d^{(3)}h}{ds^{(3)}}\bigg|_{s=0}=2y_1y_2t_0+y_1^2t_1+2y_0y_1t_2+2y_0y_2t_1+2y_0y_3t_0+y_0^2t_3$$

$$A_4=\frac{1}{4!}\frac{d^{(4)}h}{ds^{(4)}}\bigg|_{s=0}=y_2^2t_0+2y_1y_2t_1+2y_1y_3t_0+y_1^2t_2+2y_0y_1t_3+2y_0y_2t_2+2y_0y_3t_1+y_0^2t_4$$

$$A_5=\frac{1}{5!}\frac{d^{(5)}h}{ds^{(5)}}\bigg|_{s=0}=2y_2y_3t_0+y_2^2t_1+2y_1y_2t_2+2y_1y_3t_1+2y_1y_4t_0+y_1^2t_3+2y_0y_1t_4+2y_0y_2t_3$$
$$+2y_0y_3t_2+2y_0y_4t_1+2y_0y_5t_0+y_0^2t_5$$

$$A_6=\frac{1}{6!}\frac{d^{(6)}h}{ds^{(6)}}\bigg|_{s=0}=2y_1y_3t_2+2y_2y_3t_1+2y_1y_4t_1+2y_1y_2t_3+y_3^2t_0+2y_1y_5t_0+2y_2y_4t_0+2y_0y_1t_5$$
$$+2y_0y_2t_4+2y_0y_3t_3+2y_0y_4t_2+2y_0y_5t_1+2y_0y_6t_0+y_2^2t_2+y_1^2t_4+y_0^2t_6$$

$$A_7=\frac{1}{7!}\frac{d^{(7)}h}{ds^{(7)}}\bigg|_{s=0}=2y_2y_3t_2+y_2^2t_3+y_1^2t_5+y_0^2t_7+y_3^2t_1+2y_0y_1t_6+2y_1y_2t_4+2y_3y_4t_0+2y_2y_4t_1$$
$$+2y_2y_5t_0+2y_1y_3t_3+2y_1y_4t_2+2y_1y_5t_1+2y_1y_6t_0+2y_0y_2t_5+2y_0y_3t_4+2y_0y_4t_3+2y_0y_5t_2$$
$$+2y_0y_6t_1+2y_0y_7t_0$$

$$A_8=\frac{1}{8!}\frac{d^{(8)}h}{ds^{(8)}}\bigg|_{s=0}=2y_1y_3t_4+2y_3y_5t_0+2y_2y_5t_1+2y_2y_6t_0+2y_1y_6t_1+2y_0y_7t_1+2y_1y_7t_0$$
$$+2y_0y_8t_0+2y_3y_4t_1+2y_2y_3t_3+2y_1y_2t_5+y_4^2t_0+y_2^2t_4+y_0^2t_8+y_1^2t_6+y_3^2t_2+2y_0y_2t_6$$
$$+2y_0y_3t_5+2y_1y_4t_3+2y_0y_4t_4+2y_0y_5t_3+2y_1y_5t_2+2y_0y_6t_2+2y_2y_4t_2+2y_0y_7t_1+2y_0y_1t_7$$

$$A_9=\frac{1}{9!}\frac{d^{(9)}h}{ds^{(9)}}\bigg|_{s=0}=y_4^2t_1+y_0^2t_9+y_1^2t_7+2y_4y_5t_0+2y_1y_4t_4+2y_3y_6t_0+2y_2y_7t_0+2y_1y_6t_2$$
$$+2y_1y_7t_1+2y_0y_7t_2+2y_0y_8t_1+2y_1y_8t_0+2y_3y_4t_2+2y_0y_1t_8+2y_3y_5t_1+2y_1y_2t_6+2y_2y_6t_1$$
$$+2y_0y_6t_3+y_2^2t_5+2y_2y_5t_2+2y_2y_4t_3+2y_1y_5t_3+2y_0y_5t_4+y_3^2t_3+2y_0y_4t_5+2y_1y_3t_5+2y_0y_2t_7$$
$$+2y_2y_3t_4+2y_0y_3t_6+2y_0y_9t_0$$

$$A_{10}=\frac{1}{10!}\frac{d^{(10)}h}{ds^{(10)}}\bigg|_{s=0}=2y_4y_5t_1+2y_2y_4t_4+2y_1y_5t_4+2y_3y_7t_0+2y_2y_8t_0+2y_1y_7t_2+2y_1y_8t_1+2y_0y_8t_2$$
$$+2y_3y_6t_1+2y_0y_{10}t_0+2y_3y_4t_3+2y_0y_9t_1+2y_0y_1t_9+2y_1y_9t_0+y_5^2t_0+y_3^2t_4+y_4^2t_2+y_0^2t_{10}+y_1^2t_8$$
$$+2y_1y_3t_6+2y_1y_2t_7+2y_0y_5t_5+2y_1y_4t_5+2y_0y_7t_3+2y_2y_6t_2+2y_3y_5t_2+2y_0y_6t_4+2y_2y_7t_1+2y_2y_5t_3$$
$$+2y_0y_2t_8+2y_0y_3t_7+2y_2y_3t_5+2y_1y_6t_3+y_2^2t_6+2y_0y_4t_6$$

2.1.6 $F(y)=\sin(y)$ **için Adomian Polinomları**

$$h=\left(y_0+sy_1+s^2y_2+s^3y_3+s^4y_4+s^5y_5+s^6y_6+s^7y_7+s^8y_8+s^9y_9+s^{10}y_{10}\right) \tag{2.13}$$

$$A_0=h\big|_{s=0}=\sin(y_0)$$

$$A_1=\frac{dh}{ds}\bigg|_{s=0}=\cos(y_0)y_1$$

$$A_2=\frac{1}{2!}\frac{d^2h}{ds^2}\bigg|_{s=0}=-\frac{1}{2}\sin(y_0)y_1^2+\cos(y_0)y_2$$

$$A_3=\frac{1}{3!}\frac{d^{(3)}h}{ds^{(3)}}\bigg|_{s=0}=-\frac{1}{6}\cos(y_0)y_1^3-\sin(y_0)y_1y_2+\cos(y_0)y_3$$

$$A_4=\frac{1}{4!}\frac{d^{(4)}h}{ds^{(4)}}\bigg|_{s=0}=\frac{1}{24}\sin(y_0)y_1^4-\frac{1}{2}\cos(y_0)y_1^2y_2-\frac{1}{2}\sin(y_0)y_2^2-\sin(y_0)y_1y_3+\cos(y_0)y_4$$

$$A_5=\frac{1}{5!}\frac{d^{(5)}h}{ds^{(5)}}\bigg|_{s=0}=\frac{1}{120}\cos(y_0)y_1^5+\frac{1}{6}\sin(y_0)y_1^3y_2-\frac{1}{2}\cos(y_0)y_1y_2^2-\frac{1}{2}\cos(y_0)y_1^2y_3-\sin(y_0)y_2y_3$$
$$-\sin(y_0)y_1y_4+\cos(y_0)y_5$$

$$A_6=\frac{1}{6!}\frac{d^{(6)}h}{ds^{(6)}}\bigg|_{s=0}=-\frac{1}{720}\sin(y_0)y_1^6+\frac{1}{24}\cos(y_0)y_1^4y_2+\frac{1}{4}\sin(y_0)y_1^2y_2^2+\frac{1}{6}\sin(y_0)y_1^3y_3-\frac{1}{6}\cos(y_0)y_2^3$$
$$-\cos(y_0)y_1y_2y_3-\frac{1}{2}\cos(y_0)y_1^2y_4-\frac{1}{2}\sin(y_0)y_3^2-\sin(y_0)y_2y_4-\sin(y_0)y_1y_5+\cos(y_0)y_6$$

$$A_7 = \frac{1}{7!}\frac{d^{(7)}h}{ds^{(7)}}\bigg|_{s=0} = \cos(y_0)y_7 - \sin(y_0)y_2y_5 - \sin(y_0)y_1y_6 + \frac{1}{24}\cos(y_0)y_1^4y_3 - \frac{1}{5040}\cos(y_0)y_1^7$$

$$-\frac{1}{120}\sin(y_0)y_1^5y_2 - \frac{1}{2}\cos(y_0)y_2^2y_3 + \frac{1}{6}\sin(y_0)y_1y_2^3 + \frac{1}{2}\sin(y_0)y_1^2y_2y_3 + \frac{1}{6}\sin(y_0)y_1^3y_4$$

$$+\frac{1}{12}\cos(y_0)y_1^3y_2^2 - \frac{1}{2}\cos(y_0)y_3^2y_1 - \cos(y_0)y_1y_2y_4 - \frac{1}{2}\cos(y_0)y_1^2y_5 - \sin(y_0)y_3y_4$$

$$A_8 = \frac{1}{8!}\frac{d^{(8)}h}{ds^{(8)}}\bigg|_{s=0} = -\frac{1}{720}\cos(y_0)y_1^6y_2 + \frac{1}{24}\cos(y_0)y_1^4y_4 - \sin(y_0)y_3y_5 - \sin(y_0)y_1y_7$$

$$-\frac{1}{120}\sin(y_0)y_1^5y_3 - \sin(y_0)y_2y_6 - \frac{1}{2}\cos(y_0)y_4y_2^2 + \frac{1}{24}\sin(y_0)y_2^4 + \frac{1}{6}\sin(y_0)y_1^3y_5$$

$$-\frac{1}{2}\cos(y_0)y_1^2y_6 - \cos(y_0)y_1y_2y_5 + \cos(y_0)y_8 + \frac{1}{40320}\sin(y_0)y_1^8 + \frac{1}{6}\cos(y_0)y_1^3y_3y_2$$

$$-\frac{1}{48}\sin(y_0)y_1^4y_2^2 - \frac{1}{2}\cos(y_0)y_3^2y_2 + \frac{1}{2}\sin(y_0)y_1y_3y_2^2 + \frac{1}{4}\sin(y_0)y_1^2y_3^2 + \frac{1}{12}\cos(y_0)y_1^2y_2^3$$

$$+\frac{1}{2}\sin(y_0)y_1^2y_2y_4 - \cos(y_0)y_1y_3y_4 - \frac{1}{2}\sin(y_0)y_4^2$$

