T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ

DOKUZUNCU SINIF ÖĞRENCİLERİNİN AÇIORTAY KONUSUNDA MATEMATİKSEL DÜŞÜNME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NURŞEN TOSUN

BALIKESİR, HAZİRAN - 2019

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ

DOKUZUNCU SINIF ÖĞRENCİLERİNİN AÇIORTAY KONUSUNDA MATEMATİKSEL DÜŞÜNME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NURŞEN TOSUN

Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Sevinç MERT UYANGÖR (Tez Danışmanı)
Prof. Dr. Mehmet SEZER
Dr. Öğr. Üy. Gülcan ÖZTÜRK

BALIKESİR, HAZİRAN - 2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

Nurşen TOSUN tarafından hazırlanan **"DOKUZUNCU SINIF ÖĞRENCİLERİNİN AÇIORTAY KONUSUNDA MATEMATİKSEL DÜŞÜNME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ"** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 24.06.2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Sevinç Mert UYANGÖR	....
Üye Prof. Dr. Mehmet SEZER	....
Üye Dr. Öğr. Üy. Gülcan ÖZTÜRK	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

ÖZET

DOKUZUNCU SINIF ÖĞRENCİLERİNİN AÇIORTAY KONUSUNDA MATEMATİKSEL DÜŞÜNME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
NURŞEN TOSUN
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ
(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. SEVİNÇ MERT UYANGÖR)
BALIKESİR, HAZİRAN - 2019

Yapılan çalışmanın amacı dokuzuncu sınıf öğrencilerinin açıortay konusunda matematiksel düşünme süreçleri incelenmektir. Çalışmada matematiksel düşünme; özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve doğrulama ve ikna etme bileşenleri açısından incelenmiştir. Çalışmada nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiştir. Araştırmanın deseni ise nitel araştırma desenleri içerisinde yer alan durum çalışması olarak belirlenmiştir. Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçleri incelenirken; görüşme ve doküman analizi gibi nitel bilgi toplama yöntemlerinin kullanılmıştır. Çalışmaya 2018-2019 Eğitim-Öğretim yılı Ağrı ilinin ilçelerinin birinde bulunan bir ortaöğretim kurumunda öğrenim görmekte olan yirmi beş tane dokuzuncu sınıf öğrencisi katılmıştır. Çalışmanın katılımcıları amaçsal örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemiyle belirlenmiştir. Çalışmada bu ölçüt sınıf düzeyi olarak ele alınmış ve dokuzuncu sınıflarda çalışma yürütülmüştür. Çalışmanın sonucunda öğrencilerin özelleştirme aşamasındaki soruları kolaylıkla yapabildikleri görülmüştür. Sadece öğrenciler pergel ve cetvel kullanımı gerektiren soruda zorlanmıştır. Genelleme aşamasındaki sorularda da öğrenciler zorlanmamıştır. Öğrenciler buldukları genellemeleri sözel olarak açıklamıştır. Varsayımda bulunma aşamasında öğrencilerin başarılı olmuştur. Ancak doğrulama ve ikna etme aşamasında öğrenciler ortaya attıkları varsayımları kanıtlayamamıştır. Üç öğrenciyle yapılan görüşme sonucunda öğrenciler birbiriyle etkileşime girerek düşüncelerini açıkça ifade etmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Matematiksel düşünme, özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma, doğrulama ve ikna etme.

ABSTRACT

THE INVESTIGATION OF MATHEMATICAL THINKING PROCESS OF BISECTOR OF 9TH GRADE STUDENTS
MSC THESIS
NURŞEN TOSUN
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
SECONDARY SCIENCE AND MATHEMATICS EDUCATION
ELEMENTARY MATHEMATICS EDUCATION
(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. SEVİNÇ MERT UYANGÖR)
BALIKESİR, JUNE 2019

The aim of this study is to investigate the mathematical thinking process of ninth grade students on bisector. In this study, mathematical thinking is examined in terms of specializing, generalizing, conjecturing and justifying and convincing. Qualitative research approach was adopted in the study. The research design was determined as a case study in qualitative research designs. Mathematical thinking processes of ninth grade students were examined; qualitative information gathering methods such as interview and document analysis were used. Twenty five ninth grade students attending a secondary education institution in one of the districts of Ağrı province participated in the study during the 2018-2019 academic year. Participants of the study were determined with criterion sampling method which is one of the purposive sampling methods. In this study, this criterion was considered as grade level and the study was conducted in the ninth grade. As a result of the study, it was seen that the students could easily make the questions in the specialization stage. Only students were forced to question the use of compasses and rulers. The students were not forced to generalize questions. Students were successful in making conjecturing. However, the students could not justifying and convincing their conjecturing during verification and persuasion. As a result of the interview with the three students, the students expressed their thoughts by interacting with each other.

KEYWORDS: Mathematical thinking, specializing, generalizing, conjecturing, justifying and convincing.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

TABLO LİSTESİ

Sayfa

KISALTMA LİSTESİ

MEB : Milli Eğitim Bakanlığı

TDK: Türk Dil Kurumu

PISA: Ulusal Öğrenci Değerlendirme Programı

ÖNSÖZ

Araştırmamın her aşamasında bana yol gösterip, yanımda olan bilgi ve tecrübeleriyle araştırmamı yönlendirip ışık tutan, bana her türlü olanağı sağlayan çok sevdiğim danışman hocam Doç. Dr. Sevinç Mert UYANGÖR'e çok teşekkür ederim.

Ayrıca şuana kadar üzerimde emeği olan tüm öğretmenlerime teşekkürlerimi sunuyorum.

Çalışmamda bana her zaman destek olan sevgili arkadaşlarım Cemile ÖZEY ve Şermin GÜLMEZ'e çok teşekkür ederim.

Hayatımda her zaman yanımda olup, maddi veya manevi desteklerini esirgemeyen canım annem Nurten TOSUN ve canım babam Erol TOSUN'a çok teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

Bu bölümde araştırmanın; problem durumuna, problem cümlesine, alt problemlerine, amacına, önemine, sayıltılarına, sınırlılıklarına ve tanımlarına yer verilmiştir.

1.1 Problem Durumu

Çağımızda "eğitim, öğretim" denildiğinde; araştırmayı ve düşünmeyi bilmek, bunu genç kuşaklara öğretmek demek anlaşılmalıdır (Gözen, 2001). Öğrencilere bilimsel, yaratıcı, demokratik, çok boyutlu, matematiksel ve eleştirel düşünme gibi üst düzey düşünme becerileri kazandırmak tüm eğitimcilerin en önemli görevi olarak görülebilir. Bu becerileri temel alan öğretim programlarının uygulanması ile istenen özelliklere sahip bireyler yetiştirilebilir (Ersoy ve Başer, 2013). Bu bağlamda teknolojinin ilerlemesiyle hızlı gelişen ve değişen dünyada eğitim programlarının hedeflediği davranışlar da değişiklik göstermektedir. Son yıllarda ülkemizde 2006, 2011, 2013 ve 2018 eğitim-öğretim yıllarında ortaöğretim matematik dersi öğretim programında birtakım güncellemelere gidilmiştir. Söz konusu programda öğrencilerin öğrendikleri bilgilerin kalıcılığını arttırmak için öğrenme ortamlarına aktif olarak katılmaları, bilgiyi kendileri oluşturulup yapılandırmaları gerekmektedir. Bununla birlikte programda benimsenen yaklaşım doğrultusunda matematiksel düşünme, problem çözme, ilişkilendirme, matematiği bir iletişim dili olarak kullanabilme ve modelleme becerileri matematik öğrenme ve yapma süreçlerinin temel elemanları olarak belirtilmektedir. (Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018a: 11). Bir matematiksel durum için açıklanacak olursa; matematiksel düşünme için matematikçilerin teoremleri nasıl ispatladıklarını anlamanın ötesinde, bu ispatın yapılabilmesi için nasıl tahminde bulunduklarını anlamak gerekmektedir (Polya, 1945). Bir problem durumu karşısında bireyler problemin cevabını bulmaktan ziyade problemi farklı boyutlarıyla inceleme yapabilmesi için matematiksel düşünmeye ihtiyaç duyarlar (Ferri, 2003'den aktaran Yeşildere ve Türnüklü 2007).

Ayllón, Gómez ve Ballesta-Claver (2016)'a göre bireyler bir problemle karşı karşıya kaldığında o problemi düşünüp analiz etmek zorunda kalırlar, bu yüzden matematik öğretiminin asıl amacının bireylerde düşünmeyi geliştirmek olduğunu ifade etmişlerdir. Umay ise düşünebilme yeteneği ile insanların diğer canlılardan ayrıldığını ve matematik eğitiminin de hesaplama gibi işlemsel becerilerin yanında akıl yürütüp, tahminlerde bulunarak, problem çözmeye yardımcı olduğunu vurgulamaktadır (Umay, 2003).

Henderson ve diğerleri (2001), matematiksel düşünmeyi genel olarak matematiksel tekniklerin, kavramların ve süreçlerin doğrudan ya da dolaylı olarak problemlerin çözümünde uygulanması şeklinde tanımlamıştır. Yıldırım (2014), günlük ve bilimsel düşünmeden farklı olmayan matematiksel düşünmeyi bir problem çözme etkinliği olarak ifade etmiştir.

Yıldırım; matematiksel düşünmenin verileri, durumları, nesneleri matematiksel mantıkla yargılayabilme becerisi olduğunu belirtmiş, matematiksel düşünmenin bir süreç işi olduğunu vurgulamıştır. Bu sürecin girdileri incelendiğinde; düşünen kişi, sorun, sorun ile ilgili veriler ve verileri yorumlama yöntemi (düşünme tekniği) vardır. Bu girdiler niteliksel olarak ne kadar yeterli ise matematiksel düşünme o düzeyde nitelikli olduğunu ifade etmiştir (Yıldırım, 2014).

Araştırmacılar matematiksel düşünmeyi somutlaştırmak (Arslan ve Yıldız, 2010) amacıyla bileşenlerine ayırmıştır. Örneğin; Liu (2003) matematiksel düşünmeyi "tahmin edebilme, tümevarım, tümdengelim, örnekleme, genelleme, analoji, formal ve informal olmayan usavurma, doğrulama ve benzeri karmaşık süreçlerin bir birleşim kümesi" olarak tanımlamıştır. Tall (2002) matematiksel düşünmenin soyutlama, sentezleme, genelleme, modelleme, problem çözme ve ispat gibi bileşenleri kapsadığını ifade etmektedir (Tall, 2002'den aktaran Kükey, 2018). Mason, Burton ve Stacey (2010) de matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma, doğrulama ve ikna etme bileşenlerini incelemişlerdir.

Bireyler, yaşamları boyunca karşılaştıkları durumları çözümlerken, farkında olarak ya da olmayarak, matematiksel düşünmelerini gerçekleştirirler. Aynı zamanda matematiksel düşünme her meslek için gereklidir (Blitzer, 2003’ten aktaran Alkan ve Bukova Güzel, 2005).

Yıldırım (2015)’a göre, problem çözme becerilerinin gelişimine dolayısıyla matematiksel düşünmelerine katkı sağlayan matematiğin en önemli alt dalı geometri olabilir. 21. yüzyılın başlarında geometri İngiltere’de genellikle erkeklerin ve ilkokulu bitirip eğitim öğretim sürecine devam eden küçük grupların gördüğü bir derstir (Yıldız, 2017, s.15). Sarı (2015)’ya göre, geometri yaşadığımız dünyadaki yapıları tanıyıp, analize edip, anlamak için bir araç olmaktan ziyade matematiğin sayılar ve ölçümler gibi niceliksel olarak da tanımlaya yardımcı olur. Yapılan araştırmalar da geometrinin öğrencilerin korktuğu ve başarısız olabildiği bir ders olduğunu göstermektedir (Anıkaydın, 2017; Fidan, 2009; Yıldız, 2018). Öğrencilerin geometri dersinde başarısız olmasının sebepleri öğrencilerin doğrudan formülü hazır olarak alıp ezberlemeleri olabilir. Nitekim Altun’a göre, öğrenciler kendilerine açıkça söylenen formül ve bilgileri sevmez. Bilgiye kendileri ulaştığında ondan zevk alıp severler (Altun, 2006). Bunun yanında öğrendiği bilgiyi kullanamaması, öğrendiklerini ezberlemesi, genelleme yapamaması, varsayımlar ortaya atamaması ve dolayısıyla ispatlama yapamaması olabilir. Bundan dolayı geometri alanında öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerini kazandırmak ve geliştirmek oldukça önemlidir.

İlgili alanyazında matematiksel düşünmenin bir süreç olduğu ve bileşenlerinin birbirini takip ettiği göz önüne alınarak yapılan çalışmalar mevcuttur (Hacısalihoğlu, Mirasyedioğlu ve Akpınar, 2003; Liu, 2003; Alkan ve Bukova Güzel, 2005; Mubark, 2005; Mason, ve diğerleri, 2010; Arslan ve Yıldız, 2010; Tuna, 2011; Keskin, Akbaba Dağ, ve Altun, 2013; Yıldırım, 2015; Yıldırım ve Yavuzsoy Köse, 2018). Gerçekleştirilen bu çalışmanın amacı ise, dokuzuncu sınıf öğrencilerinin ‘açıortay’ konusunda matematiksel düşünme süreçlerini özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve doğrulama ve ikna etme bileşenleri açısından incelemektir. Böylece elde edilecek sonuçlar öğrenme faaliyetlerinde ve öğretmenlerin öğretimi planlamasında fayda sağlayabilecektir. Böylece araştırmanın problem cümlesi aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur:

1.2 Problem Cümlesi

Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin açıortay konusunda matematiksel düşünme süreçleri nasıldır?

1.3 Alt Problemler

1) Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerinin özelleştirme aşamasındaki davranışları nelerdir?
2) Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerinin genelleme aşamasındaki davranışları nelerdir?
3) Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerinin varsayımda bulunma aşamasındaki davranışları nelerdir?
4) Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerinin ispat aşamasındaki davranışları nelerdir?

1.4 Çalışmanın Amacı ve Önemi

Bu çalışmayla dokuzuncu sınıf öğrencilerinin açıortay konusunda matematiksel düşünme süreçlerini belirlemeyi amaçlanmıştır. Gelişen ve değişen teknolojiyle birlikte günümüz eğitim anlayışı öğrencilerin problem çözebilen, problemin çözümü için akıl yürütüp varsayımlar kurabilen, eleştirel düşünebilen bireyler olmasını amaçlamaktadır. Bireyler de günlük hayatlarında farkında olarak ya da olmayarak matematiksel düşünmeyi problemleri çözerken kullanırlar (Alkan ve Bukova Güzel, 2005). Ayrıca eğitim programları da matematiksel düşünmeyi bireylere kazandırılması gereken beceriler arasında yer vermektedir. Matematiksel düşünmeyi geliştiren matematiğin bir alt öğrenme alanı da geometridir. Güney (2018)'e göre, geometri cisimlerin en, boy, yükseklik, açı, derinlik ve şekillerini inceleyen bir alandır. Geometri öğrenme alanı ilköğretim birinci sınıftan başlayarak ortaöğretim son sınıfa kadar her kademede yer verilmektedir (MEB, 2018a; MEB, 2018b). Ancak ülkemizde geometri dersi öğrenciler tarafından zor sevilmeyen bir alan olarak görülmektedir. Bunu destekleyen birçok çalışma da öğretmen ve öğrencilerinin geometrik bilgi (Bozkurt ve Koç, 2012; Kılıç, 2013) ve düşünme düzeyi (Altun, 2018; Çadırlı, 2017; Karapınar, 2017; Sayın, 2017; Fidan ve Türnüklü, 2010), zihinsel alışkanlıkları (Yavuzsoy Köse ve Tanışlı, 2014) bakımından istenen düzeyde olmadığını göstermektedir. Literatür incelendiğinde geometri alanında matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesiyle ilgili sınırlı sayıda araştırmaya rastlanılmıştır (Arslan ve Yıldız, 2010; Tuna, 2011; Keskin ve diğerleri, 2013; Yıldırım, 2015; Yıldırım ve Yavuzsoy Köse, 2018). Bu noktada yapılan çalışma açıortay konusunda matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi bakımında alana katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

1.5 Varsayımlar

Bu çalışma veri toplama sürecinde öğrencilerin birbirleriyle etkileşim içinde olmadıkları varsayılarak sürdürülmüştür.

Veri toplama sürecinde araştırmacı tarafından veri toplama araçları elden dağıtılmış ve uygulama esnasında yapılandırılmamış gözlem yapılarak notlar alınmıştır. Bu yüzden öğrencilerin soruları dikkatli bir şekilde okuyup gerçek performanslarını ortaya koyarak cevapladıkları kabul edilmiştir.

Uygulama sırasında ortaya çıkan kontrol edilmeyen değişkenlerin çalışmayı etkilemediği varsayılmıştır.

1.6 Sınırlıklar

Çalışma Ağrı ilinde seçilen bir lisede öğrenim görmekte olan 25 tane dokuzuncu sınıf öğrencisi ile sınırlı örneklemde gerçekleştirilmiştir. Çalışmada toplanan veriler 2018-2019 Eğitim-Öğretim yılının ikinci yarısında toplanmıştır ve kullanılan veri toplama aracıyla sınırlıdır.

1.7 Tanımlar

Matematiksel düşünme: Matematiksel tekniklerin ve kavramların ve süreçlerin doğrudan veya dolaylı olarak problemlerin çözümünde kullanılmasıdır (Henderson ve diğerleri, 2001).

Özelleştirme: Basit bir şekilde düşünerek özel durumlar aramak olarak tanımlanır (Mason ve diğerleri, 2010).

Genelleme: Bir ya da daha fazla nesne veya ilişkinin gözlemine dayanarak o nesne veya ilişkinin dahil olduğu tüm sınıf hakkında doğruluk savı taşıyan bir yargıdır (Yıldırım, 2014, s.49).

Varsayımda Bulunma: Teoerem kelimesinin kök anlamından yola çıkarak varsayım bir durumu görmek olarak tanımlanır (Mason ve diğerleri, 2010).

Doğrulama ve İkna Etme: Bir durumun ne olduğundan öte neden olduğunu görerek gerekçelendirme yapmaktır (Mason ve diğerleri, 2010).

2. KURAMSAL ÇERÇEVE

2.1 Matematik ve Matematik Öğretimi

Yakın zamana kadar sınıf ortamında matematik bilmek; öğretmen soru sorduğunda doğru cevaplayabilmek, istenilenleri doğru hatırlayabilmek ve bilginin öğretmenin söylediği şekli ile tekrar etmek anlamına gelmekte idi (De Hoyos, Gray, Simpson, 2002'den aktaran Altun, 2006). Ancak yakın zamanda matematiğin ne olduğu, matematiğin nasıl öğretilmesi gerektiği, konusunda değişiklikler meydana gelmeye başlamıştır Eskiden matematik eğitiminde öğretmenler bilgiyi belirli yöntemlerle doğrudan olarak öğrencilere verir ve öğrencinin tek bir doğru yolla çözmeleri istenirdi. Bu da öğrencinin okulda gördüğü bilgiyi ezberlemesine yol açmakta idi. Öğrenciler de dolayısıyla okulda karşılaşmadığı bir problemi çözemez hale gelmekteydi. Ancak günümüz şartlarında artık işverenlerde bireylerin karşılaşmadığı problemleri çözmesini beklemektedir. Dolayısıyla artık matematik salt bilgi öğrenmek değil, matematiği matematik yaparak öğrenmektir. (Olkun ve Toluk Uçar; 2014, s.24).

Matematik çok sayıda örnek çözmekten ya da öğretmenin çözümlerini taklit etmekten daha fazlasıdır. Matematik yapmak problemin çözüme ulaşmasını sağlamak için yöntem geliştirmek, bulduğumuz yöntemi uygulamak ve daha sora bu yöntemleri sonuca ulaştırıp ulaştırmadığını kontrol etmektir (Van De Walle, Karp and Bay-Williams, 2018, s.13).

Yıldırım'a göre matematik; insanlığın var oluşundan itibaren yaşamın her alanını etkileyen edebiyat, sanat, tarih, endüstri gibi günlük uğraşların bir aracıdır. Kendine özgü amaç, yöntem ve sonuçlarıyla düşünmeye dayalı bir disiplindir. Diğer bir deyişle matematik amaç ve araç olarak ikiye ayrılır. Diğer bilim dalları için matematik bir araç iken, matematikçilerin gözünde matematik düşünmeye ve doğruyu aramaya yönelik kendi içinde değerliliği koruyan bir amaçtır (Yıldırım, 2014). Sayılar arasındaki ilişkiyi inceleyen bilim dalına matematik denir. İnşaat mühendislerinden tutun da istatiksel analiz yapan bilim adamlarına kadar farklı alanlar matematikten faydalanır (Cüceloğlu, 2002, s.35).

Altun'a göre matematik yaşamın soyutlanmış hali olarak tanımlanmaktadır. Örneğin "*Dakikada x m yol alan bir karıncanın 5 dakikada aldığı yol ne kadardır*? *, Biri x m büyüklüğündeki 5 halı ile serilebilecek alan ne kadardır?* '' gibi sorularla hayatımızın içinde sürekli karşılaşılır. Günümüzde matematik ihtiyaç duyduğumuz soyut kavramların birikmiş bir halinden ziyade, problem çözme ve problemi anlamlandırma sürecinden elde ettiğimiz becerilerdir (Altun, 2006).

Matematiğin tanımlarına incelendiğinde Türk Dil Kurumu'na [TDK] göre matematik; aritmetik, cebir, geometri, sayı ve ölçü temeline dayanarak niceliklerin özelliklerini inceler (TDK, 2019). Sarı (2015) matematik eğitiminde soyutlamaların önemine vurgu yaparak; matematiği ardışık soyutlama düzeyleriyle kurulan bir disiplin olarak tanımlamaktadır.

Sertöz'e göre matematik bireylerin belli bir eğitim geçirdikten sonra mutluluk veren, bakıldığında hemen anlaşılamayacak kadar gizli ve karmaşık ama beynin çabalarıyla ulaşabilecek kadar yakın olan bir arayıştır (Sertöz, 2013). Mason ve diğerleri (2010)'ne göre matematiğin tüm alanlarında bulunan örneklerinin bolluğu matematiğin en sevdirici ve tatmin edici yönlerinden biridir.

Dahl (2009) ise matematik; bir seksek oyunu, bir elbisenin üzerindeki motiflerin düzeni, kuralları belli olan bir dildir. MEB (2009)'e göre matematik sayı ve şekillere dayalı, bilgiyi analiz edip tahminlerde bulunarak yorumlamaya yardımcı olan örüntü ve kurallar bilimidir. Tepedelenlioğlu'na göre matematik simgeler yığınından ziyade sanat edebiyat gibi alanlarda hayatımızda kullandığımız yöntemlerin sistematikleşmiş halidir (Tepedelenlioğlu, 2009).

Tural'a göre matematik bilgiyi işleyerek tahminlerde bulunup problem çözmektir (Tural, 2005). Mubark (2005) göre matematik bilişin önemli bir dalıdır ve matematiksel düşüncenin gelişimi yeni ve gelişmiş bir eğitimi sistemi içinde eğitimsel gelişimin yönlendirilmesinde temel bir unsurdur. Yıldız ve Uyanık'a göre içinde gizemli bir potansiyel olan matematik yaşadığımız çevreyi algılamamıza ve keşfetmemize yarar sağlar (Yıldız ve Uyanık, 2004). Uğurel ve Moralı (2006)'ya göre matematik toplumda herkes tarafından etkililiği kabul edilen önemli görülen, tüm bilim dallarının kullandığı araçtır.

Nasibov ve Kaçar'a göre ise matematik güzel bir mimariye sahip olan ve içinde akustiği barındıran bir binaya benzetilebilir (Nasibov ve Kaçar, 2005). Aslında bakıldığında matematiğin güzellikleri içinde saklıdır. Bunun için öncelikle o kapıdan içeri girmek gerekir. Sevgen'e göre yeterli koşullar ve uyarıcılar sağlandığında matematik öğrenemeyecek kimse yoktur. Herkes kendi kazandığı bilişsel faaliyetler ile matematik öğrenebilir (Sevgen, 2002). Ayrıca matematik yapma sürecinde öğrenciler bir formülün nasıl çıkarılacağını, tanımlamalara nasıl ulaşılacağını, genellemelerin nasıl yapılacağını, elde ettikleri genellemelerin nasıl ispatlanacağı gibi beceriler de kazanılır (Olkun ve Toluk Uçar, 2014, s. 24). Aslında matematik yapma sürecinde matematiksel düşünmenin aşamaları da gerçekleştirilmiş olur.

Başer (1996) eğitim sistemlerinin her kademesinde karşılaşılan matematik sayesinde bireylerin yeteneklerini ortaya çıktığını ifade etmiştir. Gelecek kuşaklara matematiksel görüş ve düşünüş vermek gerekliliğinin önemine vurgu yaparak matematiği eğitim olgusu olarak tanımlar. Matematik insan aklının güzelliğini ve üstünlüğünü gösterir.

Yukarıda verilen tanımlardan hareketle matematiği hızlı ve gelişen dünyada karşılaştığımız problemlerimizi çözmeye yarayan, bireylerin ilgi ve ihtiyaçlarına yardımcı olabilen, eleştirel, mantıksal, matematiksel düşünmelerini sağlayan evrensel bir dil olarak tanımlanabilir.

Matematik öğretim programının genel amaçları incelendiğinde; öğrencilerin öncelikle matematik tarihi hakkında bilgi edindirmeyi amaçladığı görülmektedir. Ayrıca öğrencilere problemin ne olup olmadığını, karşılaştıkları problemleri çözme becerileri kazandırmayı, farklı bakış açılarıyla çevreyi algılamalarını sağlamayı ve matematiksel düşünme becerileri kazandırmayı hedefler (MEB, 2018a).

MEB (2013) matematik öğretimi öğrencilerin soyutlama, genelleme, modelleme ve problem çözme etkinliklerini gerçekleştirirken öğrencileri düşünmeye yönlendirici ipuçları verilerek gerçekleştirilmelidir.

Hughes (2006)'e göre, matematik öğretiminin etkili bir şekilde uygulanması için öğretmenlerin de üzerine düşen görevler olduğunu ifade etmiştir. Öğretmenler öğrencilerin neyi nasıl öğrendiklerine dolayısıyla matematiksel düşünme bilgisine kendilerinde barındırmalıdır (Hughes, 2006'dan aktaran Öztürk, 2013).

Etkili matematik öğretimi öğrencilerin bildiklerini ve öğrenmeleri gerekenleri anlamayı ve daha sonra iyi öğrenmeleri için öğrendiklerine meydan okumayı ve desteklemeyi gerektirir (Midgett ve Eddins, 2001).

Tüm bu tanımlardan anlaşılacağı üzere matematik öğretimi öğrencilere günlük hayatta kullanabileceği, hızlı değişen dünyaya uyum sağlayıp karşılaştığı problemleri çözümler bulmayı ve düşünme becerileri kazandırmayı amaçlamaktadır. Çünkü matematik, hesaplama becerilerini öğretmekten ibaret değildir. Düşünme matematiğin temelini oluşturmaktadır (Umay, 2003).

2.2 Düşünme

Türk Dil Kurumu (2019)'na göre düşünme bir sonuca varmak amacıyla bilgileri incelemek, karşılaştırmak ve aradaki ilgilerden yararlanarak düşünce üretmek, zihinsel yetiler oluşturmak muhakeme etmek olarak tanımlanmaktadır. Aykar (2019) düşünmeyi kişiyi rahatsız eden olaylardan kurtulmak için gerçekleştirdiği zihinsel faaliyetler olarak tanımlamıştır.

MEB (2016)'e göre düşünme insanın en ayırıcı özelliklerinden biridir. Var olan düşünebilme özelliği insanı insan yapar. İnsanın yeryüzündeki doğuşundan ölümüne kadar gerçekleştirdiği her şey düşüncesinin ve aklının ürünüdür. Zihnin temel bir fonksiyonu olan düşünme insanların hayatında önemli bir yer tutar. Yaşanılan sevinçler üzüntüler, başarılar ve başarısızlıklar gibi hep düşünmeye bağlıdır. Bu yüzden bireyler mutlu ve rahat bir yaşam sürebilmesi için düşünme eğitiminden geçmelidir.

Düşünme bir problem çözme sonucunda ortaya çıkar. Düşünme faaliyeti iki aşamayı içinde barındırır. Bunlardan birincisi problemi açıklama, probleme çözüm bulma; ikinci aşama ise bulunan çözümün doğruluğunu göstermedir. (Yıldırım, 2014, s. 43). Örneğin aşağıdaki problemin çözümü üzerinde düşünme gerektirir.

Problem: Elinizde 5 litrelik ve 3 litrelik iki testi vardır. Bir nehirden bu kaplarla su almak suretiyle 4 litre suyu nasıl alırsınız? (Altun, 2015).

Bu problemin çözümü için deneme yanılma yolunu kullanabilir. Ancak bu şekilde yapmak zaman kaybına neden olacaktır. Bu tür problemler muhakemeye dayalı olduğundan üzerinde biraz düşündükten sonra doğru cevap bulunabilir. Öncelikle nehirden 5 litrelik kaba su doldurulur. Doldurulan suyu 3 litrelik kaba boşaltılır. 5 litrelik kapta 2 litre kalır. Sonra 5 litrelik kaba kalan 2 litrelik su, 3 litrelik kaba boşaltılır. 5 litrelik kabın tamamını nehirden tekrardan su ile doldurup, 3 litrelik kaba boşaltıldığında 1 litrelik su diğer kaba boşaltılır. Sonuç olarak 5 litrelik kapta 4 litrelik su kalmış olur.

Gerçek anlamda düşünme; bir durumu hatırlama, hayal etmekten ziyade beklenmeyen bir problemle karşılaşıldığında ortaya çıkar. Bu tür düşünmede "nedenli düşünme" olarak adlandırılır (Yıldırım, 2014, s.44).

Dilekli (2015)'ye göre düşünme süreci yaratıcılık ve problem çözme becerileri gibi üst düzey becerileri içerir. Düşünme sıradan bir faaliyet değildir. Bireyler düşünsel faaliyetlerini sadece okulda değil yaşamının tüm alanlarında göstermektedir. Örneğin; bireyin bir araç alırken kullanışlılığı, fiyatı gibi birçok faktöre dikkat etmesi düşünme faaliyetlerini gerçekleştirdiğini gösterir.

Öğrencilerdeki düşünme yeteneklerini geliştirmek oldukça önemlidir. Çünkü öğrencilerdeki düşünme yeteneği geliştirilmediği takdirde bilgilerini depolama işlemi yaparlar. Bu bilgileri nerede, nasıl kullanacaklarını anlayamazlar (Sabancı, 2014, s.139).

