



POLİNOM OLMAYAN SPLINE FONKSİYONLAR YARDIMIYLA BAZI
DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Hava ALBAYRAK

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Haziran - 2017

POLİNOM OLMAYAN SPLİNE FONKSİYONLAR YARDIMIYLA BAZI DENKLEMLERİN
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Hava ALBAYRAK

Dumlupınar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliği Uyarınca
Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Doç.Dr. Ahmet BOZ

Haziran - 2017

KABUL VE ONAY SAYFASI

Hava ALBAYRAK'ın YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "POLİNOM OLMAYAN SPLİNE FONKSİYONLAR YARDIMIYLA BAZI DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ" başlıklı bu çalışma, jürimizce Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

16/06/2017

Üye: Doç. Dr. Ahmet BOZ(Danışman)

Üye: Prof. Dr. Elçin YUSUFOĞLU

Üye: Doç. Dr. Ali Serdar NAZLIPINAR

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../2017 gün vesayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hasan GÖÇMEZ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Bu tezin hazırlanmasında Akademik kurallara riayet ettiğimizi, özgün bir çalışma olduğunu ve yapılan tez çalışmasının bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olduğunu, çalışma kapsamında teze ait olmayan veriler için kaynak gösterildiğini ve kaynaklar dizininde belirtildiğini, Yüksek Öğretim Kurulu tarafından kullanılmak üzere önerilen ve Dumlupınar Üniversitesi tarafından kullanılan İntihal Programı ile tarandığını ve benzerlik oranının %12 çıktığını beyan ederiz. Aykırı bir durum ortaya çıktığı takdirde tüm hukuki sonuçlara razı olduğumuzu taahhüt ederiz.

Doç. Dr. Ahmet BOZ

Hava ALBAYRAK

POLİNOM OLMAYAN SPLİNE FONKSİYONLAR YARDIMIYLA BAZI DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Hava ALBAYRAK

Matematik, Yüksek Lisans Tezi, 2017

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ahmet BOZ

ÖZET

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde tezin içinde kullanılacak olan temel kavramlar ve denklemler tanıtılmıştır. Ayrıca denklemlerin çözümlerinde ortaya çıkan hataların ölçümlerinde kullanılacak olan hata normları ifade edilmiştir. Denklemlere ait literatür taraması yapılarak denklemlerin üzerinde daha önce yapılan çalışmalardan söz edilmiştir.

İkinci bölümde parabolik denklemlerin polinom olmayan spline fonksiyonlar yardımıyla çözümleri incelenmiştir. Çözüm algoritmasının oluşturulması, kesme hatası ve kararlılık analizi detaylı bir şekilde ifade edilmiştir. Çözümde elde edilen sonuçlar çizelgede belirtilmiştir.

Üçüncü bölümde Bratu probleminin nümerik çözümü incelenmiş, uygulanan yöntemden elde edilen sonuçlar, Laplace, Ayırıştırma ve B- Spline yöntemlerinden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılarak çizelge halinde verilmiştir.

Dördüncü bölümde literatürde iyi bilinen ve sıklıkla kullanılan Burger denklemi, beşinci bölümde de RLW(Regularized Long Wave)denkleminin nümerik çözümleri incelenmiştir. Özellikle RLW denklemi için yöntemin etkinliğini görmek amacıyla solitary dalga hareketleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Burger Denklemi, Bratu Problemi, Parabolik Denklemler, Polinom Olmayan Spline Fonksiyonlar.

NUMERICAL SOLUTIONS OF THE SOME EQUATIONS USING NONPOLYNOMIAL SPLINE FUNCTIONS

Hava ALBAYRAK

Mathematics, M.S.Thesis, 2017

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr.Ahmet BOZ

SUMMARY

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, basic concept and equations that used in the thesis are given. In addition, error norms are defined in this section. This error norms are used computed the errors. Literature on the equations has been investigated and the previous studies on the equations have been mentioned.

In he second chapter we examined, the solution of the parabolic equation with nonpolynomial spline function. Construction of the solution algorithm, truncation error and stability analysis has been expressed in detail. Computed results are tabulated in table.

After that, numerical solution of the Bratu's problem examined and computed results are compared with the Laplace, Decomposition and B-Spline Solution and this situation given in the table.

In the fourth chapter well known in literature and frequently used numerical solution of the Burger equation, in the fifth chapter numerical solution of RLW equation examined. Especially to see the effectiveness of the method for RLW equation, solitary wave motion examined.

