SİMPLİSEL OBJELER VE

ÇAPRAZLANMIŞ KOMPLEKSLER

Rahime Çelik

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2010

SİMPLİSEL OBJELER VE ÇAPRAZLANMIŞ KOMPLEKSLER

Rahime Çelik

DUMLUPINAR ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Doç. Dr. Erdal ULUALAN

Temmuz–2010

KABUL VE ONAY SAYFASI

Rahime ÇELİK'nin YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "SİMPLİSEL OBJELER VE ÇAPRAZLANMIŞ KOMPLEKSLER" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

… / … / 2010

Üye : Yrd. Doç. İlker AKÇA

Üye : Yrd. Doç. Dr. Sedat PAK

Üye : Doç. Dr. Erdal ULUALAN (Danışman)

Fen Bilimleri Enstitüsünün Yönetim Kurulu'nun … / … / 2010 gün ve … sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Atalay KÜÇÜKBURSA
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

SİMPLİSEL OBJELER VE ÇAPRAZLANMIŞ KOMPLEKSLER

Rahime ÇELİK
Matematik, Yüksek Lisans Tezi, 2010
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Erdal ULUALAN

ÖZET

Bu çalışmada; ilk olarak tez içinde sıklıkla kullanılan bazı temel kavramlara yer verilerek; simplisel cebirler, simplisel cebirlerin Moore kompleksi, yüksek boyutlu Peiffer elemanları, değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramı ve değişmeli cebirler üzerinde 2-çaprazlanmış modül kavramlarından bahsedilmiştir. İkinci bölümde; grup ve grupoidler üzerinde çaprazlanmış modül ve çaprazlanmış komplekslerden söz edilerek, grup ve grupoidler üzerinde çaprazlanmış modüller kategorileri arasındaki ilişki incelenmiştir. Üçüncü bölümde ilk olarak simplisel gruplar ve gruplar üzerinde çaprazlanmış modüller kategorileri arasındaki ilişkiye değinilerek, simplisel gruplardan çaprazlanmış komplekslere Carrasco-Cegarra tarafından oluşturulan funktor verilmiştir. Daha sonra simplisel gruplardan simplisel grupoidlere bir funktor tanımlanmış ve bu bilgilerden yararlanarak; simplisel gruplardan grupoidler üzerinde çaprazlanmış komplekslere bir funktor oluşturulmuştur. Dördüncü bölümde ise, grupoidler üzerinde çaprazlanmış komplekslerin pullback yapısı incelenmiştir. Son bölümde, önce simplisel cebiroid kavramı tanıtılmış ve simplisel cebirlerden simplisel cebiroidlere bir funktor tanımlanıp, simplisel cebiroidlerden, cebiroidler üzerindeki çaprazlanmış komplekslere bir funktor oluşturulup bu iki funktor yardımıyla simplisel cebirler kategorisinden direkt olarak cebiroidler üzerinde çaprazlanmış komplekslere bir funktor oluşturulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Çaprazlanmış Kompleks, Çaprazlanmış Modül, Moore Kompleks, Pullback, Simplisel Cebir, Simplisel Grup, Simplisel Grupoid, Cebiroid.

SIMPLICIAL OBJECTS AND CROSSED COMPLEXES

Rahime ÇELİK
Mathematics, M. S. Thesis, 2010
Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Erdal ULUALAN

SUMMARY

In this work, in the firs chapter we Mention some basic informations such that simplicial algebras, Moore complex and higher order Peiffer elements and especially the notions of crossed moduls and 2-crossed modules of commutative algebras. In the second chapter, we explore the notions of crossed modules over groups and groupoids and we give a relation between the categories of crossed modules over groups and groupoids. In the third chapter, we give the Carresco-Cegarra funktor from simplicial groups to crossed complexes and by using Dwyer Kan path groupoid construction we define a funktor from simplicial groups to simplicial groupoids and by using this funktor we give a neat description of a passage from the category of simplicial groups to that of crossed complexes over groupoids. In the fourth chapter, we give the notion of a pullback crossed complex of groupoids. Lastly, we introduce the simplicial R-Algebroids and we give a relation between simplicial algebras and simplicial algebroids and we give a funktor from simplicial R-Algebroids to crossed complexes of R-Algebroids defined by Mosa.

Key Words: Crossed Complex, Crossed Module, Moore Complex, Pullback, Simplicial Algebra, Simplicial Group, Simplicial Gruopoid, Algebroids.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarım sırasında bana bu çalışma olanağını sağlayan Matematik Bölüm Başkanı Sayın Doç. Dr. İsmail EKİNCİOĞLU'na, bu tez çalışması planlanması ve yürütülmesi süresince desteğini ve ilgisini esirgemeyen, danışman hocam Sayın Doç. Dr. Erdal ULUALAN'a, teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca tüm hayatım boyunca yanımda olan aileme sonsuz saygı ve sevgilerimi sunarım.

Rahime ÇELİK

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET iv

SUMMARY v

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ xi

1. TEMEL KAVRAMLAR 1

1.1. Simplisel Cebirler 1

1.2. Yüksek Boyutlu Peiffer Elemanları 5

1.3. Çaprazlanmış Modüller 8

1.4. Değişmeli Cebirler Üzerinde 2- Çaprazlanmış Modüller 10

1.4.1.Simplisel Cebirlerden 2- Çaprazlanmış Modüllere 10

2. GRUPOİDLER 13

2.1. Küçük Kategori 13

2.2 Grup ve Grupoid Etkileri 14

2.2.1.Grup Etkisi 14

2.2.2. Gruplar Üzerinde Çaprazlanmış Modüller 15

2.2.3. Grupoid Etkisi 15

2.2.4. Grupoidler Üzerinde Çaprazlanmış Modüller 16

2.2.5. Gruplar Üzerinde Çaprazlanmış Kompleksler 18

2.2.6. Grupoidler Üzerinde Çaprazlanmış Kompleksler 19

3. SİMPLİSEL GRUP (GRUPOİDLER) VE GRUP (GRUPOİDLER) ÜZERİNDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER VE KOMPLEKSLER 22

3.1. Simplisel Gruplar ve Grupoidler 22

3.2. Bir Simplisel Grubun Moore Kompleksi 23

3.3. Simplisel Gruplardan Çaprazlanmış Komplekslere 29

3.4. Simplisel Grupoidler 30

3.5. Bir Simplisel Grupoidin Moore Kompleksi ve Grupoidler Üzerinde Çaprazlanmış Modüller ve Kompleksler 31

3.6. Simplisel Gruplardan Simplisel Grupoidlere 34

İÇİNDEKİLER DİZİNİ (devamı)

Sayfa

4. ÇAPRAZLANMIŞ KOMPLEKSLERİN TABAN DEĞİŞTİRMESİ 41

5. CEBİROİDLER 50

5.1. Cebiroidler 50

5.2. ***R*** **-** Cebiroidler Üzerinde Çaprazlanmış Modüller ve Kompleksler 51

5.2.1. ***R*** **-** Cebiroid Etkisi 51

5.3. 2-Çaprazlanmış Modüllerden ***R*** **-**Cebiroidler Üzerinde Çaprazlanmış Modüllere. 53

5.4. Simplisel ***R*** **-**Cebiroidler 57

5.4.1. ***R*** **-**Cebiroidler Üzerinde Çaprazlanmış Kompleksler 58

5.4.2. Simplisel ***R*** **-**Cebiroidlerden Çaprazlanmış Komplekslere........................... 59

KAYNAKLAR DİZİNİ 63

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklamalar**
Ceb	Değişmeli k-cebirlerin kategorisi
E	Simplisel cebir
$\Delta_n^{op}[n]$	Delta oppozit [n] kategorisi
(NE,∂)	E simplisel cebirinin moore kompleksi
$\pi_n(E)$	E simplisel cebirinin n. homotopi modülü
$H_n(NE,\partial)$	E simplisel cebirinin n. homoloji modülü
$SimpCeb$	Simplisel cebirlerin kategorisi
$SimpCeb_{\leq n}$	Moore kompleksinin boyu n olan Simplisel cebirlerin kategorisi
$S(n,n-r)$	[n] den [n-r] ye tanımlı tüm monoton artan örten fonksiyonların kümesi
(C,R,∂)	Değişmeli k-cebirler üzerinde çaprazlanmış modül
$XMod$	Değişmeli k-cebirler üzerinde çaprazlanmış modüllerin kategorisi
X_2Mod	Değişmeli k-cebirler üzerinde 2-çaprazlanmış modüllerin kategorisi
C	Küçük kategori
c^d	$d \in D$ grubunun (grupoidinin) $c \in C$ grubu (grupoidi) üzerine etkisi
$XMod/C_0$	C_0 tabanlı grupoidler üzerinde çaprazlanmış modüllerin kategorisi
$XComp$	Çaprazlanmış kompleksler
$XComp/C_0$	C_0 tabanlı grupoidler üzerinde çaprazlanmış komplekslerin kategorisi
(C,I)	I obje kümesi üzerinde grupoidler için çaprazlanmış kompleks

1. TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Simplisel Cebirler

1.1.1. Tanım: k birimli ve değişmeli bir halka $(k,+,\bullet)$ olsun. $(A,\oplus,\odot)$ yapısı ise bir değişmeli halka olsun.

i . $(A,\oplus,\odot)$ abelyan grubu bir k -modüldür. Yani aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. Her $r \in k$ ve $a,b \in A$ için $r(a \oplus b) = ra \oplus rb$
2. $(r+s)a = ra + sa$
3. $(r \bullet s)a = r(sa)$
4. $1 \in k$ için $1 \bullet a = a$

ii . Her $a,b \in (A,\oplus,\odot)$ ve $r \in k$ için $r(a \odot b) = ra \odot b = a \odot rb$

oluyorsa $(A,\oplus,\odot)$ halkasına k nın modül skaler çarpımıyla bir ***değişmeli cebir*** denir.

Bir cebir ideali ise; A, k -modüllerinin bir alt modülü ve $(A,\oplus,\odot)$ halkasının bir ideali olacaktır.

Değişmeli cebirler kategorisini ***Ceb*** ile göstereceğiz.

1.1.2. Tanım: Bir E simplisel cebiri; değişmeli k-cebirlerin $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ objelerinden oluşur. Öyle ki; $d_i^n : E_n \longrightarrow E_{n-1}$ $(0 \le i \le n \ne 0)$ ve $s_j^n : E_n \longrightarrow E_{n+1}$ $(0 \le j \le n)$ değişmeli k-cebir, $d_i^{n+1} s_j^n = s_j^{n-1} d_{i-1}^n$ homomorfizmleri olmak üzere bu operatörler için simplisel özdeşlikler diye bilinen,

1) $0 \le i < j \le n$ ise $d_i^{n-1} d_j^n = d_{j-1}^{n-1} d_i^n$

2) $0 \le i \le j \le n$ ise $s_i^{n+1} s_j^n = s_{j+1}^{n+1} s_i^n$

3) $0 \le i < j \le n$ ise $d_i^{n+1} s_j^n = s_{j-1}^{n-1} d_i^n$

4) $i = j$ veya $i = j+1$ ise $d_i^{n+1} s_j^n = i\ d$

5) $0 \le j < i-1 \le n$ ise $d_i^{n+1} s_j^n = s_j^{n-1} d_{i-1}^n$

özdeşlikler sağlanır.

Aslında bir simplisel cebir $\Delta^{op}[n]$ den ***Ceb*** (değişmeli k-cebirlerin kategorisi) kategorisine tanımlı bir funktor dur.

Şöyle ki burada $\Delta^{op}[n]$ kategorisini kısaca hatırlayalım:

$[n] = \{0 < 1 < 2 ... < n\}$, $\Delta^{op}[n]$ kategorisinin herhangi bir objesidir. $[n]$ ve $[m]$ objeleri için $f:[n] \longrightarrow [m]$ morfizmleri ise monoton fonksiyon olup, $i \le j$ için $f(i) \le f(j)$ olan bir operatördür.

$$\delta_i^n : [n-1] \longrightarrow [n];\ 0 \le i \le n \quad \text{için} \quad \delta_i^n(x) = \begin{cases} x & ;\ x < i \\ x+1 & ;\ x \ge i \end{cases}$$

ve

$$\alpha_j^n : [n+1] \longrightarrow [n];\ 0 \le j \le n \quad \text{için} \quad \alpha_j^n(x) = \begin{cases} x & ;\ x \le j \\ x-1 & ;\ x > j \end{cases}$$

ile tanımlı iki özel operatör yardımıyla $f:[n] \longrightarrow [m]$ operatörünün, bu operatörlerin birleşimi şeklinde yazılabileceğini biliyoruz. Dolayısıyla $\Delta^{op}[n]$ kategorisi;

$$\Delta^{op}[n]: \quad \cdots \quad [2] \begin{array}{c} \xrightarrow{\ \delta_0^2\ } \\ \xrightarrow{\ \delta_1^2\ } \\ \xrightarrow{\ \delta_2^2\ } \\ \xleftarrow{\ \alpha_0^1\ } \\ \xleftarrow{\ \alpha_1^1\ } \end{array} [1] \begin{array}{c} \xrightarrow{\ \delta_0^1\ } \\ \xrightarrow{\ \delta_1^1\ } \\ \xleftarrow{\ \alpha_0^0\ } \end{array} [0]$$

şeklinde diyagramatik olarak tanımlanabilir.

E, $\Delta^{op}[n]$ den *Ceb* 'e $E([n]) = E_n$ ve $E(\delta_i^n) = d_i^n$ ve $E(\alpha_j^n) = s_j^n$ şeklinde tanımlı olduğundan bir simplisel cebiri şematik olarak,

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\boldsymbol{E} : \ldots & E_2 \arrow[r, shift left=6, "d_0^2"] \arrow[r, shift left=3, "d_1^2"] \arrow[r, "d_2^2"] & E_1 \arrow[l, shift left=3, "s_0^1"] \arrow[l, shift left=6, "s_1^1"] \arrow[r, shift left=3, "d_0^1"] \arrow[r, "d_1^1"] & E_0 \arrow[l, shift left=3, "s_0^0"]
\end{tikzcd}$$

şeklinde gösterebiliriz. $\Delta^{op}[n]$ de δ_i ve α_j operatörleri simplisel özdeşlikleri sağlayan operatörler ve E yapı koruyan bir morfizm olduğundan d_i^n ve s_j^n operatörleri de simplisel özdeşlikleri sağlar.

1.1.3. Tanım: E ve F iki simplisel cebir olsun. Bir $t : E \longrightarrow F$ ye simplisel cebir morfizmi: $E : \Delta^{op}[n] \longrightarrow \boldsymbol{Ceb}$ ve $F : \Delta^{op}[n] \longrightarrow \boldsymbol{Ceb}$ funktorları arasındaki doğal transformasyondur.

Yani herhangi bir $[n],[m] \in \Delta^{op}[n]$ ve $f : [n] \longrightarrow [m]$ operatörü için

$$\begin{tikzcd}
E([n]) \arrow[r, "E(f)"] \arrow[d, "t_{[n]}"'] & E([m]) \arrow[d, "t_{[m]}"] \\
F([n]) \arrow[r, "F(f)"'] & F([m])
\end{tikzcd}$$

diyagramları değişmeli olacak şekilde ***Ceb*** kategorisinde $t_{[n]} : E_n \longrightarrow F_n$ ve $t_{[m]} : E_m \longrightarrow F_m$ cebir homomorfizmleri vardır.

Bu durum diyagram olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{E} : \ldots \arrow[d, "t"'] & E_2 \arrow[r, shift left=4] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[d, "t_2"'] & E_1 \arrow[l, shift left=2] \arrow[l, shift left=4] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[d, "t_1"'] & E_0 \arrow[l, shift left=2] \arrow[d, "t_0"'] \\
\boldsymbol{F} : \ldots & F_2 \arrow[r, shift left=4] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] & F_1 \arrow[l, shift left=2] \arrow[l, shift left=4] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] & F_0 \arrow[l, shift left=2]
\end{tikzcd}
$$

diyagramı değişmelidir.

$\boldsymbol{E}$ ve $\boldsymbol{F}$ iki simplisel cebir olduğunda, $f_n : E_n \longrightarrow F_n$ k- cebir homomorfizmleri olmak üzere, $d_i^n f_n = f_{n-1} d_i$ *ve* $f_n s_i = s_i f_{n-1}$ özelliklerini sağlayan bir $f : E \longrightarrow F$, f_n homomorfizmlerin bir sınıfı tanımlanabilir. Yani f, E simplisel cebirinden, F simplisel cebirine tanımlı bir morfizmdir. Böylece simplisel cebirler kategorisini tanımlayabiliriz. Bu kategoriyi ***SimpCeb*** ile göstereceğiz.