Düşünme; geçek dünyayı anlamak için karşılaştığımız problemlere çözüm üretmek, hedeflediğimiz durumu gerçekleştirmeyi sağlayan durumlar arası ilişki kurmaya yarayan bilinçli, planlı, örgütlenmiş zihinsel faaliyetlerdir (Alkın Şahin ve Tunca, 2013, s.397). Geleneksel öğretim yöntemleriyle öğrenilenler öğrencilerde düşünme olayını gerçekleştirmez. Dolayısıyla öğrenciler üzerinde bilgiyi düşünüp yorumlamadığından bilgi deposu haline gelir (Şahinel, 2019, s.149). Düşünme tanımlama, biçimlendirme, sentezleme, analiz edip varsayımlarda bulunarak ispatlama sürecini içerir (Dreyfus, 1990'dan aktaran Alkan ve Tataroğlu Taşdan, 2011).

Doğan (2019) da düşünme üzerinde ürün ve süreç olmak üzere iki temel yaklaşım olduğunu ifade etmiştir. Düşünmeyi ürün yani sonuç odaklı görenler düşünme sürecini nesnel bir şekilde inceleyebileceklerini savunurlar. Düşünmeyi süreç olarak görenler ise düşünme süreciyle ilgilenerek düşünmeyi bir araca benzetmişlerdir. Alkan ve Bukova Güzel (2005)'e göre düşünme sayesinde bireyler yaşadıkları çevreye adapte olur ve bireylerin gelişmesine olumlu katkı sağlar.

Bireyler de düşünme faaliyeti bir problem durumuyla başlar. Daha sonra bu problem durumunu açıklığa kavuşturmak birey için amaç haline gelir. Ayrıca bireyde düşünme süreci netliğe kavuşturulmayan bir durumun varlığında, bireyi rahatsız eden bir durum olduğunda ya da rahatsız eden durum karşısında herhangi bir karara varılamadıysa da geçekleşir (Kalaycı, 2001, s. 2).

Tüm bu tanımlardan hareketle düşünme bir süreç olup bireyler de üst düzey zihinsel faaliyetlerin gerçekleşmesini sağlar. Bu yüzden de düşünmeye fazlasıyla önem verilmektedir. Ülkemizde 2016 yılında 7. ve 8. sınıf öğrencilerine "Düşünme Eğitimi Dersi" konulmasıyla düşünmeye verilen önem görülebilir. Düşünme eğitimi dersiyle öğrencilerin düşünme becerisi aktif hale getirilerek yaratıcı, eleştirel, yansıtıcı düşünme becerileri kazandırmak amaçlanmıştır. Bunun yanında ilköğretim ve ortaöğretim matematik programlarında öğrencilere matematiksel düşünme becerilerinin kazandırılıp geliştirilmesi vurgulanmaktadır.

2.3 Matematiksel Düşünme

Gelişen teknolojiye birlikte matematiğe önem veren, karşılaştığı problemleri modelleyerek çözebilen matematiksel düşünme becerisi gelişmiş bireylere ihtiyaç vardır (MEB, 2018a). Okul matematiği öğrencilerde matematiksel düşüne becerisi geliştirmeyi ana hedef haline getirmelidir. Bunu yaparken de öğretmenler problemi çözerken, herhangi bir ispat yaparken sesli bir şekilde düşünmeli, ifadelerinde matematiksel bir dil kullanmalıdır (Baki, 2018, s.92).

Sindhupalchok, Kathmandu and Mahottari bölgesinde yürütülen çalışmada (2016) matematik okullarda kuru bir ders olarak bilindiğinden matematik başarısı da beklenilenden düşüktür. Bu yüzden matematik başarısının arttırmak gerekir. Genel olarak öğretmenler problemi sadece tahtada çözer ve çözülen sorunun sınav için önemli olduğunu söyler. Bu da öğrencilerin problemleri ezberlemelerine yol açar. Ancak bu şekilde yapılan öğretim de matematiksel düşünmeyi sağlamaz. Başarıyı arttırmanın yolu matematiksel düşünmeyi geliştirmekten geçer.

Matematiksel düşünme ve problem çözme arasında sıkı bir ilişki vardır. Nitekim problem çözme matematiksel düşünmeyi geliştirir. Ancak sadece problem çözme matematiksel düşünmenin gelişimi için yetmez. Bunun yanında bireylerde üstbiliş ve matematiksel eğilim de gereklidir (Schoenfeld, 1992'den aktaran Çelik, 2016). Üstbiliş bireylerin düşünme süreçlerinin farkına varması ve bu süreçleri denetleyebilmesidir (Frawell, 1979'dan aktaran Özsoy, 2008). Matematiksel eğilim ise matematiğin değerini bilmek olarak tanımlanabilir (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001'den aktaran Çelik, 2016).

Henderson ve diğerleri (2001), matematiksel düşünmeyi genel olarak matematiksel tekniklerin, kavramların ve süreçlerin doğrudan ya da dolaylı olarak problemlerin çözümünde uygulanması şeklinde tanımlamıştır.

Matematiksel düşünme bir problem çözme etkinliğidir ve matematiksel düşünme günlük ve bilimsel düşünmeden farklı değildir. Matematiksel düşünme sürecini gerçekleştirirken öncelikle beklenmedik bir problem karşısında düşünceleri işe koyarak problemi çözücü hipotezler kurulur. Daha sonra kurulan hipotezler test edilir. Eğer hipotez doğrulanırsa problem ortadan kalkar. Hipotez doğrulanmazsa diğer hipotezler test edilmeye başlanır. Bu süreç kurulan hipotez doğrulanıncaya kadar devam eder (Yıldırım, 2014, s.45).

Devlin (2012)'e göre matematiksel düşünme ile matematik yapma birbirinden farklı kavramlardır. Matematiksel düşünme dünyadaki tüm durumlar hakkında düşünmenin bir yoludur. Bu durumlar matematikle ilgili olmak zorunda değildir. Yaşam boyunca matematiksel düşünme insanlara fayda sağlar. Ayrıca matematiksel düşünme birçok meslek dalında başarılı olmayı sağlayan zihinsel faaliyetlerdir. Matematiksel düşünme akıl yürütme, mantıklı ve eleştirel düşünme becerilerini de içinde barındırır.

Mason ve diğerleri (2010), matematiksel düşünmeyi beş varsayımda dayandırmışlardır. Bunlar;

1) Herkes matematiksel düşünebilir.
2) Matematiksel düşünme pratik yapılarak geliştirilebilir.
3) Matematiksel düşünme beklenmeyen durumlar ve çelişkilerle kışkırtılabilir.
4) Matematiksel düşünme sorgulayarak, meydan okuyarak ve yansıtarak desteklenebilir.
5) Matematiksel düşünme kendimizi ve yaşadığımız dünyayı anlamamıza yardımcı olur.

Olaylar hakkında soyutlama, analiz etme ve sentezleme yapma matematiksel düşünme olarak tanımlanır (Schoenfeld, 1992'den aktaran Karadağ, 2009). Matematiğin hayatın bir parçası olduğu göz önüne alındığında, matematiksel düşünmenin gelişimi için de karşılaşılan her durumu fırsata çevirmek gerekir (MEB, 2018a). Coşkun (2012) düşünme ve öğrenmeden yola çıkarak matematiksel düşünme ile yeni matematiksel bilgi, kural ve formüller elde edilebilir.

Mason ve diğerleri (2010)'ne göre matematiksel düşünme bir süreç işidir. Karşılaşılan problem ne kadar zor olursa olsun matematiksel düşünmeyi sürdürmek problemin cevabını bulmaktan daha fazlasını gerektirir. Matematiksel düşünmenin gelişimi için iki aşama söz konusudur. Bunlardan birincisi karşılaşılan problemlerle mücadele etmek, ikincisi elde edilen deneyimleri yansıtmaktır. Yansıtma yaparak öncelikle bireyin kendi düşünceleri gelişir, daha sonra da öğrenilenler başkalarına yansıtılarak diğer bireylerin düşüncelerini geliştirilebilir.

Stacey (2006)'e göre matematiksel düşünme oldukça karmaşık bir süreç olmakla beraber problemleri çözerken ortaya çıkmaktadır. Matematik öğretimin en temel amaçlarındandır. Aynı zamanda matematiksel düşünme için matematik öğretiminin zorlu amaçlarından biri olduğu da söylenebilir. Bilim, teknoloji, ekonomik hayatı ve kalkınmanın gelişmesi matematiksel düşünme gereklidir. Bu yüzden çok önemli olan matematiksel düşünmenin önemini üç aşamada vurgulanabilir. Bunlar;

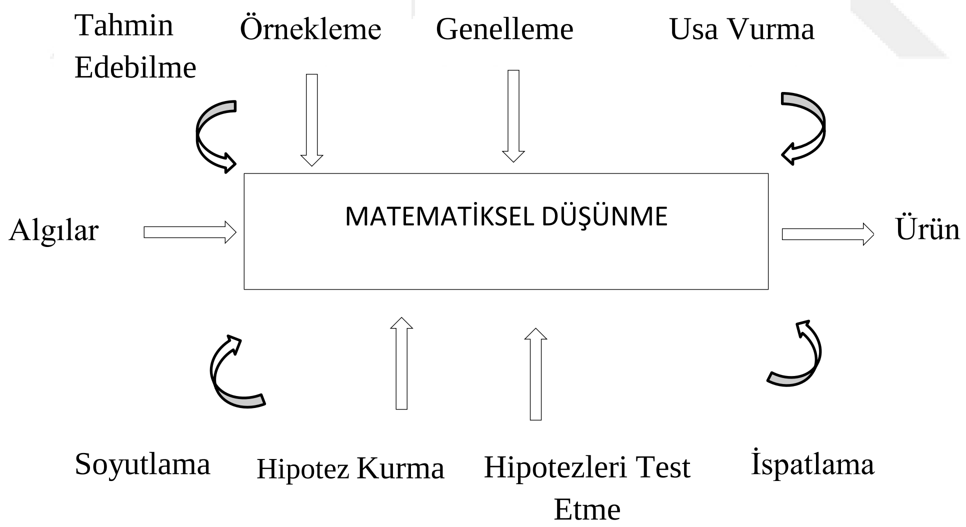
1)Matematiksel düşünme okullarda öğretilmesi hedeflenir.

2)Matematiksel düşünme matematik öğrenmenin bir yoludur.

3)Matematiksel düşünme matematik öğretiminde önemli bir yere sahiptir.

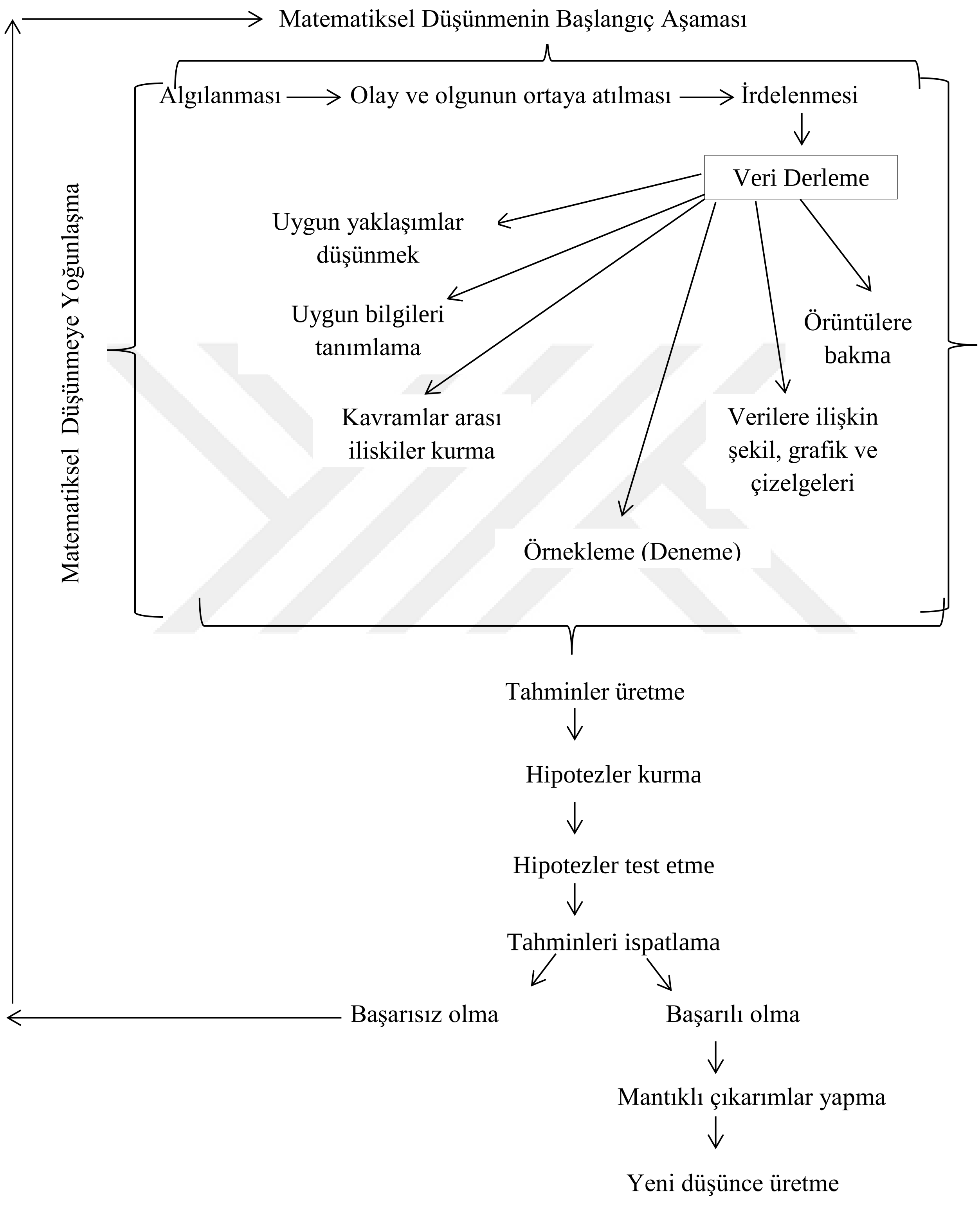
Lim ve Hwa (2006) matematiksel düşünmeyi matematiksel bilginin desteklediği zihinsel faaliyetler sonucunda karşılaşılan problemi çözmek olarak tanımlanabilir. Yeşildere (2006) bir problemin çözümü özelleştirme, genelleme tahminlerde bulunup, hipotezler kurup kurulan hipotezleri kanıtlama gibi üst düzey düşünme becerileri gerektiriyorsa matematiksel düşünme gerçekleşir demektedir. Aynı zamanda matematiksel düşünme sayılar gibi soyut matematiksel kavramların olduğu yerde değil günlük yaşamın içinde de karşımıza çıkar. Mubark (2005) matematiksel düşünme kendi içinde analitik düşünmenin yanı sıra sezgisel düşünmeyi içinde barındırdığını ifade etmiştir.

Alkan ve Bukova Güzel (2005) matematiksel düşünmede bireysel farklılıkların olduğunu ifade etmiş ve matematiksel düşünmenin işleyişini aşağıdaki Şekil 2.1'de göstermişlerdir.



Şekil 2.1: Matematiksel düşünmenin işleyişi (Alkan ve Bukova Güzel, 2005).

Bireyler matematiksel düşünmeyi gerçekleştirirken algılardan hareketle yeni bir sonuca ulaşmayı hedefler. Bu süreçte karşılaştığı durumlar karşısında tahminlerde bulunup, hipotezler kurarlar. Kurdukları hipotezleri test edip doğrulayarak sonuca ulaşırlar. Aynı zamanda süreç içinde soyutlama, örnekleme ve genelleme de yaparlar. Bireyler aslında matematiksel düşünmeyi günlük hayatlarında farkında olarak ya da olmaksızın gerçekleştirirler. Hayatın her alanında önemli olan matematiksel düşünme bireylerin yaşantıları ve öğrenmeleri arttıkça sürekli olarak gelişme gösterir Matematiksel düşünmeyi sürekli bir fonksiyona benzeterek düşünmenin oluşum sürecini aşağıdaki Şekilde göstermiştir. (Alkan ve Bukova Güzel, 2005)



Şekil 2.2: Matematiksel düşünmenin oluşumu (Alkan ve Bukova Güzel, 2005).

Matematiksel düşünmenin oluşum süreci, matematiksel düşünmenin başlangıç aşamasıyla başlar. Birey öncelikle algılarıyla olay ve olguları anlamaya çalışır. Daha sonra olay ve durumları incelemeler yaparak veri toplar. Verileri toplarken uygun yaklaşımlar kullanarak tanımlamalar yapar, kavramlar arasında ilişkiler kurar, şekil ve grafikler çizer, örüntüler yaparak deneme amaçlı örneklemelerde bulunulur. Sonra olaylar karşısında tahminlerde bulunup, bu tahminlere göre hipotezler kurulup, kurulan hipotezler test edilir. Eğer kurulan hipotez doğru çıkarsa yeni düşünce üretilmiş olur. Eğer doğrulanmazsa işlem doğrulanıncaya kadar devam eder. Oluşan yeni düşünceler de bir sonraki düşüncelinin temelini oluşturur (Alkan ve Bukova Güzel, 2005).

Sevgen (2002)'e göre matematiksel düşünce bireylerin hayatlarında karşılaştıkları sistematik, doğru ve çabuk yaklaşmalarıdır şeklinde tanımlanmıştır. Matematiksel düşünce iki yönlü olarak ele alınır. Bunlardan ilki bireylerin hayatlarında karşılaştıkları olaylara bakış ve yaklaşımları, ikincisi ise matematiksel düşüncenin her bireye kazandırılması gerektiğidir. Matematiksel düşüncenin gelişimini spiral bir döngüye benzeterek soyutlama, analiz ve uygulama bileşenlerinden oluşur. Soyutlama ve analiz ile olaylara durumlara bakış ve yaklaşımları, uygulama ise elde edilen sonuçların eyleme dönüşmesidir. Eyleme dönüşen her sonuç da yeni bir soyutlama ve analiz aşamasını oluşturur.

Matematiksel düşünme aynı zamanda olayları matematiksel olarak analiz etme, soyutlama ve sentezleme gibi üst düzey düşünme becerileri gerektirir (Schoenfeld, 1992'den aktaran Karadağ, 2009). Yeşildere ve Türnüklü (2007)'ye göre matematiksel düşünme de bir problemi özelleştirme, genelleme, tahminlerde bulunup, hipotezler kurma ve hipotezleri test etme gibi üst düzey düşünme becerileri gerektiriyorsa orada matematiksel düşünme gerçekleşir. Matematiksel düşünme soyut matematiksel kavramların içinde olmakla beraber günlük hayatta da karşımıza çıkar.

Matematiksel düşünmenin soyut olmasından dolayı matematiksel düşünmeyi anlamlandırmak için araştırmacılar bileşenlerine ayırarak (Arslan ve Yıldız, 2010) somutlaştırmaya çalışmışlardır. Aşağıda bu bileşenler tanımlanmaya çalışılmıştır.

2.4 Matematiksel Düşünmenin Bileşenleri

Matematiksel akıl yürütme ve kanıtlama matematiksel düşünmenin en önemli bileşenleridir. Bunun sonucunda bireyler doğru bir yargıya veya karar varıp bunu doğrulayabilir. Bu akıl yürütme ve kanıtlama işlemlerinin sonucunda ilişkilendirme ortaya çıkar. Böylelikle durumlar arası ilişkiler görülür. Bu ilişkiler yeni durumlarda kullanılabilir (Baki, 2018, s.92).

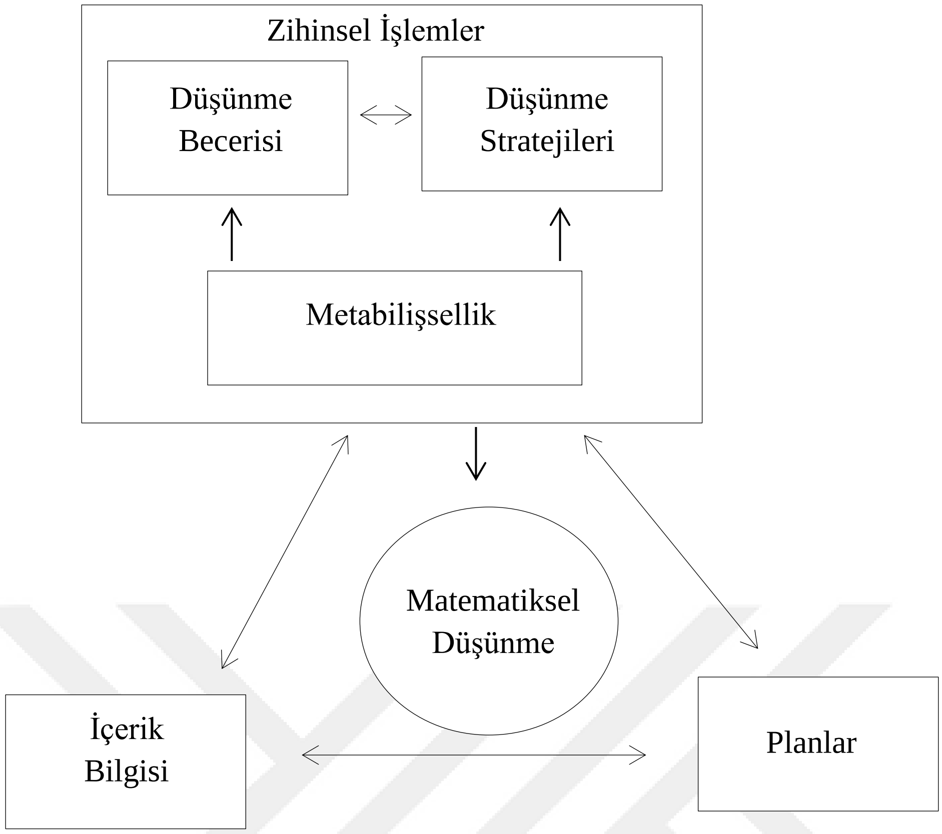
Matematiksel düşünmenin bileşenlerine bakıldığında özel durumlar üzerinde çalışma (specializing), genelleme (generalizing), varsayımda bulunma (conjecturing), ikna etme (convincing) şeklinde dörde ayrılır. Bu bileşenler matematiksel düşünmenin merkezini oluşturur (Burton, 1984'ten aktaran Çelik, 2016).

Mubark (2005) matematiksel düşünmeyi genelleme, tümevarım, tümdengelim, sembollerin kullanımı, mantıksal düşünme ve matematiksel ispat olmak üzere altı bileşende incelemiştir.

Stacey (2006)'e göre matematiksel düşünmenin bileşenlerine bakıldığında iki çifte temel aşamadan bahsedilebilir. Bu iki çifte aşamada da dört temel süreç vardır. Bunlar;

1) Özelleştirme ve Genelleme
2) Varsayımda bulunma ve ikna etme

Lim ve Hwa (2006) matematiksel düşünmenin üç ana bileşenine vurgu yapmışlardır. Bunlar; matematiksel içerik/bilgi (konunun anlaşılması), zihinsel işlemler ve yatkınlıktır. Burada yatkınlıktan anlaşılmak istenen akla ve mantığa uygun olması, açık fikirlilik, inançlardır. Matematiksel düşünmek için bireyler düşünerek içerik bilgisine, bilişsel beceriler ve stratejilere ve duyuşsal faktörlerden düşünme eğilimlerine yani yatkınlığa sahip olmak gerekir. Bu üç bileşen birbiriyle ilişkilidir. Aynı zamanda birbirini tamamlar. Şekil 2.3'de matematiksel düşünmenin bu üç bileşenine ait kavramsal çerçeve gösterilmiştir.



Şekil 2.3: Kavram çerçevesi (Lim ve Hwa, 2006).

Mason ve diğerleri (2010) matematiksel düşünmenin bileşenlerini sade olmasına rağmen aralarında ince bir çizgi olduğunu belirtmişlerdir. Bunun için uygulanırken dikkatli olmak gerekir. Bileşenler matematiksel düşünmenin gelişmesine yardımcı olur. Bir problemi çözerken *neler biliyorum, neler istiyorum, nasıl kontrol ederim* şeklinde sorular gelişmeye yardımcı olur. Bunun için de matematiksel düşünmeyi basitleştirebilmek için zaman gereklidir. Matematiksel düşünmenin bileşenleri de özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma, doğrulama ve ikna etme olarak dört bileşen altında incelenebilir.

Arslan ve Yıldız (2010) matematiksel düşünmeyi özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama şeklinde incelemiştir. Ayrıca bu dört bileşenin daha çok kullanıldığını ve birbiriyle eş anlama gelecek kavramları kapsadığını belirtmiştir. Örneğin doğrulama ve ikna etme gibi.

Yapılan literatür araştırmasından sonra bu çalışmada Mason ve diğerleri (2010)'nin ifade etmiş olduğu özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve doğrulama ikna etme bileşenleri açısından ele alınmıştır. Çünkü yapılan araştırmalar sonucunda bu dört bileşenin daha fazla kullanıldığı gözlemlenmiştir. Aynı zamanda bazı bileşenlerin diğer ortaya atılan bileşenleri kapsadığını söylenebilir. Örneğin özelleştirme aşaması, örneklendirmeyi kapsadığı söylenebilir. Bunun yanında Arslan ve Yıldız (2010)'a göre bazı bileşenler de aynı anlama gelebileceğini belirtmişlerdir. Örnek olarak doğrulama ve ikna etme, ispatlama ve doğrulama ve inandırma bileşenleri aynı anlamdadırlar.

2.4.1 Özelleştirme

Olay ve durumları daha basit düşünerek özel durumlar arama olarak tanımlanır. Özelleştirme bir problemin cevabını bulmaktan ziyade problemin çözümü izlemeye fayda sağlar. Problemde oluşan diğer durumların bulunmasına yardımcı olur. Başka bir deyişle özelleştirme diğer tüm durumlardaki ilişkiler için farkındalık uyandırır. Özelleştirme aşağıdaki şekilde yapılmaktadır:

1) Rastgele örnekler seçerek problemi anlamaya katkı sağlar.
2) Sistematik olarak seçilerek genelleştirme aşamasına yardımcı olur.
3) Bulunan genellemeyi test etmeye yardım eder (Mason ve diğerleri, 2010).

Stacey (2006) özelleştirmeyi; özel durumlar aramak ve örnek vermek şeklinde tanımlamıştır. Arslan ve Yıldız (2010)'a göre özelleştirme aşamasında bir veya daha fazla örnek verme, bir örneği tanımlama, gösterme, anlatma, çizme, seçme, bulma, istenilen bir duruma ait zıt örnek bulma, istenileni doğru bularak sonucu farklı şekillerde yazma gibi eylemler yapılır.

Örnek: Palindrom sayılar sağdan ve soldan yazıldığında aynı sayıyı veren sayılardır. 12321 gibi sayılara palindrom sayıdır. Dört basamaklı tüm palindrom sayılar 11 ile bölünebilir mi? (Mason ve diğerleri, 2010).

Çözüm: Mason ve diğerleri (2010), sorunun çözümüne bazı palindrom sayılara örnek verilerek başlanabileceğini belirtmiştir. Örneğin 747, 88, 6 gibi. Bu şekilde palindrom sayılar anlaşılmaya çalışılır. Daha sonra problemi çözmeye çalışan kişi kendine "*ne göstermek istiyorum*" diye sorar. Yanıt "tüm bu sayıların 11 ile bölünüp bölünmediğini göstermek istiyorum" şeklindedir. Burada belirli sayısal örnekler vererek kişi kendini ikna etmeye çalışır.

1221/ 11= 111 3003/11 =273

6996 /11= 636 7557 /11= 687

Bu sayılar arasında belirli bir kalıp görmeye çalışılır. Şu ana kadar verilen örnekler rastgele seçildiğinden dolayı sorunun anlaşılmasını sağlamıştır. Belli bir kalıp bulmak için örnekleri sistematik olarak seçmek gerekir. Bunun için de *en küçük palindrom sayı kaçtır, bir sonraki en küçük olan palindrom sayı kaçtır, bir palindrom sayıyı diğer palindrom sayıya nasıl dönüştürülebilir* şeklinde sorular sorularak cevap aranabilir. En küçük dört basamaklı palindrom sayı 1001'dir. 1001'den sonra 1111, 1221, 1331,… şeklinde devam eder. Bulunan ifadelerin palindrom sayı olup olmadığı kontrol edilirse;

1001/11 = 91 1111/11 = 101 1221/11 = 111 1331/11 = 121

Örnekler incelendiğinde elde edilen palindrom sayıların 110'ar şekilde arttığı görülmektedir. Aynı zamanda palindrom sayılar 11 ile bölündüğünde bölümlerinin de 10'ar 10'ar arttığı görülebilir. Bunun için bir iddiada bulunmak gerekirse; ardışık palindromlar arasındaki fark her zaman 110'dur şeklinde olabilir. Buradan en küçük dört basamaklı palindrom sayının 1001 olduğu ve 11 ile tam bölünebildiği görülür. Bunun üzerine 1001'den ileriye doğru 110 ekleyerek bulunan tüm palindrom sayılar 11 ile tam bölünmelidir olarak iddia ortaya atılır. Ortaya atılan iddianın oluşacak tüm özel durumları kapsayıp kapsamadığına bakılmalıdır. Bu iddia incelenirse tüm palindrom sayılar için 1001 sayısına 110 ekleyerek elde edilen ardışık palindrom sayıların birler basamağında sayının 1 olduğu görülür. Ancak 7557 sayısı, birler basamağında 7 olan bir palindrom sayıdır. Bu şekilde ortaya atılan iddianın yanlış olduğu görülmüştür. Bu yüzden özelleştirme aşmasıyla farklı bir yol denenmesi gerekir. Bunun için Tablo 2.1'de palindrom sayısı listesi göz önüne alınır.

Tablo 2.1: Palindrom listesi (Mason ve diğerleri, 2010, s.6).

Palindromlar	1881	1991	2002	2112	2222	2332
Farklar		110	11	110	110	110

Ortaya atılan yukarıdaki iddia aynı binler basamağına sahip ardışık palindrom sayılar için geçerlidir. Ancak 1991 ve 2002 ardışık palindrom sayı olmasına karşın iki sayı arasındaki fark 11'dir. Bunun yerine ardışık binler basamağına sahip dört basamaklı palindrom sayılarda; onlar ve yüzler basamağındaki sayı 1'den küçük (Hacısalihoğlu ve diğerleri, 2003) olduğunda fark 11 çıkmaktadır. Aynı binler basamağına sahip palindrom sayılar olduğunda ise fark 110 olarak çıkar. Böylelikle iki sayı arasındaki fark 11 ve 110 olarak çıktığından bütün dört basamaklı palindrom sayılar 11'in katıdır yani bu sayılar 11 ile tam bölünür.