Keywords: Burger Equation, Bratu Problem, Non – Polynomial Spline Functions, Parabolic Equations.

TEŐEKKÜR

Tez alıőmam sűresince benden deęerli fikirlerini, bilgilerini ve katkılarını esirgemeyen deęerli danıőman hocam sayın Do. Dr. Ahmet BOZ'a, yűksek lisans sűresince alıőmalarımı destekleyen ve her zaman yanımda olan aileme en iten teőekkűrlerimi ve saygılarımı sunmayı bir bor bilirim.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	x
ÇİZELGELER DİZİNİ	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xii
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Polinom Olmayan Spline Fonksiyonlar	1
1.2. Parabolik Denklem	1
1.3. Bratu Problemi	2
1.4. Burger Denklemi	2
1.5. RLW Denklemi	3
1.6. Hata Normları.....	3
2. POLİNOM OLMAYAN SPLİNE FONKSİYONLAR YARDIMIYLA PARABOLİK DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ	5
2.1. Giriş	5
2.2. Polinom Olmayan Kübik Spline Fonksiyonlar	5
2.3. Metot	9
2.4. Sınır Koşullarına Uyan Denklemın Çıkarılması	11
2.5. Kesme Hatası ve Kararlılık Analizi	13
2.6. Nümerik Örnekler	14
2.7. Sonuç	15
3. BRATU PROBLEMİNİN POLİNOM OLMAYAN SPLİNE FONKSİYONLAR YARDIMIYLA ÇÖZÜMLERİ	16
3.1. Giriş	16
3.2. Metodun Tanımlanması ve Sınır Koşullarının Geliştirilmesi	17
3.3. Kararlılık Analizi.....	18
3.4. Nümerik Örnekler	22

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
3.5. Sonuç	24
4. BURGER DENKLEMİNİN POLİNOM OLMAYAN SPLİNE FONKSİYONLAR YARDIMIYLA ÇÖZÜMÜ	25
4.1. Giriş	25
4.2. Metot	25
4.3. Kararlılık Analizi	31
4.4. Nümerik Örnekler	34
4.5. Sonuç	36
5. RLW DENKLEMİNİN POLİNOM OLMAYAN SPLİNE FONKSİYONLAR İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ	37
5.1. Giriş	37
5.2. Metot	37
5.3. Kararlılık Analizi	43
5.4. Nümerik Örnekler	44
5.4.1. Tek solitary dalganın yayılımı	44
5.4.2. Solitary dalgaların etkileşimi	46
5.4.3. Tek dalganın hareketi (Wave undulation)	48
5.4.4. Maxwell başlangıç koşulu	50
5.5. Sonuç	51
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	52
KAYNAKLAR DİZİNİ	53

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
5.1. İki solitary dalganın etkileşimi	47
5.2. Üç solitary dalganın etkileşimi	48
5.3. $d=5$ dalgalanma profili	49
5.4. $d=2$ dalgalanma profili	50



ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
2.1. Problemin çözümünde elde edilen maksimum mutlak hatalar	15
3.1. Maksimum mutlak hata	23
3.2. $\lambda =1$ için maksimum mutlak hata	23
3.3. $\lambda =2$ için maksimum mutlak hata	23
3.4. $\lambda =3.51$ için maksimum mutlak hata.....	24
4.1. $v = 0.05, \Delta t = 0.01, \alpha = 0.2'10 - 6$ ve $\beta = 6'10 - 4$	35
4.2. $v = 0.05, \Delta t = 0.01, \alpha = 0.2'10 - 6$ ve $\beta = 6'10 - 4$	35
4.3. $v = 0.5, \Delta t = 0.1, \alpha = 0.2'10 - 6$ ve $\beta = 6'10 - 4$	36
4.4. $v = 0.005, \Delta t = 0.05, \alpha = 0.2'10 - 9$ ve $\beta = 4'10 - 4$	36
5.1. $T = 20, \alpha = h24, a = -40$ ve $b = 60$ değerleri için tek solitary dalga hareketi.....	45
5.2. $B = 0.13, T = 20, n = 800, k = 0.1, \alpha = h24, a = -40$ ve $b = 60$ değerleri için tek solitary dalga hareketi	46
5.3. İki solitary dalganın ve üç solitary dalganın etkileşiminde korunum sabitleri	47
5.4. $\mu = 0.04$ (sol), $\mu = 0.01$ (merkez) ve $\mu = 0.001$ (sağ) ile tanımlı Maxwell başlangıç koşulları için değişkenler	51

