

B – SPLINE FONKSİYONLAR YARDIMIYLA BAZI TEK BOYUTLU  
LİNEER OLMAYAN KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL  
DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Mehmet ÖZERDEM

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz – 2010



B – SPLINE FONKSİYONLAR YARDIMIYLA BAZI TEK BOYUTLU  
LİNEER OLMAYAN KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL  
DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Mehmet ÖZERDEM

Dumlupınar Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca  
Matematik Anabilim Dalında  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Yrd.Doç.Dr. Ahmet BOZ

Temmuz – 2010

**KABUL VE ONAY SAYFASI**

Mehmet ÖZERDEM' in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “Lineer Olmayan Bazı Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Septik B-Spline Fonksiyonlar Yardımıyla Nümerik Çözümü” başlıklı çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

...../...../.....

Üye : .....

Üye : .....

Üye : .....

**B – SPLINE FONKSİYONLAR YARDIMIYLA BAZI TEK BOYUTLU  
LİNEER OLMAYAN KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL  
DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

Mehmet ÖZERDEM

Matematik, Yüksek Lisans Tezi, 2010

Tez Danışmanı: Yrd.Doç.Dr. Ahmet BOZ

**ÖZET**

Bu çalışmada Septik B-Spline fonksiyonlar yardımıyla kolokeyşin yöntemleri kullanılarak bazı lineer olmayan dalga denklemlerinin nümerik çözümleri incelenmiştir. Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde B-Spline fonksiyonlar tanıtılmış ayrıca tez boyunca çözümünü incelediğimiz RLW, Burger ve KdV-Burger denklemleri ve daha önce yapılmış çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde lineer olmayan RLW denkleminin Septik B-Spline fonksiyonlar yardımıyla nümerik çözümü için algoritma çıkarılmış, elde edilen veriler tablo halinde incelenmiş ve Von Neumann kararlılık analizi yapılmıştır.

Üçüncü bölümde Burger denkleminin Septik B-Spline kolokeyşin çözümü elde edilmiştir. Çözüm sonucunda elde edilen verilerin gerçek değerlerle uyumluluğu incelenmiştir. Burger denkleminin Septik kolokeyşin çözümü için kararlılık analizi yapılmıştır.

Son bölümde de Septik B-Spline kolokeyşin yöntemi KdV-Burger denklemine uygulanmış, elde edilen sonuçlar tablo ve grafiklerle ifade edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Burger Denklemi, KdV Burger Denklemi, RLW Denklemi, Septik B-Spline Fonksiyonlar.

**WITH THE HELP OF B – SPLINE FUNCTIONS SOME UNIDIMENSIONAL NON-LINEAR  
PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS' NUMERICAL SOLUTIONS**

Mehmet ÖZERDEM

Mathematics, M.S. Thesis, 2010

Thesis Advisor: Assist. Prof. Dr. Ahmet BOZ

**SUMMARY**

In this work wave equation's numeric solutions were analysed with the help of Septic B-spline functions by using collocation. This thesis consists of four section:

In first section B-Spline functions were introduced. At the same time about RLW , Burger and KdV-Burger's equations that were analysed throughout the whole thesis and works , which were done before , were given information.

In second section algorithm was revealed for RLW equations' numeric solution with the help of Septic B-Spline functions which is not straight- line function, then datum were analysed in the form of chart and Von Neumann's stability analyse was done.

In third section Burger equation's Septic B-Spline collocation solution was obtained . At the end of solution, datum's, which are obtained, observance with the real values. Stability analyse was done for Burger equation's Septic collocation solution.

At the last section, Septic B-Spline collocation method was applied KdV-Burger equation and results, which are gained, was represented with charts and graphics.

**Keywords:** Burger Equations, KdV Burger Equation, RLW Equation, Septic B-Spline Functions.

## TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlarken ve yüksek lisansım boyunca beni sabırla dinleyip hiçbir yardımı esirgemeyen, danışman hocalığın yanı sıra bana bir ağabey gibi yaklaşan değerli danışman hocam

**Yrd.Doç.Dr. Ahmet BOZ' a**

ayrıca aileme, Kütahya Özel Başaran Yıldız Anadolu Lisesi Müdürü Salih ÖZDEN' e ve emeği geçen herkese sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	v
SUMMARY.....	vi
TEŞEKKÜR.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
1.1. B-Spline Fonksiyonlar.....	1
1.2. Septik B-Spline İnterpolasyon Polinomları.....	3
1.3. Regularized Long Wave (RLW) Denklemi.....	5
1.4. Burger Denklemi.....	6
1.5. KdV Burger Denklemi.....	7
2. RLW DENKLEMİNİN SEPTİK B-SPLINE KOLOKEYŞİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ	
2.1. Giriş .....	10
2.2. Septik B-Spline Kolokeyşin Metodu .....	10
2.3. Başlangıç Durumu.....	25
2.4. Kararlılık Analizi .....	27
2.5. Test Problemleri .....	27
2.5.1. Test Problemi I.....	28
2.5.2. Test Problemi II.....	30
2.5.3. Test Problemi III.....	33
2.6. Sonuçlar ve Öneriler.....	36
3. BURGER DENKLEMİNİN SEPTİK B-SPLINE KOLOKEYŞİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ	
3.1. Giriş.....	37
3.2. Septik B-Spline Kolokeyşin Metodu.....	37
3.3. Başlangıç Durumu.....	44
3.4. Kararlılık Analizi.....	45
3.5. Test Problemleri.....	49



## İÇİNDEKİLER (Devam)

	<b><u>Sayfa</u></b>
3.5.1. Test Problemi I.....	49
3.5.2. Test Problemi II.....	50
3.6. Sonuçlar ve Öneriler.....	55
4. KdV BURGER DENKLEMİNİN SEPTİK B-SPLINE KOLOKEYŞİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ	
4.1. Giriş.....	56
4.2. Septik B-Spline Kolokeyşin Metodu.....	56
4.3. Başangıç Durumu.....	60
4.4. Kararlılık Analizi.....	61
4.5. Test Problemleri.....	65
4.5.1. Test Problemi I .....	65
4.6. Sonuçlar ve Öneriler.....	67
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	68

## 1. GİRİŞ

Bu bölümde tezimizde kullanılacak temel kavramlar ele alınacaktır. İlk olarak B-spline fonksiyonların tanımı ve bazı önemli özellikleri verilecek daha sonra nümerik çözümlerde kullanılacak septik B-spline fonksiyonlar ifade edilecektir. Son olarak başlangıç ve sınır koşulları ile birlikte Regularized Long Wave, Burger, KdV-Burger denklemleri tanıtılacaktır.

### 1.1. B-spline Fonksiyonlar:

Günümüz dünyasında yaşanan büyük gelişmelerden sonra, bilgisayar çizimlerinde eğrileri tanımlayabilmek için çok yönlü yaklaşımlar sunan B-spline fonksiyonlar, geometrik modelleme, bilgisayar çizimleri ve daha başka birçok alanda önemli bir konuma gelmiştir.

Çok sayıdaki veri noktalarına bir tek eğri ile yaklaşmak büyük kolaylıklar sağlasa da bazı hallerde bu durum büyük hatalara neden olabilir. Ayrıca bu amaçla kullanılan Newton ve Lagrange Enterpolasyon polinomlarının derecesi nokta sayısı arttıkça artacağından, bu tür polinomlarla yapılacak işlemler zorlaşır. Bu durumda, *düğüm* olarak adlandırılan noktalarda birbirlerine bağlı, polinom eğri parçasından oluşan B-spline fonksiyonlar yardımıyla yapılan yaklaşımlar bir alternatif olarak karşımıza çıkar.

B-spline fonksiyonlarla diferensiyel problemlerine yapılan yaklaşım metodlarından iki tanesi Galerkin ve Kolokeyşin metodlarıdır. Galerkin metodu, B-spline yaklaşım metodlarının içinde en çok kullanılan methodtur. Kolokeyşin metodu ise sadece düğüm noktalarında hesaplama yaptığı için Galerkin metoduna göre hesaplama zamanındaki azalma nedeniyle daha ekonomik bir alternatifi temsil eder.

### B-spline Fonksiyonların Bazı Özellikleri:

$d$ , negatif olmayan bir tamsayı ve  $x = (x_m)$ , en az  $d+2$  uzunluğunda azalamayan, bir reel sayı dizisi olsun.  $x = (x_m)$  dizisine *düğüm vektörü* ya da *düğüm dizisi* denir. Bu durumda  $x$  düğümlerine sahip,  $d$ . dereceden,  $m$ . B-spline fonksiyonu  $\phi_{m,d}$  nin bazı özellikleri aşağıdaki şekilde verilebilir.

1.  $m$ . B-spline fonksiyonu  $\phi_{m,d}$ , sadece  $x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+d+1}$  düğümlerine bağlıdır.
2. (a) Eğer  $x$ ,  $[x_m, x_{m+d+1})$  aralığının dışında ise  $\phi_{m,d}(x) = 0$ 'dır. Eğer  $x_m = x_{m+d+1}$  ise  $\forall x$  için  $\phi_{m,d} = 0$  olduğuna dikkat edilmelidir.

(b) Eğer  $x$ ,  $[x_\mu, x_{\mu+1})$  aralığında bulunuyorsa ve  $m < \mu - d$  ya da  $m > \mu$  ise  $\phi_{m,d}(x) = 0$ 'dır.

3. Eğer  $x \in (x_m, x_{m+d+1})$  ise  $\phi_{m,d}(x) > 0$ 'dır. Burada,  $[x_m, x_{m+d+1}]$  kapalı aralığı  $\phi_{m,d}$ 'nin *desteği* olarak adlandırılır.

4. Her bir  $\phi_{m,d}^k(x)$ ,  $d$ . dereceden bir polinom olmak üzere  $\phi_{m,d}$  B-spline fonksiyonu,

$$\phi_{m,d}(x) = \sum_{k=0}^{m+d} \phi_{m,d}^k(x) \phi_{k,0}(x)$$

şeklinde yazılabilir.

5. Eğer  $z = x_{m+1} = \dots = x_{m+d} < x_{m+d+1}$  ise  $\phi_{m,d}(z) = 1$  ve  $i \neq m$  için  $\phi_{i,d}(z) = 0$ 'dır.

6. Eğer  $z$  sayısı,  $x_m, \dots, x_{m+d+1}$  arasında  $t$  defa görünüyorsa  $\phi_{m,d}$ 'nin  $0, 1, \dots, d-t$  inci mertebeden türevlerinin hepsi  $z$  noktasında süreklidir.

7.  $x, y \in R$  olmak üzere,

$$\phi(x+y | x_m + y, \dots, x_{m+d+1} + y) = \phi(x | x_m, \dots, x_{m+d+1})$$

eşitliği sağlanır.

8. Herhangi bir  $[x_m, x_{m+1})$  aralığında  $d$ . dereceden B-spline fonksiyonlardan en fazla  $d+1$  tanesi sıfırdan farklıdır ve sıfırdan farklı bu  $d+1$  B-spline fonksiyonun toplamı  $1$  dir.

Eğer düğümlerin sayısı  $t+1$ , B-spline fonksiyonların derecesi  $d$  ve derecesi  $d$  olan B-spline fonksiyonların sayısı da  $n+1$  ise  $t=n+d+1$  dir.

## 1.2 Septik B-Spline İnterpolasyon Polinomları:

[a,b] aralığı,  $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \dots \leq x_{N-1} \leq x_N = b$  düğüm noktaları kullanılarak  $h = x_{i+1} - x_i$ ,  $i=0, \dots, N-1$  eşit uzunluklu  $N$  sonlu eleman ile ayrıştırılsın.  $\phi_i(x)$  Septik B-Spline fonksiyonları;

$$\phi_i(x) = \frac{1}{h^7} \begin{cases} (x - x_{i-4})^7, x \in [x_{i-4}, x_{i-3}] \\ (x - x_{i-4})^7 - 8(x - x_{i-3})^7, x \in [x_{i-3}, x_{i-2}] \\ (x - x_{i-4})^7 - 8(x - x_{i-3})^7 + 28(x - x_{i-2})^7, x \in [x_{i-2}, x_{i-1}] \\ (x - x_{i-4})^7 - 8(x - x_{i-3})^7 + 28(x - x_{i-2})^7 - 56(x - x_{i-1})^7, x \in [x_{i-1}, x_i] \\ (x_{i+4} - x)^7 - 8(x_{i+3} - x)^7 + 28(x_{i+2} - x)^7 - 56(x_{i+1} - x)^7, x \in [x_i, x_{i+1}] \\ (x_{i+4} - x)^7 - 8(x_{i+3} - x)^7 + 28(x_{i+2} - x)^7, x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ (x_{i+4} - x)^7 - 8(x_{i+3} - x)^7, x \in [x_{i+2}, x_{i+3}] \\ (x_{i+4} - x)^7, x \in [x_{i+3}, x_{i+4}] \\ 0, \dots \end{cases} \quad (1.1)$$

şeklinde dir.

$\phi_i(x)$  B-Spline fonksiyonları ve bütün birinci, ikinci, üçüncü mertebeden türevleri  $[x_{i-4}, x_{i+4}]$  aralığının dışında sıfırdır.  $\{\phi_{-3}, \phi_{-2}, \phi_{-1}, \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_N, \phi_{N+1}, \phi_{N+2}, \phi_{N+3}\}$  [a,b] üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar için bir tabandır (Prenter 1975).

$[x_{i-4}, x_{i+4}]$  aralığında  $\phi_i(x), \phi_i', \phi_i'', \phi_i'''$  fonksiyonlarının bölünme noktalarındaki değerleri Tablo 1'de verilmiştir.

**Tablo 1:** Bazı noktalarda  $\phi_i(x)$  ve türevlerinin değerleri.

$x$	$x_{i-4}$	$x_{i-3}$	$x_{i-2}$	$x_{i-1}$	$x_i$	$x_{i+1}$	$x_{i+2}$	$x_{i+3}$	$x_{i+4}$
$\phi_i$	0	1	120	1191	2416	1191	120	1	0
$\phi_i'(x)$	0	$\frac{7}{h}$	$\frac{392}{h}$	$\frac{1715}{h}$	0	$\frac{-1715}{h}$	$\frac{-392}{h}$	$\frac{-7}{h}$	0
$\phi_i''(x)$	0	$\frac{42}{h^2}$	$\frac{1008}{h^2}$	$\frac{630}{h^2}$	$\frac{-3360}{h^2}$	$\frac{630}{h^2}$	$\frac{1008}{h^2}$	$\frac{42}{h^2}$	0
$\phi_i'''(x)$	0	$\frac{210}{h^3}$	$\frac{1680}{h^3}$	$\frac{-3990}{h^3}$	0	$\frac{3990}{h^3}$	$\frac{-1680}{h^3}$	$\frac{-210}{h^3}$	0

Septik B-Spline Kolokeyşin metodunda Septik B-Spline fonksiyonları taban fonksiyonları olarak kullanılarak  $u(x, t)$  analitik çözümü için yaklaşık çözüm;

$$U_N(x, t) = \sum_{i=-3}^{N+3} \phi_i(x_j) \cdot \delta_i(t), \quad j=0, 1, 2, \dots, N \quad (1.2)$$

formunda aranır.

Ayrıca  $[x_i, x_{i+1}]$  elemanı üzerinde sekiz ardışık  $\phi_{i-3}, \phi_{i-2}, \phi_{i-1}, \phi_i, \phi_{i+1}, \phi_{i+2}, \phi_{i+3}, \phi_{i+4}$  Septik B-Spline fonksiyonu dışındaki diğer tüm Septik B-Spline fonksiyonları sıfır olacağından bu eleman üzerindeki yaklaşık çözüm;

$$U_N(x, t) = \sum_{j=i-3}^{i+3} \phi_j(x) \delta_j(t) \quad (1.3)$$

eşitliğine indirgenecektir.

Tablo 1 ve (1.3) yaklaşık çözümünün kullanılması ile  $x_i$  bölünme noktasında  $U_N$  ve ilk üç türevi;

$$\begin{aligned} U_N(x, t) &= \sum_{j=i-3}^{i+3} \phi_j(x) \delta_j(t) \\ &= \delta_{i-3} + 120\delta_{i-2} + 1191\delta_{i-1} + 2416\delta_i + 1191\delta_{i+1} + 120\delta_{i+2} + \delta_{i+3} \end{aligned}$$

$$U_N'(x, t) = \frac{1}{h} (7\delta_{i-3} + 392\delta_{i-2} + 1715\delta_{i-1} - 1715\delta_{i+1} - 392\delta_{i+2} - 7\delta_{i+3})$$

$$U_N''(x_i, t) = \frac{1}{h^2} (42\delta_{i-3} + 1008\delta_{i-2} + 630\delta_{i-1} - 3360\delta_i + 630\delta_{i+1} + 1008\delta_{i+2} + 42\delta_{i+3})$$

$$U_N'''(x_i, t) = \frac{1}{h^3} (210\delta_{i-3} + 1680\delta_{i-2} - 3990\delta_{i-1} + 3990\delta_{i+1} - 1680\delta_{i+2} - 210\delta_{i+3})$$

şeklinde elde edilir.

### 1.3. Regularized Long Wave (RLW) Denklemi:

Düzenlenmiş uzun dalga denklemi önemli bir lineer olmayan dalga denklemdir. Düzenlenmiş dalga denklemi (RLW), KDV denkleminde daha alışıldık, lineer olmayan yayılma dalgaları olarak tanımlanabilir. [1]

$\varepsilon$  ve  $\mu$  reel sabitler olmak üzere,

$$\mu U_t + U_x - \varepsilon U_{xxx} = 0 \quad (1.4)$$

eşitliği ile verilmektedir. Bu lineer olmayan denklemi ilk olarak ardışık dalgaları modellemek için ileri sürülmüş ve sayısal çözümünü yapılmıştır (Peregrine, 1966). Benjamin et al. (1972) ise RLW denkleminin daha yaygın olarak bilinen lineer olmayan Korteweg-de Vries (KdV) dalga denkleminin çözümüne benzerliğini göstermişlerdir. Eilbeck and McGuire (1975, 1977), sonlu farklar metodu kullanarak denklemin sayısal çözümlerini elde etmişlerdir. Jain ve İskandar (1979), farklı sonlu farklar metodları kullanarak denklemin sayısal çözümlerini elde etmişlerdir. Alexander and Morris (1979), kübik Spline Galerkin metoduyla RLW denkleminin sayısal çözümünü araştırmışlardır. Gardner and Gardner (1990), ve Gardner and Dağ (1995), kübik B-Spline kullanarak Galerkin metoduyla RLW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmişlerdir. Chang et al. (1991), RLW denkleminin korunumlu fark metodunu uygulamışlar metodun yakınsaklığını ve kararlılığını göstermişlerdir. Jain et al. (1993), RLW denklemini Kübik Spline sonlu farklar metodu ile sayısal olarak çözmüşlerdir. Gardner et al. (1995), kuadratik B-Spline Galerkin metoduyla RLW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmişlerdir. Gardner et al. (1996), lineer şekil fonksiyonları yardımıyla en küçük kareler metodu ile sayısal çözüm elde etmişlerdir. Gardner et al. (1997), kuintik B-Spline kullanarak Petrov-Galerkin metoduyla sayısal çözüm üzerine çalışmışlardır. Dağ (2000), kuadratik B-Spline yardımıyla en küçük

kareler metodunu RLW denklemine uygulamıştır. Bhardwaj and Shankar (2000), RLW denklemini parçalayıp kuintik spline kullanarak sonlu farklar metodu ile sayısal çözüm araştırmışlar, yerel kesme hatasını ve kararlılığını göstermişlerdir. Dağ and Özer (2001), kübik B-Spline kullanarak en küçük kareler metodunu RLW denklemine uygulamış ve sayısal çözüm bulmuşlardır. Doğan, (2001, 2002), kuadratik B-Spline kullanarak Petrov-Galerkin ve lineer şekil fonksiyonları yardımıyla Galerkin metodlarını RLW denklemine uygulayıp sayısal çözümler araştırmıştır.

