

KUİNTİK B-SPLİNE FONKSİYONLAR YARDIMIYLA
BAZI LİNEER OLMAYAN DENKLEMLERİN
SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Oğuz ÇAKI

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Ocak - 2013

KUİNTİK B-SPLİNE FONKSİYONLAR YARDIMIYLA BAZI LİNEER OLMAYAN
DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Oğuz ÇAKI

Dumlupınar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliği Uyarınca
Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ahmet BOZ

Ocak – 2013

KABUL VE ONAY SAYFASI

Oğuz ÇAKI'nın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “Kuintik B-Spline Fonksiyonlar Yardımıyla Bazı Lineer Olmayan Denklemlerin Sayısal Çözümleri” başlıklı çalışma, jürimizce Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

31/01/2013


Üye : Yrd. Doç. Dr. Ahmet BOZ



Üye : Yrd. Doç. Dr. A.Serdar NAZLIPINAR



Üye : Yrd. Doç. Dr. Hasan BİRCAN



Fen Bilimleri Enstitüsün Yönetim Kurulu'nun/...../2013 gün ve
sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hasan GÖÇMEZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

KUİNTİK B-SPLİNE FONKSİYONLAR YARDIMIYLA BAZI LİNEER OLMAYAN DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Oğuz ÇAKI

Matematik, Yüksek Lisans Tezi, 2013

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ahmet BOZ

ÖZET

Bu çalışma Kuintik B-Spline Fonksiyonlar yardımıyla, Kolokeyşin Yöntemleri kullanılarak bazı lineer olmayan denklemlerin sayısal çözümleri incelenmiştir. Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde Spline fonksiyonlar, B-Spline fonksiyonlar, Kuintik B-Spline fonksiyonlar tanıtılmış ve ayrıca tez boyunca ele aldığımız Klein-Gordon, RLW ve Burger Denklemlerinin tanımları yapılmıştır.

İkinci bölümde lineer olmayan Klein-Gordon Denklemi için Kuintik B-Spline Kolokeyşin fonksiyonlar yardımıyla nümerik çözümü aranmış ve elde edilen veriler çizelge halinde incelenerek kararlılık analizi incelenmiştir.

Üçüncü bölümde lineer olmayan RLW Denklemi Kuintik B-Spline Kolokeyşin fonksiyonlar yardımıyla çözümü incelenmiş, RLW zaman ayrıştırması, RLW konum ayrıştırması anlatılmış ve nümerik çözümü aranarak elde edilen veriler çizelge halinde incelenerek kararlılık analizi incelenmiştir.

Son bölümde de Kuintik B-Spline Kolokeyşin yöntemi Burger Denklemine uygulanmış, elde edilen sonuçlar çizelge ile gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Burger Denklemi, Klein-Gordon Denklemi, Kuintik B-Spline Fonksiyonlar, RLW Denklemi, ,

SOME NONLINEAR EQUATION'S NUMERIC SOLUTIONS WITH THE HELP OF QUINTIC B-SPLINE FUNCTIONS

Oğuz ÇAKI

Mathematics, M.S. Thesis, 2013

Thesis Advisor: Asist. Prof. Dr. Ahmet BOZ

SUMMARY

In this work, some non linear equation's numeric solutions were analysed with the help of Quintic B-spline functions by using collocation. This thesis consists of four section:

In first section, Spline functions, B- Spline functions, Quintic B-Spline functions were introduced. And at the same time definitions of Klein- Gordon, RLW, Burger's equations that were done.

In second section, with the help of Quintic B-spline collocation numeric solutions were searched for the non linear Klein-Gordon equation, and by analysing datum in the form of chart, stability analyse was examined.

In third section, non linear RLW equations were examined with the help of Quintic B-spline collocation functions, RLW time degradation and RLW position degradation were told and obtained datum which was searched with numeric solutions, stability analyse were examined in the form of chart.

At the last section, Quintic B-Spline collocation method was applied Burger equation and results which were gained, was showed with charts.

Keywords: Burger Equation, Klein-Gordon Equation, RLW Equation, Quintic B-spline Functions

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimin boyunca ve bu tezi hazırlama sürecinde, en yoğun olduğu dönemlerde bile, her türlü desteğini esirgemeyen, bana danışmanlık ederek beni yönlendiren, danışman hocalığımın dışında bana bir arkadaş gibi davranan değerli danışman hocam; Yrd. Doç. Dr. Ahmet BOZ' a bugünlere gelmemde büyük emeği olan aileme, bu zorlu sürecin her anında manevi desteğini benden esirgemeyen sevgili eşim Zehra'ya sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET	iv
SUMMARY.....	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
1.1. Spline Fonksiyonlar.....	1
1.2. B-Spline Fonksiyonlar.....	2
1.3. Kuintik B-Spline Fonksiyonlar	3
1.4. Klein – Gordan (KG) Denklemi.....	5
1.5. Regularised Long Wave (RLW) Denklemi	5
1.6. Burger Denklemi	7
2. KLEİN – GORDON DENKLEMİNİN KUİNTİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ.....	8
2.1. Giriş.....	8
2.2. Kuintik B-Spline Kolokeyşin Metodunun Uygulanması.....	8
2.3. Başlangıç Durumu	14
2.4. Nümerik Çözüm	16
2.5. Sonuç	17
3. RLW DENKLEMİNİN KUİNTİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ .	18
3.1. Giriş.....	18
3.2. Metodun Uygulanması	18
3.3. RLW Zaman Ayırıştırması	21
3.4. RLW Konum Ayırıştırması	23
3.5. Başlangıç Durumu	26
3.6. Nümerik Çözümler	26
3.7. Sonuç	28

İÇİNDEKİLER DİZİNİ (devamı)

	<u>Sayfa</u>
4. BURGER DENKLEMİNİN KUINTİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ.....	29
4.1. Giriş.....	29
4.2. Metodun Uygulanması	29
4.3. Başlangıç Durumu	32
4.4. Nümerik Çözümler	33
4.5. Sonuç	34
5. SONUÇ	35
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	36

1. GİRİŞ

Bu bölümde tezde kullanılacak temel kavramlar ele alınacaktır. Sırasıyla Spline fonksiyonların tanımı ve bazı önemli özellikleri, B-Spline fonksiyonların tanımı, Kuintik B-Spline fonksiyonlar ve son olarak başlangıç ve sınır koşulları ile birlikte Klein Gordan, RLW ve Burger denklemleri tanıtılacaktır.

1.1. Spline Fonksiyonlar

Yüksek dereceden polinomlarla interpolasyon sürecinde işlemlerin artışı sonucu gerçek anlamda kararsız algoritmalarla karşılaşılır. Yani birçok durumda bölünme noktalarının sayısının artması, yakınsamanın artması yerine ıraksaması anlamına gelebilir. Ayrıca istenilen fonksiyonlar $[a, b]$ aralığının değişik kısımlarında değişik özelliklere sahip ise (örneğin, bölgenin bir kısmında hızlı diğer kısmında yavaş değişiyorsa) fonksiyona tek bir eğri ile yaklaşmak uygun sonuçlara götürmeyebilir. Bu amaç için kullanılan Newton ve Lagrange İnterpolasyonlarının derecesi nokta sayısı arttıkça artacağından, bu tür polinomlarda yapılacak işlemler zorlaşır. Bu gibi durumlarda art arda gelen iki veri arasında birinci, ikinci yada üçüncü dereceden fonksiyonlarla yaklaşımın yapıldığı spline interpolasyon yöntemi önerilmektedir. Spline interpolasyonu, tanımlanan aralık üzerinde ve sonlu noktalarda, birbirini örtmeyen alt aralıklarda, daha küçük dereceden polinom bulma esasına dayanır (Davies, 1980).

Reel sayıların monoton artan bir dizisi olan x^1, x^2, \dots, x^n değişkenlerine bağlı m . dereceden $s(x)$ spline fonksiyonu aşağıdaki iki özelliğe sahip ve reel eksen üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun.

a. $s(x)$, $j=1, \dots, n-1$ olmak üzere her $[x^j, x^{j+1}]$ aralığında m . yada daha küçük dereceden bir polinomdur. (Burada $x^0 = -\infty$ ve $x^{n+1} = \infty$ olabilir.)

b. $s(x)$ kendisinin $1, 2, \dots, (m-1)$ inci basamaktan türevleri tanımlanan her aralıkta ve x^i ($i=1, 2, \dots, n$) bölünme noktalarında süreklidir.

Yukarıdaki tanıma göre parçalı polinom fonksiyonlar, süreklilik ve türevlerinin belirli koşulları sağlaması durumunda bir spline fonksiyonu oluşturur.

Spline fonksiyonlar aşağıdaki özelliklere sahiptir;

1. Spline fonksiyonlar, uygun tabanlara sahip sonlu boyutlu lineer uzaylardır.
2. Spline fonksiyonlar, düzgün fonksiyonlardır.
3. Spline fonksiyonlar, elde yada bilgisayarda yapılan hesaplamalarda kolaylık sağlarlar.
4. Spline fonksiyonların türevleri yada integralleri de yine bir spline fonksiyondur.
5. Yaklaşım teorilerinde spline fonksiyonların kullanılması ile doğal matrisler ortaya çıkar ve bu matrisler uygun determinant özelliklerine sahiptir.
6. Alt aralıklara ayrılmış $[a,b]$ aralığı üzerinde her sürekli fonksiyona k -ıncı dereceden spline fonksiyonlar ile iyi yaklaşımlar elde edilebilir.
7. Spline fonksiyonlar kullanılarak sadece fonksiyona değil aynı zamanda bu fonksiyonun türevlerine de iyi yaklaşımlar yapılabilir.

1.2. B-Spline Fonksiyonlar

Günümüz dünyasında yaşanan büyük gelişmelerden sonra, bilgisayar çizimlerinde eğrileri tanımlayabilmek için çok yönlü yaklaşımlar sunan B-Spline fonksiyonlar, geometrik modelleme, bilgisayar çizimleri ve daha başka birçok alanda önemli bir konuma gelmiştir.

Çok sayıdaki veri noktalarına bir tek eğri ile yaklaşmak büyük kolaylık sağlasa da bazı hallerde bu durum büyük hatalara neden olabilir. Ayrıca bu amaçla kullanılan Newton ve Lagrange Enterpolasyon polinomlarının derecesi nokta sayısı arttıkça artacağından, bu tür polinomlarla yapılacak işlemler zorlaşır. Bu durumda, düğüm olarak adlandırılan noktalarda birbirlerine bağlı, polinom eğri parçalarından oluşan B-Spline fonksiyonlar yardımıyla yapılan yaklaşımlar bir alternatif olarak karşımıza çıkar.