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
L_2, L_∞	Hata normları
$u = u(x, t)$	Bir kısmi türevli diferansiyel denklemin tam çözümü
$U = U(x, t)$	Bir kısmi türevli diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü
x, t	Sırasıyla konum ve zaman değişkenleri
v	Termal ısı yayılım sabiti
x_l	Düğüm noktaları
a_l, b_l, c_l, d_l	Sabitler
α, β, τ	Keyfi parametre
(x_l, t_j)	Grid noktaları
h, k	Konum ve zamandaki aralık boyu
φ	Mod sayısı
ζ	Düzenin genişletme faktörü
$S_i(x)$	Polinom olmayan spline fonksiyon
Ω	Sınırlı bir bölge
$C_1, C_2, C_3, C_m, C_p, C_e$	Korunum sabitleri
T_i^j	Lokal kesme hatası
<u>Kısaltmalar</u>	<u>Açıklama</u>
RLW	Regularized long wave

1.GİRİŞ

1.1.Polinom Olmayan Spline Fonksiyonlar

Polinom olmayan spline fonksiyonlar $1, x, x^2, x^3, \sin \tau x, \cos \tau x$ şeklindeki fonksiyonlar kullanılarak polinom ve trigonometrik kısımlardan oluşacak şekilde elde edilecektir. Burada τ spline fonksiyonun trigonometrik kısmının frekansı olup reel ya da imajiner bir değer olabilir.

Polinom olmayan spline fonksiyonlar için oluşturulacak olan model τ parametresine göre lineer olmayan bir bağıntıdır. Elde edilecek olan spline fonksiyonda τ keyfi bir parametre olacağından uygun seçilmesi durumunda iyi bir yaklaşım oluşturacağı ve metotun doğruluğunun artacağı düşünülmektedir (Rashidina, 2006). Ayrıca polinom olmayan spline fonksiyonların trigonometrik kısımlarının C^∞ türevlenebilirliği, polinom spline fonksiyonlarda ortaya çıkan düzgünlük kaybını da azaltacaktır. Bunun yanı sıra polinom olmayan spline'lar sadece $u(x, t)$ için değil, çözüm kümesinin her noktasında $u(x, t)$ 'nin yüksek dereceden türevleri için de sürekli bir yaklaşıma sahiptir.

Araştırılan polinom olmayan spline fonksiyonlarının sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını içermesi, bu fonksiyonların polinomların birçok beklenen özelliğini paylaşması ve ardışık türevlerinin de sinüs ve kosinüs olması açısından hesaplamalarda kolaylık yaratacaktır. (Scheid, 1988; Zorşahin, 2009).

1.2.Parabolik Denklem

Parabolik denklemler için başlangıç-sınır değer problemleri değişik dalga süreçlerinin modellenmesi süreçlerinde karşımıza çıkmaktadır. Bu tip problemlerin kesin çözümlerine çoğu zaman ulaşılamadığından dolayı nümerik yöntemler büyük önem arz etmektedir. Sıkça kullanılan yöntemler sonlu farklar, sonlu elemanlar, sonlu hacim yöntemleri gibi yöntemler bilinmektedir. Fark denklemleri ile ağırlıklı olarak adi ve kısmi diferansiyel denklemler için başlangıç-değer ve sınır-değer problemlerinin nümerik çözüm süreçlerinde karşılaşılmaktadır. Bilindiği gibi fark semaları için yaklaşık metotlarda incelenmesi gereken aşağıdaki hususlar bulunmaktadır: Fark semasının kurulması, yakınsama hızının tespiti, fark semasının kararlılığı, yaklaşım hatası ve yakınsama için uygun algoritmanın kurulmasıdır (Samarskii, 2001; Amiralı, 2002; Smith, 1965).

Bu konularla ilgili literatürde pek çok araştırma vardır.