1.1.4. Tanım : E bir simplisel cebir olsun. E nin Moore kompleksi $(\boldsymbol{NE}, \partial)$,

$$NE_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} Çekd_i^n$$

ile tanımlı bir zincir kompleksidir. Burada $\partial_n : NE_n \longrightarrow NE_{n-1}$ diferansiyelleri her bir adımda d_n^n kısıtlaması ile tanımlıdır. Yani;

$$(NE, \partial) : \ldots \; NE_2 \xrightarrow{d_2^2} NE_1 \xrightarrow{d_1^1} NE_0 = E_0$$

şeklinde tanımlıdır. Simplisel özdeşliklere göre $\partial_{n+1}\partial_n = 0$ olduğu gösterilebilir. Burada;

$$NE_0 = E_0$$

$$NE_1 = Çekd_0^1$$

$$NE_2 = Çekd_0^2 \cap Çekd_1^2$$

$$NE_3 = Çekd_0^3 \cap Çekd_1^3 \cap Çekd_2^3$$

şeklindedir.

1.1.5.Önerme: E simplisel cebirinin n. homotopi modülü $\pi_n(E)$, E nin Moore kompleksinin n. homoloji modülüne izomorftur. Yani

$$\pi_n(E) \cong H_n(NE,\partial)$$

$$= \frac{NE_n \bigcap Çekd_n^n}{d_{n+1}^{n+1}(NE_{n+1})}$$

şeklindedir.

Aslında; $\partial_n : NE_n \longrightarrow NE_{n-1}$, d_n^n ile tanımlı ve $\partial_{n+1} : NE_{n+1} \longrightarrow NE_n$, d_{n+1}^{n+1} ile tanımlı olduğundan;

$$\frac{Çek\partial_n}{Im\partial_{n+1}} = \frac{Çekd_n^n \cap NE_n}{d_{n+1}^{n+1}\left(NE_{n+1}\right)}$$

$$= \frac{Çekd_n^n \bigcap Çekd_{n-1}^n \bigcap \ \ldots \bigcap Çekd_0^n}{d_{n+1}^{n+1}\left(NE_{n+1}\right)}$$

$$= \frac{\bigcap\limits_{i=0}^{n} Çekd_i^n}{d_{n+1}\left(NE_{n+1}\right)}$$

dir.

1.2. Yüksek Boyutlu Peiffer Elemanları

Bir simplisel cebirin ***NE*** Moore kompleksine; eğer her $n \geq k+1$ için $NE = 0$ ise, Moore kompleksinin boyu k dır diyeceğiz. Öyle ki; k boyunda bir Moore kompleks aynı zamanda $l \geq k$ için l boyundadır. Bu nedenle Moore kompleksinin boyu n olan simplisel cebirlerin kategorisini $\boldsymbol{SimpCeb_{\leq n}}$ ile gösteririz.

$[n] = \{0 < 1 < 2 < \ldots < n\}$ sıralı kümesi için $\alpha_i^n : [n+1] \longrightarrow [n]$

$$\alpha_i^n(j) = \begin{cases} j & ; j \leq i \\ j-1 ; & j > i \end{cases}$$

ile verilen artan örten fonksiyon olsun.

$S(n,n-r)$, $[n]$den $[n-r]$ye tanımlı bütün monoton artan örten fonksiyonların kümesi olsun. Bu α_i^n nin çeşitli bileşkelerinden oluşturulabilir. Fonksiyonlardan üretilen bu bileşke için bir sonraki kural; $j<i$ için, $\alpha_j.\alpha_i=\alpha_{i-1}\alpha_j$ dir. Bu kuralda, her $\alpha\in S(n,n-r)$ elemanı $0\le i_1<i_2<\ldots<i_r\le n-1$ ile $\alpha=\alpha_{i_1}\circ\alpha_{i_2}\circ\ldots\circ\alpha_{i_r}$ gibi bir tek şekilde ifade edilir. Öyle ki burada i_k indeksleri $[n]$ nin $\{i_1,\ldots,i_r\}=\{i:\alpha(i)=\alpha(i+1)\}$ şeklindeki elemanlarıdır. Bu nedenle $\{(i_r,\ldots,i_1):0\le i_1<i_2<\ldots<i_r\le n-1\}$ kümesi ile birlikte $S(n,n-r)$ yi tanımlayabiliriz.

Bilhassa $S(n,n)$, nin bir tek elemanı $[n]$deki özdeşlik fonksiyonu ile tanımlanır, 0-tuple boşa karşılık gelen $\varnothing_n$ ile gösterilir. Benzer şekilde $S(n,0)$ ın tek elemanı $(n-1,n-2,\ldots,0)$ dır.

Her $n\ge 0$ için

$$S(n)=\bigcup_{0\le r\le n} S(n,n-r)$$

dir. Eğer $i_1=j_1,\ldots,i_k=j_k$ ve $i_{k+1}\ge j_{k+1}$ $(k\ge 0)$ ise yada eğer $i_1=j_1,\ldots,i_r=j_r$ ve $r<s$ ise $S(n)$ de $\alpha=(i_r,\ldots,i_1)<\beta=(j_s,\ldots,i_1)$ dir diyebiliriz. Bu $S(n)$ ni bir sıralı küme yapar.

$S(n)$ nin (α,β) ikililerinden oluşan bir $P(n)$ kümesini tanımlayalım. $\alpha=(i_r,\ldots,i_1),\beta=(j_s,\ldots,i_1)\in S(n),\beta<\alpha$ ve $\alpha\cap\beta=\varnothing$ olsun. k-lineer morfizmine ihtiyacımız olacak,

$$\left\{C_{\alpha,\beta}:NE_{n-\#\alpha}\otimes NE_{n-\#\beta}\longrightarrow NG_n:(\alpha,\beta)\in P(n),n\ge 0\right\}$$

$$C_{\alpha,\beta}\left(x_\alpha\otimes y_\beta\right)=p\mu\left(s_\alpha\otimes s_\beta\right)\left(x_\alpha\otimes y_\beta\right)=p\left(s_\alpha\left(x_\alpha\right)s_\beta\left(y_\beta\right)\right)$$

$$=(1-s_{n-1}d_{n-1})\ldots(1-s_0d_0)\left(s_\alpha\left(x_\alpha\right)s_\beta\left(y_\beta\right)\right)$$

bileşke olarak verilsin. Burada

$$s_\alpha=\left(s_{i_r},\ldots,s_{i_1}\right):NE_{n-\#\alpha}\longrightarrow E_n,\quad s_\beta=\left(s_{j_s},\ldots,s_{j_1}\right):NE_{n-\#\beta}\longrightarrow E_n$$

$$p:E_n\longrightarrow NE_n,\quad j=0,1,\ldots,n-1$$

için $p_j = 1 - s_j d_j$ ile verilen $p = p_{n-1} \dots p_0$ bileşik izdüşümleriyle belirtilir ve $\mu : E_n \otimes E_n \longrightarrow E_n$ çarpımı ifade eder.

E_n de $C_{\alpha,\beta}\left(x_\alpha \otimes y_\beta\right)$ şeklindeki bütün elemanlar tarafından oluşturulan I_n idealini göz önüne alalım. Öyle ki her $(\alpha,\beta) \in P(n)$ i çin $x_\alpha \in NE_{n-\#\alpha}$ ve $y_\beta \in NE_{n-\#\beta}$ dir.

1.2.1.Önerme ([1]): E bir simplisel cebir olsun. $n > 0$ ve D_n de E_n deki dejenere elemanlar tarafından oluşturulan ideal olsun. $E_n = D_n$ varsayalım ve I_n de $(\alpha,\beta) \in P(n)$ ile $C_{\alpha,\beta}\left(x_\alpha \otimes y_\beta\right)$ şeklindeki elemanlar tarafından oluşturulan ideal olsun. Burada $1 \le r,\ s \le n$ için $x_\alpha \in NE_{n-\#\alpha}$ ve $y_\beta \in NE_{n-\#\beta}$ dir. O halde $\partial_n\left(NE_n\right) = \partial_n\left(I_n\right)$ dir.

Arvasi [1] de $n = 2,3$ ve 4 için I_n idealinin ∂_n altındaki görüntülerini incelemiştir.

Şimdi Önerme 1.2.1 e göre $n = 2,3$ için ∂_n ile I_n nin görüntü kümesinin nasıl olduğunu gösterelim:

$E_2 = D_2$ olduğunu kabul edelim. $\beta = (1)$, $\alpha = (0)$ ve $x, y \in NE_1 = Çekd_0$ alalım. I_n idealinin

$$C_{(1)(0)}\left(x \otimes y\right) = p_1 p_0\left(s_1 x s_0 y\right) = s_1 x\left(s_1 y - s_0 y\right)$$

şeklindeki elemanlar tarafından üretildiğini biliyoruz. O halde ∂_2 altında I_2 nin görüntü kümesi $x \in Çekd_0$ ve $y - s_0 d_1 y \in Çekd_1$ iken $d_2\left[C_{(1)(0)}\left(x \otimes y\right)\right] = x\left(y - s_0 d_1 y\right)$ dir. Bu nedenle ∂_2 altında I_2 nin görüntü kümesi $Çekd_0 Çekd_1$ dir.

$n = 3$ için lineer morfizmler $C_{(1,0),(2)}, C_{(2,0),(1)}, C_{(2,1),(0)}, C_{(2),(0)}, C_{(2),(1)}$ ve $C_{(1),(0)}$ dır. I_3 ideali $x \in NE_1$ ve $y \in NE_2$ için

$$C_{(1,0),(2)}\left(x \otimes y\right) = \left(s_1 s_0 x - s_2 s_0 x\right) s_2 y$$

$$C_{(2,0),(1)}\left(x \otimes y\right) = \left(s_2 s_0 x - s_2 s_1 x\right)\left(s_1 y - s_2 y\right)$$

$$C_{(2,1),(0)}\left(x \otimes y\right) = s_2 s_1 x\left(s_0 y - s_1 y + s_2 y\right)$$

ve $x, y \in NE_2$ için,

$$C_{(1),(0)}\left(x\otimes y\right)=s_1x\left(s_0y-s_1y\right)+s_2xy$$

$$C_{(2),(0)}\left(x\otimes y\right)=s_2xs_0y$$

$$C_{(2),(1)}\left(x\otimes y\right)=s_2x\left(s_1y-s_2y\right)$$

elemanları tarafından üretilir. Bu nedenle ∂_3 ile I_3 ün görüntüsü için [1] e bakınız.

Eğer $n=4$ ise $\boldsymbol{E}$ simplisel cebirinin Moore kompleksinin görüntüsü $\partial_n\left(NE_n\right)=\sum_{I,J} K_I K_J$ şeklinde verilebilir.

Burada $\varnothing \neq I, J \subset [n-1]=\{0,1,...,n-2\}$ $I \bigcup J=[n-1]$, $K_I=\bigcap_{i\in I} çekd_i$ ve $K_J=\bigcap_{j\in I} çekd_j$ dir. Genel olarak $n>4$ için $\sum_{I,J} K_I K_J \subset \partial_n\left(NE_n\right)$ şeklinde bir kapsama vardır.

1.3. Çaprazlanmış Modüller

Gruplar üzerinde çaprazlanmış modüller ilk olarak Whitehead [25] tarafından, değişmeli cebirler üzerinde Porter [22] tarafından tanımlanmıştır.

Bu bölümde değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramını inceleyeceğiz.

R ve M iki değişmeli k-cebir ve

$$\begin{aligned} R\times M &\longrightarrow M \\ (r,m) &\longrightarrow r\bullet m \end{aligned}$$

ile tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa R, M cebirine etki ediyor denir.

1. $k\in k$, $r\in R$ ve $m\in M$ için $k(r\bullet m)=(kr)\bullet m=r\bullet(km)$

2. $r\bullet(m+m')=r\bullet m+r\bullet m'$

3. $(r+r')\bullet m=r\bullet m+r'\bullet m$

4. $r \bullet (mm') = (r \bullet m)m' = m(r \bullet m')$

5. $(rr') \bullet m = r \bullet (r' \bullet m)$

1.3.1.Tanım : R birimli ve değişmeli bir k-cebir ve $\partial : C \longrightarrow R$ bir cebir homomorfizmi olsun. R nin C üzerine bir etkisi var olsun. $r \in R$ nin $c \in C$ üzerindeki etkisini $r \bullet c$ ile gösterelim. Eğer;

CM1) Her $r \in R$ ve $c \in C$ için $\partial(r \bullet c) = r\partial c$ oluyorsa $\partial : C \longrightarrow R$ homomorfizmine ***pre-çaprazlanmış modül*** veya ***ön çaprazlanmış modül*** denir.

Ek olarak

CM2) Her $c, c' \in C$ için $\partial c \bullet c' = cc'$

özelliği sağlanıyorsa ∂ ya bir **çaprazlanmış modül** denir.

Burada **CM2** özelliğine ***Peiffer özelliği*** adı verilir. Böyle bir çaprazlanmış modülü (C, R, ∂) ile gösteririz.

1.3.2.Tanım : Bir (C, R, ∂) çaprazlanmış modülünden (C', R', ∂') çaprazlanmış modülüne tanımlı bir morfizm; $\theta : C \longrightarrow C'$ ve $\psi : R \longrightarrow R'$, şeklinde tanımlı iki cebir homomorfizmden oluşur ve

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\theta"'] & R \arrow[d, "\psi"] \\ C' \arrow[r, "\partial'"'] & R' \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Ayrıca $\theta(r \bullet c) = \psi(r) \bullet \theta(c)$ dir. Bu durumda $\Phi = (\theta, \psi)$ ye bir **çaprazlanmış modül morfizmi** denir.

Böylece çaprazlanmış modüller kategorisini oluşturabiliriz. Bunu ***XMod*** ile göstereceğiz.

1.3.3.Önerme : $\partial : C \longrightarrow R$ bir çaprazlanmış modül ise $Çek\partial$, C nin merkezidir.

İspat : $c \in C$ ve $a \in Çek\partial$ için $ac = ca$ olduğunu göstermeliyiz.

$$a \bullet c = \partial(a) \bullet c = 0c = 0 = c0 = c \bullet \partial(a) = ca$$

olduğundan $a \in Mer(C) = \{c \in C : her\, a \in C\ için\ \ ca = ac\}$ olur.

1.3.4.Önerme : $\partial : C \longrightarrow R$ bir çaprazlanmış modül ise $\partial(c)$, R nin bir idealidir.

İspat : $\partial(c) = \{\partial(c) : c \in C\}$ iken, her $r \in R$ için $r \bullet \partial(c) = \partial(r \bullet c)$ ve $r \bullet c \in C$ olup, $\partial(r \bullet c) = r\partial(c)$ olur. Yani $\partial(c)$, R 'nin bir idealidir.

1.4. Değişmeli Cebirler Üzerinde 2- Çaprazlanmış Modüller

1.4.1.Simplisel Cebirlerden 2- Çaprazlanmış Modüllere

Grupların çaprazlanmış modülleri ilk olarak Whitehead [25] tarafından 2-tipler (homotopi) modelleri olarak tanımlanmıştır. Conduché [11] 3-tipler için bir model olarak 2-çaprazlanmış modül kavramını 1984 de tanımlamıştır.

Grandjean ve Vale [14] cebirlerin bir 2-çaprazlanmış modülünün tanımını vermişlerdir. Şimdi bu tanımı verelim.

k-cebirlerin bir 2-çaprazlanmış modülü, C_0 cebirinin çarpma yoluyla kendi üzerine etki ettiği ∂_1, ∂_2 ve C_0-cebirlerinin morfizmleri ile C_0-cebirlerin $C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$ şeklinde bir kompleksinden oluşur.

Burada C_0-cebirleri çarpmayla kendisi üzerinde etki eder. Öyle ki $C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1$ bir çaprazlanmış modüldür. C_2 nin üzerinde C_1 in etkisi (her $x \in C_0$, $y \in C_1$ ve $z \in C_2$ için $(xy)z = x(yz)$ yi gerektirir.). Ayrıca ***Peiffer Lifting*** diye adlandırılan ve $\{\bullet \otimes \bullet\} : C_1 \otimes_{C_0} C_1 \longrightarrow C_2$ ile verilen bir C_0 bilineer fonksiyonu vardır. Öyle ki her $y_0, y_1 \in C_1$ ve x_1, x_2 ve $x \in C_2$ için aşağıdaki aksiyomları sağlar:

PL1: $\partial_2\{y_0 \otimes y_1\} = y_0 y_1 - \partial_1(y_1) \bullet y_0$

PL2: $\{\partial_2(x_1) \otimes \partial_2(x_2)\} = x_1 x_2$

PL3: $\{y_0 \otimes y_1 y_2\} = \{y_0 y_1 \otimes y_2\} + \partial_1(y_2) \bullet \{y_0 \otimes y_1\}$

PL4: a) $\{\partial_2(x)\otimes y\} = yx - \partial_1(y)x$

b) $\{y\otimes\partial_2(x)\} = yx$

PL5: $\{y_0\otimes y_1\}\bullet z = \{y_0 z\otimes y_1\} = \{y_0\otimes y_1 z\}$

dir.