$$A_9 = \frac{1}{9!}\frac{d^{(9)}h}{ds^{(9)}}\bigg|_{s=0} = \frac{1}{5040}\sin(y_0)y_1^7y_2 - \sin(y_0)y_1y_8 - \frac{1}{240}\cos(y_0)y_1^5y_2^2 - \sin(y_0)y_2y_7$$

$$-\frac{1}{720}\cos(y_0)y_1^6y_3 + \frac{1}{24}\cos(y_0)y_1^4y_5 - \sin(y_0)y_4y_5 - \frac{1}{120}\sin(y_0)y_1^5y_4 - \frac{1}{2}\cos(y_0)y_2^2y_5$$

$$+\frac{1}{24}\cos(y_0)y_1y_2^4 + \frac{1}{6}\sin(y_0)y_1^3y_6 + \frac{1}{6}\sin(y_0)y_2^3y_3 + \frac{1}{362880}\cos(y_0)y_1^9 - \frac{1}{6}\cos(y_0)y_3^3$$

$$+\cos(y_0)y_9 + \frac{1}{2}\sin(y_0)y_1y_3^2y_2 + \frac{1}{2}\sin(y_0)y_1^2y_3y_4 + \frac{1}{4}\cos(y_0)y_1^2y_3y_2^2 - \cos(y_0)y_1y_3y_5$$

$$-\frac{1}{24}\sin(y_0)y_1^4y_2y_3 - \cos(y_0)y_1y_2y_6 - \cos(y_0)y_2y_3y_4 + \frac{1}{2}\sin(y_0)y_1y_4y_2^2 + \frac{1}{2}\sin(y_0)y_1^2y_5y_2$$

$$+\frac{1}{6}\cos(y_0)y_1^3y_4y_2 - \sin(y_0)y_3y_6 + \frac{1}{12}\cos(y_0)y_1^3y_3^2 - \frac{1}{36}\sin(y_0)y_1^3y_2^3 - \frac{1}{2}\cos(y_0)y_1y_4^2$$

$$-\frac{1}{2}\cos(y_0)y_1^2y_7$$

$$A_{10} = \frac{1}{10!}\frac{d^{(10)}h}{ds^{(10)}}\bigg|_{s=0} = -\frac{1}{2}\sin(y_0)y_5^2 - \frac{1}{3628800}\sin(y_0)y_1^{10} - \sin(y_0)y_2y_8 + \frac{1}{5040}\sin(y_0)y_1^7y_3$$

$$-\frac{1}{120}\sin(y_0)y_1^5y_5 - \frac{1}{48}\sin(y_0)y_1^4y_3^2 - \sin(y_0)y_3y_7 + \frac{1}{1440}\sin(y_0)y_1^6y_2^2 + \frac{1}{4}\sin(y_0)y_2^2y_3^2$$

$$-\sin(y_0)y_1y_9 - \sin(y_0)y_4y_6 - \frac{1}{2}\cos(y_0)y_1^2y_8 - \frac{1}{4032}\cos(y_0)y_1^8y_2 - \frac{1}{144}\cos(y_0)y_1^4y_2^3$$

$$-\frac{1}{720}\cos(y_0)y_1^6y_4-\frac{1}{2}\cos(y_0)y_2^2y_6-\frac{1}{48}\sin(y_0)y_1^2y_2^4+\frac{1}{6}\sin(y_0)y_1^3y_7-\frac{1}{2}\cos(y_0)y_3^2y_4$$

$$+\frac{1}{6}\cos(y_0)y_1^3y_3y_4+\frac{1}{4}\cos(y_0)y_1^2y_3^2y_2-\frac{1}{120}\cos(y_0)y_1^5y_2y_3-\cos(y_0)y_1y_2y_7$$

$$+\frac{1}{6}\cos(y_0)y_1^3y_5y_2-\cos(y_0)y_1y_4y_5-\frac{1}{24}\sin(y_0)y_1^4y_4y_2-\cos(y_0)y_1y_3y_6-\cos(y_0)y_5y_2y_3$$

$$+\frac{1}{2}\sin(y_0)y_2^2y_1y_5+\frac{1}{24}\cos(y_0)y_1^4y_6+\sin(y_0)y_1y_2y_3y_4+\frac{1}{6}\cos(y_0)y_1y_3y_2^3+\frac{1}{4}\sin(y_0)y_1^2y_4^2$$

$$+\frac{1}{2}\sin(y_0)y_1^2y_2y_6-\frac{1}{12}\sin(y_0)y_1^3y_2^2y_3+\frac{1}{2}\sin(y_0)y_1^2y_3y_5+\frac{1}{4}\cos(y_0)y_1^2y_2^2y_4+\cos(y_0)y_{10}$$

$$+\frac{1}{120}\cos(y_0)y_2^5+\frac{1}{6}\sin(y_0)y_1y_3^3+\frac{1}{6}\sin(y_0)y_2^3y_4-\frac{1}{2}\cos(y_0)y_2y_4^2$$

Biz bu metodu lineer olmayan Adi Diferansiyel Denklemleri çözmek için genişletiyoruz.

2.2 Lineer Olmayan Denklemler Sistemi için AAM'nin Uygulanması

Lineer Olmayan Denklemler Sistemini aşağıdaki gibi ele alalım.

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1,x_2,...,x_n)=0 \\ f_2(x_1,x_2,...,x_n)=0 \\ \vdots \\ f_n(x_1,x_2,...,x_n)=0 \end{array}\right\} \qquad (2.14)$$

Her bir f_i fonksiyonu n-boyutlu R^n uzayındaki $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ vektörünü R reel sayı doğrusuna eşleştirir. Biz bu (2.14) sisteminin tek bir çözümünün olduğunu düşünüyoruz [6].

AAM'yi (2.14) nolu sisteme uygulayalım.

(2.14) Sistemindeki i. denklemi

$$f_i(x_1,x_2,...,x_n)=0 \qquad (2.15)$$

şeklinde ele alalım. Genelliği bozulmadan x_i 'yi aşağıdaki şekilde gösterelim.

$$x_i=c_i+g_i(x_1,x_2,...,x_n) \qquad (2.16)$$

Bu gösterim her zaman mümkündür.

$g_i(x_1,x_2,...,x_n)$ Lineer olmayan fonksiyon ve c_i sabittir.

AAM'yi kullanmak için

$x_i = \sum_{m=0}^{\infty} x_{im}$ ve $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{im}$ kabul edelim. Burada

A_{im}'ler x_i'lere bağlı Adomian Polinomlarıdır.

(2.16) nolu denklem aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_{im} = c_i + \sum_{m=0}^{\infty} A_{im} \tag{2.17}$$

$$\begin{cases} x_{i0} = c_i \\ x_{i,m+1} = A_{im} \end{cases} \quad \text{ve} \quad i = 1,2,...,n \text{ ,m=0,1,2,...} \tag{2.18}$$

(2.17) nolu denklemden (2.18) nolu eşitlikleri tanımlarız. Adomian Polinomlarını oluşturmak için

$$A_{im}(x_{10},...,x_{1m},...,x_{n0},...,x_{nm}) = \frac{1}{m!}\left[\frac{d^m}{d\lambda^m} g_i(x_1, x_2, ..., x_n)\right]_{\lambda=0} \tag{2.19}$$

formülü

$$x_{i\lambda} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j x_{ij} \tag{2.20}$$

ile birlikte kullanılır.

Elde edilen sonuç aşağıdaki gibidir.

$$A_{i0}(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) = g_i(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$$

$$A_{im}(x_{10},...,x_{1m}, x_{20},...,x_{2m},...,x_{n0},...,x_{nm})$$

$$= \sum_{\Omega} \left(\frac{x_{11}^{k_{11}}}{k_{11}!} \cdots \frac{x_{m1}^{k_{m1}}}{k_{m1}!}\right)\left(\frac{x_{12}^{k_{12}}}{k_{12}!} \cdots \frac{x_{m2}^{k_{m2}}}{k_{m2}!}\right) \cdots \left(\frac{x_{1n}^{k_{1n}}}{k_{1n}!} \cdots \frac{x_{mn}^{k_{mn}}}{k_{mn}!}\right)$$

$$\times \frac{\partial^{\Omega_1+\Omega_2+...+\Omega_n}}{\partial x_1^{\Omega_1} \partial x_2^{\Omega_2} ... \partial x_n^{\Omega_n}} g_i(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) \quad m \neq 0 \tag{2.21}$$

Burada Ω

$(k_{11} + 2k_{21} + ... + mk_{m1}) + ... + (k_{1m} + 2k_{2m} + ... + mk_{mn}) = m$ ifadesine karşılık gelir.

$\Omega_i = k_{1i} + k_{2i} + ... + k_{mi}$ dir.

TEOREM: Aşağıdaki koşullar sağlanmış olsun.

1) $g_{i\lambda}\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ ifadesi, $\|x\|<R$ deki $x_1,x_2,...,x_n$ değişkenlerine bağlı bir analitik fonksiyon

2) ($i=1,2,...,n$) olmak üzere x_i, $x_i=\sum x_{im}$ sonsuz seriye ayrıştırılabilir olsun.

3) $x_{i\lambda}=\sum x_{im}\lambda^m$ parametrik ifadesi $\lambda\in[-1,1]$ için mutlak yakınsak olsun. ve x_i serisinin terimleri

$$\frac{m'}{n(1+\varepsilon)}\left(1+\frac{1}{1+\varepsilon}\left(\frac{\lambda}{p}\right)+...+\frac{1}{(1+\varepsilon)^n}\left(\frac{\lambda}{p}\right)^n+...\right) \tag{2.22}$$

serisinin uygun terimlerinden mutlak değerce büyük olmasın.

Burada $m'\geq M$, (M, x_i için üst limit) $\varepsilon>\left(\frac{M}{R}\right)$ ve $p\geq 1$ dir.

O halde Çifte seri $\lambda=1$ için yakınsar.

İSPAT:

$g_{i\lambda}\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$, $\|x\|<R$ de analitik fonksiyon olsun. O halde

$$g_{i\lambda}\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\leq L\left(1+n\left(\frac{x}{R'}\right)+...+n^n\left(\frac{x}{R'}\right)^n+...\right) \tag{2.23}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Burada $\left\|g_{i\lambda}\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\right\|^*\leq L$ ($\|\ \|^*$:Dual Norm)

$x=\max\{x_1,x_2,...,x_n\}$ ve $R'\in[M,R]$ dir.