Sonlu farklar metoduna dayanan nümerik çözümler [3], Runge – Kutta metodu [4] ve Galerkin metodu [5] verildi. Alexander ve Morris [5] kübik B-Spline fonksiyonlardan global deneme fonksiyonunu oluşturdu. Gardner ve Gardner [6] Galerkin metodunu ve kapalı sonlu elemanlar çözümünü oluşturmak için kübik B-Spline şekil fonksiyonlarını kullandı. RLW denklemini çözmek için de en küçük kareler yöntemini kullandı. [7] Son olarak Soliman ve Raslan [8] kuadratik B-Spline fonksiyonları kullanarak kolokeyşin metodu ile RLW denklemini çözmüştür.

Bu çalışmada RLW denklemini Septik B-Spline kolokeyşin metoduyla çözülmüştür. Eleman matrisi cebirsel olarak hesaplandı ve problemi oluşturan denklemler tam global matris denklemini elde etmek için eleman matrisiyle birleştirildi. Cranck – Nicholson formülünü içeren adi diferensiyel denklemlerin çözümünü elde etmek için zaman integrali kullanıldı. Lineer kararlılık analizi nümerik algoritmanın koşulsuz kararlı olduğunu göstermiştir.

Septik B-Spline kolokeyşin metodu ile tek solitary dalganın hareketi doğru bir şekilde gösterilmiştir. İki solitary dalganın hareketi çalışılmıştır. Sonuç olarak Maxwell başlangıç koşulu içinde durağan solitary dalganın oluşumu incelenmiştir.

#### 1.4. Burger Denklemi:

$\nu$ , vizkozite sabiti olmak üzere,

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0, \quad a \leq x \leq b \quad (1.5)$$

Formundaki Burger Denklemi'nin yaklaşık çözümünü bulmak için Septik B-spline fonksiyonlarının uygulanmasına dayalı bir nümerik metod geliştirebiliriz.

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0,$$

$a \leq x \leq b$  denkleminin başlangıç koşulu;

$$u(x, 0) = f(x) \quad (1.6)$$

ve sınır koşulları,

$$\begin{aligned} u(a, t) &= \beta_1, \quad u(b, t) = \beta_2, \\ u_x(a, t) &= u_x(b, t) = 0, \\ u_{xx}(a, t) &= u_{xx}(b, t) = 0, \\ u_{xxx}(a, t) &= u_{xxx}(b, t) = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

olarak verilsin.

Burada  $\beta_1, \beta_2$  problemde ihtiyaç duyulan sabitler,  $u = u(x, t)$  yeterli türe ve sahip diferensiyellenebilir fonksiyon,  $f(x)$  sınırlıdır. Burger Denklemi üzerindeki çalışmalar [14] şok dalga yayılımı ve [12] türbülansın modellenmesi gibi yaklaşım teorilerinin ortaya çıkmasında önemlidir. Burger ve Navier-Stokes denklemleri lineer olmayan terimleri ve küçük katsayılı yüksek mertebeden türevli terimlerinin oluşumu yönünden birbirlerine benzerdir.[14]

### 1.5. KdV-Burger Denklemi:

$\varepsilon, \nu, \mu$  sabit katsayılar olmak üzere,

$$u_t + \varepsilon uu_x - \nu u_{xx} + \mu u_{xxx} = 0 \quad (1.8)$$

Yukarıdaki formda verilen KdV denklemini ele alalım. Burada  $\varepsilon, \nu, \mu$  sıfırdan farklı reel sabitlerdir. Bu tür denklemler birçok fiziksel oluşumda ortaya çıkar. Johnson [21] sıvı doldurulmuş elastik tüplerde dalga yayılımı için bu denklemi esas denklem olarak ele almıştır. van Wijngaarden [22] gaz baloncukları içeren sıvıların akışkanlığı için lineer olmayan bir model olarak kullanmıştır.



[23,24] türbülans modeli olarak kullanılmıştır. Grua ve Hu [5], KdV – Burger denkleminin durağan halini, plazmada zayıf şok tanımlamak için kullandı.

$$u_t + \varepsilon uu_x - \nu u_{xx} + \mu u_{xxx} = 0$$

KdV – Burger denklemi,

$$u_t + \varepsilon uu_x + \mu u_{xxx} = 0 \quad (1.9)$$

KdV denklemine ve

$$u_t + \varepsilon uu_x - \nu u_{xx} = 0 \quad (1.10)$$

Burger denklemine benzerdir.

(1.9) KdV denklemi ve (1.10) Burger denkleminin her ikisinin de tam çözümleri vardır ve fiziksel problemlerde geniş uygulama alanlarına sahiptirler [26-32]. Yakın geçmişte KdV – Burger denklemi ile ilgili birçok teorik çalışma yapılmıştır. Özellikle KdV – Burger denklemi için hareketli dalga çözümü yoğun olarak çalışılmıştır. Johnson [21],  $\nu < \mu, \mu < \nu$  olacak şekilde farklı bölgelerde pertürbasyon metodu anlamında KdV – Burger denkleminin hareketli dalga çözümü üzerinde çalışmış ve çözüm için asimptotik açılımlar geliştirmiştir. [15] ve [33] aynı problem için Johnson'un kullandığı yöntemle benzer bir yöntem kullanmıştır. (1.8) denkleminin yaklaşık nümerik çözümü için nümerik yenilikler araştırılmıştır [34-36]. Bona ve Schonbek [37], (1.8) denklemi için sınırlı hareketli dalga çözümünün varlık ve tekliğini çalışmışlardır. Tüm bu çalışmalar hareketli dalga çözümünün sınırlı davranışları üzerinde düşünülmüş  $\mu$  birinci mertebeden iken  $\nu \rightarrow 0$ ,  $\nu$  birinci mertebeden iken  $\mu \rightarrow 0$  olarak alınmıştır.

$\varepsilon = 6$  ve  $\nu < 1$  durumunda hareketli dalga çözümünün asimptotik davranışı [23,38]'de çalışılmış ve teoremin uygulamaları tanımlanmıştır. (1.8) denklemi için değişken dönüşümü ve adi diferensiyel denklemler teorisi kullanılarak asimptotik davranışlar ve düzgün analitik çözüm [39] ve [40] tarafından gösterilmiş ve denklemin painleve özelliği olmadığı tanımlanmıştır.

KdV – Burger denklemi için hareketli dalga çözümleriyle ilgili sonuçlar yukarıda bahsedilen yazarlar tarafından elde edilmiştir. Fakat bu yazarlar hareketli dalga çözümünün tam fonksiyonel formunu veya diğer tam çözümlerini bulamamışlardır. 1980'lerin sonuna kadar birçok matematikçi ve fizikçi bağımsız olarak KdV denkleminin tam çözümünü elde etmek için farklı metotlar kullanmışlardır. Xiong [41],  $\varepsilon = 1, \mu = \nu$  olarak tam çözüm elde etmiştir. [43,44] (1.8) denklemi için direkt metot ve seri metodu kullanarak tam çözümü elde etmişlerdir. [25] painleve analizinin kısmi kullanımı yardımıyla benzer sonuçları elde etmiştir. [46] homojenleştirilmiş denge metodu ile (1.8) denkleminin tam çözümünü elde etmiştir ve bu sonuç [47] tarafından tanh fonksiyon metodu kullanılarak doğrulanmıştır. Son çalışmalardan [48] birinci integral metodunu kullanarak tam çözüm elde etmiştir. Aslında literatürde elde edilen tüm sonuçlar birbirine eşdeğerdir. Bu çalışmaların amacı (1.8) denklemi için daha genel tam çözümleri göstermektir.

[49],  $4\mu \leq \nu^2$  olarak dağılma etkisinin yayılma etkisinden daha baskın olduğunu göstermiştir.

## II. BÖLÜM

### 2. RLW Denkleminin Septik B-Spline Kolokeyşin Metodu İle Çözümü:

#### 2.1. Giriş:

Bu bölümde RLW denkleminin Septik B-Spline kolokeyşin metoduyla sayısal çözümleri verilecektir.

#### 2.2. Septik B-Spline Kolokeyşin Metodu:

Bu kısımda,

$$U_t + \varepsilon U U_x - \mu U_{xxt} = 0 \quad (2.1)$$

formunda verilen RLW denkleminin septik B-Spline kolokeyşin metoduyla çözümü verilecektir. Bu denklem için

$$U(x, 0) = f(x) \quad (2.2)$$

başlangıç koşulu olarak verilsin. Burada  $f(x)$  fonksiyonu test problemlerinde tanımlanacaktır.

$a \leq x \leq b$  olmak üzere sınır koşulları

$$\begin{aligned} U(a, t) &= U(b, t) = \frac{1}{\varepsilon} , \\ U_x(a, t) &= U_x(b, t) = 0 , \\ U_{xxx}(a, t) &= U_{xxx}(b, t) = 0 , \end{aligned} \quad (2.3)$$

olarak tanımlansın.

$[a, b]$  aralığını  $x_m$  düğüm noktaları yardımıyla  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  şeklinde eşit uzunluklu alt aralıklara bölelim.  $m = -3, -2, \dots, N+3$  olmak üzere  $\phi_m(x)$  fonksiyonları düğüm noktalarında tanımlı, septik B-Spline fonksiyonlar olsun. (2.1) denklemindeki  $U(x, t)$  analitik fonksiyonlarının yaklaşık çözümlerinin  $U_N(x, t)$  olduğunu varsayalım. Bu yaklaşık çözümler septik B-Spline fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-3}^{N+3} \delta_m(t) \phi_m(x) \quad (2.4)$$

Burada  $\delta_m$  sınır ve kolokeyşin formundan belirlenecek olan zamana bağlı parametreler ve  $\phi_m(x)$ , septik B-Spline fonksiyonlardır.

Septik B-Spline fonksiyonlar ardışık 6 aralığı örttüğünden  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı 6 ardışık B-Spline fonksiyonu tarafından örtülür. Böylece  $U$  yaklaşık çözümleri septik B-Spline fonksiyonları cinsinden,

$$U_m = \sum_{j=m-3}^{m+3} \delta_j \phi_j \quad (2.5)$$

şeklinde yazılabilir.

$U_m$  ve bu fonksiyonun yüksek mertebeden türevleri  $m = 0, 1, \dots, N$  olmak üzere, problem sonlu elemanlar metodu için  $x_m, x_{m+1}$  düğüm noktaları olmak üzere  $[x_m, x_{m+1}]$  aralıklarında tanımlansın.  $u_m, u'_m, u''_m, u'''_m$  değerleri  $\delta_m$  cinsinden aşağıdaki şekildedir;

$$U_m = \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3} ,$$

$$U'_m = \frac{7}{h} (-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) , \quad (2.6)$$

$$U_m^n = \frac{42}{h^2} (\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) ,$$

$$U_m^m = \frac{210}{h^3} (-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) ,$$

olarak yazılabilir.

“ $\circ$ ” zamana bağlı türev ve  $Z_m = U_m$  olmak üzere (2.6) eşitlikleri (2.1) denkleminde yerine yazılırsa  $N+1$  denklemden oluşan,

$$\begin{aligned} & \left( \dot{\delta}_{m-3} + 120\dot{\delta}_{m-2} + 1191\dot{\delta}_{m-1} + 2416\dot{\delta}_m + 1191\dot{\delta}_{m+1} + 120\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3} \right) \\ & + \varepsilon(Z_m) \left( \frac{7}{h} \right) (-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) \\ & - \mu \frac{42}{h^2} (\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir.  $\delta_m$  eleman parametrelerinin iki ardışık zaman aralığı  $n$  ve  $n+1$  değerleri lineer enterpolasyonla;

$$\delta_m = \frac{\delta_m^{n+1} + \delta_m^n}{2} \quad (2.8)$$

ve zamana göre türevleri Cranck-Nicholson formülü yardımıyla,

$$\dot{\delta}_m = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t} \quad (2.9)$$

olarak hesaplanır.

Bu eşitlikler denklem sisteminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta_{m-3}^{n+1} - \delta_{m-3}^n}{\Delta t} + 120 \frac{\delta_{m-2}^{n+1} - \delta_{m-2}^n}{\Delta t} + 1191 \frac{\delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n}{\Delta t} + 2416 \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t} + 1191 \frac{\delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m+1}^n}{\Delta t} \\
& + 120 \frac{\delta_{m+2}^{n+1} - \delta_{m+2}^n}{\Delta t} + \frac{\delta_{m+3}^{n+1} - \delta_{m+3}^n}{\Delta t} + \frac{7\varepsilon Z_m}{h} \left( -\frac{\delta_{m-3}^{n+1} + \delta_{m-3}^n}{2} - 56 \frac{\delta_{m-2}^{n+1} + \delta_{m-2}^n}{2} - 245 \frac{\delta_{m-1}^{n+1} + \delta_{m-1}^n}{2} \right. \\
& + 245 \frac{\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^n}{2} + 56 \frac{\delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+2}^n}{2} + \left. \frac{\delta_{m+3}^{n+1} + \delta_{m+3}^n}{2} \right) - \frac{42\mu}{h^2} \left( \frac{\delta_{m-3}^{n+1} - \delta_{m-3}^n}{\Delta t} + 24 \frac{\delta_{m-2}^{n+1} - \delta_{m-2}^n}{\Delta t} \right. \\
& \left. + 15 \frac{\delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n}{\Delta t} - 80 \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t} + 15 \frac{\delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m+1}^n}{\Delta t} + 24 \frac{\delta_{m+2}^{n+1} - \delta_{m+2}^n}{\Delta t} + \frac{\delta_{m+3}^{n+1} - \delta_{m+3}^n}{\Delta t} \right) = 0
\end{aligned} \tag{2.10}$$

elde edilir. Sistemde gerekli düzenlemeler yapılarak  $N+1$  denklem ve  $N+7$  bilinmeyenden oluşan,

$$\begin{aligned}
& 2h^2(\delta_{m-3}^{n+1} - \delta_{m-3}^n) + 240h^2(\delta_{m-2}^{n+1} - \delta_{m-2}^n) + 2382h^2(\delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n) + 4832h^2(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n) \\
& + 2382h^2(\delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m+1}^n) + 240h^2(\delta_{m+2}^{n+1} - \delta_{m+2}^n) + 2h^2(\delta_{m+3}^{n+1} - \delta_{m+3}^n) + 7\varepsilon Z_m h \Delta t (-\delta_{m-3}^{n+1} \\
& - \delta_{m-3}^n - 56\delta_{m-2}^{n+1} - 56\delta_{m-2}^n - 245\delta_{m-1}^{n+1} - 245\delta_{m-1}^n + 245\delta_{m+1}^{n+1} + 245\delta_{m+1}^n + 56\delta_{m+2}^{n+1} + 56\delta_{m+2}^n \\
& + \delta_{m+3}^{n+1} + \delta_{m+3}^n) - 84\mu(\delta_{m-3}^{n+1} - \delta_{m-3}^n + 24\delta_{m-2}^{n+1} - 24\delta_{m-2}^n + 15\delta_{m-1}^{n+1} - 15\delta_{m-1}^n - 80\delta_m^{n+1} + 80\delta_m^n \\
& + 15\delta_{m+1}^{n+1} - 15\delta_{m+1}^n + 24\delta_{m+2}^{n+1} - 24\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^{n+1} - \delta_{m+3}^n) = 0
\end{aligned} \tag{2.11}$$

denklem sistemi bulunur.

$$\begin{aligned}
& (2h^2 - 7\varepsilon Z_m h \Delta t - 84\mu)\delta_{m-3}^{n+1} + (240h^2 - 392\varepsilon Z_m h \Delta t - 24(84)\mu)\delta_{m-2}^{n+1} \\
& + (2382h^2 - 7(245)\varepsilon Z_m h \Delta t - 15(84)\mu)\delta_{m-1}^{n+1} + (4832h^2 + 80(84)\mu)\delta_m^{n+1} \\
& + (2382h^2 + 245(7)\varepsilon Z_m h \Delta t - 15(84)\mu)\delta_{m+1}^{n+1} + (240h^2 + 56(7)\varepsilon Z_m h \Delta t - 24(84)\mu)\delta_{m+2}^{n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+(2h^2 + 7\varepsilon Z_m h\Delta t - 84\mu)\delta_{m+3}^{n+1} = (2h^2 + 7\varepsilon h\Delta t + 84\mu)\delta_{m-3}^n + (240h^2 + 7(56)\varepsilon Z_m h\Delta t + 24(84)\mu)\delta_{m-2}^n \\
&+(2382h^2 + 7(245)\varepsilon Z_m h\Delta t - 15(84)\mu)\delta_{m-1}^n + (4832h^2 + 80(84)\mu)\delta_m^n \\
&+(2382h^2 - 245(7)\varepsilon Z_m h\Delta t - 15(84)\mu)\delta_{m+1}^n + (240h^2 - 7(56)\varepsilon Z_m h\Delta t - 24(84)\mu)\delta_{m+2}^n \\
&+(2h^2 - 7\varepsilon Z_m h\Delta t - 84\mu)\delta_{m+3}^n \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Notasyonları kısaltırsak;

$$\begin{aligned}
&\beta_{m1}\delta_{m-3}^{n+1} + \beta_{m2}\delta_{m-2}^{n+1} + \beta_{m3}\delta_{m-1}^{n+1} + \beta_{m4}\delta_m^{n+1} + \beta_{m5}\delta_{m+1}^{n+1} + \beta_{m6}\delta_{m+2}^{n+1} + \beta_{m7}\delta_{m+3}^{n+1} = \beta_{m8}\delta_{m-3}^n + \beta_{m9}\delta_{m-2}^n \\
&+\beta_{m10}\delta_{m-1}^n + \beta_{m4}\delta_m^n + \beta_{m11}\delta_{m+1}^n + \beta_{m12}\delta_{m+2}^n + \beta_{m13}\delta_{m+3}^n \tag{2.13}
\end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Burada,

$$\beta_{m1} = 2h^2 - 7\varepsilon Z_m h\Delta t - 84\mu$$

$$\beta_{m2} = 240h^2 - 392\varepsilon Z_m h\Delta t - 24(84)\mu$$

$$\beta_{m3} = 2382h^2 - 7(245)\varepsilon Z_m h\Delta t - 15(84)\mu$$

$$\beta_{m4} = 4832h^2 + 80(84)\mu$$

$$\beta_{m5} = 2382h^2 + 245(7)\varepsilon Z_m h\Delta t - 15(84)\mu$$

$$\beta_{m6} = 240h^2 + 56(7)\varepsilon Z_m h\Delta t - 24(84)\mu$$

$$\beta_{m7} = 2h^2 + 7\varepsilon Z_m h\Delta t - 84\mu$$

$$\beta_{m8} = 2h^2 + 7\varepsilon h\Delta t + 84\mu$$

$$\beta_{m9} = 240h^2 + 7(56)\varepsilon Z_m h\Delta t + 24(84)\mu$$

$$\beta_{m10} = 2382h^2 + 7(245)\varepsilon Z_m h\Delta t - 15(84)\mu$$

$$\beta_{m11} = 2382h^2 - 245(7)\varepsilon Z_m h\Delta t - 15(84)\mu$$

$$\beta_{m12} = 240h^2 - 7(56)\varepsilon Z_m h\Delta t - 24(84)\mu$$

$$\beta_{m13} = 2h^2 - 7\varepsilon Z_m h\Delta t - 84\mu$$

Bu denklem sisteminin çözülebilmesi için 6 bilinmeyenin yok edilerek denklem sayısı ile bilinmeyen sayısının eşitlenmesi gerekir. Bu yüzden  $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3}$  parametreleri sınır koşulları kullanılarak elimine edilecektir. Böylece  $(N+1) \times (N+1)$  boyutlu 7 sütun elemanlı köşegen denklem sistemi elde edilir.

