

BETA PARÇACIKLARININ
ALÜMİNYUM MALZEMELERDE SOĞURULMASININ
DENEYSEL VE TEORİK OLARAK İNCELENMESİ

Mürsel ŞEN

Yüksek Lisans Tezi

Fizik Anabilim Dalı

Şubat – 2014

BETA PARÇACIKLARININ
ALÜMİNYUM MALZEMELERDE SOĞURULMASININ
DENEYSEL VE TEORİK OLARAK İNCELENMESİ

Mürsel ŞEN

Dumlupınar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliği Uyarınca
Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. A. Engin ÇALIK

Şubat – 2014

KABUL ve ONAY SAYFASI

Mürsel ŞEN'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "BETA PARÇACIKLARININ ALÜMİNYUM MALZEMELERDE SOĞURULMASININ DENEYSEL VE TEORİK OLARAK İNCELENMESİ" başlıklı bu çalışma, jürimizce Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

14/02/2014

Üye : Prof. Dr. Atalay KÜÇÜKBURSA

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hüseyin ERTİK

Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdullah Engin ÇALIK (Danışman)

Fen Bilimleri Enstitüsün Yönetim Kurulu'nun/...../..... gün ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hasan GÖÇMEZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

**BETA PARÇACIKLARININ
ALÜMİNYUM MALZEMELERDE SOĞURULMASININ
DENEYSEL VE TEORİK OLARAK İNCELENMESİ**

Mürsel ŞEN

Fizik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2014

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. A. Engin Çalık

ÖZET

Bu çalışmada alüminyum soğurucuların yarı-değer kalınlıkları deneysel ve teorik olarak incelenmiştir. Radyoaktif kaynak olarak beta bozunması yapan ^{99}Tc , ^{36}Cl , ^{14}C , ^{210}Pb , ^{147}Pm , $^{90}Sr/^{90}Y$, ^{137}Cs ve ^{204}Tl radyoizotopları kullanılmıştır. Teorik ve deneysel yarı-değer kalınlıkları arasında uyumsuzluk olduğu görülmüştür. Bu uyumsuzluğu giderebilmek için standart soğurulma denklemi kesirsel matematik kullanılarak yeniden çözülmüştür. Bu bağlamda, şiddetin soğurulması denklemindeki birinci mertebeden kalınlığa bağlı türev operatörü yerine, Caputo kesirsel türev operatörü kullanılmıştır. Bu yeni denklemin çözümü Mittag – Leffler fonksiyonu cinsinden elde edilmiştir. Deneysel ve teorik sonuçları eşdeğer yapan kesirsel türev mertebeleri hesaplanmıştır. Farklı beta kaynakları kullanılsa bile teorik yarı-değer kalınlığını deneysel verilere (sonuçlara) eşdeğer kılan kesirsel türev mertebesi $\alpha \cong 0,31$ olarak elde edilmiştir. Farklı beta kaynakları için alüminyum soğurucuların yarı-değer kalınlıklarının 0,31. mertebeden basit bir kesirsel diferansiyel denklemden hesaplanabileceği sonucuna varılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Alüminyum Soğurucu, Caputo Kesirsel Türevi, Kesirsel Matematik, Mittag-Leffler Fonksiyonu, Soğurma Denklemi, Yarı-değer Kalınlık.

EXPERIMENTAL AND THEORETICAL INVESTIGATION OF ABSORPTION BY ALUMINUM MATERIALS FOR BETA PARTICLES

Mürsel ŞEN

Physics Department, M.S Thesis, 2014

Thesis Supervisor: Assist. Prof. Dr. A. Engin Çalık

SUMMARY

In this study, the half-values thickness of the aluminum absorbers has been investigated experimentally and theoretically. The ^{99}Tc , ^{36}Cl , ^{14}C , ^{210}Pb , ^{147}Pm , $^{90}\text{Sr}/^{90}\text{Y}$, ^{137}Cs and ^{204}Tl radio-isotopes have been used as beta sources. There is an inconsistency between the experimental measurements and standard theoretical calculations. Standard attenuation equation has been resolved with using fractional calculus. In this context, the Caputo fractional derivative operator has been performed instead of the first order derivative operator in attenuation equation. The solution of this new equation has been obtained in terms of the Mittag – Leffler function. Fractional derivative order has been calculated to make experimental measurements be coherent with theoretical calculations. Even if different beta sources are used, the equivalent experimental and theoretical half-value thickness have been found for fractional derivative order $\cong 0.31$. It is concluded that, for different beta sources, the half-value thicknesses of aluminum foils can be calculated by using α simple fractional differential equation of order 0.31.

Keywords: Aluminum Absorbers, Attenuation Equation, Caputo Fractional Derivative, Fractional Calculus, Half-Value Thickness, Mittag-Leffler Function.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca değerli vaktini ayırıp, bilgi ve tecrübeleri ile beni yönlendiren; her türlü kaynağını, ilgisini, desteğini ve yardımlarını benden esirgemeyen, hayata bakış açısıyla örnek teşkil ettiğim değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Abdullah Engin ÇALIK'a;

Öğrenimim süresince engin bilgi ve dostluğunu bizden esirgemeyen saygıdeğer hocam Doç. Dr. Cemal PARLAK'a;

Bu alanda engin bilgi ve tecrübelerini bizden esirgemeyen Akdeniz Üniversitesi'nden Sayın Yrd. Doç. Dr. Hüseyin ERTİK ve Ege Üniversitesi'nden Sayın Dr. Hüseyin ŞİRİN'e;

Dumlupınar Üniversitesi Bilgisayar ve Öğretim Teknolojileri Eğitimi Bölümü öğretim üyelerinden Yrd. Doç. Dr. M. Menderes ALYÖRÜK'e;

Her daim birlikte ders çalışmaktan büyük keyif alacağım değerli çalışma arkadaşım Buket ÖDER'e;

7 yıl boyunca hayatıma aynı çatı altında eşlik eden saygıdeğer arkadaşım Mahir TURSUN'a;

Bilimsel Araştırma Projesi (Proje No: 2013/31) ile deneysel çalışmalarımıza destek veren Dumlupınar Üniversitesi'ne;

Bugünlere gelmemde çok büyük emekleri olan annem ve babama teşekkür ederim...

Mürsel ŞEN

Şubat 2014, Kütahya

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	İV
SUMMARY	V
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	İX
ÇİZELGELER DİZİNİ	XI
SİMGELER DİZİNİ	XII
1. GİRİŞ	1
2. KESİRSEL MATEMATİK.....	3
2.1 Neden Kesirsel Matematik?	3
2.2 Kesirsel Matematiğin Tarihsel Gelişimi	3
2.3 Kesirsel Matematikte Kullanılan Bazı Önemli Fonksiyonları	4
2.3.1. Gama fonksiyonu	4
2.3.2. Laplace dönüşümü	5
2.3.3. Ters Laplace dönüşümü	6
2.3.4. Mittag – Leffler fonksiyonu	6
2.4 Kesirsel Türev ve İntegral Tanımları	7
2.4.1. Grünwald – Letnikov tanımı	8
2.4.2. Riemann – Liouville tanımları	8
2.4.2.1 Riemann – Liouville kesirsel integrali	8
2.4.2.2 Riemann – Liouville kesirsel türevi	9
2.4.2. Caputo tanımı	9
3. YARI-DEĞER KALINLIĞIN KESİRSEL MATEMATİK İLE İNCELENMESİ	11
3.1 Radyoaktif Bir Kaynağın Şiddetinin Soğurulması Denkleminin Çözümü	11
3.2 Kesirsel Matematiğin Soğurulma Denklemine Uygulanışı.....	12

4. DENEYSEL ÇALIŞMA	16
4.1. Kullanılan Teknik ve Cihazlar	16
İÇİNDEKİLER (devam)	
4.1.1. Geiger – Müller deney seti	16
4.1.2. Soğurucu malzeme	18
4.1.3. Beta kaynakları	19
4. HESAPLAMAR VE SONUÇLAR	20
5. TARTIŞMA	40
EK AÇIKLAMALAR – BETA BOZUNMASI	42
KAYNAKLAR DİZİNİ	43

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
3.1. Geiger – Müller sayacının şematik gösterimi.	16
3.2. Geiger – Müller sayacı için en iyi çalışma voltajının belirlenmesi.	17
3.3. Geiger – Müller deney seti.	18
3.4. Alüminyum soğurucu malzeme.	18
3.5. Beta kaynakları.	19
4.1. $^{90}\text{Sr} / ^{90}\text{Y}$ radyoaktif kaynağı kullanıldığında beta parçacık şiddetinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.	26
4.2. $^{90}\text{Sr} / ^{90}\text{Y}$ beta kaynağı için $\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$ değerinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.	26
4.3. ^{137}Cs radyoaktif kaynağı kullanıldığında beta parçacık şiddetinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.	27
4.4. ^{137}Cs beta kaynağı için $\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$ değerinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.	27
4.5. ^{204}Tl radyoaktif kaynağı kullanıldığında beta parçacık şiddetinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.	28
4.6. ^{204}Tl beta kaynağı için $\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$ değerinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.	28
4.7. ^{99}Tc radyoaktif kaynağı kullanıldığında beta parçacık şiddetinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.	29
4.8. ^{99}Tc beta kaynağı için $\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$ değerinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.	29
4.9. ^{36}Cl radyoaktif kaynağı kullanıldığında beta parçacık şiddetinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.	30
4.10. ^{36}Cl beta kaynağı için $\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$ değerinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.	30
4.11. ^{14}C radyoaktif kaynağı kullanıldığında beta parçacık şiddetinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.	31

- 4.12. ^{14}C beta kaynağı için $\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$ değerinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.
..... 31

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
4.13. ^{210}Pb radyoaktif kaynağı kullanıldığında beta parçacık şiddetinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.	32
4.14. ^{210}Pb beta kaynağı için $\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$ değerinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.	32
4.15. ^{147}Pm radyoaktif kaynağı kullanıldığında beta parçacık şiddetinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.	33
4.16. ^{147}Pm beta kaynağı için $\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$ değerinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.	33
4.17. $^{90}\text{Sr} / ^{90}\text{Y}$ Beta kaynağı için farklı kesirsel türev mertebelerine göre yarı-değer kalınlığı değişimi	35
4.18. ^{137}Cs Beta kaynağı için farklı kesirsel türev mertebelerine göre yarı-değer kalınlığı değişimi	35
4.19. ^{204}Tl Beta kaynağı için farklı kesirsel türev mertebelerine göre yarı-değer kalınlığı değişimi	36
4.20. ^{99}Tc Beta kaynağı için farklı kesirsel türev mertebelerine göre yarı-değer kalınlığı değişimi	36
4.21. ^{36}Cl Beta kaynağı için farklı kesirsel türev mertebelerine göre yarı-değer kalınlığı değişimi	37
4.22. ^{14}C Beta kaynağı için farklı kesirsel türev mertebelerine göre yarı-değer kalınlığı değişimi	37
4.23. ^{210}Pb Beta kaynağı için farklı kesirsel türev mertebelerine göre yarı-değer kalınlığı değişimi	38
4.24. ^{147}Pm Beta kaynağı için farklı kesirsel türev mertebelerine göre yarı-değer kalınlığı değişimi	38
4.25. Bütün beta kaynakları için farklı kesirsel türev mertebelerine göre yarı-değer kalınlığı değişimi.....	39

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
4.1. $^{90}\text{Sr} / ^{90}\text{Y}$ için deneysel veriler.....	21
4.2. ^{137}Cs için deneysel veriler.	22
4.3. ^{204}Tl için deneysel veriler.....	23
4.4. ^{99}Tc için deneysel veriler.....	24
4.5. ^{36}Cl için deneysel veriler.....	24
4.6. ^{14}C için deneysel veriler.....	24
4.7. ^{210}Pb için deneysel veriler.	25
4.8. ^{147}Pm için deneysel veriler.	25
4.9. Kütle soğurma katsayıları.	34
4.10. Alüminyum soğurucu malzemenin yarı-değer kalınlıkları (mg / cm^2).	34

SİMGELELER DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
μ	Lineer soğurma katsayısı
ρ	Yoğunluk
μ_m	Kütle soğurma katsayısı
$I(x)$	x kalınlığındaki radyoaktif kaynağın şiddeti
I_0	$x = 0$ kalınlığındaki şiddet
$x_{1/2}$	Yarı-değer kalınlık
$\Gamma(z)$	Gama fonksiyonu
E_α	Mittag – Leffler fonksiyonu
J^α	Riemann – Liouville integral operatörü
${}^{RL}D^\alpha$	Riemann – Liouville türev operatörü
${}^C D^\alpha$	Caputo türev operatörü
α	Alfa kesirsel türev/integral mertebesi
${}^{90}\text{Sr} / {}^{90}\text{Y}$	Stronsiyum
${}^{137}\text{Cs}$	Sezyum
${}^{204}\text{Tl}$	Talyum
${}^{99}\text{Tc}$	Teknesyum
${}^{36}\text{Cl}$	Klor
${}^{14}\text{C}$	Karbon
${}^{210}\text{Pb}$	Kurşun

^{147}Pm

Prometyum

Al

Alüminyum

1. GİRİŞ

Elektron ve pozitronların farklı maddelerden geçişleri radyoaktivitenin keşfinden itibaren birçok çalışmanın konusu olmuştur (Leonard and Pobereskin, 1948; Seliger, 1952, 1955; Libby, 1956; Takhar, 1967, 1968). Beta parçacıkları, alüminyum gibi herhangi bir madde içinden geçerken, parçacıkların bir kısmı soğurulur. Parçacıkların soğurulma hızı, hem parçacıkların enerjisine hem de soğurucu maddenin kalınlığına bağlıdır. Beta parçacık şiddeti ile soğurucu maddenin kalınlığı arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir (Leo, 1994);

$$\frac{dI(x)}{dx} = -\mu_m I(x).$$

Burada, I beta parçacık şiddeti, μ_m kütle soğurma katsayısı ve x soğurucu maddenin kalınlığıdır. Bu denklemin standart çözümü,

$$I(x) = I_0 \exp(-\mu_m x)$$

şeklindeir. Burada I_0 beta parçacıklarının soğurucu madde tarafından soğurulmadan önceki şiddetidir. Soğurucu maddenin yarı-değer kalınlığı, başlangıçtaki beta parçacık şiddetinin yarıya düşmesi için gerekli olan soğurucu kalınlığıdır ve aşağıdaki şekilde ifade edilir;

$$x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu_m}.$$

Beta parçacıklarının farklı maddelerde soğurulması ve kütle soğurma katsayılarının analizi günümüzde de devam etmektedir (Batra and Sehgal, 1981; Ram et al., 1982; Burek and Chocyk, 1996; Gürler and Yalçın, 2005; La Rocca and Riggi, 2009; Ermiş and Çeliktas, 2012). Al, Cu ve Au soğurucu maddelerinde elektron ve pozitronların menzillerinin belirlenmesi için farklı bir teorik metot Batra ve Sehgal (Batra and Sehgal) tarafından geliştirilmiştir. Be, Al, Cu, Ag ve Pb soğurucu maddelerinde, beta parçacıklarının menzilleri, kütle soğurulma katsayıları, elektronların maksimum enerjileri ile kütle soğurulma katsayıları arasındaki ilişkiyi gösteren yarı-deneysel formalizim Ram ve arkadaşları (Ram et al., 1982) tarafından incelenmiştir. Burek ve Chocyk tarafından kütle soğurulma katsayısı ile ilgili parametreler hesaplanmıştır (Burek and Chocyk, 1996). Gürler ve Yalçın Al, Cu ve Au soğurucu maddeleri için beta parçacıklarının kütle soğurulma katsayılarını teorik bir metot ile elde etmişlerdir (Gürler and Yalçın, 2005). $^{90}\text{Sr}/^{90}\text{Y}$ beta kaynağı kullanılarak Al, pirinç ve karton için kütle soğurulma katsayıları La Rocca ve Riggi tarafından incelenmiş ve GEANT simülasyonları ile elde edilen sonuçlar ile

kıyaslanmıştır (La Rocca and Riggi, 2009). Beta soğurulma katsayıları zamanlama metodu kullanılarak Ermiş ve Çeliktas tarafından hesaplanmıştır (Ermiş and Çeliktas, 2012).