(2.49) yardımıyla $x\leq\frac{m'}{n(1+\varepsilon)}\left(1+\frac{1}{1+\varepsilon}\left(\frac{\lambda}{p}\right)+...+\frac{1}{(1+\varepsilon)^n}\left(\frac{\lambda}{p}\right)^n+...\right)$

$$=\frac{m'}{n(1+\varepsilon)}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1+\varepsilon}\left(\frac{\lambda}{p}\right)}\right)=\frac{m'}{n\left(1+\varepsilon-\frac{\lambda}{p}\right)} \tag{2.24}$$

yazılabilir. (2.24)'i (2.23)'da yerine koyarak

$$g_{i\lambda}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\le L\left[1+\frac{m'}{R'\left[1+\varepsilon-\left(\frac{\lambda}{p}\right)\right]}+\left(\frac{m'}{R'\left[1+\varepsilon-\left(\frac{\lambda}{p}\right)\right]}\right)^2\right.$$

$$\left.+\ldots+\left(\frac{m'}{R'\left[1+\varepsilon-\left(\frac{\lambda}{p}\right)\right]}\right)^n\right] \tag{2.25}$$

ifadesini elde ederiz. Açık olarak (2.23) deki yakınsamadan bahsetmemiz için

$$\frac{m'}{R'\left[1+\varepsilon-\left(\frac{\lambda}{p}\right)\right]}<1 \tag{2.26}$$

olması aşikardır. Bir başka deyişle

$$\lambda<p\left(1+\varepsilon-\frac{M}{R'}\right) \tag{2.27}$$

olmalıdır. $p=1$ seçersek $\left(\frac{M}{R'}\right)<\varepsilon$ koşulu sağlandığında $\lambda=1$ için (2.23) serisi yakınsayacaktır.

Şimdi ise AAM ile Lineer olmayan denklemler sisteminin nasıl çözüldüğünü iki örnekte uygulayalım.

ÖRNEK 1:

Aşağıdaki Lineer olmayan denklemler sistemini ele alalım.

$$\begin{cases} x_1^2-10x_1+x_2^2+8=0 \\ x_1x_2^2+x_1-10x_2+8=0 \end{cases}$$

(2.17) nolu denklemden aşağıdakilerini elde ederiz.

$$x_1=\sum_{m=0}^{\infty}x_{1m}=\frac{8}{10}+\frac{1}{10}x_1^2+\frac{1}{10}x_2^2 \tag{2.28}$$

$$=\frac{8}{10}+\frac{1}{10}\sum_{m=0}^{\infty}A_{1m}(x_1^2)+\frac{1}{10}\sum_{m=0}^{\infty}A_{1m}(x_2^2) \tag{2.29}$$

$$x_2 = \sum_{m=0}^{\infty} x_{2m} = \frac{8}{10} + \frac{1}{10} x_1 x_2^2 + \frac{1}{10} x_1 \tag{2.30}$$

$$= \frac{8}{10} + \frac{1}{10} \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}(x_1 x_2^2) + \frac{1}{10} \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}(x_1) \tag{2.31}$$

$A_{im}\left(x^n\right)$ ler ise bir kısmı aşağıdaki gibidir.

$$A_{i0}\left(x^n\right) = x_{i0}^n$$

$$A_{i1}\left(x^n\right) = n x_{i0}^{n-1} x_{i1}$$

$$A_{i2}\left(x^n\right) = \frac{1}{2} n(n-1) x_{i0}^{n-2} x_{i1}^2 + n x_{i0}^{n-1} x_{i2}$$

$$A_{i3}\left(x^n\right) = \frac{1}{6} n(n-1)(n-2) x_{i0}^{n-3} x_{i1}^3 + n(n-1) x_{i0}^{n-2} x_{i1} x_{i2} + n x_{i0}^{n-1} x_{i3}$$

$$A_{i4}\left(x^n\right) = \frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(n-3) x_{i0}^{n-4} x_{i1}^4 + \frac{1}{2} n(n-1)(n-2) x_{i0}^{n-3} x_{i1}^2 x_{i2}$$

$$+ n(n-1) x_{i0}^{n-2} \times \left(\frac{1}{2} x_{i2}^2 + x_{i1} x_{i3}\right) + n x_{i0}^{n-1} x_{i4} \tag{2.32}$$

Lineer olmayan terim $x_1 x_2^2$ aşağıdaki gibi formule edilir.

$$A_0 = x_{10} x_{20}^2$$

$$A_1 = 2x_{10} x_{20} x_{21} + x_{11} x_{20}^2$$

$$A_2 = x_{10} x_{21}^2 + 2x_{10} x_{20} x_{22} + 2x_{11} x_{20} x_{21}$$

$$A_3 = 2x_{10} x_{20} x_{23} + 2x_{10} x_{21} x_{22} + 2x_{21} x_{20} x_{22} + 2x_{12} x_{20} x_{21} + x_{11} x_{21}^2 + x_{13} x_{20}^2$$

$$A_4 = \left(2x_{20} x_{24} + 2x_{21} x_{23} + x_{22}^2\right) x_{10} + \left(2x_{20} x_{23} + 2x_{21} x_{22}\right) x_{11} + x_{20}^2 x_{14} + 2x_{20} x_{21} x_{13}$$

$$+ \left(x_{21}^2 + 2x_{20} x_{22}\right) x_{12}$$

(2.18) nolu eşitliklerden aşağıdakiler elde edilir.

$x_{10} = 0.80000001$, $x_{20} = 0.80000001$

$x_{11} = 0.12800001$, $x_{21} = 0.13120000$

$x_{12} = 0.04147200$, $x_{21} = 0.03778560$

$x_{13} = 0.1604096$, $x_{23} = 0.01563566$

$x_{14} = 0.00712144$, $x_{24} = 0.00729004$

$x_{15} = 0.00344153$, $x_{25} = 0.00364956$

İlk beş terimin toplamı aşağıdaki sonuçları verir.

$\varphi_{15} = x_{10} + ... + x_{14} = 0.99607593$

$\varphi_{25} = x_{20} + ... + x_{24} = 0.99556077$

Bu sonuçlar $(1,1)^t$ kesin çözümün iyi bir yaklaşık değeridir.

ÖRNEK 2:

Aşağıdaki Lineer olmayan denklemler sistemini ele alalım.

$$\begin{cases} 15x_1 + x_2^2 - 4x_3 = 13 \\ x_1^2 + 10x_2 - e^{-x_3} = 11 \\ x_2^3 - 25x_3 = -22 \end{cases}$$

(2.17) nolu denklemden aşağıdakiler elde edilir.

$$x_1 = \sum_{m=0}^{\infty} x_{1m} = \frac{13}{15} - \frac{1}{15}x_2^2 + \frac{4}{15}x_3 \tag{2.33}$$

$$= \frac{13}{15} - \frac{1}{15}\sum_{m=0}^{\infty} A_{1m}(x_2^2) + \frac{4}{15}\sum_{m=0}^{\infty} A_{1m}(x_3) \tag{2.34}$$

$$x_2 = \sum_{m=0}^{\infty} x_{2m} = \frac{11}{10} - \frac{1}{10}x_1^2 + \frac{1}{10}e^{-x_3} \tag{2.35}$$

$$= \frac{11}{10} - \frac{1}{10}\sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}(x_1^2) + \frac{1}{10}\sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}(e^{-x_3}) \tag{2.36}$$

$$x_3 = \sum_{m=0}^{\infty} x_{3m} = \frac{22}{25} + \frac{1}{25}x_2^3 \tag{2.37}$$

$$= \frac{22}{25} + \frac{1}{25}\sum_{m=0}^{\infty} A_{3m}(x_2^3) \tag{2.38}$$

$A_{im}\left(x^n\right)$ Polinomları (2.32) nolu eşitliklerden elde edilir. Lineer olmayan e^{-x_i} terimi için

$$A_{im}\left(e^{-x_i}\right) = (-1)^{m+1}\frac{m^{m-1}}{m!}e^{-mx_{i0}} \qquad m=1,2,... \tag{2.39}$$

(2.18) nolu eşitliklerden aşağıdakiler elde edilir.

$x_{10} = 0.86666667$, $x_{20} = 1.10000002$, $x_{30} = 0.88000000$

$x_{11} = 0.15400000$, $x_{21} = -0.03363282$, $x_{31} = 0.05324000$

$x_{12} = 0.01913015$, $x_{22} = -0.04389782$, $x_{32} = -0.00488349$

$x_{13} = 0.00506067$, $x_{23} = 0.00501670$, $x_{33} = -0.00632872$

$x_{14} = -0.00262029$, $x_{24} = -0.01179828$, $x_{34} = 0.00111667$

İlk altı terimin toplamı aşağıdaki sonuçları verir.

$$\varphi_{15} = x_{10} + ... + x_{15} = 1.04223716$$

$$\varphi_{25} = x_{20} + ... + x_{25} = 1.01568782$$

$$\varphi_{35} = x_{30} + ... + x_{35} = 0.92314446$$

Yukarıdaki değerler kesin çözümün bir yaklaşık değerleridir.

$x = (1.04214966, 1.03109169, 0.92384809)^t$ dir.

AAM Lineer Olmayan Denklem Sistemlerinin çözümünde uygulanmış ve Örneklerle açıklanmıştır.

AAM genel yakınsak seri çözümlerini sağlayan problem tiplerinin çözümünde etkili bir metoddur. Bu metod ayrıca Lineer olmayan denklem sistemlerinde kullanışlı ve etkili bir metoddur.

2.3 Lineer Olmayan Adi Diferansiyel Denklemlerin AAM ile Çözümü

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(0) = \alpha \tag{2.40}$$

$L_x y = \dfrac{dy}{dx}$ olsun o halde verilmiş denklem

$$L_x^{-1} = \int_0^x (.)dx \tag{2.41}$$

(2.40) denkleminin her iki tarafına soldan ters operatör uygulayalım.

$$L_x^{-1} L_x y = L^{-1}\left(f(x, y)\right)$$

$$y - y(0) = L^{-1}\left(f(x, y)\right)$$

$$y = y(0) + L^{-1}\left(f(x, y)\right)$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n, \quad f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \alpha + L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \alpha + \sum_{n=0}^{\infty} L^{-1}\left(A_n\right)$$

$$y_0 = \alpha$$
$$y_1 = L^{-1}\left(A_0\right)$$
$$y_2 = L^{-1}\left(A_1\right)$$
$$\vdots$$
$$y_{n+1} = L^{-1}\left(A_n\right) \tag{2.42}$$
$$y = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_n + ...$$

AAM'nin Lineer Olmayan Adi Diferansiyel Denklemlerin çözümünü örnekler üzerinde uygulamasını görelim.