Sınır koşulları eleman parametreleri kullanılarak

$$U(a, t) = U(b, t) = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$U_x(a, t) = U_x(b, t) = 0$$

$$U_{xxx}(a, t) = U_{xxx}(b, t) = 0$$



$m=0$  için,

$$\delta_{-3} + 120\delta_{-2} + 1191\delta_{-1} + 2416\delta_0 + 1191\delta_1 + 120\delta_2 + \delta_3 = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$-\delta_{-3} - 56\delta_{-2} - 245\delta_{-1} + 245\delta_1 + 56\delta_2 + \delta_3 = 0$$

$$-\delta_{-3} - 8\delta_{-2} + 19\delta_{-1} + 8\delta_2 + \delta_3 = 0$$

$m=N$  için,

$$\delta_{N-3} + 120\delta_{N-2} + 1191\delta_{N-1} + 2416\delta_N + 1191\delta_{N+1} + 120\delta_{N+2} + \delta_{N+3} = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$-\delta_{N-3} - 56\delta_{N-2} - 245\delta_{N-1} + 245\delta_{N+1} + 56\delta_{N+2} + \delta_{N+3} = 0$$

$$-\delta_{N-3} - 8\delta_{N-2} + 19\delta_{N-1} + 8\delta_{N+2} + \delta_{N+3} = 0$$

elde edilir. Buradan sınır parametrelerinin değerleri,

$$\begin{cases} \delta_{-3} = -\frac{1}{198}(-156\delta_3 - \frac{21}{\varepsilon} + 5040\delta_2 + 50736\delta_0 + 45101\delta_1) \\ \delta_{-2} = \frac{1}{1296}(24\delta_3 - \frac{12}{\varepsilon} + 4176\delta_2 + 28992\delta_0 + 27767\delta_1) \\ \delta_{-1} = -\frac{1}{1782}(6\delta_3 - \frac{3}{\varepsilon} + 720\delta_2 + 7248\delta_0 + 5288\delta_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta_{N+1} = -\frac{3}{1858}(2\delta_{N-3} + 240\delta_{N-2} + 17886\delta_{N-1} + 2416\delta_N - \frac{1}{\varepsilon}) \\ \delta_{N+2} = \frac{1}{29728}(88528\delta_{N-2} + 601564\delta_{N-1} + 490\delta_{N-3} + 591920\delta_N - \frac{245}{\varepsilon}) \\ \delta_{N+3} = \frac{1}{3716}(3226\delta_{N-3} - 58800\delta_{N-2} - 672168\delta_{N-1} - 591920\delta_N + \frac{245}{\varepsilon}) \end{cases}$$

olarak yazılabilir. Bu değerler (2.13) denklem sisteminde yerine yazıldığında istenilen eliminasyon işlemi yapılmış olur.

$m=0$  için,

$$F_1 = \beta_{m8}\delta_{-3}^n + \beta_{m9}\delta_{-2}^n + \beta_{m10}\delta_{-1}^n + \beta_{m4}\delta_0^n + \beta_{m11}\delta_1^n + \beta_{m12}\delta_2^n + \beta_{m13}\delta_3^n$$

$m=1$  için,

$$F_2 = \beta_{m8}\delta_{-2}^n + \beta_{m9}\delta_{-1}^n + \beta_{m10}\delta_0^n + \beta_{m4}\delta_1^n + \beta_{m11}\delta_2^n + \beta_{m12}\delta_3^n + \beta_{m13}\delta_4^n$$

$m=2$  için,

$$F_3 = \beta_{m8}\delta_{-1}^n + \beta_{m9}\delta_0^n + \beta_{m10}\delta_1^n + \beta_{m4}\delta_2^n + \beta_{m11}\delta_3^n + \beta_{m12}\delta_4^n + \beta_{m13}\delta_5^n$$

$m=N$  için,

$$F_N = \beta_{m8}\delta_{N-3}^n + \beta_{m9}\delta_{N-2}^n + \beta_{m10}\delta_{N-1}^n + \beta_{m4}\delta_N^n + \beta_{m11}\delta_{N+1}^n + \beta_{m12}\delta_{N+2}^n + \beta_{m13}\delta_{N+3}^n$$

$m=N-1$  için,

$$F_{N+1} = \beta_{m8}\delta_{N-4}^n + \beta_{m9}\delta_{N-3}^n + \beta_{m10}\delta_{N-2}^n + \beta_{m4}\delta_{N-1}^n + \beta_{m11}\delta_N^n + \beta_{m12}\delta_{N+1}^n + \beta_{m13}\delta_{N+2}^n$$

$m=N-2$  için,

$$F_{N+2} = \beta_{m8}\delta_{N-5}^n + \beta_{m9}\delta_{N-4}^n + \beta_{m10}\delta_{N-3}^n + \beta_{m4}\delta_{N-2}^n + \beta_{m11}\delta_{N-1}^n + \beta_{m12}\delta_N^n + \beta_{m13}\delta_{N+1}^n$$

$m=0$  için,

$$\begin{aligned} & \beta_{m1}\left(\frac{156}{198}\delta_3^{n+1} - \frac{5040}{198}\delta_2^{n+1} - \frac{50736}{198}\delta_0^{n+1} - \frac{45101}{198}\delta_1^{n+1} + \frac{21}{198\varepsilon}\right) + \beta_{m2}\left(\frac{24}{1296}\delta_3^{n+1} \right. \\ & \left. + \frac{4176}{1296}\delta_2^{n+1} + \frac{28992}{1286}\delta_0^{n+1} + \frac{27767}{1296}\delta_1^{n+1} - \frac{12}{1296\varepsilon}\right) + \beta_{m3}\left(\frac{-6}{1782}\delta_3^{n+1} - \frac{720}{1782}\delta_2^{n+1} \right. \\ & \left. - \frac{7248}{1782}\delta_0^{n+1} - \frac{5288}{1782}\delta_1^{n+1} + \frac{3}{1782\varepsilon}\right) + \beta_{m4}\delta_0^{n+1} + \beta_{m5}\delta_1^{n+1} \end{aligned}$$

$$+ \beta_{m6}\delta_2^{n+1} + \beta_{m7}\delta_3^{n+1} = F_1$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{156}{198}\beta_{m1} + \frac{24}{1296}\beta_{m2} - \frac{6}{1782}\beta_{m10} + \beta_{m7}\right)\delta_3^{n+1} + \left(-\frac{5040}{198}\beta_{m1} + \frac{4176}{1296}\beta_{m2} - \frac{720}{1782}\beta_{m3} \right. \\ & \left. + \beta_{m6}\right)\delta_2^{n+1} + \left(-\frac{45101}{198}\beta_{m1} + \frac{27767}{1296}\beta_{m2} - \frac{5288}{1782}\beta_{m3} + \beta_{m5}\right)\delta_1^{n+1} + \left(-\frac{50736}{198}\beta_{m1} \right. \\ & \left. + \frac{28992}{1296}\beta_{m2} - \frac{7248}{1782}\beta_{m3} + \beta_{m4}\right)\delta_0^{n+1} = F_1 - \frac{21}{198\varepsilon}\beta_{m1} + \frac{12}{1296\varepsilon}\beta_{m2} - \frac{3}{1782\varepsilon}\beta_{m3} \end{aligned}$$

$m=1$  için,

$$\begin{aligned} & \beta_{m1}\delta_{-2}^{n+1} + \beta_{m2}\delta_{-1}^{n+1} + \beta_{m3}\delta_0 + \beta_{m4}\delta_1 + \beta_{m5}\delta_2 + \beta_{m6}\delta_3 + \beta_{m7}\delta_4 = F_2 \\ & \beta_{m1}\left(\frac{24}{1296}\delta_3^m + \frac{4176}{1296}\delta_2 + \frac{28992}{1296}\delta_0 + \frac{27767}{1296}\delta_1 - \frac{12}{1296\varepsilon}\right) \\ & + \beta_{m2}\left(-\frac{6}{1782}\delta_3 - \frac{720}{1782}\delta_2 - \frac{7248}{1782}\delta_0 - \frac{5288}{1782}\delta_1 + \frac{3}{1782\varepsilon}\right) \\ & + \beta_{m3}\delta_0 + \beta_{m4}\delta_1 + \beta_{m5}\delta_2 + \beta_{m6}\delta_3 + \beta_{m7}\delta_4 = F_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \delta_3^{n+1}\left(\frac{24}{1296}\beta_{m1} - \frac{6}{1782}\beta_{m2} + \beta_{m6}\right) + \delta_2^{n+1}\left(\frac{4176}{1296}\beta_{m1} - \frac{720}{1782}\beta_{m2} + \beta_{m5}\right) + \delta_1^{n+1}\left(\frac{27767}{1296}\beta_{m1} \right. \\ & \left. - \frac{5288}{1782}\beta_{m2} + \beta_{m4}\right) + \delta_0^{n+1}\left(\frac{28992}{1296}\beta_{m1} - \frac{7248}{1782}\beta_{m2} + \beta_{m3}\right) + \delta_4^{n+1}\beta_{m7} \\ & = F_2 + \frac{12}{1296\varepsilon}\beta_{m1} - \frac{3}{1782\varepsilon}\beta_{m2} \end{aligned}$$

$m=2$  için,

$$\begin{aligned} & \beta_{m1}\delta_{-1} + \beta_{m2}\delta_0 + \beta_{m3}\delta_1 + \beta_{m4}\delta_2 + \beta_{m5}\delta_3 + \beta_{m6}\delta_4 + \beta_{m7}\delta_5 = F_3 \\ & \beta_{m1}\left(-\frac{6}{1782}\delta_3 - \frac{720}{1782}\delta_2 - \frac{7248}{1782}\delta_0 - \frac{5288}{1782}\delta_1 + \frac{3}{1782\varepsilon}\right) + \beta_{m2}\delta_0 + \beta_{m3}\delta_1 \\ & + \beta_{m4}\delta_2 + \beta_{m5}\delta_3 + \beta_{m6}\delta_4 + \beta_{m7}\delta_5 = F_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \delta_5^{n+1} \beta_{m7} + \delta_4^{n+1} \beta_{m6} + \delta_3^{n+1} \left(-\frac{6}{1782} \beta_{m1} + \beta_{m5}\right) + \delta_2^{n+1} \left(-\frac{720}{1782} \beta_{m1} + \beta_{m4}\right) \\ & + \delta_1^{n+1} \left(-\frac{5288}{1782} \beta_{m1} + \beta_{m3}\right) + \delta_0^{n+1} \left(-\frac{7248}{1782} \beta_{m1} + \beta_{m2}\right) = F_3 - \frac{3}{1782\epsilon} \beta_{m1} \end{aligned}$$

$m=N$  için,

$$\beta_{m1} \delta_{N-3} + \beta_{m2} \delta_{N-2} + \beta_{m3} \delta_{N-1} + \beta_{m4} \delta_N + \beta_{m5} \delta_{N+1} + \beta_{m6} \delta_{N+2} + \beta_{m7} \delta_{N+3} = F_N$$

$$\begin{aligned} & \beta_{m1} \delta_{N-3} + \beta_{m2} \delta_{N-2} + \beta_{m3} \delta_{N-1} + \beta_{m4} \delta_N + \beta_{m5} \left(-\frac{6}{1858} \delta_{N-3} - \frac{240(3)}{1858} \delta_{N-2}\right. \\ & \left. - \frac{1788(3)}{1858} \delta_{N-1} - \frac{2416(3)}{1858} \delta_N + \frac{3}{1858\epsilon}\right) + \beta_{m6} \left(\frac{88528}{29728} \delta_{N-2} + \frac{601564}{29728} \delta_{N-1}\right. \\ & \left. + \frac{490}{29728} \delta_{N-3} + \frac{591920}{29728} \delta_N - \frac{245}{29728\epsilon}\right) + \beta_{m7} \left(\frac{3226}{3716} \delta_{N-3} - \frac{58800}{3716} \delta_{N-2}\right. \\ & \left. - \frac{672168}{3716} \delta_{N-1} - \frac{591920}{3716} \delta_N + \frac{245}{3716\epsilon}\right) = F_N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \delta_{N-3}^{n+1} \left(\frac{490}{29728} \beta_{m6} + \frac{3226}{3716} \beta_{m7} - \frac{6}{1858} \beta_{m5} + \beta_{m1}\right) + \delta_{N-2}^{n+1} \left(\beta_{m2} - \frac{240(3)}{1858} \beta_{m5} + \frac{88528}{29728} \beta_{m6}\right. \\ & \left. - \frac{58800}{3716} \beta_{m7}\right) + \delta_{N-1}^{n+1} \left(\beta_{m3} - \frac{1788(3)}{1858} \beta_{m5} + \frac{601564}{29728} \beta_{m6} - \frac{672168}{3716} \beta_{m7}\right) \\ & + \delta_N^{n+1} \left(\beta_{m4} - \frac{2416(3)}{1858} \beta_{m5} + \frac{591920}{29728} \beta_{m6} - \frac{591920}{3716} \beta_{m7}\right) = F_N - \frac{3}{1858\epsilon} \beta_{m5} \\ & + \frac{245}{29728\epsilon} \beta_{m6} - \frac{245}{3716\epsilon} \beta_{m7} \end{aligned}$$

$m=N-1$  için,

$$\begin{aligned} & \beta_{m1}\delta_{N-4} + \beta_{m2}\delta_{N-3} + \beta_{m3}\delta_{N-2} + \beta_{m4}\delta_{N-1} + \beta_{m5}\delta_N + \beta_{m6}\left(\frac{-3}{1858}(2\delta_{N-3} + 240\delta_{N-2} \right. \\ & \left. + 1788\delta_{N-1} + 2416\delta_N - \frac{1}{\varepsilon})\right) + \beta_{m7}\left(\frac{1}{29728}(88528\delta_{N-2} + 601564\delta_{N-1} + 490\delta_{N-3} + 591920\delta_N - \frac{245}{\varepsilon})\right) \\ & = F_{N+1} \end{aligned}$$

$$\beta_{m7}\left(\frac{1}{29728}(88528\delta_{N-2} + 601564\delta_{N-1} + 490\delta_{N-3} + 591920\delta_N - \frac{245}{\varepsilon})\right) = F_{N+1}$$

$$\beta_{m1}\delta_{N-4} + \delta_{N-3}\left(\beta_{m2} - \frac{6}{1858}\beta_{m6} + \frac{490}{29728}\beta_{m7}\right) + \delta_{N-2}\left(\beta_{m3} - \frac{3(240)}{1858}\beta_{m6} + \frac{88528}{29728}\beta_{m7}\right) +$$

$$\delta_{N-1}\left(\beta_{m4} - \frac{3(1788)}{1858}\beta_{m6} + \frac{601564}{29728}\beta_{m7}\right) + \delta_N\left(\beta_{m5} - \frac{3(2416)}{1858}\beta_{m6} + \frac{591920}{29728}\beta_{m7}\right)$$

$$= F_{N+1} - \frac{3}{1858\varepsilon}\beta_{m6} + \frac{245}{29728\varepsilon}\beta_{m7}$$

$m=N-2$  için,

$$\beta_{m1}\delta_{N-5} + \beta_{m2}\delta_{N-4} + \beta_{m3}\delta_{N-3} + \beta_{m4}\delta_{N-2} + \beta_{m5}\delta_{N-1} + \beta_{m6}\delta_N + \beta_{m7}\delta_{N+1} = F_{N+2}$$

$$\beta_{m1}\delta_{N-5} + \beta_{m2}\delta_{N-4} + \beta_{m3}\delta_{N-3} + \beta_{m4}\delta_{N-2} + \beta_{m5}\delta_{N-1} + \beta_{m6}\delta_N +$$

$$\beta_{m7}\left(-\frac{3}{1858}(2\delta_{N-3} + 240\delta_{N-2} + 1788\delta_{N-1} + 2416\delta_N - \frac{1}{\varepsilon})\right) = F_{N+2}$$



$$a = -\frac{50736}{198}\beta_{m1} + \frac{28992}{1296}\beta_{m2} - \frac{7248}{1782}\beta_{m3} + \beta_{m4}$$

$$b = -\frac{45101}{198}\beta_{m1} + \frac{27767}{1296}\beta_{m2} - \frac{5288}{1782}\beta_{m3} + \beta_{m5}$$

$$c = -\frac{5040}{198}\beta_{m1} + \frac{4176}{1296}\beta_{m2} - \frac{720}{1782}\beta_{m3} + \beta_{m6}$$

$$d = \frac{156}{198}\beta_{m1} + \frac{24}{1296}\beta_{m2} - \frac{6}{1782}\beta_{m10} + \beta_{m7}$$

$$e = \frac{28992}{1296}\beta_{m1} - \frac{7248}{1782}\beta_{m2} + \beta_{m3}$$

$$f = \frac{27767}{1296}\beta_{m1} - \frac{5288}{1782}\beta_{m2} + \beta_{m4}$$

$$g = \frac{4176}{1296}\beta_{m1} - \frac{720}{1782}\beta_{m2} + \beta_{m5}$$

$$h = \frac{24}{1296}\beta_{m1} - \frac{6}{1782}\beta_{m2} + \beta_{m6}$$

$$k = -\frac{7248}{1782}\beta_{m1} + \beta_{m2}$$

$$l = -\frac{5288}{1782}\beta_{m1} + \beta_{m3}$$

$$m = -\frac{720}{1782}\beta_{m1} + \beta_{m4}$$



$$n = -\frac{6}{1782}\beta_{m1} + \beta_{m5}$$

$$u = \beta_{m2} - \frac{6}{1858}\beta_{m6} + \frac{490}{29728}\beta_{m7}$$

$$v = \beta_{m3} - \frac{3(240)}{1858}\beta_{m6} + \frac{88528}{29728}\beta_{m7}$$

$$y = \beta_{m4} - \frac{3(1788)}{1858}\beta_{m6} + \frac{601564}{29728}\beta_{m7}$$

$$z = \beta_{m5} - \frac{3(2416)}{1858}\beta_{m6} + \frac{591920}{29728}\beta_{m7}$$

$$o = \beta_{m3} - \frac{6}{1858}$$

$$p = \beta_{m4} - \frac{3(240)}{1858}\beta_{m7}$$

$$r = \beta_{m5} - \frac{3(1788)}{1858}\beta_{m7}$$

$$s = \beta_{m6} - \frac{3(2416)}{1858}\beta_{m7}$$



a)  $x_j$  noktasındaki  $u(x, 0)$  başlangıç koşulu ile uyumlu olmalı.

b) Yaklaşık başlangıç koşulunun, birinci, ikinci, üçüncü mertebeden türevleri aralığın sonunda başlangıç koşullarıyla uyumlu olmalı.