B-spline fonksiyonlarla diferensiyel problemlerine yapılan yaklaşım metodlarından iki tanesi Galerkin ve Kolokeyşin metodlarıdır. Galerkin metodu, B-spline yaklaşım metodlarının içinde en çok kullanılan metoddur. Kolokeyşin metodu ise sadece düğüm noktalarında hesaplama yaptığı için Galerkin metoduna göre hesaplama zamanındaki azalma nedeniyle daha ekonomik bir alternatifi temsil eder.

Bu kısımda Klein – Gordan denklemi, RLW denklemi ve Burger denkleminin sayısal çözümlerinde kullanılacak yöntemlerde ağırlık ve yaklaşım fonksiyonu olarak Kuintik B–Spline fonksiyonu verilecektir.

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı;

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b \quad (1.2.1)$$

olarak alınacaktır.

1.3. Kuintik B-Spline Fonksiyonlar

x^m bölünme noktaları ve $x^{-5}, x^{-4}, x^{-3}, x^{-2}, x^{-1}, x^{N+1}, x^{N+2}, x^{N+3}, x^{N+4}, x^{N+5}$ bölünme noktaları yardımıyla $\phi_m(x)$ Kuintik B-spline fonksiyonları,

$m = -2, \dots, N+2$ olmak üzere,

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{m-3})^5 & [x^{m-3}, x^{m-2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 & [x^{m-2}, x^{m-1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 & [x^{m-1}, x^m] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 & [x^m, x^{m+1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 + 15(x - x_{m+1})^5 & [x^{m+1}, x^{m+2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 + 15(x - x_{m+1})^5 - 6(x - x_{m+2})^5 & [x^{m+2}, x^{m+3}] \\ 0 & \text{D.D} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. (Sanz-Serna et al., 1981; Clough, 1960).

$$X^N = \{ \phi_{-2}, \phi_{-1}, \dots, \phi_{N+1}, \phi_{N+2} \}$$

$[x^{m-3}, x^{m+3}]$ aralığı dışında Kuintik B-spline $\phi_m(x)$ fonksiyonu ve onun türevlerinin tamamı sıfırdır. $\phi_m(x)$ ve onun dördüncü mertebeye kadar türevlerinin bölüm noktalarındaki değerlerini bir çizelge ile verelim.

Çizelge 1.1 $\phi_m(x)$ fonksiyonunun bölüm noktalarındaki değerleri

\mathbf{X}	\mathbf{x}^{m-3}	\mathbf{x}^{m-2}	\mathbf{x}^{m-1}	\mathbf{X}^m	\mathbf{x}^{m+1}	\mathbf{x}^{m+2}	\mathbf{x}^{m+3}
ϕ_m	0	1	26	66	26	1	0
$h \phi_m'$	0	5	50	0	-50	-5	0
$h^2 \phi_m''$	0	20	40	-120	40	20	0
$h^3 \phi_m'''$	0	60	-120	0	120	-60	0
$h^4 \phi_m^{(4)}$	0	120	-480	720	-480	120	0

U^N yaklaşık çözümü B-spline fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$U_N(x, t) = \delta_{-2}(t) \phi_{-2}(x) + \delta_{-1}(t) \phi_{-1}(x) + \delta_0(t) \phi_0(x) + \dots + \delta_{N+1}(t) \phi_{N+1}(x) + \delta_{N+2}(t) \phi_{N+2}(x)$$

U_m yaklaşık çözümü ve dördüncü mertebeye kadar olan türevleri, eleman parametreleri cinsinden;

$$U_m = U(x_m) = \delta_{m-2} + 26 \delta_{m-1} + 66 \delta_m + 26 \delta_{m+1} + \delta_{m+2}$$

$$U'_m = U'(x_m) = \frac{5}{h} (\delta_{m-2} + 10 \delta_{m-1} - 10 \delta_{m+1} - \delta_{m+2})$$

$$U''_m = U''(x_m) = \frac{20}{h^2} (\delta_{m+2} + 2 \delta_{m+1} - 6 \delta_m + 2 \delta_{m-1} + \delta_{m-2})$$

$$U'''_m = U'''(x_m) = \frac{60}{h^3} (\delta_{m+2} - 2 \delta_{m+1} + 2 \delta_{m-1} - \delta_{m-2})$$

$$U^{(4)}_m = U^{(4)}(x_m) = \frac{120}{h^4} (\delta_{m+2} - 4 \delta_{m+1} + 6 \delta_m - 4 \delta_{m-1} - \delta_{m-2})$$

biçiminde yazılabilir.

1.4. Klein – Gordan (KG) Denklemi

$$U_{tt} - U_{xx} = f(U) \quad (1.4.1)$$

Formundaki lineer olmayan Klein – Gordan denkleminin sayısal çözümleri üzerinde çalışacağız. Bu denklemde ki t ve x indisleri sırasıyla zaman ve konuma göre türevleri ifade etmektedir. (1.4.1) ile verilen denklem KG denkleminin genel halidir. Denklemdaki $f(U)$ fonksiyonunun yerine farklı ifadeler alınarak lineer olmayan Klein – Gordan denklemi $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} U_{tt} - a^2 U_{xx} + \alpha U - \beta U^3 + \gamma U^5 &= 0 \\ U_{tt} - a^2 U_{xx} + \alpha U - \beta U^3 &= 0 \\ U_{tt} - a^2 U_{xx} + \alpha U - \beta U^n &= 0 \\ U_{tt} - a^2 U_{xx} + \alpha U - \beta U^n + \gamma U^{2n-1} &= 0 \\ U_{tt} - a^2 U_{xx} + \alpha U - \beta U^{1-n} + \gamma U^{n+1} &= 0 \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

şeklinde farklı formlarda yazılabilir. (Polyanin et al., 2004; Infeld et al., 2000).

1.5. Regularised Long Wave (RLW) Denklemi

$$U_t + U_x + \varepsilon U U_x + \mu U_{xxt} = 0 \quad (1.5.1)$$

Formundaki denkleme Düzenlenmiş Uzun Dalga Denklemi (RLW) denklemi denir. Tezin ilerleyen bölümlerinde, lineer olmayan bu denkleminin nümerik çözümüne çalışacağız. Bu denklemdeki ε ve μ reel sabitler, t ve x indisleri ise türevleri göstermektedir. Sınır koşulları:

$$\begin{aligned} U(a, t) &= a_1 \\ U(b, t) &= a_2 \\ U_x(a, t) &= U_x(b, t) = 0 \\ U_{xx}(a, t) &= U_{xx}(b, t) = 0, \quad t \in (0, T] \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

ve başlangıç koşulları olarak da;

$$U(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (1.5.3)$$

kullanılacak, $f(x)$ daha sonra seçilecektir.

D. H. Peregrine ardışık dalgaların gelişimini modellemek için RLW denklemini önermiştir ve denklemin sonlu farklar metodu ile ilk nümerik çözümlerini elde etmiştir. T. B. Benjamin, J. L. Bona ve J. J. Mahony ise, RLW denkleminin çözümlerinin daha yaygın olarak bilenen Korteweg-de Vries (KdV) dalga denklemi çözümlerine benzerliğini göstermişlerdir. J. C. Eilbeck ve G. R. McGuire birinci ve ikinci mertebeden iki adımlı ve ikinci mertebeden üç adımlı sonlu farklar metotlarını kullanarak RLW denkleminin nümerik çözümleri üzerinde çalışmışlardır. Ayrıca 1977 yılında, üç adımlı sonlu farklar yöntemi üzerine daha ayrıntılı bir çalışma yapmışlardır. C. J. Padam ve L. Iskandar farklı formdaki sonlu farklar yöntemini kullanarak, RLW denkleminin nümerik çözümleri üzerine çalışmışlardır. M. E. Alexander ve J. L. L. Morris Kübik spline kullanarak, Galerkin metoduyla RLW denkleminin nümerik çözümüyle uğraşmışlardır. L. R. T. Gardner, G. A. Gardner ve L. R. T. Gardner, İ. Dağ kübik B-spline kullanarak, Galerkin metoduyla RLW denkleminin nümerik çözümlerini sunmuştur. Problem (1.5.1) ve (1.5.3) un varlık ve teklik özellikleride J. L. Bona ve P. J. Bryant tarafından ele alınmıştır. Q. Chang, G. Wang ve B. Guo, RLW denklemi için korunumlu fark yöntemini vermişlerdir (Chang, et al., 1995). Yöntemin yakınsaklık ve kararlılığını ispatlamışlardır. P. C. Jain, R. Shankar ve T. V. Singh, RLW denklemini parçalayıp kübik spline kullanarak sonlu farklar metoduyla nümerik çözümlerini bulmuşlardır (Jain et al., 1993). L. R. T. Gardner, G. A. Gardner ve İ. Dağ, Kuadratik B-spline kullanarak Galerkin metoduyla, RLW denkleminin nümerik çözümünü yapmışlar (Gardner, et al., 1995). L. R. T. Gardner, G. A. Gardner ve Abdülkadir Doğan, Lineer şekil fonksiyonları kullanarak, RLW denklemin en küçük kareler metoduyla nümerik çözümü üzerinde çalışmışlardır (Gardner, et al., 1996). L. R. T. Gardner, G. A. Gardner, F. A. Ayoud ve N. K. Amein, kuintik B-spline kullanarak, Petrov-Galerkin metoduyla RLW denkleminin nümerik çözümlerini yapmışlardır ((Gardner, et al., 1997). D. Bhardwaj ve R. Shankar, RLW denklemini parçalayıp kuintik spline kullanarak, sonlu farklar metoduyla nümerik çözümünü, yerel kesme hatasını ve kararlılığı çalışmışlardır (Bhardwaj, 2000). İ. Dağ, kuadratik B-spline kullanarak, en küçük kareler metoduyla RLW denkleminin nümerik çözümüyle uğraşmıştır (Dağ, 2000). İ. Dağ ve M. N. Özer, kübik B-spline kullanarak en küçük kareler yöntemiyle RLW denkleminin nümerik çözümünü yapmışlardır (Dağ, 2001). Abdülkadir Doğan, kuadratik B-spline kullanarak, Petrov-Galerkin metoduyla ve lineer şekil fonksiyonları kullanarak, Galerkin metoduyla RLW denkleminin çözümlerini çalışmıştır (Doğan, 2001; Doğan, 2002; Saka, 2002).