ÖRNEK 1:

$y' = 1 + y^2$ diferansiyel denkleminin $y(0) = 0$ başlangıç şartını sağlayan çözümünü bulunuz?

Bu başlangıç değer probleminin çözümünün $y(x) = \tan(x)$ olduğu bilinmektedir.

ÇÖZÜM 1:

$$y' = 1 + y^2 \tag{2.43}$$

(2.43) denklemini $\left[0, x\right]$ aralığında integralleyelim.

$$\int_0^x y'(x)dx = \int_0^x (1 + y^2)dx \tag{2.44}$$

$$y(x) - y(0) = \int_0^x (1 + y^2)dx$$

$$y(x) = y(0) + x + \int_0^x y^2 dx \tag{2.45}$$

Adomian Ayrıştırma Metodu gereği

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \tag{2.46}$$

$$y^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{2.47}$$

olarak kabul edelim.

Burada A_n ’ler Adomian Polinomlarıdır.

$$A_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{d\lambda^n}\left[h\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i\right)\right]_{\lambda=o}, \qquad n = 0,1,2,... \tag{2.48}$$

formülü ile hesaplanır. (2.46) ve (2.47)’ i (2.45) de yerine yazalım.

$$y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_{n+1} + ... = y(0) + x + \int_0^x (A_0 + A_1 + A_2 + ... + A_n + ...)dx \tag{2.49}$$

buradan

$$y_0 = y(0) + x \tag{2.49.0}$$

$$y_1 = \int_0^x A_0 dx \tag{2.49.1}$$

$$y_2 = \int_0^x A_1 dx \tag{2.49.2}$$

$$\vdots$$

$$y_{n+1} = \int_0^x A_n dx \tag{2.49.n+1}$$

elde edilecektir. Tümevarım bağıntısı şeklinde yazarsak

$$y_0 = y(0) + x = 0 + x = x$$

$$y_{n+1} = \int_0^x A_n dx \tag{2.50}$$

olacaktır. (2.49) den Adomian Polinomları ise

$$A_0 = y_0^2 \tag{2.50.0}$$

$$A_1 = 2y_0 y_1 \tag{2.50.1}$$

$$A_2 = 2y_0 y_2 + y_1^2 \tag{2.50.2}$$

$$A_3 = 2y_0 y_3 + 2y_1 y_2 \tag{2.50.3}$$

$$\vdots$$

$$y_0 = x \tag{2.51.0}$$

(2.50.0) gereği

$$A_0 = y_0^2 = x^2 \tag{2.52.0}$$

(2.49.1) gereği

$$y_1 = \int_0^x A_0 dx = \int_0^x x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^x = \frac{x^3}{3} \tag{2.51.1}$$

(2.50.1) gereği (2.51.0) ve (2.52.1) ‘i kullanarak

$$A_1 = 2y_0y_1 = 2\cdot x\cdot\frac{x^3}{3} = \frac{2x^4}{3} \tag{2.52.1}$$

(2.49.2) gereği

$$y_2 = \int_0^x A_1 dx = \int_0^x \frac{2}{3}x^4 dx = \frac{2}{3}\cdot\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^x = \frac{2}{15}x^5 \tag{2.51.2}$$

(2.50.2) gereği

$$A_2 = 2y_0y_2 + y_1^2 = 2\cdot x\cdot\frac{2}{5}x^5 + \left(\frac{x^3}{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{15}+\frac{1}{9}\right)x^6 = \frac{17}{45}x^6 \tag{2.52.2}$$

$$y_3 = \int_0^x A_2 dx = \int_0^x \frac{17}{45}x^6 dx = \frac{17}{315}x^7 \tag{2.51.3}$$

$$A_3 = 2y_0y_3 + 2y_1y_2 = \text{........} = \frac{62}{315}x^8 \tag{2.52.3}$$

$$y_4 = \int_0^x A_3 dx = \text{........} = \frac{62}{2835}x^9 \tag{2.51.4}$$

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} \tag{2.53}$$

Şimdi ise sağ tarafta ki toplam, $y = \tan x$ fonksiyonunun $O\left(x^{10}\right)$ hassasiyetli Taylor Açılımına eşit olduğunu gösterelim:

$$u_0 = x \tag{2.54.0}$$

$$A_0 = u_0^2 = x^2 \tag{2.55.0}$$

$$u_1 = \int_0^x A_0 dx = \frac{1}{3}x^3 \tag{2.54.1}$$

$$A_1 = u_1 \cdot \frac{d}{dx}\left(x^2\right) = \frac{2}{3}x^4 \quad (2.55.1)$$

$$u_2 = \int_0^x A_1 dx = \frac{2}{15}x^5 \quad (2.54.2)$$

$$A_2 = u_2 \cdot \frac{d}{dx}\left(x^2\right) + u_1^2 \cdot \frac{d}{dx}\left(x^2\right) = \frac{17}{45}x^6 \quad (2.55.2)$$

$$u_3 = \int_0^x A_2 dx = \frac{17}{315}x^7 \quad (2.54.3)$$

$$A_3 = 2u_0u_3 + 2u_1u_2 = \frac{62}{315}x^8 \quad (2.55.3)$$

$$u_4 = \int_0^x A_3 dx = \frac{62}{2835}x^9 \quad (2.54.4)$$

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 \quad (2.55.4)$$

$y = \tan x$ fonsiyonunun $O\left(x^{10}\right)$ hassasiyetli Taylor Açılımına eşittir.

$$y = \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + O\left(x^{10}\right) \quad (2.56)$$

(2.53) ile (2.56) eşit oldukları görülür.

Sonuç maple-10 bilgisayar programında çalıştırılıp tam sonuca ulaşılmıştır.

ÖRNEK 2:

$y'' + (1-x)y' - y = 2y^3$ diferansiyel denkleminin

$y(0)=1$, $y'(0)=1$ şartını sağlayan çözümünü AAM yardımıyla bulunuz?

ÇÖZÜM 2:

$y'' + (1-x)y' - y = 2y^3$ diferansiyel denkleminin her iki yanını $[0, x]$ aralığında integrallersek

$$\int_0^x y''dx + \int_0^x (1-x)y'dx - \int_0^x ydx = \int_0^x 2y^3dx$$

$$\int_0^x y''dx + \int_0^x y'dx - \int_0^x xy'dx - \int_0^x ydx = \int_0^x 2y^3dx$$

$$y'(x)-y'(0)+y(x)-y(0)-\int_0^x xy'dx-\int_0^x ydx=\int_0^x 2y^3dx$$

$$y'(x)+y(x)-2=\int_0^x xy'dx+\int_0^x ydx+2\int_0^x y^3dx$$

Eşitliğin her iki yanını tekrar $[0,x]$ aralığında integrallersek

$$\int_0^x y'(x)dx+\int_0^x ydx-2x=\int_0^x\int_0^x xy'dxdx+\int_0^x\int_0^x ydxdx+2\int_0^x\int_0^x y^3dxdx$$

$$y(x)-y(0)=2x-\int_0^x ydx+\int_0^x\int_0^x xy'dxdx+\int_0^x\int_0^x ydxdx+2\int_0^x\int_0^x y^3dxdx$$

$$y(x)=2x+1-\int_0^x ydx+\int_0^x\int_0^x xy'dxdx+\int_0^x\int_0^x ydxdx+2\int_0^x\int_0^x y^3dxdx$$

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}y_n(x) \qquad \text{ve} \qquad y^3(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(y_0,y_1,...,y_{n-1})$$

$$y_0=2x+1$$

$$y_1=-\int_0^x y_0dx+\int_0^x\int_0^x xy_0'dxdx+\int_0^x\int_0^x y_0dxdx+2\int_0^x\int_0^x A_0dxdx$$

$$y_2=-\int_0^x y_1dx+\int_0^x\int_0^x xy_1'dxdx+\int_0^x\int_0^x y_1dxdx+2\int_0^x\int_0^x A_1dxdx$$

$$y_3=-\int_0^x y_2dx+\int_0^x\int_0^x xy_2'dxdx+\int_0^x\int_0^x y_2dxdx+2\int_0^x\int_0^x A_2dxdx$$

$$\vdots$$

$$y_{n+1}=-\int_0^x y_ndx+\int_0^x\int_0^x xy_n'dxdx+\int_0^x\int_0^x y_ndxdx+2\int_0^x\int_0^x A_ndxdx$$

Adomian Polinomları ise aşağıdaki gibidir.

$$A_0=y^3$$

$$A_1=3{y_0}^2y_1$$

$$A_2=3y_0y_1^2+3y_2y_0^2$$

$$A_3=3y_3y_0^2+6y_1y_2y_0+y_1^3$$

$$\vdots$$

Şimdi örneğimizi maple-10 bilgisayar programından faydalanarak çözelim.