Ames (1977), kısmi diferansiyel denklemler için başlangıç-değer ve sınır-değer problemlerinin çözüm süreçlerinde nümerik yöntemler kullanmıştır. Saka (1998), parabolik

denklemlerden olan ısı denkleminin nümerik çözümlerini ele aldığı tezinde, ısı denklemlerini değişkenlere ayırma metodu ile çözümünü inceleyerek, kararlılığını ele almıştır. Evans ve ark. (2000), kısmi diferansiyel denklemler için nümerik yöntemleri ele aldığı kitabında Parabolik denklemler teorisini ele alarak, bu denklemler için geliştirilen yöntemlerin kararlılığını incelemiştir. Samarskii (2001), fark şemaları teorisini ele aldığı kitabında, parabolik denklemler için geliştirilen değişkenlere ayırma metodu, Maksimum prensibi ve enerji eşitsizlikleri metodlarının kararlılığını incelemiştir. Amirali (2002), Nümerik analizin temel konularını ele aldığı kitabında, singüler pertürbasyon özellikli fark şemalarını inceleyerek bu denklemlerin kararlılığı üzerinde durmuştur. Koca (2003), kısmi türevler teorisini incelediği kitabında parabolik denklemleri ele alırken, bir boyutlu ısı denkleminin değişkenlere ayırma metoduyla çözümüne değinmiştir. Yıldız (2010), tek boyutlu parabolik denklemler için fark şemalarını incelediği tezinde fark şemaları için yöntemleri ve bu yöntemlerin kararlılığını ele almıştır(Şinar, 2011).

1.3.Bratu Problemi

Bratu problemi geniş bir uygulama çeşitliliğine sahiptir. Bunlardan bazıları termal yanma teorisini, yakıt ateşleme modeli, termal reaksiyon işleminin modeli, evrenin genişleme modeli, geometri ve bağıl ısı transferi ve nanoteknolojidir.

Birçok yazar (3.2) denkleminin analitik ve nümerik olarak çözmeye çalışmıştır. Örneğin; Hikmet Çağlar ve diğerleri (Çağlar, 2010) B-spline metodunu geliştirmiştir. (Buckmire, 2004; Jacobsen ve Schmitt, 2002; McGough, 1998; Mounim ve Dormale, 2006) sonlu farklar metodunu kullanmıştır.(Deeba vd., 2000; Khuri, 2004) ayrıştırma yöntemini kullanmıştır. (Syam ve Hamdan, 2006) Laplace dönüşüm ayrıştırma metodunu, (Li ve Liao, 2005) homotopi analiz metodu, (Aregbesola, 2003) ağırlıklı kalanlar metodu, (Hassan ve Erturk, 2007) diferansiyel dönüşüm metodu, (He, 2006, 2008) J.H. tarafından (3.2) varyasyonel denklemi için method kullanılmıştır.(Rashidinia ve Jalilian, 2007; Rashidinia vd., 2007; Van Daele vd., 1994; Ramadan vd., 2009; ul Islam vd., 2008; Akram ve Siddiqi, 2006; Usmani ve Warsi, 1980) sınır değer problemlerinin çözümü için spline ve polinom olmayan spline uygulamaları yapılmıştır. (Mohsen vd., 2008) Bratu problemi için multigrid metodu uygulanmıştır.(Tirmizi ve Twizell, 2002) lineer olmayan 2. mertebeden iki nokta sınır değer problemleri için yüksek mertebeden sonlu farklar metodları geliştirilmiştir.

1.4.Burger Denklemi

Ele alınan Burger denklemi şok dalga yayılımlarının yaklaşım teorilerinde ve uygulamalarında (Cole, 1951)önemli bir yer tutar.

Ayrıca belirtilen şok dalga yayılımlarının türbülans modelinin oluşturulmasında da önemlidir(Burger, 1948). Birkaç yıl öncesine kadar kısmi diferansiyel denklemlerin diğer formlarında olduğu gibi Burger denkleminin (4.1) formu için önemli çalışmalar yapılmaktadır. Bu çalışmalar hem teorik hem nümeriktir (El-Danaf, 2002; Gandarias, 1997; Harris, 1996; Krstic, 1999; Ly vd.,1997; Ramadan vd., 2005; Ramadan ve El-Danaf, 2005; Weijiu, 2002; El-Danaf ve Ramadan, 2007).

Son zamanlarda ise farklı mertebelerden sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümleri için polinom olmayan spline metotlar yardımıyla nümerik çözümler üzerinde yaygın çalışmalar yapılmaktadır (Daele vd., 1994; Islam vd., 2005; Ramadan vd., 2007).