1.6. Burger Denklemi

v , reel bir sabit olmak üzere;

$$U_t + UU_x + vU_{xx} = 0 \quad a \leq x \leq b \quad (1.6.1)$$

ifadesindeki denkleme Burger Denklemi denir. İlk olarak Beteman [24] tarafından çalışılmıştır. Bu denklemin Burger denklemi olarak anılmasının nedeni ise Burger'in özellikle turbulansın modeli olması gibi, bu denklemi içeren geniş çaplı çalışmalar yapmış olmasıdır.

Burger denkleminin yaklaşık çözümünü;

$$U_t + UU_x + vU_{xx} = 0 \quad a \leq x \leq b \quad \text{denkleminin başlangıç koşulu;} \\ U(x,0) = f(x) \quad (1.6.2)$$

ve sınır koşulları;

$$U(a,t) = \beta_1, \quad U(b,t) = \beta_2 \quad (1.6.3)$$

olarak alınır. Burada β_1 ve β_2 problemde ihtiyaç duyulan sabitler, $U=U(x,t)$ yeterli türeve sahip diferansiyellenebilir fonksiyon, $f(x)$ sınırlıdır.

Burger denklemi, ısı iletimi, gaz dinamiği, esneklik, sayılar teorisi, şok dalga teorisi ve turbulans problemlerinin modellenmesinde kullanılır.

2. KLEİN – GORDON DENKLEMİNİN KUİNTİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ

2.1. Giriş

Bu bölümde,

$$U_{tt} - U_{xx} = f(U) \quad (2.1.1)$$

formunda tanımlanan lineer olmayan KG denkleminin Kuintik B-Spline Kolokeyşin yöntemiyle sayısal çözümü üzerinde duracağız. Bu denklemdeki x ve t indisleri sırasıyla konuma ve zamana göre türevleri göstermektedir.

Denklemdaki f(U) fonksiyonunun yerine farklı ifadeler alınarak lineer olmayan KG denklemi farklı formlarda yazılabilir.

Biz bu bölümde f(U) fonksiyonunun yerine $U(1-U^2)$ fonksiyonunu alacağız. Yani denklem;

$$U_{tt} - U_{xx} = U(1-U^2) \quad (2.1.2)$$

olacaktır (Boz, 2006).

2.2. Kuintik B-Spline Kolokeyşin Metodunun Uygulanması

[a,b] aralığının bölünme noktalarında,

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ alt aralıklara bölelim.

$\phi(x)$, $m=-2, -1, \dots, N+1, N+2$ fonksiyonları bölüm noktalarında tanımlı Kuintik B-Spline fonksiyonlar olsunlar.

KG denklemindeki $U(x,t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümünün $U_N(x,t)$ olduğunu varsayalım. Kuintik B-Spline fonksiyonlar türünden yaklaşık çözüm;

$$U_N(x,t) = \delta_{-2}(t)\phi_{-2}(x) + \delta_{-1}(t)\phi_{-1}(x) + \delta_0(t)\phi_0(x) + \dots + \delta_{N+1}(t)\phi_{N+1}(x) + \delta_{N+2}(t)\phi_{N+2}(x) \quad (2.2.1)$$

Bu ifadedeki δ_m (2.1.2) denkleminin kuintik kolokeyşin formundan ve

$$\begin{aligned} U_x(a,t) = 0, \quad U_x(b,t) = 0 \quad t \in (0, T] \\ U_{xx}(a,t) = 0, \quad U_{xx}(b,t) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

sınır koşullarından elde edilecek zamana bağlı parametrelerdir.

Kuintik B-Spline fonksiyonlar cinsinden U yaklaşık çözümü ;

$$U_m = \sum_{j=m-2}^{m+3} \delta_j \phi_j$$

şeklinde yazılır.

Çizelge (1,1) kullanılarak bölünme noktalarında eleman parametreleri cinsinden U_m yaklaşık çözümü;

$$U_m = U(x_m) = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2} \quad (2.2.3)$$

şeklinde. Bu yaklaşık çözümün türevleri;

$$U'_m = U'(x_m) = \frac{5}{h} (\delta_{m-2} + 10\delta_{m-1} - 10\delta_{m+1} - \delta_{m+2})$$

$$U''_m = U''(x_m) = \frac{20}{h^2} (\delta_{m+2} + 2\delta_{m+1} - 6\delta_m + 2\delta_{m-1} + \delta_{m-2})$$

$$U'''_m = U'''(x_m) = \frac{60}{h^3} (\delta_{m+2} - 2\delta_{m+1} + 2\delta_{m-1} - \delta_{m-2})$$

$$U^{(4)}_m = U^{(4)}(x_m) = \frac{120}{h^4} (\delta_{m+2} - 4\delta_{m+1} + 6\delta_m - 4\delta_{m-1} - \delta_{m-2})$$

(2.2.4)

olarak bulunabilir.

U_N in bölüm noktalarındaki (2.2.3) değerleri ve (2.2.4) türevleri (2.1.2) de yerine yazılırsa;

$$\delta_{m-2}^{\circ\circ} + 26\delta_{m-1}^{\circ\circ} + 66\delta_m^{\circ\circ} + 26\delta_{m+1}^{\circ\circ} + \delta_{m+2}^{\circ\circ} - \frac{20}{h^2} (\delta_{m+2} + 2\delta_{m+1} - 6\delta_m + 2\delta_{m-1} + \delta_{m-2}) - z_m (\delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}) = 0$$

$$z_m = (\delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2})^2 - 1 \quad (2.2.5)$$

$N + 1$ denklemlili diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Burada "°°" zamana bağı ikinci mertebeden türevdir. δ_m eleman parametresinin iki ardışık zaman adımı n ve $n + 1$ arasında değerleri Crank-Nicholson formülü yardımıyla;

$$\delta_m = \frac{1}{2} (\delta_m^{n+1} + \delta_m^n) \quad (2.2.6)$$

ve bunun zamana göre ikinci türevi sonlu farklar yaklaşımıyla;

$$\delta_m^{\circ\circ} = \frac{1}{\Delta t^2} (\delta_m^{n+1} - 2\delta_m^n + \delta_m^{n-1}) \quad (2.2.7)$$

olarak bulunur. Bu değerler (2.2.5) denklem sisteminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} & (2 + (z_m - \frac{20}{h^2})\Delta t^2)\delta_{m-2}^{n+1} + (52 + (26z_m - \frac{40}{h^2})\Delta t^2)\delta_{m-1}^{n+1} + (132 + (66z_m + \frac{120}{h^2})\Delta t^2)\delta_m^{n+1} + \\ & (52 + (26z_m - \frac{40}{h^2})\Delta t^2)\delta_{m+1}^{n+1} + (2 + (z_m - \frac{20}{h^2})\Delta t^2)\delta_{m+2}^{n+1} = (4 + (-z_m + \frac{20}{h^2})\Delta t^2)\delta_{m-2}^n + \\ & (104 + (-26z_m + \frac{40}{h^2})\Delta t^2)\delta_{m-1}^n + (264 + (-66z_m + \frac{120}{h^2})\Delta t^2)\delta_m^n + (104 + (-26z_m + \frac{40}{h^2})\Delta t^2)\delta_{m+1}^n + \\ & (4 + (-z_m + \frac{20}{h^2})\Delta t^2)\delta_{m+2}^n - 2\delta_{m-2}^{n-1} - 52\delta_{m-1}^{n-1} - 132\delta_m^{n-1} - 52\delta_{m+1}^{n-1} - 2\delta_{m+2}^{n-1} \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

elde edilir. Bu sistem yeniden düzenlenirse $N + 1$ denklem $N + 5$ bilinmeyenden oluşan cebirsel denklem sistemi bulunur.

$$\begin{aligned} & \beta_{m_1}\delta_{m-2}^{n+1} + \beta_{m_2}\delta_{m-1}^{n+1} + \beta_{m_3}\delta_m^{n+1} + \beta_{m_4}\delta_{m+1}^{n+1} + \beta_{m_5}\delta_{m+2}^{n+1} = \\ & \beta_{m_4}\delta_{m-2}^n + \beta_{m_5}\delta_{m-1}^n + \beta_{m_6}\delta_m^n + \beta_{m_5}\delta_{m+1}^n + \beta_{m_4}\delta_{m+2}^n - \\ & 2\delta_{m-2}^{n-1} - 52\delta_{m-1}^{n-1} - 132\delta_m^{n-1} - 52\delta_{m+1}^{n-1} - 2\delta_{m+2}^{n-1} \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Burada;

$$\beta_{m_1} = 2 + (z_m - \frac{20}{h^2})\Delta t^2$$

$$\beta_{m_2} = 52 + (26z_m - \frac{40}{h^2})\Delta t^2$$

$$\beta_{m_3} = 132 + (66z_m - \frac{120}{h^2})\Delta t^2$$

$$\beta_{m_4} = 4 + (-z_m + \frac{20}{h^2})\Delta t^2$$

$$\beta_{m_5} = 104 + (-26z_m + \frac{40}{h^2})\Delta t^2$$

$$\beta_{m_6} = 264 + (-66z_m - \frac{120}{h^2})\Delta t^2$$

dir. Bu denklemdeki δ_{-2} , δ_{-1} , δ_{N+1} ve δ_{N+2} parametreleri sınır koşulları kullanılarak yok edilecektir. Böylece $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu 5 bandlı köşegen denklem sistemi elde edilir.

(2.2.2) sınır koşulları eleman parametreleri cinsinden;

$$\frac{5}{h}(\delta_2 + 10\delta_1 - 10\delta_{-1} - \delta_{-2}) = 0$$

$$\frac{20}{h^2}(\delta_2 + 2\delta_1 - 6\delta_0 + 2\delta_{-1} + \delta_{-2}) = 0$$

$$\frac{5}{h}(\delta_{N+2} + 10\delta_{N+1} - 10\delta_{N-1} - \delta_{N-2}) = 0$$

(2.2.10)

$$\frac{20}{h^2}(\delta_{N+2} + 2\delta_{N+1} - 6\delta_N + 2\delta_{N-1} + \delta_{N-2}) = 0$$

olarak yazılabilir.

Bu denklemlerden sınır parametrelerinin değeri;

$$\delta_{-2} = \frac{165}{4}\delta_0 + \frac{65}{2}\delta_1 - \delta_2$$

$$\delta_{-1} = -\delta_2 - \delta_1 - \frac{33}{8}\delta_0$$

(2.2.11)

$$\delta_{N+1} = -\delta_{N-2} - \delta_{N-1} - \frac{33}{8}\delta_N$$

$$\delta_{N+2} = \delta_{N-2} + \frac{65}{2}\delta_{N-1} + \frac{165}{4}\delta_N$$

şeklinde elde edilir.