Bu iki koşul aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$\begin{aligned}
 (U_x)_N(x_0, 0) = u_x(a, 0) = 0, \quad (U_x)_N(x_N, 0) = u_x(b, 0). \\
 (U_{xx})_N(x_0, 0) = u_{xx}(a, 0) = 0, \quad (U_{xx})_N(x_N, 0) = u_{xx}(b, 0) = 0, \\
 (U_{xxx})_N(x_0, 0) = u_{xxx}(a, 0) = 0, \quad (U_{xxx})_N(x_N, 0) = u_{xxx}(b, 0) = 0, \\
 U_N(x_i, 0) = u(x_i, 0), \quad i=0,1,2,\dots,N,
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

$\delta_{-3}^0, \delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \delta_{N+1}^0, \delta_{N+2}^0, \delta_{N+3}^0$  değerlerinin (2.16) sisteminden yok edilmesiyle,

$$A\delta^0 = r \tag{2.17}$$

$$\delta^0 = [\delta_0^0, \delta_1^0, \dots, \delta_N^0]^T$$

$$r = [U(x_0), U(x_1), \dots, U(x_N)]^T$$

elde edilir.

Burada A yedi köşgensel matris olup aşağıdaki gibi gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix}
 1536 & 2712 & 768 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \frac{82731}{81} & \frac{210568.5}{81} & \frac{104796}{81} & \frac{10063.5}{81} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \frac{9600}{81} & \frac{96597}{81} & \frac{195768}{81} & \frac{96474}{81} & 120 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
 & & \dots & & & & \dots & & & \\
 & & \dots & & & & \dots & & & \\
 0 & \dots & 0 & 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 \\
 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 120 & \frac{96474}{81} & \frac{195768}{81} & \frac{96597}{81} & \frac{9600}{81} \\
 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{10063.5}{81} & \frac{104796}{81} & \frac{210568.5}{81} & \frac{82731}{81} \\
 0 & \dots & 0 & 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1
 \end{bmatrix}$$

#### 2.4. Kararlılık Analizi:

Von Neumann kararlılık teorisi uygulandı ve Fourier tarzında geliştirildi.

$$\gamma_j^n = \hat{\varepsilon}^n e^{ikjh} \quad (2.18)$$

Burada, nümerik şemanın lineerleştirilmesi için belirlenecek olan  $k$  mod numarası ve  $h$  eleman boyutudur.

(2.10) denklemi içine (2.18) 'nın yerleştirilmesi ile  $k$  için  $g$  şu şekilde elde edilir;

$$g = \frac{X - iY}{X + iY}, \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} X &= (1 - B_2) \cos(3kh) + (120 - 24B_2) \cos(2kh) \\ &\quad + (1191 - 15B_2) \cos(kh) + 2416 + 80B_2, \\ Y &= B \sin(3kh) + 56B \sin(2kh) + 245B \sin(kh), \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$B = 5040\gamma R_1,$$

Böylece  $|g| = 1$  olur ve koşulsuz kararlı olduğu görülür.

#### 2.5. Test Problemleri:

RLW denkleminin nümerik çözümü için üç test problemi çalışılmıştır. Metodun etkinliğini göstermek için,

$$L_2 = \|u^E - u^N\| = \sqrt{h \sum_{j=1}^N (u_j^E - u_j^N)^2}$$

ve

$$L_\infty = \max_j |u_j^E - u_j^N|$$

İle tanımlanan hata normları kullanılmaktadır. Ayrıca aşağıda belirtilen  $C_1, C_2, C_3$  parametreleri ile de korunum özellikleri test edilmektedir.

$$C_1 = \int_a^b u dx ,$$

$$C_2 = \int_a^b u^2 dx ,$$

$$C_3 = \int_a^b \left[ u^3 - \frac{3\mu(u')^2}{\varepsilon} \right] dx$$

$C_1, C_2, C_3$  değerleri, kütle, enerji ve momentum parametreleridir.

### 2.5.1. Test Problemi I:

$\varepsilon = \mu = 1$  olmak üzere tek dalganın hareketini ele alalım. (1) denkleminin analitik çözümü [4,6] 'da aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$u(x,t) = b + 3c \sec h^2(k[(x - x_0) - (b - c)t]) , \quad (2.21)$$

$$k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{\mu(b+c)}} , \quad (\mu = 1, b \text{ ve } c \text{ sabitlerdir.}) \quad (2.22)$$

[0,80] aralığını  $h = 0.2$  uzunluğundaki aralıklara bölüp  $c = 0.3$ ,  $\mu = 1$ ,  $b = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $x_0 = 40$  aldığımızda  $t = 0$  ile  $t = 5$  zaman aralığındaki çözümleri elde ediyoruz ve  $L_2 - L_\infty$  hata normları Tablo 1 ve Tablo 2'de verildiği gibidir. Hesapladığımız  $C_1, C_2, C_3$  Tablo 3'te verilmiştir.

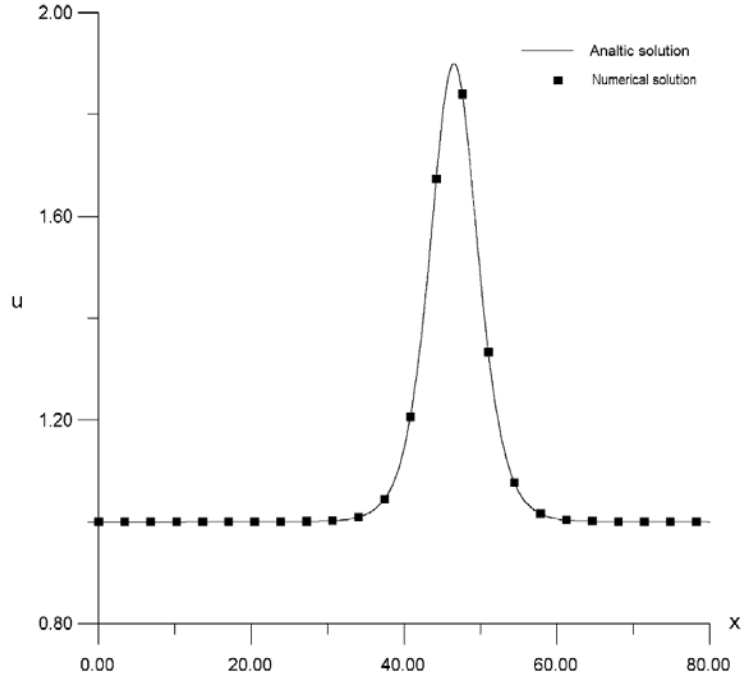
**Tablo 1 ve Tablo 2:** Tek soliton dalga için parametreler.

Zaman	$L_2 \cdot 10^5$	$L_\infty \cdot 10^5$
0.5	0.1289	0.071
1.0	0.3659	0.145
1.5	0.5492	0.221
2.0	0.7329	0.301
2.5	0.9173	0.917
3.0	1.1025	1.102
3.5	1.2888	1.288
4.0	1.4763	1.476
4.5	1.6652	1.665
5.0	1.8563	1.856

**Tablo 3:**

Zaman	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0.5	87.49399	99.69189	119.20854
1.0	87.49398	99.69187	119.20849
1.5	87.49397	99.69185	119.20845
2.0	87.49397	99.69183	119.20840
2.5	87.49396	99.69181	119.20835
3.0	87.49395	99.69179	119.20830
3.5	87.49395	99.69177	119.20826
4.0	87.493943	99.69175	119.20821
4.5	87.49393	99.69173	119.20816
5.0	87.49392	99.69171	119.20811

Şekil 1.  $t = 5$  zamanında nümerik ve analitik çözümler verilmiştir.



### 2.5.2. Test Problemi II:

RLW denklemini  $0 \leq x \leq 80$  bölgesi üzerinde  $\varepsilon = \mu = 1$  ve  $h = 0.2$  olarak çözüm elde etmeye çalışalım.

Başlangıç koşulu olarak,

$$u(x, 0) = 1 + U_1 + U_2 \quad (2.23)$$

alalım.

Burada,

$$U_j = 3A_j \operatorname{sech}^2[k_j(x - x_j - V_j t)] \quad (2.24)$$

ve

$$A_j = \frac{4k_j^2}{1 - 4k_j^2}, \quad V_j = \frac{1}{1 - 4k_j^2} = 1 + A_j, \quad j = 1, 2, \text{ 'dir.} \quad (2.25)$$

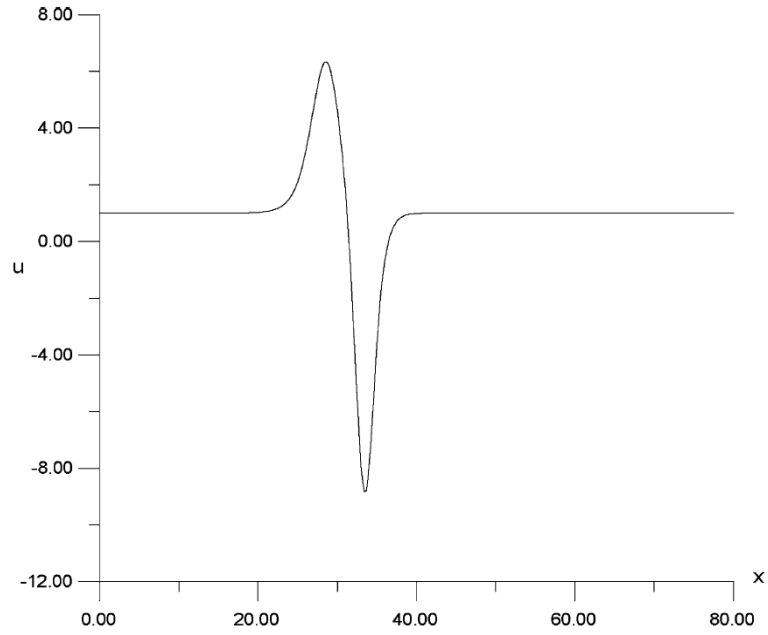
Ayrıca  $k_1 = 0.4$ ,  $k_2 = 0.6$ ,  $\bar{x}_1 = 23$ ,  $\bar{x}_2 = 38$  alınacaktır.

$C_1$ ,  $C_2$  ve  $C_3$  'ün simülasyon boyunca değerleri tablo 4'te gösterilmiştir.  $C_1$  'deki değişim  $1 \times 10^{-2}$  'den,  $C_2$  'deki değişim  $14 \times 10^{-2}$  'den ve  $C_3$  'deki değişim de  $85 \times 10^{-2}$  'den daha azdır.

**Tablo 4:** Pozitif ve negatif dalganın etkileşimi için parametreler.

Zaman	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0.2	73.9404	450.7153	288.9654
0.4	73.9415	450.6997	288.8720
0.6	73.9425	450.6840	288.7787
0.8	73.9436	450.6684	288.6854
1.0	73.9447	450.6527	288.5920
1.2	73.9457	450.6371	288.4984
1.4	73.9468	450.6215	288.4046
1.6	73.9479	450.6059	288.3102
1.8	73.9489	450.5903	288.2148
2.0	73.9500	450.5748	288.1179

**Şekil 2:** Santarelli denemesi.  $t = 2$  anındaki durum





Bu çalışmaya benzer bir başlangıç koşulu seçilerek,

$$u(x, 0) = 1 + U_1 + U_2$$

Burada,

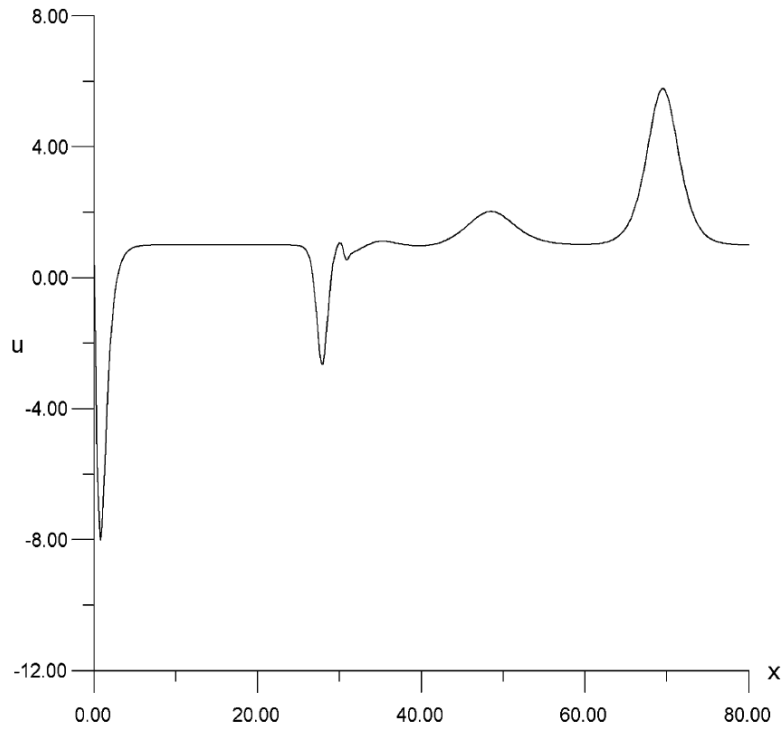
$$U_j = 3A_j \operatorname{sech}^2[k_j(x - x_j - V_j t)]$$

ve

$$A_j = \frac{4k_j^2}{1 - 4k_j^2}, \quad V_j = \frac{1}{1 - 4k_j^2} = 1 + A_j, \quad j = 1, 2,$$

Ve RLW denklemini  $0 \leq x \leq 80$  bölgesi üzerinde  $\mu = 1$ ,  $k_1 = 0.4$ ,  $k_2 = 0.3$ ,  $\bar{x}_1 = 15$ ,  $\bar{x}_2 = 35$ ,  $h = 0.23$  alınarak çözüldü.

**Şekil 3:** Santarelli denemesi.  $t = 20$  anındaki durum.



**Tablo 5:**

Zaman	$C_1$	$C_2$	$C_3$
2.5	157.9124	316.3221	977.6032
5.0	157.9082	316.2878	977.3755
7.5	157.9041	316.2538	977.1508
10.0	157.9003	316.2224	976.9423
12.5	157.8976	316.2004	976.7997
15.0	157.8959	316.1884	976.731
17.5	157.8933	316.1668	976.5908
20.0	157.8895	316.1356	976.3841
22.5	157.8854	316.1018	976.1603
25.0	157.8812	316.0675	975.9335

**2.5.3. Test Problemi III:**

RLW denklemi için bir başka başlangıç değer problemi solitary dalga için de başlangıç Maxwellian itmesinin kullanılmasıdır.

$$u(x, 0) = 1 + \exp(-(x - 7)^2) \quad (2.26)$$

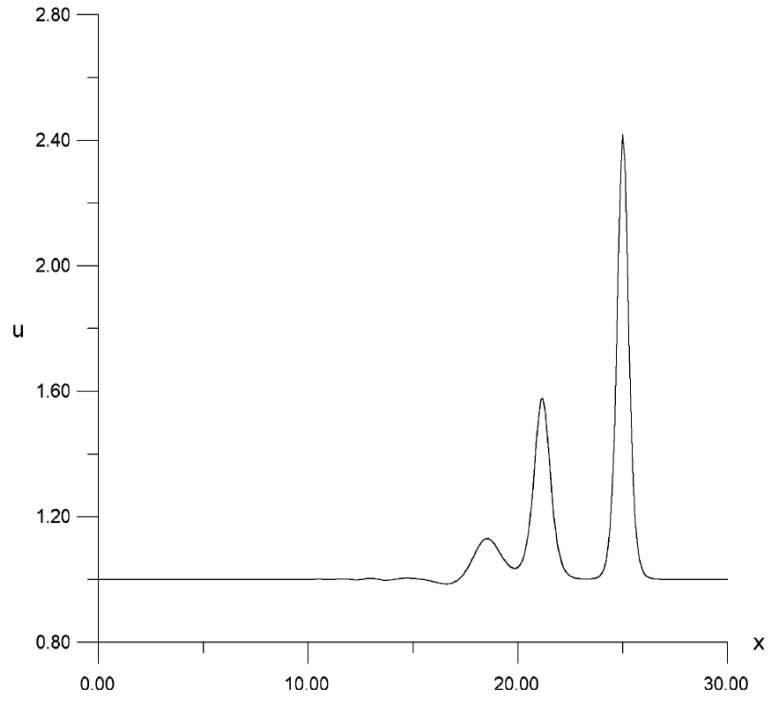
Başlangıç koşulunu kullanalım.

Aşağıdaki durumları inceleyelim;

**(a)** Şekil 4'te gördüğümüz gibi  $t=12$  anında,  $\mu = 0.01$  ve  $\varepsilon = 1$  için Maxwellian titreşimi en az üç tekil dalga oluşturur. Farklı  $t$  zamanlarında elde edilen  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  parametre değerleri Tablo 6' da verilmiştir.