$$u_0 = 1 + x \tag{2.57}$$

$$A_0 = u_0^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \tag{2.58}$$

$$t_{11} = \int_0^x \int_0^x (1-x) u_0' dxdx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \tag{2.58.1}$$

$$t_{12} = \int_0^x \int_0^x u_0 dxdx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \tag{2.58.2}$$

$$t_{13} = \int_0^x \int_0^x A_0 dxdx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{20}x^5 \tag{2.58.3}$$

$$u_1 = -t_{11} + t_{12} + t_{13} = x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{10}x^5 \tag{2.58.4}$$

$$A_1 = 3u_0^2 u_1 = 3x^2 + 10x^3 + \frac{25}{2}x^4 + \frac{73}{10}x^5 + \frac{21}{10}x^6 + \frac{3}{10}x^7 \tag{2.59}$$

$$t_{21} = \int_0^x \int_0^x (1-x) u_1' dxdx = -\frac{1}{84}x^7 - \frac{1}{20}x^6 - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \tag{2.59.1}$$

$$t_{22} = \int_0^x \int_0^x x \cdot u_1' dxdx = \frac{1}{84}x^7 + \frac{1}{15}x^6 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{6}x^4 \tag{2.59.2}$$

$$t_{23} = \int_0^x \int_0^x A_1 dxdx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^6 + \frac{73}{420}x^7 + \frac{3}{80}x^8 + \frac{1}{240}x^9 \tag{2.59.3}$$

$$u_2 = -t_{21} + t_{22} + t_{23} = \frac{13}{35}x^7 + \frac{19}{20}x^6 + \frac{13}{10}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{40}x^8 + \frac{1}{120}x^9 \tag{2.60}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= 3u_0 u_1^2 + 3u_2 u_0^2 \\ &= \frac{5}{2}x^4 + \frac{169}{10}x^5 + \frac{1709}{60}x^6 + \frac{2483}{105}x^7 + \frac{3207}{280}x^8 + \frac{963}{280}x^9 + \frac{121}{200}x^{10} + \frac{11}{200}x^{11} - x^3 \end{aligned} \tag{2.61}$$

$$\begin{aligned} t_{31} &= \int_0^x \int_0^x (1-x) u_2' dxdx \\ &= -\frac{3}{4400}x^{11} - \frac{7}{1200}x^{10} - \frac{1}{36}x^9 - \frac{31}{560}x^8 - \frac{2}{105}x^7 + \frac{3}{20}x^6 + \frac{3}{20}x^5 - \frac{1}{12}x^4 \end{aligned} \tag{2.61.1}$$

$$t_{32}=\int_0^x\int_0^x x\cdot u_2'dxdx$$

$$=\frac{3}{4400}x^{11}+\frac{1}{150}x^{10}+\frac{13}{360}x^{9}+\frac{57}{560}x^{8}+\frac{13}{84}x^{7}+\frac{1}{15}x^{6}-\frac{1}{20}x^{5} \tag{2.61.2}$$

$$t_{32}=\int_0^x\int_0^x x\cdot u_2'dxdx=\frac{1}{12}x^{6}+\frac{169}{420}x^{7}+\frac{1709}{3360}x^{8}+\frac{2483}{7560}x^{9}+\frac{1069}{8400}x^{10}+\frac{963}{30800}x^{11}$$

$$+\frac{11}{2400}x^{12}+\frac{11}{32100}x^{13}-\frac{1}{20}x^{5} \tag{2.61.3}$$

$$u_3=-t_{31}+t_{32}+t_{33}=\frac{123}{1925}x^{11}+\frac{2243}{8400}x^{10}+\frac{5449}{7560}x^{9}+\frac{1973}{1680}x^{8}+\frac{137}{140}x^{7}+\frac{1}{12}x^{6}$$

$$-\frac{3}{10}x^{5}+\frac{1}{12}x^{4}+\frac{11}{1200}x^{12}+\frac{11}{15600}x^{13} \tag{2.62}$$

$$A_3=3u_3u_0^2+6u_0u_1u_2+u_1^3=-\frac{12}{5}x^{5}+\frac{162733}{171600}x^{13}+\frac{3808}{825}x^{12}+\frac{30551}{3465}x^{11}$$

$$-\frac{59}{30}x^{6}+\frac{7421}{420}x^{7}+\frac{75059}{1680}x^{8}+\frac{633}{5200}x^{14}+\frac{211}{26000}x^{15}+\frac{9496}{189}x^{9}+\frac{1}{4}x^{4} \tag{2.63}$$

$$t_{41}=\int_0^x\int_0^x(1-x)u_3'dxdx=-\frac{11}{252000}x^{15}-\frac{121}{218400}x^{14}-\frac{83}{21840}x^{13}-\frac{8263}{554400}x^{12}-\frac{229}{6600}x^{11}$$

$$-\frac{349}{10800}x^{10}+\frac{1069}{30240}x^{9}+\frac{127}{1120}x^{8}+\frac{1}{21}x^{7}-\frac{11}{180}x^{6}+\frac{1}{60}x^{5} \tag{2.63.1}$$

$$t_{42}=\int_0^x\int_0^x x\cdot u_2'dxdx=\frac{11}{252000}x^{15}+\frac{11}{18200}x^{14}+\frac{41}{9100}x^{13}+\frac{2243}{110880}x^{12}+\frac{5449}{92400}x^{11}+\frac{1973}{18900}x^{10}+\frac{137}{1440}x^{9}$$

$$+\frac{1}{112}x^{8}-\frac{1}{28}x^{7}+\frac{1}{90}x^{6} \tag{2.63.2}$$

$$t_{43}=\int_0^x\int_0^x A_3dxdx=-\frac{2}{35}x^{7}+\frac{162733}{36036000}x^{15}+\frac{272}{10725}x^{14}+\frac{30551}{118800}x^{12}+\frac{26291}{270270}x^{13}-\frac{59}{1680}x^{8}+\frac{7421}{30240}x^{9}$$

$$+\frac{75059}{151200}x^{10}+\frac{211}{416000}x^{16}+\frac{211}{7072000}x^{17}+\frac{4748}{10395}x^{11}+\frac{1}{120}x^{6} \tag{2.63.3}$$

$$u_4 = -t_{41} + t_{42} + t_{43} = \frac{211}{3536000}x^{17} + \frac{211}{208000}x^{16} - \frac{1}{60}x^5 + \frac{2193073}{10810800}x^{13} + \frac{456931}{831600}x^{12} + \frac{42697}{37800}x^{10}$$
$$+\frac{33503}{33264}x^{11} + \frac{4}{45}x^6 - \frac{83}{420}x^7 - \frac{587}{3360}x^8 + \frac{124639}{2402400}x^{14} + \frac{82153}{9009000}x^{15} + \frac{185}{336}x^9 \qquad (2.64)$$

çözüm ise

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

$$= 1 + \frac{211}{3536000}x^{17} + \frac{211}{208000}x^{16} + \frac{13}{12}x^5 + \frac{275087}{1351350}x^{13} + x + x^2 + \frac{232277}{415800}x^{12} + \frac{150}{10800}x^{10} + \frac{890711}{831600}x^{11}$$
$$+x^3 + \frac{101}{90}x^6 + \frac{121}{105}x^7 + \frac{3611}{3360}x^8 + \frac{124639}{2402400}x^{14} + \frac{82153}{9009000}x^{15} + \frac{19349}{15120}x^9 + \frac{13}{12}x^4 \qquad (2.65)$$

şeklindedir.

Şimdi ise (2.65) deki çözüm ile gerçek çözümle karşılaştıralım.

$a = \dfrac{1}{1-x}$ gerçek çözüm

$x = 0$ için $\begin{matrix} a = 1 \\ u = 1 \end{matrix}$

$x = 0.1$ için $\begin{matrix} a = 1.111111111 \\ u = 1.111120415 \end{matrix}$

$x = 0.2$ için $\begin{matrix} a = 1.250000000 \\ u = 1.250170145 \end{matrix}$ $\quad |a-u| = 0.000170145$ dir.

2.4 Adi Diferansiyel Denklem Sistemleri için AAM'nin Uygulanması

1. mertebeden diferensiyel denklem sisteminin genel şekli

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, ..., y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, ..., y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, ..., y_n) \\ y_i' &= \frac{dx_i}{dt} \qquad (i = 1, 2, 3, ..., n) \end{aligned} \qquad (2.66)$$

şeklinde düşünülebilir.

n. mertebeden her bir Adi Diferansiyel denklem 1.mertebeden adi diferansiyel denklem sistemi şeklinde yazılabildiğinden çalışmamızı 1. mertebeden diferansiyel denklem sistemiyle sınırlandıracağız.

(2.66) denklem sistemini AAM'yi kullanarak çözmek için $\left(i=1,2,...,n\right)$ olmak üzere $y_i'=f_i\left(x,y_1,...,y_n\right)$ denkleminin her iki tarafını $\left[0,x\right]$ aralığında integralleyelim. O halde

$$\int_0^x y_i'\left(\tau\right)d\tau=\int_0^x f_i\left(\tau,y_1,...,y_n\right)d\tau$$

$$y_i\left(\tau\right)\Big|_{\tau=0}^{\tau=x}=\int_0^x f_i\left(\tau,y_1,...,y_n\right)d\tau$$

$$y_i\left(x\right)-y_i\left(0\right)=\int_0^x f_i\left(\tau,y_1,...,y_n\right)d\tau$$

$$y_i\left(x\right)=y_i\left(0\right)+\int_0^x f_i\left(\tau,y_1,...,y_n\right)d\tau \qquad k=1,2,3,...,n \tag{2.67}$$

bulunacaktır. Aşağıdaki notasyonları kullanacağız.

$$y_i\left(0\right)=\begin{bmatrix} y_1\left(0\right) \\ y_2\left(0\right) \\ ..... \\ y_n\left(0\right) \end{bmatrix} \qquad \text{ve} \qquad f_k=\begin{bmatrix} f_1\left(\tau,y_1^{(k)},y_2^{(k)},...,y_n^{(k)}\right) \\ f_2\left(\tau,y_1^{(k)},y_2^{(k)},...,y_n^{(k)}\right) \\ .... \\ f_n\left(\tau,y_1^{(k)},y_2^{(k)},...,y_n^{(k)}\right) \end{bmatrix}$$

(2.67) yi aşağıdaki şekilde yazalım.

$$y_i^{(k+1)}=y_i^{(k)}+\int_0^x f_n\left(\tau,y_1^{(k)},y_2^{(k)},...,y_n^{(k)}\right)d\tau$$

AAM de olduğu gibi (2.67) denkleminin çözümü

$$y_i\left(x\right)=\sum_{j=0}^{\infty} f_{i,j} \tag{2.68}$$

şeklinde ele alınacaktır.

(2.67) denkleminde nonlineer terimi için

$$f_i\left(\tau,y_1,...,y_n\right)=\sum_{j=0}^{\infty} A_{i,j}\left(\left(f_{i,0}\right),\left(f_{i,1}\right),...,\left(f_{i,j}\right)\right) \tag{2.69}$$

yazılacaktır.

$A_{i,j}\left(\left(f_{i,0}\right),\left(f_{i,1}\right),...,\left(f_{i,j}\right)\right)$ Adomian polinomlarıdır.