Bulunan bu değerler (2.2.9) denklem sisteminde yerine yazılır. Buna göre (2.2.9) denklem sisteminde $m = 0,1$ alarak;

$$F_1 = \beta_{m_4} \delta_{-2}^n + \beta_{m_5} \delta_{-1}^n + \beta_{m_6} \delta_0^n + \beta_{m_5} \delta_1^{n+1} + \beta_{m_4} \delta_{-2}^n - 2\delta_{m-2}^{n-1} - 52\delta_{m-1}^{n-1} - 132\delta_m^{n-1} - 52\delta_{m+1}^{n-1} - 2\delta_{m+2}^{n-1} \quad (2.2.12)$$

$$F_2 = \beta_{m_4} \delta_{-1}^n + \beta_{m_5} \delta_0^n + \beta_{m_6} \delta_1^n + \beta_{m_5} \delta_2^{n+1} + \beta_{m_4} \delta_3^n - 2\delta_{m-1}^{n-1} - 52\delta_0^{n-1} - 132\delta_1^{n-1} - 52\delta_2^{n-1} - 2\delta_3^{n-1}$$

$m=N-1$, N alarak,

$$F_N = \beta_{m_4} \delta_{N-3}^n + \beta_{m_5} \delta_{N-2}^n + \beta_{m_6} \delta_{N-1}^n + \beta_{m_5} \delta_N^{n+1} + \beta_{m_4} \delta_{N+1}^n - 2\delta_{N-3}^{n-1} - 52\delta_{N-2}^{n-1} - 132\delta_{N-1}^{n-1} - 52\delta_N^{n-1} - 2\delta_{N+1}^{n-1} \quad (2.2.13)$$

$$F_{N+1} = \beta_{m_4} \delta_{N-2}^n + \beta_{m_5} \delta_{N-1}^n + \beta_{m_6} \delta_N^n + \beta_{m_5} \delta_{N+1}^{n+1} + \beta_{m_4} \delta_{N+2}^n - 2\delta_{N-2}^{n-1} - 52\delta_{N-1}^{n-1} - 132\delta_N^{n-1} - 52\delta_{N+1}^{n-1} - 2\delta_{N+2}^{n-1}$$

yazılır.

(2.2.11) eleman parametreleri (2.2.12) ve (2.2.13) denklemlerinde yerine yazılıp denklemler düzenlenirse ilk iki denklem;

$$\left(\frac{165}{4}\beta_{m_1} - \frac{33}{8}\beta_{m_2} + \beta_{m_3}\right)\delta_0^{n+1} + \left(\frac{65}{2}\beta_{m_1} - \frac{5}{4}\beta_{m_2}\right)\delta_1^{n+1} + \left(\frac{13}{4}\beta_{m_1} - \frac{1}{8}\beta_{m_2}\right)\delta_2^{n+1} = F_1,$$

$$\left(-\frac{33}{8}\beta_{m_1} + \beta_{m_2}\right)\delta_0^{n+1} + \left(-\frac{9}{4}\beta_{m_1} + \beta_{m_3}\right)\delta_1^{n+1} + \left(-\frac{1}{8}\beta_{m_1} + \beta_{m_2}\right)\delta_2^{n+1} + \beta_{m_1}\delta_3^{n+1} = F_2$$

ve son iki denklem;

$$\left(-\frac{33}{8}\beta_{m_1} + \beta_{m_2}\right)\delta_N^{n+1} + \left(-\frac{9}{4}\beta_{m_1} + \beta_{m_3}\right)\delta_{N-1}^{n+1} + \left(-\frac{1}{8}\beta_{m_1} + \beta_{m_2}\right)\delta_{N-2}^{n+1} + \beta_{m_1}\delta_{N-3}^{n+1} = F_N$$

$$\left(\frac{165}{4}\beta_{m_1} - \frac{33}{8}\beta_{m_2} + \beta_{m_3}\right)\delta_N^{n+1} + \left(\frac{65}{2}\beta_{m_1} - \frac{5}{4}\beta_{m_2}\right)\delta_{N-1}^{n+1} + \left(\frac{13}{4}\beta_{m_1} - \frac{1}{8}\beta_{m_2}\right)\delta_{N-2}^{n+1} = F_{N+1}$$

olarak bulunur. Buna göre denklem sistemi,

$$d^n = [\delta_{-2}^n, \delta_{-1}^n, \dots, \delta_{N+1}^n, \delta_{N+2}^n]^T$$

ve

$$\delta^0 = [\delta_0^0, \delta_1^0, \dots, \delta_N^0]^T,$$

$$\mathbf{b} = [U(x_0), U(x_1), \dots, U(x_{N-1}), U(x_N)]^T$$

olmak üzere, δ eleman parametresi için matris formunda;

$$A\delta^0 = \mathbf{b}$$

denklemini elde edilir. Dolayısıyla $(N+1) \times (N+1)$ tipinde beş sütun elemanlı band matris sistemi bulunmuş olur. Bu sistemin çözümü Thomas algoritması ile elde edilir.

Lineer hale getirdiğimiz (2.1.2) denkleminin çözümü,

$$(\delta_m^*)^{n+1} = \delta_m^n + \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n)$$

iterasyon formülü kullanılarak her zaman adımında iyileştirilebilir. (2.2.13) sistemi kullanılarak Thomas algoritması yardımıyla δ^{n+1} yaklaşımları bulunur.

Yeni zaman adımına geçmeden önce, δ^{n+1} değerini iyileştirmek için bu değerlere,

$$(\delta_m^*)^{n+1} = \delta_m^n + \frac{1}{2}(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n)$$

iterasyonu iki veya üç kez tekrarlanır. Böylece δ^{n+1} yaklaşımlarının yeni değerleri elde edilmiş olur.

2.4. Nümerik Çözüm

Uygulanan yöntemin etkinliğini göstermek için bir test problemi üzerinden yapılan çalışmayı inceleyelim.

$U_{tt} - U_{xx} = U(1-U^2)$ şeklinde tanımlanan KG denkleminin;

$$U(x, t) = \tanh \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x - ct}{\sqrt{(1 - c^2)}} \right]$$

şeklindeki çözümünü ele alalım. Bu test probleminde;

$$U(x, 0) = \tanh \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{(1 - c^2)}} \right], \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq 0$$

$U_t(x, 0) = 0$ başlangıç şartları ve

$U(a, t) = -1$ $U(b, t) = 1$

$U_x(a, t) = 0$ $U_x(b, t) = 0$ Sınır şartları kullanılacaktır.

Hesaplama $c = 0,5$ alınarak $-30 \leq x \leq 30$ aralığında, $t = 10$ zamanına kadar yapıldı.

Çizelge 2.1 $t = 10$ anında farklı h ve Δt değerleri kullanılarak elde edilen sonuçlar

$c = 0,5$	$t = 10$	ve	$-30 \leq x \leq 30$	için	L_2 ve L_∞ Hata Normları
h	Δt		$L_2 \times 10^3$		$L_\infty \times 10^3$
0,2	0,05		14,291066619		11,015555382
0,1	0,02		3,637415657		2,827508688
0,05	0,01		0,848178966		0,661198080
0,02	0,005		0,055507116		0,046607804

Buradaki L_2 ve L_∞ hata normları;

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j - (U_N)_j|^2}$$

$$L_\infty \|U - U_N\|_\infty = \max_j |U_j - (U_N)_j|$$

şeklindedir.

2.5. Sonuç

Farklı konum ve zaman aralıkları kullanılarak yapılan hesaplamalar sonucunda L_2 ortalama hata normu ve L_∞ maksimum hata normu ölçümlerinden lineer olmayan KG denklemi için Kuintik B Spline Kolokeyşin yönteminin iyi sonuçlar verdiği görülmüştür.

3. RLW DENKLEMİNİN KUİNTİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN METODUYLA ÇÖZÜMÜ

3.1. Giriş

$$U_t + U_x + \varepsilon U U_x + \mu U_{xxt} = 0 \quad (3.1.1)$$

Şeklinde tanımlanan RLW denkleminin sayısal çözümünü ele alacağız. Burada ε ve μ pozitif parametreler, x ve t ise konum ve zamana göre türevleri göstermektedir (Saka, 2008).

Bu denklemin sayısal çözümleri için sınır koşulları;

$$U(a,t) = \beta_1 \quad U(b,t) = \beta_2 \quad (3.1.2)$$

$$U_x(a,t) = 0 \quad U_x(b,t) = 0$$

ve başlangıç koşulu;

$$U(x,0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3.1.3)$$

şeklinde seçilsin. Burada $f(x)$ daha sonraki bölümlerde test problemlerine göre tanımlanacaktır.

$[a,b]$ çözüm aralığını;

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

olacak şekilde alt aralıklara bölelim. Burada;

$$h = x_m - x_{m-1} \quad m = 1, 2, \dots, N$$

3.2. Metodun Uygulanması

x_m düğüm noktalarında $\varphi_m(x)$ Kuintik B-Spline fonksiyonları kullanılarak;

$m = -2, \dots, N+2$ $[a,b]$ aralığında çözüm araştırılır.

(3.1.1) denkleminin nümerik çözümü için Kuintik B-Spline Kolokeyşin metodunu kullanılır.

$U(x,t)$ analitik çözüm, $U_N(x,t)$ yaklaşık çözüm olmak üzere ;

$$U_N(x,t) = \sum_{m=-2}^{N+2} \delta_m(t) \varphi_m(x) \quad (3.2.1)$$

şeklinde aranacaktır. Burada $\varphi_m(x)$ Kuintik B-Spline fonksiyonlar ve δ_m zamana bağlı parametrelerdir.

(3.2.1) yaklaşımı ve (3.1.1) denklemi, Kuintik B-Spline fonksiyonları kullanılarak x noktasındaki U ve birinci, ikinci türevleri olan U' ve U'' değerleri elde edilir.

$$U_m = U(x_m) = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}$$

$$U'_m = U'(x_m) = \frac{5}{h}(\delta_{m+2} + 10\delta_{m+1} - 10\delta_{m-1} - \delta_{m-2}) \quad (3.2.2)$$

$$U''_m = U''(x_m) = \frac{20}{h^2}(\delta_{m+2} + 2\delta_{m+1} - 6\delta_m + 2\delta_{m-1} + \delta_{m-2})$$

Kolokeyşin noktaları, seçilen düğüm noktaları ile bağlantılıdır. (3.2.2) ifadeleri (3.1.1) de yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned} & \delta_{m-2}^\circ + 26\delta_{m-1}^\circ + 66\delta_m^\circ + 26\delta_{m+1}^\circ + \delta_{m+2}^\circ + \frac{5(1+\varepsilon z_m)}{h}(\delta_{m+2} + 10\delta_{m+1} - 10\delta_{m-1} - \delta_{m-2}) \\ & - \frac{20\mu}{h^2}(\delta_{m+2}^\circ + 2\delta_{m+1}^\circ - 6\delta_m^\circ + 2\delta_{m-1}^\circ + \delta_{m-2}^\circ) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Burada “ \circ ” zamana göre türevi belirtir.