Cebirler üzerinde 2-çaprazlanmış modüllerinin bir morfizmi aşağıdaki diyagramdaki gibi verilebilir.

$$\begin{tikzcd} C_2 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "f_2"'] & C_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f_1"'] & C_0 \arrow[d, "f_0"'] \\ C_2' \arrow[r, "\partial_2'"] & C_1' \arrow[r, "\partial_1'"] & C_0' \end{tikzcd}$$

Burada her $c_2\in C_2$, $c_1\in C_1$, $c_0\in C_0$ için

$f_0\partial_1 = \partial_1' f_1,\quad f_1\partial_2 = \partial_2' f_2$

$f_1(c_0c_1) = f_0(c_0)\bullet f_1(c_1)$

$f_2(c_0c_2) = f_0(c_0)\bullet f_2(c_2)$

ve $\{\bullet\otimes\bullet\}\, f_1\otimes f_1 = f_2\{\bullet\otimes\bullet\}$ dir.

Böylelikle $\boldsymbol{X_2 Mod}$ ile gösterilen 2-çaprazlanmış modüllerin kategorisini tanımlayabiliriz.

1.4.2 Teorem : Çaprazlanmış modüllerin kategorisi Moore kompleksinin boyu 1 olan simplisel cebirlerin kategorisine denktir.

1.4.3 Önerme ([1]) : E , NE moore kompleksiyle birlikte bir simplisel komütatif cebir olsun. Cebirlerin kompleksi

$$NE_2\big/\partial_3(NE_3\cap D_3) \xrightarrow{\overline{\partial_2}} NE_1 \xrightarrow{\partial_1} NE_0$$

cebirlerin bir 2-çaprazlanmış modülüdür. Burada Peiffer Lifting fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} \{\bullet\otimes\bullet\}\, NE_1 \otimes NE_1 &\longrightarrow NE_2 \big/ \partial_3\left(NE_3 \cap D_3\right) \\ \{y_0 \otimes y_1\} &\longrightarrow \overline{s_1 y_0\left(s_1 y_1 - s_0 y_1\right)} \end{aligned}$$

(Burada sağ taraf NE_2 deki elemanlara uygun olarak temsil edilen $NE_2 \big/ \partial_3\left(NE_3 \cap D_3\right)$ deki bir koseti gösterir.)

1.4.4. Teorem ([4]): 2-çaprazlanmış modüllerin kategorisi, Moore kompleksinin boyu 2 olan simplisel cebirlerin kategorisine denktir.

2. GRUPOİDLER

Aşağıdaki tanım ve notasyonlar [24] den alınmıştır.

2.1. Küçük Kategori

Bir küçük kategori $\mathcal{C}$ aşağıdakilerden ibarettir:

1. Bir $Ob(\mathcal{C})$ ile gösterilen obje kümesi var olmalıdır. Bunu C_0 ile gösterelim.

2. $Arr(\mathcal{C})$ ile gösterilen morfizmler kümesi var olmalıdır. Bunu C_1 ile gösterelim.

3. C_1 den C_0 a kaynak ve hedef dönüşümleri var olmalıdır. $C_1 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} C_0$ dır.

4. C_0 dan C_1 e e ile gösterilen objeler üzerinde birim olan bir dönüşüm var olmalıdır.

5. $m: C_1 \times C_1 \longrightarrow C_1$ iki morfizmin kompozisyonunu veren kısmi olarak tanımlı bir fonksiyon var olmalıdır. Yani; $x, y, z \in C_0$, $a_1 : x \longrightarrow y$, $a_2 : y \longrightarrow z$ için,

$$\begin{aligned} m: C_1(x,y) \times C_1(y,z) &\longrightarrow C_1(x,z) \\ (a_1, a_2) &\longrightarrow m(a_1, a_2) = a_1 \circ a_2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. Genellikle $x \in C_0$ için e_x veya 1_x veya $e(x): x \longrightarrow x$ birim morfizm ile ve;

$m(a,b) = b \circ a$ ile göstereceğiz.

$$\begin{tikzcd} a : x \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "b \circ a"'] & y \arrow[r, "b"] & z \end{tikzcd}$$

Bu veriler aşağıdaki aksiyomları sağlamalıdır.

1. a ve b morfizmlerinin $a \circ b$ şeklinde tanımlanabilmesi için $t(a) = s(b)$ olmalıdır ve $s(a \circ b) = s(a)$; $t(a \circ b) = t(b)$ olur.

2. Her $x \in C_0$ için $s(e_x) = t(e_x) = x$ ve $a \circ e_{t(a)} = a = e_{s(a)} \circ a$ her a morfizmi için doğru olmalıdır.

3. "$\circ$" işlemi asosyatif olmalıdır. Yani; $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ olmalıdır.

$x, y \in C_0$ olmak üzere x den y ye giden bütün morfizmlerin kümesini $C_1(x, y)$ ile göstereceğiz. Eğer; $x \neq y$ olduğunda $C_1(x, y) = \varnothing$ ise $\boldsymbol{C}$ küçük kategorisine ***tamamen bağlantısızdır*** denir.

2.1.1.Tanım : Bir grupoid bir C gibi küçük kategoridir ve her morfizm bir izomorfizmdir. Yani herhangi bir a morfizmi için a^{-1} vardır ve $a \circ a^{-1} = e_{s(a)}$ ve $a^{-1} \circ a = e_{t(a)}$ dır. Açıkça C_0 ve C_1 birer küme olmak üzere, C_0 obje kümesi, C_1 morfizmler kümesi olsun.

$$C_1 \underset{\xleftarrow[e]{}}{\overset{\xrightarrow{s}}{\xrightarrow{t}}} C_0$$

diyagramından $se = te = id$ dir ve C_1 üzerinde bir kompozisyon işlemi vardır; $s(a \circ b) = s(a)$, $t(a \circ b) = t(b)$ sağlanır. Ayrıca her morfizmin tersi vardır ve $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ olmalıdır.

2.2 Grup ve Grupoid Etkileri

2.2.1.Grup Etkisi

C ve D iki grup olsun. D nin C üzerindeki sağdan etkisi;

$$D \times C \longrightarrow C$$
$$(d, c) \longrightarrow c^d$$

ile gösterilen bir dönüşüm olup, aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. $d_1, d_2 \in D,\ c \in C$ olmak üzere, $\left(c^{d_1}\right)^{d_2} = c^{d_1 \bullet d_2}$ dir.

2. $c_1, c_2 \in C,\ d \in D$ için $(c_1 c_2)^d = c_1^d c_2^d$ dir.

3. $e_c \in C$ birim olmak üzere, $(e_c)^d = e_c$ dir.

4. $e_d \in D$ olmak üzere $c \in C$ için $c^{e_d} = c$ dir.

Bir $d \in D$ nin $c \in C$ üzerindeki etkisi c^d ile gösterilir.

2.2.2. Gruplar Üzerinde Çaprazlanmış Modüller

C ve D iki grup D nin C üzerine c^d ile gösterilen bir grup etkisi var olsun ve $\partial : C \longrightarrow D$ bir grup homomorfizmi olsun. Eğer,

CM1) Her $c \in C$ ve $d \in D$ için $\partial\left(c^d\right) = d^{-1}\partial(c)d$ özelliğini sağlıyorsa ∂ ya ***pre-çaprazlanmış modül*** denir.

Eğer ilave olarak ***peiffer özdeşliği*** denilen

CM2) $c, c' \in C$ için $c^{\partial(c')} = (c')^{-1} cc'$

özelliği sağlanırsa ∂ ya ***çaprazlanmış modül*** denir.

Objeleri $\partial_1 : C_1 \longrightarrow D_1$ ve $\partial_2 : C_2 \longrightarrow D_2$ şeklindeki çaprazlanmış modüller olan ***XMod*** kategorisini aşağıdaki gibi oluşturabiliriz:

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{\partial_1} & D_1 \\ {\scriptstyle \alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ C_2 & \xrightarrow[\partial_2]{} & D_2 \end{array}$$

diyagramı komütatif yani $\beta\partial_1 = \partial_2\alpha$ olmalı ve, $\alpha\left(c_1^{d_1}\right) = \alpha\left(C_1^{d_1}\right)^{\beta(d_1)}$ özelliği sağlanıyorsa, (α, β) ya ∂_1 den ∂_2 ye bir morfizm denir. Böylece gruplar üzerinde çaprazlanmış modüllerin oluşturduğu ***XMod*** kategorisini tanımlayabiliriz.

2.2.3. Grupoid Etkisi

$$C_1 \;\; \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \\ \xleftarrow{e} \end{array} \;\; C_0 \text{ ve } D_1 \;\; \begin{array}{c} \xrightarrow{s'} \\ \xrightarrow{t'} \\ \xleftarrow{e'} \end{array} \;\; C_0$$

aynı C_0 obje kümesi ü zerinde iki grupoid olsun ve C_1, C_0 üzerinde tamamen bağlantısız grupoid olsun. Yani; $x, y \in C_0$ için $x \neq y$ ise $C_1(x,y) = \varnothing$ olsun. D_1 grupoidinin C_1 grupoidi üzerindeki etkisi, morfizmler kümesi üzerinde;

$$\begin{aligned} D_1 \times C_1 &\longrightarrow C_1 \\ (d,c) &\longrightarrow c^d \end{aligned}$$

ile gösterilen bir dönüşüm olup, aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. c^d nin tanımlanabilmesi için gerek ve yeter şart $t(c) = s(d)$ olmalı ve doğal olarak $t\left(c^d\right) = t(d)$ olmalıdır.

2. $(c_1 \circ c_2)^d = c_1^d \circ c_2^d$ ve $(e_x)^d = e_y$, $d \in D_1(x,y)$ ve $c_1 \in C_1(x,x)$ dir.

3. $c_1^{d_1 \circ d_2} = \left(c_1^{d_1}\right)^{d_2}$, $d_1 \in D_1(x,y)$, $d_2 \in D_1(y,z)$ dir.

2.2.4. Grupoidler Üzerinde Çaprazlanmış Modüller

Grupoidler üzerinde çaprazlanmış modül kavramı Brown ve Gilbert tarafından [6] da verilmiştir.

C_1 ve D_1 aynı C_0 obje kümesi üzerinde birer grupoid, C_1 tamamen bağlantısız ve D_1 in C_1 üzerine bir grupoid etkisi var olsun. $\delta : C_1 \longrightarrow D_1$ bir grupoid morfizmi olmak üzere yani;

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{\ \delta\ } & D_1 \\ s \Big\downarrow \Big\downarrow t & & s \Big\downarrow \Big\downarrow t \\ C_0 & = & C_0 \end{array}$$

$\delta(x \circ y) = \delta(x) \circ \delta(y)$ olsun. Eğer aşağıdaki iki özellik sağlanırsa δ ya ***grupoidler üzerinde çaprazlanmış modül*** denir.

CM1) $t(c)=s(d)$ ve $c\in C_1$, $d\in D_1$ olmak üzere $\delta\left(c^{d}\right)=\left(d^{-1}\right)\circ\delta(c)\circ d$

CM2) $c,c'\in C(x,x); x\in C_0$ olmak üzere $c^{\delta(c')}=(c')^{-1}\circ c\circ c'$

dir.

Şimdi grupoidler üzerindeki çaprazlanmış modüller kategorisini oluşturacağız:

Objeleri

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & D_1 \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \\ C_0 \arrow[r, equal] & C_0 \end{tikzcd} \qquad \text{ve} \qquad \begin{tikzcd} C_2 \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & D_2 \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \\ C_0 \arrow[r, equal] & C_0 \end{tikzcd}$$

şeklinde çaprazlanmış modüller ve morfizmleri de

$$\begin{tikzcd} \left(C_1 \rightrightarrows C_0\right) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, dashed, "\alpha"'] & \left(D_1 \rightrightarrows C_0\right) \arrow[d, dashed, "\beta"] \\ \left(C_2 \rightrightarrows C_0\right) \arrow[r, "\delta_2"] & \left(D_2 \rightrightarrows C_0\right) \end{tikzcd}$$

diyagramını komütatif yapacak şekilde, α,β grupoid morfizmleridir. Bu kategoriyi $\boldsymbol{XMod}/\boldsymbol{C_0}$ şeklinde tanımlayalım.

Şimdi gruplar ve grupoidler üzerindeki çaprazlanmış modüllerin birbirleri ile olan ilişkisini veren aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

2.2.4.1.Önerme : $\delta: C_1 \longrightarrow D_1 \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} C_0$ bir grupoidler üzerinde çaprazlanmış modül olsun. Eğer C_0 bir tek nokta kümesi ise yani $C_0=\{*\}$ ise; bu durumda δ gruplar üzerinde bir çaprazlanmış modüldür.

İspat : $C_0 = \{*\}$ gibi tek nokta kümesi olduğunda; $D_1 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} \{*\}$ bir grup olur. Burada $a,b \in D_1$ morfizm olduğunda $a:* \longrightarrow *$, $b:* \longrightarrow *$ olmak üzere $a \circ b:* \longrightarrow *$ olur ve ; $e_*:* \longrightarrow *$, D_1 in birim elemanıdır. Ayrıca D_1 bir grupoid olduğundan her a morfizmin a^{-1} gibi bir ters morfizmi vardır ve $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ olduğundan $D_1 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} \{*\}$ bir gruptur. C_1 de $\{*\}$ üzerinde tamamen bağlantısız olduğundan benzer şekilde C_1 de bir grup olur. D_1 in C_1 üzerindeki grupoid etkisi bir grup etkisi olur ve δ da bir grup homomorfizması olur. **CM1** ve **CM2** aksiyomları da sağlandığından

$$\begin{array}{ccc} \delta: C_1 & \longrightarrow & D_1 \\ \downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow \\ \{*\} & = & \{*\} \end{array}$$

gruplar üzerinde bir çaprazlanmış modül olur.

Böylece, $\mathbf{XMod}/\mathbf{C_0} \xrightarrow{\Delta} \mathbf{XMod}/\{*\}$ şeklinde bir funktor tanımlamış oluruz. Burada $\Delta(C_0) = \{*\}$ şeklindedir.

2.2.5. Gruplar Üzerinde Çaprazlanmış Kompleksler

Çaprazlanmış kompleks kavramı [7] de Brown ve Higgins tarafından verilmiştir.

2.2.5.1.Tanım ([7]): $C: \; \dots \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$

şeklinde grupların ve grup homomorfizmlerinin bir dizisini göz önüne alalım. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa C ye ***çaprazlanmış kompleks*** denir.

1. $\partial_n \partial_{n+1} = 1$ olmalıdır. (Her $n \in N$ için)

2. $\partial_1 : C_1 \longrightarrow C_0$ bir çaprazlanmış modül olmalıdır.

3. C_0 ın $n \geq 1$ olmak üzere C_n grupları üzerinde bir grup etkisi var olmalı ve $\partial_1(C_0)$ da; $n \geq 2$ için C_n üzerinde birim olarak etki etmelidir.

Çaprazlanmış kompleksler kategorisini ***XComp*** ile gösterelim.

2.2.5.2.Örnek : $\partial_1 : C_1 \longrightarrow C_0$ bir çaprazlanmış modül ise

$$\ldots \ \{1\} \longrightarrow \{1\} \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$$

bir çaprazlanmış komplekstir. Buna ***birim çaprazlanmış kompleks*** denir.

2.2.5.3.Tanım : $C : \ \ldots \ C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \ \ldots \ \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$

bir çaprazlanmış kompleks olsun. Eğer $n > k$ için $C_n = \{1\}$ ise C ye ***k-parçalanmış çaprazlanmış kompleks*** denir.

2.2.5.4.Örnek : Her çaprazlanmış modül bir 1-parçalanmış çaprazlanmış komplekstir.

2.2.6. Grupoidler Üzerinde Çaprazlanmış Kompleksler

2.2.6.1.Tanım : $C : \ \ldots \xrightarrow{\delta_3} C_2 \xrightarrow{\delta_2} C_1 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} C_0$

diyagramını göz önüne alalım. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa C ye C_0 tabanlı ***grupoidler üzerinde çaprazlanmış kompleks*** denir.

1. $\delta_2 : C_2 \longrightarrow C_1 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} C_0$ **,** C_0 tabanlı bir grupoidler için bir çaprazlanmış modül olmalıdır.

2. Her n için $\delta_n \circ \delta_{n+1} = \textit{sıfır dönüşüm}$ olmalıdır.

3. Burada; C_2, C_0 üzerinde tamamen bağlantısız bir grupoid ve $n \geq 3$ için C_n lerde yine C_0 üzerinde tamamen bağlantısız grupoidlerdir.

4. $\left(C_1 \rightrightarrows C_0 \right)$ grupoidinin $n \geq 2$ için $\left(C_n \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} C_0 \right)$ tamamen bağlantısız grupoidleri üzerinde grupoid etkisi vardır ve $\delta_2\left(C_2\right)$, $n \geq 3$ için C_n ler üzerine birim etki ile etki eder.

5. δ_i ler ; C_0 üzerinde birim dönüşümdür. Yani;

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_3 \arrow[r, "\delta_3"] \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] & C_2 \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] & C_1 \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\
 & C_0 \arrow[r, equal] & C_0 \arrow[r, equal] & C_0
\end{tikzcd}$$

(C_1 grupoid, C_2 , C_3 tamamen bağlantısız) ve $\delta_i\left(C_0\right) = C_0$ dır.