Bu çalışmamızda, beta parçacıkları şiddetinin farklı kalınlıklardaki alüminyum soğuruculardan geçişi $^{90}\text{Sr}/^{90}\text{Y}$, ^{137}Cs , ^{204}Tl , ^{99}Tc , ^{36}Cl , ^{14}C , ^{210}Pb ve ^{147}Pm radyoizotopları kullanılarak deneysel ve teorik olarak incelenmiştir. Alüminyum soğurucuların kütle soğurma katsayıları ve yarı-değer kalınlıkları, deneysel sonuçlar kullanılarak hesaplanmıştır. Standart (teorik) yarı-değer kalınlıkları ile deneysel yarı-değer kalınlıkları arasında uyumsuzluk olduğu görülmüştür. Bu uyumsuzluğu giderebilmek için standart soğurulma denklemi, kesirsel matematik kullanılarak yeniden çözülmüştür. Deneysel ve teorik sonuçları eşdeğer yapan kesirsel türev mertebeleri hesaplanmıştır. Farklı beta kaynakları kullanılsa bile teorik yarı-değer kalınlığını deneysel yarı-değer kalınlığına eşdeğer kılan tek bir kesirsel türev mertebesi elde edilmiştir. Bu kesirsel türev mertebesi beta kaynaklarına bağlı olmayıp alüminyum soğurucu için sabit olarak bulunmuştur.

Tezin içeriği şu şekildedir: İkinci bölümde kesirsel matematik ve tarihine, üçüncü bölümde soğurulma denkleminin kesirsel matematik ile çözümüne, dördüncü bölümde deneysel yöntem, beşinci bölümde hesaplamalar ve sonuçlara, altıncı bölümde ise tartışmaya yer verilmiştir.

2. KESİRSEL MATEMATİK

2.1 Neden Kesirsel Matematik?

Standart matematik, doğrusal olmayan ve denge durumundan uzak süreçlerin çalışılmasında karşılaşılan fraktal fonksiyonların incelenmesinde yetersiz kalmaktadır. Bu tip fonksiyonların doğasını aydınlatmak için kesirsel matematik kullanılmalıdır (Ertik, 2010; Şirin, 2011). Yani; fraktal fonksiyonlar genelde ampirik yaklaşımlarla ortaya konduğundan, standart matematiksel yaklaşımlarla elde edilememektedir. Bu tip fonksiyonların doğası kesirsel matematik kullanılarak aydınlatılabilmektedir (Ertik, 2010).

2.2 Kesirsel Matematiğin Tarihsel Gelişimi

Kesirsel matematiğin tarihi 30 Eylül 1695 tarihinde L'Hospital'in, $\frac{d^n y}{dx^n}$ notasyonunun mucidi olan Leibniz'e yazdığı bir mektupta “ $n = \frac{1}{2}$ ise $\frac{d^n y}{dx^n}$ notasyonu ne anlama gelir?” sorusuna Leibniz'in $\frac{d^{1/2} y}{dx^{1/2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$ şeklinde cevap vermesiyle başlar. Daha sonra sırasıyla; Euler (1730), Lagrange (1772), Lacroix (1819), Fourier (1822), Louville (1832), Riemann (1853), Holmgren (1864), Grünwald (1867), Letnikov (1868), Krug (1890) ve Caputo (1967) kesirsel matematiğin gelişiminde önemli rol oynamışlardır. Liouville; geometrideki ve mekanikteki bazı problemlere, Riemann; bir belirli integral içeren ve tamsayı olmayan üslerle yazılmış kuvvet serilerine kesirsel matematiği uygulamıştır. Grünwald; Liouville'nin yaklaşımındaki sınırlamalar yerine bir türev tanımı için kendi başlangıç noktasını kullanarak q. mertebeden türev için belirli bir integral formülü elde etmiştir. Krug; sıradan türevler için Cauchy integral formülü ile çalışarak, Liouville tanımının ayırt edilebilir herhangi bir alt limiti yokken Riemann belirli integralinin bir alt limiti olabileceği yorumunu ortaya koymuştur. Abel; eşzaman (tautochrone) problemini, Heaviside; elektromanyetik teorisinin bazı problemlerini ve iletim teorisini, Boole; sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin çözümünü, Gemant; Heaviside'm iletim teorisini esneklik problemlerini kesirsel matematik ile ele almışlardır. Yakın tarihte ise; Weyl, Hardy, Kober ve Kuttner, Hardy ve Littlewood isimli bilim adamları, Lebesgue ve Lipschitz sınıflarına ait fonksiyonların diferentegrallerinin bazı özel ve doğal özelliklerini, Erdélyi ve Osler sıradan fonksiyonlara göre diferentegrallerin tanımını, Riesz birden fazla değişkene bağlı fonksiyonlar için kesirsel integrasyon teorisini, Erdélyi integral denklemlerin çözümü için kesirsel matematiği, Higgins diferansiyel denklemleri çözmek için

kesirsel integral işlemcileri, Scott Blair, Shermorgor ve Graham isimli bilim adamları diferintegral işlemcileri kullanarak akışkanlar teorisini, Belavin, Oldham, Oldham ve Spanier, Grenness ve Oldham kesirsel integral ve türev işlemcilerini kullanarak elektrokimya bilimini yine Oldham, Oldham ve Spanier kesirsel matematik kullanarak genel iletim problemlerini, Somorjai ve Bishop kesirsel matematik yöntemleri kullanarak fizikokimya bilimini incelemiştir (Oldham and Spainer, 1974; Ertik, 2010; Şirin, 2011; Karadeniz, 2008). Ayrıca; nükleer fizikte bir uygulaması da Çalık, Öder, Ertik ve Şirin tarafından yapılmış olup, nükleer bozunma denklemini kesirsel matematik kullanarak yeniden tanımlamışlar ve alfa bozunmaları için incelemiştir (Çalık et al., 2013).

2.3 Kesirsel Matematikte Kullanılan Bazı Önemli Fonksiyonlar ve Yöntemler

2.3.1. Gama fonksiyonu

$0 < x < \infty$ değerleri için

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (2.1)$$

Euler integrali biçiminde tanımlanan fonksiyona gama fonksiyonu denir. Gama fonksiyonu, faktöriyel fonksiyonunun reel ve kompleks sayılara genişlemesi olan bir fonksiyon olup $\Gamma(z)$ notasyonu ile ifade edilir. En genel tanımı ise;

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (2.2)$$

biçiminde olup, z 'nin sıfırdan büyük ve tamsayı değerlerine bakıldığında $\Gamma(1)=1$ olduğu açıktır. $z = 2, 3, 4, \dots$ değerleri için

$$\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1 = 1! \quad (2.3)$$

$$\Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2! \quad (2.4)$$

$$\Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3! \quad (2.5)$$

⋮

$$\Gamma(n) = (n-1).\Gamma(n-1) = (n-1)! \quad (2.6)$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n! \quad (2.7)$$

bulunur. $z = -1, -2, -3, \dots$ değerleri için ise kutup noktalarında $\Gamma(z)$ fonksiyonu sonsuza ıraksamaktadır (Podlubny, 1999; Arfken, 2005; Boas, 1966).

2.3.2. Laplace dönüşümü

t gerçel değişkenine bağlı uygun bir $f(t)$ fonksiyonu, s gerçel değişkeninin başka bir $\tilde{f}(s)$ fonksiyonuna dönüştüren kavrama Laplace dönüşümü denir. Bu dönüşüm t 'nin "bilinmeyen" bir fonksiyonu cinsinden yazılmış bir diferansiyel denkleme ilişkin başlangıç değer problemine uygulandığında onu, s değişkeni bulunduran bir cebirsel probleme dönüştürür.

$f(t)$, t gerçel değişkeninin $t > 0$ için tanımlı bir fonksiyonu olsun. s bir gerçel değişken ve $\tilde{f}(s)$ de

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (2.8)$$

integralinin mevcut olduğu bütün s değerleri için tanımlı olsun. Burada s , $s = \sigma + jw$ ($\sigma, w \in \mathbb{R}$) biçiminde tanımlanan bir kompleks değişkendir. (2.8) integrali ile tanımlı $\tilde{f}(s)$ fonksiyonuna, $f(t)$ 'nin Laplace dönüşümü denir. $\tilde{f}(s)$ 'nin $f(t)$ Laplace dönüşümü $L\{f(t)\}$ ile gösterilir.

f ve g $0 \leq t \leq b$ kapalı aralığında sürekli ve üstel mertebeli Laplace dönüşümü alınabilen iki fonksiyon olsunlar. Bu fonksiyonların $f * g$ şeklinde gösterilen ve

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlanan ifadesine f ve g fonksiyonlarının konvolüsyon çarpımları denir. Konvolüsyon işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir;

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) \quad (\text{değişme özelliği})$$

$$f(t) * [g(t) + h(t)] = f(t) * g(t) + f(t) * h(t) \quad (\text{dağılma özelliği})$$

$$k \in R \text{ olmak üzere } f(t) * (kg(t)) = k(f(t) * g(t))$$

$$f(t) * [g(t) * h(t)] = [f(t) * g(t)] * h(t) \quad (\text{birleşme özelliği})$$

özelliklerine sahiptir. Konvolüsyon çarpımının Laplace dönüşümü ise

$$L\{f(t) * g(t)\} = \tilde{f}(s) \cdot \tilde{g}(s) \quad (2.10)$$

şeklindedir (Aydın vd., 2009; Podlubny, 1999; Arfken and Weber, 2005; Boas, 1966).

2.3.3. Ters Laplace dönüşümü

$t > 0$ olmak üzere $\tilde{f}(s)$, $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü olsun. $\tilde{f}(s)$ 'nin ters Laplace dönüşümü L^{-1} notasyonu ile gösterilir ve

$$f(t) = L^{-1}\{\tilde{f}(s); t\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \tilde{f}(s) ds, \quad c = \text{Re}(s) > c_0 \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanır. Burada c_0 , (2.8) eşitliğindeki Laplace integralinin yakınsak olduğu bölgenin sağ yarısında yer alır (Aydın vd., 2009; Podlubny, 1999; Arfken and Weber, 2005; Boas, 1966).

2.3.4. Mittag – Leffler fonksiyonu

Kesirsel diferansiyel denklemlerin çözümlerinde Mittag – Leffler (ML) fonksiyonu önemli bir rol üstlenmektedir. Bir seri açılımı olarak tanımlanmakta olan ML fonksiyonu tek parametrelili genelleştirilmiş ve iki parametrelili genelleştirilmiş formlara sahiptir (Podlubny, 1999).

Tek-parametrelili ML fonksiyonu;

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{\Gamma(\alpha r + 1)}, \quad (2.12)$$

çift-parametrelili ML fonksiyonu;

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^r}{\Gamma(\alpha r + \beta)} \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada $\alpha, \beta > 0$ ve $\beta = 1$ için tek-parametrelili ML fonksiyonu elde edilmektedir $E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z)$.

2.4 Kesirsel Türev ve İntegral Tanımları

Literatürde fizik ve mühendisliğin birçok farklı alanında uygulama bulan, her geçen gün yeni ve ilginç uygulamalarda sahne alan kesirsel matematiğin birçok önemli tanımı mevcuttur. Bunlardan en yaygın kullanılanları Grünwald – Letnikov (GL), Riemann-Liouville (RL) ve Caputo tanımlarıdır. GL tanımı nümerik hesaplamalar için, diğer tanımlar ise analitik hesaplamalar için daha uygundur. RL türev ve integral tanımları pür matematik uygulamalarında önemli rol oynar. Ancak, uygulama problemleri fiziksel olarak yorumlanabilir kesirsel türev tanımları gerektirir. Bu açıdan bakıldığında, RL tanımları problemlerin fiziksel olarak yorumlanmasında yetersiz kalmaktadır. Caputo tanımı, RL tanımının fiziksel olarak yorumlanması konusundaki eksikliğini tamamlaması açısından önemlidir. Bu Caputo kesirsel türevinin RL kesirsel türevine olan bir üstünlüğü olarak anlaşılmalıdır (Podlubny, 1999; Ertik 2010; Karadeniz, 2008). İki yaklaşım arasındaki bazı önemli farklar aşağıdaki biçimde açıklanabilir:

- ✓ Caputo yaklaşımının temel avantajı, Caputo türevli kesirsel diferansiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşulları ile tamsayı mertebeli diferansiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşullarının aynı olmasıdır.
- ✓ Caputo türev tanımının Laplace dönüşümü, tamsayı mertebeli türevlerin başlangıç değerlerinin kullanımına izin verir ve bu tipteki türevlerin bilinen fiziksel yorumları mevcuttur.
- ✓ RL ve Caputo tanımları arasındaki diğer önemli bir fark da sabitin türevidir. Bir sabitin RL kesirsel türevi sıfırdan farklıdır ancak Caputo kesirsel türevi sıfırdır.
- ✓ Tanımlar arasında bir başka fark, ardışık kesirli ve tamsayı mertebeli türevlerin sıralanışıdır. Her iki yaklaşımdaki türev operatörlerinin yer değiştirmesi farklı koşullar altında gerçekleşir.

2.4.1. Grünwald – Letnikov tanımı

GL tanımı, en genel ve uygulandığı fonksiyonlar üzerine en az sınırlandırma getiren bir tanımdır. Bu tanım, türev ve integralin sıradan gösterimlerini kullanmaktan kaçınmaktadır. İlk olarak 1867 yılında Grünwald tarafından verilmiştir. Türevin genel tanımından yola çıkılarak elde edilen bu tanıma göre, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, bir fonksiyonun α . mertebeden türevi/integrali

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \left[\frac{t-a}{N} \right]^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j+1)} f \left(t - j \left[\frac{t-a}{N} \right] \right) \right\} \quad (2.14)$$

ile verilmektedir ve $\alpha, a \in \mathbb{R}$. (2.14) formülü, tamsayı mertebeden türevleri tanımlamak için kullanılan

$$\frac{d^n f}{dt^n} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta t)^{-n} \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} f(t - m\Delta t) \quad (2.15)$$

formülünün türev mertebeleri kesirsel olacak şekilde genelleştirilmiş bir formudur. Burada türev mertebesi n , bir tamsayıdır. (2.14) GL tanımında $\alpha > 0$ için bir fonksiyonun kesirsel türevi, $\alpha < 0$ için ise kesirsel integrali tanımlamaktadır (Oldham and Spanier, 1974; Miller and Ross, 1993; Podlubny, 1999).

2.4.2. Riemann – Liouville tanımları

2.4.2.1 Riemann – Liouville kesirsel integrali

$\alpha > 0$ ve $f, [a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere kesirsel Riemann – Liouville integrali

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (2.16)$$

biçiminde tanımlanır (Podlubny, 1999; Carpinteri and Mainardi, 1997).

2.4.2.2 Riemann – Liouville kesirsel türevi

Riemann – Liouville kesirsel türev tanımı,

$${}^{\text{RL}}D_t^\alpha = D^m J^{m-\alpha} f(t) \quad (2.17)$$

formülü ile tanımlanmaktadır. En genel tanımı; $f, [a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde integrallenebilen, zaman değişkenli bir fonksiyon ve $m-1 < \alpha \leq m$ ($m \in \mathbb{N}^+$) olmak üzere α . mertebeden

$${}^{\text{RL}}D_t^\alpha f(t) = \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right] \quad (2.18)$$

formülü biçiminde tanımlanır. Özel bir durum olarak $\alpha = m$ olduğunda, kesirsel türev standart türeve dönüşmektedir (Oldham and Spanier, 1974; Miller and Ross, 1993; Carpinteri and Mainardi, 1997; Podlubny, 1999).

2.4.3. Caputo tanımı

Özellikle fizikteki uygulamalarda sıklıkla kullanılan Caputo kesirsel türev tanımı $\alpha > 0$ olmak üzere,

$${}^{\text{C}}D_t^\alpha = J^{m-\alpha} D^m f(t) \quad (2.19)$$

şeklindedir. En genel tanımı ise; $f, [a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde integrallenebilen, zaman değişkenli bir fonksiyon ve $m-1 \leq \alpha < m$ ($m \in \mathbb{N}^+$) olmak üzere

$${}^{\text{C}}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau, \quad (m-1 < \alpha \leq m) \quad (2.20)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $f^{(m)}(\tau)$ 'nin integrallenebilir bir fonksiyon olması gerekir. $\alpha = m$ olması durumunda Riemann – Liouville kesirsel türev tanımında olduğu gibi Caputo kesirsel türev tanımı da standart türevlere dönüşmektedir.