(2.68) ve (2.69) u (2.67) de yerine yazarsak

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_{i,j} = y_i(0) + \int_0^x \left[\sum_{j=0}^{\infty} A_{i,j}\left(\left(f_{i,0}\right),\left(f_{i,1}\right),\ldots,\left(f_{i,j}\right)\right) \right] d\tau \tag{2.70}$$

$$= y_i(0) + \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^x A_{i,j}\left(\left(f_{i,0}\right),\left(f_{i,1}\right),\ldots,\left(f_{i,j}\right)\right) d\tau$$

$$f_i(0) = y_i(0)$$

………………

$$\left(f_{i,0}\right) f_{i,n+1} = \int_0^x A_{i,j}\left(\left(f_{i,0}\right),\left(f_{i,1}\right),\ldots,\left(f_{i,j}\right)\right) d\tau \tag{2.71}$$

Adi Diferansiyel Denklem Sistemi için AAM'yi örneklerimizde uygulayalım.

ÖRNEK 1:

$$y_1' = y_3 - \cos x$$

$$y_2' = y_3 - e^x$$

$y_3' = y_1 - y_2$ diferansiyel denklem sisteminin $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$ ve $y_3(0) = 2$ başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü Adomian Ayrıştırma Yöntemiyle bulunuz?

ÇÖZÜM 1:

Denklem sisteminin her iki yanını $[0, x]$ aralığında integrallersek

$$\int_0^x y_1' dx = \int_0^x y_3 dx - \int_0^x \cos x dx \tag{2.72}$$

$$y_1(x) - y_1(0) = \int_0^x y_3 dx - \int_0^x \cos x dx \tag{2.72.1}$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x y_3 dx - \sin x\Big|_0^x \tag{2.72.2}$$

$$y_1(x) = 1 - \sin x + \int_0^x y_3 dx \tag{2.72.3}$$

$$y_{1,n+1} = \int_0^x y_{3,n} dx \tag{2.72.4}$$

$$\int_0^x y_2' dx = \int_0^x y_3 dx - \int_0^x e^x dx \tag{2.73}$$

$$y_2(x) - y_2(0) = 1 - e^x + \int_0^x y_3 dx \tag{2.73.1}$$

$$y_2(x) - 0 = 1 - e^x + \int_0^x y_3 dx \tag{2.73.2}$$

$$y_2(x) = 1 - e^x + \int_0^x y_3 dx \tag{2.73.3}$$

$$y_{2,n+1} = \int_0^x y_{3,n} dx \tag{2.73.4}$$

$$\int_0^x y_3' dx = \int_0^x (y_1 - y_2) dx \tag{2.74}$$

$$y_3(x) - y_3(0) = \int_0^x (y_1 - y_2) dx \tag{2.74.1}$$

$$y_3(x) - 2 = \int_0^x (y_1 - y_2) dx \tag{2.74.2}$$

$$y_3(x) = 2 + \int_0^x (y_1 - y_2) dx \tag{2.74.3}$$

$$y_{3,n+1} = \int_0^x (y_{1,n} - y_{2,n}) dx \tag{2.74.4}$$

(2.72.4) , (2.73.4) ve (2.74.4) denklemlerinde $n = 0$ yazılırsa

$$y_{1,1} = \int_0^x y_{3,0} dx = \int_0^x 2dx = 2x\Big|_0^x = 2x$$

$$y_{2,1} = \int_0^x y_{3,0} dx = \int_0^x 2dx = 2x\Big|_0^x = 2x$$

$$y_{3,1} = \int_0^x (y_{1,0} - y_{2,0}) dx = \int_0^x (1 - \sin x - 1 + e^x) dx$$

$$\int_0^x (-\sin x + e^x) dx = (\cos x + e^x)\Big|_0^x = e^x + \cos x - 2$$

(2.72.4) ,(2.73.4) ve (2.74.4) denklemlerinde $n = 1$ yazılırsa

$$y_{1,2} = \int_0^x y_{3,1} dx = \int_0^x (e^x + \cos x - 2) dx = (e^x + \sin x - 2x)\Big|_0^x = e^x + \sin x - 2x - 1$$

$$y_{2,2} = \int_0^x y_{3,1} dx = \int_0^x (e^x + \cos x - 2) dx = (e^x + \sin x - 2x)\Big|_0^x = e^x + \sin x - 2x - 1$$

$$y_{3,2}=\int_0^x\left(y_{1,1}-y_{2,1}\right)dx=\int_0^x\left(2x-2x\right)dx=\int_0^x 0dx=0$$

İki adımlı çözüm ise

$$y_1=y_{1,0}+y_{1,1}+y_{1,2}+...=e^x$$

$$y_2=y_{2,0}+y_{2,1}+y_{2,2}+...=\sin x$$

$$y_3=y_{3,0}+y_{3,1}+y_{3,2}+...=e^x+\cos x$$

ÖRNEK 2:

$$y_1'=2y_2^2$$

$$y_2'=e^{-x}y_1$$

$$y_3'=y_2+y_3$$

Bu Lineer olmayan diferansiyel denklem sisteminin kesin çözümlerinin $y_1\left(x\right)=e^{2x}$, $y_2\left(x\right)=e^x$ ve $y_3\left(x\right)=xe^x$ şeklinde olduğunu gösteriniz?

ÇÖZÜM 2:

$$y_1=1+2\int_0^x y_2^2dx$$

$$y_2=1+\int_0^x e^{-x}y_1dx$$

$$y_3=\int_0^x\left(y_2+y_3\right)dx$$

Adomian Polinomları ise aşağıdaki gibidir.

$$y_{1,0}=1, \qquad y_{1,n+1}=2\int_0^x\left(\sum_{k=0}^{n}y_{2,k}y_{2,n-k}\right)dx$$

$$y_{2,0}=1\ , \qquad y_{2,n+1}=\int_0^x e^{-x}y_{1,n}dx$$

$$y_{3,0}=0\ , \qquad y_{3,n+1}=\int_0^x\left(y_{2,n}+y_{3,n}\right)dx$$

n = 0 için

$$y_{1,1}=2\int_0^x\left(y_{2,0}\right)dx=2\int_0^x dx=2x$$

$$y_{2,1}=\int_0^x e^{-x}y_{1,0}dx=\int_0^x e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^x=-e^{-x}-\left(-e^0\right)=1-e^{-x}$$

$$y_{3,1}=\int_0^x\left(y_{2,0}+y_{3,0}\right)dx=\int_0^x(1+0)dx=x$$

n=1 için

$$y_{1,2}=2\int_0^x 2\cdot y_{2,0}\cdot y_{2,1}dx=4\int_0^x y_{2,0}\cdot y_{2,1}dx=4\int_0^x 1\cdot\left(1-e^{-x}\right)dx$$

$$=4\int_0^x\left(1-e^{-x}\right)dx=4\left(x+e^{-x}\right)\Big|_0^x=4\left(x+e^{-x}+1\right)$$

$$y_{2,2}=\int_0^x e^{-x}y_{1,1}dx=\int_0^x e^{-x}2xdx=2\int_0^x e^{-x}xdx=2\left(-xe^{-x}-e^{-x}+1\right)$$

$$y_{3,2}=\int_0^x\left(y_{2,1}+y_{3,1}\right)dx=\int_0^x\left(1-e^{-x}+x\right)dx=\left(x+e^{-x}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^x=x+e^{-x}+\frac{x^2}{2}-1$$

Üç adımlı yaklaşık çözüm ise aşağıdaki gibidir.

$$y_1=y_{1,0}+y_{1,1}+y_{1,2}=1+2x+4\left(x+e^{-x}+1\right)=4e^{-x}+6x+5$$

$$y_2=y_{2,0}+y_{2,1}+y_{2,2}=1+1-e^{-x}+2\left(-xe^{-x}-e^{-x}+1\right)=-2xe^{-x}-3e^{-x}+4$$

$$y_3=y_{3,0}+y_{3,1}+y_{3,2}=0+x+x+e^{-x}+\frac{x^2}{2}-1=e^{-x}+\frac{x^2}{2}+2x-1$$

Fiziksel olaylarla ilgili problemlerin incelenmesinde problemin özelliklerini taşıyan matematiksel modelin kurulması gerekmektedir. Bu tür problemlerin çözümünde amaç, denklemi sağlayan bilinmeyen fonksiyon yada fonksiyonların elde edilmesidir.

Benzer özellikleri taşıyan olayların ortaya koyduğu denklem türleri aynı olduğundan denklemlerin başlangıçta sınıflandırılıp çözüm yöntemlerinin belirlenmesi gerekmektedir.

Çoğunlukla uygulamalı bilim dallarında ortaya çıkan diferansiyel denklemler bazı başlangıç veya sınır şartlarınıda beraberinde taşırlar. Böyle durumlarda denklemin çözümü söz konusu şartlara bağlı olarak belirlenmektedir. Sistemin davranışını gözlemleyerek bir veya daha fazla denklemlerle değişkenler arasında mantıklı bir ilişki kurmaya çalışılır. Buradaki fiziksel problemde de Adomian Polinomlarının neler olduğu ve nasıl türetildiğini de 2.bölüm de göstermişti.

Son olarak AAM'nin Fiziksel uygulamasıolan Isı İletimi Problemine uygulamasını ve Dalga Denklemlerine uygulamasını göstereceğiz [30].

2.5 AAM'nin Isı İletimi Problemine Uygulaması

2.5.1 Homojen sınır şartları altındaki homojen ısı denklemi

Isıyı homojen ileten ℓ uzunluğunda ki çubuk yeterince ince olduğu için ısıyı eşit bir şekilde dağıtır. Çubuğun yüzeyi yalıtılmış olduğundan ısı kaybı yoktur. Çubuğun ısı dağılımını ifade eden başlangıç-sınır değer problemi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} \quad ,0< x <\ell,\ t>0 \\
&u(o,t) = 0 \ ,t \geq 0 \\
&u(\ell,t) = 0 \ ,t \geq 0 \\
&u(x,0) = f(x),0 \leq x \leq \ell
\end{aligned} \tag{2.75}$$

$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$ seçersek $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$ ve $L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ olur. Buradan da

$$L_t u = L_x u \tag{2.76}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliğin her iki yanını $L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot)dt$ operatörü uygulanırsa

$$u = u(x,0) + L_t^{-1} L_x \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

$$u_0 = f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

$$u_1 = L_t^{-1} L_x u_0 = -\left(\frac{\pi^2 t}{\ell^2}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

$$u_2 = L_t^{-1} L_x u_1 = \left(\frac{\pi^4 t^2}{\ell^4}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

$\vdots$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \left(1 - \left(\frac{\pi^2 t}{\ell^2}\right) + \left(\frac{\pi^4 t^2}{\ell^4}\right) - \cdots\right)\sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

$$= e^{\frac{-\pi^2 t}{\ell^2}} \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \tag{2.77}$$

elde edilir. $f(x)$ 'e etki eden L_t^m operatörü $f(x)$ 'in sonlu sayıdaki terimlerinden oluşan serileri yok ettiği için elde edilen sonuç sınır değer şartlarını sağlamaz. Bu yüzden sonsuz serilerden oluşan $f(x)$ 'i genişletebiliriz. Örneğin aynı sınır değer şartlarında $f(x) = x(\ell - x)$ şeklinde seşilebilir. Bu eşitlik Profesör Y.Cherrault tarafından önerilen bir ifadedir.