Bu sorunun çözümünü matematiksel bir şekilde keyfi olan harflerle (Hacısalihoğlu ve diğerleri, 2003) genelleştirme yapılabilir.

Her dört basamaklı palindromu ABBA şeklinde yazılırsa
$1000A + 100B + 10B + A = (1000 + 1)A + (100 + 1)B$

$=1001A + 110B$

$= 11 \times 91A + 11 \times 10B$

$= 11 (91A + 10B)$ (Mason ve diğerleri, 2010).

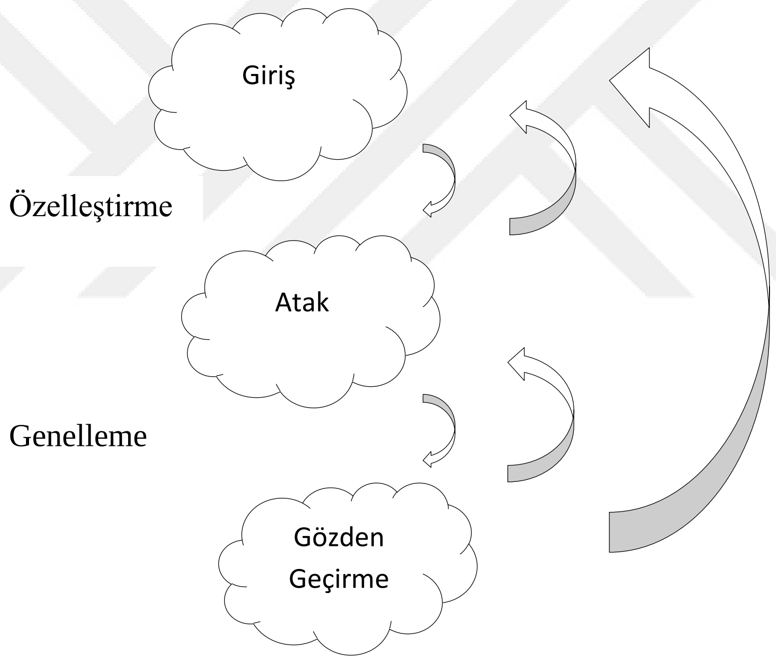
2.4.2 Genelleme

Yıldırım (2014)'a göre genelleme herhangi bir alanda bir ya da daha fazla nesne veya ilişkiyi temel alarak o nesne ve ilişkinin içinde bulunduğu tüm sınıf hakkında doğruluk değer taşıyan yargı demektir. Matematik teoremleri ispatlamaktan ibaret değildir. Matematikteki her teorem belli bir ilişkiyi ifade bir genellemedir. Bu yüzden bir matematikçi önce ispatlayabileceği bir genellemeye ulaşmalıdır. Bir genellemenin doğruluğu her zaman bir olasılık olarak kalır. Bekdemir (2012), matematiği genelleme ve soyutlama bilimi olarak tanımlamıştır. Matematikle uğraşmak sayı, nokta, küme, fonksiyon gibi soyut özellikleri anlamak ve aralarındaki ilişkiler kurarak genellemeler ve ispatlamalar yapmaktır. Mason ve diğerleri (2010), göre genelleme matematiğin can damarı şeklinde tanımlanmıştır. Genelleme problemdeki durumları belirlemeye yardımcı olarak kullanılan bir kalıp şeklinde açıklanabilir. Genelleme ve özelleştirme süreçleri daima etkileşim içindedir. Aralarındaki ilişki aşağıda verilmiştir.

1)Özel durumlarda genel durumları görmek

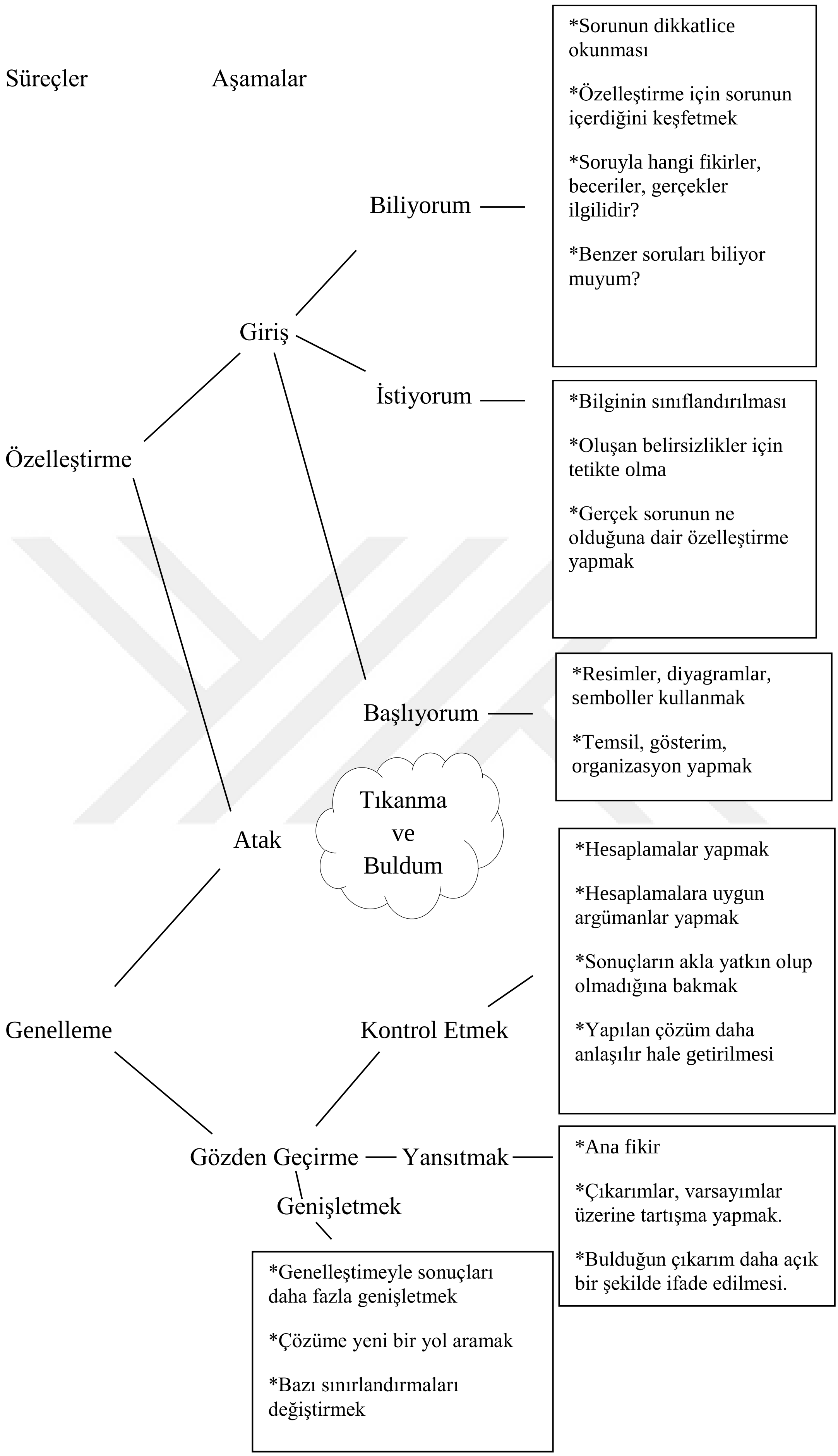
2)Genel durumlarda özel durumları görmek şeklindedir.

Yani özelleştirme işlemiyle genellemeye zemin hazırlanır, genelleme sürecinde de özenli bir şekilde özel durumları görme süreci gerçekleşir. Üç aşamada gerçekleşen giriş, atak (saldırı), gözden geçirme aşamalarının arkasında özelleştirme ve genelleme gibi ikiz süreçler yatar. Giriş aşamasında özelleştirme süreciyle soru anlaşılır hale gelir. Soruyu çözme aşaması atak evresinde gerçekleşir. Atak evresinde tıkanma (stuck) ve buldum (aha) gibi eylemler çok sayıda gerçekleşir. Problemi çözme bazen atak evresinde kalabilir ya da giriş aşamasına geri dönebilir. Bir soruyu çözmeyi bırakmadan önce soru bir kez daha gözden geçirilmelidir. Çünkü sorunun çözümünde bir hata yapılmış olabilir. Bunun üzerine giriş ve atak evrelerine tekrar dönülüp yeni bir durum görülebilir. Bunun sonucunda ortaya çıkardığımız sonuç genellenebilir. Böylelikle tüm süreç yeniden başlamış olur. Bu süreç aşağıdaki Şekil 2.4'te gösterilmiştir.



Şekil 2.4: Giriş, atak, gözden geçirme aşamaları (Mason ve diğerleri, 2010, s. 26).

Burada gerçekleşen tıkanma (stuck) kavramı bireylerde düşünmeyi geliştirir. Tıkanma durumunu düzeltebilmek için birkaç dakika düşünüp sonra soruyu okumak yeterli değildir. Bunun için zaman ayırmak gerekir. Problemin çözümü için gereken tüm olabilecek yollar denenip çözülmelidir. Daha sonra soruyu okumaya tekrardan devam edilir. Tıkanma süreci için düşünmek ve birkaç farklı yol denemek için harcanan zaman iyi ya da kaliteli geçirilen zaman olarak nitelenebilir. Ayrıca farklı yollar denendiğinde problemin hemen ortadan kalkması beklenmemelidir. Bazen bir problem üzerinde yapılan yanlış çözümlerden deneyimlerden fazlasıyla bilgi öğrenilir. Gözden geçirme aşaması ise bazen ihmal edilip bakılmayabilir. Çünkü başarılı bir atak yapıldıktan sonra gözden geçirerek yapılan adımın yanlış olduğu sonucuna varılabilir (Mason ve diğerleri, 2010).



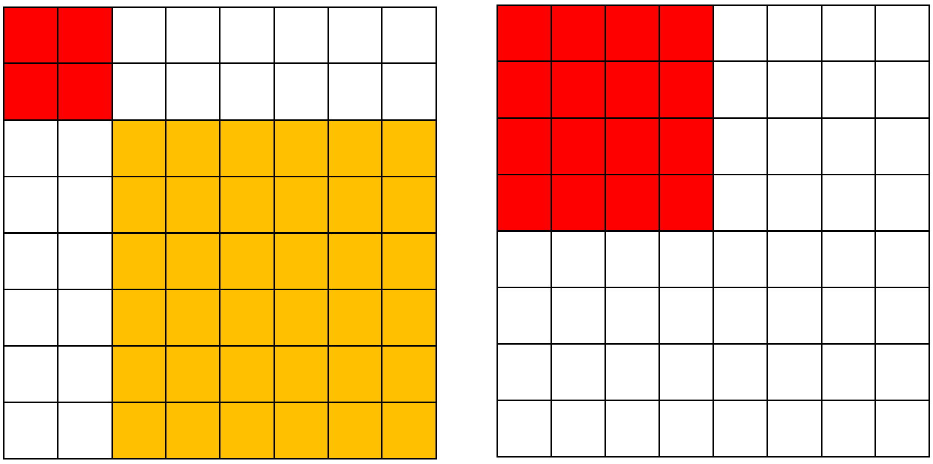
Şekil 2.5: Özelleştirme ve genelleme süreçleri (Mason ve diğerleri, 2010, s. 43**).**

Genellemeler; gözleme dayalı ve yapısal genelleme olmak üzere ikiye ayrılır. Deneysel genelleme örneklerde oluşan farklılıkları görmezden gelmektir şeklinde açıklanabilir. Problemle ilgili neyin doğru olabileceğiyle ilgili tahminlerde bulunma süreci olarak ifade edilebilir. Yapısal genelleme ise bir veya daha fazla örnek veya durumu inceleme sonucunda aralarında bir ilişki bulunulduğunda meydana gelir. Genelleme süreci; doğru olması muhtemel bir durumun veya olayın ne olduğunu (varsayım), niçin doğru olması (gerekçelendirme) gerektiğini, doğru olması muhtemel olan yerlerde gibi soruların daha genel durumlarını görmeye yardım eder (Mason ve diğerleri, 2010).

Arslan ve Yıldız (2010)'a göre de genelleme sürecinde; örüntü oluşturma, sınıflama, eşleştirme, sıralama ve karşılaştırma yapma, benzerlik ve farklılıkları bulma, iki değişken arasındaki durumu matematiksel veya sözel olarak ifade etme, ortaya çıkabilecek tüm ihtimalleri tanımlama yapılır. Stacey (2006) genellemeyi kalıplar ve ilişkiler aramak olarak tanımlamaktadır.

Örnek: Bir satranç tahtasında bir zamanlar 204 tane kare olduğu iddia edilmiştir. Bu iddiayı doğru bir şekilde gösterebilir misiniz? (Mason ve diğerleri, 2010).

Çözüm: ***(Tıkanma)*** Bir satranç tahtasında 1X1'lik 64 kare vardır. Problemi çözümündeki amaç; başka hangi karelerin sayıldığını bulmaktır. Tüm karelerin sayısını bulmak içinde sistematik bir yol bulmak gerekir. Öncelikle, ***(Buldum***) satranç tahtasında 8 satır ve 8 sütun bulunduğundan dolayı 1X1'lik 64 kare vardır ifadesinden problemin çözümüne başlanabilir.



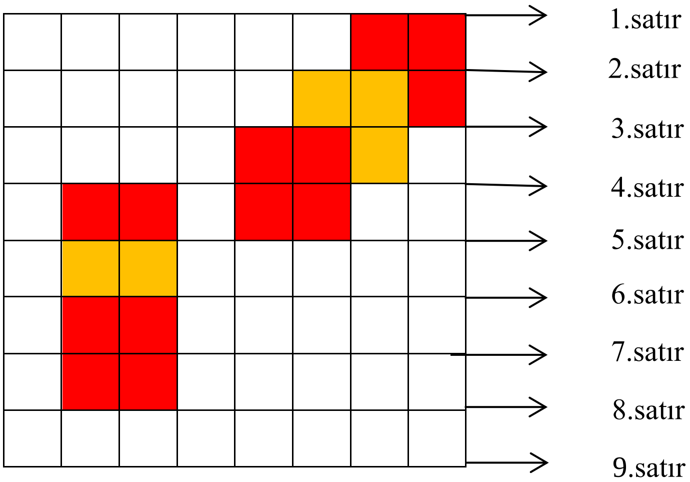
Şekil 2.6: Satranç tahtası (Mason ve diğerleri, 2010, s.18).

Bir sonraki adımdaki amaç; 2x2, 3x3, …, 7x7 olacak şekilde kaç kare sayısı olduğunu bulup satranç tahtasındaki tüm karelerin toplamının 204 olduğunu göstermektir. 8x8 boyutunda 1 kare olduğu satranç tahtasında görülmektedir

Tablo 2.2: 1x1 ve 8x8 boyutunda kare sayısı (Mason ve diğerleri, 2010, s.18).

Boyut	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8
Sayı	64							1

2x2 kareleri şekildeki gibi çizilmeye çalışılırsa birbiriyle çakıştıkları görülebilir. 2x2’lik toplam kare sayısını bulmak için sistematik bir yol izlenmelidir.



Şekil 2.7: 2x2 boyutunda toplam kare sayısını bulma (Mason ve diğerleri, 2010, s.18).

Öncelikle satranç tahtasındaki üste satıra (1. Satıra) 2x2' lik kaç tane kare dokunur? Sayıldığında 7 tane kare üst kenara dokunur. Peki bir sonraki (2.satıra) satıra kaç tane kare dokunur? Bunu da sayarsak 7 tane kare olduğu bulunur. Bir sonraki satıra kaç tane kare dokunur? Dokunmaktan kast edilen küçük karenin en üst kenarı doğrunun üzerinde kalmalıdır. Aksi durumda karelerin bir kısmı 2 kere sayılmış olur. O zaman 2x2 'lik karelerde satırlarla ortak olacak 7 kare çıkar ***(Buldum)*** (Genelleme) Satranç tahtasında ise toplam 9 satır vardır. Ancak alttaki 2 satıra (8. ve 9. Satıra) dokunulmaz. Çünkü orda 2x2'lik kare oluşmaz. Her satırda 7 kare vardır ve 7 satır olduğundan dolayı 2x2'lik toplam 49 kare oluşur.

Tablo 2.3: 2x2 boyutlu kare sayısı (Mason ve diğerleri, 2010, s.19).

Boyut	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8
Sayı	64	49						1

(Buldum) Böylelikle problemin çözümü için bir model çıkar. Çünkü 64=8X8, 49=7X7. şeklindedir. Bu şekilde oluşan kare sayıları üzerine 3x3'lük kare sayısı 36=6X6 tane olmalıdır (Genelleme, Varsayımda Bulunma).

3x3'lük kareleri 2x2'lik şekilde gibi sayılarak kontrol edilir. Üst satıra (1. Satıra) kaç tane 3x3'lük kare dokunur? Sayıldığında 6 tane kare üst satıra dokunur (genelleme). Satranç tahtasında en üst satırı (1. Satırı) kesen 9 dikey çizgi vardır. Bu yüzden 3x3 boyutundaki kareler (9-3) tane kare olacak şekilde üst satıra temas eder (Yani 6 tane kare olur). Bu ifade genelleştirilirse üst satıra dokunan KxK büyüklüğünde (9-K). (9-K) tane kare olacaktır. Ayrıca (9-3) tane olacak şekilde 3x3' lük karelerden alttaki 3 satır (7., 8., ve 9. Satırlar) kullanılmaz. Bu nedenle (9-K) satıra KXK karelerle dokunulur. 3x3'lük kareler için 36=(9-3).(9-3) tane kare olur. KxK boyutlu ise (9-K).(9-K) tane kare ortaya çıkar. Yapılan işlemlerden sonra Tablo 2.4 doldurulabilir.

Tablo 2.4: Satranç tahtasındaki 204 tane kare (Mason ve diğerleri, 2010, s.19).

Boyut	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8	KxK
Sayı	64	49	36	25	16	9	4	1	$(9\text{-}K)^2$

Bu Tablo 2.4'de oluşan tüm karelerin toplamı 204 çıkar.

64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 204

Bu sonucu NxN satranç tahtalarına genelleyeme çalışırsak; (N+1 tane dikey çizgi olur) herhangi bir satırda KxK boyutlu (N+1-K)x(N+1-K) tane kare sayısı bulunur. Tüm karelerin toplam sayısı o zaman;

Tablo 2.5: NxN boyutlu bir karede toplam kare sayısı.

K	KxK boyutlu	Toplam Kare Sayısı (N+1-K)x (N+1-K)
1	1x1	NxN
2	2x2	(N-1)x(N-1)
3	3x3	(N-2)x(N-2)
…	…	…
N	NxN	1x1

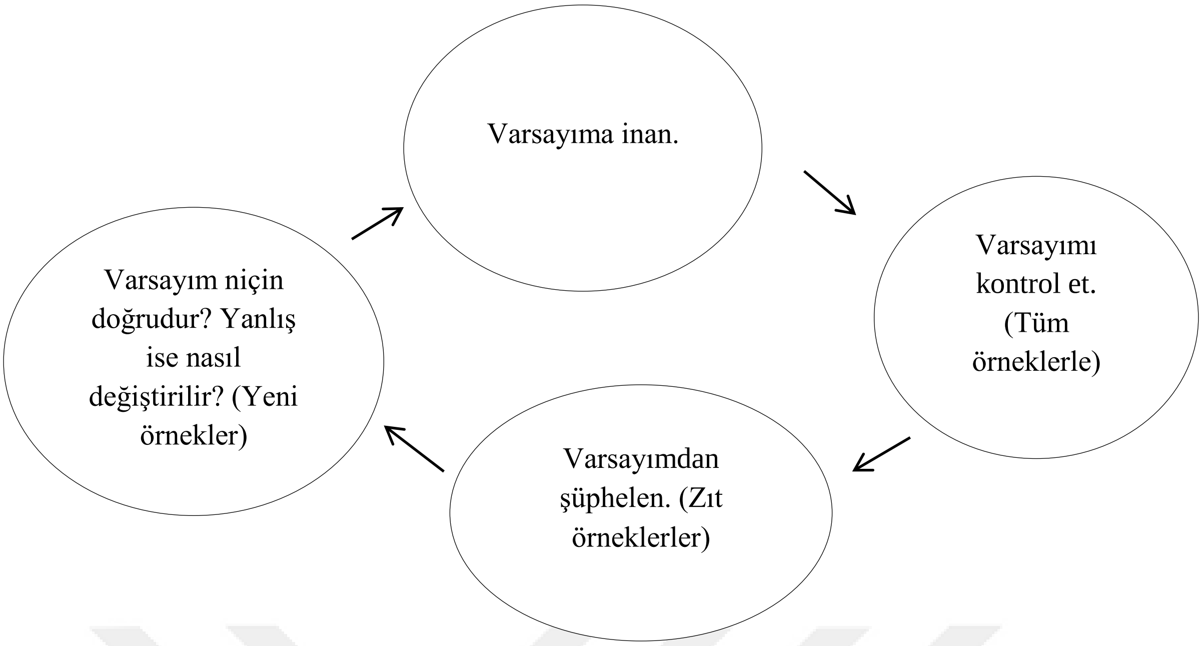
(1 x1) + (2 x 2) + (3 x 3) + (4 x 4) + … + (N xN)=Toplam Kare Sayısı

Bu şekilde 2x2 boyutlu toplam kare sayından yola çıkılarak satranç tahtasındaki toplam kaç kare olduğunun sistematiği bulunulur. Bulunulan ifade son olarak da genelleştirilir (Mason ve diğerleri, 2010).

2.4.3 Varsayımda Bulunma

Güncel Türkçe Sözlük'e göre varsayım doğruluğu henüz ispatlanmamış, doğru olduğu düşünülen bir hipotezdir (TDK,2019). Varsayımda bulunma sezdiğimiz bir ilişkinin yani genellemenin açıkça dile getirilmesidir. Bu yüzden varsayımda bulunma ve genelleme süreçleri bazı durumlarda tek bir süreç halinde incelenebilir (Çelik, 2016 s.22).Varsayım bir durumu görme olarak tanımlanabilir ve doğruluğu her zaman için şüpheli bir durumdur. Bir insanın dik durmasını sağlayan omurga gibi varsayımda bulunma da matematiksel düşünmeyi ayakta tutar. Aynı zamanda varsayımda bulunma oluşturulan genellemeler hakkında farkındalık yaratır. Buradan da anlaşılıyor ki genelleme sürecinin içinde varsayımda bulunmanın varlığından söz edebilir (Mason ve diğerleri, 2010).

Varsayım insan zihninde öncelikle belirsiz bir haldedir. Aşamalı olarak ilerleme gösterir. Bu yüzden varsayımda bulunmanın ortaya çıkması için derinlemesine araştırma yapmak gerekir. Ortaya atılan varsayımın yanlış olması durumunda yeni varsayımlar üretmek gerekmektedir. Varsayımımızın inandırıcı olması durumda, varsayımda bulunma süreci tamamlanmış demektir. Varsayımda bulunma döngüsel olarak Şekil 2.8'de gösterilmiştir (Mason ve diğerleri, 2010).



Şekil 2.8: Varsayımda bulunma süreci (Mason ve diğerleri, 2010, s.59).

Arslan ve Yıldız (2010) matematiksel düşünme sürecinde, sözel veya matematiksel tahminlerde bulunma, ortaya atılan matematiksel iddiaları formül haline getirme, önermelerden sonuca ulaşma, hipotez kurup, kurulan hipotezin test etme gibi eylemler yapılır. Stacey (2006) belli bir durum ve olaylar karşısındaki ilişkileri ve ortaya çıkan sonuçları tahmin etme olarak ifade etmiştir.

Örnek: Goldbach's varsayımı; 2 hariç her çift sayı, iki asal sayının toplamı şeklinde yazılabilir şeklindedir. Goldbach'ın bu varsayımını desteklemek amacıyla milyonlarca sayı kullanarak test edilmiştir. Ancak yapılan sonuçlarda her çift sayıyı, iki asal sayının toplamı şeklinde olduğunu ispatlayanamadı. Bu varsayımın ikna edici şekilde doğru olduğu görülmektedir. Ancak bir varsayım olduğundan yanlış da olabilir. Goldbach'ın bu varsayımı matematik adına önemli varsayımlardandır. Ortaya atılan tüm varsayımlar bu derece önemli değildir. Aslında çoğu varsayım yanlıştır ve ortaya atıldıktan sonra düzeltilir. Buna rağmen az da olsa varsayımlar ortaya atmak matematiksel düşünme için oldukça önemlidir (Mason ve diğerleri, 2010).

2.4.4 Doğrulama ve İkna Etme

Bu bileşen farklı araştırmacılar tarafından farklı şekillerde adlandırılmıştır. Baki'ye (2018) göre kanıtlamanın amacı ortaya atılan iddianın ya da varsayımın doğruluğunu veya yanlışlığını her koşulda herkesin kabul edebileceği bir şekilde göstermektir. Bunu yaparken de yapılan birkaç adımla genelleme güvence altına alınabilir. Bazı durumlarda ise birkaç adım yapmak genellemedeki soru işaretlerini gidermeye yetmez. Matematiksel olarak da ispatlar üç aşamada gerçekleşir. Birinci aşamada ortaya atılan iddianın doğruluğu veya yanlışlığı araştırılır. Bu araştırma süreci de özel durumlarla sağlanır. İkinci aşamada ortaya atılan iddianın niçin doğru veya yanlış olduğu ifade edilir. Üçüncü aşama ise soyutlama olarak adlandırılır. Bu aşamada matematiksel dil kullanılarak yapılanlar belirtilir.

Matematiksel düşünme süreci incelendiğinde en nihai süreç bu aşamadır. Yapılan araştırmalar sonucu bu bileşen destekleme ve kanıtlama olarak da tanımlanmaktadır. Genellikle bir durumun ne sorusunun cevabı, niçin sorusundan daha kolaydır. Çünkü niçin sorusuna verilen cevap ile tüm herkesi ikna olmalıdır. (Çelik, 2016). Mason ve diğerleri (2010)'ne göre ikna etme bileşeni zor olarak görülebilir. İkna etme sürecini gerçekleştirmek için önce birey kendini, sonra çevresindekileri, daha sonra şüpheyle yaklaşan birini ikna etmesi gerekir.

Örnek: Altıparmak ve Öziş (2005)

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$$

Olduğunu gösteriniz. (D: doğal sayılar en küçük alt kümesi ve en küçük elemanı 1 olsun.)

i) $1 \in D$ midir?

n=1 için

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1.(1+1)}{2}$$

Olduğundan $1 \in D$'dir.

ii) $\quad n \in D$ iken

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$$

veriliyor. n yerine n+1 yazarak;

$$\sum_{k=}^{n+1} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1).(n+2)}{2}$$ bulunması gerekir.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$$ verilmişti. (1)

(1) Eşitliğin her iki tarafına (n+1) eklenirse;

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n.(n+1)}{2} + \frac{n}{1}$$

Paydalar eşitlendiğinde $\frac{n.(n+1)}{2} + \frac{2.(n+1)}{2} = \frac{(n+1).(n+2)}{2}$

Bulunur. Böylece i) ve ii) aksiyomları sağlanır.

Stacey (2006) 'e göre de doğrulama ve ikna etme bileşeni bir durumun doğru olmasının nedenlerini bulma ve aktarma şeklinde tanımlanmıştır.

2.5 İlgili Araştırmalar

2.5.1 Yurt İçinde Yapılmış Çalışmalar

Mert Uyangör (2019) çalışmasında Graf teori yardımıyla “Diziler” alt öğrenme alanının “Gerçek Sayı Dizileri” konusunda öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini incelemiştir. Çalışmada temel nitel araştırma yaklaşım kullanılmıştır. Çalışmanın katılımcılarını matematik başarısı orta ve yüksek düzeyde olmak üzere 12. Sınıfta öğrenim gören iki kız ve iki erkek oluşturmuştur. Çalışmada iki çalışma yaprağı kullanılmıştır. Bunun yanında uygulama sırasında yapılandırılmamış gözlemler ve klinik görüşmelerle veri toplanmıştır. Çalışma sonucunda öğrencilerin özelleştirme aşamasında tüm öğrencilerin soruların cevaplarını kolaylıkla bulduğu görülmüştür. Genelleme aşamasında da öğrencilerin hepsinin sorulara doğru yanıt verdiği görülmüştür. Genelleme aşamasında üç öğrencinin hem matematiksel ve hem sözel olarak cevaplar verdiği, bir öğrencinin de sadece sözel olarak ifadeler kullanıldığı tespit edilmiştir. Varsayımda bulunma aşamasında ise öğrencilerin sözel varsayımların yanında matematiksel varsayımları da kullandıkları görülmüştür. Ancak başarı özelleştirme ve genelleme aşamalarına göre düşmüştür. İspat yapma aşamasında ise öğrencilerin aritmetik ve cebirsel ispat yaptıkları görülmüştür. Ancak başarı diğer aşamalara göre daha düşük çıkmıştır.

Yağdıran (2018) çalışmasında teknoloji ve matematiksel etkinlikler kullanılarak öğrencilerin matematiksel düşünme evrelerini araştırmışlardır. Araştırmaya 11. Sınıf düzeyinde 12 öğrenci katılmıştır. Araştırmanın sonucunda özelleştirme aşamasında tablet kullanmada öğrencilerin sıkıntı yaşamadığı görülmüştür. Ancak daha sonraki evrelerde tablet kullanımıyla ilgili zorluklar yaşanmıştır. Öğrenciler tableti özelleştirme ve genelleme evrelerinde şekil çizme, örnekleri arttırma gibi eylemler yaparak problemi anlamaya çalışmıştır. İddia etme ve ispat yapma evrelerinde ise tableti hatırlayamadıkları konuları araştırmak için kullanmışlardır. İddiada bulunma evresinde öğrenciler dinamik matematik programlarını çok fazla kullanmamışlardır. İspat aşamasında öğrencilerin zorlandığı gözlenmiştir.

Demirtaş (2018) matematiksel düşünme düzeyleri ile yaratıcılık fenomenine duyarlılık arasında bir ilişki olup olmadığını incelemiştir. Araştırmada ilişkisel tarama modeli kullanılmıştır. Araştırmaya 509 sınıf öğretmeni katılmıştır. Araştırmada Eğitimcilerin Yaratıcılık İçin Duyarlılık Testini Türkçe'ye uyarlanmış hali ve Matematiksel Düşünme Ölçeği kullanılmıştır. Matematiksel düşünme testi ile matematiksel düşünme düzeyleri bulma amaçlanmıştır. Araştırma sonucunda öğretmenlerin yaratıcılığa karşı duyarlılığı ile matematiksel düşünme düzeyleri arasında pozitif yönde anlamlı bir ilişki olduğu ortaya çıkmıştır.