RL ve Caputo türev tanımları birbirine denk değildir.

$${}^{\text{RL}}D_t^\alpha = D^m J^{m-\alpha} f(t) \neq J^{m-\alpha} D^m f(t) = {}^{\text{C}}D_t^\alpha \quad (2.21)$$

İki türev tanımı ancak $f(t)$ fonksiyonunun ve ilk $m-1$ türevinin $t=0$ değerinde sıfır olması ile birbirine denk olabilir. Riemann – Liouville ve Caputo kesirsel türevleri arasında aşağıdaki ilişki mevcuttur (Miller and Ross, 1993; Carpinteri and Mainardi, 1997; Podlubny, 1999):

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = {}^C D_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \left[f^{(k)}(t) \right]_{t=0}. \quad (2.22)$$

Literatürde, (2.18) ve (2.20) formülleri ile verilen kesirsel türev tanımları, sırasıyla sol Riemann – Liouville ve sol Caputo türevleri olarak bilinmektedir. Bunların yanı sıra, bazı problemlerde, sağ Riemann – Liouville ve sağ Caputo kesirsel türev tanımlarında kullanılması gerekmektedir. Örneğin, kesirsel kısmi integrasyon bağıntısının kullanıldığı kesirsel varyasyonlar hesabı problemlerinde, sağ kesirsel türevler doğal olarak hesaplamalarda ortaya çıkmaktadır (Riewe, 1996; Muslih and Baleanu, 2005; Rabei et al., 2007). Sağ Riemann – Liouville ve sağ Caputo kesirsel türevleri aşağıda verilen formüllerle tanımlanmaktadır:

$${}^{RL}D_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt} \right)^m \int_t^b (\tau-t)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (2.23)$$

$${}^C D_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{m-\alpha-1} \left(-\frac{d}{dt} \right)^m f(\tau) d\tau. \quad (2.24)$$

Eğer t bir zaman ölçeği ise, $f(t)$ fonksiyonu zamanla gelişen bir dinamik süreci tanımlar. t şundaki zaman olmak üzere, $f(\tau)$ durumu, $\tau < t$ için fiziksel sürecin geçmişine, $\tau > t$ için ise geleceğine aittir. Bu bakış açısından, sol kesirsel türevler fiziksel sürecin geçmişteki durumuna, sağ kesirsel türevler ise gelecekteki durumuna etki eden işlemcilerdir (Podlubny, 1999).

RL ve Caputo kesirsel türevi arasındaki ilişkinin (2.22) elde edilmesi için

$$J^n D^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!}, \quad t > 0 \quad (2.25)$$

ifadesi kullanılmaktadır. Burada $f^{(k)}(0^+)$ terimi $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(k)}(t)$ demektir. $t > 0$ olduğu için limit sağdan yaklaşmaktadır (Mainardi and Gorenflo, 2000).

3. YARI-DEĞER KALINLIĞIN KESİRSEL MATEMATİK İLE İNCELENMESİ

3.1 Radyoaktif Bir Kaynağın Şiddetinin Soğurulması Denklemine Çözümü

I şiddetindeki radyoaktif bir kaynağın dx kalınlığındaki soğurucu madde üzerine etki ettiğini düşünelim. Bu soğurucu maddeden geçen radyoaktif ışınlar veya parçacıklar üstel bir soğurma kanununa uyacaktır. Şiddetteki değişme, radyoaktif kaynaktan gelen şiddet ve madde kalınlığı ile doğru orantılıdır. I şiddetiyle dx kalınlığındaki soğurucu madde üzerine gelen radyoaktif ışınlar veya parçacıkların şiddetindeki dI değişimi

$$dI(x) = -\mu_m I(x) dx \quad (3.1)$$

olur. Burada μ_m , kütle soğurma katsayısı olup, lineer soğurma katsayısının maddenin yoğunluğuna bölümü ile elde edilir $\left(\mu_m = \frac{\mu}{\rho} \right)$. (-) işareti ise şiddetin artan kalınlık ile azaldığını gösterir. Bu homojen lineer diferansiyel denklem çözülürse;

$$\frac{dI(x)}{dx} = -\mu_m I(x) \quad (3.2)$$

şeklinde olup, integrali alınırsa,

$$\int \frac{dI(x)}{I(x)} = \int -\mu_m dx \quad (3.3)$$

$$\ln I(x) - \ln C = -\mu_m x \quad (3.4)$$

$$\ln \left(\frac{I(x)}{C} \right) = -\mu_m x \quad (3.5)$$

$$I(x) = C \exp(-\mu_m x) \quad (3.6)$$

ifadesi elde edilir. $x=0$ kalınlığında $I(0) = C \exp(0) \rightarrow I(0) = C = I_0$ yazılıp, denklem (3.6)'da yerine yazılırsa

$$I(x) = I_0 \exp(-\mu_m x) \quad (3.7)$$

Şeklinde şiddetin soğurucu madde kalınlığına bağlı ifadesi elde edilir.

Radyoaktif kaynağın başlangıçtaki şiddetini yarıya düşürmek için gerekli soğurucu kalınlığına yarı-değer kalınlık denir ve $x_{1/2}$ ile gösterilir. (3.7) denkleminde $I(x) \rightarrow \frac{I_0}{2}$ yazılırsa,

$$\frac{I_0}{2} = I_0 \exp(-\mu_m x_{1/2}) \quad (3.8)$$

$$\frac{1}{2} = \exp(-\mu_m x_{1/2}) \quad (3.9)$$

$$x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu_m} = \frac{0.693}{\mu_m} \quad (3.10)$$

şeklinde yarı-değer kalınlığın standart çözümü elde edilmiş olur.

3.2 Kesirsel Matematiğin Soğurulma Denkleminin Uygulanışı

Yarı-değer kalınlığın standart ifadesi olan (3.10) denklemi ile hesaplanan yarı-değer kalınlıkları ile deneysel yarı-değer kalınlıkları eşdeğer değildir. Bu uyumsuzluğu giderebilmek için (3.2) denklemi kesirsel matematik aracılığı ile tekrar çözülmüştür. (3.2) diferansiyel denklemi tekrar ele alınıp,

$$\frac{dI(x)}{dx} = -\mu_m I(x),$$

birinci dereceden türev mertebesi α kesirsel türev mertebesine taşınırsa,

$$\frac{d}{dx} = D \rightarrow D^\alpha = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha}$$

(3.2) denklemi ile verilen diferansiyel denklem

$$\frac{d^\alpha I(x)}{dx^\alpha} = -\mu_m^\alpha I(x) \quad (3.11)$$

şeklinde yazılır. (3.2) diferansiyel denkleminin boyut analizi yapıldığında $\frac{I}{cm} = \frac{I}{cm}$ olduğunu

görüyoruz. (3.11) denkleminde ise kütle soğurma katsayısının (μ_m) , α kesirsel türev mertebesini

bir üst olarak almasının nedeni boyut analizi yapıldığında $\frac{I}{cm^\alpha} = \frac{I}{cm^\alpha}$ olması gerektiğindedir (Kilbas et al., 2006; Naber, 2004).

Kesirsel matematikte Caputo kesirsel türev tanımından

$${}^C D^\alpha I(x) = -\mu_m^\alpha I(x) \quad (3.12)$$

yazılabilir. Denklem (2.19) ifadesi (3.12) diferansiyel denkleminde uygulanırsa

$$J^{m-\alpha} D^m I(x) = -\mu_m^\alpha I(x) \quad (3.13)$$

olur ve eşitliğin her iki tarafı J^α ile çarpılırsa

$$J^\alpha [J^{m-\alpha} D^m I(x)] = -\mu_m^\alpha J^\alpha I(x) \quad (3.14)$$

$$J^\alpha J^m J^{-\alpha} D^m I(x) = -\mu_m^\alpha J^\alpha I(x) \quad (3.15)$$

$$J^m D^m I(x) = -\mu_m^\alpha J^\alpha I(x) \quad (3.16)$$

halini alır. Tamsayı mertebeli türev ve integral işlemcileri için (2.25) özelliği uygulanırsa (3.16) denklemi

$$J^m D^m I(x) = I(x) - \sum_{k=0}^{m-1} I^{(k)}(0^+) \frac{x^k}{k!} = -\mu_m^\alpha J^\alpha I(x) \quad (3.17)$$

$$I(x) = \sum_{k=0}^{m-1} I^{(k)}(0^+) \frac{x^k}{k!} - \mu_m^\alpha J^\alpha I(x) \quad (3.18)$$

olarak yazılabilir. (3.18) denkleminde α kesirsel türev mertebesinin değerleri $m-1 < \alpha \leq m$ aralığında yer almaktadır. Ve (3.2) denklemi birinci mertebeden homojen bir diferansiyel denklem olduğundan dolayı $m=1$ için çözüme devam edilirse α kesirsel türev mertebesi $0 < \alpha \leq 1$ aralığında değerler alır.

$m=1$ için (3.18) denkleminin çözümüne devam edilirse,

$$I(x) = I(0^+) \frac{x^0}{0!} - \mu_m^\alpha J^\alpha I(x) \quad (3.19)$$

$$I(x) = I(0^+) - \mu_m^\alpha J^\alpha I(x) \quad (3.20)$$

elde edilir. (3.20) ifadesini J^α integralinden kurtarmak için Laplace dönüşümü kullanılırsa;

$$L\{I(x)\} = L\{I(0^+)\} - L\{\mu_m^\alpha J^\alpha I(x)\} \quad (3.21)$$

$$\tilde{I}(s) = \frac{I(0)}{s} - \mu_m^\alpha \frac{\tilde{I}(s)}{s^\alpha} \quad (3.22)$$

$$\tilde{I}(s) + \mu_m^\alpha \frac{\tilde{I}(s)}{s^\alpha} = \frac{I(0)}{s} \quad (3.23)$$

$$\tilde{I}(s) \left[1 + \frac{\mu_m^\alpha}{s^\alpha} \right] = \frac{I(0)}{s} \quad (3.24)$$

$$\tilde{I}(s) \left[\frac{s^\alpha + \mu_m^\alpha}{s^\alpha} \right] = \frac{I(0)}{s} \quad (3.25)$$

$$\tilde{I}(s) = \frac{I(0)}{s} \frac{s^\alpha}{s^\alpha + \mu_m^\alpha} \quad (3.26)$$

ifadesi elde edilir. (3.26) denkleminin ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$L^{-1}\{\tilde{I}(s)\} = I(0)L^{-1}\left\{\frac{1}{s} \frac{s^\alpha}{s^\alpha + \mu_m^\alpha}\right\} \quad (3.27)$$

$$I(x) = I(0)L^{-1}\left\{\frac{1}{s} \frac{1}{1 + \frac{\mu_m^\alpha}{s^\alpha}}\right\} \quad (3.28)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Taylor Serisi}}$

sonucuna ulaşılır, (3.28) denklemi Taylor serisine açılırsa;

$$I(x) = I(0)L^{-1}\left\{\frac{1}{s} \left[1 - \frac{\mu_m^\alpha}{s^\alpha} + \frac{\mu_m^{2\alpha}}{s^{2\alpha}} - \frac{\mu_m^{3\alpha}}{s^{3\alpha}} + \dots \right]\right\} \quad (3.29)$$

$$I(x) = I(0)L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{\mu^\alpha}{s^{\alpha+1}} + \frac{\mu^{2\alpha}}{s^{2\alpha+1}} - \frac{\mu^{3\alpha}}{s^{3\alpha+1}} + \dots \right\} \quad (3.30)$$

$$I(x) = I(0) \left[L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{\mu^\alpha}{s^{\alpha+1}} \right\} + L^{-1} \left\{ \frac{\mu^{2\alpha}}{s^{2\alpha+1}} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{\mu^{3\alpha}}{s^{3\alpha+1}} \right\} + \dots \right] \quad (3.31)$$

$$I(x) = I(0) \left[L^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \mu^\alpha L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\alpha+1}} \right\} + \mu^{2\alpha} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{2\alpha+1}} \right\} - \mu^{3\alpha} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{3\alpha+1}} \right\} + \dots \right] \quad (3.32)$$

$$I(x) = I(0) \left[1 - \mu^\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha!} + \mu^{2\alpha} \frac{x^{2\alpha}}{(2\alpha)!} - \mu^{3\alpha} \frac{x^{3\alpha}}{(3\alpha)!} + \dots \right] \quad (3.33)$$

sonucuna ulaşılır ve (3.33) ifadesi toplam sembolü çatısı altında yazıldığında

$$I(x) = I(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mu^\alpha x^\alpha)^n}{(n\alpha)!} \quad (3.34)$$

$$I(x) = I(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mu^\alpha x^\alpha)^n}{\Gamma[n\alpha + 1]} \quad (3.35)$$

Mittag-Leffler

$$I(x) = I(0)E_\alpha(-\mu^\alpha x^\alpha) \quad (3.36)$$

elde edilir. (3.36) çözümü, (3.11) kesirsel soğurulma diferansiyel denkleminin bir çözümüdür.

Burada $E_\alpha(-\mu^\alpha x^\alpha)$ Mittag-Leffler fonksiyonudur ve $I(0) \rightarrow I_0$ için (3.36) denklemini

düzenlemek gerekirse

$$I(x) = I_0 E_\alpha(-\mu^\alpha x^\alpha) = I_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mu^\alpha x^\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha + 1)} \quad (3.37)$$

elde edilir.

4. DENEYSEL ÇALIŞMA

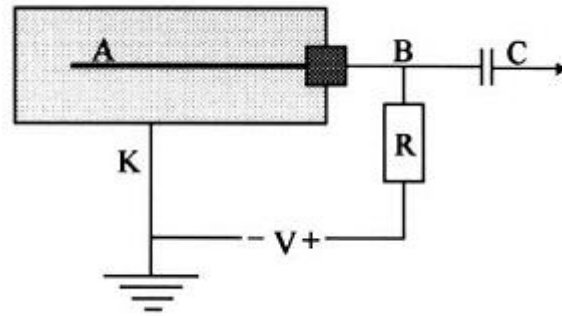
Deneysel çalışmalar Dumlupınar Üniversitesi Fizik Bölümü Nükleer Fizik Araştırma Laboratuvarı'nda yapılmıştır. Deney seti Geiger – Müller (GM) tüpü ve sayacından oluşmaktadır. Net beta sayımlarına tabii fon ve sayacın ölü zaman düzeltmesi dahil edilmiştir.

4.1. Kullanılan Teknik ve Cihazlar

Bu bölümde Geiger – Müller deney seti, soğurucu malzeme ve kullanılan teknik ve beta kaynakları hakkında bilgi verilmektedir.

4.1.1. Geiger – Müller deney seti

Radyoaktif maddelerin yaydığı ışınları saymak üzere Geiger ve Müller tarafından geliştirilen Geiger – Müller sayaçları, genellikle içi 10-12 cmHg basıncında soygaz – alkol buharı karışımı ile doldurulmuş madeni bir silindir ve bu silindirin eksenini boyunca yerleştirilmiş ince bir A elektrotundan ibarettir ve elektronik şema gösterimi şekil 3.1'de verilmektedir.

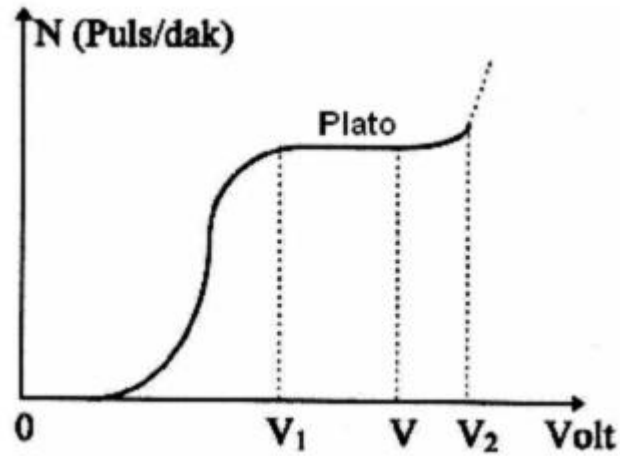


Şekil 3.1. Geiger – Müller sayacının şematik gösterimi.

Silindir gövdesi katot (K) ve silindir gövdesinden yalıtılmış bulunan A elektrotu anot görevi görür. Elektrotlar arasında yaklaşık $10M\Omega$ değerinde bir R direnci üzerinden uygulanan V gerilimi, kıvılcım atlama geriliminden biraz küçük seçilir. Geiger – Müller sayacı içine giren yüksek enerjili herhangi bir tanecik veya foton çarptığı gaz moleküllerini iyonlaştırır. Elektronlar anoda, pozitif iyonlar katoda doğru harekete geçerler. Kütleleri pozitif iyonlar yanında çok küçük olan elektronlar, kısa zamanda büyük hız kazanırlar ve yolları üzerindeki gaz moleküllerine çarparak yeni iyon çiftleri oluştururlar. Böylece anoda doğru ilerleyen bir elektron çığı meydana gelir ve devreden kısa süreli bir akım geçer. Bu kısa süreli akım R direncinin uçları arasında büyük bir potansiyel düşmesine ve dolayısıyla B noktasında ani bir

potansiyel değişimine (elektriksel puls'a) sebep olur. Bu elektriksel puls C kondansatörü ve bir amplifikatör üzerinden bir hoparlöre, bir mekanik sayıcıya veya bir katot ışınlı osilografa uygulanırsa, hoparlörde bir tıkırtı meydana getirir, mekanik sayıcı tarafından sayılır, osilograf perdesinde ise bir elektriksel puls görülür.