**(b)**  $\mu = 0.04$  'te farklı bir davranış gösterilmiştir.

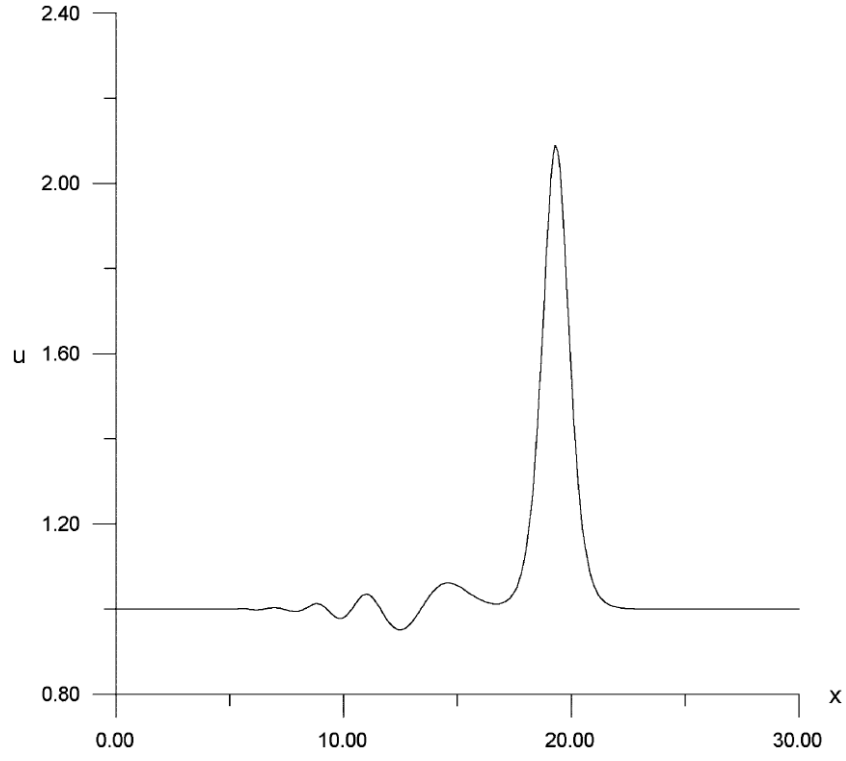
**Şekil 4:** Maxwellian başlangıç koşulu.  $t = 20$  anında



**Tablo 6:**

Zaman	$C_1$	$C_2$	$C_3$
0.9	31.7723	34.8481	40.1000
1.8	31.7722	34.8478	40.0993
2.7	31.7721	34.8475	40.0985
3.6	31.7720	34.8472	40.0977
4.5	31.7719	34.8468	40.0969
5.4	31.7718	34.8465	40.0961
6.3	31.7717	34.8462	40.0953
7.2	31.7716	34.8458	40.0945
8.1	31.7715	34.8455	40.0937
9.0	31.7714	34.8452	40.0928

**Şekil 5:** Maxwellian başlangıç koşulu  $t = 9$  anındaki durum



**Tablo 7:**

Zaman	$C_1$	$C_2$	$C_3$
1.2	31.7723	34.8103	40.0995
2.4	31.7720	34.8093	40.0970
3.6	31.7716	34.8077	40.0925
4.8	31.7710	34.8058	40.0872
6.0	31.7705	34.8038	40.0816
7.2	31.7699	34.8017	40.0758
8.4	31.7693	34.7996	40.0701
9.6	31.7687	34.7976	40.0644
10.8	31.7681	34.7955	40.0586
12.0	31.7675	34.7934	40.0529

## 2.6. Sonuçlar ve neriler:

Bu çalışmada tek solitary dalganın genliği, pozisyonu ve hızı kullanılarak Septik B-Spline yardımıyla Kolokeyşın yöntemi başarıyla uygulanmıştır. İki solitary dalganın etkileşimi pozitif ve negatif dalgaların kaynağını oluşturur. Burada tanımlanan  değişkenin hareketi hesaplamalar boyunca yeterince sabittir. Bu yüzden algoritma yeterince korunumlu olarak tanımlanabilir. Bu algoritma Maxwell başlangıç itmesine sahip RLW solitary dalgasının oluşumunda da kullanılabilir. Bu çalışmanın sonuçlarının önceki çalışmalara göre daha iyi sonuç verdiği görülmüştür.

### III. BÖLÜM

#### 3. Burger Denklemine Septik B-Spline Kolokeyşin Metodu İle Çözümü:

##### 3.1. Giriş:

Bu bölümde Burger denkleminin Septik B-Spline kolokeyşin metoduyla sayısal çözümleri verilmiştir.

##### 3.2. Septik B-Spline Kolokeyşin Metodu:

Bu kısımda

$$U_t + UU_x - VUU_x = 0 \quad , \quad (3.1)$$

formunda verilen Burger denkleminin septik B-Spline kolokeyşin metoduyla çözümü verilecektir. Bu denklem için

$$u(x, 0) = f(x) \quad (3.2)$$

başlangıç koşulu olarak verilsin. Burada  $f(x)$  fonksiyonu test problemlerinde tanımlanacaktır.

$a \leq x \leq b$  olmak üzere sınır koşulları;

$$\begin{aligned} U(a, t) &= \beta_1 \\ U(b, t) &= \beta_2 \\ U_x(a, t) &= U_x(b, t) = 0 \quad , \\ U_{xx}(a, t) &= U_{xx}(b, t) = 0 \\ U_{xxx}(a, t) &= U_{xxx}(b, t) = 0 \quad , \end{aligned} \quad (3.3)$$

olarak tanımlansın. Burada  $\beta_1, \beta_2$  sabitlerdir.

Problem sonlu elemanlar metodu için  $x_m, x_{m+1}$  düğüm noktaları olmak üzere  $[x_m, x_{m+1}]$  aralıklarında tanımlansın.  $u_l, u_l', u_l'', u_l'''$  değerleri  $\delta_m$  cinsinden aşağıdaki şekildedir;

$$u_m = \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3} ,$$

$$u_m' = \frac{7}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) ,$$

(3.4)

$$u_m'' = \frac{42}{h^2}(\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) ,$$

$$u_m''' = \frac{210}{h^3}(-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) ,$$

olarak yazılabilir.

“ $\circ$ ” zamana bağlı türev ve  $Z_m = U_m$  olmak üzere (3.4) eşitlikleri (3.1) denkleminde yerine yazılırsa  $N+1$  denklemden oluşan,

$$\begin{aligned} & \dot{\delta}_{m-3} + 120\dot{\delta}_{m-2} + 1191\dot{\delta}_{m-1} + 2416\dot{\delta}_m + 1191\dot{\delta}_{m+1} + 120\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3} \\ & + Z_m \frac{7}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) - V \frac{42}{h^2}(\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} \\ & + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) = 0 \end{aligned}$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

$\delta_m$  eleman parametrelerinin iki ardışık zaman aralığı  $n$  ve  $n+1$  değerleri lineer enterpolasyonla;

$$\delta_m = \frac{\delta_m^{n+1} + \delta_m^n}{2} \quad (3.5)$$

ve zamana göre türevleri Cranck-Nicholson formülü yardımıyla,

$$\delta_m^{\circ} = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t} \quad (3.6)$$

olarak hesaplanır. Bu eşitlikler denklem sisteminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} & \frac{\delta_{m-3}^{n+1} - \delta_{m-3}^n}{\Delta t} + 120 \frac{\delta_{m-2}^{n+1} - \delta_{m-2}^n}{\Delta t} + 1191 \frac{\delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n}{\Delta t} + 2416 \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t} + 1191 \frac{\delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m+1}^n}{\Delta t} \\ & + 120 \frac{\delta_{m+2}^{n+1} - \delta_{m+2}^n}{\Delta t} + \frac{\delta_{m+3}^{n+1} - \delta_{m+3}^n}{\Delta t} + \frac{7Z_m}{h} \left( -\frac{\delta_{m-3}^{n+1} + \delta_{m-3}^n}{2} - 56 \frac{\delta_{m-2}^{n+1} + \delta_{m-2}^n}{2} - 245 \frac{\delta_{m-1}^{n+1} + \delta_{m-1}^n}{2} \right. \\ & \left. + 245 \frac{\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^n}{2} + 56 \frac{\delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+2}^n}{2} + \frac{\delta_{m+3}^{n+1} + \delta_{m+3}^n}{2} \right) - \frac{42V}{h^2} \left( \frac{\delta_{m-3}^{n+1} + \delta_{m-3}^n}{2} + 24 \frac{\delta_{m-2}^{n+1} + \delta_{m-2}^n}{2} \right. \\ & \left. + 15 \frac{\delta_{m-1}^{n+1} + \delta_{m-1}^n}{2} - 80 \frac{\delta_m^{n+1} + \delta_m^n}{2} + 15 \frac{\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^n}{2} + 24 \frac{\delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+2}^n}{2} + \frac{\delta_{m+3}^{n+1} + \delta_{m+3}^n}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

elde edilir.

Sistemde gerekli düzenlemeler yapılarak  $N+1$  denklem ve  $N+7$  bilinmeyenden oluşan ,

$$\begin{aligned} & 2h^2(\delta_{m-3}^{n+1} - \delta_{m-3}^n) + 240h^2(\delta_{m-2}^{n+1} - \delta_{m-2}^n) + 2382h^2(\delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n) + 4832h^2(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n) \\ & + 2382h^2(\delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m+1}^n) + 240h^2(\delta_{m+2}^{n+1} - \delta_{m+2}^n) + h^2(\delta_{m+3}^{n+1} - \delta_{m+3}^n) + 7(Z_m)h\Delta t(-\delta_{m-3}^{n+1} - \delta_{m-3}^n \\ & - 56\delta_{m-2}^{n+1} - 56\delta_{m-2}^n - 245\delta_{m-1}^{n+1} - 245\delta_{m-1}^n + 245\delta_{m+1}^{n+1} + 245\delta_{m+1}^n + 56\delta_{m+2}^{n+1} + 56\delta_{m+2}^n \\ & + \delta_{m+3}^{n+1} + \delta_{m+3}^n) - 42V\Delta t(\delta_{m-3}^{n+1} + \delta_{m-3}^n + 24\delta_{m-2}^{n+1} + 24\delta_{m-2}^n + 15\delta_{m-1}^{n+1} + 15\delta_{m-1}^n - 80\delta_m^{n+1} \\ & - 80\delta_m^n) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -80\delta_m^n + 15\delta_{m+1}^{n+1} + 15\delta_{m+1}^n + 24\delta_{m+2}^{n+1} + 24\delta_{m+2}^n + \delta_{m+3}^{n+1} + \delta_{m+3}^n) = 0 \\
& (2h^2 - 7Z_m h\Delta t - 42V\Delta t)\delta_{m-3}^{n+1} + (240h^2 - 7(56)Z_m h\Delta t - 42(24)V\Delta t)\delta_{m-2}^{n+1} \\
& + (2382h^2 - 7(245)Z_m h\Delta t - 42(15)V\Delta t)\delta_{m-1}^{n+1} + (4832h^2 + 42(80)V\Delta t)\delta_m^{n+1} \\
& + (2382h^2 + 245(7)Z_m h\Delta t - 42(15)V\Delta t)\delta_{m+1}^{n+1} + (240h^2 + 7(56)Z_m h\Delta t - 42(24)V\Delta t)\delta_{m+2}^{n+1} \\
& + (h^2 + 7Z_m h\Delta t - 42V\Delta t)\delta_{m+3}^{n+1} = (2h^2 + 7Z_m h\Delta t + 42V\Delta t)\delta_{m-3}^n \\
& + (240h^2 + 7(56)Z_m h\Delta t + 42(24)V\Delta t)\delta_{m-2}^n + (2382h^2 + 7(245)Z_m h\Delta t + 42(15)V\Delta t)\delta_{m-1}^n \\
& + (4832h^2 - 80(42)V\Delta t)\delta_m^n + (2382h^2 - 7(245)Z_m h\Delta t + 42(15)V\Delta t)\delta_{m+1}^n \\
& + (240h^2 - 7(56)Z_m h\Delta t + 42(24)V\Delta t)\delta_{m+2}^n + (h^2 - 7Z_m h\Delta t + 42V\Delta t)\delta_{m+3}^n \\
& \beta_{m1}\delta_{m-3}^{n+1} + \beta_{m2}\delta_{m-2}^{n+1} + \beta_{m3}\delta_{m-1}^{n+1} + \beta_{m4}\delta_m^{n+1} + \beta_{m5}\delta_{m+1}^{n+1} + \beta_{m6}\delta_{m+2}^{n+1} + \beta_{m7}\delta_{m+3}^{n+1} \\
& = \beta_{m8}\delta_{m-3}^n + \beta_{m9}\delta_{m-2}^n + \beta_{m10}\delta_{m-1}^n + \beta_{m11}\delta_m^n + \beta_{m12}\delta_{m+1}^n + \beta_{m13}\delta_{m+2}^n + \beta_{m14}\delta_{m+3}^n
\end{aligned} \tag{3.8}$$

denklem sistemi elde edilir.

Bu denklem sisteminin çözülebilmesi için 6 bilinmeyenin yok edilerek denklem sayısı ile bilinmeyen sayısının eşitlenmesi gerekir. Bu yüzden  $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3}$  parametreleri sınır koşulları kullanılarak elimine edilecektir. Böylece  $(N+1) \times (N+1)$  boyutlu 7 sütun elemanlı köşegen denklem sistemi elde edilir.

Burada,

$$\beta_{m1} = 27h^2 - 7Z_m h\Delta t - 42V\Delta t$$

$$\beta_{m2} = 240h^2 + 7(56)Z_m h\Delta t - 42(24)V\Delta t$$

$$\beta_{m3} = 2382h^2 - 7(245)Z_m h\Delta t - 42(15)V\Delta t$$

$$\beta_{m4} = 4832h^2 + 42(80)V\Delta t$$

$$\beta_{m5} = 2382h^2 + 245(7)Z_m h\Delta t - 42(15)V\Delta t$$

$$\beta_{m6} = 240h^2 + 7(56)Z_m h\Delta t - 42(24)V\Delta t$$

$$\beta_{m7} = h^2 + 7Z_m h\Delta t - 42V\Delta t$$

$$\beta_{m8} = 2h^2 + 7Z_m h\Delta t + 42V\Delta t$$

$$\beta_{m9} = 240h^2 + 7(56)Z_m h\Delta t + 42(24)V\Delta t$$

$$\beta_{m10} = 2382h^2 + 7(245)Z_m h\Delta t + 42(15)V\Delta t$$

$$\beta_{m11} = 4832h^2 - 80(42)V\Delta t$$

$$\beta_{m12} = 2382h^2 - 7(245)Z_m h\Delta t + 42(15)V\Delta t$$

$$\beta_{m13} = 240h^2 - 7(56)Z_m h\Delta t + 42(24)V\Delta t$$

$$\beta_{m14} = h^2 - 7Z_m h\Delta t + 42V\Delta t$$

olarak alınmıştır.

Sınır koşulları eleman parametreleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} u(a,t) &= \beta_1, \quad u(b,t) = \beta_2, \\ u_x(a,t) &= u_x(b,t) = 0, \\ u_{xx}(a,t) &= u_{xx}(b,t) = 0, \\ u_{xxx}(a,t) &= u_{xxx}(b,t) = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$U'_m = U_x = \frac{7}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) = 0,$$

$$U''_m = U_{xx} = \frac{42}{h^2}(\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) = 0,$$

$$U'''_m = U_{xxx} = \frac{210}{h^3}(-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) = 0.$$

elde edilir. Buradan sınır parametrelerinin değerleri,

$m=0$  için,

$$-\delta_{-3} - 56\delta_{-2} - 245\delta_{-1} + 245\delta_1 + 56\delta_2 + \delta_3 = 0$$

$$\delta_{-3} + 24\delta_{-2} + 15\delta_{-1} - 80\delta_0 + 15\delta_1 + 24\delta_2 + \delta_3 = 0$$

$$-\delta_{-3} - 8\delta_{-2} + 19\delta_{-1} - 19\delta_1 + 8\delta_2 + \delta_3 = 0$$

$m=N$  için,

$$-\delta_{N-3} - 56\delta_{N-2} - 245\delta_{N-1} + 245\delta_{N+1} + 56\delta_{N+2} + \delta_{N+3} = 0$$

$$\delta_{N-3} + 24\delta_{N-2} + 15\delta_{N-1} - 80\delta_N + 15\delta_{N+1} + 24\delta_{N+2} + \delta_{N+3} = 0$$

$$-\delta_{N-3} - 8\delta_{N-2} + 19\delta_{N-1} - 19\delta_{N+1} + 8\delta_{N+2} + \delta_{N+3} = 0$$

denklem sistemlerinden

$$\delta_{-3} = 56\delta_2 + 35\delta_1 + \frac{10}{3}\delta_3 + \frac{280}{3}\delta_0$$

$$\delta_{-2} = -\frac{35}{9}\delta_2 - \frac{55}{18}\delta_1 - \frac{11}{54}\delta_3 - \frac{220}{27}\delta_0$$

$$\delta_{-1} = \frac{8}{9}\delta_2 + \frac{14}{9}\delta_1 + \frac{1}{27}\delta_3 + \frac{40}{27}\delta_0$$

ve

$$\delta_{N+1} = \frac{1}{27}\delta_{N-3} + \frac{8}{9}\delta_{N-2} + \frac{14}{9}\delta_{N-1} + \frac{40}{27}\delta_N$$

$$\delta_{N+2} = -\frac{35}{9}\delta_{N-2} - \frac{55}{18}\delta_{N-1} - \frac{11}{54}\delta_{N-3} - \frac{220}{27}\delta_N$$

$$\delta_{N+3} = \frac{10}{3}\delta_{N-3} + 56\delta_{N-2} + 35\delta_{N-1} + \frac{280}{3}\delta_N$$

olarak yazılabilir. Bu değerler (3.8) denklem sisteminde yerine yazıldığında istenilen eliminasyon işlemi yapılmış olur.

### 3.3. Başlangıç Durumu:

Birinci  $\delta^0$  durumu belirlenirken ilk koşul olarak  $u(x,0)$ ,

$$U_N(x,0) = \sum_{i=-3}^{N+3} \phi_i(x) \delta_i^0$$

olarak alınır. Bu sayede aşağıdaki formda bir denklem elde ederiz;

$$A\delta^0 = B$$

Burada  $A$  yedigensel matristir. Daha sonra  $\delta^0$  hesaplanır.

(17) denklemini çözmek için yedi köşgensel algoritma kullanılır. Önce  $\{\delta_{-3}^0, \delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \dots, \delta_{N+1}^0, \delta_{N+2}^0, \delta_{N+3}^0\}$  başlangıç durumunu hesaplamak için,

$$U_N(x,0) = \sum_{i=-3}^{N+3} \phi_i(x) \delta_i^0$$

başlangıç koşulunu uygulayalım.