Şimdi grupoidler üzerinde çaprazlanmış kompleksler kategorisinin nasıl oluşturulduğunu verelim:

$$\begin{tikzcd}
C: \ldots \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & C_2 \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, "f_2"'] & C_1 \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] \arrow[d, "f_1"'] & C_0 \arrow[d, equal] \\
C': \ldots \arrow[r] & C_2' \arrow[r, "\delta_2'"'] & C_1' \arrow[r, shift left, "s'"] \arrow[r, shift right, "t'"'] & C_0
\end{tikzcd}$$

diyagramı komütatif ve $\left(f_2, f_1\right)$ bir çaprazlanmış modül morfizmi (grupoidler üzerinde); $n \geq 3$ için de f_n ler birer grup homomorfizmi olmak üzere C den C' ne giden çaprazlanmış kompleks morfizmi $f = \left(f_1, f_2, f_{3,}, \ldots\right)$ ile tanımlanır.

C_0 tabanlı grupoidlerin çaprazlanmış kompleksler kategorisini $\boldsymbol{XComp}/\boldsymbol{C_0}$ ile gösterelim.

Şimdi Önerme 2.2.4.1 de verdiğimiz sonucu çaprazlanmış kompleksler için verelim:

2.2.6.2.Önerme : $XComp/C_0$ dan $XComp/\{*\}$ a tanımlı bir funktor vardır.

İspat : $C: \ldots \longrightarrow C_3 \xrightarrow{\delta_3} C_2 \xrightarrow{\delta_2} C_1 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} C_0$

C_0 tabanlı bir çaprazlanmış kompleks olsun. Eğer; $C_0 = \{*\}$ tek nokta kümesi alınırsa, Önerme 2.2.4.1. den

$$\begin{tikzcd} C_2 \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & C_1 \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ \{*\} \arrow[r, equal] & \{*\} \end{tikzcd}$$

yapısının gruplar için bir çaprazlanmış modül olduğunu biliyoruz. Burada $\Delta : XMod/C_0 \longrightarrow XMod/\{*\}$ şeklinde bir funktorun varlığını göstermiştik. Eğer $n \geq 3$ için

$\Delta(C_n) = C_n \rightrightarrows \{*\}$ alınırsa C_n ler $n \geq 3$ için birer Abelyan grup olup,

$$\Delta(C): \ldots \longrightarrow C_3 \xrightarrow{\delta_3} C_2 \xrightarrow{\delta_2} C_1$$

şeklinde grupların bir kompleksini elde ederiz. Burada, $C_2 \xrightarrow{\delta_2} C_1$ bir çaprazlanmış modül olduğundan $\Delta(C)$ bir gruplar için çaprazlanmış kompleks olur.

3. SIMPLISEL GRUP (GRUPOIDLER) VE GRUP (GRUPOIDLER) ÜZERINDE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER VE KOMPLEKSLER

Bu bölümde önce simplisel gruplar ve gruplar üzerinde çaprazlanmış modüller kategorileri arasındaki ilişkiyi vererek, Carresco-Cegarra [10] tarafından tanımlanan simplisel gruplardan çaprazlanmış komplekslere oluşturulan funktoru vereceğiz. Daha sonra Duyer-Kan Path grupoid yapılandırmasını vererek; simplisel gruplardan simplisel grupoidlere bir funktor tanımlayacağız. Bu bilgilerden yararlanarak; simplisel gruplardan k-parçalanmış grupoidler üzerinde çaprazlanmış komplekslere bir funktor oluşturacağız. Burada T.Porter ve P.J.Ehler [23] tarafından tanımlanan simplisel grupoidlerden C_0 tabanlı grupoidler üzerinde çaprazlanmış komplekslere oluşturulan funktoruda kullanacağız. Yani

$$\begin{tikzcd} SimpGrp \arrow[r, "Duyer-Kan"] \arrow[dr, dashed] & SimpGpoid \arrow[d, "Porter"] \\ & XComp/C_0 \end{tikzcd}$$

diyagramını bu bölümde oluşturacağız.

3.1.Simplisel Gruplar ve Grupoidler

Bir $\boldsymbol{G}$ simplisel grubu $\Delta^{op}[n]$ kategorisinden gruplar kategorisine bir funktor olarak tanımlanır. Önceki bölümlerde görüldüğü gibi $\Delta^{op}[n]$ kategorisi

$$\Delta^{op}[n]: \ \ldots \ [2] \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_0} \\ \xrightarrow{\delta_1} \\ \xrightarrow{\delta_2} \\ \xleftarrow{\sigma_0} \\ \xleftarrow{\sigma_1} \end{array} [1] \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_0} \\ \xrightarrow{\delta_1} \\ \xleftarrow{\sigma_0} \end{array} [0]$$

diyagramı ile temsil edilen bir kategori idi. $n \in N$ için $G([n]) = G_n$ ve $G(\delta_i) = d_i$, $G(\sigma_j) = s_j$ şeklinde bir funktor tanımlanırsa, d_i ve s_j ler birer grup homomorfizması G_i lerde bir grup olmak üzere bir simplisel grubu;

$$\mathbf{G} \quad \ldots \quad G_2 \;\begin{smallmatrix} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_2} \\ \xleftarrow{s_0} \\ \xleftarrow{s_1} \end{smallmatrix}\; G_1 \;\begin{smallmatrix} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xleftarrow{s_0} \end{smallmatrix}\; G_0$$

diyagramı ile temsil edebiliriz.

$\Delta^{op}[n]$de δ_i ve σ_j operatörleri simplisel özdeşlikleri sağlayan dönüşümler olduğundan bunların funktor altındaki görüntüleri olan d_i ve s_j homomorfizmleri de simplisel özdeşlikleri sağlar.

Bu özdeşlikler aşağıdaki gibidir:

1) $0 \leq i < j \leq n$ için $d_i^{n-1} d_j^n = d_{j-1}^{n-1} d_i^n$

2) $0 \leq i \leq j \leq n$ için $s_i^{n+1} s_j^n = s_{j+1}^{n+1} s_i^n$

3) $0 \leq i < j \leq n$ için $d_i^{n+1} s_j^n = s_{j-1}^{n-1} d_i^n$

4) $i = j$ veya $i = j+1$ için $d_i^{n+1} s_j^n = i\ d$

5) $0 \leq j < i-1 \leq n$ için $d_i^{n+1} s_j^n = s_j^{n-1} d_{i-1}^n$

3.2. Bir Simplisel Grubun Moore Kompleksi

$\mathbf{G} = (G_n; d_i, s_j)$ bir simplisel grup olsun.

$$(\mathbf{NG},\partial): \quad \ldots \xrightarrow{\partial_3} NG_2 \xrightarrow{\partial_2} NG_1 \xrightarrow{\partial_1} NG_0$$

şeklinde grupların bir kompleksini düşünelim. Burada;

$$NG_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} çek d_i^n$$

şeklinde ve $\partial_n : NG_n \longrightarrow NG_{n-1}$, d_n^n fonksiyonunun kısıtlaması olarak tanımlıdır.

Burada açıkça:

$NG_0 = G_0$

$NG_1 = çekd_0^1$

$NG_2 = çekd_0^2 \bigcap çekd_1^2$

.

.

.

şeklindedir. Eğer $n \geq k+1$ için $NG_n = \{1\}$ oluyorsa; $\boldsymbol{G}$ ye ***Moore kompleksinin boyu*** $\boldsymbol{\leq k}$ ***olan bir simplisel grup*** denir. Moore kompleksinin boyu $\boldsymbol{\leq k}$ olan simplisel gruplar kategorisini $\boldsymbol{SimpGrp_{\leq 1}}$ ile göstereceğiz.

Şimdi ileride kullanacağımız için literatürde iyi bilinen aşağıdaki teoremi verelim.

3.2.1.Teorem : $\boldsymbol{SimpGrp_{\leq 1}}$ ile ***XMod*** kategorisi denktir.

İspat : İspat için $\Delta : SimpGrp_{\leq 1} \longrightarrow XMod$ ve $\theta : XMod \longrightarrow SimpGrp_{\leq 1}$ şeklinde iki funktor oluşturulmalı ve daha sonra $\Delta\theta : XMod \longrightarrow XMod$ olmak üzere; I_{XMod} ile $\Delta\theta$ arasında bir doğal transformasyon bulunmalıdır. Ayrıca $I_{SimpGrp_{\leq 1}}$ ile $\Delta\theta$ arasında doğal transformasyon olmalıdır.

$\boldsymbol{G}$, Moore kompleksinin boyu ≤ 1 olan bir simplisel grup olsun. Yani $NG_2 = NG_3 = ... = \{1\}$ olsun. $\partial_1 : NG_1 \longrightarrow NG_0$ homomorfizminin bir çaprazlanmış modül olduğunu göstereceğiz.

$x \in NG_0$ ın $y \in NG_1$ üzerindeki etkisi $y^x = \left(s_0 x^{-1}\right) y \left(s_0 x\right)$ şeklinde tanımlıdır. Bu iyi tanımlı bir grup etkisidir. Ayrıca her $x \in NG_0$ ve $y \in NG_1$ için

$$\begin{aligned}
\partial_1\left(y^x\right) &= d_1'\left(s_0 x^{-1} y s_0 x\right) \\
&= d_1'\left(s_0 x^{-1}\right) d_1\left(y\right) d_1\left(s_0 x\right) \\
&= x^{-1} d_1\left(y\right) x \\
&= x^{-1} \partial_1\left(y\right) x
\end{aligned}$$

şeklinde bir pre-çaprazlanmış modül olur. ∂_1 in çaprazlanmış modül olması için $y, y' \in NG_1$ için

$$\left(y'\right)^{\partial_1(y)} = y^{-1}y'y$$

olmalıdır. Buna göre

$$\left(y'\right)^{\partial_1 y} = \left(y'\right)^{d_1'(y)} = s_0\left(d_1\left(y^{-1}\right)\right)y's_0\left(d_1 y\right)$$

bulunur.

$a = s_0 d_1 y^{-1} y' s_0 d_1 y y^{-1}\left(y'\right)^{-1} y$ diyelim. Bu elemanın d_1 altındaki görüntüsünü alalım.

$$d_1\left(s_0\left(d_1 y^{-1}\right)y'\left(s_0 d_1 y\right)y^{-1}\left(y'\right)^{-1} y\right) = d_1 y^{-1} d_1\left(y'\right)d_1 y d_1 y^{-1} d_1\left(y'\right)^{-1} d_1 y$$
$$=1$$

olup, bu ise $s_0 d_1 y^{-1} y' s_0 d_1 y y^{-1}\left(y'\right)^{-1} y \in Çekd_1$ demektir. Fakat $NG_2 = çekd_0 \cap çekd_1$ olduğundan $s_0 d_1 y^{-1} y' s_0 d_1 y y^{-1}\left(y'\right)^{-1} y \in NG_2$ dir deriz. Çünkü ayrıca;

$$d_0\left(s_0 d_1 y^{-1} y' s_0 d_1 y y^{-1}\left(y'\right)^{-1} y\right) = d_1 y^{-1} d_0\left(y'\right)d_1\left(y\right)d_0\left(y^{-1}\right)d_0\left(y'\right)^{-1} d_0\left(y\right)$$
$$= d_1 y^{-1} d_1 y$$
$$=1$$

$\left(y \in NG_0 = Çekd_0\right)$ olup, $s_0 d_1 y^{-1} y' s_0 d_1 y y^{-1}\left(y'\right)^{-1} y \in Çekd_0 \cap Çekd_1 = \{1\}$ yazabiliriz.

Buna gore;

$$y^{\partial_1(y')} = \left(s_0 d_1 y^{-1}\right)y'\left(s_0 d_1\left(y\right)\right) = y^{-1}y'y$$

bulunur. Bu ise **CM2** aksiyomudur. Böylece; $\Delta :$ $\boldsymbol{SimpGrp_{\leq 1}} \longrightarrow \boldsymbol{XMod}$ şeklinde $\Delta\left(G_0\right) = NG_0$, $\Delta\left(G_1\right) = NG_1$ ile tanımlanan bir funktor oluşturmuş oluruz.

Tersine, $\theta :$ $\boldsymbol{XMod} \longrightarrow \boldsymbol{SimpGrp_{\leq 1}}$ şeklindeki funktoru tanımlayalım: $\partial_1 : M \longrightarrow N$ herhangi bir çaprazlanmış modül olsun. N nin M üzerindeki grup etkisini kullanırsak $M \rtimes N$ şeklinde yarı-direkt çarpım grubunu oluşturabiliriz. Bu grup

$$\left(m,n\right)\bullet\left(m',n'\right)=\left(mm'^{n},nn'\right)$$

işlemine göre bir gruptur. $G_0=N$ ve $G_1=M\rtimes N$ alalım. G_1 ve G_0 arasındaki d_0,d_1 ve s_0 operatörlerini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned} d_0 : M\rtimes N &\longrightarrow N \\ \left(m,n\right) &\longrightarrow n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 : M\rtimes N &\longrightarrow N \\ \left(m,n\right) &\longrightarrow \left(\partial_1 m\right)n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_0 : N &\longrightarrow M\rtimes N \\ n &\longrightarrow \left(1,n\right) \end{aligned}$$

Bu dönüşümlerin birer grup homomorfizması olduğunu ve simplisel özdeşlikleri sağladığını göstermek kolaydır. Örneğin;

$$d_1 s_0\left(n\right)=d_1\left(1,n\right)=\partial_1\left(1\right)\bullet n=1\bullet n=n$$

olup, $d_1 s_0=id$ olur.

Benzer şekilde diğer simplisel özdeşlikler de gösterilebilir.

N grubunun $M\rtimes N$ çarpım grubu üzerindeki etkisi

$$\left(m,n\right)^{n'}=\left(m^{n'},\left(n'\right)^{-1}nn'\right)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu etki kullanılarak $\left(M\rtimes N\right)\rtimes N$ şeklinde bir yarı-direkt çarpın grubu oluşturulur. Bu grup,

$$\begin{aligned} \left(\left(m_1,n_1\right),n_2\right)\bullet\left(\left(m_1',n_1'\right),n_2'\right) &= \left(\left(m_1,n_1\right)\left(m_1',n_1'\right)^{n_2},n_2n_2'\right) \\ &= \left(\left(m_1,n_1\right)\bullet\left(\left(m_1'\right)^{n_2},n_2^{-1}n_1'n_2\right),n_2n_2'\right) \\ &= \left(m_1\left(\left(m_1'\right)^{n_2}\right)^{n_1},n_1n_2^{-1}n_1'n_2,n_2n_2'\right) \end{aligned}$$

işlemine göre gruptur. $G_2 = (M \rtimes N) \rtimes N$ diyelim.

Şimdi G_2, G_1 arasındaki d_0^2, d_1^2, d_2^2 ve s_0^1, s_1^1 homomorfizmlerini tanımlayalım.

$$d_0^2 : (M \rtimes N) \rtimes N \longrightarrow M \rtimes N$$
$$(m,n,n') \longrightarrow (1,n)$$

$$d_1^2 : (M \rtimes N) \rtimes N \longrightarrow M \rtimes N$$
$$(m,n,n') \longrightarrow (m,n')$$

$$d_2^2 : (M \rtimes N) \rtimes N \longrightarrow M \rtimes N$$
$$(m,n,n') \longrightarrow ((\partial_1 m)n, n')$$

$$s_0^1 : M \rtimes N \longrightarrow (M \rtimes N) \rtimes N$$
$$(m,n) \longrightarrow (m,n,1)$$

$$s_1^1 : M \rtimes N \longrightarrow (M \rtimes N) \rtimes N$$
$$(m,n) \longrightarrow (m,1,n)$$

Bunların birer grup homomorfizmi olduğunu ve simplisel özdeşlikleri sağladığını göstermek kolaydır. Örneğin

$$d_1^2 s_1^1 (m,n) = d_1^2 (m,1,n) = (m,n)$$

olup, $d_1^2 s_1^1 = id$ bulunur.

Böylece buraya kadar

$$\begin{tikzcd} G_2 \arrow[r, shift left=6, "d_0"] \arrow[r, shift left=3, "d_1"] \arrow[r, "d_2"] & G_1 \arrow[l, shift left=3, "s_0"] \arrow[l, shift left=6, "s_1"] \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, "d_1"] & G_0 \arrow[l, shift left=2, "s_0"] \end{tikzcd}$$

diyagramını oluşturmuş oluruz. d_0^2 ve d_1^2 nin tanımlarından yararlanarak; eğer $x = (m,n,n') \in G_2$ ise, $x \in Çekd_0^2 \cap Çekd_1^2$ olması için gerek ve yeter şartın $m = 1, n = 1$ ve $n' = 1$ olduğu görülür. Yani; $NG_2 = \{1\}$ demektir.

Sonuç olarak elde edilen simplisel grubun Moore kompleksinin boyu ≤ 1 olur. O halde $\theta : XMod \longrightarrow SimpGrp_{\leq 1}$ şeklinde bir funktor tanımlamış oluruz. Böylelikle doğal transformasyonlar oluşturulabilir.