Sabit bir radyoaktif numune, karşısına konulan bir Geiger – Müller sayıcısının katot gerilimi ile dakikadaki puls sayısı arasında $N = f(V)$ grafiği çizilirse Şekil 3.2'deki eğri elde edilir. Eęrinin yaklaşık yatay olduğu bölgeye Geiger – Müller platosu denir ve tüp bu bölgenin orta kısımlarındaki bir V geriliminde çalıştırılır. Sayıcıya V_2 den daha büyük bir potansiyel uygulamak tehlikelidir (Tan, M. and Karadağ, M., 2004).



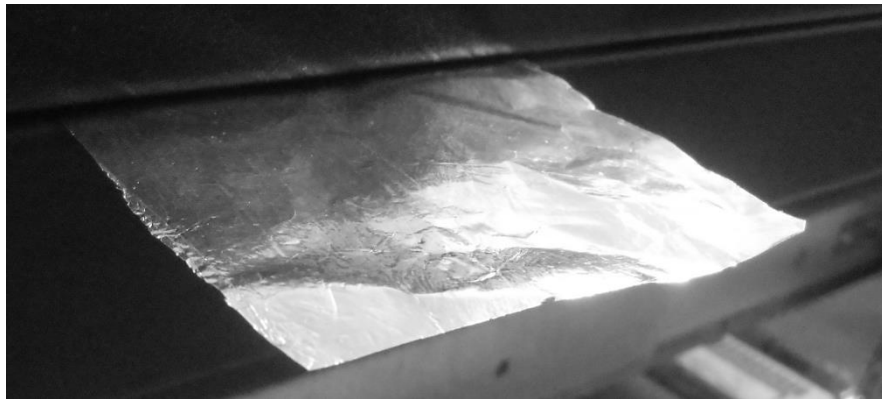
Şekil 3.2. Geiger – Müller sayacı için en iyi çalışma voltajının belirlenmesi.



Şekil 3.3. Geiger – Müller deney seti.

4.1.2. Soğurucu malzeme

Alüminyum, yumuşak ve hafif bir metal olup mat gümüşümsü renktedir. Zehirleyici ve manyetik değildir. Atom numarası 13 olup, yoğunluğu $2.70g/cm^3$ 'tür. Bu çalışmada $7cm \times 7cm$ boyutlarında ve $2.76mg/cm^2$ kalınlığında alüminyum soğurucular kullanılmıştır. Soğurucu malzeme olan alüminyum Şekil 3.4'te verildiği gibidir.



Şekil 3.4. Alüminyum soğurucu malzeme.

4.1.3. Beta kaynakları

Beta kaynakları olarak aktivitesi $0.01\mu\text{Ci}$ ve maksimum enerjisi 294keV olan ^{99}Tc , maksimum enerjisi 1142keV olan ^{36}Cl , maksimum enerjisi 1160keV olan ^{210}Pb , maksimum enerjisi 225keV olan ^{147}Pm kaynakları, aktivitesi $0.1\mu\text{Ci}$ 'lik maksimum enerjisi 156keV olan ^{14}C , maksimum enerjisi 2282keV olan $^{90}\text{Sr}/^{90}\text{Y}$ kaynakları ve aktivitesi $1\mu\text{Ci}$ 'lik maksimum enerjisi 1175keV olan ^{137}Cs ile maksimum enerjisi 763keV olan ^{204}Tl kaynakları kullanılmıştır. ^{99}Tc , ^{36}Cl , ^{210}Pb , ^{147}Pm , ^{14}C , $^{90}\text{Sr}/^{90}\text{Y}$, ^{137}Cs , ^{204}Tl izotoplarının yarı-ömürleri sırasıyla 2.13×10^5 yıl, 3.01×10^5 yıl, 22.3 yıl, 2.6234 yıl, 5730 yıl, 28.8 yıl, 30.2 yıl, 3.78 yıldır. Beta kaynakları Şekil 3.4'te verildiği gibidir.



Şekil 3.5. Beta kaynakları.

4. HESAPLAMAR VE SONUÇLAR

Dumlupınar Üniversitesi Fizik Bölümü Nükleer Fizik Araştırma Laboratuvarı'nda 900V 'luk çalışma voltajı altında, 60s 'lik zaman dilimi içinde ve $^{90}\text{Sr}/^{90}\text{Y}$, ^{137}Cs , ^{204}Tl , ^{99}Tc , ^{36}Cl , ^{14}C , ^{210}Pb , ^{147}Pm kaynakları için deneysel olarak elde edilen beta parçacık şiddetinin alüminyum soğurucu kalınlığa göre değişimin verileri sırasıyla Çizelge 4.1-4.8'de verilmiştir. Çizelge 4.1-4.8'deki sütunlarda sırası ile soğurucu malzeme kalınlığı x (mg/cm^2), soğurucu malzemeyi geçen şiddet I ve soğurucu malzemeyi geçen şiddetin soğurucu maddeye gelen şiddete bölümünün doğal logaritması $\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$ yer almaktadır.

Şekil 4.1, Şekil 4.3, Şekil 4.5, Şekil 4.7, Şekil 4.9, Şekil 4.11, Şekil 4.13 ve Şekil 4.15'te sırasıyla $^{90}\text{Sr}/^{90}\text{Y}$, ^{137}Cs , ^{204}Tl , ^{99}Tc , ^{36}Cl , ^{14}C , ^{210}Pb ve ^{147}Pm kaynakları için deneysel olarak elde edilen beta parçacık şiddetinin alüminyum soğurucu kalınlığa göre değişimi grafik halinde verilmiştir. Burada şiddetin başlangıçtaki değeri I_0 , şiddetin başlangıçtaki değerinin yarıya düştüğü değer $\frac{I_0}{2}$ ve şiddetin başlangıçtaki değerinin yarıya düştüğü değeri veren kalınlık $x_{1/2}$ (yarı-değer kalınlık) yer almaktadır. Bu değerler sırasıyla $^{90}\text{Sr}/^{90}\text{Y}$ için $I_0 = 6268$, $\frac{I_0}{2} = 3134$ ve Al soğurucu için yarı-değer kalınlığı $x_{1/2} = 157.15\text{mg}/\text{cm}^2$; ^{137}Cs için $I_0 = 29830$, $\frac{I_0}{2} = 14915$ ve $x_{1/2} = 44.4296\text{mg}/\text{cm}^2$; ^{204}Tl için $I_0 = 2182$, $\frac{I_0}{2} = 1091$ ve $x_{1/2} = 34.6977\text{mg}/\text{cm}^2$; ^{99}Tc için $I_0 = 592$, $\frac{I_0}{2} = 296$ ve $x_{1/2} = 9.59105\text{mg}/\text{cm}^2$; ^{36}Cl için $I_0 = 993$, $\frac{I_0}{2} = 496.5$ ve $x_{1/2} = 48.7163\text{mg}/\text{cm}^2$; ^{14}C için $I_0 = 1648$, $\frac{I_0}{2} = 824$ ve $x_{1/2} = 3.15619\text{mg}/\text{cm}^2$; ^{210}Pb için $I_0 = 304$, $\frac{I_0}{2} = 152$ ve $x_{1/2} = 44.9683\text{mg}/\text{cm}^2$; ^{147}Pm için $I_0 = 338$, $\frac{I_0}{2} = 169$ ve $x_{1/2} = 5.84347\text{mg}/\text{cm}^2$ 'dir.

Şekil 4.2, Şekil 4.4, Şekil 4.6, Şekil 4.8, Şekil 4.10, Şekil 4.12, Şekil 4.14 ve Şekil 4.16'da sırasıyla $^{90}\text{Sr}/^{90}\text{Y}$, ^{137}Cs , ^{204}Tl , ^{99}Tc , ^{36}Cl , ^{14}C , ^{210}Pb ve ^{147}Pm kaynakları için $\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$ değerinin alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi verilmiştir. Bu grafiklerin eğiminden kullanılan kaynaklar için soğurucu malzemenin kütle soğurma katsayıları elde edilmiştir.

Çizelge 4.1. $^{90}\text{Sr} / ^{90}\text{Y}$ için deneysel veriler.

x (mg/cm ²)	I	ln(I/I ₀)	x (mg/cm ²)	I	ln(I/I ₀)
0	6267	0	118,68	3619	-0,5491
2,76	6119	-0,0239	121,44	3638	-0,54386
5,52	6160	-0,01722	124,2	3772	-0,50769
8,28	5852	-0,06851	126,96	3562	-0,56498
11,04	5752	-0,08575	129,72	3594	-0,55603
13,8	5748	-0,08645	132,48	3563	-0,56469
16,56	5643	-0,10488	135,24	3635	-0,54469
19,32	5469	-0,1362	138	3535	-0,57258
22,08	5398	-0,14927	165,6	2983	-0,74237
24,84	5409	-0,14723	193,2	2888	-0,77473
27,6	5321	-0,16364	220,8	2533	-0,90589
30,36	5101	-0,20586	248,4	2152	-1,0689
33,12	5167	-0,19301	276	1998	-1,14315
35,88	5036	-0,21869	303,6	1659	-1,32908
38,64	4904	-0,24525	331,2	1510	-1,42319
41,4	4924	-0,24118	358,8	1283	-1,5861
44,16	4903	-0,24545	386,4	1141	-1,70339
46,92	4701	-0,28752	414	1020	-1,8155
49,68	4745	-0,27821	441,6	901	-1,93955
52,44	4802	-0,26627	469,2	674	-2,22982
55,2	4757	-0,27568	496,8	623	-2,30851
57,96	4655	-0,29736	524,4	531	-2,46829
60,72	4631	-0,30252	552	460	-2,61183
63,48	4561	-0,31776	579,6	366	-2,84042
66,24	4586	-0,31229	607,2	274	-3,12992
69	4497	-0,33189	634,8	237	-3,27499
71,76	4464	-0,33925	662,4	170	-3,60725
74,52	4298	-0,37715	690	150	-3,73242
77,28	4375	-0,35939	717,6	120	-3,95556
80,04	4286	-0,37994	745,2	99	-4,14793
82,8	4252	-0,38791	772,8	79	-4,37361
85,56	4069	-0,4319	800,4	26	-5,48496
88,32	4168	-0,40786	828	27	-5,44722
91,08	4157	-0,4105	855,6	35	-5,1877
93,84	4129	-0,41726	883,2	27	-5,44722
96,6	3985	-0,45276	910,8	22	-5,65201
99,36	3973	-0,45578	938,4	13	-6,1781
102,12	3902	-0,47381	966	18	-5,85268
104,88	3906	-0,47278			
107,64	3759	-0,51114			
110,4	3810	-0,49767			
113,16	3858	-0,48515			
115,92	3887	-0,47766			

Çizelge 4.2. ^{137}Cs için deneysel veriler.

x (mg/cm ²)	I	ln(I/I ₀)	x (mg/cm ²)	I	ln(I/I ₀)
0	29829	0	96,6	6598	-1,50871
2,76	28067	-0,06089	99,36	6280	-1,55811
5,52	26792	-0,10738	102,12	6036	-1,59774
8,28	25496	-0,15696	104,88	5790	-1,63935
11,04	24372	-0,20205	107,64	5506	-1,68964
13,8	23294	-0,24729	110,4	5138	-1,75882
16,56	22503	-0,28183	113,16	4967	-1,79267
19,32	21510	-0,32696	115,92	4846	-1,81733
22,08	20752	-0,36284	118,68	4574	-1,87509
24,84	19804	-0,4096	121,44	4261	-1,94598
27,6	19146	-0,44339	124,2	3347	-2,18742
30,36	18226	-0,49263	126,96	3999	-2,00944
33,12	17611	-0,52696	129,72	3855	-2,04611
35,88	16911	-0,56752	132,48	3547	-2,12938
38,64	16202	-0,61035	135,24	3368	-2,18116
41,4	15723	-0,64036	138	3306	-2,19974
44,16	15186	-0,67511	165,6	2274	-2,57394
46,92	14571	-0,71645	193,2	1709	-2,85957
49,68	14066	-0,75172	220,8	1519	-2,97743
52,44	13268	-0,81013			
55,2	12838	-0,84307			
57,96	12176	-0,89601			
60,72	11700	-0,93589			
63,48	11155	-0,98359			
66,24	10812	-1,01482			
69	10327	-1,06072			
71,76	9987	-1,0942			
74,52	9277	-1,16794			
77,28	9145	-1,18227			
80,04	8471	-1,25883			
82,8	8277	-1,282			
85,56	7764	-1,34598			
88,32	7553	-1,37354			
91,08	7112	-1,4337			
93,84	6966	-1,45444			

Çizelge 4.3 ^{204}Tl için deneysel veriler.

x (mg/cm ²)	I	ln(I/I ₀)	x (mg/cm ²)	I	ln(I/I ₀)
0	2181	0	91,08	319	-1,92235
2,76	2004	-0,08464	93,84	272	-2,08174
5,52	1911	-0,13216	96,6	273	-2,07807
8,28	1814	-0,18425	99,36	248	-2,17411
11,04	1737	-0,22762	102,12	229	-2,25382
13,8	1628	-0,29243	104,88	199	-2,39423
16,56	1513	-0,36569	107,64	186	-2,46179
19,32	1470	-0,39452	110,4	164	-2,58767
22,08	1394	-0,44761	113,16	173	-2,53425
24,84	1394	-0,44761	115,92	150	-2,6769
27,6	1303	-0,51511	118,68	152	-2,66366
30,36	1217	-0,58339	121,44	148	-2,69033
33,12	1031	-0,74925	124,2	123	-2,87535
35,88	1042	-0,73864	126,96	121	-2,89175
38,64	995	-0,7848	129,72	122	-2,88352
41,4	942	-0,83953	132,48	89	-3,1989
44,16	903	-0,88182	135,24	92	-3,16575
46,92	803	-0,99918	138	68	-3,46803
49,68	755	-1,06082	165,6	43	-3,92634
52,44	755	-1,06082	193,2	20	-4,69181
55,2	703	-1,13218	220,8	4	-6,30124
57,96	616	-1,26429	248,4	3	-6,58893
60,72	598	-1,29395	276	5	-6,0781
63,48	567	-1,34718	303,6	3	-6,58893
66,24	538	-1,39968	331,2	2	-6,99439
69	506	-1,461	358,8	2	-6,99439
71,76	487	-1,49927	386,4	1	-7,68754
74,52	442	-1,59623			
77,28	401	-1,69358			
80,04	352	-1,82391			
82,8	370	-1,77404			
85,56	334	-1,8764			
88,32	311	-1,94775			

Çizelge 4.4. ^{99}Tc için deneysel veriler.

x (mg/cm ²)	I	ln(I/I ₀)
0	592	0
2,76	469	-0,2329
5,52	384	-0,43286
8,28	319	-0,61832
11,04	289	-0,71708
13,8	223	-0,97633
16,56	169	-1,25361
19,32	138	-1,45625
22,08	123	-1,57132
24,84	96	-1,81916
27,6	64	-2,22462
30,36	42	-2,64584
33,12	40	-2,69463

Çizelge 4.5. ^{36}Cl için deneysel veriler.

x (mg/cm ²)	I	ln(I/I ₀)
0	993	0
11,04	839	-0,16852
22,08	742	-0,29138
33,12	606	-0,49385
44,16	539	-0,61102
55,2	459	-0,77168
66,24	391	-0,93202
77,28	317	-1,14183
88,32	235	-1,44115
99,36	154	-1,86378
110,4	152	-1,87685

Çizelge 4.6 ^{14}C için deneysel veriler.