Başlangıç için daha önce verilen iki koşul, aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$\begin{aligned} (U_x)_N(x_0, 0) = u_x(a, 0) = 0, \quad (U_{xx})_N(x_0, 0) = u_{xx}(a, 0) = 0, \\ (U_{xxx})_N(x_0, 0) = u_{xxx}(a, 0) = 0, \quad U_N(x_i, 0) = u(x_i, 0), \quad i=0,1,2,\dots,N \quad (3.10) \\ (U_{xxx})_N(x_N, 0) = u_{xxx}(b, 0) = 0, \quad (U_{xx})_N(x_N, 0) = u_{xx}(b, 0) = 0 \quad (U_x)_N(x_N, 0) = u_x(b, 0). \end{aligned}$$

$\delta_{-3}^0, \delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \delta_{N+1}^0, \delta_{N+2}^0, \delta_{N+3}^0$  'ın (3.10) sisteminden yok edilmesiyle,

$$A\delta^0 = B$$

elde ederiz.

Burada A yedi köşegenel matris olup aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$A = \begin{bmatrix} 1536 & 2712 & 768 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{82731}{81} & \frac{210568.5}{81} & \frac{104796}{81} & \frac{10063.5}{81} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{9600}{81} & \frac{96597}{81} & \frac{195768}{81} & \frac{96474}{81} & 120 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & & & \dots & & & \\ & & \dots & & & & \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 120 & \frac{96474}{81} & \frac{195768}{81} & \frac{96597}{81} & \frac{9600}{81} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{10063.5}{81} & \frac{104796}{81} & \frac{210568.5}{81} & \frac{82731}{81} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 \end{bmatrix}$$

Burada

$$\delta^0 = [\delta_0^0, \delta_1^0, \dots, \delta_N^0]^T$$

$$B = [U(x_0), U(x_1), \dots, U(x_N)]^T$$

şeklindedir.

### 3.4. Kararlılık Analizi:

(3.8) sistemine Von Neumann kararlılık analizini uygulayabilmemiz için öncelikle sistemi lineerleştirmemiz gerekir.

$$Z_{j-2} = (d + 120d + 1191d + 2416d + 1191d + 120d + d) = (5040d)$$

Von Neumann kararlılık analizine göre,

$$w_j^n = \varepsilon^n \exp(qkjh) , \quad q = \sqrt{-1} \quad (3.11)$$

elde edilir.

Burada,  $k$  mod numarası ve  $h$  eleman boyutu, lineerleştirme için belirlenecek olan sayılardır.

(3.8) denklemi  $x = x_j$  için aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\begin{aligned} & a_j w_{j-3}^{n+1} + b_j w_{j-2}^{n+1} + c_j w_{j-1}^{n+1} + d_j w_j^{n+1} + e_j w_{j+1}^{n+1} + f_j w_{j+2}^{n+1} + g_j w_{j+3}^{n+1} \\ & = a'_j w_{j-3}^n + b'_j w_{j-2}^n + c'_j w_{j-1}^n + d'_j w_j^n + e'_j w_{j+1}^n + f'_j w_{j+2}^n + g'_j w_{j+3}^n \end{aligned} \quad (3.12)$$

(3.12) denklemi içinde (3.11)'in yazılmasıyla,

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{n+1} \left\{ a_j \exp((j-3)qkh) + b_j \exp((j-2)qkh) + c_j \exp((j-1)qkh) + d_j \exp(jqkh) \right\} \\ & \left\{ + e_j \exp((j+1)qkh) + f_j \exp((j+2)qkh) + g_j \exp((j+3)qkh) \right\} \\ & = \varepsilon^n \left\{ a'_j \exp((j-3)qkh) + b'_j \exp((j-2)qkh) + c'_j \exp((j-1)qkh) + d'_j \exp(jqkh) \right\} \\ & \left\{ + e'_j \exp((j+1)qkh) + f'_j \exp((j+2)qkh) + g'_j \exp((j+3)qkh) \right\}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, N$$

ve

$$\begin{aligned} a_j &= 1 - mr_1 - r_2 , & a'_j &= 1 + mr_1 + r_2 , \\ b_j &= 120 - 56mr_1 - 24r_2 , & b'_j &= 120 + 56mr_1 + r_2 , \\ c_j &= 1191 - 245mr_1 - 15r_2 , & c'_j &= 1191 + 245mr_1 + 15r_2 , \\ d_j &= 2416 + 80r_2 , & d'_j &= 2416 - 80r_2 , \\ e_j &= 1191 + 245mr_1 - 15r_2 , & e'_j &= 1191 - 245mr_1 + 15r_2 , \\ f_j &= 120 + 56mr_1 - 24r_2 , & f'_j &= 120 - 56mr_1 + 24r_2 , \\ g_j &= 1 + mr_1 - r_2 , & g'_j &= 1 - mr_1 + r_2 \end{aligned}$$

ve  $m = (5040d)$

(3.13) denkleminin her iki tarafının  $\exp(jqkh)$  ile bölünmesiyle,

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{n+1} \left\{ \begin{array}{l} a_j \exp(-3qkh) + b_j \exp(-2qkh) + c_j \exp(-qkh) + d_j \\ + e_j \exp(qkh) + f_j \exp(2qkh) + g_j \exp(3qkh) \end{array} \right\} \\ & = \varepsilon^n \left\{ \begin{array}{l} a'_j \exp(-3qkh) + b'_j \exp(-2qkh) + c'_j \exp(-qkh) + d'_j \\ + e'_j \exp(qkh) + f'_j \exp(2qkh) + g'_j \exp(3qkh) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

denklemini elde ederiz.

(3.14) denklemini daha basit formda,

$$(X_1 + qY)\varepsilon^{n+1} = (X - qY)\varepsilon^n, \quad q = \sqrt{-1} \quad (3.15)$$

şeklinde yazabiliriz.

Burada  $X_1, X, Y$  aşağıdaki şekildedir;

$$X_1 = 2(1 - r_2) \cos(3kh) + 2(120 - 24r_2) \cos(2kh) + 2(1191 - 15r_2) \cos(kh) + 2416 + 80r_2,$$

$$X = 2(1 + r_2) \cos(3kh) + 2(120 + 24r_2) \cos(2kh) + 2(1191 + 15r_2) \cos(kh) + 2416 - 80r_2,$$

$$Y = 2(r \sin(3kh) + 56r \sin(2kh) + 245r \sin(kh))$$

ve burada  $r = mr_1$  'dir.

$k$  için genişletme çarpımı;

$$g = \frac{\varepsilon^{n+1}}{\varepsilon^n}, \quad (3.16)$$



(3.15) ve (3.16)'nın kullanılmasıyla,

$$g = \frac{X - qY}{X_1 + qY}, \quad (3.17)$$

elde edilir.

$X$  ve  $X_1$ ,

$$X_1 = 4 \left[ \cos^2 \left( \frac{3kh}{2} \right) + 120 \cos^2(kh) + 1191 \cos^2 \left( \frac{kh}{2} \right) - 52 \right] \\ - 4r_2 \left[ \cos^2 \left( \frac{3kh}{2} \right) + 24 \cos^2(kh) + 15 \cos^2 \left( \frac{kh}{2} \right) - 40 \right]$$

$$X = 4 \left[ \cos^2 \left( \frac{3kh}{2} \right) + 120 \cos^2(kh) + 1191 \cos^2 \left( \frac{kh}{2} \right) - 52 \right] \\ + 4r_2 \left[ \cos^2 \left( \frac{3kh}{2} \right) + 24 \cos^2(kh) + 15 \cos^2 \left( \frac{kh}{2} \right) - 40 \right]$$

şeklinde yazılabilir.

Unutmayalım ki  $X < X_1$ , bu yüzden de  $|g| = \sqrt{g\bar{g}} = \sqrt{\frac{X^2 + Y^2}{X_1^2 + Y^2}} \leq 1$  olur.

Dolayısıyla Burger denklemi için uyguladığımız yöntem koşulsuz kararlıdır. Uyguladığımız yöntem için aşağıda iki test problemini ele aldık.

### 3.5. Test Problemleri:

Bu bölümde Burger ve düzenlenmiş Burger denklemlerinin nümerik çözümleri için iki standart problem çalışılacaktır. Metodun, her bölüntü noktasında etkinliğini ölçme için  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları kullanılacaktır.

#### 3.5.1. Test Problemi I:

Burger Denklemi'nin [3,4] ile verilen formunun analitik çözümünü düşünelim.

$$u(x,t) = \frac{(x/t)}{1 + (t/t_0)^{1/2} \exp(x^2/4vt)}, \quad t \geq 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t_0 = \exp(1/8v). \quad (3.18)$$

Başlangıç koşulu (3.18) denkleminde  $t=1$  alınarak elde edilir. Bu analitik çözüm bir boyutlu Burger Denklemi'nin shock-like çözümünü gösterir. Sınır koşulları şöyledir;

$$\begin{aligned} u(a,t) = 0 = u(b,t), \quad u_x(a,t) = 0 = u_x(b,t), \\ u_{xx}(a,t) = 0 = u_{xx}(b,t), \quad u_{xxx}(a,t) = 0 = u_{xxx}(b,t). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Elde edilen sonuçlar Tablo 2-4' de özetlenmiştir.

Aşağıdaki tablolardan  $\nu$  viskozite değeri arttıkça hata da artmakta fakat hata kabul edilebilir düzeydedir. Daha sonraki şekiller nümerik çözümün farklı zamanlardaki hareketini gösterir. Şekil 1-3 sırasıyla  $t=1,2,3,4$  farklı zamanlarında,

$$\nu = 0,0015, \quad \Delta t = 0,01, \quad \Delta x = 0,005$$

$$\nu = 0,005, \quad \Delta t = 0,01, \quad \Delta x = 0,02$$

$$\nu = 0,01, \quad \Delta t = 0,01, \quad \Delta x = 0,02$$

değerleri için dalga yayılımını gösterir. Bu şekillerde eğrinin en üst noktası  $t=1$  anında, eğrinin en alt noktası  $t=4$  anındadır. Bu şekiller gösteriyor ki zaman arttıkça nümerik çözüm gecikmektedir.

### 3.5.2. Test Problemi II:

$u_t + u^2 u_x - \nu u_{xx} = 0$  formunda verilen Düzenlenmiş Burger Denklemi'nin çözümü için (3.15) eşitliğinde  $Z_{i-3}$  yerine  $(Z_{i-3})^2$ 'yi kullanırız. Düzenlenmiş Burger Denklemi'nin [4] ile verilen analitik çözümünü düşünelim.

$$u(x,t) = \frac{(x/t)}{1 + (\sqrt{t}/c_0) \exp(x^2/4\nu t)}, \quad t \geq 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.20)$$

Burada  $0 < c_0 \leq 1$ 'dir. Aşağıdaki sınır koşullarını kullanalım;

$$\begin{aligned} u(a,t) = 0 = u(b,t), \quad u_x(a,t) = 0 = u_x(b,t), \\ u_{xx}(a,t) = 0 = u_{xx}(b,t), \quad u_{xxx}(a,t) = 0 = u_{xxx}(b,t). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Bu problem için hesapladığımız  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normu yardımıyla nümerik algoritmanın doğruluğu test edildi. Elde edilen sonuçlar tablo 5-6'da verilmiştir. Tablo 5-6'da görüldüğü gibi  $\nu$ 'nin kullanılan tüm değerleri için hata küçük ve kabul edilebilirdir. Daha sonraki şekiller farklı zamanlar için nümerik çözümün hareketini gösterir. Şekil 4 ve 5 sırasıyla  $t = 1, 4, 7$  ve 10 farklı zamanları için  $\nu = 0,01$ ,  $\Delta t = 0,001$ ,  $\Delta x = 0,05$  ve  $\Delta t = 0,01$ ,  $\Delta x = 0,02$  değerlerinde nümerik çözümün hareketini gösterir. Buna göre eğrinin en üst noktası  $t = 1$  anında ve en alt noktası  $t = 10$  anındadır. Şekiller gösteriyor ki zaman arttıkça nümerik çözüm gecikmektedir.  $\nu$  viskozite parametresi küçüldükçe gecikme hızlanmaktadır.

**Tablo 2:**

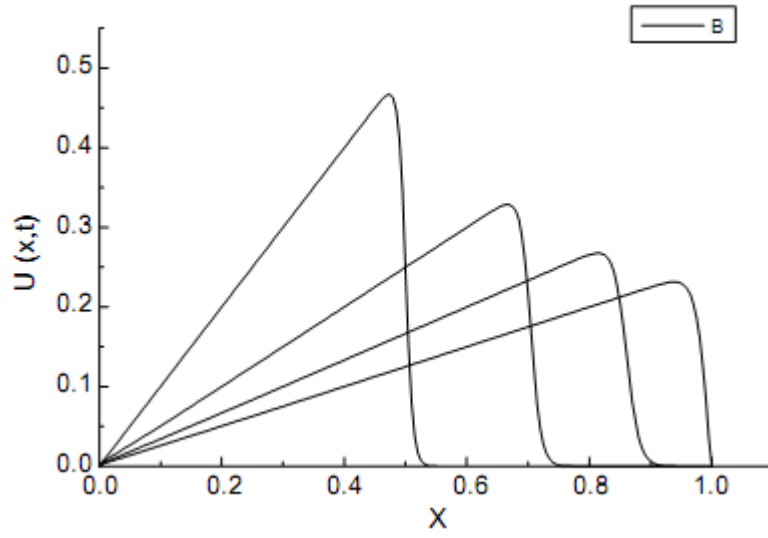
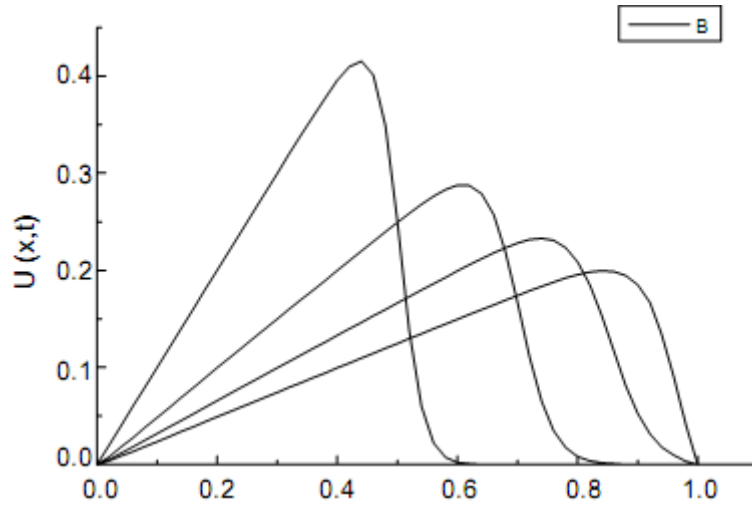
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
1.200	0.3853879498	3.2368476652
1.400	0.4644348073	3.3488926879
1.600	0.4964749406	3.1923238319
1.800	0.5092790346	2.9867895721
2.000	0.5125147492	2.7831501328
2.200	0.5105961277	2.5951212085
2.400	0.5058011505	2.4255446546
2.800	0.4921096936	2.1380460738
3.000	0.4843911639	2.0164737965
3.400	0.4687308313	1.8086943377
3.700	0.6446318395	4.7081914051

**Tablo 3:**

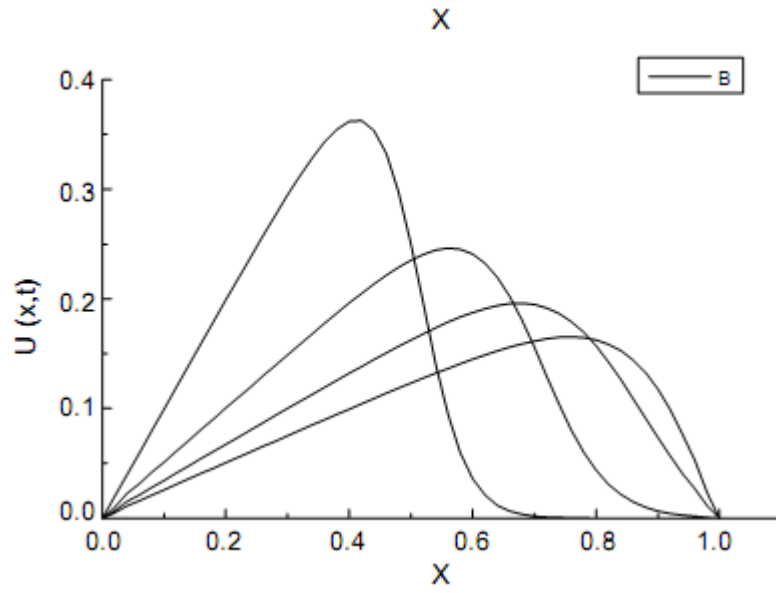
Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
1.200	0.5814317166	3.1354062730
1.400	0.6467617678	2.9313488434
1.600	0.6760951564	2.6922645525
1.800	0.6876183734	2.4718915438
2.000	0.6895350821	2.3766574001
2.200	0.6860166616	2.2731921896
2.400	0.6794328066	2.1678477506
2.800	0.6830796255	1.9689522786
3.000	0.8295132819	2.9572472407
3.200	1.4855981917	7.4914648713

**Tablo 4:**

Zaman	$L_2 \cdot x 10^3$	$L_\infty \cdot x 10^3$
1.100	0.4664874945	2.8683055470
1.300	0.6174613010	3.4716342197
1.500	0.6775295949	3.3547566961
1.700	0.6991010053	3.1347629351
1.900	0.7060875690	2.8880414343
2.100	0.7297668889	2.6698660640
2.300	0.8731171734	2.8076500201
2.600	1.7457004536	8.0679837040

**Şekil 1:****Şekil 2:**

Şekil 3:

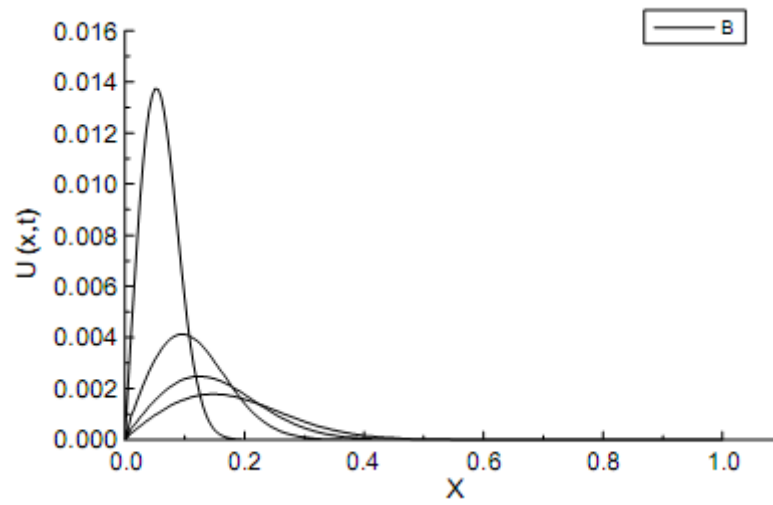
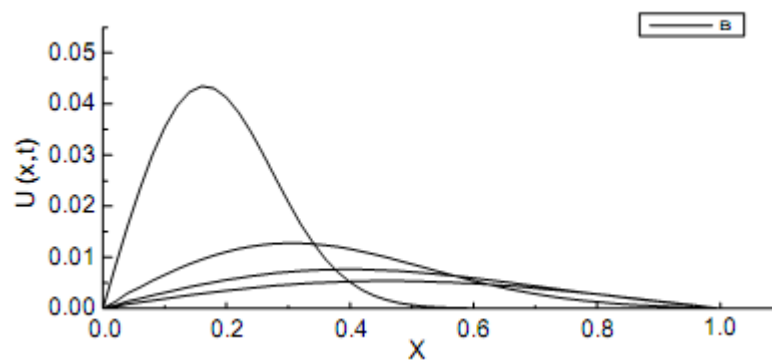


Tablo 5:

Zaman	$L_2 \cdot x10^3$	$L_\infty \cdot x10^3$
2	0.1835491190	0.8185211112
3	0.1441424335	0.5234833346
4	0.1144110783	0.3563537207
5	0.0947865272	0.2549790058
6	0.0814174677	0.2134847835
7	0.0718977717	0.1880048432
8	0.0648368942	0.1682601770
9	0.0594114970	0.1524074966
10	0.0551151456	0.1394312127

**Tablo 6:**

Zaman	$L_2 \cdot x 10^3$	$L_\infty \cdot x 10^3$
2.	0.7904296620	1.7030921188
3.	0.6551928290	1.1832698216
4.	0.5576794264	0.9964523368
5.	0.5105617536	0.8561342445
6.	0.5167229575	0.7610530060
7.	0.5677438614	1.0654548090
8.	0.6427542266	1.3581113635
9.	0.7236430257	1.6048306653
10	0.8002564201	1.8023938553

**Şekil 4:****Şekil 5:**

### 3.6. Sonuç ve Öneriler:

Bu tez Burger ve Düzenlenmiş Burger Denklemi için Septik B-Spline Kolokeyşin yönteminin kullanılmasını önermiştir.