Örneğin $\partial_1 : M \longrightarrow N$ çaprazlanmış modülüne karşılık gelen simplisel grup

$$M \rtimes N \; \underset{\xleftarrow{\;s_0\;}}{\overset{\xrightarrow{\;d_0\;}}{\xrightarrow{\;d_1\;}}} \; N$$

idi. Buna göre

$$\theta : \left(\partial_1 : M \longrightarrow N\right) = G_1 = M \rtimes N \; \underset{\xleftarrow{\;s_0\;}}{\overset{\xrightarrow{\;d_0\;}}{\xrightarrow{\;d_1\;}}} \; N = G_0$$

demektir. Önceki oluşturulan Δ funktoruna göre $\Delta\left(G_1\right) = NG_1$, $\Delta\left(G_0\right) = NG_0$ olup, $\Delta\left(M \rtimes N \; \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\longrightarrow}} \; N \right)$ yi araştıralım.

$$\Delta\left(N\right) = NG_0 = G_0 = N$$

$$\begin{aligned} \Delta\left(M \rtimes N\right) = NG_1 = Çekd_0 &= \left\{\left(m,n\right) : d_0\left(m,n\right) = n = e\right\} \\ &= \left\{\left(m,e\right) : m \in M\right\} \\ &= M \rtimes \left\{e\right\} \cong M \end{aligned}$$

olur.

$$\theta : \left(\partial_1 : M \longrightarrow N\right) = M \rtimes N \; \underset{\xleftarrow{\;s_0\;}}{\overset{\xrightarrow{\;d_0\;}}{\xrightarrow{\;d_1\;}}} \; N$$

ve

$$\Delta\left(M \rtimes N \underset{s_0}{\overset{d_0}{\underset{d_1}{\rightrightarrows}}} N \right) = M \xrightarrow{\partial_1 = d_1'} N$$

yani;

$$\Delta\Big(\theta\Big(\partial_1 : \big(M \longrightarrow N\big)\Big)\Big) = \partial_1 : M \longrightarrow N$$

olur. Bu $\Delta\theta$ ile $I_{XMod} : XMod \longrightarrow XMod$ birim funktoru arasında bir doğal transformasyonun var olması demektir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.3. Simplisel Gruplardan Çaprazlanmış Komplekslere

Bu bölümde Carrasco-Cegarra [10] tarafından tanımlanan simplisel gruplardan gruplar üzerinde çaprazlanmış komplekslere tanımlanan funktoru vereceğiz. Bu funktorun grupoid hali Porter ve Ehler [23] tarafından verilmiştir. Bu funktoru da; ileriki bölümde vereceğiz. Daha sonraki bölümde simplisel grupoidler ve ω-grupoidler arasındaki ilişkiyi kurmak için Porter ve Ehler tarafından verilen bu funktordan yararlanacağız.

$$\boldsymbol{G} : \ldots\ G_2 \; \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\longrightarrow}} \; G_1 \; \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\longrightarrow}} \; G_0$$

bir simplisel grup olsun. Bu simplisel grubun Moore kompleksini

$$(NG,\partial) : \ \ldots\ NG_2 \xrightarrow{\partial_2} NG_1 \xrightarrow{\partial_1} NG_0$$

göz önüne alalım. Carrasco-Cegarra funktoru aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\mathcal{C}_{\boldsymbol{n}}\big((\boldsymbol{NG},\boldsymbol{\partial})\big) = C_n = \frac{NG_n}{(NG_n \cap D_n)\, d_{n+1}(NG_{n+1} \cap D_{n+1})}$$

olmak üzere

$$C : \ \ldots \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$$

kompleksi oluşturulur. Burada ∂_n ler d_n^n e kısıtlanış ile tanımlıdırlar.

Bunu açacak olursak;

$$C_0 = \frac{NG_0}{(NG_0 \cap D_0) \bullet d_1(NG_1 \cap D_1)}$$

dir. Burada D_n; G_n içinde üreteç operatörleri ile üretilen bir alt gruptur. Yani $x \in D_n$ ise $x = s_i(y)$ gibi bir y elemanı vardır. Örneğin $D_1 = s_0(G_0)$ dır.

Carrasco ve Cegarra bazı hesaplamalar yaparak

$$C_0 \cong NG_0$$

$$C_1 \cong NG_1 / d_2(NG_2 \cap D_2)$$

$$C_2 \cong \frac{NG_2}{(NG_2 \cap D_2) \bullet d_3(NG_3 \cap D_3)}$$

.

.

.

olduklarını göstermişlerdir. Kısacası bir $\boldsymbol{G}$ simplisel grubuna karşılık gelen çaprazlanmış kompleks

$$\boldsymbol{C} : \ \ldots \longrightarrow NG_2 / (NG_2 \cap D_2) \bullet \partial_3(NG_3 \cap D_3) \xrightarrow{\overline{\partial_2}} NG_1 / \partial_2(NG_2 \cap D_2) \xrightarrow{\overline{\partial_1}} NG_0$$

şeklinde verilebilir. Burada

$$\overline{\partial_1} : NG_1 / \partial_2(NG_2 \cap D_2) \longrightarrow NG_0$$

$$x \bullet \partial_2(NG_2 \cap D_2) \longrightarrow d_2^2(x)$$

bir çaprazlanmış modüldür.

3.4. Simplisel Grupoidler

Bir simplisel grupoid obje kümeleri aynı C_0 kümesi olan grupoidlerin oluşturduğu $\boldsymbol{Gpoid}/\boldsymbol{C_0}$ kategorisinde bir simplisel objedir. Yani $\Delta^{op}[n]$ den $\boldsymbol{Gpoid}/\boldsymbol{C_0}$ a tanımlı bir funktordur.

Bir simplisel grupoidi aşağıdaki diyagramda olduğu gibi gösterebiliriz.

$$
\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
\cdots\ X_2 \arrow[r, shift left=8, "d_0"] \arrow[r, shift left=4, "d_1"] \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, shift left=2, "s''"'] \arrow[d, shift left=5, "t''"] & X_1 \arrow[l, shift left=4, "s_0"] \arrow[l, shift left=8, "s_1"] \arrow[r, shift left=4, "d_0"] \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, shift left=2, "s'"'] \arrow[d, shift left=5, "t'"] & X_0 \arrow[l, shift left=4, "s_0"] \arrow[d, shift left=2, "s"'] \arrow[d, shift left=5, "t"] \\
C_0 \arrow[u, shift left=1, "e''"] \arrow[r, equal] & C_0 \arrow[u, shift left=1, "e'"] \arrow[r, equal] & C_0 \arrow[u, shift left=1, "e"]
\end{tikzcd}
$$

Burada d_i ve s_j ler simplisel özdeşlikleri sağlar ve her bir X_i, C_0 obje kümesi üzerinde bir grupoid, $n \geq 1$ için X_i ler tamamen bağlantısız grupoid ve d_i ve s_j ler ise grupoid homomorfizmi olup, C_0 üzerinde birim dönüşümdürler.

3.5. Bir Simplisel Grupoidin Moore Kompleksi ve Grupoidler Üzerinde Çaprazlanmış Modüller ve Kompleksler

3.5.1. Tanım : Bir simplisel grupoidin Moore kompleksinin tanımı simplisel grubun moore kompleksine benzerdir.

$$
\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
\boldsymbol{G}\ :\ \cdots\ G_1 \arrow[r, shift left=4, "d_0"] \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, shift right=1] \arrow[d, shift left=2] & G_0 \arrow[l, shift left=4, "s_0"] \arrow[d, shift right=1, "s"'] \arrow[d, shift left=2, "t"] \\
C_0 \arrow[r, equal] & C_0
\end{tikzcd}
$$

bir simplisel grupoid (C_0 tabanlı) olsun.

G simplisel grupoidinin Moore kompleksi (NG, ∂)

$$\left(NG_n\right) = \bigcap_{i=0}^{n-1} Çekd_i^n$$

olmak üzere $\partial_n : NG_n \longrightarrow NG_{n-1}$, NG_n ye d_n^n operatörünün kısıtlanışı olarak tanımlanır.

Özetle;

$$NG_0 = \left(G_0 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} C_0 \right)$$

bir grupoid olmak üzere;

$$(NG, \partial) \; \ldots \xrightarrow{\partial_2} NG_1 \xrightarrow{\partial_1} NG_0 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} C_0$$

şeklinde bir komplekstir. Burada, d_i ve s_j ler; C_0 obje kümesi üzerinde birim dönüşümler, $n \geq 1$ için $Çekd_i^n$ ler de tamamen bağlantısız grupoidlerdir. Yani; $a \in C_0$ olmak üzere

$$Çekd_i^n(a) = \left\{ x : \; x : a \longrightarrow a \; morfizm; \; x \in G_n \right\}$$

şeklindeki grupların ayrık bileşimi veya iç direkt çarpım olarak tanımlanır. Burada $\partial_{n-1}\partial_n$ bileşkesi NG_n grupoidini C_0 üzerindeki ayrık grupoide götürür. Yani, $\partial_{n-1}\partial_n = 0$ dır.

Burada; $\left(NG_0 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} C_0 \right)$ taban grupoidinin, $n \geq 1$ için $\left(NG_n \rightrightarrows C_0 \right)$ tamamen bağlantısız grupoidleri üzerindeki etkisi $h \in NG_0$ ve $g \in NG_n$ olmak üzere

$$g^h = \left((s_0)^n h^{-1} \right) \circ g \circ \left(s_0^n h \right) = \left(\underbrace{s_0 s_0 \ldots s_0}_{n-\text{tane}} h^{-1} \right) \circ g \circ \left(\underbrace{s_0 s_0 \ldots s_0}_{n-\text{tane}} h \right)$$

ile tanımlanabilir.

Şimdi T.Porter ve P.Ehler'den [23], Carrasco-Cegerra teoreminin grupoid versiyonunu verelim.

$\boldsymbol{G}$, C_0 tabanlı bir simplisel grupoid olsun.

$$C(G)_n = \frac{NG_n}{(NG_n \cap D_n)\, d_{n+1}(NG_{n+1} \cap D_{n+1})}$$

şeklindeki eşitliği göz önüne alalım. Önce böyle bir bölüm grupoidinin tanımlanabileceğini göstereceğiz.

$$\partial_n : C(G_n) \longrightarrow C(G_{n-1})$$

d_n^n operatörünün NG_n ye kısıtlanışı olarak alınacaktır. Burada $x \in NG_n$ olmak üzere $\bar{x}$, $C(G)_n$ de bir eş kümeyi temsil eder.

3.5.2. Yardımcı Teorem : $(NG_n \cap D_n)d_{n+1}(NG_{n+1} \cap D_{n+1})$ **;** G_n içinde normaldir.

İspat için Porter ve Ehler [23] e bakınız.

Şimdi aşağıdaki önermeyi [23] den verebiliriz.

3.5.3. Önerme : G, C_0 tabanlı bir simplisel grupoid olsun.

$$C(G)_n = \frac{NG_n}{(NG_n \cap D_n)d_{n+1}(NG_{n+1} \cap D_{n+1})}$$

olmak üzere; $\partial_n(\bar{x}) = \overline{d_n(x)}$ operatörleri ile birlikte; $(C(G), \partial_n)$ bir çaprazlanmış kompleks olur.

İspat : Oluşturacağımız çaprazlanmış kompleksin ilk bileşeni

$$C_0(G) = \left(NG_0 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} C_0 \right)$$

grupoidi olur. İkinci bileşen,

$$C_1(G) = {NG_1}\big/{\partial_2(NG_2 \cap D_2)} \rightrightarrows C_0$$

şeklindeki tamamen bağlantısız bir grupoid olur. Burada,

$$\begin{aligned} \partial_1 : C_1(G) &\longrightarrow C_0(G) \\ x\partial_2(NG_2 \cap D_2) &\longrightarrow d_1(x) \end{aligned}$$

ile tanımlı dönüşüm bir grupoid homomorfizmidir ve $y \in C_0(G) = \left(NG_0 \rightrightarrows C_0 \right)$ olmak üzere,

$$x^y = \left(s_0 y^{-1}\right) \circ x \circ (s_0 y)$$

etkisine göre grupoidler üzerinde C_0 tabanlı bir çaprazlanmış modüldür. $\partial_{n-1}\partial_n = 0$ olduğunu ve $n \geq 2$ için $C_n(G)$ lerin Abelyan gruplar olduğunu T.Porter'dan [23]detaylı olarak bakınız.

Böylece verilen bir $\boldsymbol{G}$ simplisel grupoidinden

$$\ldots \longrightarrow C_1(G) = NG_1 / \partial_2 (NG_2 \cap D_2) \xrightarrow{\partial_1} NG_0 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} C_0$$

şeklinde C_0 tabanlı grupoidler üzerinde bir çaprazlanmış kompleks elde ederiz.

3.6. Simplisel Gruplardan Simplisel Grupoidlere

Bu bölümde Dwyer-Kan eğri grupoid yapılandırmasını kullanarak önce verilen bir simplisel kümeden bir simplisel grupoid elde edeceğiz. Detaylı bilgi için [23] e bakınız.

$$\boldsymbol{K} : \ldots \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_2} \\ \xleftarrow{s_0} \\ \xleftarrow{s_1} \end{array} K_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xleftarrow{s_0} \end{array} K_0$$

bir simplisel küme olsun.

$(GK)_n$ şeklinde; obje kümesi $\{\overline{x} : x \in K_0\}$ olan bir grupoid tanımlayalım. Burada $y \in K_{n+1}$ olmak üzere

$$\overline{y} : \overline{d_1 d_2 \ldots d_{n+1} y} \longrightarrow \overline{d_0 d_2 \ldots d_{n+1} y}$$

şeklinde tanımlanır ve $z \in K_n$ için $\overline{s_0 z} = id_{\overline{d_1 d_2 \ldots d_n z}}$ dir.

Örneğin; $n = 1$ olsun. (K_1, K_0) grupoidini oluşturacağız. K_0 obje kümesi, K_1 de morfizm kümesi olacak. $\overline{x} \in K_1$ de bir morfizm ise $x \in K_2$ olmak üzere;

$$\overline{x} : d_1 d_2(x) \longrightarrow d_0 d_2(x)$$

tanımlı ve $z \in K_1$ için

$$\overline{s_0 z} : id_{d_1(z)} \quad ; \quad d_1(d_1(z)) \longrightarrow d_0 d_1(z) \text{ birim morfizmdir.}$$

Yani; $\boldsymbol{K_1} \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} \boldsymbol{K_0}$;

$$\boldsymbol{K_1} = \left\{ \overline{x} : x \in K_2 \ ve \ \overline{x} : d_1 d_2 (x) \longrightarrow d_0 d_2 (x) \ morfizm \right\}$$

şeklindedir.

Benzer şekilde, $\boldsymbol{K_2} \underset{t'}{\overset{s'}{\rightrightarrows}} K_0$; grupoidini oluşturmak için

$$\boldsymbol{K_2} = \left\{ \overline{y} : y \in K_3 \ ve \ \overline{y} : d_1 d_2 d_3 (y) \longrightarrow d_0 d_2 d_3 (y) \ morfizm \right\}$$

şeklinde olur. Böylece K_0 obje kümesi üzerinde

$$\begin{tikzcd}
\cdots \ \boldsymbol{K_3} \arrow[r, shift left=6, "\delta_i"] \arrow[r, shift left=3] \arrow[r] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & \boldsymbol{K_2} \arrow[l, shift left=3] \arrow[l, shift left=6, "\sigma_j"] \arrow[r, shift left=3, "\delta_i"] \arrow[r] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & \boldsymbol{K_1} \arrow[l, shift left=3, "\sigma_j"] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\
K_0 \arrow[r, equal] & K_0 \arrow[r, equal] & K_0
\end{tikzcd}$$

şeklinde bir simplisel grupoid elde ederiz.

Burada

$$\delta_i : \boldsymbol{K_{n+1}} \longrightarrow \boldsymbol{K_n}; \quad \delta_i \left(\overline{x} \right) = \overline{d_{i+1} (x)}$$

$$\delta_0 : K_1 \longrightarrow K_0; \quad \delta_0 \left(\overline{x} \right) = \overline{d_1 (x)} \overline{(d_0 x)}^{-1}$$

şeklinde tanımlıdırlar.

$$\sigma_j : K_n \longrightarrow K_{n+1} \qquad \sigma_j \left(\overline{x} \right) : \overline{s_{j+1} x}$$

dir. Bu δ_i ve σ_j ler simplisel özdeşlikleri sağlar.