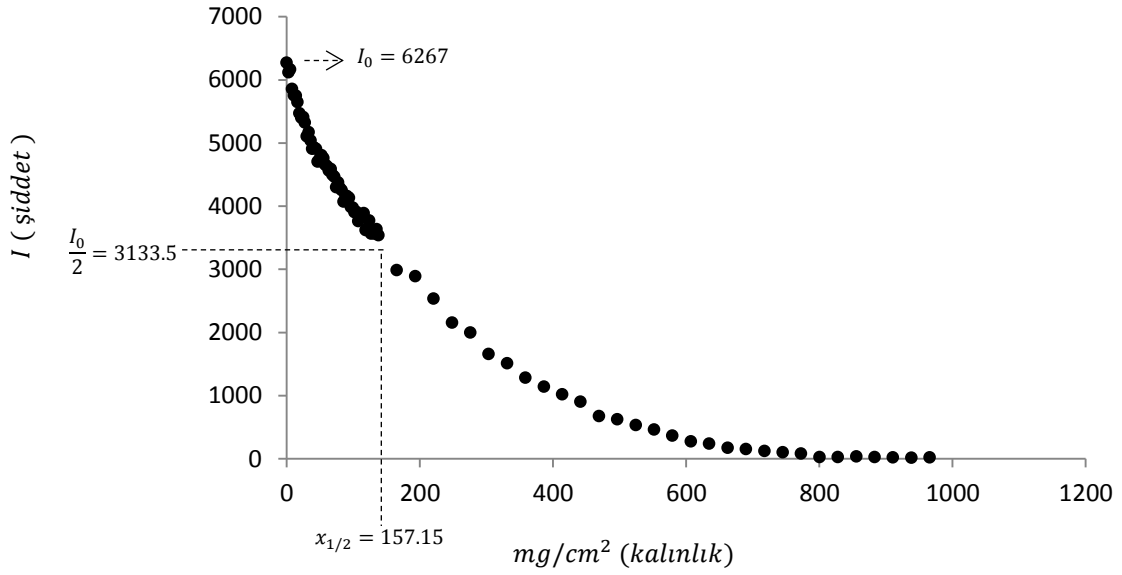
x (mg/cm ²)	I	ln(I/I ₀)
0	1648	0
2,76	896	-0,60938
5,52	457	-1,28263
8,28	199	-2,11401
11,04	83	-2,98848
13,8	42	-3,66965

Çizelge 4.7. ^{210}Pb için deneysel veriler.

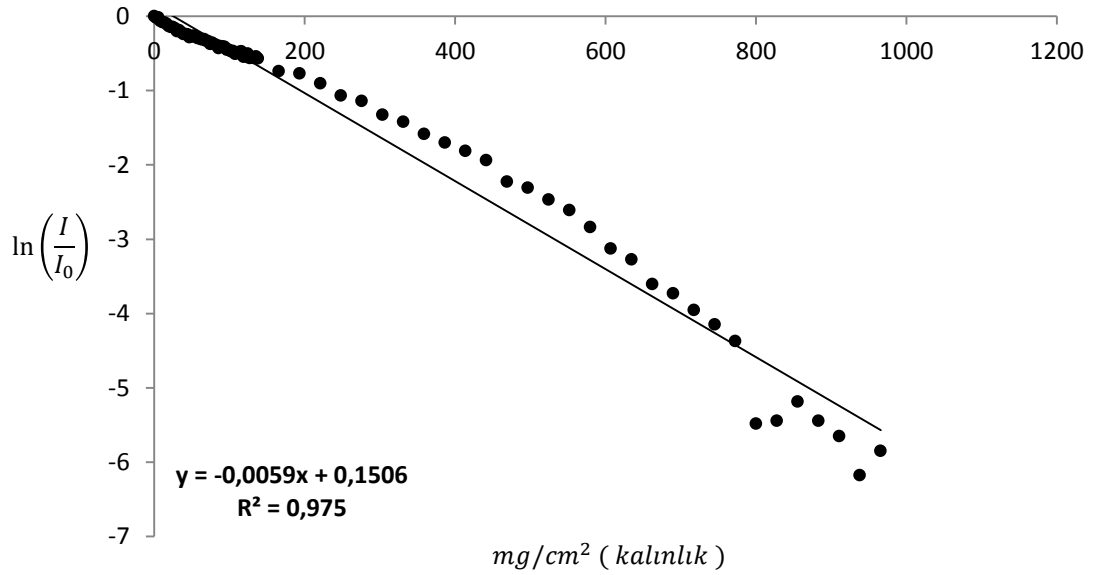
x (mg/cm ²)	I	ln(I/I ₀)
0	304	0
11,04	249	-0,19957
22,08	204	-0,39891
33,12	189	-0,47528
44,16	155	-0,6736
55,2	137	-0,79705
66,24	126	-0,88075
77,28	98	-1,13206
88,32	79	-1,34758
99,36	69	-1,48292
110,4	50	-1,805
121,44	34	-2,19067
132,48	30	-2,31583
143,52	22	-2,62599

Çizelge 4.8 ^{147}Pm için deneysel veriler.

x (mg/cm ²)	I	ln(I/I ₀)
0	338	0
2,76	252	-0,29362
5,52	177	-0,6469
8,28	116	-1,06946
11,04	83	-1,40421
13,8	60	-1,7287
16,56	45	-2,01638

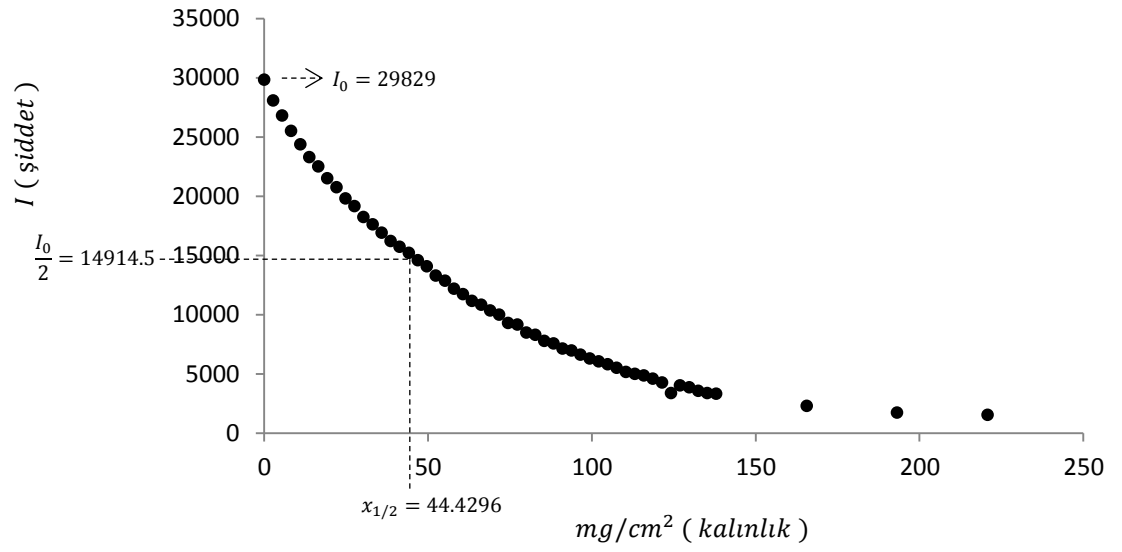


Şekil 4.1. $^{90}Sr/^{90}Y$ radyoaktif kaynağı kullanıldığında beta parçacık şiddetinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.

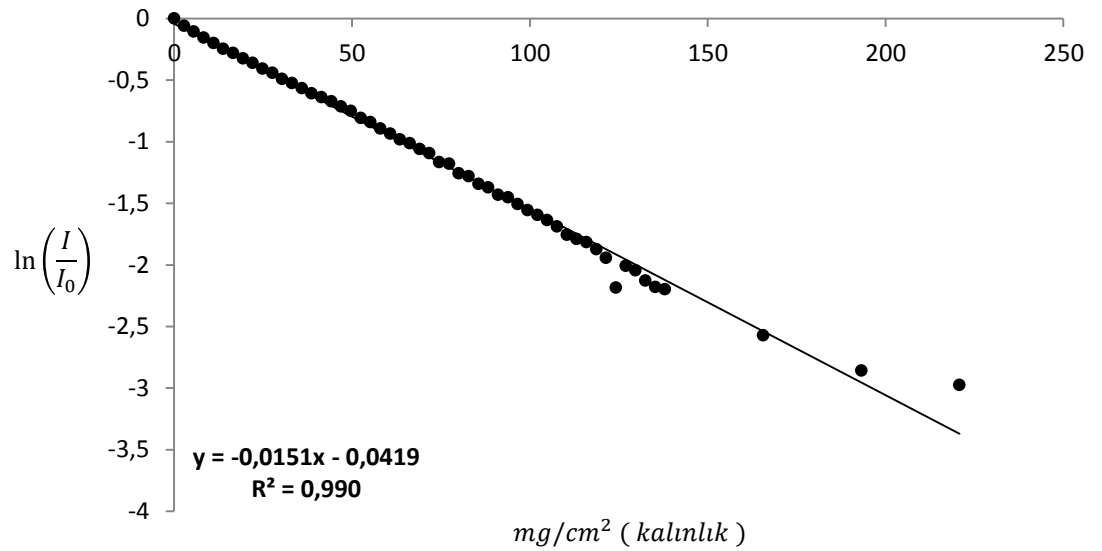


Şekil 4.2. $^{90}Sr/^{90}Y$ beta kaynağı için $\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$ değerinin, alüminyum soğurucu

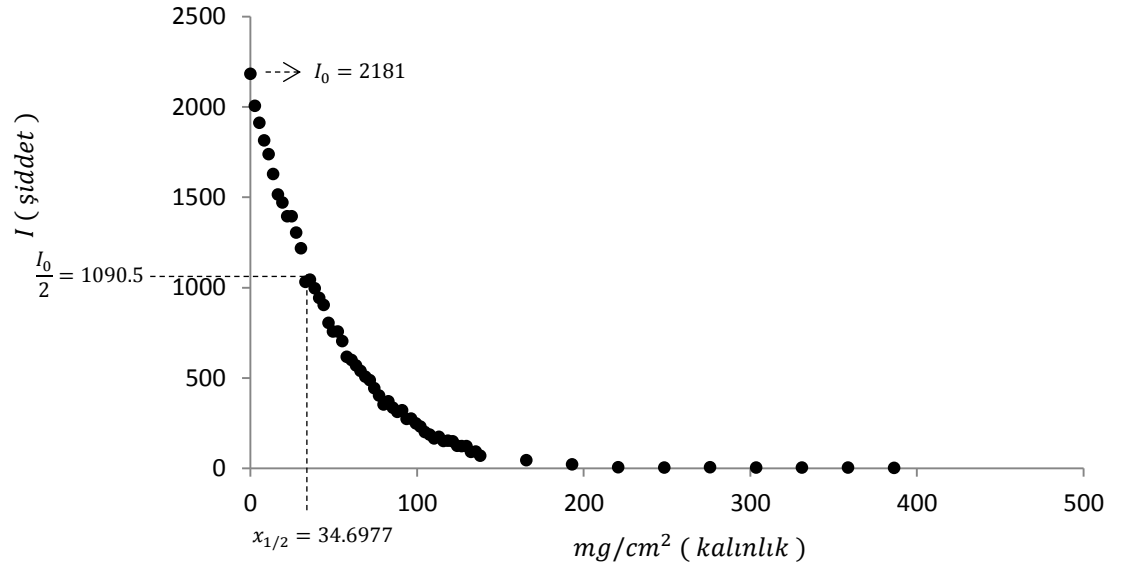
kalınlığına göre değişimi.



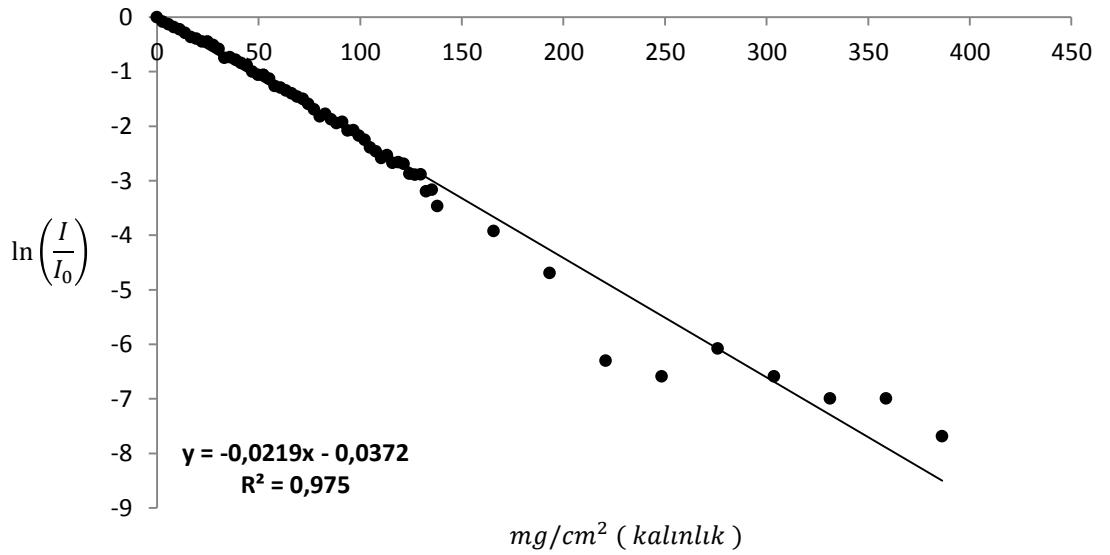
Şekil 4.3. ^{137}Cs radyoaktif kaynağı kullanıldığında beta parçacık şiddetinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.



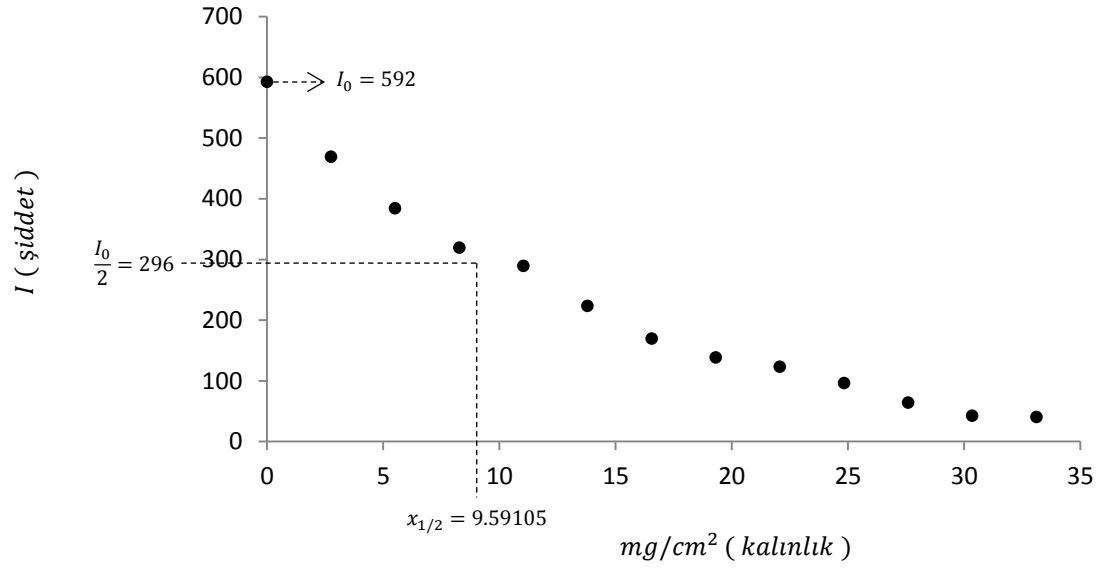
Şekil 4.4. ^{137}Cs beta kaynağı için $\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$ değerinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.



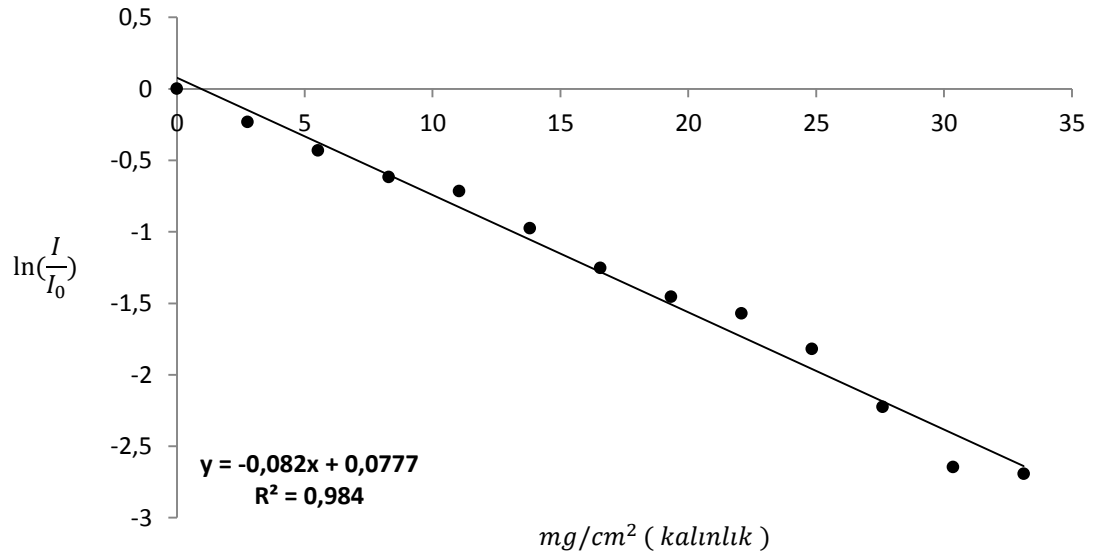
Şekil 4.5. ^{204}Tl radyoaktif kaynağı kullanıldığında beta parçacık şiddetinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.