(3.2.3) sistemindeki Z_m ;

$$Z_m = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2} \quad \text{dir.}$$

δ_m ve onun zamana göre türevi olan δ_m° parametrelerini Krank – Nicolson formülü ve alışılmış ileri sonlu fark formülü yardımıyla n ve $n+1$ gibi iki zaman aralığı arasında;

$$\delta_m = \frac{\delta_m^{n+1} + \delta_m^n}{2}, \quad \delta_m^\circ = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t} \quad (3.2.4)$$

şeklinde ifade edilir. Böylece n ve $n+1$ gibi sıralı iki zaman adımı arasındaki tekrarlı bağıntısı elde edilir. Buna göre zamana bağlı bilinmeyen δ_i^{n+1} ve δ_i^n ($i=m-2, \dots, m+2$) parametreleri ortaya çıkar.

$$\begin{aligned}
& \alpha_{m_1} \delta_{m-2}^{n+1} + \alpha_{m_2} \delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_{m_3} \delta_m^{n+1} + \alpha_{m_4} \delta_{m+1}^{n+1} + \alpha_{m_5} \delta_{m+2}^{n+1} \\
& = \alpha_{m_5} \delta_{m-2}^n + \alpha_{m_4} \delta_{m-1}^n + \alpha_{m_3} \delta_m^n + \alpha_{m_2} \delta_{m+1}^n + \alpha_{m_1} \delta_{m+2}^n
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Burada,

$$\begin{aligned}
\alpha_{m_1} &= 2h^2 - 5h\Delta t(1+\varepsilon z_m) - 40\mu, \\
\alpha_{m_2} &= 52h^2 - 50h\Delta t(1+\varepsilon z_m) - 80\mu, \\
\alpha_{m_3} &= 132h^2 + 240\mu, \\
\alpha_{m_4} &= 52h^2 + 50h\Delta t(1+\varepsilon z_m) - 80\mu, \\
\alpha_{m_5} &= 2h^2 + 5h\Delta t(1+\varepsilon z_m) - 40\mu, \quad m=0,1,\dots,N
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

şeklindedir.

Yukarıdaki sistem N+1 denklem, N+5 bilinmeyen parametrelerden oluşur.(3.2.5) denklem sisteminden;

$$U(a,t)=\beta_1 \quad U(b,t)=\beta_2 \quad \text{ve} \quad U_x(a,t)=0, \quad U_x(b,t)=0$$

sınır koşulları kullanılarak $\delta_{-2}^{n+1}, \delta_{-1}^{n+1}, \delta_{N+1}^{n+1}, \delta_{N+2}^{n+1}$ parametreleri yok edilecektir. Böylece (N+1)x(N+1) matris sistemi ortaya çıkar. Ortaya çıkan beşgensel matris sistemi Thomas Algoritması yardımıyla kolayca çözülebilir.

δ_m^n eleman parametrelerini hesaplayabilmemiz için δ_m^0 başlangıç parametresini bilmemiz gerekir.

Bunun için ;

$$\begin{aligned}
(U_N)_x(a,0) &= \delta_{-2}^0 + 10\delta_{-1}^0 - 10\delta_1^0 - \delta_2^0 = 0 \\
(U_N)_{xx}(a,0) &= \delta_{-2}^0 + 2\delta_{-1}^0 - 6\delta_0^0 + 2\delta_1^0 + \delta_2^0 = 0 \\
U_N(a,0) &= \delta_{m-2}^0 + 26\delta_{m-1}^0 + 66\delta_m^0 + 26\delta_{m+1}^0 + \delta_{m+2}^0 = U(x_m, 0) \\
(U_N)_x(b,0) &= \delta_{N+2}^0 + 10\delta_{N+1}^0 - 10\delta_{N-1}^0 - \delta_{N-2}^0 = 0 \\
(U_N)_{xx}(b,0) &= \delta_{N+2}^0 + 2\delta_{N+1}^0 - 6\delta_N^0 + 2\delta_{N-1}^0 + \delta_{N-2}^0 = 0
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

eşitlikleri kullanılır. δ_m^0 başlangıç parametresinin hesaplanmasıyla beşgensel matris sistemi hesaplanabilir duruma gelebilir. (3.2.5) denkleminin lineer olmama durumuyla bağlantılı z_m ifadesindeki δ_m zaman parametresi δ_m^n ile yer değiştirir. Böylece denklem lineerleştirilmiş olur.

3.3. RLW Zaman Ayırıştırması

RLW denklemini;

$$(U - \mu U_{xx})_t + 2\varepsilon U U_x = 0, \quad (3.3.1)$$

$$(U - \mu U_{xx})_t + 2U_x = 0, \quad (3.3.2)$$

Şeklinde zamana göre ayrıştırılm. x_m düğüm noktalarında (3.3.1) ve (3.3.2) denklemlerinde

U_m , U'_m , U''_m değerleri yerine yazıldığında, aşağıdaki birinci dereceden diferansiyel denklem sistemi;

$$\begin{aligned} & \delta_{m-2}^\circ + 26\delta_{m-1}^\circ + 66\delta_m^\circ + 26\delta_{m+1}^\circ + \delta_{m+2}^\circ - \frac{20\mu}{h^2}(\delta_{m+2}^\circ + 2\delta_{m+1}^\circ - 6\delta_m^\circ + 2\delta_{m-1}^\circ + \delta_{m-2}^\circ) \\ & + \frac{10\varepsilon z_m}{h}(\delta_{m+2} + 10\delta_{m+1} - 10\delta_{m-1} - \delta_{m-2}) = 0, \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

$$\begin{aligned} & \delta_{m-2}^\circ + 26\delta_{m-1}^\circ + 66\delta_m^\circ + 26\delta_{m+1}^\circ + \delta_{m+2}^\circ - \frac{20\mu}{h^2}(\delta_{m+2}^\circ + 2\delta_{m+1}^\circ - 6\delta_m^\circ + 2\delta_{m-1}^\circ + \delta_{m-2}^\circ) \\ & + \frac{10}{h}(\delta_{m+2} + 10\delta_{m+1} - 10\delta_{m-1} - \delta_{m-2}) = 0, \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Burada,

$$z_m = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}$$

şeklinde tanımlanır.

Crank-Nicolson algoritmasından ve alışılmış sonlu fark algoritmasından δ_m ve onun zamana göre türevi olan δ_m° eşitlikleri;

$$\delta_m = \frac{\delta_m^n + \delta_m^{n+1/2}}{2}, \quad \delta_m^\circ = \frac{\delta_m^{n+1/2} - \delta_m^n}{\Delta t} \quad (3.3.5)$$

şeklinde yazılabilir. Bu yapılan işlemler n ile $n+1/2$ zaman adımları arasında δ_i^n ve $\delta_i^{n+1/2}$ için gerçekleştirilmiştir. ($i=m-2, \dots, m+2$)

$$\begin{aligned} & \alpha_{m_1} \delta_{m-2}^{n+1/2} + \alpha_{m_2} \delta_{m-1}^{n+1/2} + \alpha_{m_3} \delta_m^{n+1/2} + \alpha_{m_4} \delta_{m+1}^{n+1/2} + \alpha_{m_5} \delta_{m+2}^{n+1/2} \\ & = \alpha_{m_5} \delta_{m-2}^n + \alpha_{m_4} \delta_{m-1}^n + \alpha_{m_3} \delta_m^n + \alpha_{m_2} \delta_{m+1}^n + \alpha_{m_1} \delta_{m+2}^n \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

$$\alpha_{m_1} = 2h^2 - 5h\Delta t \epsilon z_m - 40\mu,$$

$$\alpha_{m_2} = 52h^2 - 50h\Delta t \epsilon z_m - 80\mu,$$

$$\alpha_{m_3} = 132h^2 + 240\mu,$$

$$\alpha_{m_4} = 52h^2 + 50h\Delta t \epsilon z_m - 80\mu,$$

$$\alpha_{m_5} = 2h^2 + 5h\Delta t \epsilon z_m - 40\mu, \text{ şeklindedir.}$$

Benzer şekilde $n+1/2$ ve $n+1$ aralığında (3.3.4) denklemini olarak ifade edilen denklem,

$$\delta_m = \frac{\delta_m^{n+1} + \delta_m^{n+1/2}}{2}, \quad \delta_m^\circ = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^{n+1/2}}{\Delta t} \quad (3.3.7)$$

dönüşümleri yardımıyla $\delta_i^{n+1/2}, \delta_i^{n+1}$ ($i=m-2, \dots, m+2$) için,

$$\begin{aligned} & \alpha_{m_6} \delta_{m-2}^{n+1} + \alpha_{m_7} \delta_{m-1}^{n+1} + \alpha_{m_8} \delta_m^{n+1} + \alpha_{m_9} \delta_{m+1}^{n+1} + \alpha_{m_{10}} \delta_{m+2}^{n+1} \\ & = \alpha_{m_{10}} \delta_{m-2}^{n+1/2} + \alpha_{m_9} \delta_{m-1}^{n+1/2} + \alpha_{m_8} \delta_m^{n+1/2} + \alpha_{m_7} \delta_{m+1}^{n+1/2} + \alpha_{m_6} \delta_{m+2}^{n+1/2} \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

şeklinde ifade edilir.

$$\alpha_{m_6} = 2h^2 - 5h\Delta t - 40\mu,$$

$$\alpha_{m_7} = 52h^2 - 50h\Delta t - 80\mu,$$

$$\alpha_{m_8} = 132h^2 + 240\mu,$$

$$\alpha_{m_9} = 52h^2 + 50h\Delta t - 80\mu,$$

$$\alpha_{m_{10}} = 2h^2 + 5h\Delta t - 40\mu,$$

(3.3.6) ve (3.3.8) denklemleri RLW denkleminin çözümü için çok adımlı sonlu fark algoritması oluşturur. Bu algoritma N+1 denklem N+5 bilinmeyen parametreden oluşur. Sistemin tek çözümünü elde edebilmek için 4 parametrenin yok edilmesi gerekir. Verilen;

$$U(a, t) = \beta_1, \quad U(b, t) = \beta_2 \quad \text{ve} \quad U_x(a, t) = U_x(b, t) = 0$$

sınır koşulları yardımıyla,

$$\delta_{-2}^i, \delta_{-1}^i, \delta_{N+1}^i, \delta_{N+2}^i \quad (i=n+1/2, n+1)$$

parametreleri, elemine edilecek parametrelerdir.