Koyuncu (2018) matematik felsefesi etkinliklerinin matematiksel düşünme becerilerine, matematiğe yönelik tutum ve inançlarına etkisini incelemiştir. Araştırmaya 30 öğrenci katılmıştır. Araştırmada nitel ve nicel araştırma yöntemleri bir arada kullanıldığından karma bir desene sahiptir. Deney grubundaki 15 öğrenciye (sekiz kız+yedi erkek) ile geleneksel öğretimin yanında matematik felsefesi etkinlikleri uygulanmıştır. Kontrol grubundaki 15 öğrenciye (sekiz kız+yedi erkek) sadece geleneksel öğretim uygulanmıştır. Araştırma sonucunda matematik felsefesi etkinliklerinin matematiksel düşünme becerilerine anlamlı bir farklılığa yol açmadığı görülmüştür. Matematiğe yönelik tutum ve inançlarını ise pozitif yönde arttırdığı ortaya çıkmıştır.

Kükey (2018) çalışmasında ortaokul öğrencilerin matematiksel düşünme biçimlerini incelemiştir. Bunun yanında ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme biçimlerini, matematik öğretmen ve öğretmen adaylarını tahmin etmeye dair görüşleri incelenmiştir. Çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması kullanılmıştır. Çalışmaya 96 ortaokul öğrencisi, ilköğretim matematik öğretmenliğinde okuyan birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü sınıfta öğrenim gören öğretmen adaylarından altışar matematik öğretmeni adayı ve altı ortaokul matematik öğretmeni katılmıştır. Çalışmada matematiksel düşünmenin bir alt boyutuyla ilgili olmak üzere dört tane rutin olmayan problem kullanılarak doküman toplamıştır. Bunun yanında veri toplama aracı olarak yarı yapılandırılmış görüşme, görüşme ve ses kayıtları kullanılmıştır. Araştırma sonucunda özelleştirme basamağındaki problemi öğrencilerin çoğunluğunun yanıtladığı görülmüştür. Özelleştirme aşamasında öğrencilerin stratejilerini tahmin etmede öğretmenlerin öğretmen adaylarına göre daha başarılı olduğu görülmüştür. Genelleme aşamasında öğrencilerin yaklaşık yarısının problemi doğru cevapladığı görülmüştür. Genelleme aşamasında öğrencilerin stratejilerini tahmin etmede birinci Sınıf öğretmen adaylarının en fazla, öğretmenlerin ise en az tahminde bulunduğu sonucuna varılmıştır. Varsayımda bulunma aşamasında ise öğrencilerin büyük bir kısmı problemi doğru yanıtlamıştır. Varsayımda bulunma aşamasında öğrencilerin stratejilerini tahmin etmede öğretmenler, öğretmen adaylarına göre daha başarılıdır. Doğrulama ve ikna etme aşamasında belirli bir cevap istenmediğinden öğrenciler kullandıkları stratejileri sözel olarak ifade etmişlerdir. Doğrulama ve ikna etmede öğrencilerin matematik bilgisine dair sonuç çıkarmada öğretmenlerin, eldeki bilgilerden başka veriler elde etmede öğretmen adayları başarılı olmuştur.

Yıldırım ve Yavuzsoy Köse (2018) sekizinci sınıf öğrencilerinin çokgenler konusunda matematiksel düşünme süreçlerini özelleştirme ve genelleme açısında incelemiştir. Çalışmaya sekiz öğrenci katılmış ve klinik görüşme yapılmıştır. Araştırma verilerinin toplanıp yorumlanmasında nitel araştırma yöntemi benimsenmiştir. Araştırma sonucunda öğrencilerin özelleştirme aşamasında aşina oldukları sorularda zorlanmadıkları görülmüştür. Aşina olmadıkları sorularda iki öğrenci problemi anlamamıştır ve özelleştirme aşamasında kalmıştır. Ayrıca özelleştirme sürecinde veriler arasında ilişki ararken öğrencilerin sayısal, geometrik hem sayısal hem geometrik yaklaşımları kullanıldığı görülmüştür. Genelleme aşamasında öğrencilerin sözel olarak genellemelerde bulunduğu gözlenmiştir. Cebirsel olarak ifade etmede zorlandıkları tespit edilmiştir. Ayrıca problemlerin çözümünde yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerin tıkanma sürecine girseler de daha fazla atak süreci geçirdiği gözlenmiştir.

Tosun ve Mert Uyangör (2018) çalışmasında dokuzuncu sınıf öğrencilerinin üçgende eşlik ve benzerlik konusunda matematiksel düşünme süreçlerini incelemeyi amaçlamıştır. Matematiksel düşünme süreçleri özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ikna etme bileşenleri açısından incelenmiştir. Çalışmaya 26 öğrenci katılmıştır. Çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden temel nitel araştırma deseni kullanılmıştır. Amaçlı örnekleme yöntemlerinden kolay ulaşılabilir durum örneklemesi yoluyla örneklem seçilmiştir. Çalışmada veriler çalışma kağıtlarından ve yapılandırılmamış gözlemlerden ve birebir görüşmelerden elde edilmiştir. Çalışmanın sonucunda özelleştirme ve genelleme süreçlerinde öğrencilerin başarılı olduğu gözlemlenmiştir. Varsayımda bulunma ve ikna etme bileşenin öğrencilerin başarısız olduğu gözlemlenmiştir.

Kocaman (2017) çalışmasında on birinci sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme becerilerini bulmayı ve matematiksel düşünme becerileri ile matematiğe yönelik tutum ve başarıları da incelenmiştir. Bunun yanında matematiksel düşünme becerilerinin yaş, cinsiyet, devam edilen okullara etkisi araştırılmıştır. Araştırma nitel ve nicel araştırma yöntemleri birlikte kullanıldığı karma bir modele sahiptir. Araştırmaya 278 öğrenci katılmıştır. Öğrencilere 12 soruluk matematiksel düşünme testi ve 25 soruluk matematiksel tutum ölçeği kullanılmıştır. Araştırma sonucunda matematiksel düşünme testi ile matematiğe yönelik tutum ve liseye giriş puanları arasında pozitif yönlü anlamlı bir ilişki ortaya çıkmıştır. Matematiksel düşünme ile cinsiyet ve yaş arasında herhangi bir farklılık ortaya çıkmamıştır. Matematiksel düşünmenin boyutlarına bakıldığında en yüksek puan mantıksal düşünmede, en düşük puanın tümdengelimde olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Yıldız (2016) çalışmasında eğitim fakültesi ve fen edebiyat fakültesi dördüncü sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerini özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama açısından incelemeyi amaçlamıştır. Çalışmaya 36 kişi eğitim fakültesi ve 36 kişi fen edebiyat fakültesinden olmak üzere toplam 72 kişi katılmıştır. Veriler yapılandırılmamış gözlemler ve çalışma kağıtlarından elde edilmiştir. Çalışmada nitel araştırma yaklaşımı kullanılmıştır. Çalışma sonucunda eğitim fakültesi öğrencileri, fen edebiyat fakültesi öğrencilerinden daha başarılı çıkmıştır. Özelleştirme aşamasındaki adımlar öğrencilerin çoğu tarafından doğru cevaplanmıştır. Bunun sebebi matematik derslerinde işlemsel beceriye önem verilmesidir. Özelleştirme soruları ayrıca en kısa süre içinde yanıtlanan aşama olmuştur. Genelleme aşamasında eğitim fakültesi ve fen edebiyat fakültesi öğrencileri sayılar ve değişkenler arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak ifade etmiştir. Yapılan gözlemlerin sonucunda genelleme aşamasında öğrencilerin zorlanmadıkları görülmüştür. Varsayımda bulunma aşamasında ise fen edebiyat fakültesi öğrencileri matematiksel olarak varsayımlarda bulunurken, eğitim fakültesi öğrencileri sözel varsayımlarda bulunmuştur. Fen edebiyat fakültesi öğrencileri ile eğitim fakültesi öğrencileri karşılaştırıldığında, fen edebiyat fakültesi öğrencileri matematiksel olarak ifadelerde bulunma konusunda daha başarılıdır. İspatlama aşamasında ise fen edebiyat fakültesi öğrencileri bazı soruları değişkenlere değer vererek aritmetik olarak ispat yapmaya çalıştıkları görülmüştür. Aslında burada ispatlama süreci değil özelleştirme süreci yapılmıştır. Eğitim fakültesindeki tüm öğrenciler de tümevarımla cebirsel olarak ispatlama yapmışlardır. Bu şekilde ispat yapmalarının sebebini de Soyut Matematik ve Genel Matematik derslerinde değinildiğinden bahsedilmiştir. Ancak öğrencilerin çoğu cebirsel olarak ispatlamayı eksik veya yanlış cevaplamıştır. Çalışma özetlenecek olursa her iki fakültede de özelleştirme aşamasından ispatlama aşamasında gidildikçe başarı düşmüştür.

Yıldırım (2015) sekizinci sınıf öğrencilerinde matematiksel düşünme süreçlerini özelleştirme ve genelleme süreçleri bakımından incelemeyi amaçlamıştır. Genelleme aşamasını incelerken öğrencilerin kullandıkları genelleme süreçlerin de incelenmiştir. Araştırmaya sekiz öğrenci katılmış, veriler klinik görüşmeler sonucu ve beş geometri probleminin çözümlerinden elde edilmiştir. Araştırma sonucunda öğrencilerin özelleştirme aşamasında zorluk yaşamadığı görülmüştür. Ancak genelleme aşamasında öğrenciler zorlansalar da genellikle sonuca ulaştıkları görülmüştür. Genelleme aşamasında sözel ve geometrik olarak ifadelerde bulunulduğu, cebirsel olarak ifade etmede zorlanıldığı gözlenmiştir. Ayrıca yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerin farklı stratejiler kullanarak genellemeye ulaştığı görülmüştür.

Tuncay (2015) araştırmasında bir akademisyenin, matematik öğretmen adaylarının ve farklı kıdem ve öğretim seviyesindeki öğretmenlerin problem çözme sürecinde matematiksel düşünme süreçlerini incelemeyi amaçlamıştır. Araştırmaya matematik öğretmenliği beşinci sınıfta okuyan iki öğretmen adayı, iki matematik öğretmeni ve doktora sürecinde bir akademisyen olmak üzere beş kişi katılmıştır. Araştırma nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması kullanılmıştır. Veriler katılımcıların çözdükleri kağıtlar ve görüşmelerden elde edilen video kayıtları ile toplanmıştır. Araştırma sonuçları incelendiğinde; öğretmen adaylarının özelleştirme aşamasında daha fazla çözüm ürettikleri görülmüştür. Özelleştirme aşaması ile problem anlaşılır hale getirilmeye çalışılmıştır. Genelleme aşamasında katılımcıların almış oldukları eğitim ile genelleme becerileri arasında doğru orantı görülmüştür. Genellemede katılımcılar sözel ifadelerin yanında matematiksel gösterimler de kullanmıştır. Varsayımda bulunma aşamasında tüm katılımcılar sözel varsayımlarda bulunmuştur. Araştırma sonucunda akademisyenin ispat tekniğini daha fazla kullandığı görülmüştür.

Karslıgil Ergin (2015) araştırmasında öğrencilerin problem çözme ve kurma süreçlerinde matematiksel düşünmeleri araştırılmıştır. Araştırma verileri üç problem çözme ve bir problem kurma sorusundan elde edilmiştir. Araştırmaya dördüncü sınıfta öğrenim gören 150 öğrenci, beşinci sınıfta öğrenim gören 150 öğrenci ve altıncı sınıfta öğrenim gören 150 öğrenci olmak üzere toplam 450 kişi katılmıştır. Araştırmada tarama modeli benimsenmiştir. Araştırma sonuçlarına bakıldığında öğrencilerinin çoğunluğunun verilen problemlerdeki çözüm stratejilerini doğru bir şekilde belirleyemeyip, problem çözme ve kurma konusunda yeterli düzeyde olmadığı gözlenmiştir. Bunun yanında problem çözme ve kurmada becerilerinin sınıf seviyesi arttıkça yeterliliğinin de arttığı sonucuna varılmıştır.

Tataroğlu Taşdan (2014) matematik öğretmenlerinin pedagojik alan bilgisini matematiksel düşünmeyi desteklemesi konusunda bir öğretim tasarlamayı amaçlamıştır. Araştırmada nitel araştırma yöntemlerinden eylem çalışması kullanılmıştır. Araştırmaya gönüllü altı matematik öğretmeni katılmıştır. Veri toplama aracı olarak gözlem, görüşme ve yazılı dokümanlar kullanılmıştır. Araştırma sonucunda, öğretmenlerin uygulama öncesinde öğrencilerin matematiksel düşünmelerini destekleyen ders işlenişlerine sınırlı olarak yer verirken uygulama sonucunda öğretmenlerin pedagojik alan bilgilerinde artış gözlenmiştir.

Ersoy ve Güner (2014) çalışmasında üçüncü sınıfta öğrenim gören sınıf öğretmeni adaylarının problem çözme becerilerini incelemiştir. Bunun yanında öğretmen adaylarının matematiksel düşünme düzeylerini incelemeyi amaçlamıştır. Çalışmaya 46 sınıf öğretmeni adayı katılmıştır. Çalışmada nicel araştırma yöntemlerinden durum çalışması kullanılmıştır. Çalışmada verileri iki problem ve matematiksel düşünme ölçeğinden elde edilmiştir. Çalışma sonucunda problem çözmenin matematiksel düşünme üzerinde etkili olduğu sonucuna varılmıştır.

Öztürk (2013) matematiksel düşünme öğretim odaklı öğretim uygulamasının, matematik öğretmenliğinde okuyan öğretmen adaylarının öğretimi planlama becerilerine etkisi araştırılmıştır. Bunun yanında öğretmen adaylarının görüşleri de incelenmiştir. Çalışmaya 40 öğretmen adayı katılmıştır. Çalışmada karma model benimsenmiştir. Veriler öğretmen adaylarından istenen ders planlarından ve yarı yapılandırılmış görüşmeler yoluyla toplanmıştır. Çalışmanın sonucunda öğretmen adaylarının, öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerini geliştirmeye yönelik ders planları yapmasına katkı sağladığı görülmüştür. Öğretmen adaylarının matematiksel düşünme odaklı ders öğretimine karşı olumlu görüşlere sahip olduğu ortaya çıkmıştır. Öğretmen adayları ayrıca matematiksel düşünmenin önemini vurgulayan ifadeler de bulunmuştur.

Öztürk ve Akyüz (2013) çalışmasında öğretmen adaylarının, öğrencilerin matematiksel düşünmelerini odaklanmayı esas alan planları incelenmiştir. Çalışmada karma araştırma deseni kullanılmıştır. Çalışmaya 40 matematik öğretmen adayı katılmıştır. Veriler öğretmen adaylarının uygulama öncesinde ve sonrasında üst düzey bir probleme göre planlarından elde edilmiştir. Öğretmen adayları hazırlamış olduğu planları mikroöğretim ile uygulayarak pratikte ne kadar işe yaradığını görmelerini sağlamıştır. Bunun yanında öğretmen adaylarının öğrencilerin matematiksel düşünmelerine odaklanarak plan yapmalarına fayda sağladığı görülmüştür.

Keskin, Akbaba Dağ ve Altun (2013) çalışmasında sekizinci ve on birinci sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerini; özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama aşamalarını incelemeyi amaçlamıştır. Çalışmasına sekizinci sınıfta öğrenim gören 14 öğrenci ve on birinci sınıfta öğrenim gören 11 öğrenci katılmıştır. Veriler uygulanan iki çalışma kâğıdından elde edilmiştir. Çalışmada nitel araştırma yöntemi kullanılmıştır. Çalışma sonucunda öğrencilerin özelleştirme aşamasında zorlanmadıkları görülmüştür. Genelleme aşamasında ise bazı öğrencilerin bu aşamayı atlayarak varsayımda bulunma aşamasına geçtiği gözlenmiştir. Genelleme ve varsayımda bulunma aşamalarında öğrencilerin başarısı bir önceki aşamalara göre düşmüştür ve bu süreçlerde 11. sınıf öğrencileri daha başarılıdır. Sekizinci sınıf öğrencileri bu aşamalarda sözel ifadeler kullanmışlardır. İspat aşamasında ise sekizinci sınıf öğrencileri çoğunlukta olmakla beraber her iki sınıf düzeyinde de başarı düşük çıkmıştır. 11.sınıf öğrencilerinin ispat yaparken cebirsel olarak ispat yaptıkları gözlenmiştir.

Kılıç, Tunç Pekkan ve Karatoprak (2013) çalışmasında konuların materyal destekli etkinliklerle işlenmesinin matematiksel düşünme becerisine etkisini incelemiştir. Çalışmaya altıncı sınıfta öğrenim gören 20 gönüllü öğrenci katılmıştır. Çalışmada nitel araştırma yöntemi kullanılmıştır. Veriler etkinlik kâğıtları ve video kayıtların analizinden elde edilmiştir. Yapılan uygulama sonucunda öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerinde değişik olmuştur. Materyal kullanımıyla öğrenciler matematiksel kavramları daha kolay anladığı görülmüştür.

Ersoy ve Baş'er (2013) öğretmen adaylarının matematiksel düşünme düzeylerini ölçmeyi amaçlayan bir ölçek geliştirmeyi hedeflemiştir. Çalışmada geliştirilen ölçek öğrencilerin bilişsel boyutta öğrenmelerini ölçmeyi amaçlamaktadır. Çalışmaya ilköğretim matematik öğretmenliğinde üçüncü sınıfta öğrenim gören 152 öğrenci katılmıştır. Çalışma sonucunda 20 olumlu, beş olumsuz olmak üzere 25 maddelik ölçek oluşturulmuştur. Elde edilen ölçek ile matematik öğretiminde akıl yürütme, keşfetme, tahmin yapabilme gibi matematiksel düşünme becerileri ortaya çıkmıştır.

Coşkun (2012) araştırmasında matematik öğretmen adaylarının üst düzey matematiksel düşünme süreçlerini incelemeyi amaçlamıştır. Araştırmada karma araştırma deseni kullanılmıştır. Çalışmaya 22 kişi ortaöğretim matematik eğitimi anabilim dalından ve 20 kişi de ilköğretim matematik anabilimden olmak üzere toplam 42 öğretmen adayı katılmıştır. Veriler çalışma yapraklarından elde edilmiştir. Üst düzey düşünme boyutlarından gösterim, gösterimlerin çevrilmesi, modelleme, genelleme, sentezleme ve soyutlama boyutları ele alınmıştır. Araştırma sonucunda öğretmen adayları genelleme aşamasında yüksek düzeyde başarı göstermelerine rağmen sentezleme ve soyutlamada yüksek düzeyde başarı göstermede zorlanmıştır. Diğer aşamalar ise orta düzeyde başarı ortaya çıkmıştır.

Tuna (2011) çalışmasında 10. Sınıf öğrencilerinin trigonometri konusunda 5E öğrenme modelinin matematiksel düşünme becerilerine, akademik başarısına ve trigonometri konusunun kalıcılığına etkisi araştırılmıştır. Araştırmaya 49 öğrenci katılmıştır. Veriler matematiksel düşünme becerileri testi, akademik başarı testi, matematiksel düşünme hazır bulunuşluk testi açık uçlu anket sonuçlarından elde edilmiştir. Araştırma da 2x3'lük karışık desen kullanılmıştır. Yapılan uygulama sonucunda 5E öğrenme modelinin; matematiksel düşünme becerilerine, akademik başarıya ve öğrenilenlerin kalıcılığına olumlu yönde katkı sağladığı görülmüştür.

Karakoca (2011) araştırmasında problem çözme sürecinde altıncı sınıf öğrencilerin matematiksel düşünmeyi kullanma durumlarını ve bu durumların cinsiyet, matematik başarısı ve okul öncesi eğitim alıp almama duruma göre incelemeyi amaçlamıştır. Araştırmaya 1114 öğrenci katılmıştır. Cai (2000)'nin matematiksel düşünme ölçeği Türkçe'ye uyarlanarak uygulanmıştır. Bu ölçek altı tane rutin ve altı tane rutin olmayan problemden oluşmaktadır. Araştırma karma bir modele sahiptir. Araştırma sonucunda problem çözme de matematiksel düşünme ile ilgili ortalama bir başarı ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin rutin problemlerdeki başarıları daha yüksektir. Öğrencilerin matematiksel düşünme becerileri matematiksel düşünmeleri cinsiyete bağlı farklılık gözlenmemiştir. Okul öncesi eğitimin öğrencilerin matematiksel düşünme becerileri katkı sağladığı görülmüştür. Ayrıca matematiksel düşünme becerileri, matematik başarısına olumlu katkı sağladığı ortaya çıkmıştır.

Alkan ve Tataroğlu Taşdan (2011) çalışmasında matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünmeyle ilgili görüşlerini belirlemeyi amaçlamıştır. Bunun yanında farklı sınıf düzeylerindeki öğretmen adaylarının görüşlerini karşılaştırmayı hedeflemiştir. Çalışma nitel araştırma yöntemlerinden tarama modeline sahiptir. Veriler beş açık uçlu sorulardan elde edilmiştir. Çalışmaya üçüncü, dördüncü ve beşinci sınıfta öğrenim gören ortaöğretim matematik öğretmenliği anabilim dalından 134 öğretmen adayı katılmıştır. Çalışma sonucunda öğretmen adayları problem çözme ile matematiksel düşünme arasında ilişki kurabilmiş, matematiksel düşünmenin yapısını ortaya koyabilmişlerdir. Matematiksel düşünmeyle ilgili dördüncü sınıf öğrencilerinin daha olumlu görüşlere sahip olduğu ortaya çıkmıştır.

Arslan ve Yıldız (2010) çalışmasında on birinci sınıf öğrencilerini matematiksel düşünme süreçlerini özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama açısından incelemiştir. Çalışmada nitel araştırma yöntemi kullanılmıştır. Veriler dokuzar sorudan oluşan iki çalışma kâğıdından elde edilmiştir. Çalışmaya 24 öğrenci katılmıştır. Çalışma sonucunda öğrencilerin özelleştirme aşamasında zorlanmadıkları görülmüştür. Genelleme aşamasında ise öğrenciler genellikle sözel ifadelerde bulunmuştur. Varsayımda bulunma aşamasında öğrencilerin ortaya attıkları varsayımları sözel bir şekilde ifade ettikleri görülmüştür. İspatlama aşamasında ise öğrencilerin aritmetik ve geometrik olarak ispat yaptıkları gözlenmiştir. Araştırma sonuçlarına bakıldığında özelleştirme aşamasından ispatlama aşamasında doğru gidildikçe başarının düştüğü sonucuna varılmıştır.

Bulut (2009) araştırmasında işbirliğine dayalı yapılandırmacı öğrenme ortamlarında bilgisayar cebir sistemlerinin (BCS) matematiksel düşünmeye, akademik başarıya, kavramsal anlama, işlemsel beceri, problem çözme becerilerine ve cinsiyet farkına etkisini incelemeyi amaçlamıştır. Araştırmada yarı deneysel yöntem kullanılmıştır. Araştırmaya ilköğretim matematik öğretmenliği birinci sınıfta okuyan 43 öğrenci katılmıştır. Araştırma sonucuna bakıldığında deney grubundaki öğrencilerin, kontrol grubundaki öğrencilere göre daha başarılı olduğu söylenebilir. Ayrıca uygulanan BCS destekli öğretimin öğrencilerin matematiksel düşünmelerine pozitif yönde etkilediği sonucu ortaya çıkmıştır.

Taşdemir (2008) araştırmasında Ya Basınç Olmasaydı ünitesiyle ilgili yapılandırmacı öğrenmeyi esas alan matematiksel düşünme etkinlikleri ile yapılandırmacı öğrenme ve normal eğitimine devam eden öğrencilerin akademik tutum, başarı ve problem çözmeye etkisini incelemiştir. Bunun yanında matematiksel düşünme becerisi farklı seviyede olan öğrencilerin problem çözerken ki hata kaynakları ve problem çözme becerileri araştırılmıştır. Araştırma da nicel ve nitel araştırma yöntemleri birlikte kullanılmıştır. Araştırmaya yedinci sınıf öğrencilerinden 80 kişi katılmıştır. Uygulama sonucunda yapılan matematiksel düşünme etkinliklerinin akademik başarıyı arttırdığı sonucuna varılmıştır.

Bukova Güzel (2008) çalışmasında yapılandırmacı öğrenme yaklaşımının matematiksel düşünme süreçlerine etkisini araştırmıştır. Çalışma yarı deneyseldir. Çalışmada açık uçlu problemler kullanılarak uygulama yapılmıştır. Çalışmaya 60 matematik öğretmen adayı katılmıştır. Çalışma sonucunda yapılandırmacı öğrenme yaklaşımının matematiksel düşünmeyi geliştirdiği sonucuna varılmıştır.

Yeşildere (2006) araştırmasında farklı matematiksel güce sahip öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini ve bilgiyi oluşturma süreçleri karşılaştırmayı amaçlamıştır. Araştırmada nitel ve nicel araştırma yöntemleri birlikte kullanılmıştır. Araştırmaya 798 öğrenci katılmıştır. Veriler matematiksel güç ölçeğinden elde edilmiştir. Araştırma sonucunda öğrencilerin matematiksel gücü düşük çıkmıştır. Dolayısıyla araştırma süreci incelendiğinde matematiksel düşünme stratejilerinin matematiksel güç ile benzerlik taşıdığı sonucuna varılabilir.

Duran (2005) Uluslarası Öğrenci Değerlendirme Programı [PISA] 2003 kapsamında bazı değişkenlerin matematiksel düşünmeye etkisini araştırmıştır. Bu değişkenler öğrencilerin matematiğe yönelik kaygıları, matematiğe karşı tutumları, çalışma yöntemleri ve ders dışında çalışmaya ne kadar vakit ayırdıklarıdır. Bunun yanında okul öncesi eğitim alıp almama durumu ve cinsiyetin matematiksel düşünmeye etkisi de araştırılmıştır. Araştırma betimsel bir çalışmadır. Araştırmaya 4855 öğrenci katılmıştır. Veriler PISA projesi kapsamındaki matematik başarı testinden ve anketlerden toplanmıştır. Yapılan araştırma sonucunda okul öncesi eğitim alan öğrenciler daha başarılı çıkmıştır. Ayrıca erkek öğrencilerin matematiksel düşünme becerileri kız öğrencilere göre daha başarılıdır. Matematiğe yönelik kaygının matematiksel düşünmeyi en çok etkileyen değişken olduğu sonucuna varıldı.

Alkan ve Bukova Güzel (2005) çalışmasında matematiksel düşünme gelişimini ölçmeyi amaçlamıştır. Öğretmen adaylarının cinsiyetle, mezun olduğu ortaöğretimle, üniversite sınavında matematik netiyle ve üniversite sınavından aldığı puanla ilişki araştırılmıştır. Çalışmaya matematik öğretmenliğinde öğrenim gören birinci sınıf öğretmen adayları 64 kişi katılmıştır. Çalışmada Greenwood'un matematiksel düşünme ölçütlerini esas alan problemlerden veriler elde edilmiştir. Çalışma sonucunda matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünmeleri düşük çıkmıştır. Cinsiyet ile matematiksel düşünme arasında herhangi bir farklılık gözlenmemiştir. Öğretmen adaylarının mezun olduğu bölgeler incelendiğinde Karadeniz ve Ege Bölgesindeki öğretmen adayları daha başarılıdır. Matematiksel düşünme becerisi üniversite sınavından yüksek puan alanların öğretmen adayların lehine olduğu gözlenmiştir. Üniversite sınavında yapılan matematik netleriyle matematiksel düşünme arasında doğrusal bir ilişki gözlenmemiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının birinci sınıf ders ortalamalarıyla matematiksel düşünme arasında bir ilişki çıkmamıştır.

2.5.2 Yurt Dışında Yapılmış Araştırmalar

Sindhupalchok, Kathmandu and Mahottari bölgesinde yürütülen çalışmada (2016) öğrencilerin matematik başarıları ile matematiksel düşünme arasındaki ilişkiyi incelmiştir. Uygulama sırasında biri matematiksel düşünme testi diğeri ise matematiksel başarı testi olmak üzere iki test; Nepal' in üç semtindeki 400 öğrenciye uygulanmıştır. Araştırma sonucunda tümevarım, genelleme ve matematiksel ispat aşamasında öğrencilerin başarılarının düşük olduğu belirlenmiştir. Çalışmada öğrencilerin matematik testi başarı puanlarının, matematiksel düşünme başarı puanlarından fazla olduğu gözlemlenmiştir. Matematik testinden alınan puanlar ile matematiksel düşünme puanları arasında anlamlı bir ilişki olduğu, aynı zamanda matematiksel düşünmenin tüm bileşenlerinin de matematik başarısı ile ilişkili olduğu sonuçlarına ulaşılmıştır.

Lim ve Hwa (2006) çalışmasında; Malezya da matematiksel düşünmenin ne olduğunu ve nasıl tanımladığını araştırmayı amaçlamıştır. Araştırma sonucunda; matematiksel düşünmenin ortaöğretim matematik programda bir amaç olarak belirtilmiş olmasına rağmen açıkça tanımlanmadığı tespit edilmiştir. Ayrıca matematik dersinde öğrencilerin matematik düşünmelerini teşvik etmek gerektiğinin önemli olduğu vurgulanmıştır.

Mubark (2005) Ürdün'lü, 11. Sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmeleri ile matematik başarılarının incelemeyi amaçlamıştır. İlk olarak matematiksel düşünmenin önemli yönlerini tanımlamak, matematiksel düşünmenin bileşenleri ile matematik başarısı arasındaki ilişkiyi araştırmak hedeflenmiştir. Bunun yanında matematiksel düşünme ve matematik başarısını cinsiyet ve okul yerleşim yerleri bakımından incelenmiştir. Veri toplama aracı olarak iki test değerlendirme aracı olarak kullanılmıştır. Veriler rastgele seçilen 20 okuldan 500'den fazla 11. Sınıf (kız+erkek) öğrencilerinden toplanmıştır. Çalışmada nitel ve nicel araştırma yöntemlerinin ikisi de kullanılmıştır. Ayrıca 13 öğretmen ile matematiksel düşünme hakkında fikirlerini almak konusunda görüşülmüştür. Bunun yanında 4 öğrenci ile de odak grup görüşmesi yapılmıştır. Öğretmenlerle yapılan görüşmelerin amacı matematiksel düşünmenin bileşenleri hakkındaki görüşlerini bileşenler açısından önem ve zorluk derecesi, öğrencilerin matematiksel düşünme testine verdiği yanıtlar arasındaki tutarlılık ve tutarsızlığı incelemektir. Öğrenci görüşmeleriyle de sorunun çözümüne ulaşırken kullandıkları stratejileri belirlemeyi, kullandıkları düşünme becerilerini ayırt etmeyi, çözümleri kontrol etme konusundaki tutumlarını tespit etmeyi amaçlamıştır. Çalışmada matematiksel düşünmenin altı bileşeni üzerinde durulmuştur. Bunlar genelleme, tümevarım, tümdengelim, sembollerin kullanımı, mantıksal düşünme ve matematiksel ispattır. Çalışmanın sonucuna bakıldığında kız öğrenciler mantıksal düşünme, matematiksel kanıt ve toplam matematiksel düşünme açısından erkeklerden anlamlı olarak daha yüksek puana sahiptir. Diğer dört bileşen için cinsiyet farklılığı oluşmamıştır. Banliyö okullarında öğrenim gören öğrenciler kentsel ve kırsal kesimde öğrenim gören öğrencilere matematiksel düşünmenin dört bileşeninden ve toplam test puanlarında daha başarılıdır. Matematiksel düşünmenin bileşenleri arasındaki ilişkilerin hepsi pozitif ve anlamlı bir ilişki ortaya çıkmıştır. En yüksek ilişki genelleme ve sembollerin kullanılmasında, en düşük ilişki de tümevarım ve tümdengelim arasında çıkmıştır.