Bu yapılandırmayı kullanarak, bir simplisel gruptan bir simplisel grupoid elde edelim.

$$G: \;\cdots\; \begin{smallmatrix}\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow\\ \longleftarrow\end{smallmatrix} \; G_1 \; \begin{smallmatrix}\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longleftarrow\end{smallmatrix} \; G_0$$

bir simplisel grup olsun. Oluşturacağımız simplisel grupoidin tabanı G_0 grubu olacaktır. Yani obje kümesi G_0 olur. G_0 obje kümesi üzerinde tanımlı olan ilk grupoidi $\boldsymbol{G_1}$ ile gösterelim. Bu grupoid

$$\left\{\bar{x} : x \in G_2;\ \bar{x} : d_1 d_2(x) \longrightarrow d_0 d_2(x)\right\}$$

şeklinde tanımlı olsun. İkinci grupoid ise;

$$\boldsymbol{G_2} = \left\{\bar{x} : x \in G_3;\ \bar{x} : d_1 d_2 d_3(x) \longrightarrow d_0 d_2 d_3(x)\right\}$$

dir. $\left(\boldsymbol{G_1} \rightrightarrows G_0\right)$ ve $\left(\boldsymbol{G_2} \rightrightarrows G_0\right)$ arasındaki simplisel grupoid morfizmleri

$$\delta_0 : \boldsymbol{G_2} \longrightarrow \boldsymbol{G_1},\ x \in G_3 \text{ olmak üzere}$$

$$\delta_0\left(\bar{x}\right) = \overline{d_1(x)}\,\overline{(d_0 x)}^{-1}$$

dir.

Burada; $\overline{d_1(x)} : d_1 d_1(x) \longrightarrow d_0 d_1(x)$ şeklinde $\boldsymbol{G_1}$ de morfizmdir.

Şimdi $\boldsymbol{G}$ simplisel grubunun Moore kompleksini kullanarak bir grupoidler üzerinde çaprazlanmış kompleks elde edelim.

(NG, ∂), $\boldsymbol{G}$ simplisel grubunun bir Moore kompleksi olsun. Obje kümesi olarak $NG_0 = G_0$ alalım. Oluşturacağımız ilk grupoidi; $C_1 = NG_1 \rtimes s_0 G_0$ olsun. C_1 deki bir morfizm; $\bar{x} : (g, s_0 p);\ g \in G_1,\ p \in G_0$ şeklinde olup,

$$s\left(\bar{x}\right) = (d_1 g) \bullet p$$

$$t\left(\bar{x}\right) = p$$

ile tanımlanır.

$$C_1 = \{(g, s_0 p): \ (g_1 s_0 p) : (d_1 g)\, p \longrightarrow p \ \ morfizm\}$$

olur. C_1 deki kompozisyon ise;

$$(g_1, s_0 p), (g_2, s_0 q) \in C_1$$

olmak üzere; $p = (d_1 g_2) q$ için,

$$(g_1, s_0 p) \circ (g_2, s_0 q) = (g_1 g_2, s_0 q)$$

şeklinde tanımlanabilir.

Böylece $\left(C_1 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} G_0 \right)$ şeklinde bir grupoid elde etmiş oluruz. Oluşturacağımız çaprazlanmış kompleksteki ikinci grupoid, tamamen bağlantısız ve G_0 obje kümesi üzerinde bir grupoid olmalıdır. Bunu C_2 ile gösterelim.

$$C_2 = \{(x, s_0 s_0 p) : x \in NG_2,\ p \in G_0\}$$

$$= \left\{ \left(\bar{x}, (s_0 s_0 p)\right) : \bar{x} \in \frac{NG_2}{\partial_3 (NG_3 \cap D_3)},\ p \in G_0 \right\}$$

olmak üzere;

$$s\left(\bar{x}, s_0 s_0 p\right) = p = t\left(\bar{x}, s_0 s_0 p\right) \ \text{ ve}$$

$$\left(\bar{x}, s_0 s_0 p\right) \circ \left(\bar{y}, s_0 s_0 p\right) = \left(\overline{xy}, s_0 s_0 p\right)$$

şeklinde tanımlayarak; $\left(C_2 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} G_0 \right)$ gibi tamamen bağlantısız bir grupoid elde ederiz.

Çaprazlanmış kompleksin ilk morfizmi

$$\delta_1 : C_2 \longrightarrow C_1, \quad \delta_1\left(\bar{x}, s_0 s_0 p\right) = \left(d_1 x, s_0 p\right)$$

olarak tanımlayalım. Buraya kadar

$$C_2 \xrightarrow{\delta_1} C_1 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} G_0$$

diyagramını oluşturduk.

$n \geq 3$ için

$$C_n = \left\{ \left(\overline{a}, (s_0)^n (p) \right) : \overline{a} \in NG'_n,\ p \in G_0 \right\}$$

dır. Burada

$$NG'_n = \frac{NG_n}{(NG_n \cap D_n)\, d_{n+1}\,(NG_{n+1} \cap D_{n+1})}$$

olmak üzere;

$$s\left(\overline{a}, (s_0)^n\, p \right) = p = t\left(\overline{a}, (s_0)^n\, p \right)$$

ve

$$\left(\overline{a_1}, (s_0)^n (p) \right) \circ \left(\overline{a_2}, (s_0)^n (p) \right) = \left(\overline{a_1 a_2}, (s_0)^n (p) \right)$$

şeklinde bir kompozisyon tanımlayarak $\left(burada\ (s_0)^n (p) = \underbrace{s_0 s_0 \ldots s_0}_{n-\text{tane}} (p)\ dir. \right)$ $C_n \rightrightarrows G_0$

şeklinde tamamen bağlantısız grupoidler elde ederiz. Yani;

$$C : \ldots C_3 \xrightarrow{\delta_2} C_2 \xrightarrow{\delta_1} C_1 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} G_0$$

diyagramını oluştururuz. Burada,

$$\delta_n : C_n \longrightarrow C_{n-1};$$

$$\delta_n \left(\overline{a}, (s_0)^n (p) \right) = \left(d_n^n \left(\overline{a} \right), (s_0)^{n-1} (p) \right)$$

şeklindedir.

Bu yapının bir kompleks olduğunu gösterelim:

$$\delta_{n-1} \circ \delta_n \left(\overline{a}, s_0^{(n)} (p) \right) = \delta_{n-1} \left(d_n^n \left(\overline{a} \right), (s_0)^{n-1} (p) \right)$$

$$=\left(d_{n-1}d_n\left(\overline{a}\right),s_0^{(n-2)}\left(p\right)\right)$$

olup, $d_n\left(\overline{a}\right)\in Çekd_{n-1}$ olduğundan $d_{n-1}\left(d_n\left(\overline{a}\right)\right)=1$ olur. O halde

$$\delta_{n-1}\circ\delta_n\left(a,s_0^{(n)}\left(p\right)\right)=\left(1,\left(s_0\right)^{n-2}\left(p\right)\right):p\longrightarrow p$$

olup, p den p ye birim morfizmdir.

Ayrıca $\delta_1:C_2\longrightarrow C_1$ bir grupoidler için çaprazlanmış modüldür. Burada; C_1 in $n\geq 2$ için C_n ler üzerindeki etkisi $\left(g,s_0p\right)\in C_1$ ile $\left(x,\left(s_0\right)^n q\right)\in C_n$ ve $q=\left(d_1g\right)p$ olmak üzere;

$$\left(x,\left(s_0\right)^n\left(q\right)\right)^{\left(g,s_0p\right)}=\left(\left(s_1\right)^{n-1}g^{-1}x\left(s_1\right)^{n-1}g,\left(s_0\right)^n\left(p\right)\right)$$

şeklindedir. Buna göre C_1 in C_2 üzerindeki etkisi $q=\left(d_1g\right)p$ olmak üzere,

$$\left(x,s_0s_0q\right)^{\left(g,s_0p\right)}=\left(s_1g^{-1}xs_1g,s_0s_0p\right)$$

olur. Buna göre δ_1 in çaprazlanmış modül olması gerekir.

CM1) $\delta_1\left(\left(x,s_0s_0q\right)^{\left(g,s_0p\right)}\right)=\delta_1\left(s_1g^{-1}xs_1g,s_0s_0p\right)$

$$=\left(d_1\left(s_1g^{-1}xs_1g\right),s_0p\right)$$

$$=\left(g^{-1}d_1\left(x\right)g,s_0p\right)$$

$$=\left(g^{-1},s_0p\right)\circ\left(d_1x,s_0p\right)\circ\left(g,s_0p\right)$$

$$=\left(g^{-1},s_0p\right)\circ\delta_1\left(x,s_0s_0p\right)\circ\left(g,s_0p\right)$$

olur. Benzer şekilde **CM2** de gösterilebilir. δ_1 bir çaprazlanmış modül olup,

$$C:\ldots\longrightarrow C_3\xrightarrow{\delta_3}C_2\xrightarrow{\delta_1}C_1\underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}}C_0$$

bir çaprazlanmış kompleks olur.

Ayrıca $\delta_1(C_2)$ nin C_n ler üzerindeki etkisi trivial etkidir. Yani birim olarak etki eder.

Böylece, önce verilen bir simplisel gruptan Dwyer-Kan path grupoid yapılandırmasını kullanarak bir simplisel grupoid elde etmiş ve bu elde edilen simplisel grupoidden Porter-Ehler [23] funktoru kullanılarak bir grupoidler üzerinde çaprazlanmış kompleks yapısını elde etmiş oluruz.

4. ÇAPRAZLANMIŞ KOMPLEKSLERİN TABAN DEĞİŞTİRMESİ

Bu bölümde grupoidler üzerinde çaprazlanmış kompleksin pullback yapısını inceleyeceğiz.

$$(C,I):\ \ \ldots\ \ C_2 \xrightarrow{\delta_2} C_1 \xrightarrow{\delta_1} C_0 \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} I$$

I obje kümesi üzerinde bir grupoidler için çaprazlanmış kompleks olsun. Bu çaprazlanmış komplekse I ***tabanlı çaprazlanmış kompleks*** denir. Herhangi bir J kümesi ve $f : J \longrightarrow I$ fonksiyonu verildiğinde (C,I) çaprazlanmış kompleksinden yararlanarak, J tabanlı yeni bir çaprazlanmış kompleks elde edeceğiz. Şimdi aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım:

$$\begin{array}{ccc} f_*(C_0) & \xrightarrow{\ \overline{f}\ } & C_0 \\ s' \downarrow\downarrow t' & & s \downarrow\downarrow t \ \uparrow e \\ J & \xrightarrow[f]{} & I \end{array}$$

şeklinde bir $f_*(C_0) \rightrightarrows J$ grupoidini oluşturacağız ve burada; $f_*(C_0)$ 'a $\left(C_0 \rightrightarrows I\right)$ grupoidinin $f : J \longrightarrow I$ fonksiyonu yardımıyla ***pullback'i (geri çekmesi)*** diyeceğiz.

Burada $\overline{f}$, $f_*(C_0)$, s' ve t' ifadelerini tanımlamalıyız. $f_*(C_0)$; $J \times C_0 \times J$ nin bir alt kümesi olup, aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$f_*(C_0) = \left\{ \begin{array}{c} (j_1, x, j_1') : x \in C_0,\ s(x) = f(j_1),\ t(x) = f(j_1'), \\ x : f(j_1) \longrightarrow f(j_1')\, morfizm \end{array} \right\}$$

olsun. $j_1, j_1' \in J$ olmak üzere,

$$s'(j_1, x, j_1') = j_1$$

$$t'(j_1, x, j_1') = j_1'$$

olmak üzere; (j_1, x_1, j_1') ve (j_2, x_2, j_2') morfizmlerinin $f_*(C_0)$ içindeki kompozisyonu; $j_1' = j_2$ olmak üzere;

$$(j_1, x_1, j_1') \circ (j_2, x_2, j_2') = (j_1, x_1 \circ x_2, j_2')$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $\overline{f}(j_1, x, j_1') = x$ şeklinde tanımlıdır. Buna göre J tabanlı bir $f_*(C_0) \overset{s'}{\underset{t'}{\rightrightarrows}} J$ şeklinde yeni bir grupoid elde ederiz. Bu grupoid Gp/I kategorisinde, $\left(C_0 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} I \right)$ grupoidinin bir geri çekmesidir. Yani;

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[drr, "\theta"] \arrow[ddr, shift right, "s_1"'] \arrow[ddr, shift left, "t_1"] & & \\
& f_*(C_0) \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] & C_0 \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\
& J \arrow[r, "f"'] & I
\end{tikzcd}$$

diyagramında $M \overset{s_1}{\underset{t_1}{\rightrightarrows}} J$ başka bir J tabanlı grupoid ve (θ, f) de ; $M \overset{s_1}{\underset{t_1}{\rightrightarrows}} J$ grupoidinden $\left(C_0 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} I \right)$ grupoidine giden bir morfizm olmak üzere; aşağıdaki diyagramı komütatif yapan bir tek $\overline{\mu} : M \longrightarrow f_*(C_0)$ grupoid morfizmi vardır.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, dashed, "\overline{\mu}-tek"] \arrow[drr, "\theta"] \arrow[ddr, shift right, "s_1"'] \arrow[ddr, shift left, "t_1"] & & \\
& f_*(C_0) \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] & C_0 \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\
& J \arrow[r, "f"'] & I
\end{tikzcd}$$

Burada $\overline{f}\,\overline{\mu}(m)=\theta(m)$ şeklindedir. Dolayısıyla $f_*(C_0)$ için $\overline{\mu}$ evrensellik özelliğini sağlar. (Yani $\overline{\mu}$ tektir.)

Şimdi aynı şeyleri $\left(C_1 \overset{s'}{\underset{t'}{\rightrightarrows}} I \right)$ tamamen bağlantısız grupoidi için yapalım.

$f : J \longrightarrow I$ fonksiyon olmak üzere;

$$\begin{tikzcd}
f_*(C_1) \arrow[r, "\overline{f_1}"] \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] & C_1 \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\
J \arrow[r, "f"'] & I
\end{tikzcd}$$

diyagramını oluşturacağız. $f_*(C_1)$; $J \times C_1 \times J$ nin bir alt kümesi olup, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f_*(C_1)=\left\{ (j,x,j) : (\therefore C_1 tamamen\, bağlantısız)\, x \in C_1 \left(f(j)=f(j) \right) \right\}$$

olup, $(j,x,j): J \longrightarrow J$ bir morfizm olarak $f_*(C_1)$ de değerlendirilir. Burada $s'(j,x,j)=j=t'(j,x,j)$ dir ve

$$(j,x_1,j)\circ(j,x_2,j)=(j,x_1\circ x_2,j)$$

şeklinde de kompozisyon tanımlanabilir. Böylece, $\left(C_1 \underset{t}{\overset{s}{\rightrightarrows}} I \right)$ tamamen bağlantısız grupoidinden $f : J \longrightarrow I$ fonksiyonu yardımıyla J tabanlı tamamen bağlantısız

$$f_*(C_1) \underset{t'}{\overset{s'}{\rightrightarrows}} J$$

şeklinde bir grupoid elde etmiş oluruz.

Buraya kadar;

$$\begin{tikzcd} f_*(C_1) \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] & f_*(C_0) \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] \\ J \arrow[r, equal] & J \end{tikzcd}$$

şeklinde iki tane J tabanlı grupoid elde etmiş oluruz. Burada $f_*(C_1)$ tamamen bağlantısızdır.

Şimdi;

$$\delta_1 : C_1 \longrightarrow C_0 \rightrightarrows I$$

çaprazlanmış modülü yardımıyla;

$$\partial_1 : f_*(C_1) \longrightarrow f_*(C_0) \rightrightarrows J$$

çaprazlanmış modülünü oluşturacağız. Bunun için önce ∂_1 i tanımlayalım:

$$\begin{aligned} \partial_1 : f_*(C_1) &\longrightarrow f_*(C_0) \\ (j, x, j) &\longrightarrow (j, \delta_1(x), j) \end{aligned}$$

olsun. $f_*(C_0)$ ın $f_*(C_1)$ üzerindeki etkisini tanımlayalım: $\overline{x} = (j_1, x, j_1') \in f_*(C_0)$ ve $\overline{a} = (j, a, j) \in f_*(C_1)$ olmak üzere; $\overline{x}$ in $\overline{a}$ üzerindeki etkisi $t(\overline{a}) = j = j_1 = s(\overline{x})$ olmak üzere,

$$\left(\overline{a}\right)^{\overline{x}} = \left(j_1', a^x, j_1' \right) \in f_* \left(C_1 \right) \left(j_1', j_1' \right)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada,

$$t\left(\overline{a}\right) = s\left(\overline{x}\right) \text{ ve } t\left(\overline{a}^{\overline{x}}\right) = t\left(j_1', a^x, j_1' \right) = j_1' = t\left(\overline{x}\right)$$

olur. Yani bu etki iyi tanımlı bir grupoid etkisidir. Bu etkiye göre ∂_1 in J tabanlı grupoidler üzerinde çaprazlanmış modül olduğunu gösterelim.

CM1) $\partial_1\left(\overline{a}^{\overline{x}}\right) = \partial_1 \left(j_1, a, j_1 \right)^{\left(j_1, x, j_1' \right)} = \partial_1 \left(j_1', a^x, j_1' \right)$

$$= \left(j_1', \delta_1\left(a^x\right), j_1' \right) = \left(j_1', x^{-1} \circ \delta(a) \circ x, j_1' \right)$$

$$= \left(j_1', x^{-1}, j_1 \right) \circ \left(j, \delta(a), j \right) \circ \left(j_1, x, j_1' \right)$$

$$= \left(j_1', x^{-1}, j_1 \right) \circ \partial_1 \left(j, a, j \right) \circ \left(j_1, x, j_1' \right) = \left(\overline{x}\right)^{-1} \circ \partial_1\left(\overline{a}\right) \circ \left(\overline{x}\right)$$

bulunur. Burada $j_1 = j$ verildiğinden yukarıdaki kompozisyon anlamlıdır.