$U(a, t) = \beta_1$ ve $U_x(a, t) = 0$ sınır koşulları yardımıyla $\delta_{-2}^i, \delta_{-1}^i$ parametreleri, $U(b, t) = \beta_2$ ve $U_x(b, t) = 0$ sınır koşulları yardımıyla da $\delta_{N+1}^i, \delta_{N+2}^i$ parametreleri yok edilir. Böylece 5 bandlı bir matris sistemi Thomas Algoritması yardımıyla çözülür. Bu çözüme başlayabilmek için δ_m^0 parametresine ihtiyaç vardır. Bu başlangıç parametresi (3.2.7) ile verilen şartları sağlayan başlangıç ve sınır koşullarından elde edilecektir.

3.4. RLW Konum Ayrıştırması

Bu bölümde;

$$V(x, t) = -U_x(x, t) \quad \text{eşitliği yardımıyla,}$$

$$U_t - (1 + \varepsilon U)V + \mu V_{xt} = 0,$$

$$V + U_x = 0$$

(3.4.1) Denklem sistemi oluşturulur. Bu denklem sisteminin çözümü için başlangıç koşulları;

$$\begin{aligned} U(a, t) = \beta_1, \quad U(b, t) = \beta_2, \quad V(a, t) = 0, \quad V(b, t) = 0 \\ U_x(a, t) = 0, \quad U_x(b, t) = 0, \quad V_x(a, t) = 0, \quad V_x(b, t) = 0 \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

ve sınır koşulları;

$$U(x, 0) = f(x), \quad V(x, 0) = -f'(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3.4.3)$$

şeklinde verilmektedir.

$U(x,t)$ ve $V(x,t)$ çözümleri $Q_m(x)$ Kuintik B-Spline fonksiyonları ve δ_m ve σ_m zamana bağlı parametreleri yardımıyla;

$$U_N(x,t) = \sum_{m=-2}^{N+2} \delta_m(t) Q_m(x), \quad V_N(x,t) = \sum_{m=-2}^{N+2} \sigma_m(t) Q_m(x) \quad (3.4.4)$$

şeklinde aranacaktır.

Kuintik B-Spline fonksiyonlar yardımıyla U_m , V_m , U'_m ve V'_m eşitlikleri,

$$U_m = U(x_m) = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}$$

$$U'_m = U'(x_m) = \frac{5}{h} (\delta_{m+2} + 10\delta_{m+1} - 10\delta_{m-1} - \delta_{m-2})$$

$$V_m = V(x_m) = \sigma_{m-2} + 26\sigma_{m-1} + 66\sigma_m + 26\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2} \quad (3.4.5)$$

$$V'_m = V'(x_m) = \frac{5}{h} (\sigma_{m+2} + 10\sigma_{m+1} - 10\sigma_{m-1} - \sigma_{m-2})$$

şeklinde verilir. (3.4.5) değerleri (3.4.1) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \delta_{m-2}^{\circ} + 26\delta_{m-1}^{\circ} + 66\delta_m^{\circ} + 26\delta_{m+1}^{\circ} + \delta_{m+2}^{\circ} - (1 + \varepsilon z_m)(\sigma_{m-2} + 26\sigma_{m-1} + 66\sigma_m + 26\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2}) \\ & + \frac{5\mu}{h} (\sigma_{m+2}^{\circ} + 10\sigma_{m+1}^{\circ} - 10\sigma_{m-1}^{\circ} - \sigma_{m-2}^{\circ}) = 0 \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

$$\sigma_{m-2} + 26\sigma_{m-1} + 66\sigma_m + 26\sigma_{m+1} + \sigma_{m+2} + \frac{5}{h} (\delta_{m+2} + 10\delta_{m+1} - 10\delta_{m-1} - \delta_{m-2}) = 0$$

sistemi elde edilir. Burada;

$$z_m = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2} \text{ şeklindedir.}$$

Crank-Nicolson formülleri ile ve Alışılmış Sonlu Fark algoritmaları kullanılarak oluşturulan;

$$\delta_m = \frac{\delta_m^{n+1} + \delta_m^n}{2}, \quad \delta_m^{\circ} = \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\Delta t} \quad (3.4.7)$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_m^{n+1} + \sigma_m^n}{2}, \quad \sigma_m^{\circ} = \frac{\sigma_m^{n+1} - \sigma_m^n}{\Delta t}$$

eşitlikler (3.4.6) da yerine yazıldığında $2N+2$ denklem ve $2N+10$ bilinmeyenden oluşan;

$$\begin{aligned}
& 2h\delta_{m-2}^{n+1} + \beta_{m_1}\sigma_{m-2}^{n+1} + 52h\delta_{m-1}^{n+1} + \beta_{m_2}\sigma_{m-1}^{n+1} + 132h\delta_m^{n+1} \\
& + \beta_{m_3}\sigma_m^{n+1} + 52h\delta_{m+1}^{n+1} + \beta_{m_4}\sigma_{m+1}^{n+1} + 2h\delta_{m+2}^{n+1} + \beta_{m_5}\sigma_{m+2}^{n+1} \\
& = 2h\delta_{m-2}^n - \beta_{m_5}\sigma_{m-2}^n + 52h\delta_{m-1}^n - \beta_{m_4}\sigma_{m-1}^n + 132h\delta_m^n \\
& - \beta_{m_3}\sigma_m^n + 52h\delta_{m+1}^n - \beta_{m_2}\sigma_{m+1}^n + 2h\delta_{m+2}^n - \beta_{m_1}\sigma_{m+2}^n, \tag{3.4.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -5\delta_{m-2}^{n+1} + h\sigma_{m-2}^{n+1} - 50\delta_{m-1}^{n+1} + 26h\sigma_{m-1}^{n+1} + 66h\sigma_m^{n+1} \\
& + 50\delta_{m+1}^{n+1} + 26h\sigma_{m+1}^{n+1} + 5\delta_{m+2}^{n+1} + h\sigma_{m+2}^{n+1} \\
& = 5\delta_{m-2}^n - h\sigma_{m-2}^n + 50\delta_{m-1}^n - 26h\sigma_{m-1}^n - 66h\delta_m^n \\
& - 50\sigma_{m+1}^n - 26h\sigma_{m+1}^n - 5\delta_{m+2}^n - h\sigma_{m+2}^n, \quad m = 0, \dots, N
\end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir.

Burada;

$$\beta_{m_1} = -dh\Delta - 10\mu,$$

$$\beta_{m_2} = -26dh\Delta t - 100\mu,$$

$$\beta_{m_3} = -66dh\Delta t,$$

$$\beta_{m_4} = 26dh\Delta t + 100\mu,$$

$$\beta_{m_5} = -dh\Delta t + 10\mu,$$

ve $d = 1 + \varepsilon z_m$ şeklindedir.

$$\begin{aligned}
U(a, t) = \beta_1, \quad U(b, t) = \beta_2, \quad V(a, t) = 0, \quad V(b, t) = 0 \\
U_x(a, t) = 0, \quad U_x(b, t) = 0, \quad V_x(a, t) = 0, \quad V_x(b, t) = 0
\end{aligned}$$

Sınır koşullarının uygulanmasıyla (3.4.8) denklem sisteminden, $\delta_{-2}^{n+1}, \sigma_{-2}^{n+1}, \delta_{-1}^{n+1}, \sigma_{-1}^{n+1}, \delta_{n+1}^{n+1}, \sigma_{n+1}^{n+1}, \delta_{n+2}^{n+1}, \sigma_{n+2}^{n+1}$ eleman parametreleri yok edilir. Böylece, $2N+2 \times 2N+2$ boyutlu, 11 bandlı matris sistemi elde edilir. Bu sistem Gauss eliminasyon yöntemiyle çözülebilir.

3.5. Başlangıç Durumu

Hesaplama işleminin başlayabilmesi için δ_m^0, σ_m^0 başlangıç değerlerinin hesaplanması gerekir.

Bunun için;

$$(U_N)_x(a,0) = \delta_{-2}^0 + 10\delta_{-1}^0 - 10\delta_1^0 - \delta_2^0 = 0$$

$$(U_N)_{xx}(a,0) = \delta_{-2}^0 + 2\delta_{-1}^0 - 6\delta_0^0 + 2\delta_1^0 + \delta_2^0 = 0$$

$$U_N(x,0) = \delta_{m-2}^0 + 26\delta_{m-1}^0 + 66\delta_m^0 + 26\delta_{m+1}^0 + \delta_{m+2}^0 = U(x_m, 0)$$

$$(U_N)_x(b,0) = \delta_{N+2}^0 + 10\delta_{N+1}^0 - 10\delta_{N-1}^0 - \delta_{N-2}^0 = 0$$

$$(U_N)_{xx}(b,0) = \delta_{N+2}^0 + 2\delta_{N+1}^0 - 6\delta_N^0 + 2\delta_{N-1}^0 + \delta_{N-2}^0 = 0$$

$$(U_N)_x(a,0) = \sigma_{-2}^0 + 10\sigma_{-1}^0 - 10\sigma_1^0 - \sigma_2^0 = 0 \quad (3.4.9)$$

$$(U_N)_{xx}(a,0) = \sigma_{-2}^0 + 2\sigma_{-1}^0 - 6\sigma_0^0 + 2\sigma_1^0 + \sigma_2^0 = 0$$

$$U_N(x,0) = \sigma_{m-2}^0 + 26\sigma_{m-1}^0 + 66\sigma_m^0 + 26\sigma_{m+1}^0 + \sigma_{m+2}^0 = U(x_m, 0)$$

$$(U_N)_x(b,0) = \sigma_{N+2}^0 + 10\sigma_{N+1}^0 - 10\sigma_{N-1}^0 - \sigma_{N-2}^0 = 0$$

$$(U_N)_{xx}(b,0) = \sigma_{N+2}^0 + 2\sigma_{N+1}^0 - 6\sigma_N^0 + 2\sigma_{N-1}^0 + \sigma_{N-2}^0 = 0$$

başlangıç ve sınır koşulları kullanılır.

3.6. Nümerik Çözümler

$$U_t + U_x + \varepsilon U U_x + \mu U_{xxt} = 0 \quad (3.6.1)$$

şeklinde tanımlı RLW denkleminin çözümünde kullanılan Kuintik B-Spline Kolokeyşin metodunun etkinliğini göstermek için tek solitary dalga hareketini inceleyelim. Bunu tespit etmek için L_2 ve L_∞ hata normları ile çeşitli korumun sabitleri göz önünde bulundurulacaktır.