3. YÖNTEM

3.1 Araştırma Modeli

Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi için gerçekleştirilen bu çalışmada nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiştir. Çünkü nitel araştırmalarda araştırmacı(lar) bilinmeyeni ortaya çıkarma, tanımlama ve birtakım sonuçlara ulaşma çabası içerisindedir. Bunun için araştırmaya yön veren soru veya soruları cevaplayabilecek bilgileri toplar, bu bilgileri yorumlar ve sonuçlara ulaşır (Yıldırım, 1999). Nitel araştırma yaklaşımı ile çalışmaya katılan bireylerin matematiksel düşünme bileşenleri açısından problemlere bakış açılarını keşfetmek amaçladığı için bu yaklaşım tercih edilmiştir.

Araştırmanın deseni ise nitel araştırma desenleri içerisinde yer alan durum çalışması olarak belirlenmiştir. Çünkü durum çalışmalarında; bilgi toplama, toplanan bilgileri organize etme, yorumlama ve araştırma bulgularına ulaşma gibi basamakları içeren sistematik desen türlerinden biridir (Merriam, 1988; Akt.: Vural ve Cenkseven, 2005).

Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçleri incelenirken; görüşme ve doküman analizi gibi nitel bilgi toplama yöntemlerinin kullanıldığı, böylece algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği ifade edilebilir.

3.2 Çalışma Grubu

Araştırmanın çalışma grubunu 2018-2019 Eğitim-Öğretim yılı Ağrı ilinin ilçelerinin birinde bulunan bir ortaöğretim kurumunda öğrenim görmekte olan yirmi beş tane dokuzuncu sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Nitel araştırmalarda çalışılan konuyu ayrıntılı ve derinlemesine inceleme vardır. Toplanan veriler o katılımcılara ve o anla ilgili olduğundan genellemeye gidilmez (Sönmez ve Alacapınar, 2017). Bu nedenle çalışmada örnekleme yöntemlerinden amaçsal örnekleme yöntemi seçilmiştir. Amaçsal örnekleme, çalışmanın amacına bağlı olarak birden fazla türü vardır. Bunlardan biri de ölçüt örneklemedir. Ölçüt örnekleme önceden belirlenmiş bir dizi ölçütü karşılayan bütün durumların çalışılmasıdır. Buradaki ölçütler araştırmacı tarafından oluşturulabilir ya da önceden hazırlanmış bir ölçüt listesinden yararlanılabilir (Yıldırım ve Şimşek 2018, s.122). Araştırmada bu ölçüt sınıf düzeyi olarak ele alınmış ve dokuzuncu sınıflarda çalışma yürütülmüştür. Ayrıca araştırmada; öğrencilerin matematiksel düşünme sürecinde gösterdiği davranışları belirleyebilmek ve derinlemesine bilgi edinebilmek için üç öğrenci ile odak grup görüşmeleri gerçekleştirilmiştir. Odak grup görüşmeleri öğrencilerin düşünme ve muhakeme etme, verileri sınıflandırma ve ilişkilendirme, varsayımda bulunma, genelleme gibi üst düzey becerileri kullanmaları gerektirecek sorular kullanılacağı için başarı olarak düşük seviyedeki öğrencilerden veri elde edilemeyeceği düşünülmüş ve bu nedenle sadece orta ve yüksek başarı düzeylerine sahip öğrenciler tercih edilmiştir. Öğrenci başarı düzeylerini belirlerken öncelikle matematik öğretmeninin öğrenciler hakkındaki görüşleri dikkate alınmıştır.

Çalışmaya katılan öğrencilerin de cinsiyetlere göre dağılımı Tablo 3.1'de gösterilmiştir.

Tablo 3.1: Öğrencilerin cinsiyete göre dağılımları.

	Frekans	Yüzde(%)
Erkek	8	32
Kadın	17	68
Toplam	25	100

3.3 Veri Toplama Araçları

Nitel araştırmada veriler; doküman incelemesi, görüşme ve gözlem aracılığıyla toplanır ve çevre, süreç ve algılara ilişkin veri olmak üzere üç tür veri elde edilebilir (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Verilerin toplanmasında öncelikle öğrencilerin "açıortay" konusuna ilişkin matematiksel düşünme düzeylerinin hangi aşamasında davranışlar gösterdiğini belirleyebilmek için hazırlanan çalışma kağıtları uygulanmıştır. Uygulama sonrası kâğıtlar incelenmiş, sınıfın matematik öğretmenin de görüşü alınarak çalışma kağıtlarında arkadaşlarına göre daha üst düzeyde başarı gösteren ve zengin veri sağlanacağı düşünülen öğrencilerle odak grup görüşmeleriyle gerçekleştirilmiştir.

3.3.1 Çalışma Kağıdı

Üç alan eğitimi uzmanının önerileri doğrultusunda belirlenen 9. Sınıf geometri öğrenme alanı üçgenler "açıortay" konusunun kazanımı aşağıda Tablo 3.2'de verilmiştir.

Tablo 3.2: 9. Sınıf geometri öğrenme alanı üçgenler konusunun 9.4.3.1. kazanımı (MEB,2018a)

Alt Öğrenme Alanı	Konu	Kazanım	Kazanım Açıklaması
Geometri	Üçgenin Yardımcı Elemanları	Üçgenin iç ve dış açıortay özelliklerini elde eder.	a) Açıortay üzerinde alınan bir noktadan açının kollarına indirilen dikmelerin uzunluklarının eşit olduğu gösterilir. b) İç ve dış açıortay uzunlukları formülle hesaplatılmaz. c) Açıortay özelliklerinin gösteriminde pergel-cetvelden yararlanılır. ç) Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılır.

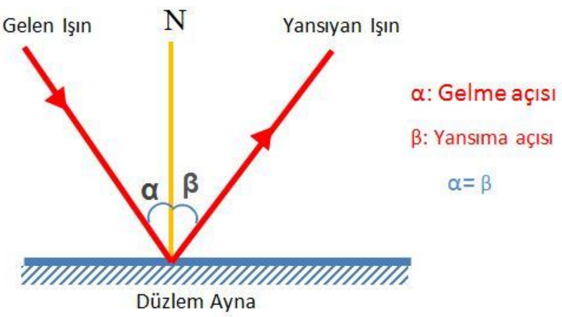
Tablo 3.2'de verilen kazanım ve çalışmanın odak noktasını oluşturan matematiksel düşünme süreçleri (özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma, doğrulama ve ikna etme) göz önüne alınarak hazırlanan çalışma kağıdı; öncelikle uzman görüşü alınarak düzenlenmiş daha sonra pilot uygulaması 2018-2019 Eğitim-Öğretim yılının ikinci yarısında Ağrı ilinin bir ilçesinde yer alan uygulama yapılacak okuldan başarı durumu yüksek örneklem dışında kalan bir dokuzuncu sınıfta öğrenim gören bir öğrenciye uygulanmıştır. Pilot çalışmalar araştırmacıya örneklem hakkında kılavuzluk eder. Araştırmacı pilot çalışma sayesinde var olan hataları büyümeden

keşfetme olanağı bulur ve üzerinde düzeltmeler yapabilir (Gray P.S., 2007 akt; Köymen, K. İ.). Pilot çalışma sonucunda sorularda kısıtlama yoluna gidilerek bir açıyı taşıma, bir açıya eş açı çizimi soruları çalışma yaprağından çıkarılmış sadece açıortay konusu üzerinde odaklanılmıştır. Bu şekilde oluşturulan çalışma kağıdının son hali aşağıdadır.

Tablo 3.3: Çalışma kağıdı.

ÇALIŞMA KAĞIDI

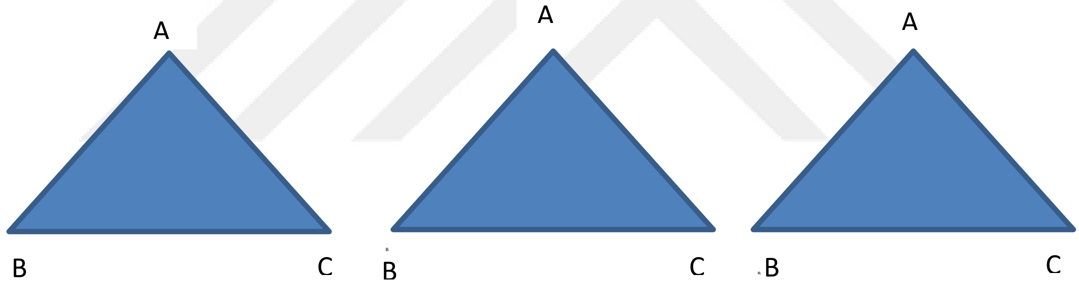
Adı Soyadı: Sınıf: No:



Düzlem ayna yüzeyine gelen ışınlar aynadan tekrar yansıma yaparlar. Şekilde görülen N ışının düştüğü noktada yüzeye dik olan doğru olarak tanımlanır. Buradan hareketle gelen ışın ile yansıyan ışının normal doğrusuyla yaptıkları açı hakkında ne söylenebilir? Bu açıları geometri de üçgenin hangi yardımcı elemanıyla ilişkilendirilebilir?

Yönerge: Aşağıda verilen soruları dağıtılan üçgen kağıtlar yardımıyla cevaplayınız. Sorulara göre uygun geometri çizim aletlerini kullanınız.

SORULAR



1) A köşesinin açıortayını(B ve C köşelerinin) katlayarak nasıl gösterirsiniz?
2) Açıölçer kullanarak A köşesinin (B ve C köşelerinin) açıortayını nasıl gösterirsiniz?
3) Yalnızca cetvel kullanarak A köşesinin(B ve C köşelerinin) açıortayını nasıl gösterirsiniz?
4) Pergel ve cetvel kullanarak A köşesinin(B ve C köşelerinin) açıortayını nasıl gösterirsiniz?
5) İlk dört soruda yaptığınız işlemleri göz önüne alarak, açıortay doğrusu üzerinde aldığınız herhangi bir noktanın açının kollarıyla uzaklığı konusunda neler söyleyebilirsiniz?(A, B ve C açıortayları için)
6) Dördüncü verilen üçgen kağıtta herhangi iki köşeye ait açıortay çiziniz. Bunun üzerine diğer köşeden çizilen açıortaylarla ilgili neler söyleyebilirsiniz? Cevaplarınızı açıkça yazınız.
7) Altıncı soruda ifade ettiğiniz bilgiyi ispatlayabilir misiniz?

Çalışma kağıdındaki soruların ilk dört tanesi matematiksel düşünmenin özelleştirme aşamasında ele alınmıştır. Çünkü Arslan ve Yıldız (2010) özelleştirme aşamasında bir veya daha fazla örnek verme, bir örneği tanımlama, gösterme, anlatma, çizme, seçme, bulma, istenilen bir duruma ait zıt örnek bulma, istenileni doğru bularak sonucu farklı şekillerde yazma gibi eylemler yapılır şeklinde ifade etmiştir. Çalışma kâğıdındaki ilk dört soruda çizme bulma katlama gibi eylemler söz konusudur. Bu yüzden özelleştirme aşamasında incelenmiştir. Ayrıca çalışma kağıdında öncelikle A köşeleri için sorularda istenilen şekilde açıortayları bulmaları istenmiştir. Devamında sorularda istenilen şekilde B ve C köşelerine ait açıortaylarında bulunması istenmiştir. Bunun için öğrencilere üçer kağıt dağıtılmış ve üzerinde çalışmaları istenmiştir.

Çalışma kağıdındaki beşinci soru genelleme aşamasında incelenmiştir. Arslan ve Yıldız (2010)'a göre de genelleme sürecinde; örüntü oluşturma, sınıflama, eşleştirme, sıralama ve karşılaştırma yapma, benzerlik ve farklılıkları bulma, iki değişken arasındaki durumu matematiksel veya sözel olarak ifade etme, ortaya çıkabilecek tüm ihtimalleri tanımlama yapılır. Çalışma kağıdı beşinci soruda öğrencilerden buldukları genellemeleri matematiksel veya sözel olarak ifade etmeleri istenmiştir. Ayrıca odak grup görüşmesi yapılan üç öğrencinin çalışma kağıdındaki ilk dört sorudan kağıt katlama, açıölçer kullanma, sadece cetvel kullanma, pergel ve cetvel kullanmayla ilgili karşılaştırmalar yapmaları istenmiştir. Bunun nedeni sınıfın genelinde öğrenciler tarafından sadece cetvel kullanarak dikkatsiz davranışlar sergilenmesidir. Bu durumu açıklayabilmek ve öğrencilerin genelleme aşamasındaki davranışlarını tam olarak ortaya konmasını güçleştirebileceği düşüncesiyle karşılaştırma yapmaları istenmiştir. Bu yüzden üç öğrencinin fikirleri alınarak genellemeler yapması beklenmiştir.

Çalışma kağıdındaki altıncı soru varsayımda bulunma aşamasında incelenmiştir. Arslan ve Yıldız (2010) matematiksel düşünme sürecinde, sözel veya matematiksel tahminlerde bulunma, ortaya atılan matematiksel iddiaları formül haline getirme, önermelerden sonuca ulaşma, hipotez kurup, kurulan hipotezin test etme gibi eylemler yapılır. Çalışma kağıdı altıncı soruda öğrencilerden bir üçgende herhangi iki açıortay çizdikten sonra çizilecek üçüncü açıortay hakkında varsayımlar ortaya atması istenmiştir.

Çalışma kağıdı yedinci soru doğrulama ve ikna etme aşamasında incelenmiştir. Öğrencilerin altıncı soruda ortaya attıkları varsayımları kanıtlamaları beklenmiştir.

3.3.2 Odak Grup Görüşmesi

Odak grup görüşmesi açık uçlu sorularla bireysel görüşme yöntemleri üzerine inşa edilmiş bir görüşme yöntemidir (Kruger ve Casey, 2000'dan aktaran Yıldırım ve Şimşek, 2018, s. 159.) Odak grup görüşmesinde grup içindeki bireylerin birbirlerini etkilemesi sonucu sorular yanıtlanmaktadır. Bu nedenle grup içinde birinin söylediği cevap guruptaki diğer öğrenciler tarafından duyulduğundan diğer bireylere de kendi düşündüklerini rahatça söyleme fırsatı doğacaktır. Odak grup görüşmeleri bu yüzden zengin veri kaynağı oluşturur. Ayrıca bireysel olarak akla gelmeyen düşünceler fikirler grup görüşmesinde diğer bireylerin söylemleri ile hatırlanabilir. Grup görüşmelerinde kısa süre içinde birçok düşünce üretilebilir. Problemlerin çözümüne kolaylıkla ulaşılabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2018). Bu çalışmada odak grup görüşmesinde veriler öğrenci çalışmaları ve gözlemci notu ve ile toplanmıştır. Odak grup görüşmesinde üç öğrenciye *açıortay bulma işlemlerinden çalışma kağıdındaki ilk dört sorudan yola çıkarak en doğru sonucu nasıl buldunuz? Kağıdı katlayarak mı, Açıölçer ile mi, sadece cetvel kullanarak mı yoksa pergel ve cetvel kullanarak mı? Sadece cetvel kullanarak doğru sonuca nasıl ulaşırsınız? İkizkenar ile nasıl yaparsın? Bunu başka nasıl ifade edebilirsiniz? Çeşitkenar üçgenin tüm açılarının ölçüleri farklı mıdır? Geçmiş yıllardaki bilgilerimizi hatırlayacak olursak; merkez açıları farklı olan çemberlerin de gördüğü yayların uzunlukları farklı mıdır? Örneğin merkez açısı 30 derece olan yayın uzunluğu ile 60 dereceyi gören yayın uzunluğu aynı mıdır? En kısa uzaklık derken neyi ifade edersiniz? Dikme denilebilir mi? Dikmelerin eşit olduğunu nasıl kanıtlarsınız? Buradan nasıl bir sonuca varıyorsunuz? Eşit olduğunu nasıl kanıtlarsınız? Başka fikri olan var mı?* şeklinde sorular sorulmuştur. Öğrencilerin düşüncelerini ortaya çıkarmak, sorular hakkında karşılaştırma yapmalarını sağlamak amacıyla bu sorulara karar verilmiştir.

3.4 Araştırmacının Rolü

Nitel araştırmalarda araştırmacının rolü nicel araştırmalarla aynı değildir. Yani nitel araştırmalarda nicel araştırmalarda olduğu gibi araştırmacı araştıracağı konuyu dışarıdan gözlemlemez. Nitel araştırmacı araştıracağı konunun içindedir. Çalışmaya katılan kişilerle doğrudan görüşmeler yapar. Yapılan uygulamayı gözlemleyip notlar alır, elde ettiği deneyimleri verilerin analizinde kullanır (Yıldırım ve Şimşek, 2018, s. 44).

Yapılan çalışma araştırmacı tarafından planlı bir şekilde yürütülmüştür. Araştırmacı uygulamanın her aşamasına tarafsız bir şekilde dahil olmuştur. Uygulama esnasında öğrencilerin sorularına doğru ya da yanlış şeklinde yönlendirme yapılmadan soru işretleri giderilmeye çalışılmıştır. Çünkü çalışmanın amacı doğru cevabı bulmaktan ziyade öğrencilerdeki matematiksel düşünme süreçlerini incelemektir. Yapılan gözlemler sonucunda alınan notlar değerlendirme açısından kolaylık sağlamıştır. Uygulama sonucunda öğrencilerin cevapları tarafsız bir şekilde incelenmiştir.

3.5 Verilerin Toplanması

Araştırma verileri 2018-2019 eğitim öğretim yılının bahar dönemine aittir. Uygulama esnasında her öğrenciye hazırlanan çalışma kâğıdı verilmiştir. Çalışma kâğıdının uygulanmasına yönelik alınan uzman görüşleri doğrultusunda; uygulamada kullanılabileceği öngörülen üçgen kâğıtlar her öğrenciye hazır olarak verilmiştir. Kazanım 9.4.3.1 açıklamasında "bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılır" yazmaktadır. Ancak uygulamanın yürütüldüğü okulun teknik olanaklarının zayıf olmasından dolayı bu teknolojilerden faydalanılamayacağından kâğıt modeller uzman görüşü doğrultusunda tercih edilmiştir.

Öğrencilerle yapılan 80 dakikalık zaman diliminde çalışmanın ilk dört sorusu cevaplanması istenmiştir. Çalışma kağıdındaki ilk dört soru özelleştirme aşamasında incelenmiştir. Uygulama sırasında gözlemler yapılarak öğrencilerin cevapları izlenmiş ve gerekli notlar alınıp öğrencilerin de cevapları not etmesi istenmiştir. Cevaplanan her sorudan sonra düzeltmeler yapılarak dönütler verilmiştir. İkinci 80 dakikalık periyotta çalışma kağıdındaki dördüncü soruyla birlikte diğer soruların cevaplanması istenmiştir. Çalışma kağıdındaki beşinci soru genelleme, altıncı soru varsayımda bulunma ve yedinci soru doğrulama ve ikna etme aşamasında incelenmiştir. Öğrencilerin cevaplarını yazarken herhangi bir not endişesi olmadan doğru ya da yanlış fark etmeksizin düşünceleri açıkça ifade etmeleri gerektiği belirtilmiştir.

Yapılan uygulamada çalışma kağıdındaki ilk dört soruya öğrencilerin performanslarına uygun olacak şekilde 80 dakikalık zaman ayrılmıştır. Bu 80 dakikalık zamanda öğrenciler ilk dört soruyu cevaplayabilmiştir. İkinci 80 dakikalık zamanda dördüncü soru tekrardan cevaplanması istenilerek beşinci, altıncı, ve yedinci sorular cevaplanmıştır. Pilot çalışması yapılan uygulama sonucunda öğrencilerin soruları cevaplayabileceği süre dört ders (160 dakika) olarak belirlenmiştir. Çalışma kağıdındaki dördüncü sorunun tekrar cevaplanması istenildiğinde pergel ve cetvel kullanımını doğru cevaplayan öğrencilerle odak görüşme yapılmasından dolayı bir ölçüt esas alınmıştır. Yapılan uygulamanın zaman çizelgesi Tablo 3.4'de gösterilmiştir.

Tablo 3.4: Çalışma tablosu.

	Pazartesi	Salı	Çarşamba	Perşembe	Cuma
Çalışma Grubu			X		X

3.6 Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği

Nitel Araştırmalarda Güvenirlik

Nitel araştırmalarda güvenirlik tanımı nicel araştırmalardan farklıdır. Nitel araştırmalarda tam olarak bir güvenirlik tanımı yapılamaz. Çünkü nitel araştırmalarda evren, biricik, özel, tek olup ve her zaman değişiklik gösterdiğinden dolayı belli bir düzen içinde değildir. Aynı zamanda evrende olup bitenler tekrarlanamaz. Güvenirlik nitel araştırmalara, nicel araştırmalardan geçmiştir. Nitel araştırmadaki güvenirliğin bu özelliklerinden dolayı güvenirlik yerine tutarlılık, evetlenebilirlik, teyit edilebilirlikten bahsedilebilir (Sönmez ve Alacapınar, 2017).

Tutarlılık

Nitel araştırmalarda evren değişiklik gösterip tekrarlanamadığından dolayı yapılan her ölçmede aynı sonuçlara ulaşılamaz. Bu yüzden nitel araştırmalarda tutarlılıktan bahsedilebilir (Guba ve Lincoln, 1985’ten aktaran Sönmez ve Alacapınar, 2017). Tutarlılık yapılan çalışmanın kurallara uygun olup olmaması, çalışmaya uygun yöntem seçilip seçilmemesi şeklinde incelenebilir (Erlandson, Harris ve diğerleri, 1993’ten aktaran Sönmez ve Alacapınar, 2017). Kısaca tututarlılık nicel araştırmalardaki iç güvenirliğin yerini tutabilir (Sönmez ve Alacapınar, 2017).

Yapılan çalışmada nitel araştırma basamaklarına uygun bir şekilde yapılmıştır. Bunun için öncelikle çalışmanın problemi belirlenmiş ve kavramsal çerçeve oluşturulmuştur. Çalışmanın alt problemleri yazılmıştır. Sonra çalışmaya katılacak örneklem ve araştırmacının rolü belirlenmiştir. Daha sonra çalışmada kullanılacak veri toplama araçlarına karar verilmiştir. Son olarak da veriler toplanıp, analiz edilip yorumlanmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2018).

Bunun yanında uygulamada kullanılacak çalışma kağıdı hazırlanırken kurallara uygun bir şekilde hazırlanmış daha sonra uzman görüşü alınarak düzenlenmiş ve pilot uygulaması yapılmıştır. Ayrıca araştırmacı kurallara uygun bir şekilde katılımcı gözlemci olarak çalışmaya katılmış. Öğrencinin sordukları sorulara doğru cevabı buldurmaktan ziyade onların düşünmelerini sağlayacak şekilde soruları yanıtlanmıştır. Yapılandırılmış görüşme de araştırmacılar tarafından görüşme soruları önceden hazırlanarak uygulanmıştır. Tüm bunlardan dolayı tutarlılık sağlanmıştır denilebilir.

Evetlenebilirlik, Teyit Edilebilirlik

Teyit edilebilirlik araştırmacının öznellikten uzaklaşıp, yaptığı araştırmanın gerçeği yansıtmasıdır. Nitel araştırmalarda araştırmacının bir etkisi olamayacağından nesnellik yerine teyit edilebilirlikten bahsedilebilir (Guba ve Lincoln, 1985’ten aktaran Yıldırım ve Şimşek, 2018, s. 283). Nitel araştırmalarda araştırmacı durumun içinde olduğundan dolayı objektif olması beklenemez. Nitel araştırmalarda teyit edilebilirliğin sağlanması için elde edilen verilerin saklanması gerekir (Erlandson, Harris, ve diğerleri, 1993’ten aktaran Sönmez ve Alacapınar, 2017). Teyit edilebilirlik, nicel araştırmalardaki dış güvenirliğe denk gelir (Sönmez ve Alacapınar, 2017, s.167).

Yapılan bu çalışmada araştırma verileri matematiksel düşünme süreçlerinin aşamalarına bağlı kalınarak analiz edilmiştir. Verilerin analizinde öğrencilerin yanıtlarından doğrudan alıntılar da yapıldığından dolayı veriler gerçeği yansıtmaktadır. Ayrıca doküman incelemesinden elde edilen veriler saklanmaktadır. Bundan dolayı teyit edilebilirlik sağlanmıştır denilebilir.

Nitel Araştırmalarda Geçerlik

Nitel araştırmalarda evren değişiklik gösterdiğinden dolayı elde edilen veriler kanıtlanamaz ve genellenemez. Bunun yanında nitel araştırmalardan elde edilen veriler sayısal olarak ifade edilemez. Edilse bile farklı anlamlar taşır. Bu yüzden nitel araştırmalarda nicel araştırmalardaki gibi geçerlik tanımından söz edilemez. Geçerlik yerine inandırıcılıktan, kabul edilebilirlikten, aktarılabilirlikten yani transfer edilebilirlikten bahsedilebilir (Sönmez ve Alacapınar, 2017).

İnandırıcılık, Kabul Edilebilirlik

Nitel araştırmalarda geçirilen süreçlerin, elde edilen sonuçların açık, anlaşılır bir şekilde, tutarlı olması inandırıcılık olarak incelenebilir. Araştırma sürecinde araştırmacı çalışmasına uygun yöntemler kullanmalıdır. Bunun için olgunun veya durumun içinde uzun süre kalma, ayrıntılı ve derinlemesine odak gurup görüşmesi yapma, yapılan çalışmayı uzmanların incelemesini sağlama gibi eylemler yapılabilir. Ayrıca inandırıcılığın arttırılması için zengin ve farklı veriler toplanmalıdır. Elde edilen veriler saklanmalıdır. Yapılan araştırmayla ilgili uzman görüşü alınabilir (Erlandson, Harris, ve diğerleri, 1993'ten aktaran Sönmez ve Alacapınar, 2017, s. 168).

İnandırıcılık, nicel araştırmalardaki iç geçerliğe denk gelebilir (Sönmez ve Alacapınar, 2017). Yıldırım ve Şimşek (2018)'e göre de iç geçerliğin sağlanması için araştırmacı tarafından elde edilen bulgular tutarlıdır ve bu elde edilen bulguları tutarlı bir şekilde ifade eder. Kısaca bulguların gerçeği yansıtması gerekir. Bu yüzden eleştirel bir gözle süreç incelenir.

Yapılan bu çalışmada verilerin analizinde veriler doküman incelemesi, gözlem, yapılandırılmış görüşme ile toplandığından dolayı çeşitlilik oluşmuştur.

Ayrıca elde edilen veriler saklanmaktadır. Çalışma sürecinde uzman görüşü alınarak seçilen konunun geometri alanında yapılmasına karar verilmiştir. Ayrıca çalışma kağıdındaki sorular uzman görüşü alınarak hazırlanmıştır. Elde edilen bulgularda ise öğrencilerin cevapları tutarlılık göstermektedir. Genel olarak bakıldığında öğrencilerin cevapları, yorumları birbirine benzemektedir. Bunlardan dolayı geçerliliğin sağlanmasında inandırıcılık sağlanılmaya çalışılmıştır denilebilir.

Aktarılabilirlik, Transfer Edilebilirlik

Nitel araştırmalarda evren değişkenlik gösterdiğinden dolayı elde edilen veriler genellenemez. Bu yüzden olgular değişkenlik gösterdiğinden araştırma sonucunda elde edilen bulgular sonuçlar benzer olay ve olgulara aktarılabilir. Bunun için ayrıntılı betimelemeler yapılabilir. Amaçlı örnekleme yöntemi kullanılabilir. Derinlemesine analizle olguların özeline değinilir. Örnekleme yeni bireyler katılabilir. Aktarılabilirlik, nicel araştırmalardaki dış geçerliğe denk gelebilir (Sönmez ve Alacapınar, 2017, s. 169).

Aktarılabilirliğin sağlanması için araştırma örneklemindeki süreçleri başka araştırmalardaki örneklemlerle kıyaslanabilecek şekilde ayrıntılı tanımlanması gerekir. Örneklemin çeşitli olmasına önem verilmelidir. Elde edilen bulguların diğer araştırmalarda kullanılabilmesi için açıklamalar yapılmalıdır (Miles ve Huberman, 1994'ten aktaran Yıldırım ve Şimşek, 2018)

Çalışma da amaçlı örnekleme yöntemi seçilerek uygun koşullar sağlanmıştır. Verilerin analizinde doğrudan alıntılar yapılarak veriler ayrıntılı olarak analiz edilmiştir. Bunun yanında çalışma sürecinde bulunulan sonuçlar diğer araştırmalarla karşılaştırılarak tartışılmıştır. Elde edilen sonuçları yazarken de yeterli açıklamalarda bulunulmuştur. Bundan dolayı aktarılabilirlik sağlanılmaya çalışılmıştır denilebilir.

4. BULGULAR

Bu bölümde dokuzuncu sınıf öğrencilerinin açıortay konusunda matematiksel düşünme düzeylerini belirlemek amacıyla yapılan araştırma verilerinden elde edilen bulgulara yer verilmiştir. Bulgular için öncelikle 25 öğrencinin çalışma kağıtlarında verdikleri yanıtlar doküman incelemesi ve uygulama sırasında yapılan gözlemlerle incelenmiştir. Bulgular her soru için ayrı ayrı analiz edilmiş, tema, alt tema ve kategoriler oluşturulmuştur. Daha sonra da pergel ve cetvel kullanımı doğru yapan üç öğrenciyle (Ö1, Ö2,Ö3) yapılandırılmış görüşme verilerine yer verilmiştir.