Metodun kararlılık analizi koşulsuz kararlı olduğunu göstermiştir. Viskozite parametresinin küçük değerleri için yaklaşık çözüm ile tam çözüm uyumluluk göstermiştir.



## IV. BÖLÜM

### 4. KdV-Burger Denklemine Septik B-Spline Kolokeyşin Metodu İle Çözümü:

#### 4.1. Giriş:

Bu bölümde KdV-Burger denkleminin Septik B-Spline kolokeyşin metoduyla sayısal çözümleri verilmiştir.

#### 4.2. Septik B-Spline Metodu:

$$u_t + \varepsilon uu_x - \nu u_{xx} + \mu u_{xxx} = 0 \quad (4.1)$$

KdV – Burger denklemini aşağıdaki sınır koşulları ile ele alalım;

$$u(a, t) = \beta_1, \quad u(b, t) = \beta_2, \quad u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0, \quad (4.2)$$

$$u_{xx}(a, t) = u_{xx}(b, t) = 0, \quad u_{xxx}(a, t) = u_{xxx}(b, t) = 0,$$

Ve başlangıç koşulu aşağıdaki şekilde verilsin;

$$u(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (4.3)$$

[a,b] kapalı aralığını  $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{N-1} \leq x_N = b$  olacak şekilde  $x_j$  düğümleri ile  $N+1$  parçaya ayırdığımızı farzedelim.

$$h = x_{j+1} - x_j, \quad j = -3, -2, -1, 0, \dots, N, N+1, N+2, N+3.$$

Burada  $\{\phi_{-3}, \phi_{-2}, \phi_{-1}, \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_N, \phi_{N+1}, \phi_{N+2}, \phi_{N+3}\}$ 'ler  $a \leq x \leq b$  çözüm aralığındaki baz fonksiyonlardır.

(4.1) denkleminin nümerik çözümü için septik B-Spline fonksiyonlar ile kolokeyşin metodunu kullanacağız. Yaklaşık çözüm aşağıdaki şekilde verilsin;

$$U_N(x,t) = \sum_{i=-3}^{N+3} \phi_i(x_j) \delta_i(t) \quad , j=0,1,2,\dots,N \quad (4.4)$$

Burada  $\delta_i(t)$  aşağıdaki sınır koşulları ile belirlenecek olan, zamana bağlı katsayıdır;

$$\begin{aligned} U_N(a,t) &= \beta_1 \quad , \quad U_N(b,t) = \beta_2 \quad , \\ (U_x)_N(a,t) &= (U_x)_N(b,t) = 0 \quad , \\ (U_{xx})_N(a,t) &= (U_{xx})_N(b,t) = 0 \quad , \\ (U_{xxx})_N(a,t) &= (U_{xxx})_N(b,t) = 0 \quad , \end{aligned} \quad (4.5)$$

Burada  $\beta_1, \beta_2$  problemde ihtiyaç duyulan sabitlerdir ve kolokeyşin şartı aşağıdaki gibidir;

$$(U_t)_N(x_j,t) + \varepsilon U_N(x_j,t)(U_x)_N(x_j,t) - \nu(U_{xx})_N(x_j,t) + \mu(U_{xxx})_N(x_j,t) = 0 \quad (4.6)$$

(4.5) denklemini içinde (4.4) denkleminin yazılmasıyla aşağıdaki sistemi elde ederiz;

$$\sum_{i=-3}^{N+3} \phi_i(x_j) \frac{d\delta_i}{dt} + \varepsilon \sum_{i=-3}^{N+3} \phi_i'(x_j) \delta_i(t) \left[ \sum_{i=-3}^{N+3} \phi_i(x_j) \delta_i(t) \right] - \nu \sum_{i=-3}^{N+3} \phi_i''(x_j) \delta_i(t) + \mu \sum_{i=-3}^{N+3} \phi_i'''(x_j) \delta_i(t) = 0 \quad (4.7)$$

Burada  $j=0,1,2,\dots,N$ .

$\delta_i$ 'nin  $n$  ve  $n+1$  zaman aralıklarında interpolate edildiğini varsayalım;

$$\delta_i = (1-\theta)\delta_i^n + \theta\delta_i^{n+1} \quad , \quad (4.8)$$

Burada  $0 \leq \theta \leq 1$ 'dir ve  $\delta_i^n$   $n\Delta t$  zamanında parametrelerdir. Sonlu elemanlar metodu ile;

$$\frac{d\delta_i}{dt} = \frac{\delta_i^{n+1} - \delta_i^n}{\Delta t} \quad , \quad (4.9)$$

Şimdi, (4.8) ve (4.9) denklemlerini (4.7) denklemi içinde yazarak aşağıdaki denklemi elde ederiz;

$$\begin{aligned} & \sum_{i=-3}^{N+3} \phi_i(x_j) \left( \frac{\delta_i^{n+1} - \delta_i^n}{\Delta t} \right) + \varepsilon \sum_{i=-3}^{N+3} \phi_i'(x_j) \{ (1-\theta)\delta_i^{n+1} + \theta\delta_i^n \} \left[ \sum_{i=-3}^{N+3} \phi_k(x_j) \delta_k(t) \right] \\ & - \nu \sum_{i=-3}^{N+3} \phi_i''(x_j) \{ (1-\theta)\delta_i^{n+1} + \theta\delta_i^n \} + \mu \sum_{i=-3}^{N+3} \phi_i'''(x_j) \{ (1-\theta)\delta_i^{n+1} + \theta\delta_i^n \} = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

$\theta = 1/2$  için Cranck – Nicholson formülü ile;

$$\begin{aligned} & \sum_{i=-3}^{N+3} \left\{ \phi_i(x_j) + \frac{\Delta t}{2} \phi_i'(x_j) \left( \sum_{k=-3}^{N+3} \phi_k(x_j) \delta_k \right) - \frac{\nu \Delta t}{2} \phi_i''(x_j) + \frac{\mu \Delta t}{2} \phi_i'''(x_j) \right\} \delta_i^{n+1} \\ & = \sum_{i=-3}^{N+3} \left\{ \phi_i(x_j) - \frac{\Delta t}{2} \phi_i'(x_j) \left( \sum_{k=-3}^{N+3} \phi_k(x_j) \delta_k \right) + \frac{\nu \Delta t}{2} \phi_i''(x_j) - \frac{\mu \Delta t}{2} \phi_i'''(x_j) \right\} \delta_i^n \end{aligned} \quad (4.11)$$

Tablo 1'deki değerler kullanılarak düğüm noktalarındaki değerler hesaplanabilir. Daha genel bir durum elde edebilmek için  $x = x_i$  alalım;

$$\begin{aligned} & a_i \delta_{i-3}^{n+1} + b_i \delta_{i-2}^{n+1} + c_i \delta_{i-1}^{n+1} + d_i \delta_i^{n+1} + e_i \delta_{i+1}^{n+1} + f_i \delta_{i+2}^{n+1} + g_i \delta_{i+3}^{n+1} \\ & = a_i' \delta_{i-3}^n + b_i' \delta_{i-2}^n + c_i' \delta_{i-1}^n + d_i' \delta_i^n + e_i' \delta_{i+1}^n + f_i' \delta_{i+2}^n + g_i' \delta_{i+3}^n \end{aligned} \quad (4.12)$$

( $i=0,1,2,\dots,N$ )

Burada;

$$\begin{aligned}
a_i &= 1 - r_1 Z_{i-3} - r_2 - r_3 & , & \quad a'_i = 1 + r_1 Z_{i-3} + r_2 + r_3 \\
b_i &= 120 - 56r_1 Z_{i-3} - 24r_2 - 8r_3 & , & \quad b'_i = 120 + 56r_1 Z_{i-3} + 24r_2 + 8r_3 \\
c_i &= 1191 - 245r_1 Z_{i-3} - 15r_2 + 19r_3 & , & \quad c'_i = 1191 + 245r_1 Z_{i-3} + 15r_2 - 19r_3 \\
d_i &= 2416 + 80r_2 & , & \quad d'_i = 2416 - 80r_2 \\
e_i &= 1191 + 245r_1 Z_{i-3} - 15r_2 - 19r_3 & , & \quad e'_i = 1191 - 245r_1 Z_{i-3} + 15r_2 + 19r_3 \\
f_i &= 120 + 56r_1 Z_{i-3} - 24r_2 + 8r_3 & , & \quad f'_i = 120 - 56r_1 Z_{i-3} + 24r_2 - 8r_3 \\
g_i &= 1 + r_1 Z_{i-3} - r_2 + r_3 & , & \quad g'_i = 1 - r_1 Z_{i-3} + r_2 - r_3
\end{aligned}
\tag{4.13}$$

$Z_{i-3} = \delta_{i-3} + 120\delta_{i-2} + 1191\delta_{i-1} + 2416\delta_i + 1191\delta_{i+1} + 120\delta_{i+2} + \delta_{i+3}$  ile  $(N+1)$  denklem  $(N+7)$  bilinmeyenli (4.12) denklemindeki  $(\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3})^T$  bilinmeyenler temizlenir. Bu yüzden çözüm için altı ilave koşula ihtiyacımız vardır. (4.5) sınır koşulları kullanılarak  $\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3}$  bilinmeyenleri (4.12) sisteminden elenir. Böylece aşağıdaki matris denklemini elde ederiz;

$$A\delta^{n+1} = B\delta^n + r, \tag{4.14}$$

Burada  $A$  matris,  $\delta^n = [\delta_{-2}^n, \delta_{-1}^n, \delta_0^n, \delta_1^n, \dots, \delta_{N+2}^n]^T$  ve  $B$  septa-diagonal  $(N+1) \times (N+1)$  boyutunda matristir ve  $r$   $(N+1)$  boyutlu kolon vektördür. (4.12) sistemini çözümünde septa-diagonal algoritma kullanılacaktır.

### 4.3. Başlangıç Durumu:

İlk başlangıç koşulunu uygulayalım;

$$U_N(x, 0) = \sum_{i=-3}^{N+3} \phi_i(x) \delta_i^0 \quad (4.15)$$

$\{\delta_{-3}^0, \delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \dots, \delta_{N+1}^0, \delta_{N+2}^0, \delta_{N+3}^0\}$  başlangıç koşulu ile belirlenecektir.

$$(U_N)(x_0, 0) = u_x(a, 0) = 0 \quad , \quad (U_{xx})_N(x_0, 0) = u_{xx}(a, 0) = 0 \quad ,$$

$$(U_{xxx})_N(x_0, 0) = u_{xxx}(a, 0) = 0 \quad , \quad U_N(x_i, 0) = u(x_i, 0) \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$(U_{xxx})_N(x_N, 0) = u_{xxx}(b, 0) = 0 \quad , \quad (U_{xx})_N(x_N, 0) = u_{xx}(b, 0) = 0 \quad ,$$

$$(U_x)_N(x_N, 0) = u_x(b, 0) = 0$$

$\delta_{-3}^0, \delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \delta_{N+1}^0, \delta_{N+2}^0, \delta_{N+3}^0$  bilinmeyenlerinin sistemden elenmesi ile,

$$D\delta^0 = q \quad \text{elde edilir.} \quad (4.16)$$

Burada  $D$  aşağıda görülen septa-diagonal matristir;

$$D = \begin{bmatrix} 1536 & 2712 & 768 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{27,577}{27} & \frac{46,793}{18} & \frac{11,644}{9} & \frac{6709}{54} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{3200}{27} & \frac{10,733}{9} & \frac{21,752}{9} & \frac{32,158}{27} & 120 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & & & & & \dots & \\ & & \dots & & & & & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 120 & \frac{32,158}{27} & \frac{21,752}{9} & \frac{10,733}{9} & \frac{3200}{27} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{6709}{54} & \frac{11,644}{9} & \frac{46,793}{18} & \frac{27,577}{27} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 768 & 2712 & 1536 \end{bmatrix}$$

Böylece  $\delta^0 = [\delta_0^0, \delta_1^0, \delta_2^0, \dots, \delta_N^0]^T$ ,  $q = [u(x_0, 0), u(x_1, 0), \dots, u(x_N, 0)]^T$  formunda verilen  $r$  vektörüdür.

Sistemin çözümünde, septa-diagonal algoritma kullanılır dolayısıyla

$\delta_{-3}^0, \delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \delta_{N+1}^0, \delta_{N+2}^0, \delta_{N+3}^0$  (21) sisteminin ilk ve son üç denkleminde hesaplanır.

Çözümü genelleştirmek için  $x = x_i$  kullanarak aşağıdaki yaklaşık çözümü elde ederiz;

$$U_N(x_i, t) = \delta_{i-3} + 120\delta_{i-2} + 1191\delta_{i-1} + 2416\delta_i + 1191\delta_{i+1} + 120\delta_{i+2} + \delta_{i+3} \quad (4.17)$$

#### 4.4. Kararlılık Analizi:

Sisteme Von Neumann kararlılık analizini uygulayabilmemiz için öncelikle sistemi lineerleştirmemiz gerekir.

$$Z_{j-3} = (m + 120m + 1191m + 2416m + 1191m + 120m + m) + (5040m)$$

Von Neumann kararlılık analizine göre,

$$w_j^n = \varepsilon^n \exp(ikjh) , \quad i = \sqrt{-1} \quad (4.18)$$

elde edilir.

Burada  $k$  mod numarası ve  $h$  eleman boyutu, nümerik çözümün lineerleştirilebilmesi için hesaplanacak olan sayılardır.

$x = x_j$  için;

$$\begin{aligned} & a_j \delta_{j-3}^{n+1} + b_j \delta_{j-2}^{n+1} + c_j \delta_{j-1}^{n+1} + d_j \delta_j^{n+1} + e_j \delta_{j+1}^{n+1} + f_j \delta_{j+2}^{n+1} + g_j \delta_{j+3}^{n+1} \\ & = a'_j \delta_{j-3}^n + b'_j \delta_{j-2}^n + c'_j \delta_{j-1}^n + d'_j \delta_j^n + e'_j \delta_{j+1}^n + f'_j \delta_{j+2}^n + g'_j \delta_{j+3}^n \end{aligned} \quad (4.19)$$

(4.18) denkleminde (4.19)'u yazarsak;

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{n+1} \left\{ a_j \exp((j-3)ikh) + b_j \exp((j-2)ikh) + c_j \exp((j-1)ikh) + d_j \exp(jikh) \right\} \\ & \left\{ + e_j \exp((j+1)ikh) + f_j \exp((j+2)ikh) + g_j \exp((j+3)ikh) \right\} \\ & = \varepsilon^n \left\{ a'_j \exp((j-3)ikh) + b'_j \exp((j-2)ikh) + c'_j \exp((j-1)ikh) + d'_j \exp(jikh) \right\} \\ & \left\{ + e'_j \exp((j+1)ikh) + f'_j \exp((j+2)ikh) + g'_j \exp((j+3)ikh) \right\} \end{aligned} \quad (4.20)$$

elde edilir. Burada  $j = 0, 1, 2, \dots, N$  'dir.

Buradan

$$a_i = 1 - r_1^* - r_2 - r_3 , \quad a'_i = 1 + r_1^* + r_2 + r_3$$

$$b_i = 120 - 56r_1^* - 24r_2 - 8r_3 , \quad b'_i = 120 + 56r_1^* + 24r_2 + 8r_3$$

$$c_i = 1191 - 245r_1^* - 15r_2 + 19r_3 , \quad c'_i = 1191 + 245r_1^* + 15r_2 - 19r_3$$

$$d_i = 2416 + 80r_2, \quad d'_i = 2416 - 80r_2$$

$$e_i = 1191 + 245r_1^* - 15r_2 - 19r_3, \quad e'_i = 1191 - 245r_1^* + 15r_2 + 19r_3$$

$$f_i = 120 + 56r_1^* - 24r_2 + 8r_3, \quad f'_i = 120 - 56r_1^* + 24r_2 - 8r_3$$

$$g_i = 1 + r_1^* - r_2 + r_3, \quad g'_i = 1 - r_1^* + r_2 - r_3$$

ile  $r_1^* = (5040)r_1$  'dir.