Ancak bu polinom olmayan spline fonksiyonlar yardımıyla kısmi türevli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri literatürde çok az yer almaktadır (Rahidinia vd., 2007).

1.5.RLW Denklemi

Bu denklem bilim ve mühendislik dünyasında çeşitli tanımlamalarda kullanılmaktadır. Aynı zamanda çeşitli alanlarda birçok uygulamalara sahiptir. Örneğin; plazmada akustik dalgalar, plastik çubuklar, balon karışimli likit gazlar için basınç dalgaları, ...vb.

Bona RLW denkleminin analitik çözümü için başlangıç sınır değer probleminin özel türleri için uygun olduğunu göstermiştir (Bona ve Bryant, 1973). Böylece bu denklemin nümerik çözümünün bulunması özel bir önem kazanmıştır.

Kansa's metodu, sonlu farklar metodu, Fourier metodu Galerkin yöntemine dayanan sonlu elemanlar metodu ve collocation metodu gibi farklı nümerik teknikler RLW denklemi için uygulanmıştır (Islam vd., 2009).Son zamanlarda RLW denklemi Sinc-collocation, RBF collocation gibi yöntemlerle de çözülmüştür (Mokhtari ve Mohammadi, 2010, 2011; Mokhtari ve Torabi Ziaratgahi, 2011).

Polinom olmayan spline fonksiyonlar metodu ile çözüm çeşitli denklemler için incelenmiştir. Burger denklemi, lineer olmayan kübik Schrödinger denklemi, lineer olmayan Klein-Gordon denklemi, değişken katsayılı dördüncü mertebeden dalga denklemleri, Bratu problemi gibi (Griewanka ve El-Danaf, 2009; El-Danaf vd., 2011; Rashidinia ve Mohammadi, 2010, 2009; Jalilian, 2010).

1.6.Hata Normları

Bazı kısmi türevli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde uygulanan yöntemin geçerliliğinin ölçülmesi için aşağıdaki hata normları kullanılır.

$$L_2 = \|u - U\|_2 \cong \sqrt{h \sum_{i=1}^n |u_i - U_i|^2}$$

hata kareleri toplamının karekökü ile

$$L_\infty = \|u - U\|_\infty \cong \max_i |u_i - U_i|$$

maksimum hata normu olarak tanımlanır.

Burada u tam çözümü, U yaklaşık çözümü göstermektedir.



2. POLİNOM OLMAYAN SPLİNE FONKSİYONLAR YARDIMIYLA PARABOLİK DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

2.1.Giriş

Bir boyutlu lineer ikinci mertebeden ısı (veya difüzyon) denklemini düşünelim:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq r, \quad t \geq 0 \quad (2.1)$$

burada v termal ısı yayılım sabitidir.

Denkleme ait başlangıç koşulu;

$$u(x,0) = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq r \quad (2.2)$$

$x = 0$ ve $x = r$ için sınır koşulları;

$$u(0,t) = g_0(t), \quad u(r,t) = g_1(t), \quad t \geq 0 \quad (2.3)$$

şeklinde dir.

Burada $u = u(x,t)$ şeklinde bir fonksiyondur. x ve t sırasıyla konum ve zaman değişkenleridir.

Kabul edelim ki verilen başlangıç ve sınır koşulları yeterince düzgün fonksiyonlardan oluşsun. (2.1) denkleminin nümerik çözümü; $O(k^2 + h^2)$ sonlu farkına dayanır ve (2.1) denkleminin üç köşegensel lineer denklem sistemine indirgenmesi çeşitli yazarlar tarafından başarıyla gerçekleştirilmiştir. Smith (1985), Jain (1984), Hiberman (2004) vb. Son zamanlarda, Sallam ve arkadaşları (2004, s.813-821) bir boyutta parabolik denklemler için $O(k^4 + h^2)$ hata mertebesine sahip koşulsuz kararlı C^1 -kübik spline collocation metodunu önermiştir.

Bu çalışmada (2.1) denkleminin çözümü için polinom olmayan kübik spline metoduna dayanan üç aşamalı yeni bir metod elde edilmiştir. 2.2. de, polinom olmayan kübik spline fonksiyonların elde edilişi verilmiştir. Şimdi de verilen (2.1) denkleminin ayrıştırılması için spline bağlantıları kullanılacaktır. 2.3. de, kullanılan metodun formülasyonu yapılacaktır. 2.4. de, sınır koşullarını sağlayan denklemler elde edilecektir. 2.5. de, kararlılık analizi yapılacaktır. Son olarak 2.6. da nümerik hesaplamalar ile elde edilen sonuçlar değerlendirilecektir.