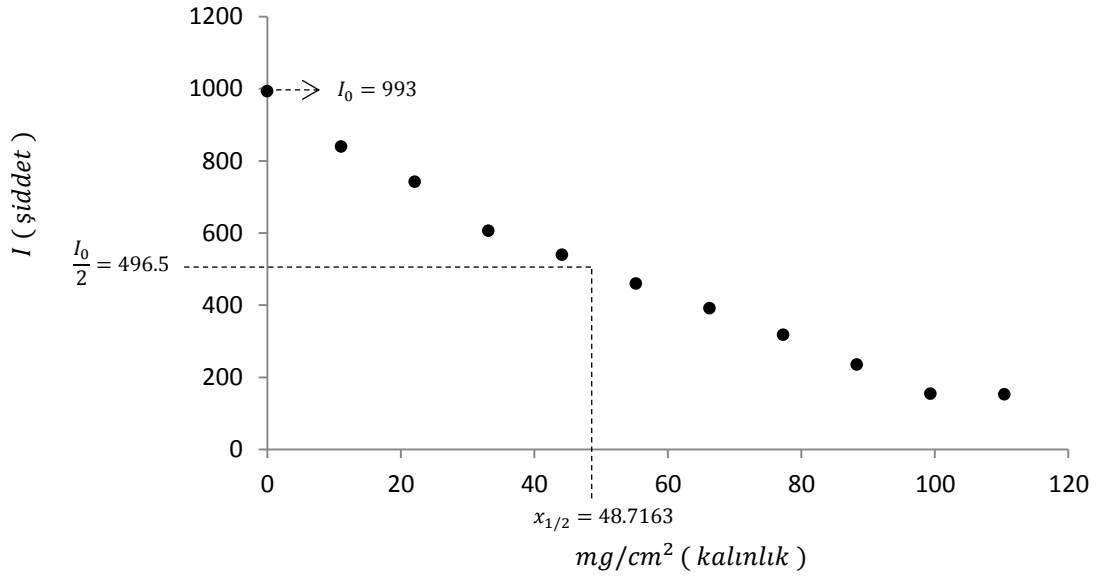
Şekil 4.6. ^{204}Tl beta kaynağı için $\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$ değerinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.



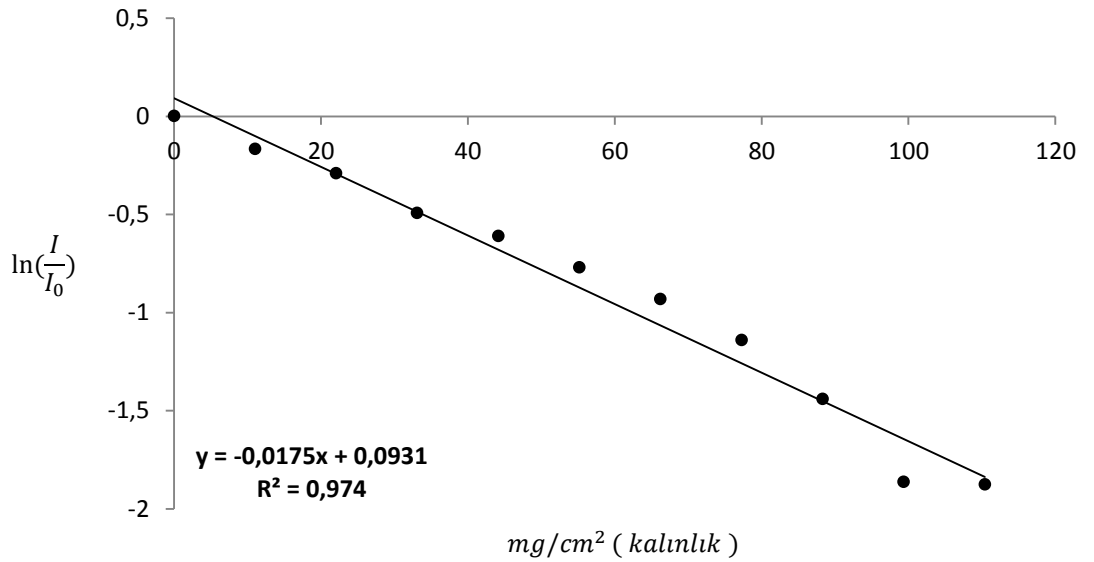
Şekil 4.7. ⁹⁹Tc radyoaktif kaynağı kullanıldığında beta parçacık şiddetinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.



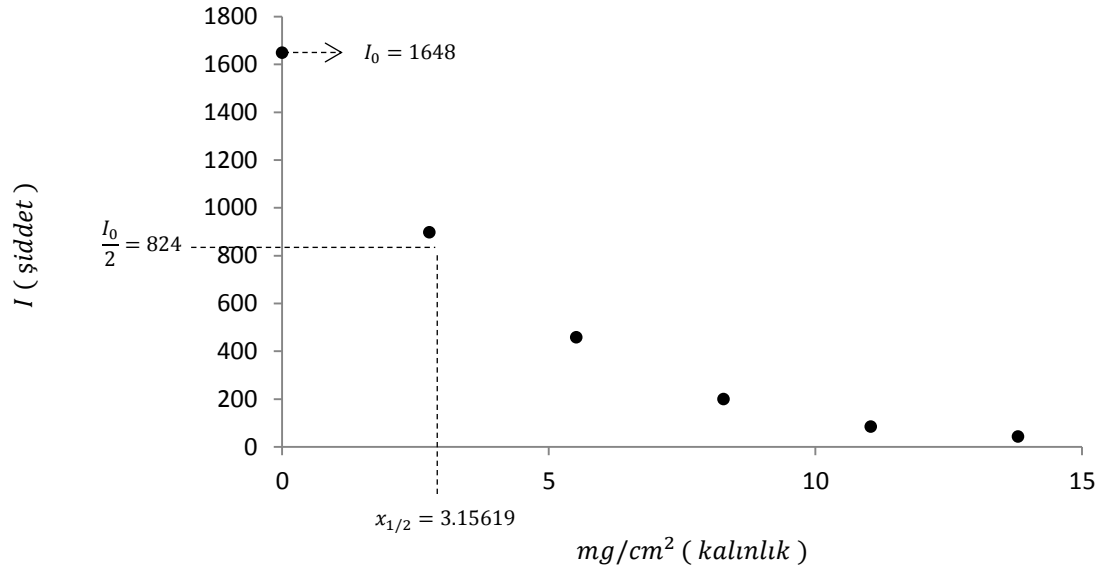
Şekil 4.8. ⁹⁹Tc beta kaynağı için $\ln(I/I_0)$ değerinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.



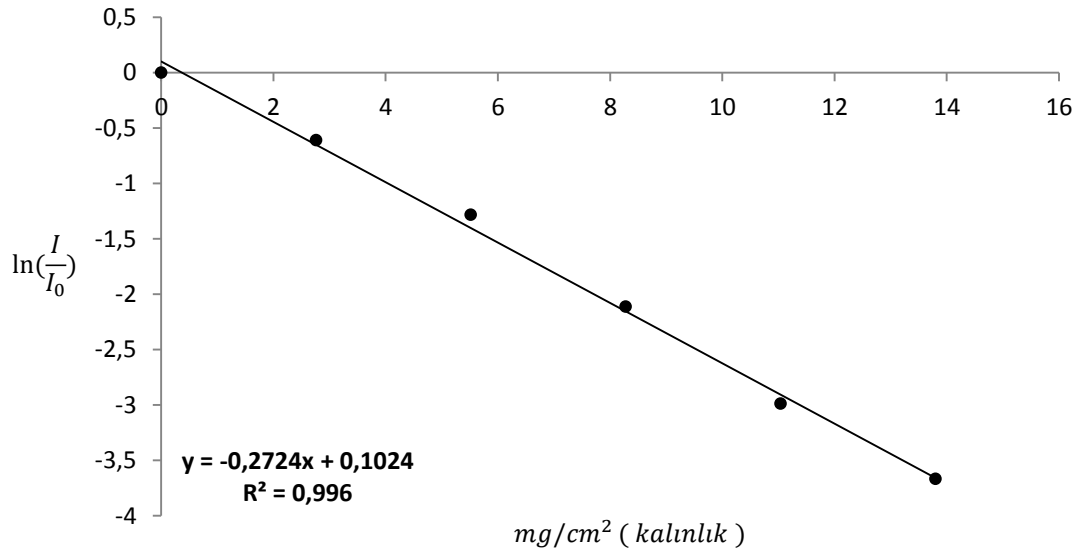
Şekil 4.9. ^{36}Cl radyoaktif kaynağı kullanıldığında beta parçacık şiddetinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.



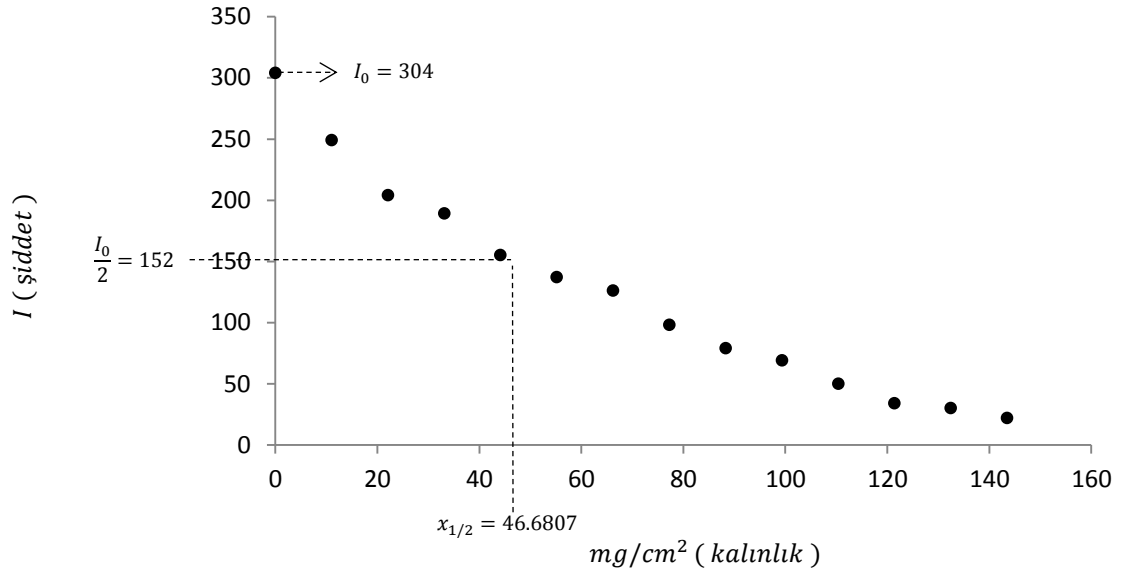
Şekil 4.10. ^{36}Cl beta kaynağı için $\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$ değerinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.



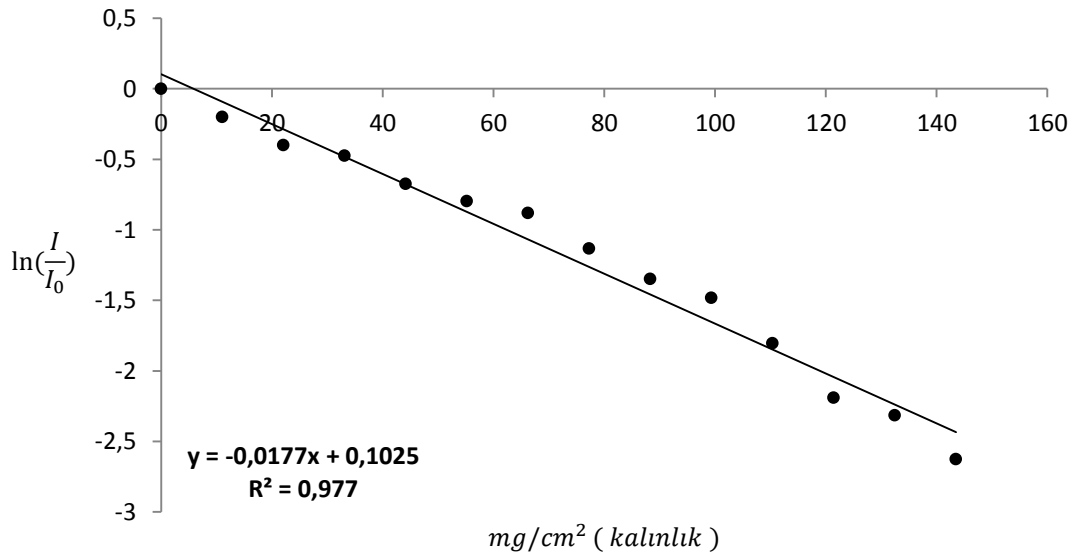
Şekil 4.11. ^{14}C radyoaktif kaynağı kullanıldığında beta parçacık şiddetinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.



Şekil 4.12. ^{14}C beta kaynağı için $\ln(I/I_0)$ değerinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.

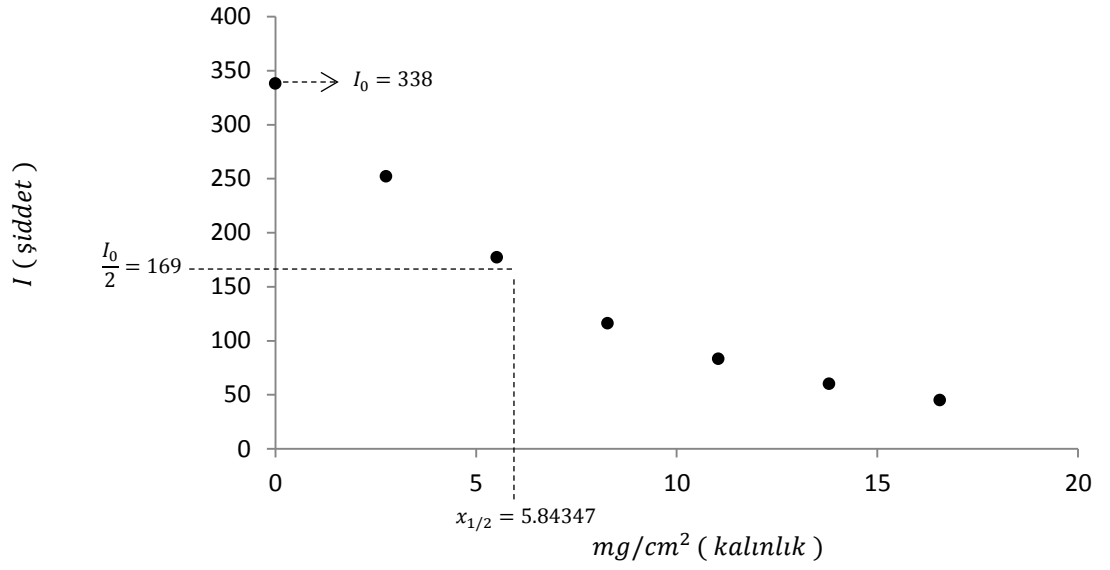


Şekil 4.13. ^{210}Pb radyoaktif kaynağı kullanıldığında beta parçacık şiddetinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.