(4.19) eşitliğinin her iki tarafının  $\exp(jkh)$  ile bölümüyle;

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}^{n+1} \left\{ \begin{array}{l} a_j \exp(-3ikh) + b_j \exp(-2ikh) + c_j \exp(-ikh) + d_j \\ + e_j \exp(ikh) + f_j \exp(2ikh) + g_j \exp(3ikh) \end{array} \right\} \\ & = \mathcal{E}^n \left\{ \begin{array}{l} a'_j \exp(-3ikh) + b'_j \exp(-2ikh) + c'_j \exp(-ikh) + d'_j \\ + e'_j \exp(ikh) + f'_j \exp(2ikh) + g'_j \exp(3ikh) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (4.21)$$

(4.21) denklemini daha basit bir şekilde;

$$(A_1 + iB)\mathcal{E}^{n+1} = (A - iB)\mathcal{E}^n \quad \text{ve} \quad i = \sqrt{-1} \quad (4.22)$$

şeklindedir. Burada  $A, A_1, B$  aşağıdaki gibidir;

$$A_1 = 2(1 - r_2) \cos(3kh) + 2(120 - 24r_2) \cos(2kh) + 2(1191 - 15r_2) \cos(kh) + 2416 + 80r_2,$$

$$A = 2(1 + r_2) \cos(3kh) + 2(120 + 24r_2) \cos(2kh) + 2(1191 + 15r_2) \cos(kh) + 2416 - 80r_2,$$



$$B = 2((r_1^* + r_3) \sin(3kh) + (56r_1^* + 8r_3) \sin(2kh) + (245r_1^* - 19r_3) \sin(kh))$$

$k$  için genişletme çarpımı;

$$g = \frac{\varepsilon^{n+1}}{\varepsilon^n}, \quad (4.23)$$

(4.22) ve (4.21)' nin kullanılmasıyla;

$$g = \frac{A - iB}{A_1 + iB} \quad (4.24)$$

elde edilir.

$A$  ve  $A_1$ ;

$$A_1 = 4 \left[ \cos^2 \left( \frac{3kh}{2} \right) + 120 \cos^2(kh) + 1191 \cos^2 \left( \frac{kh}{2} \right) - 52 \right] \\ - 4r_2 \left[ \cos^2 \left( \frac{3kh}{2} \right) + 24 \cos^2(kh) + 15 \cos^2 \left( \frac{kh}{2} \right) - 40 \right]$$

$$A = 4 \left[ \cos^2 \left( \frac{3kh}{2} \right) + 120 \cos^2(kh) + 1191 \cos^2 \left( \frac{kh}{2} \right) - 52 \right] \\ + 4r_2 \left[ \cos^2 \left( \frac{3kh}{2} \right) + 24 \cos^2(kh) + 15 \cos^2 \left( \frac{kh}{2} \right) - 40 \right]$$

şeklinde yazılabilir.

Unutmayalım ki  $A < A_1$ , bu yüzden de  $|g| = \sqrt{gg} = \sqrt{\frac{X^2 + Y^2}{X_1^2 + Y^2}} \leq 1$  olur.

Dolayısıyla KdV – Burger denklemi için uyguladığımız yöntem koşulsuz kararlıdır.

#### 4.5. Test Problemleri:

##### 4.5.1. Test Problemi I:

KdV – Burger denkleminin tam çözümü [30,31]'de şu şekilde verilmiştir;

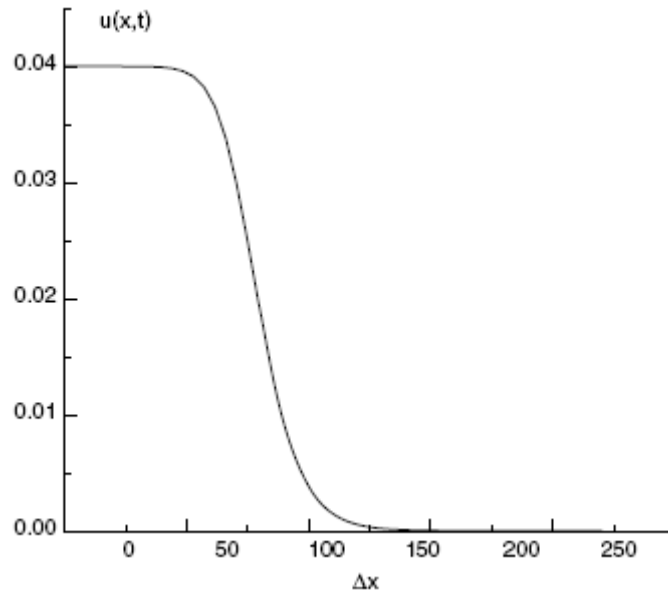
$$u(x,t) = \frac{12v^2}{25\varepsilon\mu} \left( 1 - \frac{\exp\left(\frac{2v}{\varepsilon\mu}(x-wt)\right)}{\left[\exp\left(\frac{v}{\varepsilon\mu}(x-wt)\right) + c\right]^2} \right), \quad w = \frac{6v^2}{25\mu}, \quad (4.25)$$

Burada  $c$  pozitif bir sabit sayı,  $\varepsilon$  lineer olmayan katsayı,  $v$  viskozite katsayısı ve  $\mu$  dağılma katsayısıdır.

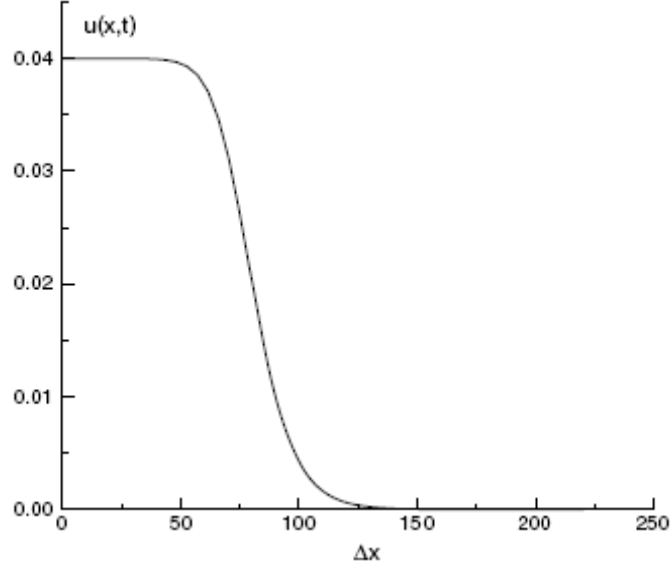
Tam çözüm için başlangıç ve sınır koşullarını  $t=0$  anında,

$u(0,t) = 1$ ,  $u(220,t) = 0$  olarak düşünelim.

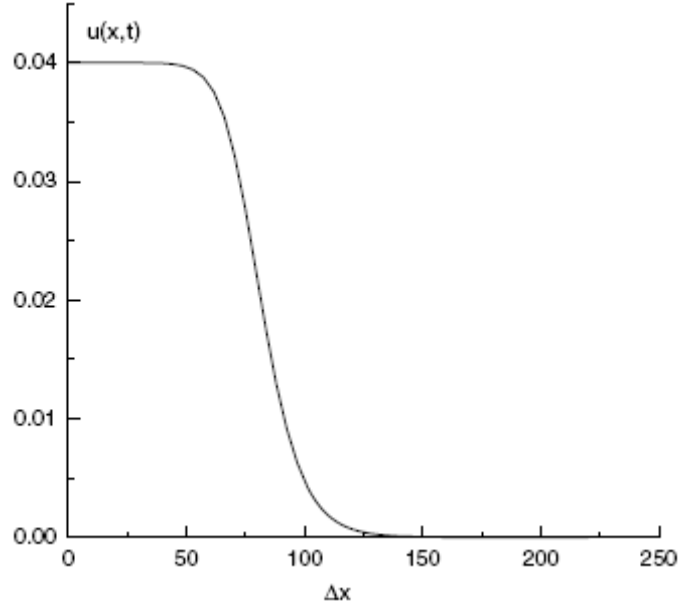
**Şekil 2A :**  $\mu = 2$ ,  $v = 1$ ,  $\varepsilon = 6$ ,  $\Delta x = 4.4$ ,  $\Delta t = 0.02$  ve  $t = 10$  için nümerik çözümün hareketi



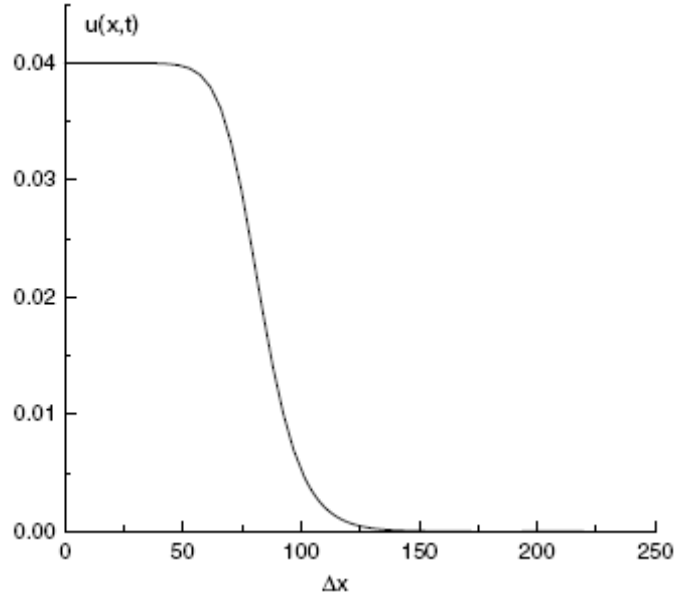
**Şekil 2B:**  $\mu = 1, \nu = 2, \varepsilon = 6, \Delta x = 4.4, \Delta t = 0.02, t = 20$  için nümerik çözümün hareketi



**Şekil 2C:**  $\mu = 1, \nu = 2, \varepsilon = 6, \Delta x = 4.4, \Delta t = 0.02, t = 30$  için nümerik çözümün hareketi



**Şekil 2D:**  $\mu = 1, \nu = 2, \varepsilon = 6, \Delta x = 4.4, \Delta t = 0.02, t = 40$  için nümerik çözümün hareketi



#### 4.6. Sonuç ve Öneriler:

Bu çalışmada KdV-Burger denkleminin Septik B-Spline fonksiyonlar yardımıyla Kolokeyşin yöntemi kullanılarak nümerik çözümü elde edilmiştir. Elde edilen nümerik çözümler ile tam çözümler karşılaştırıldığında özellikle  $\nu$  viskozite parametresinin düşük değerleri için - iyi bir sonuç elde edilmiştir.

### KAYNAKLAR DİZİNİ

- [1] D.H. Peregrine, Calculations of the development of an undular bore, *J. Fluid Mech.* 25 (1966)321–330.
- [2] Kh.O Abdullove, H. Bogalubsky, V.G. Makhankov, One more example of inelastic soliton interaction, *Phys. Lett. A* 56 (1976) 427–428.
- [3] J.C. Eilbek, G.R. McGuire, Numerical study of the regularized long wave equation II. Interaction of solitary wave, *J. Comp. Phys.* 23 (1977) 63–73.
- [4] J.L. Bond, W.G. Pritchard, L.R. Scott, Numerical scheme for a model of nonlinear dispersive waves, *J. Comp. Phys.* 60 (1985) 167–176.
- [5] M.E. Alexander, J.H. Morris, Galerkin method for some model equation for nonlinear dispersive waves, *J. Comp. Phys.* 30 (1979) 428–451.
- [6] L.R.T. Gardner, G.A. Gardner, Solitary waves of the regularized long wave equation, *J. Comp. Phys.* 91 (1990) 441–459.
- [7] L.R.T. Gardner, G.A. Gardner, A. Dogan, A least-squares finite element scheme for the RLW equation, *Commun. Numer. Meth. Eng.* 12 (1996) 795–804.
- [8] A.A. Soliman, K.R. Raslan, Collocation method using quadratic B-spline for the RLW equation, *Int. J. Comput. Math.*, in press.
- [9] A.R. Santarelli, Numerical analysis of the regularized long wave equation, *Nuovo Cimento B* 46 (1978) 179–188.
- [10] J.C. Lewis, J.A. Tjon, Resonant production of solution in the RLW equation, *Phys. Lett. A* 73 (1979) 275–279.
- [11] Bateman H. Some recent researches on the motion of fluids. *Monthly Weather Rev* 1915;43:163–70.
- [12] Burger JM. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. In: *Advances in Applied Mechanics I*. New York: Academic Press; 1948. p. 171–99.
- [13] Dag I, Irk D, Saka B. Numerical solution of the Burgers\_ equation using cubic B-splines. *Appl Math Comput*, in press.
- [14] Danaf TE. Efficient and Accurate Numerical Methods for the Burgers\_ and related Partial Differential Equations. Ph.D., Thesis, Menoufia University, 1998.
- [15] El-Danaf TS. Numerical solution of the Korteweg–Vries Burgers equation by quintic spline method. *Studia Univ. Babeş—Bolyai Mathematica* 2002;XLVII(2):41–55.
- [16] Gandarias ML. Nonclassical potential symmetries of the Burgers equation. *Symmetry Nonlinear Math Phys* 1997;1:130–7.

### KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

- [17] Harris SL. Sonic shocks governed by the modified Burgers\_ equation. *EJAM* 1996;6:75–107.
- [18] Krstic M. On global stabilization of Burgers equation by boundary control. *Syst Control Lett* 1999;37:123–41.
- [19] Ly HV, Mease KD, Titi ES. Distributed and boundary control of the viscous Burgers equation. *Numer Funct Anal Opt* 1997;18:143–88.
- [20] Weijiu L. A asymptotic behavior of solutions of time-delayed Burgers equation. *Discrete Contin Dyn Syst Ser B* 2002;2(1):47–56. Şubat.
- [21] Johnson RS. A nonlinear equation incorporating damping and dispersion. *J Fluid Mech* 1970;42:49–60.
- [22] Van Wijngaarden L. On the motion of gas bubbles in a perfect fluid. *Ann Rev Fluid Mech* 1972;4:369–73.
- [23] Gao G. A theory of interaction between dissipation and dispersion of turbulence. *Sci Sinica (Ser A)* 1985;28:616–27.
- [24] Liu SD, Liu SK. KdV–Burger’s equation modeling of turbulence. *Sci Sinica (Ser A)* 1992;35:576–86.
- [25] Grua H, Hu PW. Unified shock profile in plasma. *Phys Fluids* 1967;10:2596–602.
- [26] Whitham GB. *Linear and nonlinear waves*. New York: Springer; 1974.
- [27] Toda M. Waves in nonlinear lattice. *Progr Theor Phys* 1970(Suppl. 45):174–200.
- [28] Kruskal MD. *The Korteweg-de Vries equation and related evolution equations*. Providence, RI: American Mathematical Society; 1974.
- [29] Ablowitz MJ, Segur H. *Solitons and the inverse scattering transform*. Philadelphia: SIAM; 1981.
- [30] Love MD. Subgrid modeling studies with Burger’s equation. *J Fluid Mech* 1980;100:87–110.
- [31] Hirota R. Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons. *Phys Rev Lett* 1971;27:1192–4.
- [32] Medina E, Hwa T, Kardar M, Zhang YC. Burger’s equation with correlated noise: renormalization-group analysis and applications to directed polymers and interface growth. *Phys Rev A* 1989;39:3053–75.
- [33] Jeffrey A. Some aspects of the mathematical modeling of long nonlinear waves. *Arch Mech* 1979;31:559–74.
- [34] Canosa J, Gazdag J. The Korteweg-de Vries–Burger’s equation. *J Comput Phys* 1977;23:393–403.

### KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

- [35] Dauletiyarov KZ. Investigation of the difference method for the Bona–Smith and Burger’s–Korteweg–de Vries equations. *Zh Vychisl Mat i Mat Fiz* 1984;24:402 (in Russian).
- [36] Turetaev ID. Investigation of projection-difference schemes for the Bona–Smith and the Burgers–Korteweg–de Vries equations. *Comput Math Math Phys* 1991;31:69–74.
- [37] Bona JL, Schonbek ME. Traveling wave solutions to Korteweg–de Vries–Burgers equation. *Proc R Soc Edin A* 1985;101:207–26.
- [38] Guan KY, Gao G. The qualitative theory of the mixed Korteweg–de Vries–Burger’s equation. *Sci Sinica (Ser A)* 1987;30:64–73.
- [39] Shu JJ. The proper analytical solution of the Korteweg–de Vries equation. *J Phys A (Math Gen)* 1987;20:L49–56.
- [40] Gibbon JD, Radmore P, Tabor M, Wood D. The Painleve and Hirota’s method. *Stud Appl Math* 1985;72:39–63.
- [41] Xiong SL. An analytic solution of Burgers–KdV equation. *Chin Sci Bull* 1989;34:1158–62.
- [42] Liu SD, Liu SK, Ye QX. Explicit traveling wave solutions of nonlinear evolution equations. *Math Pract Theory* 1998;28:289–301.
- [43] Jeffrey A, Mohamad MNB. Exact solutions to the KdV–Burger’s equation. *Wave Motion* 1991;14:369–75.
- [44] Jeffrey A, Xu S. Exact solutions to the Korteweg–de Vries–Burger’s equation. *Wave Motion* 1989;11:559–64.
- [45] Halford WD, Vlieg-Hulstman M. The Korteweg–de Vries–Burger’s equation: a reconstruction of exact solutions. *Wave Motion* 1991;14:267–71.
- [46] Wang M. Exact solutions for a compound KdV–Burger’s equation. *Phys Lett A* 1996;213:279–87.
- [47] Parkes EJ, Duffy BR. Travelling solitary wave solutions to a compound KdV–Burger’s equation. *Phys Lett A* 1997;229:217–20.
- [48] Feng Z. The first-integral method to the Burgers–Korteweg–de Vries equation. *J Phys A (Math Gen)* 2002;35:343–9.
- [49] Grad H, Hu PN. Collisional theory of shock and nonlinear waves in plasma. *J Phys Fluids* 1973;15:845–64.
- [50] Ma Wen-xin. An exact solution to two-dimensional Korteweg–de Vries Burger’s equation. *J Phys A Math Gen* 1993;26:L17–20.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (Devamı)**

- [51] Li Biao, Chen Y, Zhang H. Explicit exact solutions for compound KdV-type and compound KdV–Burger’s-type equations with nonlinear terms of any order. *Chaos, Solitons and Fractals* 2003;15:647–54.
- [52] Withman GB. *Linear and nonlinear waves*, 2. New York: John Wiley; 1974. p. 1555–65.
- [53] Wadati M, Toda M. The exact n-soliton solution of the Korteweg-de Vries equation. *J Phys Soc Jpn* 1972;32:1403–11.
- [54] El-Danaf TS. Numerical solution of the KdV–Burger’s equation by quintic spline method. *Studia Univ, Babes-Bolyai, Mathematica* 2002;XLVII(2).
- [55] Dag Idris, Bu“ lent Saka, Boz Ahmet. B-spline Galerkin methods for numerical solutions of the Burger’s equation. *J Appl Math Comput* 2004.
- [56] Dağ Idris, Irk Dursun, Saka B“ lent. A numerical solution of the Burger’s equation using cubic B-splines. *J Appl Math Comput* 2004.
- [57] Prenter PM. *Splines and variational methods*. New York: Wiley; 1975.
- [58] Zaki SI. A quintic B-Spline finite elements scheme for the KdVB equation. *Comput Meth Appl Eng* 2000;188:121–34.