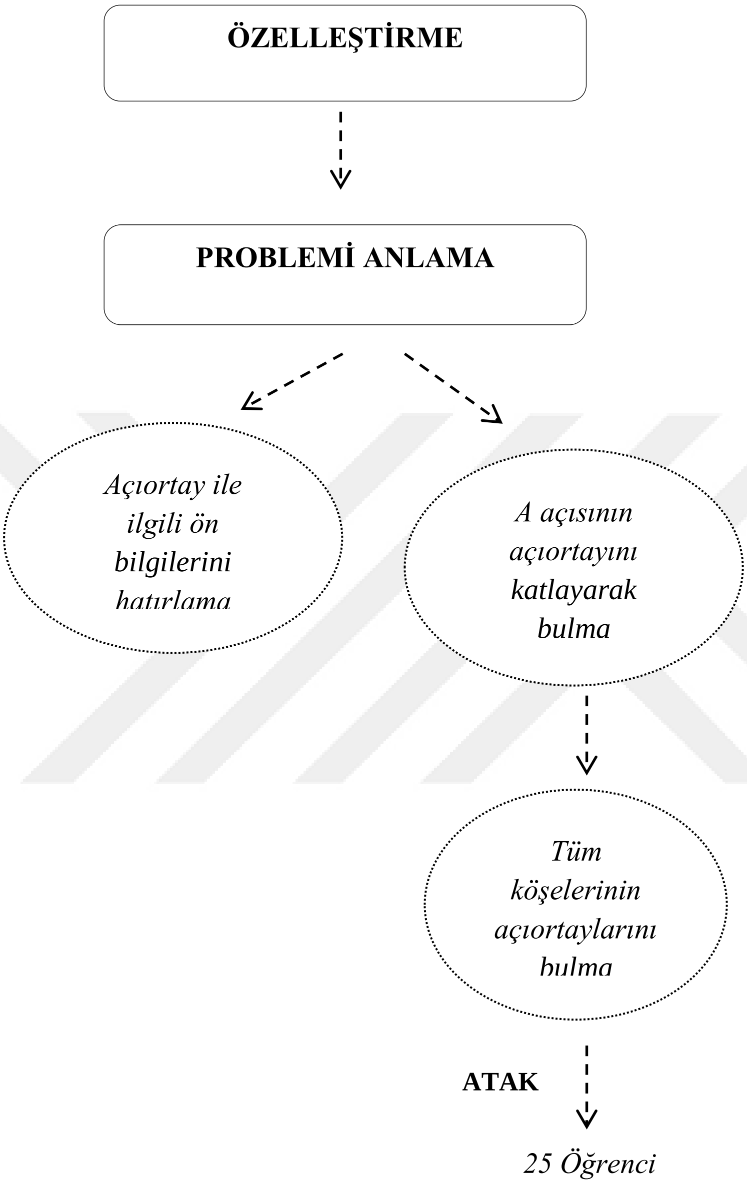
4.1 Birinci Alt Probleme Ait Bulgular

Çalışmanın birinci alt problemi "Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerinin özelleştirme aşamasındaki davranışları nelerdir " olarak belirlenmiştir. Yapılan bu çalışmada hazırlanan çalışma kâğıdındaki birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü soruların özelleştirme aşamasında incelenebileceği yöntem kısmında belirtilmiştir. Buradan hareketle, çalışma kağıdında yer alan sorulara öğrencilerin verdiği yanıtlar sırasıyla incelenmiş ve matematiksel düşünmenin özelleştirme aşamasında belirlenen davranışlar göz önüne alınarak aşağıda sunulmuştur:

Çalışma kağıdı birinci soru "A köşesinin açıortayını katlayarak nasıl gösterirsiniz" şeklinde belirlenmiştir.

Özelleştirme Birinci Soru

Özelleştirme, olay ve durumları daha basit düşünerek özel durumlar arama olarak tanımlanır. Problemde oluşan diğer durumların bulunmasına yardımcı olur. Yani problemin anlaşılır hale gelmesine yardımcı olur (Mason ve diğerleri, 2010). Arslan ve Yıldız (2010)'a göre özelleştirme aşamasında bir veya daha fazla örnek verme, bir örneği tanımlama, gösterme, anlatma, çizme, seçme, bulma, istenilen bir duruma ait zıt örnek bulma, istenileni doğru bularak sonucu farklı şekillerde yazma gibi eylemler yapılır. Bu problemde Arslan ve Yıldız (2010)'ın ifade ettiği gibi çizme, bulma, katlama gibi eylemler söz konusu olduğundan özelleştirme aşamasında incelenmiştir.

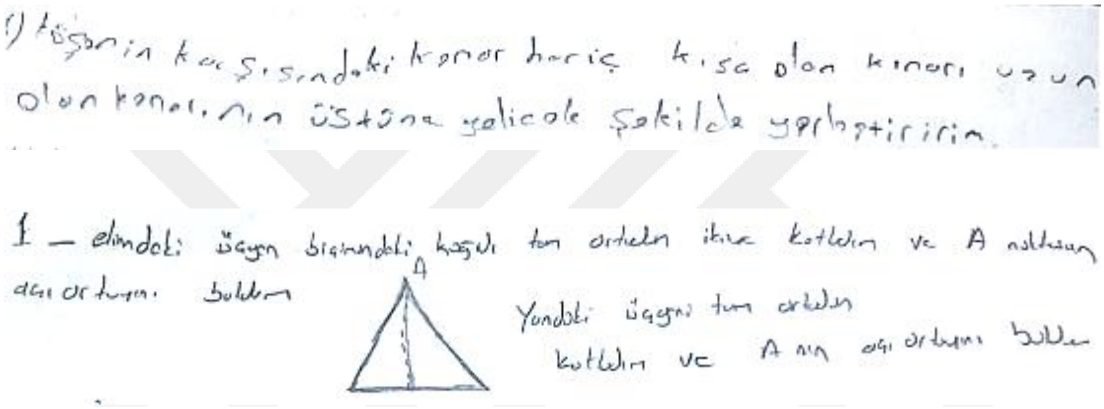


Şekil 4.1: Çalışma kağıdındaki birinci sorunun özelleştirme aşaması.

Problemi Anlama Birinci Soru

Problemi anlama aşamasında öğrenciler problem hakkında istenileni anlar. Soruyu kendilerine göre anlamlandırmaya çalışmaları bu aşamada gerçekleşir. Problem çözmenin ilk adımı öncelikle problemi anlamaktan geçer. (Polya, 1962'den aktaran Baki, 2018, s. 193).

Problemi anlama teması açıortay ile ilgili geçmiş yıllara ait ön bilgilerin hatırlanması, A açısının açıortayının katlayarak bulma ve üçgenin tüm köşelerinin açıortaylarını bulma şeklinde üç alt tema altında toplanmıştır. Çalışma kağıdındaki birinci sorunun cevaplanması için öğrencilere üç tane üçgen kağıt hazır olarak verilmiştir. Daha sonra öğrenciler A köşesinin açıortayını bulduktan sonra öğrencilerden dağıtılan diğer üçgen kağıtlarında sırasıyla B ve C köşelerine ait açıortayları da bulunması istenmiştir. Bunun için öğrenciler soruyu okuduktan sonra öncelikle açıortayın ne olduğunu düşünüp, A köşesinin açıortayını tüm öğrenciler başarılı bir atak süreci geçirerek katlayarak bulmuşlardır. Şekil 4.2'de iki öğrencinin cevapları verilmiştir.



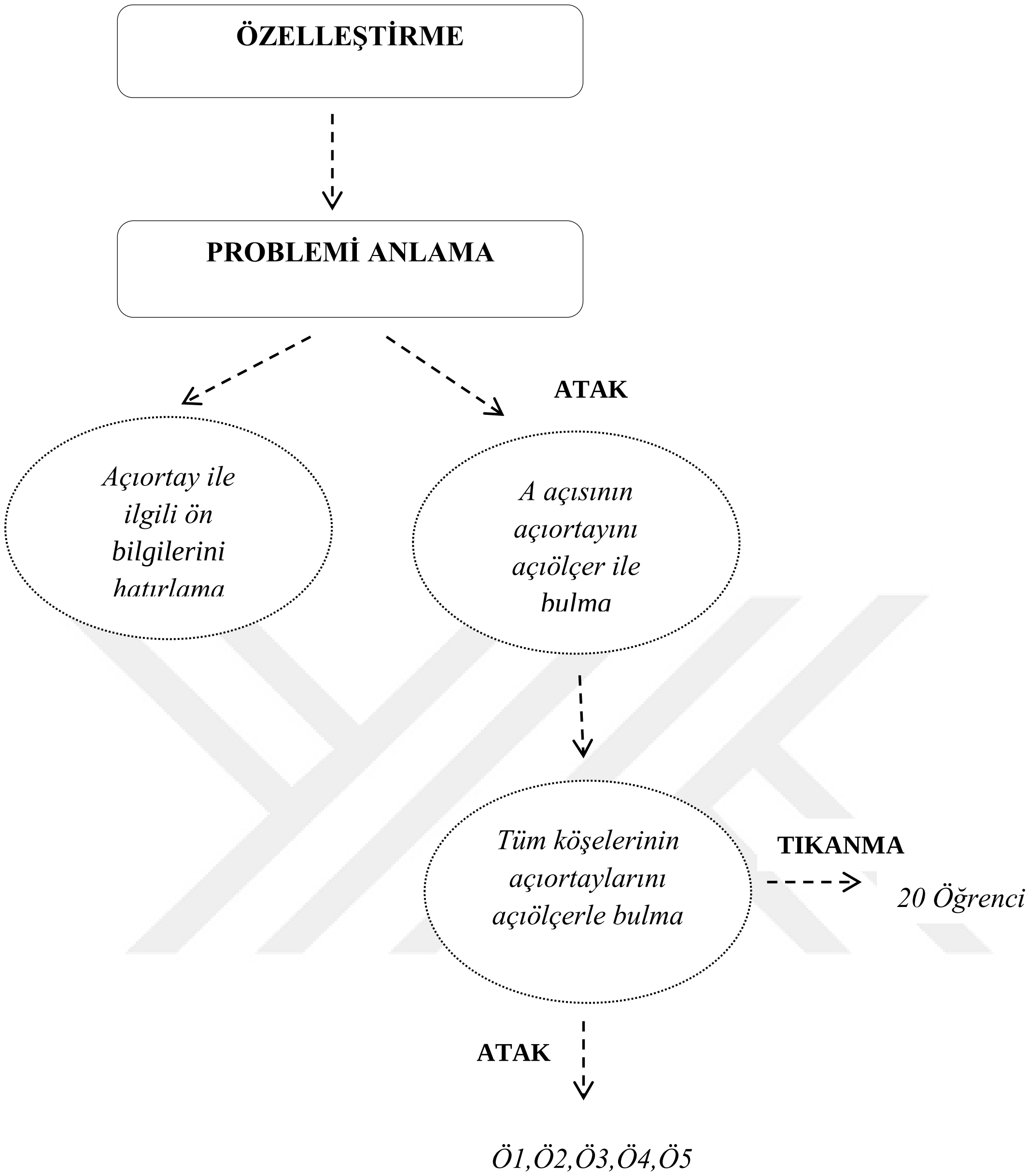
Şekil 4.2: Öğrencilerin cevaplarından örnekler.

Üçgende B ve C köşelerine ait açıortayların gösterilmesinde öğrenciler A köşesindeki yaptıkları işlemi yaparak göstermiştir.

Çalışma kağıdı ikinci soru "Açıölçer kullanılarak A köşesinin açıortayını nasıl gösterirsiniz" şeklinde belirlenmiştir. Devamında öğrencilerden B ve C köşelerine ait açıortaylarının açıölçer ile gösterilmesi de istenmiştir.

Özelleştirme İkinci Soru

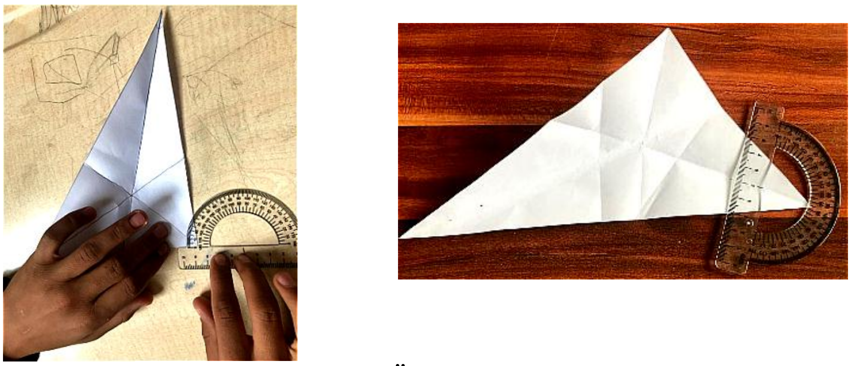
Bu problemde de Arslan ve Yıldız (2010)'ın ifade ettiği gibi çizme, bulma gibi eylemler söz konusu olduğundan bu soru da özelleştirme düzeyinde ele alınmıştır. Özelleştirme ana teması; problemi anlama alt teması altında incelenmiştir. Bu durum Şekil 4.3'de gösterilmiştir.



Şekil 4.3: Çalışama kağıdı ikinci soruya ait özelleştirme aşaması.

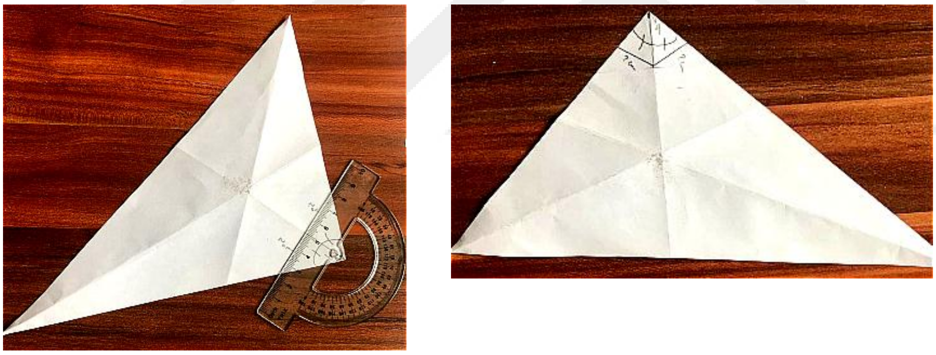
Problemi Anlama İkinci Soru

Problemi anlama teması açıortay ile ilgili geçmiş yıllara ait ön bilgilerin hatırlanması, A açısının açıortayının açıölçer ile bulma ve üçgenin tüm köşelerinin açıortaylarını bulma şeklinde üç alt tema altında toplanmıştır. Öğrenciler soruyu okuduktan sonra açıölçer ile A açısının açısını ölçüp açıortayını bulmaya çalışmışlardır. Uygulama sırasında yapılan gözlemlerde beş öğrencinin başarılı bir atak süreci geçirerek (Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5) açıölçeri doğru bir şekilde tutmuş ve A köşesinin açısını ölçüp iki eş parçaya ayırmışlardır. Uygulama sırasında yapılan gözlemlerin sonucunda sınıfın çoğunluğunun açıölçer kullanımını bilmediğinden dolayı önce açıölçer kullanımı hakkında bilgi verilip, daha sonra A açısının açıölçerle açıortayını bulmaları beklenilmiştir. Şekil 4.4'de iki öğrencinin yanlış açıölçer kullanımı verilmiştir.



Şekil 4.4: Öğrencilerin cevaplarından örnekler.

Ayrıca uygulama esnasında yapılan gözlemlerin sonucunda öğrencilerin çoğunluğunda açı ve uzunluk kavramlarının birbirine karıştırarak tıkanma süreci yaşadıkları görülmüştür. Aşağıdaki Şekil 4.5'de iki açı ve uzunluk kavramlarını karıştıran iki öğrencinin cevapları verilmiştir.

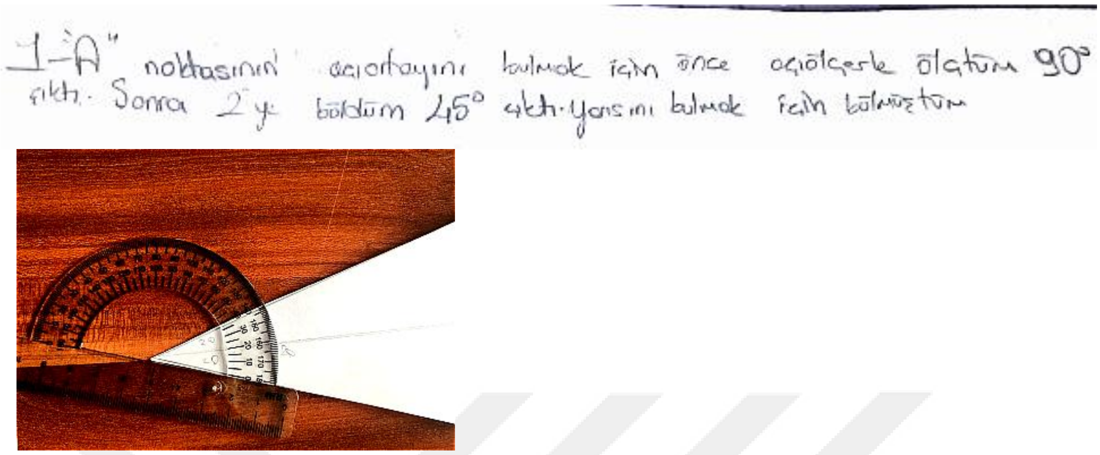


Şekil 4.5: Öğrencilerin cevaplarından örnekler.

Uygulama sırasında yapılan gözlemlerin bir sonucunda ise öğrencilerin açıölçeri başlangıç noktasını A köşesine koyarak kenarlarda oluşan iki açının farkından sonuca ulaştıkları yorumunu yapılabilir. Öğrencilerin cevapları Şekil 4.6'da gösterilmiştir.

Şekil 4.6: Öğrencilerin cevaplarından örnekler.

Öğrencilere açıölçerle ile ilgili bilgilendirme yapıldıktan sonra tüm öğrenciler A köşesinin açısını ölçmüşler ve ardından iki eş açıya ayırmışlardır. Devamında öğrenciler B ve C köşelerine ait açıortayları da doğru bir şekilde ölçüp açıortaylarını bulmuştur. Şekil 4.7'te iki öğrencinin doğru cevapları verilmiştir.



Şekil 4.7: Öğrencilerin cevaplarından örnekler.

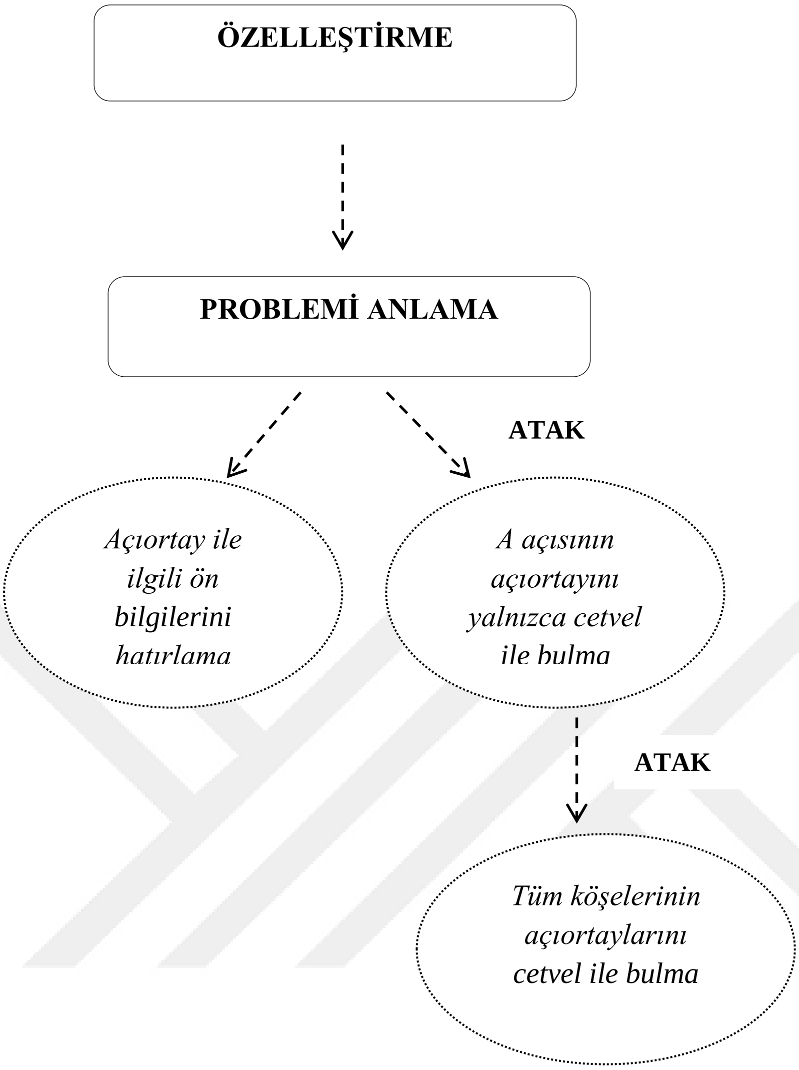
Çalışma kağıdı üçüncü soru "yalnızca cetvel kullanarak A köşesinin açıortayını nasıl gösterirsiniz" şeklinde belirlenmiştir. Devamında öğrencilerden B ve C köşelerinin açıortaylarının cetvel yardımıyla gösterilmesi istenmiştir.

Özelleştirme Üçüncü Soru

Bu soruda Arslan ve Yıldız (2010)'ın ifade ettiği gibi çizme, bulma gibi eylemler söz konusu olduğundan bu soru özelleştirme düzeyinde incelenmiştir. Bu durum Şekil 4.8'de gösterilmiştir.

Problemi Anlama Üçüncü Soru

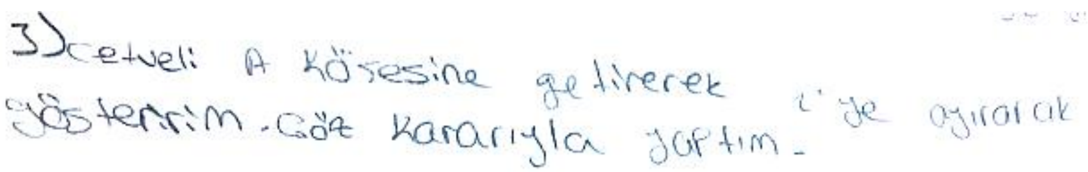
Problemi anlama teması açıortay ile ilgili geçmiş yıllara ait ön bilgilerin hatırlanması, A açısının açıortayının cetvel ile bulma ve üçgenin tüm köşelerinin açıortaylarını cetvel ile bulma şeklinde üç alt tema altında toplanmıştır.



25 Öğrenci

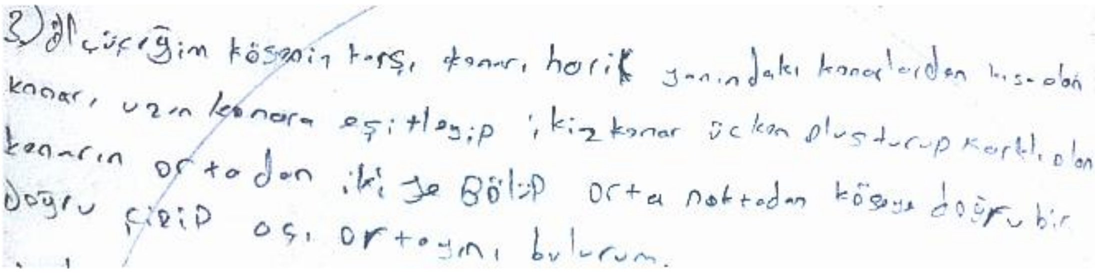
Şekil 4.8: Üçüncü soruya ait özelleştirme aşaması.

Şekil 4.9'da bir öğrenicinin yanıtı verilmiştir.



Şekil 4.9: Öğrencinin örnek cevabı.

Uygulama esnasında atak gösteren dört öğrencinin de (Ö1, Ö2, Ö6, Ö13) cetvel kullanarak açıortayını bulurken ikizkenar üçgen yapmaya çalışıp cevabı bulmaya çalıştıkları gözlenmiştir.

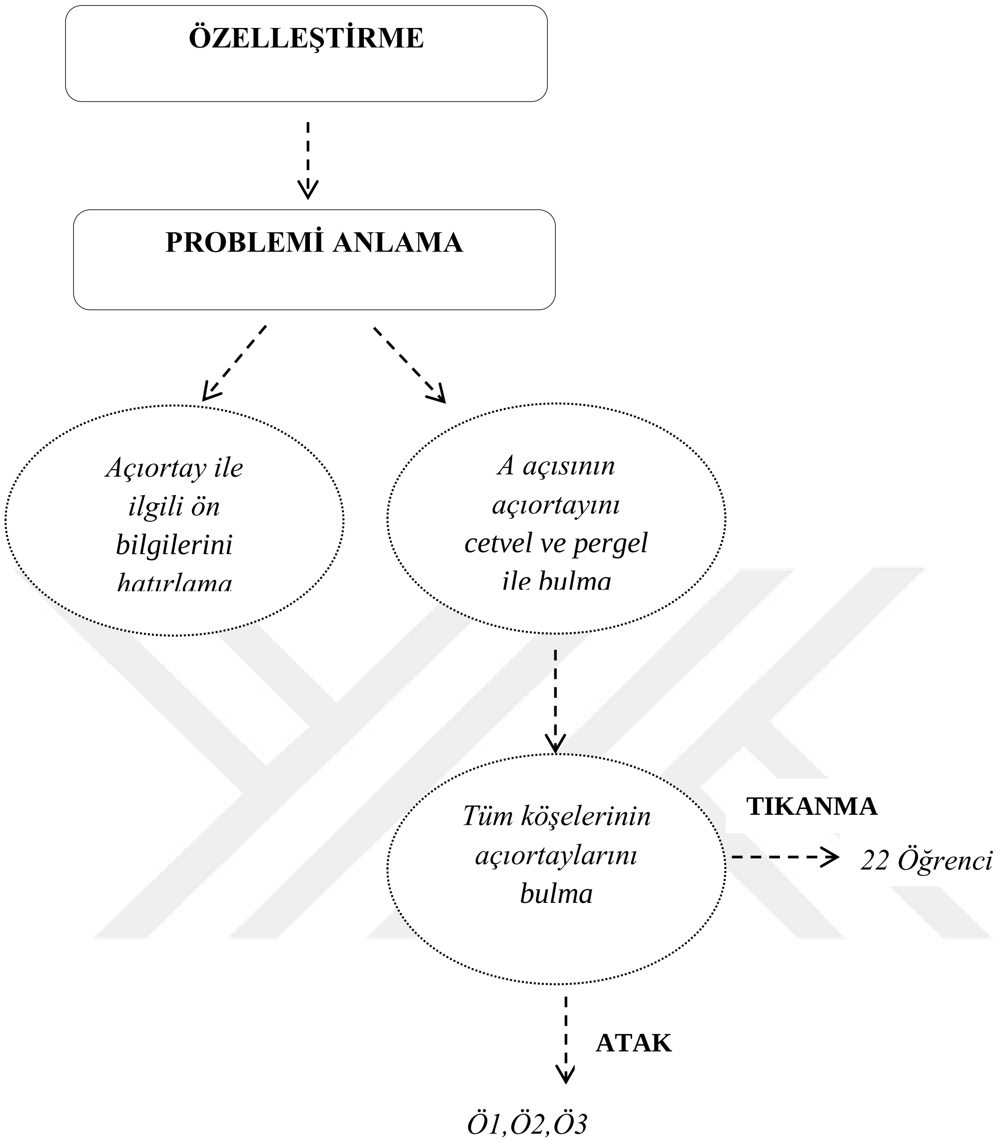

3) ölçüceğim köşenin karşı kenarı hariç yanındaki kanarlardan kısa olan kanarı, uzun kanara eşitlesip ikizkanar üçkan oluşturup karşı olan kanarın ortadan ikiye bölüp orta noktadan köşeye doğru bir doğru çizip açı ortayını bulurum.

Şekil 4.10: Öğrencini örnek cevabı.

Çalışma kağıdı dördüncü soru “pergel ve cetvel kullanarak A köşesinin açıortayını nasıl gösterirsiniz” şeklinde belirlenmiştir. Devamında öğrencilerden tüm köşelerinin açıortaylarının pergel ve cetvel yardımıyla gösterilmesi istenmiştir.

Özelleştirme Dördüncü Soru

Bu soruda Arslan ve Yıldız (2010)’ın ifade ettiği gibi çizme, bulma gibi eylemler söz konusu olduğundan bu soru özelleştirme aşamasında alınmıştır. Özelleştirme teması açıortay ile ilgili ön bilgilerin hatırlanması, pergel ve cetvel yardımıyla A köşesine ait açıortayı bulma, tüm köşelerinin açıortaylarını pergel ve cetvel yardımı ile bulma olarak üç alt tema altında incelenmiştir. Şekil 4.11’de gösterilmiştir.

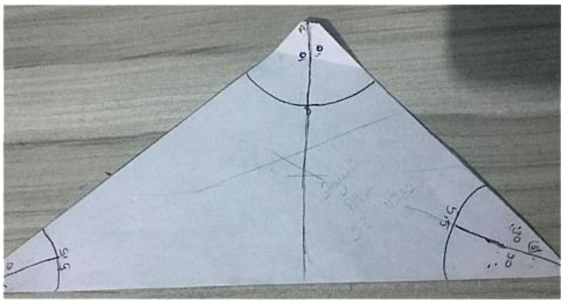


Şekil 4.11: Çalışma kağıdındaki dördünücü soruya ait özelleştirme aşaması.

Problemi Anlama Dördüncü Soru

Problemi anlama teması açıortay ile ilgili geçmiş yıllara ait ön bilgilerin hatırlanması, A açısının açıortayının pergel ve cetvel ile bulma ve üçgenin tüm köşelerinin açıortaylarını bulma şeklinde üç alt tema altında toplanmıştır. Pergel ve cetvel kullanılarak 22 öğrenci A köşesine pergeli koyarak bir yay çizimi yapmışlardır. Daha sonra bu yayın uzunluğunu cetvel ile ölçüp yayın orta noktasını işaretledikleri görülmüştür. Devamında öğrenciler bu orta nokta ile A köşesini birleştirmişlerdir. Şekil 4.12'de öğrenci yanıtlarının örneği gösterilmiştir.

...) Pergeli kullanarak a noktasından kalemin geleceği şekilde yarım daire yaptım e dairenin yarısında nokta çizip açıortayı çizdim yani bulduk



Şekil 4.12: Öğrencilerin cevaplarından örnekler.

Öğrencilerin yaptıkları çözümlerden kirişin orta noktasını merkeze birleştiren doğrunun dik olduğunu kullanmaya çalıştıkları yorumu yapılabilir. Dolayısıyla öğrencilerin yaptıkları çizimlerden ikizkenar üçgen ortaya çıkmaktadır. Ancak uygulama sırasında öğrenciler kirişi değil de cetvel ile yayın uzunluğunu ölçtüklerini ifade etmişlerdir. Üç öğrencinin (Ö11, Ö9, Ö17) ise üçgenin orta noktası göz kararı ile bularak A köşesinden bir yay çizdiklerini ve yayın orta noktasını da cetvelle bulup birleştirdikleri gözlenmiştir.