CM2) $\overline{a_1} = \left(j, a_1, j \right)$, $\overline{a_2} = \left(j, a_2, j \right) \in f_* \left(C_1 \right)$ olsun.

$$\left(\overline{a_1}\right)^{\partial_1\left(\overline{a_2}\right)} = \left(j, a_1, j \right)^{\left(j, \delta_1(a_2), j \right)} = \left(j, a_1^{\delta_1(a_2)}, j \right)$$

$$= \left(j, a_2^{-1} \circ a_1 \circ a_2, j \right)$$

$$= \left(j, a_2^{-1}, j \right) \circ \left(j, a_1, j \right) \circ \left(j, a_2, j \right)$$

$$= \left(\overline{a_2}\right)^{-1} \circ \overline{a_1} \circ \overline{a_2}$$

bulunur. Yani;

$$
\begin{tikzcd}
f_*(C_1) \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] & f_*(C_0) \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] \\
J \arrow[r, equal] & J
\end{tikzcd}
$$

J tabanlı bir grupoidler üzerinde çaprazlanmış modül olur.

Böylece $\partial_1 : (C_1) \longrightarrow (C_0) \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} I$ bir çaprazlanmış modül olduğunda $f : J \longrightarrow I$ fonksiyonu yardımıyla bu δ_1 çaprazlanmış modülünün pullback çaprazlanmış modülü J tabanlı

$$\partial_1 : f_*(C_1) \longrightarrow f_*(C_0) \rightrightarrows J$$

morfizm olur.

İşleme devam edelim. Yani $n \geq 2$ için $\left(C_n \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} C_0 \right)$ tamamen bağlantısız grupoidleri için $f : J \longrightarrow I$ fonksiyonu yardımıyla; $f_*(C_n) \rightrightarrows J$ grupoidlerini oluşturabiliriz.

Burada

$$f_*(C_n) = \{ (j, x, j) : x \in C_n (f(j), f(j)) \}$$

şeklinde tanımlıdır.

$$
\begin{aligned}
\partial_n : f_*(C_n) &\longrightarrow f_*(C_{n-1}) \\
(j, a, j) &\longrightarrow (j, \delta_n(a), j)
\end{aligned}
$$

olmak üzere J tabanlı

$$f_*(C, I) : \ldots f_*(C_2) \xrightarrow{\partial_2} f_*(C_1) \xrightarrow{\partial_1} f_*(C_0) \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} J$$

şeklinde bir çaprazlanmış kompleks elde ederiz.

Şimdi bu yapının; (C,I) çaprazlanmış kompleksinin, $f:J\longrightarrow I$ fonksiyonu yardımıyla geri çekmesi olduğunu gösterelim.

$$
\begin{tikzcd}
(C,I): & \cdots & (C_2) \arrow[r, "\delta_2"] & (C_1) \arrow[r, "\delta_1"] & (C_0) \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & I \\
(f_*(C),J): & \cdots & f_*(C_2) \arrow[r, "\partial_2"] & f_*(C_1) \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[u, "\overline{f_1}"] & f_*(C_0) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[u, "\overline{f}"] & J \arrow[u, "f"] \\
(M,J): & \cdots & M_2 \arrow[r, "\delta_2'"] \arrow[u, dashed, "\overline{\mu_3}"] & M_1 \arrow[r, "\delta_1'"] \arrow[u, dashed, "\overline{\mu_2}"] \arrow[uu, bend right, "\theta_2"'] & M_0 \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] \arrow[u, dashed, "\overline{\mu_1}"] \arrow[uu, bend right, "\theta_1"'] & J \arrow[uu, bend right, "f"']
\end{tikzcd}
$$

diyagramını komütatif yapacak şekilde bir tek

$$\overline{\mu}=\left(\overline{\mu_1},\overline{\mu_2},\ldots\right):(M,J)\longrightarrow\left(f_*(C),J\right)$$

morfizminin var olduğunu göstermeliyiz.

Burada pullback grupoid yapısını oluştururken

$$
\begin{tikzcd}
M_0 \arrow[dr, dashed, "\overline{\mu_1}"] \arrow[drr, "\theta_1"] \arrow[ddr, shift right, "s''"'] \arrow[ddr, shift left, "t''"] & & \\
& f_*(C_0) \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] & C_0 \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\
& J \arrow[r, "f"'] & I
\end{tikzcd}
$$

diyagramının bir pullback diyagramı olduğunu ve $\overline{\mu_1}$ nin tek olduğunu daha önce söyledik. Burada $\overline{f}\,\overline{\mu_1}=\theta_1$ idi.

Benzer düşünceyle; $\left(M_1 \underset{t''}{\overset{s''}{\rightrightarrows}} J \right)$, J üzerinde başka bir tamamen bağlantısız grupoid olduğunda; $f_*\left(C_1\right)$ de bir pullback olduğundan

$$
\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[drr, "\theta_2"] \arrow[ddr, shift right, "s''"'] \arrow[ddr, shift left, "t''"] & & \\
 & f_*\left(C_1\right) \arrow[r, "\overline{f_1}"] \arrow[d, shift right, "s'"'] \arrow[d, shift left, "t'"] & C_1 \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \\
 & J \arrow[r, "f"'] & I
\end{tikzcd}
$$

diyagramında $\left(\theta_2, f\right)$, $\left(M_1 \rightrightarrows J \right)$ grupoidinden $\left(C_1 \rightrightarrows I \right)$ grupoidine bir grupoid homomorfizmi olmak üzere; $f_*\left(C_1\right)$ in oluşturulmasında $\overline{\mu_2} : M_1 \longrightarrow f_*\left(C_1\right)$; $\overline{f_1}\,\overline{\mu_2} = \theta_2$ olacak şekilde bir tek $\overline{\mu_2}$ morfizmi vardır. Burada ; $\partial_1 \overline{\mu_2} : \overline{\mu_1}\delta_1'$ dür.

Benzer şekilde devam edilirse her n için

$\overline{\mu_n} : M_n \longrightarrow f_*\left(C_n\right)$, $\overline{f_n}\,\overline{\mu_n} = \theta_n$ ve $\overline{\partial_{n-1}\mu_n} = \overline{\mu_{n-1}}\delta_{n-1}'$

olacak şekilde $\overline{\mu_n}$ homomorfizmleri vardır ve tektir.

Yani;

$$
\begin{tikzcd}
\left(f_*(C), J\right) \arrow[rr, "\overline{f} = \left(\overline{f_1}, \overline{f_2}, \ldots\right)"] & & (C, I) \\
 & (M, J) \arrow[ul, dashed, "\overline{\mu} = \left(\overline{\mu_1}, \overline{\mu_2}, \ldots\right)"] \arrow[ur, "\theta = \left(\theta_1, \theta_2, \ldots\right)"'] &
\end{tikzcd}
$$

her bir n için $\overline{f_n}\,\overline{\mu_n} = \theta_n$ olduğundan; $\overline{f} \circ \overline{\mu} = \theta$ olup, her n için $\overline{\mu_n}$ bu diyagramla komütatif yapacak bir tek homomorfizmler olduğundan $\overline{\mu}$, J tabanlı M çaprazlanmış kompleksinden $f_*(C)$ ye tanımlı bir tek morfizmdir.

Sonuç olarak I tabanlı bir çaprazlanmış kompleksten $f : J \longrightarrow I$ fonksiyonu yardımıyla J tabanlı bir çaprazlanmış kompleks elde ederiz ki burada;

$$f_* : \mathbf{XComp}/\mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{XComp}/\mathbf{J}$$

şeklinde taban değiştirme funktoru tanımlamış oluruz.

5. CEBİROİDLER

Simplisel Cebiroidler ve Simplisel Cebirler

Bu bölümde geçmiş bölümlerde yaptığımız simplisel gruplar, simplisel grupoidler ve grupoidler üzerinde çaprazlanmış kompleksler arasındaki ilişkileri kısmi olarak simplisel R-cebiroidler kategorisi için yapacağız. Daha özel olarak belirtecek olursak, simplisel cebirlerden simplisel Cebiroidlere bir funktor tanımlayıp, simplisel cebiroidlerden, çaprazlanmış komplekslere bir funktor oluşturup bu iki funktor yardımıyla simplisel cebirler kategorisinden direkt olarak Cebiroidler üzerinde çaprazlanmış komplekslere bir funktor oluşturacağız. Simplisel cebirler kategorisinin nasıl özelliklere sahip olduğunu 1. Bölümde gördük. Bu yüzden ilk olarak bu bölümde kullanılacak olan bazı temel kavramlara yer verilecektir.

5.1. Cebiroidler

Cebiroidler ilk olarak B.Mitchell [16] ve G.H.Mosa [18]tarafından incelenmiştir.

5.1.1.Tanım([18]) : R bir değişmeli halka olsun. A bir kategori olmak üzere eğer morfizmler ve objeler sınıfı bir R- modül ise A ya ***R* - *kategori*** denir. Böylece A nın kompozisyon işlemi de R- bilineer fonksiyondur.

5.1.2.Tanım : R- değişmeli halka olmak üzere bir A küçük R- kategorisine ***R* - *Cebiroid*** denir.

5.1.3.Örnek: Bir objeli bir R-kategorisi birleşmeli bir R-cebirdir.

Bir R-cebirodin açık tanımını aşağıdaki gibi verebiliriz.

5.1.4.Tanım : A_0 bir küme olmak üzere

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left=2, "s"] \arrow[r, "t"'] & A_0 \arrow[l, shift left=2, "e"] \end{tikzcd}$$

diyagramını göz önüne alalım. Eğer $se = te = id_{A_0}$ ise bu diyagrama ***yönlendirilmiş graf*** denir.

$\mathcal{A} = (A, A_0, s, t, e, +, \bullet)$ yapısını göz önüne alalım. Burada (A, A_0, s, t, e) bir yönlendirilmiş graf olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanırsa $\mathcal{A}$ ya bir ***R* - *Cebiroid*** denir.

$(\boldsymbol{i})$ Her $x, y \in A_0$ için

$$A(x,y) = \{a : s(a) = x,\ t(a) = y\}$$

kümeleri birer R -modüldür.

$(\boldsymbol{ii})$ $* : A(x,y) \times A(y,z) \longrightarrow A(x,z)$

$$(a,b) \longrightarrow (a*b)$$

kompozisyon işlemi R -bilineer fonksiyondur.

Yani $r \in R$ olmak üzere

$$r \bullet (a*b) = ra*b = a*rb$$

dir.

Yukarıda verilen * işlemi birleşme özelliğine sahiptir ve $x \in A_0$ için 1_x kompozisyona birim olarak etki eder. Yani $a : x \longrightarrow y \in A(x,y)$ ise bu durumda

$$1_x * a = a * 1_y = a$$

dır.

Böylece bu kompozisyon işlemi $\mathcal{A}$ yı bir küçük kategori yapar.

5.1.5.Örnek :

a. Eğer A_0 yalnız bir elemanlı ise, A_0 üzerindeki bir R - cebiroid bir R - cebir olur.

b. A , A_0 üzerinde bir R - cebiroid ise her $x \in A_0$ için $A(x,x)$ kümeleri birer R - cebirdir.

5.2. *R* - Cebiroidler Üzerinde Çaprazlanmış Modüller ve Kompleksler

5.2.1. *R* - Cebiroid Etkisi

A_0 herhangi bir küme A ve M de A_0 üzerinde birer R - cebiroid olsunlar. Burada M nin birimli olması gerekmez. A nın M üzerine etkisi aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$m: x \longrightarrow y \in M(x,y)$ ve $a \in A(w,x)$, $b \in A(y,z)$ olmak üzere b nin m üzerine sağ etkisi;

$$m^b \in M(x,z)$$

a nın m üzerine sol etkisi;

$${}^a m \in M(w,y)$$

şeklinde tanımlıdır. Bunu aşağıdaki diyagramla daha açık gösterebiliriz.

$$x \xrightarrow{m} y$$

$$\begin{array}{cc} w \xrightarrow{a} x & y \xrightarrow{b} z \\ {}^a m \in M(w,y) & m^b \in M(x,z) \\ sol\, etki & sağ\ etki \end{array}$$

Bu verilerin aşağıdaki özellikleri sağlaması gerekir.

1. $\left({}^a m\right)^b = {}^a\left(m^b\right)$

2. $\left(m^a\right)^b = m^{ab}$, ${}^b\left({}^a m\right) = {}^{ba} m$

3. ${}^a(mm') = {}^a m m'$, $(mm')^b = mm'^b$

4. $m^{a+b} = m^a + m^b$, ${}^{a+b}m = {}^a m + {}^b m$

   $(m + m_1)^b = m^b + m_1^b$, ${}^a(m + m_1) = {}^a m + {}^a m_1$

5. $(rm)^b = r\left(m^b\right) = m^{rb}$, ${}^a(rm) = r\,{}^a(m) = {}^{(ra)}m$

dir.

Burada $a, b \in A$, $m, m_1 \in M$ ve $x, y \in A_0$ dır.

5.2.2.Tanım : M ve A bir A_0 obje kümesi üzerinde birer R- cebiroid ve A birimli olsun. Kabul edelim ki yukarıdaki gibi tanımlı A nın M üzerine bir R- cebiroid etkisi var ve $\mu : M \longrightarrow A$ bir R- cebiroid homomorfizması olsun. Yani;

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & A \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\ A_0 \arrow[r, equal] & A_0 \end{tikzcd}$$

olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa μ ye ***R* - cebiroidler üzerinde çaprazlanmış modül** denir.

Her $a,b\in A,\ m,m'\in M$ için

CM1) $\mu\left(m^{b}\right)=\mu(m)*b$, $\mu\left({}^{a}m\right)=a*\mu(m)$

CM2) $m*m'=m^{\mu(m')}={}^{\mu(m)}m'$

R - cebiroid üzerinde çaprazlanmış modüller kategorisini ***XCeb*** ile gösterelim.

5.3. 2-Çaprazlanmış Modüllerden *R* -Cebiroidler Üzerinde Çaprazlanmış Modüllere

Bu bölümde değişmeli cebirler için verilen herhangi 2-çaprazlanmış modülden R - Cebiroidler üzerinde bir çaprazlanmış modül yapısı oluşturacağız. Tersine verilen bir çaprazlanmış modülden özel bir 2-çaprazlanmış modül yapısı tanımlayacağız.

$$L\xrightarrow{\partial_2}M\xrightarrow{\partial_1}N \qquad (1)$$

değişmeli R -cebirlerin bir 2-çaprazlanmış modülü olsun. N bir R -cebir olduğundan aynı zamanda bir R -modüldür. Bu (1) yapısından

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & A \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\ A_0 \arrow[r, equal] & A_0 \end{tikzcd}$$

diyagramını oluşturalım.

$A_0=N$ olsun. $\partial_1 : M \longrightarrow N$ bir ön çaprazlanmış modül olduğundan N nin M üzerine bir R -cebir etkisi vardır. Bu etkiyle; $M\times N$ kümesi

$$(m_1,n_1)+(m_2,n_2)=(m_1+m_2,n_1+n_2)$$

$$(m_1,n_1)\bullet(m_2,n_2)=(m_1m_2+n_1\bullet m_2+n_2m_1,n_1n_2)$$

$$r(m,n)=(rm,n)=(m,rn)$$

işlemlerine göre bir R -modüldür. Ayrıca bir R -cebir olup, $A=M\times_R N$ alabiliriz.

$$s,t:A\longrightarrow A_0$$

morfizmlerini ise aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$s(m,n)=\partial_1(m)+n \qquad t(m,n)=n$$

ve

$$e:A_0\longrightarrow A \qquad\qquad e(n)=(0,n)$$

olsun. Bu durumda

$$\left(\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left=2, "s"] \arrow[r, "t"'] & A_0 \arrow[l, shift left=3, "e"] \end{tikzcd} \right)$$

bir yönlendirilmiş graf olur. Gerçekten de

$$se(n)=s(0,n)=\partial_1(0)+n=n$$

$$te(n)=t(0,n)=n$$

yani $se=te=id:A_0\longrightarrow A_0$ olur.

Ayrıca A nın bir R -cebir olmasından

$$A(x,y)=\{a:s(a)=x,\ t(a)=y,\ x,y\in A_0\}$$

kümeleri birer R -modül olurlar.

Şimdi R -bilineer olan * kompozisyonunu tanımlayalım.

$$a=(m,n):(\partial_1 m+n)\longrightarrow n\in A(x,y)$$

$$b=(m',n'):\partial_1 m'+n'\longrightarrow n'\in A(y,z)$$

olsun. $x=\partial_1 m+n,\ y=n=\partial_1 m'+n'$ ve $z=n'$ olmak üzere

$$a*b=(m,n)*(m',n')=(m+m',n')$$

olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} s(a*b)&=s(m+m',n')=\partial_1(m)+\partial_1(m')+n' \\ &=\partial_1(m)+n \\ &=s(a) \end{aligned}$$

ve

$$t(a*b)=t(m+m',n')=n'=t(b)$$

olur. Ayrıca $r\in R$ için

$$\begin{aligned} r(a*b)&=r(m+m',n')=(r(m+m'),n') \\ &=(rm+rm',n') \\ &=(rm,n)*(rm',n') \\ &=ra*rb \end{aligned}$$

olur.