Bu sabitler;

$$C_1 = \int_a^b U dx \approx h \sum_{j=1}^N U_j$$

$$C_2 = \int_a^b (U^2 + \mu (U_x)^2) dx \approx h \sum_{j=1}^N \{ (U_j^n)^2 + \mu ((U_x)_j^n)^2 \}$$

$$C_3 = \int_a^b (U^3 + 3U^2) dx \approx h \sum_{j=1}^N \{ (U_j^n)^3 + 3(U_j^n)^2 \} \quad \text{dir.}$$

(3.6.1) şeklinde tanımlanan RLW denkleminin tek solitary dalga çözümü için;

$$U(x,t) = 3c \operatorname{sec} h^2(k[x - x_0 - vt])$$

tam çözümünü ele alalım. Burada $3c$, tek solitary dalganın dalga genişliğini gösterir.

$$v = 1 + \varepsilon c \quad \text{ve} \quad k = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon c}{\mu v} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ise dalga hızını gösterir.}$$

Hesaplamalarda $-40 \leq x \leq 40$ aralığı, $0 \leq t \leq 20$ zaman periyodu, $\varepsilon = \mu = 1$ parametreleri, $x_0 = 0$ başlangıç değeri ile $\beta_1 = \beta_2 = 0$ sınır şartları kullanılmıştır.

$$U(x,0) = 3c \operatorname{sec} h^2(k[x - x_0]) \quad \text{başlangıç koşulu kullanılır.}$$

$t=20$ zamanında $c = 0,1$ $\Delta t = 0,1$ ve $h = 0,125$ alınarak hesaplamalar yapılmıştır.

Hesaplamalar sonucunda C_1, C_2, C_3 nümerik büyüklüklerin hemen hemen hiç değişmediği görülür. Elde edilen sonuçlar çizelge haline getirilerek benzer çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

Çizelge 3.1 $t=20$ zamanında $c = 0,1$ $\Delta t = 0,1$ ve $h = 0,125$ alınarak elde edilen L_2 , L_∞ hata normları ve C_1 , C_2 , C_3 sabitleri

$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$	C_1	C_2	C_3
0.0	0.0	3.979 927 1	0.810 462 5	2.579 007 5
2.151 92	0.829 51	3.979 879 8	0.810 462 5	2.579 007 5
3.566 72	1.296 82	3.979 884 3	0.810 462 5	2.579 007 4
2.151 92	0.829 51	3.979 879 8	0.810 462 5	2.579 007 5
3.01	1.14	3.979 96	0.810 276	2.578 39
1.92	0.73	3.979 89	0.810 46	2.579 01
2.205 0	0.844 8	3.980 016	0.810 462 4	2.579 006
2.608 6	1.029 9	3.979 958	0.810 459 6	2.578 999
0.431 5	0.132 1	3.979 890	0.810 462 5	2.578 999
3.784 1	1.399 3	3.979 95	0.810 46	2.579 00
2.2	0.86	3.979 89	0.810 467	2.579 02
2.38	0.87	3.979 95	0.810 459	2.579 00

3.7. Sonuç

RLW denkleminin nümerik çözümü için Kuintik B-Spline Kolokeyşin Metodu uygulanmış ve uyumlu sonuçlar elde edildiği görülmüştür. Yöntemin etkinliğini göstermek için tek Solitary dalga çözümü incelenmiş ve elde edilen sonuçlar çizelge halinde verilmiştir. Korunum sabitlerinin hesaplama boyunca çok fazla değişiklik göstermediği görülmüştür.

4. BURGER DENKLEMİNİN KUINTİK B-SPLİNE KOLOKEYŞİN YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

4.1. Giriş

Bu bölümde, lineer olmayan Burger denkleminin Kuintik B Spline Kolokeyşin metoduyla çözümünü ele alacağız.

$$U_t + UU_x - \nu U_{xx} = 0 \quad a \leq x \leq b \quad (4.1.1)$$

$$U(x,0) = f(x) \quad (4.1.2)$$

başlangıç koşuluyla,

$$U(a,t) = \alpha_1, \quad U(b,t) = \alpha_2$$

$$U_x(a,t) = U_x(b,t) = 0 \quad (4.1.3)$$

$$U_{xx}(a,t) = U_{xx}(b,t) = 0$$

sınır koşulları ile ele alınsın.

Burada α_1 ve α_2 daha sonra ifade edilecek olan sabitler, $U = U(x,t)$ yeterince türevlenebilir fonksiyon ve $f(x)$ sınırlı bir fonksiyondur.

4.2. Metodun Uygulanması

x_m düğüm noktalarında $\varphi_m(x)$ Kuintik B-Spline fonksiyonları kullanılarak;

$m = -2, \dots, N+2$ $[a,b]$ aralığında çözüm araştırılm.

Burger denklemindeki $U(x,t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümünün $U_N(x,t)$ olduğunu varsayalım (Sepehrian, Lashani, 2008). Kuintik B- Spline fonksiyonlar türünden yaklaşık çözüm;

$$U_N(x,t) = \sum_{m=-2}^{N+2} \delta_m(t) \varphi_m(x) \quad (4.2.1)$$

Zamana bağlı sınır koşulları ise;

$$\begin{aligned}
U_N(a, t) &= \alpha_1, & U_N(b, t) &= \alpha_2 \\
(U_N)_x(a, t) &= (U_N)_x(b, t) = 0 \\
(U_N)_{xx}(a, t) &= (U_N)_{xx}(b, t) = 0
\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

ve kolokeyşim koşulu;

$$(U_N)_t(x_i, t) + U_N(x_i, t)(U_N)_x(x_i, t) - v(U_N)_{xx}(x_i, t) = 0 \tag{4.2.3}$$

olur. (4.2.1) denklemini (4.2.3) denkleminde yerine yazarsak;

$$\sum_{i=-2}^{N+2} \frac{\partial \delta_i(t)}{\partial t} \varphi_i(x_j) + \sum_{i=-2}^{N+2} \delta_i(t) \varphi_i(x_j) \sum_{i=-2}^{N+2} \delta_i(t) \varphi_i'(x_j) - v \sum_{i=-2}^{N+2} \delta_i(t) \varphi_i''(x_j) \tag{4.2.4}$$

elde edilir. ($j=0,1,2,\dots,N$)

Kabul edelim ki δ_i , n ve $n+1$ zaman aralıklarında lineer enterpole edilebilen,

$$\delta_i = (1-\theta)\delta_i^n + \theta\delta_i^{n+1}$$

şeklindeki parametrelerdir. Burada $0 \leq \theta \leq 1$ ve δ_i^n , $n\Delta t$ zamanındaki parametrelerdir.

Sonlu farklar metodu kullanılarak;

$$\delta_i^0 = \frac{\delta_i^{n+1} - \delta_i^n}{\Delta t}$$

ve denklem (4.2.4) kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=-2}^{N+2} \varphi_i(x_j) \left(\frac{\delta_i^{n+1} - \delta_i^n}{\Delta t} \right) + \sum_{i=-2}^{N+2} \varphi_i'(x_j) \left((1-\theta)\delta_i^n + \theta\delta_i^{n+1} \right) \sum_{i=-2}^{N+2} \varphi_i(x_j) \delta_i \\
&- v \sum_{i=-2}^{N+2} \varphi_i''(x_j) \left((1-\theta)\delta_i^n + \theta\delta_i^{n+1} \right) = 0
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

elde edilir. Eğer $\theta = \frac{1}{2}$ almırsa Crank-Nicolson formülünden aşağıdaki tekrarlama bağıntısı

elde edilir.

$$\begin{aligned} \sum_{i=-1}^{N+1} \left\{ \phi_i(x_j) \frac{\Delta t}{2} \phi_i'(x_j) \left(\sum_{k=-1}^{N+1} \phi_k(x_j) \delta_k \right) - \frac{v\Delta t}{2} \phi_i''(x_j) \right\} \delta_i^{n+1} = \\ \sum_{i=-1}^{N+1} \left\{ \phi_i(x_j) \frac{\Delta t}{2} \phi_i'(x_j) \left(\sum_{k=-1}^{N+1} \phi_k(x_j) \delta_k \right) + \frac{v\Delta t}{2} \phi_i''(x_j) \right\} \delta_i^n \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Denklem (4.2.6) x_j noktalarında ($j=0,1,2,\dots,N$) hesaplanır ve $x = x_0$ alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} a_0 \delta_{-2}^{n+1} + b_0 \delta_{-1}^{n+1} + c_0 \delta_0^{n+1} + d_0 \delta_1^{n+1} + e_0 \delta_2^{n+1} = \\ a'_0 \delta_{-2}^n + b'_0 \delta_{-1}^n + c'_0 \delta_0^n + d'_0 \delta_1^n + e'_0 \delta_2^n \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Burada;

$$\begin{aligned} a_0 = 1 - r_1 Z_{i-2} - r_2 \quad , \quad a'_0 = 1 + r_1 Z_{-2} + r_2 \\ b_0 = 26 - 10r_1 Z_{-2} - 2r_2 \quad , \quad b'_0 = 26 + 10r_1 Z_{-2} + 2r_2 \\ c_0 = 66 + 6r_2 \quad , \quad c'_0 = 66 - 6r_2 \\ d_0 = 26 + 10r_1 Z_{-2} - 2r_2 \quad , \quad d'_0 = 26 - 10r_1 Z_{-2} + 2r_2 \\ e_0 = 1 + r_1 Z_{-2} - r_2 \quad , \quad e'_0 = 1 - r_1 Z_{-2} + r_2 \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

ve

$$Z_{-2} = \delta_{-2} + 26\delta_{-1} + 66\delta_0 + 26\delta_1 + \delta_2 \quad \text{olarak alınır.}$$

$x = x_i$ alındığında (4.2.6) denklemi;

$$\begin{aligned} a_i \delta_{i-2}^{n+1} + b_i \delta_{i-1}^{n+1} + c_i \delta_i^{n+1} + d_i \delta_{i+1}^{n+1} + e_i \delta_{i+2}^{n+1} = \\ a'_i \delta_{i-2}^n + b'_i \delta_{i-1}^n + c'_i \delta_i^n + d'_i \delta_{i+1}^n + e'_i \delta_{i+2}^n \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

burada;

$$\begin{aligned}
a_i &= 1 - r_1 Z_{i-2} - r_2 & , & & a'_i &= 1 + r_1 Z_{-2} + r_2 \\
b_i &= 26 - 10r_1 Z_{-2} - 2r_2 & , & & b'_i &= 26 + 10r_1 Z_{-2} + 2r_2 \\
c_i &= 66 + 6r_2 & , & & c'_i &= 66 - 6r_2 \\
d_i &= 26 + 10r_1 Z_{-2} - 2r_2 & , & & d'_i &= 26 - 10r_1 Z_{-2} + 2r_2 \\
e_i &= 1 + r_1 Z_{-2} - r_2 & , & & e'_i &= 1 - r_1 Z_{-2} + r_2
\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

$$Z_{i-2} = \delta_{i-2} + 26\delta_{i-1} + 66\delta_i + 26\delta_{i+1} + \delta_{i+2}$$

(4.2.10) denklem sistemi $N+1$ denklem, $N+5$ bilinmeyenden oluşur. Sınır koşulları yardımıyla yok etme işlemi yapılarak $(N+1) \times (N+1)$ boyutlu denklem sistemi elde edilir.