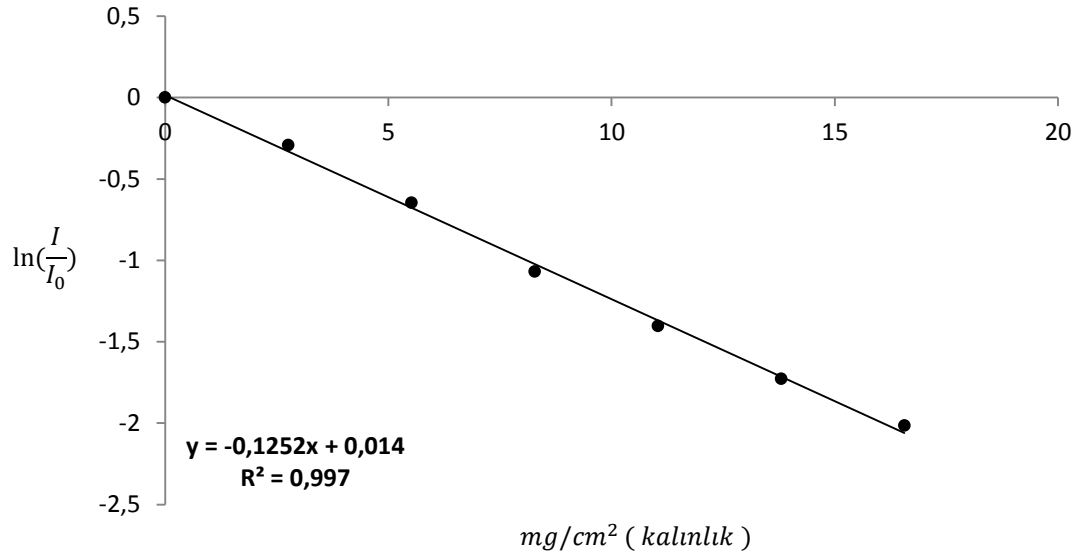


Şekil 4.14. ^{210}Pb beta kaynağı için $\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$ değerinin, alüminyum soğurucu

kalınlığına göre değişimi.



Şekil 4.15. ^{147}Pm radyoaktif kaynağı kullanıldığında beta parçacık şiddetinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.



Şekil 4.16. ^{147}Pm beta kaynağı için $\ln(I/I_0)$ değerinin, alüminyum soğurucu kalınlığına göre değişimi.

Çizelge 4.9. Kütle soğurma katsayıları.

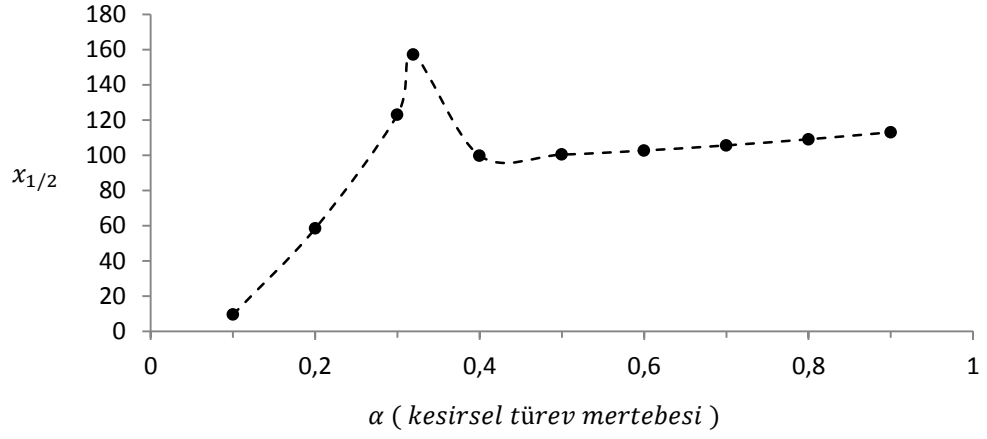
Kaynaklar	μ_m (cm ² /mg)							Bu çalışma
	[7]	[9]	[10]	[13]	[14]	[18]	[19]	
⁹⁰ Sr/ ⁹⁰ Y	5	-	4.23	7	6.69	9.2	5.06	5.9
¹³⁷ Cs	-	-	-	-	-	-	-	15.1
²⁰⁴ Tl	24.2	16.68	21.92	-	-	23.7	25.38	21.9
⁹⁹ Tc	-	-	-	-	-	-	-	82
³⁶ Cl	-	-	-	-	-	-	-	17.5
¹⁴ C	-	-	-	-	-	-	-	272.4
²¹⁰ Pb	-	-	-	-	-	-	-	17.7
¹⁴⁷ Pm	177.3	148.81	-	-	-	168.8	-	125.2

Çizelge 4.9'un son sütununda ⁹⁰Sr/⁹⁰Y, ¹³⁷Cs, ²⁰⁴Tl, ⁹⁹Tc, ³⁶Cl, ¹⁴C, ²¹⁰Pb ve ¹⁴⁷Pm kaynakları için Şekil 4.2, Şekil 4.4, Şekil 4.6, Şekil 4.8, Şekil 4.10, Şekil 4.12, Şekil 4.14 ve Şekil 4.16'dan elde edilen kütle soğurma katsayıları verilmiştir. Literatürdeki diğer çalışmalar ile karşılaştırıldığında elde ettiğimiz sonuçların uyum içinde olduğu görülmektedir.

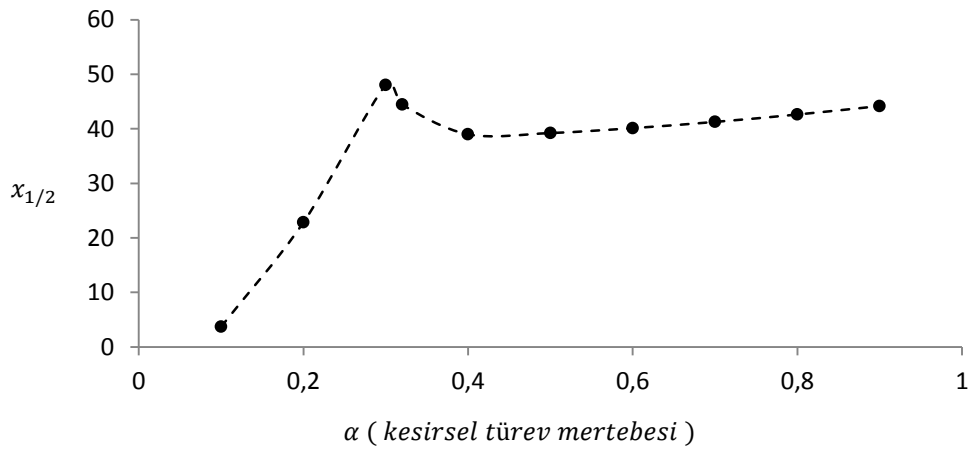
Çizelge 4.10. Alüminyum soğurucu malzemenin yarı-değer kalınlıkları (mg / cm²).

Kaynaklar	Deneysel	Standart	Kesirsel	α
	Sonuçlar	Hesaplamalar	Hesaplamalar	
⁹⁰ Sr/ ⁹⁰ Y	157.15000	117.48200	157.15000	0.319231
¹³⁷ Cs	44.42960	45.90400	44.42960	0.320105
²⁰⁴ Tl	34.69770	31.65040	34.69770	0.312233
⁹⁹ Tc	9.59105	8.45300	9.59105	0.312203
³⁶ Cl	48.71630	39.60840	48.71630	0.314364
¹⁴ C	3.15619	2.54459	3.15619	0.314742
²¹⁰ Pb	46.68070	39.16100	46.68080	0.313196
¹⁴⁷ Pm	5.84347	5.53630	5.84347	0.313114

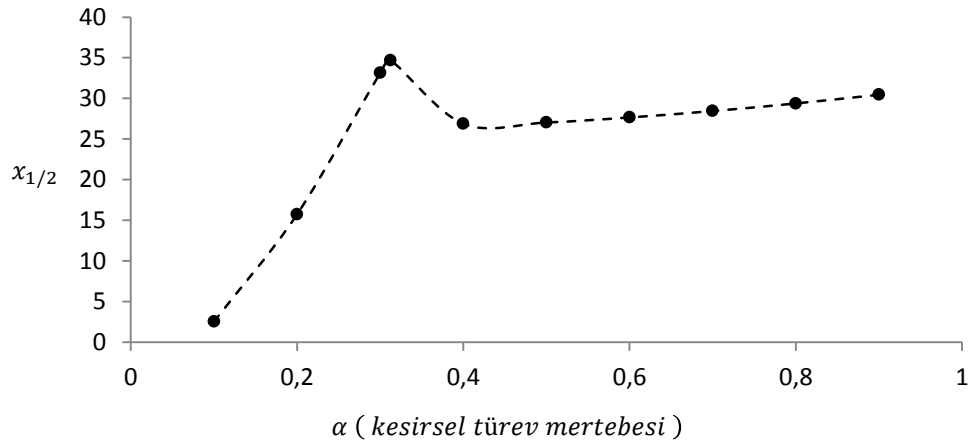
Çizelge 4.10'da ⁹⁰Sr/⁹⁰Y, ¹³⁷Cs, ²⁰⁴Tl, ⁹⁹Tc, ³⁶Cl, ¹⁴C, ²¹⁰Pb ve ¹⁴⁷Pm kaynakları kullanılarak alüminyum soğurucuların yarı-değer kalınlıkları için yapılan deney sonuçları ve hesaplamalar verilmiştir. Burada deneysel sonuçlar sırasıyla Şekil 4.1, Şekil 4.3, Şekil 4.5, Şekil 4.7, Şekil 4.9, Şekil 4.11, Şekil 4.13, Şekil 4.15'ten elde edilmiştir. Standart hesaplamalar denklem (3.10) kullanılarak, kesirsel hesaplamalar ise denklem (3.37) kullanılarak hesaplanmıştır. Hesaplamalar Wolfram Mathematica programı kullanılarak yapılmıştır. Deneysel sonuçlar ile teorik sonuçları eşdeğer yapan kesirsel türev mertebeleri ise son sütunda verilmiştir.



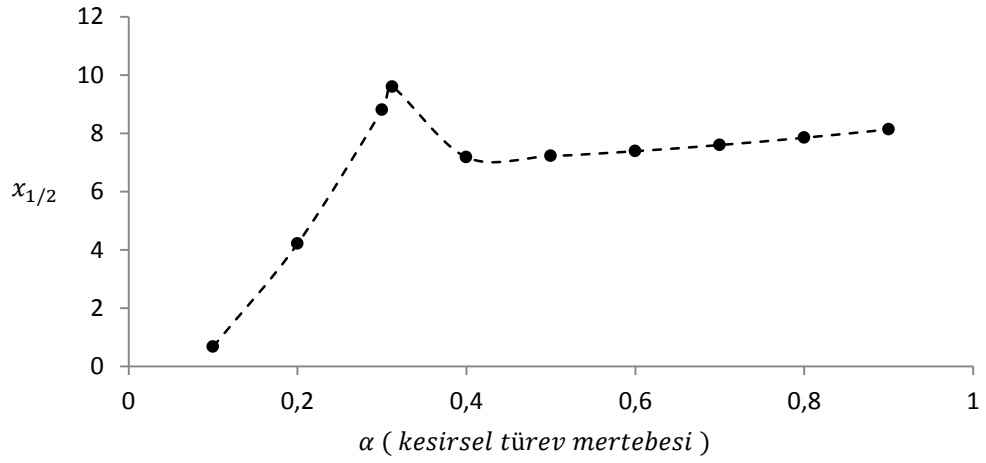
Şekil 4.17. $^{90}\text{Sr}/^{90}\text{Y}$ Beta kaynağı için farklı kesirsel türev mertebelerine göre yarı-değer kalınlığı değişimi.



Şekil 4.18. ^{137}Cs Beta kaynağı için farklı kesirsel türev mertebelerine göre yarı-değer kalınlığı değişimi.



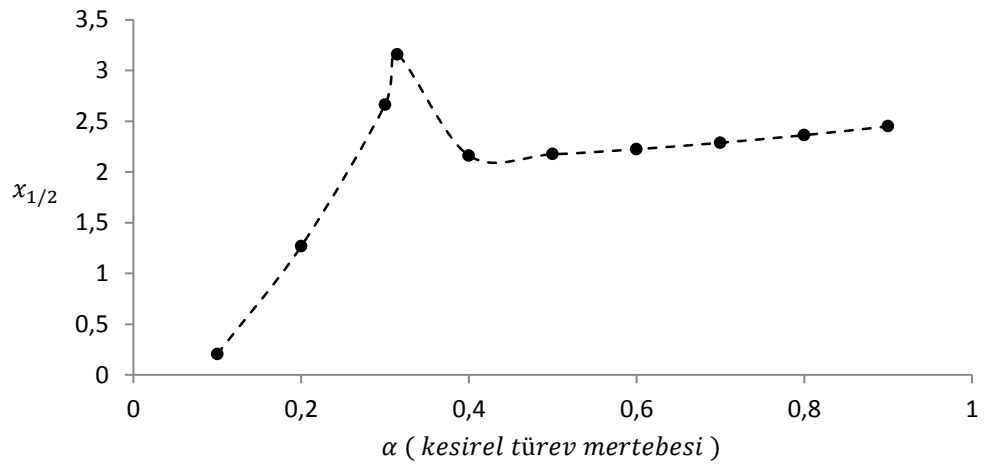
Şekil 4.19. ^{204}Tl Beta kaynağı için farklı kesirsel türev mertebelerine göre yarı-değer kalınlığı değişimi.



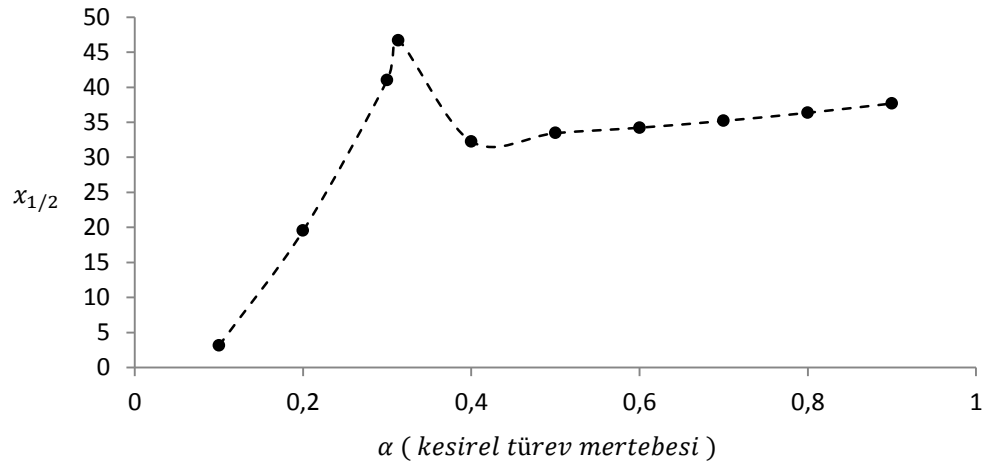
Şekil 4.20. ^{99}Tc Beta kaynağı için farklı kesirsel türev mertebelerine göre yarı-değer kalınlığı değişimi.



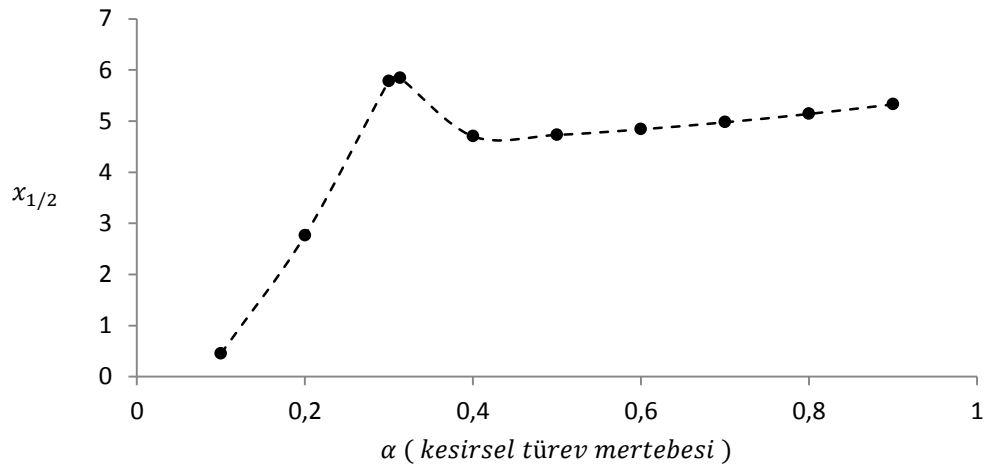
Şekil 4.21. ^{36}Cl Beta kaynağı için farklı kesirsel türev mertebelerine göre yarı-değer kalınlığı değişimi.



Şekil 4.22. ^{14}C Beta kaynağı için farklı kesirsel türev mertebelerine göre yarı-değer kalınlığı değişimi.