Sonuç olarak

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \qquad b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx \tag{2.78}$$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty}\left[L_t^{-1}L_x\right]^m f(x)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left[L_t^{-1}L_x\right]^m \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{t^m}{m!}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)^{2m} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)^{2m}\frac{t^m}{m!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) e^{\frac{-n^2\pi^2 t}{\ell^2}} \tag{2.79}$$

$u(x,t)$ 'nin Fourier açılımı (2.76) denkleminin AAM'nin yeniden düzenlenmesiyle elde edilir.

2.5.2 Homojen olmayan sınır şartları altındaki homojen ısı denklemi

Aynı denklemi homojen olmayan sınır-değer şartları altındaki $u(0,t) = T_1$, $u(\ell,t) = T_2$ olarak ve başlangıç şartlarını da $u(x,0) = h(x)$ olarak ele alalım. T_1, T_2 sayısal sabitlerdir.

$x \to 0$ iken $h(x) \to T_1$ ve $x \to \ell$ iken ise $h(x) \to T_2$ olur.

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)e^{\frac{-n^2\pi^2 t}{\ell^2}},\ \Psi_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}h(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx \tag{2.80}$$

şeklindedir.

$u=T_1+\dfrac{(T_2-T_1)x}{\ell}$ denklemi AAM ile çözülür. T_1, T_2 sayısal sabitlerinin yerine kullanılan fonksiyonlar ise Fourier açılımı yapılarak bulunur. (2.80) daki $u(0,t)=T_1$, $u(\ell,t)=T_2$ homojen olmayan sınır değer şartlarından elde edilen sonuç sınır değer şartlarını sağlamaz. Malesef AAM ile elde edilen hatalı sonuç dikkate alınmaz aslında bu zorluğu Kısmi Diferansiyel Denklemlerde tanımlanan transformasyon sayesinde ortadan kaldırılır. Problemi aşağıdaki şekilde tekrar yazabiliriz.

$$\begin{aligned}&u_t=u_{xx}\quad ,0< x <\ell,\ t>0\\&u(o,t)=T_1\ ,t\geq 0\\&u(\ell,t)=T_2\ ,t\geq 0\\&u(x,0)=h(x),0\leq x\leq \ell\end{aligned} \tag{2.81}$$

$$\omega=T_1+\frac{(T_2-T_1)x}{\ell}\ \text{ise} \tag{2.82}$$

$$u(x,t)=v(x,t)+\omega(x,t),\quad f(x)=h(x)-\omega(x) \tag{2.83}$$

(2.89.7) denkleminde $u(x,t)$'nin yerine yazılarak

$$\begin{aligned}&v_t=v_{xx}\quad ,0< x <\ell,\ t>0\\&v(o,t)=0\ ,t\geq 0\\&v(\ell,t)=0\ ,t\geq 0\\&v(x,0)=f(x),0\leq x\leq \ell\end{aligned} \tag{2.84}$$

olur. (2.79) denkleminin çözümünden elde edilen verilerle aşağıdaki çözüme ulaşırız.

$$c_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\left(f(\tau)-\omega(\tau)\right)\sin\left(\frac{n\pi\tau}{\ell}\right)d\tau \tag{2.85}$$

$$u(x,t)=v(x,t)+\omega(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)e^{\frac{-n^2\pi^2 t}{\ell^2}}+T_1+\frac{T_2-T_1}{\ell}x \tag{2.86}$$

Bu çözüm homojen olmayan sınır-değer şartlarını sağlar.

2.5.3 Homojen sınır şartları altındaki homojen olmayan ısı denklemi

$$L_t u = L_x u + h(x,t) \tag{2.87}$$

(2.87) denklemi değişkenlerin ayrılmasıyla çözülemeyen homojen olmayan bir denklemdir.

Başlangıç ve Sınır şartları $u(x,0) = u(0,t) = u(\ell,t) = 0$ ise

$$u_0 = L_t^{-1} h + u(x,0) = L_t^{-1} h$$

$$u_m = \left(L_t^{-1} L_x\right)^m u_0, \quad m \geq 0$$

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} u_m \tag{2.88}$$

elde ederiz.

$h(x,t) = \ell x - x^2 + 2t$ seçerek

$$u_0 = L_t^{-1} h = \int_0^t \left(\ell x - x^2 + 2t\right) dt = (\ell x - x^2)t + t^2$$

$$u_1 = L_t^{-1} L_x u_0 = -t^2$$

$$u_2 = L_t^{-1} L_x u_1 = 0$$

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} u_m = u_0 + u_1 = \left(\ell x - x^2\right) t \tag{2.89}$$

kesin çözümü elde edilir.

h'ye etki eden L_x^m operatörü h'ın sonlu sayıdaki terimlerinden oluşan serileri yok ettiği için elde edilen sonuç sınır değer şartlarını sağlamaz. Bu yüzden h'nin Fourier açılımı AAM ile çözülür. Çözüm ise aşağıdaki gibidir.

$$\gamma_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} h(x,t) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx$$

$$\delta_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)^{2m} L_t^{-(m+1)} \gamma_n(t)$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \tag{2.90}$$

$$L_t^{-1}(\cdot)=\int_0^t(\cdot)dt \tag{2.91}$$

şeklindedir.

2.5.4 Homojen olmayan sınır şartları altındaki homojen olmayan ısı denklemi

AAM ile elde ettiğimiz sonuç homojen olmayan sınır değer şartlarını sağlamadığı için homojen olmayan sınır değer şartları altındaki homojen olmayan ısı denklemini aşağıdaki gibi ele alalım.

$$\begin{aligned} &u_t=u_{xx}\quad+h(x,t),0< x <\ell,\ t>0\\ &u(o,t)=p(t)\ ,t\geq 0\\ &u(\ell,t)=q(t)\ ,t\geq 0\\ &u(x,0)=f(x),0\leq x\leq \ell \end{aligned} \tag{2.92}$$

$$\omega(x,t)=\frac{\ell-x}{\ell}p(t)+\frac{x}{\ell}q(t) \tag{2.93}$$

$$u(x,t)=v(x,t)+\omega(x,t) \tag{2.94}$$

(2.92) denkleminde $u(x,t)$ ’nin yerine yazılarak

$$\begin{aligned} &v_t=v_{xx}\quad+H(x),0< x <\ell,\ t>0\\ &v(o,t)=0\ ,t\geq 0\\ &v(\ell,t)=0\ ,t\geq 0\\ &v(x,0)=\psi(x),0\leq x\leq \ell \end{aligned} \tag{2.95}$$

$$H(x,t)=h(x,t)-\omega_t(x,t),\qquad \psi(x)=f(x)-\omega(x,0) \tag{2.96}$$

şeklinde olur.

$L_t v$ ’yi çözersek

$$v_0=\psi+L_t^{-1}H=\varphi(x,t)$$

$$v_m=\left(L_t^{-1}L_x\right)^m v_0,\quad m\geq 0$$

$$v = \sum_{m=0}^{\infty} v_m \tag{2.97}$$

elde ederiz.

2.6 AAM'nin Dalga Denklemine Uygulaması

2.6.1 Homojen sınır şartları altındaki homojen dalga denklemi

x-ekseni boyunca gerilen telin titreşim problemi aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned}
&L_t u = L_x u, \quad 0< x <\ell, \ \ t>0 \\
&u(0,t) = 0\ , \ \ t \geq 0 \\
&u(\ell,t) = 0\ , \ \ t \geq 0 \\
&u(x,0) = f(x), \ \ 0 \leq x \leq \ell \\
&u_t(x,0) = f(x), \ \ 0 \leq x \leq \ell
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Bu problemde sağlanan şartlardan dolayı kesin çözüme kolaylıkla ulaşılır. $\ell = \pi$, sınır şartları $u(x,0) = f(x) = 0$ ve $u_t(x,0) = g(x) = \sin x$ olduğunda $L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t \int_0^t (\cdot) dt$ operatörü her iki tarafa uygulanırsa

$$u = u(x,0) + t u_t(x,0) + L_t^{-1} L_x \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

$$u_0 = t \sin x$$

$$u_1 = L_t^{-1} L_x u_0 = -\frac{t^3}{3!} \sin x$$

$$u_2 = L_t^{-1} L_x u_1 = \frac{t^5}{5!} \sin x$$

$$\vdots$$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots \right) \sin x = \sin t \sin x \tag{2.99}$$

kesin çözümü elde edilir.

$f(x)$ ve $g(x)$'in Fourier açılımları yapıldığında

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell} \right) dx\ , \ b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell} \right) dx \tag{2.100}$$

AAM'ye göre kesin çözüm ise

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)\left\{a_n\cos\left(\frac{n\pi t}{\ell}\right)+b_n\left(\frac{\sin\frac{n\pi t}{\ell}}{\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)}\right)\right\} \tag{2.101}$$

şeklindedir.

2.6.2 Homojen olmayan sınır şartları altındaki homojen dalga denklemi

Homojen olmayan sınır değer şartları altındaki homojen dalga denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
&L_t u = L_x u, \quad 0< x <\ell, \ \ t>0\\
&u(0,t)=A\ , \ \ t\geq 0\\
&u(\ell,t)=B\ , \ \ t\geq 0\\
&u(x,0)=f(x), \ \ 0\leq x\leq \ell\\
&u_t(x,0)=g(x), \ \ 0\leq x\leq \ell
\end{aligned} \tag{2.102}$$

Buna benzer şekilde

$$\omega(x)=A+\frac{B-A}{\ell}x \tag{2.103}$$

$$u(x,t)=v(x,t)-\omega(x,t), \qquad f(x)=h(x)-\omega(x) \tag{2.104}$$

(2.102) denklemindeki $u(x,t)$'nin yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
&L_t v = L_x v, \quad 0< x <\ell, \ \ t>0\\
&v(0,t)=0\ , \ \ t\geq 0\\
&v(\ell,t)=0\ , \ \ t\geq 0\\
&v(x,0)=f(x), \ \ 0\leq x\leq \ell\\
&v_t(x,0)=g(x), \ \ 0\leq x\leq \ell
\end{aligned} \tag{2.105}$$

(2.104) den elde edilen verilerle homojen olmayan u probleminin çözümü bulunur.