4.3. Başlangıç Durumu

$$U_N(x, 0) = \sum_{i=-2}^{N+2} \delta_i^0 \varphi_i(x) \tag{4.3.1}$$

başlangıç koşulunu ele alalım.

$$\begin{aligned}
U_N(x_i, 0) &= U(x_i, 0) \\
(U_N)_x(x_0, 0) &= U_x(a, 0) = 0, \quad (U_N)_x(x_N, 0) = U_x(b, 0) = 0 \\
(U_N)_{xx}(x_0, 0) &= U_{xx}(a, 0) = 0, \quad (U_N)_{xx}(x_N, 0) = U_{xx}(b, 0) = 0
\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

$$i=0, 1, 2, \dots, N$$

$\delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0$ ve $\delta_{N+1}^0, \delta_{N+2}^0$ parametrelerinin (4.3.2) denklemlerinde elemine edilmesiyle;

$$A\delta^0 = r$$

şeklinde matris sistemleri elde edilir.

Burada A matrisi;

$$A = \begin{bmatrix} 54 & 60 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots 0 \\ \frac{101}{4} & \frac{135}{2} & \frac{105}{4} & 1 & 0 & 0 & \dots\dots\dots 0 \\ 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & 0 & \dots\dots\dots 0 \\ & & \dots\dots\dots & & & & \\ & & \dots\dots\dots & & & & \\ 0 & \dots\dots\dots 0 & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \\ 0 & \dots\dots\dots 0 & 0 & 1 & \frac{105}{4} & \frac{135}{2} & \frac{101}{4} \\ 0 & \dots\dots\dots 0 & 0 & 0 & 6 & 60 & 54 \end{bmatrix}$$

$$\delta^0 = [\delta_0^0, \delta_1^0, \delta_2^0, \dots, \delta_N^0]^T$$

$$r = [U(x_0, 0), U(x_1, 0), \dots, U(x_N, 0)]^T$$

şeklindedir.

4.4. Nümerik Çözümler

Burger denkleminin Kuintik B Spline Kolokeyşin metoduyla nümerik çözümleri elde etmek için standart bir problem üzerinde çalışalım.

Metodun doğruluğunu ölçmek için analitik çözüm ile nümerik çözüm arasındaki farkı L_2 ve L_∞ hata normlarını kullanarak inceleyelim. Burger denkleminin analitik çözümü olarak;

$$U(x, t) = \frac{\frac{x}{t}}{1 + \sqrt{\frac{t}{s} \exp\left(\frac{x^2}{4vt}\right)}}, \quad t \geq 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad s = \exp\left(\frac{1}{8v}\right) \quad (4.4.1)$$

alalım. Başlangıç koşulu (4.4.1) denkleminde $t=1$ alınmasıyla bulunabilir. Sınır koşulları ise;

$$\begin{aligned} U(0, t) &= U(1, t) = 0 \\ U_x(0, t) &= U_x(1, t) = 0 \end{aligned}$$

şeklindedir.

Hesaplamalar sonucunda elde edilen sonuçlar çizelge halinde verilmiştir.

$\nu = 0,0015$, $\Delta t = 0,01$ ve $\Delta x = 0,005$ alınarak;

Çizelge 4.1 $\nu = 0,0015$, $\Delta t = 0,01$ ve $\Delta x = 0,005$ alınarak elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları

x	Kuintik	Analitik	Kuintik	Analitik
	B Spline		B Spline	
	Kolokeyşin Metodu	Çözüm	Kolokeyşin Metodu	Çözüm
	t=1.7	t=1.7	t=2.5	t=2.5
0.1	0.05893	0.05882	0.04003	0.04000
0.2	0.11799	0.11764	0.08016	0.08000
0.3	0.17699	0.17647	0.12024	0.12000
0.4	0.23599	0.23529	0.16032	0.16000
0.5	0.29499	0.29412	0.20040	0.20000
0.6	0.35313	0.35216	0.24048	0.24000
0.7	0.00048	0.00053	0.28050	0.27995
0.8	0.00000	0.00000	0.05644	0.06040
0.9	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
L_2	2.26079e-004		3.05381e-004	
L_∞	0.00118		0.00352	

4.5. Sonuç

Bu bölümde lineer olmayan Burger denkleminin Kuintik B Spline Kolokeyşin metoduyla çözümü verilmiştir. Elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözümlerle uyumlu olduğu görülmüştür. Özellikle ν viskozite sabiti küçük değerler aldığı anda daha iyi sonuçlar elde edildiği görülmektedir.

5. SONUÇ

Bu çalışmada, Kuintik B-Spline Kolokeyşin metodu kullanılarak lineer olmayan Klein-Gordon Denklemi, RLW Denklemi ve Burger Denklemine sayısal çözümleri elde edilmiştir. Klein-Gordon denklemi için farklı konum ve zaman aralıkları kullanılarak yapılan hesaplamalar sonucunda L_2 ortalama hata normu ve L_∞ maksimum hata normu ölçümlerinin iyi sonuçlar verdiği görülmüştür. RLW denkleminde yöntemin etkinliğini göstermek için tek Solitary dalga çözümü incelenmiş korunum sabitlerinin hesaplama boyunca çok fazla değişiklik göstermediği görülmüştür. Burger denkleminde elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözümlerle uyumlu olduğu görülmüş, özellikle ν viskozite sabiti küçük değerler aldığı daha iyi sonuçlar elde edildiği görülmektedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- [1] Alexander, M. E., Morris, J. L. L. 1979, Galerkin methods applied to some model equations for non-linear dispersive waves, *J. Comput. Physics.*, 30, 428-451.
- [2] Bateman, H., 1915, Some Recent Researches on the Motion of Fluids, *Monthly Weather Rec.*, 43, 163-170.
- [3] Sepehrian B., Lashani M. 2008, A numerical Solution of the Burgers Equation Using Quintic B-Splines,
- [4] Benjamin, T. B., Bona, J. L., Mahony, J. J. 1972, Model equations for long waves in nonlinear dispersive systemes, *Phil. Trans. Roy. Soc., London*, A272, 47-48.
- [5] Bhardwaj, D., Shankar, R. 2000, A computational method for regularised long wave equation, *Comp. Math. Appl.*, 40, 1397-1404.
- [6] Bona, J. L., Byrant, P. J. 1993, A mathematical model for long waves in nonlinear dispersive system, *Proc. Cambridge Phill. Soc.*, 73, 391.
- [7] Boz A. 2006, Klein – Gordon Denklemnin B-Spline Kolokeyşın Metodları ile çözümü, Doktora Tezi, (Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü).
- [8] Chang, Q., Wang, G., Guo, B. 1995, Conservative scheme for a model of nonlinear dispersive waves and its solitary waves induced by boundary motion, *J. Comput. Physics.*, 93, 360-375.
- [9] Dağ, I., 2000, Least squares quadratic B-spline finite element method for the regularized long wave equation, *comp. Methods appl. Mech. Eng.*, 182, 205-215.
- [10] Dağ, İ., Özer, M. N. 2001, Approximation of the RLW equation by the least quare cubic B-spline finite element method, *Appl. Math. Modelling*, 25, 221-231.
- [11] Davies, A.J., 1980, *The Finite Element Method : A First Approach*, Clarendon Pres Oxford.
- [12] Doğan, A., 2001, Numerical solution of regularized long wave equation using Petrov-Galerkin method, *Comm. Numer. Methods Eng.*, 17, 485-494.
- [13] Doğan, A. 2002, Numerical solution of RLW equation using linear finite elements within Galerkin's method, *Applied Mathematical Modelling*, 27 (7), 771-783.
- [14] Eilbeck, J. C., McGuire, G. R. 1975, Numerical study of the RLW equation I: Numerical Methods, *J. Comput. Physics.*, 19, 43-57.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devamı)

- [15] Eilbeck, J. C., McGuire, G. R. 1977, Numerical study of the RLW equation II: Numerical Methods, J. Comput. Physics., 23, 63-73.
- [16] Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., Ayoub, F. A., Amien, N. K. 1997, Simulations of the EW undular bore, Communications in Numerical Methods in Engineering, 13, 583-592.
- [17] Gardner, L. R. T., Gardner, G. A. 1990, Solitary waves of the regularized long wave equation, Journal of Computational Physics., 91, 441-459.
- [18] Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., Dağ, İ. 1995, A B-spline finite element methods for the RLW equation, Communications in Numerical Methods in Engineering, 11, 59-68.
- [19] Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., Dağ, İ. 1995, The boundary forced RLW equation, Nuova Cimento, 110B, 1487-1496.
- [20] Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., Doğan, A. 1996, A least-squares finite element scheme for the RLW equation, Communications in Numerical Methods in engineering, 12, 795-804.
- [21] Jain, P. C., Shankar, R., Singh, T. V. 1993, Numerical solutions of regularized long wave equation, Communications in Numerical methods in Engineering, 9, 579-594.
- [22] Padam C. J. and Iskandar L. 1979, Numerical solutions of the Regularized long wave equation, Comp. Methods Appl. Mech. Eng., 20, 195-201.
- [23] Peregrine, D. H. 1966, Calculations of the development of an undular bore, Journal of Fluid Mechanics, 25, 321-330.
- [24] Polyanin, A. D., Zaitsev V. E., 2004, Handbook of non-linear partial differential equations, Chapman&Hall / CRC.
- [25] Saka B. , Dağ İ. ve Irk D. 2008, Quintic B-Spline Collocation Method For Numerical Solution Of The Rlw Equation, 389-410.
- [26] Saka, B. 2002, RLW ve K-S denklemlerinin B-spline kolokeyşin metotları ile çözümleri, Osmangazi Üniv. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Doktora Tezi, 8-10, Eskişehir.
- [27] Sanz - Serna, J. M. and Christie, I. 1981, Petrov Galerkin methods for non-linear dispersive waves, J.Comp.Phys., 39, 94-102.