Böylece

$$\left(A \overset{\xrightarrow{s}}{\underset{\xleftarrow{e}}{\xrightarrow{t}}} A_0,*,+ \right)$$

yapısı bir R-cebiroid olur.

Şimdi

$$\left(M \;\; \begin{matrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \\ \xleftarrow{e} \end{matrix} \;\; A_0 \right)$$

yapısını oluşturalım:

L nin bir R-cebir olduğunu biliyoruz. Böylece $L \times_R N$ yapısı bir R-modül olur. $M = L \times_R N$ olsun. Benzer olarak

$$s(l,n) = n = t(l,n)$$

olarak ve

$$(l_1,n) *' (l_2,n) = (l_1 + l_2, n)$$

şeklinde kompozisyonu tanımlayarak,

$$M = L \times_R N \;\; \begin{matrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \\ \xleftarrow{e} \end{matrix} \;\; N = A_0$$

şeklinde bir R-cebiroid yapısı elde ederiz.

(A, A_0, s, t) R-cebiroidinin; (M, A_0, s, t) R-cebiroidi üzerine olan etkisini soldan;

$$a : x \longrightarrow y \; ; \quad a = (m,n) \; ; \quad x = \partial_1 m + n \; , \; y = n$$

ve

$$t(a) = n = s(\bar{l}) = n$$

olmak üzere;

$$^{a}\bar{l} = {}^{(m,n)}(l,n) = (m \bullet l, n)$$

şeklinde ve $b : (m', n') : \partial_1 m' + n' \longrightarrow n'$ nin $\bar{l} = (l', \partial_1 m' + n')$ ne olan etkisi

$$\bar{l}^{b} = \left(l', \partial_1 m' + n'\right)^{(m',n')} = \left(l' \bullet m', n'\right)$$

şeklinde tanımlıdırlar.

Bu etkiler birer R-cebiroid etkisidir.

$$\mu : M \longrightarrow A, \quad \mu(l,n) = (\partial_2 l, n)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda; μ, bir R-cebiroidler için bir çaprazlanmış modül olacaktır.

5.4. Simplisel *R* -Cebiroidler

Bir simplisel R-cebiroid $\boldsymbol{C}$, R-cebiroid kategorisindeki bir simplisel objedir. $R-Ceboid/A_0$ kategorisi obje kümeleri, A_0 kümesi olan tüm R-cebiroidlerin kategorisi olmak üzere; $\Delta^{op}[n]$ kategorisinden $R-Ceboid/A_0$ kategorisine tanımlı bir funktor obje kümesi A_0 olan bir simplisel cebiroid olarak tanımlanabilir. Burada her bir $i \geq 0$ için C_i ler A_0 obje kümesi üzerinde birer R- cebiroid olmak üzere, d_i ve s_j lerde 1. Bölümde verilen simplisel özdeşlikleri sağlayan R- cebiroid homomorfizimleri olmak üzere bir simplisel R- cebiroid $\left(C_i, d_i, s_j\right)$ yi aşağıdaki diyagramla ifade edebiliriz.

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{C} & \cdots\ C_2 \arrow[r, shift left=6, "d_0"] \arrow[r, shift left=3, "d_1"] \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, shift left=1] \arrow[d, shift right=1] & C_1 \arrow[l, shift left=3, "s_0"] \arrow[l, shift left=6, "s_1"] \arrow[r, shift left=3, "d_0"] \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, shift left=1] \arrow[d, shift right=1] & C_0 \arrow[l, shift left=3, "s_0"] \arrow[d, shift left=1] \arrow[d, shift right=1] \\
& \cdots\ A_0 \arrow[r, equal] & A_0 \arrow[r, equal] & A_0
\end{tikzcd}$$

Burada d_i ve s_j ler A_0 obje kümesi üzerinde birim dönüşümlerdir.

5.4.1. R -Cebiroidler Üzerinde Çaprazlanmış Kompleksler

G.H.Mosa [18] de obje kümesi aynı A_0 kümesi olan R- cebiroidler üzerinde çaprazlanmış modül tanımını verdikten sonra çaprazlanmış kompleks tanımı aşağıdaki gibi vermiştir.

5.4.1.1.Tanım : R- cebiroidlerin bir çaprazlanmış kompleksi aşağıdaki gibi bir diyagramdır.

$$\boldsymbol{M} : \quad \ldots \longrightarrow M_n \xrightarrow{\delta_n} M_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \ldots \longrightarrow M_2 \xrightarrow{\delta_2} M_1$$

ve aşağıdaki şartlar sağlanır:

$(\boldsymbol{i})$ Her bir M_i, M_0 obje kümesi üzerinde bir R- cebiroiddir ve $n \geq 2$ için δ_n ler M_0 obje kümesi üzerinde birim dönüşümlerdir.

$(\boldsymbol{ii})$ M_1 cebiroidinin $n \geq 2$ için M_n cebiroidleri üzerinde etkisi vardır. Bu etkiler, $m \in M_n(x,y)$, $a \in M_1(w,x)$, $b \in M_1(y,z)$ olmak üzere; sol etki ${}^a m \in M_n(w,y)$ ve sağ etki $m^b \in M_n(x,z)$ şeklinde tanımlanırlar.

$(\boldsymbol{iii})$ Eğer $m \in M_n(x,y)$, $m' \in M_2(y,z)$, $m'' \in M_2(w,x)$ ise,

$$m^{\delta_2 m'} = \begin{cases} 0_{xz} & n \geq 3 \text{ } ise \\ mm' & n = 2 \text{ } ise \end{cases}$$

$${}^{\delta_2 m''}m = \begin{cases} 0_{wy} & n \geq 3 \text{ } ise \\ m''m & n = 2 \text{ } ise \end{cases}$$

olmalıdır. Burada $n \geq 3$ için $m^{\delta_2 m'} = 0_{xz}$ veya ${}^{\delta_2(m'')}m = 0_{wy}$ olması demek $\delta_2(M_2)$ nin $n \geq 3$ için M_n ler üzerindeki etkisinin sıfır olması demektir. Diğer şartlar ise δ_2 nin bir çaprazlanmış modül olduğunu gösterir.

$(\boldsymbol{iv})$ $n \geq 2$ için $\delta_n : M_n \longrightarrow M_{n-1}$, M_1 in etkisini korurlar. Burada M_1 kendisi üzerine kendisinin kompozisyon işlemi ile etki eder. Yani; $a \in M_1$ ve $x \in M_n$ için

$$\delta_n\left({}^a x\right) = {}^a\left(\delta_n(x)\right)$$

olmalıdır.

$(\boldsymbol{v})$ $n \geq 3$ için $\delta_n \delta_{n+1} = 0 : M_n \longrightarrow M_{n-2}$ olmalıdır.

$\boldsymbol{M}$ ve $\boldsymbol{N}$ aynı obje kümesi M_0 üzerinde iki farklı çaprazlanmış kompleks olsun. $f : \boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{N}$ bir çaprazlanmış kompleksler arasındaki morfizm $\delta_n : M_n \longrightarrow M_{n-1}$ ve $\delta'_n : N_n \longrightarrow N_{n-1}$ R- cebiroid homomorfizimleri ile değişmeli olan $f_n : M_n \longrightarrow N_n$ şeklinde R- cebiroid homomorfizimlerinin bir ailesi olarak tanımlanabilir. Ayrıca M_1 in etkisini de f_1 in koruması gerekir.

Böylece obje kümesi M_0 olan çaprazlanmış kompleksler kategorisini oluşturabiliriz. Bu kategoriyi $\boldsymbol{XCeboid}/\boldsymbol{M_0}$ ile gösterelim.

5.4.2. Simplisel R -Cebiroidlerden Çaprazlanmış Komplekslere

$\boldsymbol{C}$, obje kümesi M_0 olan bir simplisel R- cebiroid olsun. Bu simplisel cebiroidin Moore kompleksi

$$(\boldsymbol{NC}, \partial) : \ \ldots \ NC_2 \xrightarrow{\partial_2} NC_1 \xrightarrow{\partial_1} NC_0$$

şeklinde M_0 obje kümesi R- cebiroidlerin bir kompleksi olup, burada

$$NC_0 = \left(C_0 \ \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} M_0 \right),$$

M_0 obje kümesi bir R- cebiroid;

$$NC_1 = \left(Çekd_0 \ \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} M_0 \right),$$

bir R- cebiroid ve genel olarak

$$NC_n = \left(\bigcap_{i=0}^{n-1} Çekd_n \ \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} M_0 \right)$$

şeklinde bir R- cebiroid olup, ∂_n ler ise d_n^n ile tanımlanan R- cebiroid homomorfizmleridir.

Daha genel olarak

$$\begin{tikzcd}
\ldots\ Çekd_0^2 \cap Çekd_1^2 \arrow[r, "d_2^2"] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & Çekd_0^1 \arrow[r, "\partial_1 = d_1^1"] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & C_0 \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\
M_0 \arrow[r, equal] & M_0 \arrow[r, equal] & M_0
\end{tikzcd}$$

şeklinde tanımlı bir komplekstir.

Şimdi T.Porter ve Ehler'in grupoidler için oluşturduğu, simplisel grupoidlerden çaprazlanmış komplekslere tanımlı ve Bölüm 3 de verdiğimiz funktorunun R-cebiroidler versiyonunu oluşturmaya çalışalım.

Yani M_0 obje kümeli bir simplisel cebiroidden aynı M_0 obje kümeli bir R-cebiroidler için çaprazlanmış kompleks elde edeceğiz. Bu kompleksi,

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{X} :\ \ldots & X_2 \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & X_1 \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & X_0 \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\
& A_0 \arrow[r, equal] & A_0 \arrow[r, equal] & A_0
\end{tikzcd}$$

şeklinde gösterelim $A_0 = M_0$ olsun.

$$X_0 = C_0 = \left(NC_0 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} A_0 \right)$$

R-cebiroidi,

$$X_1 = \left(Çekd_0^1 \big/ \partial_2 \left(NC_2 \cap D_2 \right) \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} A_0 \right)$$

R-cebiroidi olsun. Burada D_2, s_j dejenere operatörleri tarafından üretilen $\left(C_2 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} M_0 \right)$ R-cebiroidinin alt cebiroididir. Böylece

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\partial_1} & X_0 \\ s\Big\downarrow\Big\downarrow t & & s\Big\downarrow\Big\downarrow t \\ A_0 & = & A_0 \end{array}$$

diyagramını elde ederiz. Burada $x \in \left(Çekd_0^1 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} A_0 \right)$ olmak üzere

$$\partial_1\left(x + \partial_2\left(NC_2 \cap D_2\right)\right) = d_1(x)$$

şeklinde tanımlıdır.

Bu tanımlamaya göre ∂_1, R- cebiroidler üzerinde bir çaprazlanmış modüldür.

$\left(C_0 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} A_0 \right)$ R- cebiroidinin $\left(X_1 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} A_0 \right)$ R-cebiroidi üzerindeki etkisi; $m \in X_1(x,y)$ ve $a \in C_0(w,x)$ olmak üzere soldan,

$${}^{a}m = \left(s_0(a) * m\right) + \partial_2\left(NC_2 \cap D_2\right) \in X_1(w,y)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $*$, $\left(X_1 \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} A_0 \right)$, R- cebiroidinin kompozisyon işlemidir. Açıkça,

$$\partial_1\left({}^{a}m\right) = d_1\left(s_0(a) * m\right)$$

$$= a * d_1(m)$$

olup, çaprazlanmış modülün 1. aksiyomu sağlanmış olur. Benzer olarak $b \in X_0(y,z)$ ve $m \in X_1(x,y)$ için, $m^b \in X_1(x,z)$ olup,

$$m^b = \left(m * s_0(b) + \partial_2 (NC_2 \cap D_2)\right)$$

şeklinde tanımlıdırlar.

$n \geq 2$ için

$$X_n = \left({NC_n} \Big/ {(NC_n \cap D_n) + \partial_{n+1}(NC_{n+1} \cap D_{n+1})} \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} A_0 \right)$$

şeklinde A_0 obje kümeleri R-cebiroidler olur.

Böylece aşağıdaki kompleksi oluşturmuş oluruz.

$$\begin{array}{cccccccc}
\boldsymbol{X}: & \ldots & X_2 & \xrightarrow{\partial_2} & X_1 & \xrightarrow{\partial_1} & X_0 \\
 & & \downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow \\
 & & A_0 & = & A_0 & = & A_0
\end{array}$$

Burada ∂_1 bir R- cebiroidler için çaprazlanmış modül, $n \geq 2$ için ∂_n ler d_n^n ile tanımlanan R- cebiroid homomorfizimleri ve son olarak $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ dır. Bu son ifadenin ispatını okuyucuya bırakıyoruz.

Böylece,

$$\boldsymbol{SimpCeboid}\big/A_0 \longrightarrow \boldsymbol{XCeboid}\big/A_0$$

şeklinde bir funktor oluşturmuş oluruz.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] Arvası, Z., Applications in Commutative Algebra of The Moore Complex of a Simplicial Algebra, *Ph.D.Thesis*, University of Wales, Bangor, (1994).

[2] Arvası, Z. and Porter, T., Freness Conditions for 2-Crossed Modules of Commutative Algebras, *Applied Categorical Structures*, Vol.6, 455-471, (1998).

[3] Arvası, Z. and Porter, T., Simplicial and Crossed Resolutions of Commutative Algebras, *Journal of Algebra* 181,426-448, (1996).

[4] Brown, R., From Groups to Groupoids, *Bull. London Math. Soc.*, 19, 113-134, (1987).

[5] Brown, R. and Loday, J-L., Van Kampen Theorems for Diagram of Spaces, *Topology* 26,311-335, (1987).

[6] Brown, R. and Gılbert, N. D., Algebraic Models of 3-Types and Automorfizm Structures for Crossed Modules, *Proc. London Math. Soc*.(3) 59, 51-73, (1989).

[7] Brown, R. and Hıggıns, P. J., colimit theorems for relative homotopy groups, *J.P.A.A.* 22,11-44, (1981).

[8] Brown, R. and Spencer, C. B., G-Groupoids, Crossed Modules and the Fundemental Groupoid of a Topological Goup, *Proc. Konink. Neder. Akad. van Wetenschappen Amsterdam,* Vol: 79 (4), (1976).

[9] Carrasco, P., Complejos Hipercruzados Cohomologia Extensiones, *Ph.D.Thesis,* Universidad de Granada, (1987).

[10] Carrasco, P. and Cegarra, A. M., Group-theoretic Algebraic Models for Homotopy Types, *Jour. Pure Applied Algebra*,75, 195-235, (1991).

[11] Conduché, D., Modules Croisés Généralisés de Longueur 2 *J. Pure and Applied Algebra*,34, 155-178, (1984).

[12] Curtıs, E. B., Simplicial Homotopy Theory, *Adv in Math* Vol.6, 107-209, (1971).

[13] Duskın, J., Simplicial Methods and the İnterpretation of Triple Cohomology, *Memoirs A.M.S,* Vol.3, 163, (1975).

[14] Grannjeán, A. R. and Vale, M. J., 2-Modulos Cruzados an la Cohomologia de André-Quillen. *Memorias de la Reai Academia de Ciencias,* 22, (1986).

[15] Loday, J. L., Spaces with Finitely Many Non-Trivial Homotopy Groups, *J. Pure and Applied Algebra,* 24, 179-202, (1982).

[16] Mıcthell, B., Rings with Several Objects, *Advances Math*.8, 1-161, (1972).

[17] Mıcthell, B., Some Applications of Module Theory to Functor Categories, *Bull. Amer. Math. Soc.* 84,867-885, (1978).

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

[18] Mosa, G. H, Higher Dimensional Algebroids and Crossed Complexes, *Ph.D.Thesis, Universty of Wales,* (1986).

[19] Porter, T., Some Categorical Results in the Theory of Crossed Modules in Commutative Algebras, *J. Algebra* 109, 415-429, (1987).

[20] Porter, T., Crossed Modules in Cat and a Brown-Spencer Theorem for 2-Categories, *Chaiers Topologie Geom. Differentielle Categoriques* 26, 381-388, (1985).

[21] Porter, T., n-Type of Simplicial Groups and Crossed n-Cubes, *Topology* 32,5-24, (1993).

[22] Porter, T., Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconceles, *J. Algebra* 99, 458-465, (1986).

[23] Porter, T. and Ehler, P. J., Varieties of Simplicial Groupoids I: crossed complexes Journal of Pure and Applied Algebra 120,3,221-233, (1997).

[24] Tonks, A. P., Theory and Applications of crossed copmlexes, *Ph.D.Thesis, Universty of Wales,* (1993).

[25] Whıtehead, J. H. C., Combinatorial Homotopy II, *Bull. Amer.Math.Soc.*55, 453-496, (1949).