Uygulama esnasında yapılan gözlemlerden öğrencilerin yayın uzunluğunu cetvel ile ölçtükleri sonucuna varılmıştır. Bunun üzerine pergel ve cetvel kullanarak açıortayın bulunması konusunda araştırmacı tarafından öğrenciler bilgilendirilmiştir.

Pergel ve cetvel kullanarak açıortay bulma işlemlerinin adımları:

1)A açsının açıortayını bulmak için pergelin sivri ucunu A noktasına koyarak açının kollarını kesecek şekilde bir yay çizilir.

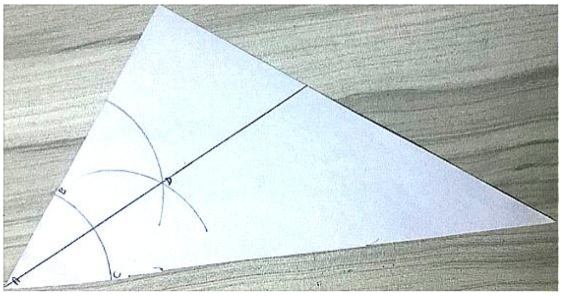
2)Açının kollarını kesen noktaları B ve C noktaları olarak adlandırılır.

3)Pergelin açıklığını bozmadan B merkezli bir yay çizilir.

4)Aynı işlem pergelin açıklığı bozulmadan C merkezli bir yay daha çizilerek devam edilir.

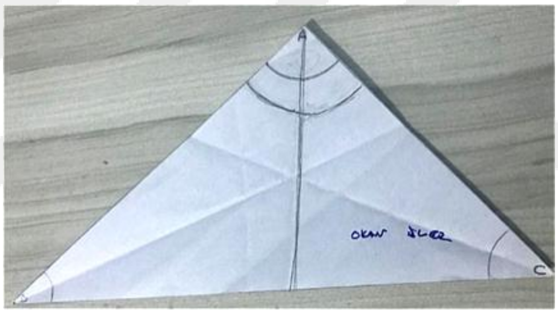
5)İki yayın kesiştiği noktaya D noktası olarak isimlendirilir.

6)A ve D noktalarını birleştiren ışın A açısını iki eş parçaya böler. Böylece A noktasına ait açıortay bulunur.



Şekil 4.13: Araştırmacının örnek cevabı.

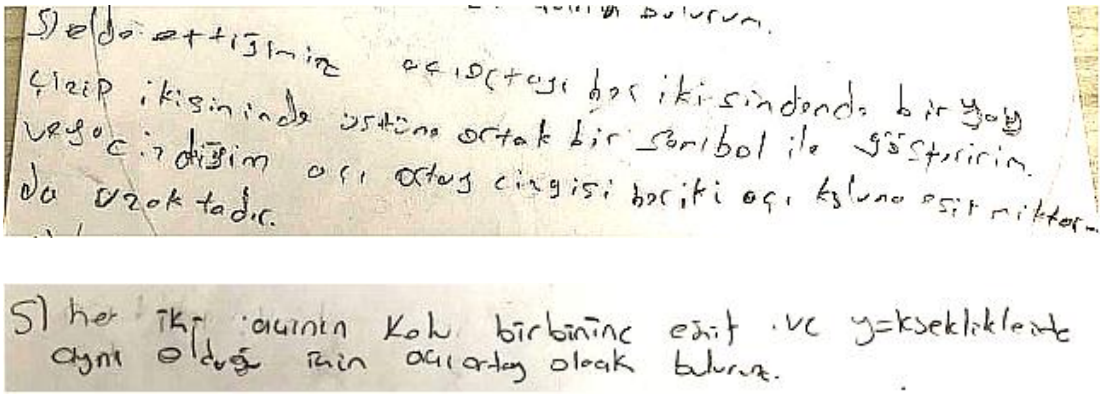
Şuana kadar yapılan işlemlerle çalışmanın 80 dakikalık kısmı bitmiştir. İkinci 80 dakikalık zaman içinde öğrencilerin dördüncü soruyu tekrar cevaplanması istenmiştir. Uygulama sonucunda sadece üç öğrencinin (Ö1,Ö2,Ö3) bir önceki ders yapılanları hatırlayıp doğru cevapladığı görülmüştür. Geri kalan 22 öğrenci A köşesine ait açıortayı çizerken iki farklı uzunlukta iki yay çizip yayların orta noktalarını cetvelle ölçüp A noktası ile birleştirdiği görülmüştür.



Şekil 4.14: Öğrencinin örnek cevabı.

4.2 İkinci Alt Probleme Ait Bulgular

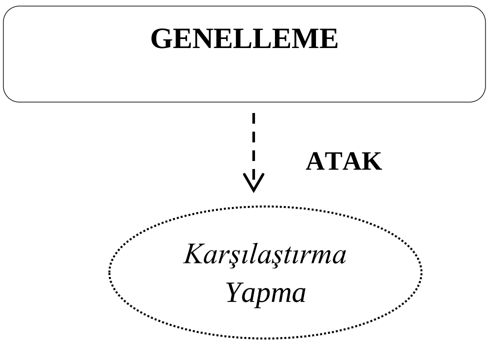
Çalışmanın ikinci alt problemi "Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerinin genelleme aşamasındaki davranışları nelerdir" olarak belirlenmiştir. Çalışma kağıdı beşinci soru "çalışma kağıdındaki ilk dört sorudaki verilenler göz önüne alınarak açıortay doğrusu üzerinde alınan herhangi bir noktanın açının kollarıyla uzaklığı konusunda neler söylenebileceği" şeklinde belirlenmiştir. Bunun için çalışma sırasında beş öğrencinin (Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö12) başarılı bir atak süreciyle açının kollarıyla arasındaki mesafenin eşit olduğunu ifade etmişlerdir. Mesafeyi tanımlarken öğrencileri en kısa uzaklığın yükseklik olduğu konusunda yönlendirilme yapılmıştır. Bunu yaparken de en kısa uzaklık tanımlanırken üçgenin hangi yardımcı elemanı kullanılır, en kısa uzaklık nasıl bulunabilir şeklinde sorular sorulmuştur. Şekil 4.15’de öğrencilerin örnek cevapları verilmiştir.



Şekil 4.15: Öğrencilerin cevaplarından örnekler.

Bazı öğrenciler genelleme aşamasında, açıortay doğrusunun kollarıyla eşit mesafede olduğunu ifade etme davranışını göstermemiş olsalar da açıortay konusunu sekizinci sınıftaki bilgilerinden hatırlayarak açıortay doğrusu üzerinde alınan herhangi bir noktanın kollarıyla eşit mesafede olduğunu hatırladıklarını ifade etmişlerdir. Nitekim (MEB, 2018b) ilköğretim matematik öğretim programında “Üçgende kenarortay, açıortay ve yüksekliği inşa eder” kazanımı verilmektedir.

Yapılan odak grup görüşmesi yapmak için de üç öğrencinin karşılaştırma yapmaları yöntem kısmında belirtilmişti.



Şekil 4.16: Karşılaştırma alt teması.

Uygulama bittikten ve açıortay konusu anlatılmaya başlandıktan sonra Ö1, Ö2 ve Ö3 ile yapılan odak grup görüşmesinde ilk dört soruyla ilgili aşağıdaki açıklama geçmiştir. Birebir görüşme için üç öğrenci yukarıda da belirtildiği gibi pergel ve cetveli doğru bir şekilde kullanarak çizim yaptıklarında dolayı seçilmiştir.

Görüşmeci (G): Sizce uygulama sırasında yapılan açıortay bulma işlemlerinden en doğru sonucu nasıl bulduk? Kağıdı katlayarak mı, Açıölçer ile mi, sadece cetvel kullanarak mı yoksa pergel ve cetvel kullanarak mı?

Ö1, Ö2, Ö3: Pergel ve cetvel kullanarak.

Ö1: Açıölçer de olur. Sadece cetvel kullanarak da yapabilirim.

G:Sadece cetvel kullanarak doğru sonuca nasıl ulaşırsınız?

Ö1: Evet, yapardım. İkizkenar yapmaya çalışarak.

G:Peki ikizkenar ile nasıl yaparsın?

Ö1: Herhangi bir üçgende bir kenarı ölçerdim. Örneğin 6cm oldu yanındaki kenardan da 6cm çizerdim. Daha sonra bu iki noktayı birleştirirdim ve birleştirdiğim yeri cetvelle ölçüp orta noktasını bulurdum. Bunu da A köşesiyle birleştirirdim.

G:Şuan açıyı değil de kenarı iki eşit parçaya bölmüş oldun. Bunu başka nasıl ifade edebilirsiniz?

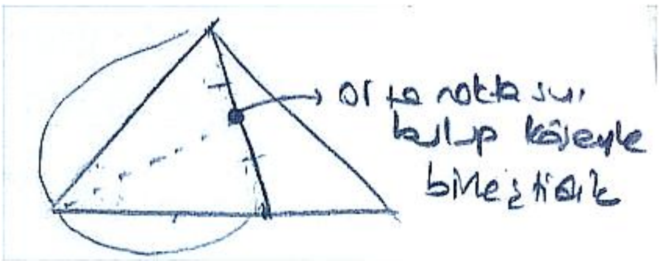
Ö1: Süper üçlü olmaz mıydı?

G:Süperüçlüyü tepe açısı 90 derece olduğunda kullanıyorduk.

Ö1: Imm.

G: Sadece cetvel kullanarak yapmış olduğun çizim hakkında başka neler söyleyebilirsiniz?

Ö1: Bilmiyorum.



Şekil 4.17: Öğrencinin örnek cevabı.

Üç öğrenciyle yapılan yukarıdaki odak grup görüşmesinde amaç öğrencilerin karşılaştırma yapmasını sağlayarak gösterilen davranışları genelleme teması altında ayrıntısıyla incelemektir.

Karşılaştırma Yapma İlk Dört Soru

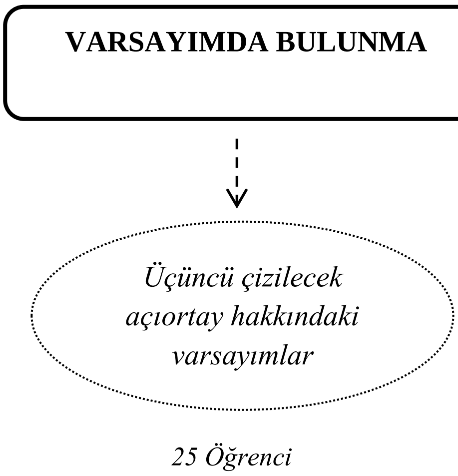
Karşılaştırma yapma alt teması altında pergel ve cetveli doğru kullanan Ö1, Ö2, Ö3 ün ilk dört soruyla ilgili açıortay bulurken en doğru sonucu nasıl bulunacağı ile ilgili karşılaştırma yapmaları istenmiştir. Ö1, Ö2 ve Ö3 açıortay bulunurken atak süreciyle en doğru sonucun pergel ve cetvel kullanarak, açıölçer ile bulunacağı konusunda hem fikir olduklarını söylemiştir. Ö1 buna ek olarak bir atak süreci daha geçirerek yalnızca cetvel kullanılarak da bulunabileceği konusunda fikrini söylemiştir.

4.3 Üçüncü Alt Probleme Ait Bulgular

Çalışmanın üçüncü alt problemi "Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerinin varsayımda bulunma aşamasındaki davranışları nelerdir" olarak belirlenmiştir. Çalışma kağıdındaki altıncı soru varsayımda bulunma aşamasında inceleneceği yöntem kısmında belirtilmiştir. Çalışma kağıdı altıncı soruda öğrencilere dördüncü olarak verilen üçgen kağıtta öncelikle herhangi iki köşeye ait açıortay çizip, üçgendeki diğer köşeden çizilen açıortaylarla ilgili neler söylenebileceği sorulmuştur.

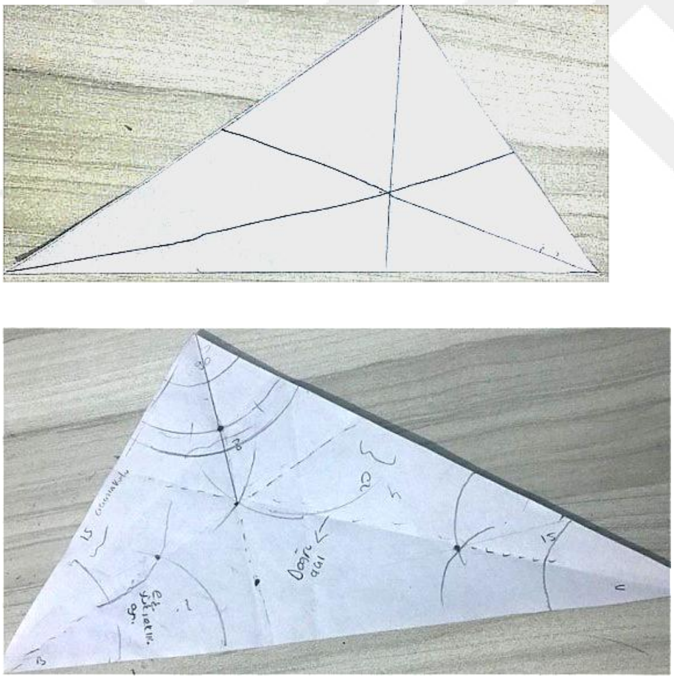
Varsayımda Bulunma Altıncı Soru

Güncel Türkçe Sözlük'e göre varsayım doğruluğu henüz ispatlanmamış, doğru olduğu düşünülen bir hipotezdir (TDK,2019). Varsayımda bulunma teması üçüncü çizilecek açıortay hakkındaki varsayımlar alt teması altında incelenmiştir. Öğrencilerin tamamı çalışma kağıdındaki ilk dört sorudan hareketle soruyu cevaplamıştır. Öğrencilerin cevapları incelendiğinde öğrencilerin tamamı üçgende üç iç açıortayın tek noktada kesiştiklerine ulaştıklarını belirtmişlerdir. Bazı öğrenciler de 8. Sınıf bilgilerinden üçgende iç açıortayların tek noktada kesiştiğini hatırladıklarını ifade etmişlerdir. Öğrenciler çoğunlukla tüm köşelere ait açıortayı gösterirken kağıdı katlayarak bulma, sadece cetvel kullanarak açıortayları bulma yoluna gitmiştir. Pergel ve cetvel kullanarak üçgende açıortayları bulma yolunu öğrenciler en az tercih etmiştir.



Şekil 4.18: Çalışma kağıdındaki altıncı sorunun varsayımda bulunma aşaması.

Şekil 4.19’da öğrencilerin örnek cevapları verilmiştir.



Şekil 4.19: Öğrencilerin cevaplarından örnekler.

Ö1, Ö2 ve Ö3 ile yapılan odak grup görüşmesinde öğrencilerden çizilebilecek üçünü açıortaya ait farklı varsayımlar atması beklendiğinden dolayı aşağıdaki bu üç öğrenciyle aşağıdaki diyalog geçmiştir.

G: A,B ve C noktalarından çizilen açıortaylar ile ilgili neler söyleyebilirsiniz?

Ö3: Üç açıortayın tek noktada kesiştiğini buldum.

G:Başka neler söyleyebilirsiniz?

Ö2: Yaylar eşit.

G: Peki Ö2, çeşitkenar üçgenin tüm açılarının ölçüleri farklı mıdır?

Ö2: Evet.

G:Öyleyse geçmiş yıllardaki bilgilerimizi hatırlayacak olursak; merkez açıları farklı olan çemberlerin de gördüğü yayların uzunlukları farklı mıdır? Örneğin merkez açısı 30 derece olan yayın uzunluğu ile 60 dereceyi gören yayın uzunluğu aynı mıdır?

Ö2: Aynı değil.

G: Öyleyse herhangi bir üçgende yayların ölçülerini aynı diyebilir miyiz?

Ö2: Hayır.

4.4 Dördüncü Alt Probleme Ait Bulgular

Çalışmanın dördüncü alt problemi "Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerinin doğrulama ve ikna etme aşamasındaki davranışları nelerdir" olarak belirlenmiştir. Yapılan bu çalışmada hazırlanan çalışma kağıdındaki yedinci soru doğrulama ve ikna aşamasında incelenmiştir.

Çalışma kağıdı yedinci soruda "Altıncı soruda ifade ettiğiniz bilgiyi ispatlayabilir misiniz" şeklinde belirtilmiştir.

Doğrulama ve İkna Etme Yedinci Soru

Baki (2018)'ye göre kanıtlamanın amacı ortaya atılan iddianın ya da varsayımın doğruluğunu veya yanlışlığını her koşulda herkesin kabul edebileceği bir şekilde göstermektir. Çalışma kağıdı yedinci soruda öğrencilerden altıncı soruda ortaya attıkları varsayımları kanıtlamaları beklenmiştir. Ancak çalışma kağıtları incelendiğinde hiçbir öğrencinin üçgende üç açıortayın tek noktada kesiştiğini ya da ulaştıkları genellemelerin kanıtlanamadığı görülmüştür. Bunun üzerine seçilen üç öğrenciyle odak görüşmesi yapılmıştır. Öğrencilerin birbiriyle etkileşim içinde olurlarsa kanıtlamalar yapabileceği düşünülmüştür. Bunun üzerine aşağıdaki diyalog geçmiştir.

G:Peki, en kısa uzaklık derken neyi ifade ederiz?

Ö1: Merkezden 90 derece ile inmesi.

Ö2: Yükseklik, H.

G:Dikme diyebilir miyiz?

Ö1, Ö2, Ö3: Evet.

Ö2, Ö3: Dikmelerin uzunlukları eşittir.

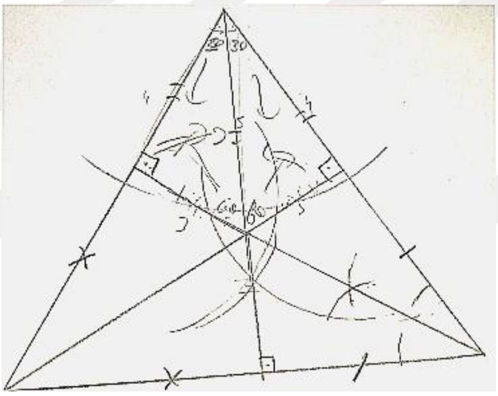
G:Dikmelerin eşit olduğunu nasıl kanıtlayabiliriz?

Ö2: Görsele bakarak anlayabiliriz.

Ö1: Aynı noktadan açının kollarına geldiğinde eşit olur. Kural vardır. Uçurtma şeklini yapmaya çalışmıştık.

G:Geçmiş yıllarda gördüğünüz konuları hatırlamaya çalışın.

Ö1: Aynı kenarı görüyor. Tepe açısını 30-30 ayırdım. 60 oldu daha sonra.



Şekil 4.20: Öğrencinin örnek cevabı.

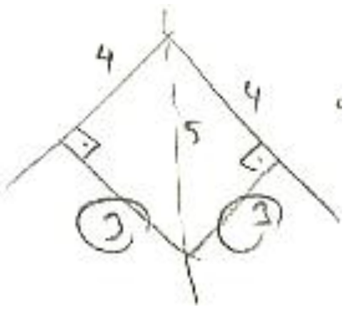
Ö1: En uzun kenar 90'ın karşısı, sonra 60'ın, sonra 30'un.

G:Burdan nasıl bir sonuca varıyoruz?

Ö1:Imm..

Ö2:Bir açıortay çizerek iki tane üçgen oluşur. İkisinde her şey aynı.

Ö1: Eşit olduğunu böyle de düşünebiliriz.



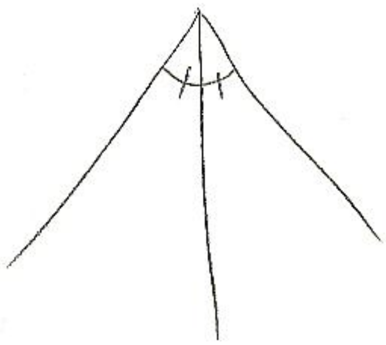
Şekil 4.21: Öğrencinin örnek cevabı.

G:Eşit olduğunu nasıl kanıtlarız?

Ö1: Kuraldan.

G:Peki başka fikri olan var mı?

Ö3: Bence açılardan dolayı.



Şekil 4.22: Öğrencinin örnek cevabı.

5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu bölümde araştırmadan ortaya çıkan sonuçlara, elde edilen sonuçların ilgili araştırmalar ile tartışılmasına, uygulamaya ve ilerde yapılabilecek araştırmalara yönelik önerilere yer verilmiştir.

5.1 Birinci Alt Probleme Yönelik Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Çalışmanın birinci alt problemi "Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerinin özelleştirme aşamasındaki davranışları nelerdir " olarak belirlenmiştir. Bu bölümde birinci alt problemden elde edilen sonuçlar ilgili araştırmalarla tartışılacaktır. Çalışma kağıdındaki özelleştirmeye ait sorular incelendiğinde öğrencilerin özelleştirme aşamasındaki soruları kolaylıkla yaptıkları görülmüştür. Bu durum Arslan ve Yıldız (2010), Keskin ve diğerleri (2013), Yıldırım (2015), Yıldız (2016), Yıldırım ve Yavuzsoy Köse (2018), Yağdıran (2018), Kükey (2018) ve Mert Uyangör (2019)'ün çalışmalarıyla uyum içindedir. Özelleştirme aşamasındaki soruları öğrencilerin kolaylıkla yapmasının nedeni; eğitim kademelemelerinde işlemsel beceri gerektiren sorulara daha fazla yer verildiğinden kaynaklanabilir (Arslan ve Yıldız, 2010; Keskin ve diğerleri 2013; Yıldız, 2016). Çalışma kağıdı birinci soruda öğrencilerin açıortayı kağıt ile katlayarak ve üçüncü soruda öğrencilerin cetvel yardımıyla açıortayı bulma sorularının kolaylıkla kısa bir süre içinde yapıldıkları görülmüştür. Yani öğrencilerin aşina olduğu özelleştirme sorularını kısa bir süre içinde yapmıştır. Bu durum Arslan ve Yıldız (2010) ve Arslan (2016) çalışmalarıyla uyumludur. Yıldırım ve Yavuzsoy Köse (2018) çalışmasında öğrencilerin özelleştirme aşamasının problemi anlama temasında aşina olmadıkları soruları çözerken zorlandıklarını ifade etmiştir. Yapılan araştırmada da öğrencilerin açıölçer ile açıortay çizimi ve cetvel ve pergel kullanarak açıortay çizimlerinde zorlandıkları görülmüştür. Zorlanmalarının nedeni bu tarz alıştırmalara derslerde yer verilmemesi olabilir (Ulusoy, 2019). Bunun için öğretmenler ilköğretim matematik öğretim programda (MEB, 2018b) yer aldığı gibi geometrik çizim araçlarını derslerinde kullanabilir. Teknolojik olarak da uygunsa okul koşulları dinamik yazılımlar sayesinde çizim araçlarını da kullanarak dersler etkili hale getirilebilir. Nitekim Ulusoy (2019)'un çalışmasında öğretmen adayları pergel ve cetvel kullanarak yaptıkları çizimleri GeoGebra ile doğruladıklarını belirtmiştir. Böylelikle öğretmenler öğrencilerin matematiksel düşünmelerini geliştirmek için farklı öğrenme ortamları tasarlayabilir. Bu şekilde öğrencilerin derse olan ilgisi artabilir. Dolayısıyla matematik başarısı artacaktır.

Ayrıca Duatepe Paksu (2016) kağıt katlayarak yapılan uygulamaların ekonomik ve kolay olduğunu belirtmiştir. Bu şekilde yapılan uygulamalar anlamlı öğrenmeye katkı sağlamaktadır. Ural (2015)'a göre materyal kullanımı ile öğrencilerin bilgiyi kendilerinin yapılandırıp keşfetmesine olumlu katkı sağladığından dolayı öğrenci merkezli bir öğrenme ortamı oluşması için gereklidir. Böylelikle ortaöğretim matematik programının (MEB, 2018a) da amaçladığı materyal destekli öğrenme ortamları oluşacaktır. Yapılan araştırmalar da materyal kullanmanın öğrencinin gelişimi açısından olumlu bir etkiye sahip olduğunu göstermektedir (İnan, 2006; Kılıç ve diğerleri, 2013; Kutluca ve Akın, 2013; Yağdıran, 2018). Bu çalışmada da göstermiştir ki öğretmenler öğretim materyalleri derslerinde kullanmaları iyi olabilir. Böylelikle öğrenciler için zengin öğrenme ortamları oluşacak ve öğrenilen bilgilerin kalıcılığı artacaktır.

Çalışma kağıdı ikinci, üçüncü ve dördüncü sorulara bakıldığında öğrencilerin çoğunluğunun geçmiş yıllardan tanışıklığı olması (MEB, 2018a; MEB, 2018b) beklenen geometri çizim aletlerini doğru bir şekilde kullanamadıkları görülmüştür. Ayrıca çalışma kağıdı ikinci soruyu cevaplarken öğrencilerin açı ve uzunluk kavramlarının birbirine karıştırarak tıkanma süreci yaşadıkları görülmüştür. Ay ve Başbay (2017)'ın çalışmasında öğrencilerin üçgenin çevre uzunluğunu bulmaya çalışırken açılarla kenar uzunluklarını topladığı görülmüştür. Bunun üzerine öğrencilere açıölçer en işe yarar, nasıl tutulur, bir açı açıölçer ile nasıl ölçülür konusunda öğrencilere gerekli bilgilendirme yapıldıktan sonra çalışmaya devam edilmiştir. Daha sonra da öğrenciler üçgenin bir açısının ölçüsünü ölçüp açıyı ikiye bölerek açıortayını bulmuştur. Bunun için öğrencilerin gelişimini desteklemek öğrenme ortamlarını zenginleştirmek için derslerde çizim araçlarını kullanarak farklı uygulamalar yaptırılabilir. Böylelikle öğrenciler geometrik çizim araçlarını tanıma fırsatı bulacaklardır.

Çalışma kağıdındakai üçüncü soru sadece cetvel kullanarak açıortay çizimi istenmiştir. Öğrencilerin bu soruyu en hızlı ve kolay bir şekilde yaptıkları gözlenmiştir. Ayrıca dört öğrencinin atak süreciyle cetvel ile açıortayı bulurken ikizkenar üçgen yapmaya çalışarak açıortayı buldukları görülmüştür. Diğer öğrenciler cetvel ile açıortayı bulurken göz kararı ile yaptıklarını ifade etmiştir.

Çalışma kağıdı dördüncü soruda pergel ve cetvel kullanarak açıortay çiziminde öğrencilerin özelleştirme aşamasında en çok zorlandıkları soru olmuştur. Bu durum Karakuş (2014)'un çalışmasında öğretmen adaylarının pergel ve ölçüsüz cetvel çiziminde zorlanmasıyla uyum içindedir. Öğrencilerden doğru cevap gelmeyince araştırmacı tarafından gerekli bilgilendirmeler yapılmıştır. Öğrencilere gerekli açıklama yapıldıktan sonra uygulamanın ilk 80 dakikalık kısmı bitmiştir. İkinci 80 dakikalık zaman diliminde öğrencilerden dördüncü sorunun tekrar cevaplanması istenildiğinde doğru cevabı verebilen sadece üç öğrenci olmuştur. Geriye kalan 22 öğrenci bir önceki derste işlenenleri hatırlamaya çalışarak üçgenin bir köşesine herhangi bir yarıçapta bir yay çizmişlerdir. Daha sonra bu yayın uzunluğunun cetvelle ölçmeye çalışmıştır. Öğrencilerin yaptıkları çözümlerden kirişin orta noktasını merkeze birleştiren doğrunun dik olduğunu kullanmaya çalıştıkları yorumu yapılabilir. Dolayısıyla öğrencilerin yaptıkları çizimlerden ikizkenar üçgen ortaya çıkmaktadır. Ancak uygulama sırasında öğrenciler kirişi değil de cetvel ile yayın uzunluğunu ölçtüklerini ifade etmişlerdir. Çalışma kağıdı dördüncü soruyu üç kişi ayrıca üçgenin orta noktasını göz kararı ile bulup, üçgenin bir köşesinden bir yay çizip orta noktayla birleştirmiştir. Gür ve Kobak Demir (2017) çalışmasında da pergel ve cetvel kullanılarak yapılan çizimlerin öğretmen adaylarında geometrik düşünme düzeylerine ve matematiğe karşı tutumlarını olumlu etkilediği sonucuna ulaşmıştır. Dolayısıyla öğretmenler öğretim programında da yer verilen kazanımlarda pergel ve cetvel kullanımına yer vererek derslerini planlayabilir. Böylece matematik derslerindeki pergel ve cetvel kullanımıyla öğrenciler iç içe olurlar. Bunun yanında geometrik çizim araçları sayesinde psikomotor becerileri de gelişebilir.

5.2 İkinci Alt Probleme Yönelik Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Çalışmanın ikinci alt problemi "Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerinin genelleme aşamasındaki davranışları nelerdir" olarak belirlenmiştir. Çalışma kağıdındaki beşinci soru genelleme aşamasında incelenmiştir. Çalışma kağıdındaki ilk dört sorudaki verilenler göz önüne alınarak açıortay doğrusu üzerinde alınan herhangi bir noktanın açının kollarıyla uzaklığı konusunda neler söylenebileceği sorulmuştu. Çalışma sırasında beş öğrencinin (Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö12) başarılı bir atak süreciyle açının kollarıyla arasındaki mesafenin eşit olduğunu ifade etmişlerdir. Çalışma sırasında öğrencilerin bazıları açıortay doğrusu üzerinde alınan herhangi bir noktadan açının kollarına inen dikmelerin eşit olduğunu daha önceki öğrenmelerinden hatırladıklarını ifade etmişlerdir. Bu yüzden öğrencilerin genelleme aşamasında başarılı oldukları söylenebilir. Bu durum Yıldız (2016) ve Mert Uyangör (2019) çalışmasıyla uyumludur. Ayrıca genelleme aşamasında incelenen odak grup görüşmesinde seçilen üç öğrenci karşılaştırma yaparak genellemeye ulaşmıştır. Üç öğrencinin yanıtlarından açıortayı bulurken en doğru sonucun açıölçer ve pergel ve cetvel kullanmaları yönünden olmuştur Ö2 ise başarılı bir atak yaparak cetvel kullanarak açıortayı bulurken ikizkenar üçgenden yararlandığı görülmüştür. Öğrencilerin yanıtları incelendiğinde öğrencilerinin hepsinin sözel olarak ifadelerde bulundukları gözlenmiştir. Bu durum Arslan ve Yıldız (2010), Keskin ve diğerleri (2013), Yıldırım (2015), Yağdıran (2018), Yıldırım ve Yavuzsoy Köse (2018) çalışmaları ile uyum içindedir. Mert Uyangör (2019) ve Yıldız (2016) çalışmasında ise öğrencilerin matematiksel ve sözel olarak genellemelerde bulundukları gözlenmiştir. Bu çalışmada elde edilen sonuçlarla tutarlıdır.