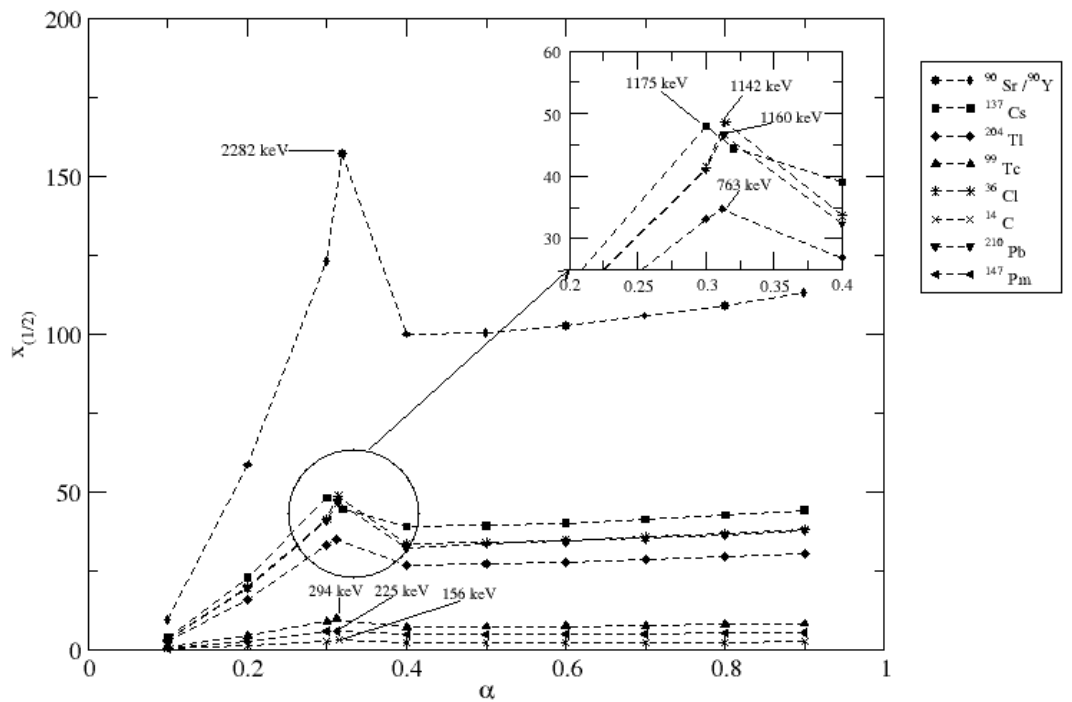


Şekil 4.23. ^{210}Pb Beta kaynağı için farklı kesirsel türev mertebelerine göre yarı-değer kalınlığı değişimi.



Şekil 4.24. ^{147}Pm Beta kaynağı için farklı kesirsel türev mertebelerine göre yarı-değer kalınlığı değişimi.

Şekil 4.17-4.24'te kesirsel türev mertebesinin farklı değerleri için yarı-değer kalınlıklarının değişimi gösterilmiştir. Çizelgelerden görüldüğü gibi yarı-değer kalınlıkları hızlı bir şekilde artmakta, $\alpha \cong 0.31$ değerinde pik yapmakta ve daha sonra ise azalmaktadır. Burada α 'nın pik yaptığı değerler deneysel sonuçlar ile teorik sonuçları eşdeğer yapan ve Çizelge 4.10'da verilen kesirsel türev mertebeleridir. Kesirsel türev mertebesi 0 ile 1 arasında değerler almaktadır. Eğer mertebe 1'e eşit ise kesirsel çözüm standart çözüme eşdeğer olmaktadır.



Şekil 4.25. Bütün beta kaynakları için farklı kesirsel türev mertebelerine göre yarı-değer kalınlığı değişimi.

Şekil 4.25'te, Şekil 4.17-4.24'te verilen kesirsel türev mertebelerinin farklı değerleri için yarı-değer kalınlıklarının değişimi grafikleri bütün kaynaklar ele alınarak tek bir grafikte verilmiştir. Beta kaynakları maksimum enerji seviyelerine göre sıralandığında; $^{90}\text{Sr}/^{90}\text{Y}$ 2282keV, ^{137}Cs 1175keV, ^{210}Pb 1160keV, ^{36}Cl 1142keV, ^{204}Tl 763keV, ^{99}Tc 294keV, ^{147}Pm 225keV ve ^{14}C 156keV'dir. Şekil 4.25 incelendiğinde enerjisi yüksek olandan az olana doğru bir sıralanma olduğu görülmektedir. Görüldüğü gibi enerjileri birbirine yakın olanların yarı-değer kalınlık değişimleri de birbirine yakın olmaktadır.

5. TARTIŞMA

Bu çalışmada $^{90}\text{Sr}/^{90}\text{Y}$, ^{137}Cs , ^{204}Tl , ^{99}Tc , ^{36}Cl , ^{14}C , ^{210}Pb , ^{147}Pm kaynakları ile alüminyum soğurucuların yarı-değer kalınlıkları deneysel ve teorik olarak incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- ✓ Her bir beta kaynağı kullanılarak farklı kalınlıklardaki alüminyum soğuruculardan beta parçacık şiddetinin soğurulması deneysel olarak incelenmiştir. Elde edilen grafiklerden deneysel yarı-değer kalınlıklar tespit edilmiştir. Bu grafiklerin logaritmaları alınarak çizilen grafiklerin eğiminden μ_m kütle soğurma katsayıları bulunmuştur. Elde edilen bu kütle soğurma katsayılarının Çizelge 4.9'da verildiği gibi literatürdeki diğer çalışmalar ile uyum içinde olduğu görülmektedir.
- ✓ Standart soğurma denklemi (3.10) ile elde edilen yarı-değer kalınlıkların deneysel sonuçlardan farklı olduğu görülmüştür.
- ✓ Standart soğurma denklemi (3.10) kesirsel matematik kullanılarak yeniden tanımlanmış (3.11) ve bu denklem çözülerek (3.37) deneysel yarı-değer kalınlıklarını veren α kesirsel türev mertebeleri hesaplanmıştır (Çizelge 4.10). Bu kesirsel türev mertebeleri için deneysel ve teorik yarı-değer kalınlıkları eşdeğer olarak elde edilmiştir.
- ✓ Yapılan hesaplamalarda farklı beta kaynakları kullanılsa bile alüminyum soğurucular için kesirsel türev mertebesinin değişmediği ve $\alpha \cong 0.31$ değerini aldığı görülmüştür. Yani yarı-değer kalınlıkların hesaplanmasında alüminyum soğurucular için soğurma denklemi

$$\frac{d^{0.31}I(x)}{dx^{0.31}} = -\mu_m^{0.31}I(x)$$

şeklinde yazılabilir.

- ✓ Standart teorik yarı-değer kalınlıkları ile deneysel yarı-değer kalınlıkları arasındaki uyumsuzluğun nedeni, fiziksel sürecin hem soğurucu maddenin kalınlığına hem de beta parçacıklarının enerjilerine bağlı olmasıdır. Madde içine giren beta parçacıklarından önce zayıf enerjili olanlar soğurulur. Daha sonra madde kalınlığı arttıkça eksponansiyel bir şekilde beta parçacıklarının soğurulması artar. Fakat standart soğurma denkleminde (3.10) beta parçacık enerjisine ait herhangi bir terim bulunmamaktadır. Bu denklem sadece beta parçacık şiddetinin soğurucu kalınlığına göre değişimini ifade etmektedir. Literatürde birçok çalışmada kütle soğurma katsayısı ile enerji arasında ilişki

kurulmuştur. Bunlardan en iyi bilineni Thümmel (Thümmel, 1974) tarafından verilmiştir;

$$\mu_m = 15.2 \frac{Z^{4/3}}{A} \frac{1}{E_{\max}^{1.485}}.$$

Başka bir çalışma ise Burek ve Chocyk (Burek and Chocyk, 1996) tarafından yapılmıştır;

$$\mu_m = K \frac{Z^{4/3}}{A} \frac{E_{\max}^{-n}}{1-n} \frac{1 - \left(\frac{E_{\min}}{E_{\max}}\right)^{1-n}}{1 - \left(\frac{E_{\min}}{E_{\max}}\right)}.$$

Burada $K = k_1 k_2 k_3$ ve $n = 1 + a_1 + k_3$ farklı parametrelerdir. Bu iki tanımda da kütle soğurma katsayısı $x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu_m}$ denkleminde farklı olarak sadece beta parçacıklarının

enerjilerine bağlıdır. Gürler ve Yalçın'ın yaptığı başka bir çalışmada ise (Gürler and Yalçın, 2005) soğurucu maddenin kalınlığı ile beta parçacıklarının enerjileri arasında bir ilişki kurulmuştur;

$$x(E) = \exp \left[\sum_{i=1}^5 q_i E^{q_i+1} \right].$$

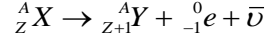
Burada q_i bir düzeltme parametresidir. Yukarıda ki denklemlerden görüldüğü gibi μ_m , beta parçacıklarının enerjilerine çeşitli parametrelerle bağlıdır. Bu denklemlerde beta parçacık şiddetinin hem beta parçacık enerjilerine hem de soğurucu kalınlığa bağlılığı bulunmamaktadır. Standart soğurma denklemi (3.10), kesirsel soğurma denklemi (3.37) ile ifade edilerek beta parçacık şiddetinin değişimi kesirsel matematik kullanılarak beta parçacık enerjilerine de bağlı hale getirilmiş olur. Böylelikle kesirsel yarı-değer kalınlıkları ile deneysel yarı-deney kalınlıkları kesirsel türev mertebesinin yaklaşık $\alpha \cong 0.31$ değeri için eşdeğer olarak elde edilmektedir. Kesirsel çözümde herhangi bir düzeltme parametresine ihtiyaç duyulmamaktadır. Beta parçacıklarının enerjilerine bağlılığı, kesirsel matematik ile otomatik olarak hesaplamaların içine katılmış olur.

- ✓ Kesirsel türev mertebeleri ile yarı-değerler arasındaki ilişki Şekil 4.25'te daha açık bir şekilde incelenmiştir. Yarı-değer kalınlıkların enerjisi yüksek olandan az olana doğru bir sıralama içinde olduğu görülmektedir.

EK AÇIKLAMALAR – BETA BOZUNMASI

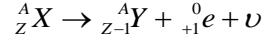
β - bozunması 3 şekilde olmaktadır.

1. Çekirdeğin elektron yayması;



eşitliği ile verilir. Burada $\bar{\nu}$, bozunma şartlarını sağlayabilmek için yüksüz, kütlesi çok küçük ve spini $\frac{1}{2}$ olan antinötrino adında bir parçacıktır.

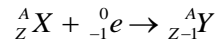
2. Çekirdeğin pozitron (+ yüklü elektron) yayması;



eşitliği ile verilir. Burada ν , yine bozunma şartlarını sağlayabilmek için yüksüz, kütlesi çok küçük ve spini $\frac{1}{2}$ olan nötrino adında bir parçacıktır.

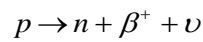
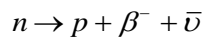
Nötrino (ν) ve antinötrino ($\bar{\nu}$) birbirinden farklı parçacıklardır. Bunun sebebi; nötrinin spin açısıl momentum vektörü ile çizgisel momentum vektörü antiparalel olduğu halde, antinötrinin paraleldir.

3. Çekirdeğin, çekirdek etrafındaki elektronlardan birini yakalaması;



eşitliği ile verilir. Burada, yakalanan elektron çekirdek içinde enerjiye dönüşmektedir.

Bu parçalanmalarda kütle sayısında bir değişme olmaz. Yani; $\Delta A = 0$ 'dır. Fakat çekirdek yükünde bir değişme olur. Çekirdeğin yalnız nötron ve protonlardan oluşması nedeniyle elektrik yükünün korunumu ilkesine göre β^- yayınımlında bir nötron protona, β^+ yayınımlında ise bir proton nötrona dönüşür (Tanyel, 1994).



KAYNAKLAR DİZİNİ

- Arfken, G.B. and Weber, H.J., 2005, *Mathematical Methods For Physicists*, Academic Press.
- Aydın, M., Kuryel, B., Gündüz, G. ve Oturaç, G., 2011, *Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları*, Barış Yayınları Fakülteler Kitabevi, 10. Baskı, 554s.
- Batra, R.K. and Sehgal, M.L., 1981, Range of electrons and positrons in matter, *Phys. Rev B*, 4448-4454p.
- Boas, M.L., 1966, *Mathematical Method in the Physical Sciences* John Wiley and Sons, Inc., New York.
- Burek, R., and Chocyk, D., 1996, Basic aspects of the mass absorption coefficient of beta-particles, *J. Radional. Nucl. Chem.*, 181-191p.
- Carpinteri, A. and Mainardi, F., 1997, *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics*, Springer Verlag.
- Çalık, A.E., Öder, B., Ertik, H. and Şirin, H., 2013, A fractional calculus approach to investigate the alpha decay processes, *International Journal of Modern Physics E*, 13p.
- Çalık, A.E. and Şen, M., 2014, Calculation of half-value thickness for aluminum absorbers by means of fractional calculus, *Ann. Nucl. Energy*, 46-50p.
- Ermiş, E.E. and Çelikleş, C., 2012, Determination of beta attenuation coefficients by means of timing method, *Ann. Nucl. Energy*, 115-118p.
- Ertik, H., 2010, *Kuantum gazlarının fiziksel özelliklerinin istatistiksel mekanik yöntemlerle incelenmesi*, Doktora Tezi Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 151s.
- Gürler, O. and Yalçın, S., 2005, A practical method for calculation of mass-attenuation coefficients of beta particles, *Ann. Nucl. Energy*, 1918-1925p.
- Karadeniz, D., 2008, *Kesirli yayılım-dalga denklemlerinin silindirik koordinatlarda incelenmesi*, Yüksek Lisans Tezi Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 76s.
- Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J., 2006, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier.
- La Rocca, P. and Riggi, F., 2009, Absorption of beta particles in different materials: an undergraduate experiment, *Euro. J. Phys.*, 1417-1425p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Leo, W.R., 1994, Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments, Springer Verlag.
- Leonard, I.K. and Pobereskin, M., 1948, The isotopes Os-185 and Os-183, Phys. Rev., 264-267p.
- Libby, W.F., 1956, Relation between energy and half-thickness for absorption of beta radiation, Phys. Rev., 1900-1901p.
- Mainardi, F. and Gorenflo, R., 2000, On Mittag-Leffler-type functions in fractional evolution processes, J. J. Comput. Appl. Math., 283-299 p.
- Miller, K.S. and Ross, B., 1993, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley and Sons Inc., New York.
- Muslih, S.I. and Baleanu, D., 2005, Hamiltonian formulation of systems with linear velocities within Riemann – Liouville fractional derivatives, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 304:599-606.
- Naber, M., 2004, Time Fractional Schrödinger Equations, J. Math. Phys., 3339-3352p.
- Oldham, K.B. and Spanier, J., 1974, The Fractional Calculus, Academic Press, San Diego.
- Podlubny, I., 1999, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego.
- Rabei, E., Nawefleh, K.I., Hijjawi, R.S., Muslih, S.I. and Baleanu, D., 2007, The Hamilton formalism with fractional derivatives, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 327:891-897.
- Ram, N., Sundara Rao, I.S. and Mehta, M.K., 1982, Mass absorption coefficients and range of beta particles in Be, Al, Cu, Ag and Pb, Pramana, 121-126p.
- Riewe, F., 1996, Nonconservative Lagrangian and Hamiltonian mechanics, Physical Review E, 1890-1899p.
- Seliger, H.H., 1952, The backscattering of positrons and electrons, Phys. Rev., 408-412p.
- Seliger, H.H., 1955, Transmission of positrons and electrons, Phys. Rev., 1029-1037p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Şirin, H., 2011, Transport olayının istatistiksel mekanik yöntemlerle incelenmesi, Doktora Tezi Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 83s.

Takhar, P.S., 1967, Direct comparison of the penetration of solids and liquids by positrons and electrons, Phys. Rev., 257-261p.

Takhar, P.S., 1968, Direct comparison of positron-electron ranges in rare earth metals and other solids, Phys. Lett. A, 423-424p.

Tan, M. and Karadağ, M., 2004, Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Atom ve Molekül Fiziği Deneysel Föyü.

Tanyel, B., 1994, Nükleer Fizik, Ege Üniversitesi Basımevi, 340s.

Thümmel, H.W., 1974, Durchgang von Elektron und Betastrahlung Durch Materieschichten, Akademie Verlag, Berlin.