2.6.3 Homojen sınır şartları altındaki homojen olmayan dalga denklemi

Homojen Sınır değer şartları altındaki homojen olmayan Dalga Denklemi problemi aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{aligned}
&L_t u = L_x u + h(x), \quad 0< x <\ell, \ t>0\\
&u(0,t) = 0\ , \ t \geq 0\\
&u(\ell,t) = 0\ , \ t \geq 0\\
&u(x,0) = f(x), \ 0 \leq x \leq \ell\\
&u_t(x,0) = g(x), \ 0 \leq x \leq \ell
\end{aligned}
\tag{2.106}
$$

Uygun şartlar sayesinde kesin çözüme AAM ile ulaşılır. Uygun şartlar olmadığında $H(x,t) = L_t^{-1} h(x,t)$ Fourier açılımını f ve g 'ye uygularsak aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

$$H(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad a_n(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} H(x,t)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx$$

$$g(x)= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad c_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx \tag{2.107}$$

Basit bir örnek vermek gerekirse $\ell = 1$, $h(x,t) = h = \text{sabit}$, $u(x,0) = f(x) = x(1-x)$ ve $u_t(x,0) = g(x) = 0$ olduğunda ise

$$H(t) = \frac{h}{2}t^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin(n\pi x), \quad a_n(t) = \frac{ht^2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x), \quad b_n = \frac{4}{(n\pi)^3}\left[1-(-1)^n\right] \tag{2.108}$$

şeklindedir.

$$u = u(x,0) + tu_t(x,0) + L_t^{-1}h(x,t) + L_t^{-1}L_x\sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

$$u_0 = f(x) + H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin(n\pi x)$$

$$u_m = (-1)^m \frac{t^{2m}}{(2m)!}\sum_{n=1}^{\infty} b_n (n\pi)^{2m} \sin(n\pi x) + (-1)^m \frac{t^{2m+2}}{(2m+2)!}\sum_{n=1}^{\infty} c_n (n\pi)^{2m} \sin(n\pi x)$$

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} u_m$$

$$c_n = \frac{2h}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] \tag{2.109}$$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{t^{2m}}{(2m)!}(n\pi)^{2m} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{t^{2m+2}}{(2m+2)!}(n\pi)^{2m+2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x)\left\{ b_n \cos(n\pi t) + c_n \frac{1-\cos(n\pi t)}{(n\pi)^2}\right\} \tag{2.110}$$

elde edilir.

2.6.4 Homojen olmayan sınır şartları altındaki homojen olmayan dalga denklemi

Zamana bağlı sınır şartları altındaki Başlangıç-Sınır değer problemini aşağıda ki gibi ele alalım.

$$\begin{aligned} &L_t u = L_x u + h(x,t), \quad 0< x <\ell, \ \ t>0 \\ &u(0,t) = p(t)\ , \ \ t \ge 0 \\ &u(\ell,t) = q(t)\ , \ \ t \ge 0 \\ &u(x,0) = f(x), \ \ 0 \le x \le \ell \\ &u_t(x,0) = g(x), \ \ 0 \le x \le \ell \end{aligned} \tag{2.111}$$

$$\omega(x,t) = \frac{\ell - x}{\ell} p(t) + \frac{x}{\ell} q(t) \tag{2.112}$$

$$u(x,t) = v(x,t) + \omega(x,t) \tag{2.113}$$

(2.111) denkleminde $u(x,t)$'nin yerine yazılarak

$$\begin{aligned} &L_t v = L_x v + H(x,t), \quad 0< x <\ell, \ \ t>0 \\ &v(0,t) = 0\ , \ \ t \ge 0 \\ &v(\ell,t) = 0\ , \ \ t \ge 0 \\ &v(x,0) = F(x), \ \ 0 \le x \le \ell \\ &v_t(x,0) = G(x), \ \ 0 \le x \le \ell \end{aligned} \tag{2.114}$$

(2.114) den faydalanarak

$$H(x,t) = h - \omega_{tt}$$
$$F(x) = f(x) - \omega(x,0)$$
$$G(x) = g(x) - \omega_t(x,0) \tag{2.115}$$

sonucuna ulaşılır.

Isı ve Dalga Denklemleri Kısmi çözüm teknikleri kullanılarak çözülür. Sınır şartları iyi tanımlandığında çözüm AAM ile bulunur. Eğer sınır şartları uygun değilse başlangıç terimlerinin uygun açılımları yapılır. Şimdiye kadar uygulanan transformasyonlar özel durumlar için uygulanan basit bir tekniktir. AAM ise daha karmaşık fiziksel problemleri çözmek için uygulanan güçlü bir metoddur.

SONUÇ

Bu çalışmada literatürde 1980'li yıllardan başlayarak günümüze kadar halen de detaylı olarak incelenen AAM'u konu edilmiştir. İncelediğimiz çalışmada Lineer olmayan bazı fonksiyonlar için Adomian Polinomları türetilmiş; Lineer olmayan Diferansiyel Denklemler Sistemine, Lineer olmayan Diferansiyel Denklemlere ve onların sistemine AAM'nin uygulamaları ele alınmıştır. Ayrıca AAM'nin Fiziksel uygulaması bir uygulaması olarak AAM'nin Isı İletimi Problemine uygulaması ve AAM'nin Dalga Denklemine uygulaması incelenmiştir.

Nümerik inceleme yapmak amacıyla maple-10 bilgisayar programı da kullanarak bazı örnekler üzerinde uygulanmıştır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] Ross, Shaply, (2008), Diferansiyel denklemler.

[2] Adomian, G., (1989), Nonlinear stochastic systems theory and applications to physics, Kuwer Academic.

[3] Adomian, G., (1994), Solving frontier problems of physics: the decomposition method, Kluwer Academic, Boston.

[4] Adomian, G., (1990). A review of the decomposition method and some recent resulft for nonünear equatious, Math. Comp. Modeli., 13, 17-43.

[5] Abbaoui, Y., Cherruault, Y., Seng, V., (1995), Practical formula for the calculus of multivariable Adomian polynomials, Math. Comput. Modell. 22 (1), p.89-93.

[6] Babolian, E., Biazar, J., Vahidi, A.R., (2004), On the decomposition method for system of linear equations and system of linear Volterra integral equations, Appl. Math. Applic., 147 (1), 5 19-27

[7] Wazwaz, Abdul-Majid, (2000), A new algorithm for calculating adomian polynomials for nonlinear oprators, Applied Mathematics and Computation, 111, 53-69.

[8] Abbaoui, K., Cherruault, Y., (1994), Convergence of Adomian's method applied to non-linear equations, Math. Comput. Modell, 20 (9), p.69-73.

[9] Abbaoui, K. and Cherruault, Y., (1995), New ideas for proving couvergeuce of decoiuposition methods, Comp. Math. AppL 29, 103-108.

[10] Cherrualt, Y., Saccomandi, Y., Some, B., (1992), New result for convergence of Adomian's method applied to integral equations, Math. Comp. Modell, 16 (2), p.83-93.

[11] Abbaoui, K. and Cherruault, Y., (1994), Couvergeuce of Adomian's method applied ta differential equatious, Comp. Math. Appl., 28, 103-109.

[12] Adomian, G., (1984), A new approach to nonlinear partial differential equations, 102, 420-434.

[13] Adomian, G., (1986), Solution of the Navier-Stokes equations-I, Comput. Math., Appl.A12, 1119-1124.

[14] Adomian, G., (1986), A new approach to the heat equation-An application of the decomposition method, J.Mat. Anal. Appl., 113, 202-209.

[15] Adomian, G., (1987), Modification of the decomposition approach to the heat equation, J. Math. Anal. Appl., 124, 290-291.

[16] Adomian, G., Rach, R., (1990), Equality of partial solutions in the decomposition method for linear or nonlinear partial diferential equations, Comput. Math. Appl. 19., 9-12.

[17] Wazwaz, A.M., (1997), Equality of partial solutions in the decomposition method for partial differential equations, Int. J. Comput. Math., 65, 293-308.

[18] Arslantürk, Cihat, A decoomposition method for fin efficiency of convective straight fins with temperature-dependent thermal conductivity, Avarilable online at.www.sicencedirect.com (3.03.2009).

[19] Adomian, G., (1986), Nonlinear stochastic operator equations, Academic Press, London.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

[20] Adomian, G., (1988), Propagation in dissipative or dispersive media, J. Comput. Math., 23, 395-396.

[21] Adomian, G., (1991), A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equations, Comput. Math. Appl., 21, 101-107.

[22] Adomian, G., Rach, R., (1992), A further consideration of partil solutions in the decomposition method, Comput. Math. Appl. 23, 51-64.

[23] Adomian, G., Rach, R. (1992), Noise terms in decomposition solution series, Comput. Math. Appl., 24, 61-64.

[24] Adomian, G., (1989), Nonlineer stochastic system theory and applications to physics, Kluwer, Dordrecht.

[25] Adomian, G., (1994), Solving froutier problems of physics: The decornpositiou method, Kluvver Acadeuaic Publishers, Boston, 352 s.

[26] Adomian, G., (1998), A review of the decornposition method in applied mathenıatics, J. Math. Anal. Appl., 135, 501-544.

[27] Gabet, L., (1994), The theoretical foundation of Adomian method, Comp. Math. Appl. 27 (12), p.41-52.

[28] Wazwaz, A. M., (1995), The decomposition for approximate solution of the Goursat problem, Appl. Math. Comp., 69, 299-311.

[29] Wazwaz, A.M., (1998), A comparison between Adomian's decomposition methods.

[30] Luo, Xing-Guo, Wu, Qing-Biao, Zhang, Bing-Quan, (2006), J. Math. Anal. Appl., 321, 353-363.