5.3 Üçüncü Alt Probleme Yönelik Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Çalışmanın üçüncü alt problemi "Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerinin varsayımda bulunma aşamasındaki davranışları nelerdir" olarak belirlenmiştir. Çalışma kağıdındaki altıncı soru varsayımda bulunma aşamasında incelenmiştir. Çalışma kağıdı altıncı soruda öğrencilere dördüncü olarak verilen üçgen kağıtta öncelikle herhangi iki köşeye ait açıortay çizip, üçgendeki diğer köşeden çizilen açıortaylarla ilgili neler söylenebileceği sorulmuştur.

Öğrencilerin tamamı çalışma kağıdındaki ilk dört sorudan hareketle üçgende tüm köşelere ait açıortayların tek noktada kesiştiği varsayımına ulaştıkları görülmüştür. Öğrenciler ulaştıkları varsayımları sözel olarak ifade etmiştir. Arslan ve Yıldız (2010), Keskin Akbaba Dağ (2013), Yağdıran (2018) ve Mert Uyangör (2019) çalışmalarıyla örtüşmektedir. Bu durum Yıldız (2016) çalışmasındaki eğitim fakültesi öğretmen adaylarıyla uyum içindedir. Yıldız (2016) ve Mert Uyangör (2019) çalışmasında öğrencilerin matematiksel olarak varsayımlar bulundukları da görülmektedir. Çalışma sonunda öğrencilerin genelleme ve varsayımda bulunma aşamalarında eşit sayıda başarılı olduğu söylenebilir. Bu durum Arslan ve Yıldız (2010), Keskin ve diğerleri (2013), Yağdıran (2018), Tosun ve Uyangör (2018), Yıldız (2016) çalışmalarından farklılaşmaktadır. Çünkü yapılan araştırmalarda genelleme aşamasından varsayımda bulunma aşamasında geçildiğinde başarının düştüğü görülmektedir.

5.4 Dördüncü Alt Probleme Yönelik Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Çalışmanın dördüncü alt problemi "Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerinin doğrulama ve ikna etme aşamasındaki davranışları nelerdir" olarak belirlenmiştir. Yapılan bu çalışmada hazırlanan çalışma kağıdındaki yedinci soru doğrulama ve ikna etme aşamasında incelenmişti. Ancak yapılan incelemeler sonucunda öğrencilerin ortaya attıkları varsayımları ve genellemeleri ispatlayamadıkları görülmüştür. Uygulamadan seçilen üç öğrenciyle yapılan görüşmelerden herhangi bir sonuç elde edilememiştir.

Yapılan uygulama sonucunda öğrencilerin özelleştirme aşamasından doğrulama ve ikna etme aşamasında gidildikçe öğrencilerin başarılarının düştüğü görülmüştür. Bu durum literatürde Arslan ve Yıldız (2010), Uğurel ve Moralı (2010), Keskin ve diğerleri (2013), Yıldız (2016), Yağdıran (2018), Mert Uyangör (2019) çalışmalarıyla uyum içindedir.

Gökkurt ve Soylu (2012)'nun çalışmasında da fen bilgisi ve matematik öğretmenliğinde okuyan öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşlerinin yeterli düzeyde olmadığı ve ispat yapmayı gereksiz buldukları yönünde sonuçlar çıkmıştır. Öğretmen adaylarının çoğu bir problemde birkaç örnek vermenin o problemin doğruluğunu göstermek için yeterli olduğunu düşünüyorlardır. Bunun için öğretmenlerin derslerde özellikle geometri alanında bir formülün ya da kuralın nereden göstermesi öğrencilerin daha iyi anlamlandırmalarına katkı sağlayacaktır. Böylelikle öğrenciler bir kuralı ezberlememiş olacaklar ve kuralın nereden geldiğini gördüklerinden dolayı kendileri daha sonra kuralı hatırlamamış olsalar bile oluşturabilecektir. Bu yüzden matematik derslerinde ispata önem verilmelidir.

6. KAYNAKLAR

Alkan, H. ve Bukova Güzel, E. (2005). Öğretmen Adaylarında Matematiksel Düşünmenin Gelişimi. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 25(3). 221-236.

Alkan, H. ve Tataroğlu Taşdan, B. (2011). Farklı Sınıf Düzeylerindeki Matematik Öğretmen Adaylarının Gözünden Matematiksel Düşünme. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 12(2), 107-137.

Alkın Şahin, S. ve Tunca, N. (2013). Düşünme Becerileri, Düşünmeyi Destekleyen Sınıf Ortamı ve Öğretmen Davranışları. (Eds: G. Ekici ve M. Güven), *Öğrenme-Öğretme Yaklaşımları ve Uygulama Örnekleri*, Ankara: Pegem Akademi.

Altıparmak, K. ve Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi*, 6(1), 25-37.

Altun, M. (2006). Matematik Öğretiminde Gelişmeler. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi,* 19(2), 223-238.

Altun, M. (2015). *Liselerde Matematik Öğretimi.* İstanbul: Alfa Yayınları.

Altun, H. (2018). Lise Öğrencilerinin Geometri Ders Başarılarının Van Hiele Geometrik Düşünme Düzeylerine Göre İncelenmesi. *Electronic Turkish Studies*, 13(11), 157-168.

Anıkaydın, Ö. (2017). Öğrencilerin Geometriye Yönelik Öz Yeterlik Algıları, Geometri Tutumları ve Geometrik Düşünme Düzeyleri Arasındaki İlişkinin İncelenmesi. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, *Adnan Menderes Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü,* Eğitim Bilimleri Anabilim Dalı, Aydın.

Arslan, S. ve Yıldız, C. (2010). 11. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünmenin Aşamalarındaki Yaşantılarından Yansımalar. *Eğitim ve Bilim*, 35(156).

Ay, Y. ve Başbay, A. (2017). Çokgenlerle İlgili Kavram Yanılgıları ve Olası Nedenler. *Ege Eğitim Dergisi*, 18(1), 83-104.

Ayllón, M. F., Gomez, I. A., ve Ballesta-Claver, J. (2016). Mathematical thinking and creativity through mathematical problem posing and solving. *Propósitos y Representaciones*, 4(1), 169-218.

Aykar, A. (2019). Okul Öncesi Öğretmenlerinin Yansıtıcı Düşünmeleri ve Öğretim Uygulamalarındaki Gelişiminin İncelenmesi. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, *Çanakkale On Sekiz Mart Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü*, Temel Eğitim Anabilim Dalı, Çanakkale.

Baki, A. (2018). *Matematiği öğretme bilgisi*. Ankara: Pegem Akademi.

Baş'er, N. (1996). Ders Geçme ve Kredi Sisteminde Lise Öğrencileri İçin Bir Matematik Başarı Testi Tasarımı ve Uygulanabilirliğinin Araştırılması. Yayımlanmamış Doktora Tezi, *Dokuz Eylül Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü*, Eğitim Bilimleri Anabilim dalı, İzmir.

Bekdemir, M. (2012). Öğretmen adaylarının çember ve daire konularında kavram ve işlem bilgilerinin değerlendirilmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 43, 83-95.

Bozkurt, A. ve Koç, Y. (2012) Investigating First Year Elementary Mathematics Teacher Education Students' Knowledge of Prism. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 12(4), 2949-2952.

Bulut, M. (2009). İşbirliğine Dayalı Yapılandırmacı Öğrenme Ortamlarında Kullanılan Bilgisayar Cebir Sistemlerinin Matematiksel Düşünme, Öğrenci Başarısına ve Tutumuna Etkisi. Yayımlanmamış Doktora Tezi, *Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü,* Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı, Ankara.

Bukova Güzel, E. (2008). Yapılandırmacı Öğrenme Yaklaşımının Matematik Öğretmen Adaylarının Matematiksel Düşünme Süreçlerine Olan Etkisi. *E Journal Of New World Sciences Academy,*3(4), 678-688.

Cai, J. (2000). Mathematical Thinking Involved in U.S. and Chinese Students' Solving of Process-Constrained and Process-Open Problems. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(4), 309–340.

Coşkun, S. (2012). Üst Düzey Matematiksel Düşünme Süreçlerinin Sorgulayıcı Problem Çözme ve Öğrenme Modeline Göre Tasarlanmış Çalışma Yaprakları Yardımıyla İncelenmesi. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, *Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü,* Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı, Konya.

Cüceloğlu, D. (2002). *Keşke'siz Bir Yaşam İçin İletişim Donanımları*. İstanbul: Remzi Kitabevi.

Çadırlı, G., (2017). Ortaokul Öğrencilerinin Geometri Öz yeterlik İnançlarının ve Geometrik Düşünme Becerilerinin İncelenmesi. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, *Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü,* Eğitim Bilimleri Anabilim Dalı, Kahramanmaraş.

Çelik, D. (2016). Matematiksel düşünme. (eds: E. Bingölbali, Arslan, S. ve Zembat, İ. Ö.), *Matematik eğitiminde teoriler*, Ankara: Pegem Akademi.

Dahl, K. (2009). *Matematiğin Anlamı*. (Çev. M. Özsoy), İstanbul: İş Bankası Kültür Yayınları.

Demirtaş, B. (2018). Sınıf Öğretmenlerinin Yaratıcılık Fenomenine Duyarlılığı ile Matematiksel Düşünme Becerileri Arasındaki İlişki. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, *İstanbul Üniversitesi Cerrahpaşa Lisansüstü Eğitim Enstitüsü*, Temel Eğitim Anabilim Dalı Sınıf Eğitim Programı, İstanbul.

Devlin, K. (2012). *Introduction to Mathematical Thinking*. Palo Alto: Publisher: Keith Devlin.

Dilekli, Y. (2015). Öğretmenlerin Düşünmeyi Öğretmeye Yönelik Yaptıkları Sınıf İçi Uygulamalar, Özyeterlik Düzeyleri Ve Öğretim Stilleri Arasındaki İlişki. Yayımlanmamış Doktora Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü*, Eğitim Bilimleri Anabilim Dalı, Balıkesir.

Doğan, N. (2019). Yaratıcı düşünme ve yaratıcılık. (ed: Ö. Demirel), *Eğitimde yeni yönelimler*, Ankara: Pegem Akademi, 167-198.

Duatepe-Paksu, A. (2016). Kağıt Katlama Yöntemiyle Dörtgenlerin İncelenmesi. *Araştırma Temelli Etkinlik Dergisi (ATED)*, 6(2), 80-88.

Duran, N. (2005). Matematiksel Düşünme Becerilerine İlişkin Bir Araştırma. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü*, Eğitim Bilimleri Anabilim Dalı, Ankara.

Ersoy, E. ve Güner, P. (2014). Matematik Öğretimi ve Matematiksel Düşünme. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 3(2), 102-112.

Ersoy, E. ve Başer, N. (2013). Matematiksel düşünme ölçeğinin geliştirilmesi. *Kastamonu eğitim dergisi,* 21(4), 1471-1486.

Fidan, Y. (2009). İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Geometrik Düşünme Düzeyleri ve Buluş Yoluyla Geometri Öğretiminin Öğrencilerin Geometrik Düşünme Düzeylerine Etkisi. Yayımlanmamış Doktora Tezi, *Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü*, İlköğretim Anabilim Dalı, İzmir.

Fidan, Y. ve Türnüklü, E. (2010). İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Geometrik Düşünme Düzeylerinin Bazı Değişkenler Açısından İncelenmesi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 27, 185-197.

Gözen, Ş. (2001). *Matematik ve öğretimi.* İstanbul: Evrim Yayınevi.

Gökkurt, B. ve Soylu, Y. (2012). Üniversite Öğrencilerinin Matematiksel İspat Yapmaya Yönelik Görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 1(4), 56-64.

Güney, E. (2018). Ortaöğretim 9. Sınıf Üçgenler Konusunda Origami Yardımıyla Düzenlenen Etkinliklerin Van Hiele Geoemtrik Düşünme Düzeylerine Etkisi. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, *Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü*, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı, Van.

Gür, H. ve Kobak Demir, M. (2017). The Effect of Basic Geometric Drawings Using A Compass-Ruler on The Geometric Thinking Levels and Attitudes of The Pre-Service Teachers (Pergel-Cetvel Kullanarak Temel Geometrik Çizimlerin Öğretmen Adaylarının Geometrik Düşünme Düzeylerine ve Tutumlarına Etkisi. *Eğitimde Kuram ve Uygulama*, 13(1), 88-110.

Hacısalihoğlu, H. H., Mirasyedioğlu, Ş. ve Akpınar, A. (2003). *İlköğretim 1-5 Matematik öğretimi*. Ankara: Asil Yayın Dağıtım.

Henderson P. B., Baldwin, D., Dasigi, V., Dupras, M., Fritz, J., Ginat, D., Goelman, D., Hamer, J., Hitchner, L., Lloyd, W., Jr., B.M., Riedesel, C. ve Walker, H.(2001). Striving for mathematical thinking. *ACM SIGCSE Bulletin*, 33(4). 114-124.

İnan, C. (2006). Matematik Öğretiminde Materyal Geliştirme ve Kullanma/ The Development and the Use of Teaching Resources in Mathematics Teaching Program. *D. Ü. Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, 7, 47-56.

Kalaycı, N. (2001). *Sosyal bilgilerde problem çözme ve uygulamalar*. Ankara: Gazi kitabevi.

Karadağ, Z. (2009). Analyzıng Students' Mathematıcal Thınkıng In Technology-Supported Envıronments. Yayımlanmamış Doktora Tezi, *University of Toronto Ontario Institute for the Studies in Education of the University of Toront.* Canada.

Karakoca, A. (2011). Altıncı Sınıf Öğrencilerinin Problem Çözmede Matematiksel Düşünmeyi Kullanma Durumları. Yayımlanmamış Yüksek Lisans

Tezi, *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü*, İlköğretim Anabilim Dalı, Eskişehir.

Karakuş, F. (2014). İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Geometrik İnşa Etkinliklerine Yönelik Görüşleri/Pre-Service Elementary Mathematics Teachers' Views About Geometric Construction. *Kuramsal Eğitimbilim Dergisi,* 7(4), 408-435.

Karapınar, F. (2017). 8. Sınıf Öğrencilerinin Geometrik Cisimler Konusundaki Bilgilerinin Van Hiele Geometrik Düşünme Düzeyleri Açısından İncelenmesi. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi*, Erciyes Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü,* İlköğretim Anabilim Dalı, Kayseri.

Karslıgil Ergin, G. (2015). Öğrencilerin Problem Çözme ve Kurma Süreçlerindeki Matematiksel Düşünme Süreçlerinin İncelenmesi. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, *Gaziantep Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü*, İlköğretim Anabilim Dalı, Gaziantep.

Keskin, M., Akbaba Dağ, S. ve Altun, M. (2013). 8. ve 11. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme Aşamalarındaki Davranışlarının Karşılaştırılması. *Journal Of Educational Science*, 1(1), 33-50.

Kılıç, H. (2013). Lise Öğrencilerinin Geometrik Düşünme, Problem Çözme ve İspat Becerileri. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi,* 7(1), 222-241.

Kılıç, H., Tunç Pekkan, Z., Karatoprak, Z. (2013). Materyal Kullanımının Matematiksel Düşünme Becerilerine Etkisi/ The Effects Of Using Materıals On Mathematical Thinking Skills. *Eğitimde Kuram ve Uygulama*, 9(4), 544-556.

Kocaman, M. (2017). Lise 11. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme ve Akıl Yürütme Becerilerinin İncelenmesi. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı, Balıkesir.

Koyuncu, M. K. (2018). Matematik Felsefesi Etkinliklerinin Öğrencilerin Matematiksel Düşünme Becerilerine, Matematiğe Yönelik Tutum ve İnançlarına Etkisinin İncelenmesi. Yayımlanmamış Doktora Tezi, *Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü*, Matematik ve Fen Bilimleri Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı, İstanbul.

Köymen, İ. K. Bilimsel Araştırma Yöntemleri [online]. (26 Haziran 2019), http://kisi.deu.edu.tr/istem.koymen/BAY%20sunum%202.pdf

Kutluca, T. ve Akın, M. F. (2013). Somut Materyallerle Matematik Öğretimi: Dört Kefeli Cebir Terazisi Kullanımı Üzerine Nitel Bir Araştırma. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 4(1), 48-65.

Kükey, E. (2018). Ortaokul Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme Biçimleri ile Öğretmen ve Öğretmen Adaylarının Bu Konudaki Görüşlerinin İncelenmesi. Yayımlanmamış Doktora Tezi, *İnönü Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü*, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı, Malatya.

Lim, C. S. ve Hwa, T. Y. (2006) Promotıng Mathematıcal Thinking In The Malaysıan Classroom: Issues And Challenges. *In meeting of the APEC- Tsukuba International Conference. Meeting of the APEC- Tsukuba International Conference*, Japan.

Liu, P. H., (2003). Do Teachers Need to Incorporate the History of Mathematics in Their Teaching?. *Mathematics Teacher*. 96(6), 416-421.

Mason, J., Burton, L., Stacey, K. (2010). T*hinking mathematically* (Second Edition). Harlow England: Pearson Education Limited.

Mert Uyangör, S. (2019). Investigation of the mathematical thinking processes of students in mathematics education supported with graph theory. *Universal Journal of Educational Research*, 7(1), 1-9.

Midgett, C. ve Eddins, S. K. (2001). NCTM's principles and standards for school mathematics: Implications for administrators. *NASSP Bulletin*, 85(623), 35-42.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2009). *İlköğretim Matematik Dersi 6-8. Sınıflar Öğretim Programı ve Kılavuzu*. Ankara: MEB.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2013). *Ortaöğretim Matematik Dersi 9, 10, 11, 12. Sınıflar Öğretim Programı*. Ankara: MEB.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2016). *Düşünme Eğitimi Dersi (7. ve 8. Sınıflar) Öğretim Programı*. Ankara: MEB.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2018a). *Ortaöğretim Matematik Dersi 9, 10, 11, 12. Sınıflar Öğretim Programı*. Ankara: MEB.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2018b). *Matematik Dersi Öğretim Programı İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar*. Ankara: MEB.

Mubark, M. (2005). Mathematical Thinking and Mathematical Achievement of Students in the Year of 11 Scientific Stream in Jordan. Unpublished Ph.D. Thesis, *University of Newcastle, School of Education and Arts*, Callaghan.

Nasibov, F. ve Kaçar, A. (2005). Matematik ve Matematik Eğitimi Hakkında. *Kastamonu Eğitim Dergisi,* 13(2), 339-346.

Nepal, B. (2016). Relationship between Mathematical Thinking and Mathematics Achievement. *IOSR Journal of Research & Method in Education (IOSR-JRME)*. 6(6), 46-49.

Olkun, S. ve Toluk Uçar, Z., (2014). Matematik Öğretimi[online]. (05.05.2019), https://www.academia.edu/3194086/Matematik_%C3%B6%C4%9Fretimi

Özsoy, G. (2008). Üstbiliş. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*. 6(4), 713-740.

Öztürk, G. (2013). Matematiksel Düşünme Odaklı Öğretim: Ortaöğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Planlama Becerileri Ve Görüşleri. Yayımlanmamış Doktora Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,* Ortaöğretim Fen ve Matematik Eğitim Anabilim dalı, Balıkesir.

Öztürk, G. ve Akyüz, G. (2013). Öğretmen Adaylarının Matematiksel Düşünmeye Odaklı Öğretimi Planlama Becerilerinin İncelenmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 21(3), 841-864.

Polya, G. (1945). *How to solve it. Princeteon*. New Jersey: Princeton University.

Sabancı, A. (2014). *Öğrenme öğretme süreci*. Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.

Sarı, M. H. (2015). İlkokul 4. Sınıfta Dienes İlkelerine Göre Yapılandırılmış Geometri Etkinliklerinin Öğrenci Başarısına, Kalıcılığına ve Akademik Benlik Algısına Etkisi. Yayımlanmamış Doktora Tezi, *Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü*, Ankara.

Sayın, V. (2017). İlkokul Dördüncü Sınıf Öğrencilerinin Geometrik Düşünme Düzeylerinin Tespiti ve Başarı Puanlarının Bazı Değişkenler Açısından İncelenmesi. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, *Amasya Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü*, Temel Eğitim Anabilim Dalı, Amasya.

Sertöz, S. (2013). *Matematiğin Aydınlık Dünyası*. (30. Baskı). Ankara: Tübitak Popüler Bilim Kitapları.

Sevgen, B. (2002). Matematiksel Düşünce Yapısı ve Gelişimi, *V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi kongresi,*16-18.

Sönmez, V. ve Alacapınar, F. G. (2017). *Örneklendirilmiş Bilimsel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Anı Yayıncılık.

Stacey, K. (2006). What is Mathematical Thinking and Why is it İmportant. *Progress report of the APEC project: collaborative studies on innovations for teaching and learning mathematics in diffurent cultures (II) – Lesson study focusing on mathematical thinking.* Australia. https://www.researchgate.net/publication/254408829_WHAT_IS_MATHEMATICAL_THINKING_AND_WHY_IS_IT_IMPORTANT adresinden (12.03.2019) tarihinde indirilmiştir.

Şahinel, M. (2019). Etkin öğrenme. (ed: Ö. Demirel), *Eğitimde yeni yönelimler*, Ankara: Pegem Akademi, 149-165.

Taşdemir, A. (2008). Matematiksel Düşünme Becerilerinin İlköğretim Öğrencilerinin Fen ve Teknoloji Dersindeki Akademik Başarıları, Problem Çözme Becerileri ve Tutumları Üzerine Etkisi. Yayımlanmamış Doktora Tezi, *Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü*, İlköğretim Anabilim Dalı, Ankara.

Tataroğlu Taşdan, B. (2014). Matematik Öğretmenlerinin Pedagojik Alan Bilgilerini Matematiksel Düşünmeyi Destekleme Bağlamında Geliştirmeyi Amaçlayan Bir Öğretim Tasarımı. Yayımlanmamış Doktora Tezi, *Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü*, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı, İzmir.

Tepedelenlioğlu, N. (2009). *Kim Korkar Matematikten*. İstanbul: Nesin Yayınevi.

Tosun, N. ve Mert Uyangör, S. (2018). 9. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme Süreçlerinin İncelenmesi, (eds: H. Gür ve H. H. Şahan), *Uluslararası Necatibey Eğitim ve Sosyal Bilimler Araştırmaları Kongresi*, (26-28.10.2018), Balıkesir.

Tuna, A. (2011). Trigonometri Öğretiminde 5E Öğrenme Döngüsü Modelinin Öğrencilerin Matematiksel Düşünme ve Akademik Başarılarına Etkisi, Yayımlanmamış Doktora Tezi, *Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü*, Ankara.

Tuncay, H. A. (2015). Matematiksel Düşünme Süreçlerinin İncelenmesi. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, *Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü*, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı, Sivas.

Tural, H. (2005). İlköğretim matematik öğretiminde oyun ve etkinliklerle öğretimin erişi ve tutuma etkisi. Yayımlanmamış Yüksek lisans tezi, *Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü*, İzmir.

Türk Dil Kurumu [TDK] (2019). Güncel Türkçe Sözlük [online]. (06.05.2019), http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_gts&view=gts

Uğurel, I. ve Moralı, S. (2006). Karikatürler ve Matematik Öğretiminde Kullanımı. *Milli Eğitim Dergisi*, 34(170),1-10.

Uğurel, I. ve Moralı, S. (2010). Bir Ortaöğretim Matematik Dersindeki İspat Yapma Etkinliğine Yönelik Sınıfiçi Tartışma Sürecine Öğrenci Söylemleri Çerçevesinde Yakından Bakış, *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 134-154.

Ulusoy, F. (2019). Matematik Öğretmeni Adaylarının Pergel-Cetvel ve Dinamik Geometri Yazılımı Kullanarak Yaptıkları Geometrik İnşalar. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 1(1).

Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniveristesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 234-243.

Ural, A. (2015). Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin Bilgi İletişim Teknolojisi ve Psikomotor Beceri Kullanımlarının İncelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 6(1), 93-116.

Van De Walle, J. A., Karp, K. S., Bay-Williams, J. M. (2018). *İlkokul ve ortaokul matematiği gelişimsel yaklaşımla öğretim.* (Çev: S. Durmuş), Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.

Vural, R. ve Cenkseven, F. (2005). Eğitim Araştırmalarında Örnek Olay (Vaka) Çalışmaları: Tanımı, Türleri, Aşamaları ve Raporlaştırılması. *Burdur Eğitim Fakültesi Dergisi*, 6 (10), 25-38.

Yağdıran, B. (2018). Teknoloji destekli öğrenme ortamlarında 11. Sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, *Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü*, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Ankara.

Yavuzsoy Köse N. ve Tanışlı, D. (2014). Sınıf Öğretmeni Adaylarının Geometrideki Zihinsel Alışkanlıkları. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 14(3), 1203-1230.

Yeşildere, S. (2006). Farklı Matematiksel Güce Sahip İlköğretim 6,7 ve 8. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme ve Bilgiyi Oluşturma Süreçlerinin İncelenmesi. Yayımlanmamış Doktora Tezi, *Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü*, İlköğretim Anabilim Dalı, İzmir.

Yeşildere, S. ve Türnüklü, E. B. (2007). Öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*. 40(1), 181-213.

Yıldırım, A. (1999). Nitel araştırma yöntemlerinin temel özellikleri ve eğitim araştırmalarındaki yeri ve önemi. *Eğitim ve Bilim*, 23(112).

Yıldırım, C. (2014). *Matematiksel Düşünme.* İstanbul: Remzi Kitabevi.

Yıldırım, D. (2015). Ortaokul Öğrencilerinin Geometri Problemlerindeki Matematiksel Düşünme Süreçlerinin İncelenmesi. Yüksek Lisans Tezi, *Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü,* Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Eskişehir.

Yıldırım, D. ve Yavuzsoy Köse, N. (2018). Ortaokul öğrencilerinin çokgen problemlerindeki matematiksel düşünme süreçleri. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 18 (1), 605-633

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2018). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yıldız, İ. ve Uyanık, N. (2004). Matematik Eğitiminde Ölçme Değerlendirme Üzerine. *Kastamonu Eğitim Dergisi*. 12(1). 97-104.

Yıldız, C. (2016). Comparing The Mathematical Thinking Experiences of Students at Faculty of Education and Faculty of Arts and Sciences. *TOJET: The Turkish Online Journal of Educational Technology- Special Issue for INTE*, 480-488.

Yıldız, C. (2017). Geometri öğrenimi Öklid'in etkisi. (eds: Gökkurt Özdemir, B. ve Uygun, T.), *Geometri öğretimi ve öğrenimi*, Ankara: Anı yayıncılık, 15-34.

Yıldız, N. (2018). Ortaokul Sınıflarında Geometrik Düşünmenin Geliştirilmesine Yönelik Bir Mesleki Gelişim Modelinin Öğrencilerin Van Hiele Geometrik Düşünme Düzeylerine Etkisi. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, *Gaziantep Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü,* Gaziantep.

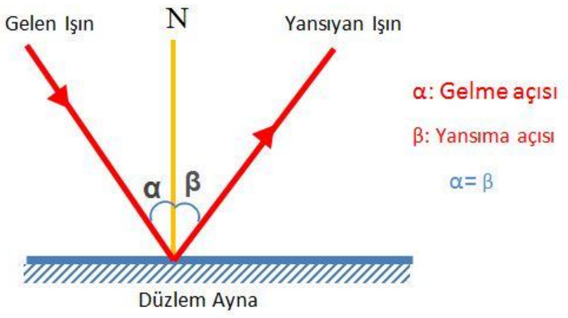
EKLER

7. EKLER

EK A Çalışma Kağıdı

ÇALIŞMA KAĞIDI

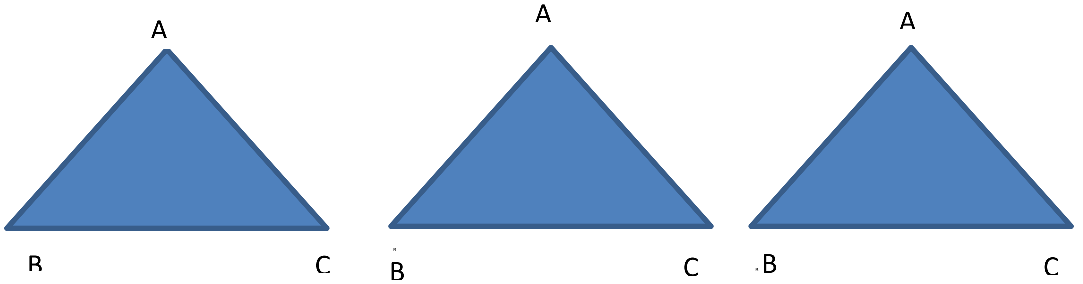
Adı Soyadı: Sınıf: No:



Düzlem ayna yüzeyine gelen ışınlar aynadan tekrar yansıma yaparlar. Şekilde görülen N ışının düştüğü noktada yüzeye dik olan doğru olarak tanımlanır. Buradan hareketle gelen ışın ile yansıyan ışının normal doğrusuyla yaptıkları açı hakkında ne söylenebilir? Bu açıları geometri de üçgenin hangi yardımcı elemanıyla ilişkilendirilebilir?

Yönerge: Aşağıda verilen soruları dağıtılan üçgen kağıtlar yardımıyla cevaplayınız. Sorulara göre uygun geometri çizim aletlerini kullanınız.

SORULAR



1) A köşesinin açıortayını(B ve C köşelerinin) katlayarak nasıl gösterirsiniz?
2) Açıölçer kullanarak A köşesinin (B ve C köşelerinin) açıortayını nasıl gösterirsiniz?
3) Yalnızca cetvel kullanarak A köşesinin(B ve C köşelerinin) açıortayını nasıl gösterirsiniz?
4) Pergel ve cetvel kullanarak A köşesinin(B ve C köşelerinin) açıortayını nasıl gösterirsiniz?
5) İlk dört soruda yaptığınız işlemleri göz önüne alarak, açıortay doğrusu üzerinde aldığınız herhangi bir noktanın açının kollarıyla uzaklığı konusunda neler söyleyebilirsiniz?(A, B ve C açıortayları için)
6) Dördüncü verilen üçgen kağıtta herhangi iki köşeye ait açıortay çiziniz. Bunun üzerine diğer köşeden çizilen açıortaylarla ilgili neler söyleyebilirsiniz? Cevaplarınızı açıkça yazınız.
7) Altıncı soruda ifade ettiğiniz bilgiyi ispatlayabilir misiniz?