2.2. Polinom Olmayan Kübik Spline Fonksiyonlar

$[a,b]$ aralığını x_l düğüm noktaları yardımıyla eşit aralıklara bölelim. Buna göre;

$$a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

burada $x_l = a + lh$, $l = 0, 1, 2, \dots, n$ ve $h = \frac{b-a}{n}$ dir.

$S_l(x)$, $[a, b]$ aralığının her bir alt bölüntüsü üzerinde $C^2[a, b]$ sınıfında bir polinom olmayan fonksiyondur. x_l , ($l = 0, 1, 2, \dots, n$) noktasındaki $u(x)$ interpolasyon fonksiyonu τ parametresine bağlıdır. $[a, b]$ aralığındaki $S_l(x)$ fonksiyonu, $\tau \rightarrow 0$ iken bilinen spline fonksiyonlara indirgenir. Her $[x_l, x_{l+1}]$ aralığında, ($l = 0, 1, 2, \dots, n-1$) polinom olmayan $S_l(x)$ fonksiyonu

$$S_l(x) = a_l + b_l(x - x_l) + c_l \sin[\tau(x - x_l)] + d_l \cos[\tau(x - x_l)], \quad (2.4)$$

formundadır. Burada a_l , b_l , c_l ve d_l sabitler ve τ keyfi parametredir.

$u_l, u(x_l)$, için bir yaklaşım olsun. u_l her bir aralık için $S_l(x)$ yardımıyla (x_l, u_l) ve (x_{l+1}, u_{l+1}) noktalarından geçen karışık spline fonksiyonlardan elde edilir. (2.4) denklemindeki katsayıları elde etmek için ilk olarak aşağıdaki eşitlikler tanımlanır.

$$\begin{aligned} S_l(x_l) &= u_l, & S_l''(x_l) &= M_l, \\ S_l(x_{l+1}) &= u_{l+1}, & S_l''(x_{l+1}) &= M_{l+1}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$S_l''(x_l) = M_l$$

ise;

$$S_l(x) = a_l + b_l(x - x_l) + c_l \sin[\tau(x - x_l)] + d_l \cos[\tau(x - x_l)]$$

$$S_l'(x) = b_l + c_l \tau \cos[\tau(x - x_l)] - d_l \tau \sin[\tau(x - x_l)]$$

$$S_l''(x) = -c_l \tau^2 \sin[\tau(x - x_l)] - d_l \tau^2 \cos[\tau(x - x_l)]$$

$$\begin{aligned} S_l''(x_l) &= -c_l \tau^2 \sin[\tau(x_l - x_l)] - d_l \tau^2 \cos[\tau(x_l - x_l)] = M_l \\ &= -d_l \tau^2 = M_l \end{aligned}$$

$$d_l = -\frac{M_l}{\tau^2}$$

bulunur.

$$S_l(x_l) = u_l$$

ise;

$$S_l(x_l) = a_l + b_l(x_l - x_l) + c_l \sin[\tau(x_l - x_l)] + d_l \cos[\tau(x_l - x_l)] = u_l$$

$$= a_l + d_l = u_l$$

$$a_l = u_l - d_l$$

$$a_l = u_l + \frac{M_l}{\tau^2}$$

bulunur.

$$S_l''(x_{l+1}) = M_{l+1}$$

ise;

$$S_l''(x_{l+1}) = -c_l \tau^2 \sin[\tau(x_{l+1} - x_l)] - d_l \tau^2 \cos[\tau(x_{l+1} - x_l)] = M_{l+1}$$

$$= -c_l \tau^2 \sin[\tau h] - d_l \tau^2 \cos[\tau h] = M_{l+1}$$

$$= -c_l \tau^2 \sin\theta - d_l \tau^2 \cos\theta = M_{l+1}$$

$$-c_l \tau^2 \sin\theta - \left(-\frac{M_l}{\tau^2}\right) \tau^2 \cos\theta = M_{l+1}$$

$$c_l = \frac{M_l \cos\theta - M_{l+1}}{\tau^2 \sin\theta}$$

bulunur.

$$S_l(x_{l+1}) = u_{l+1}$$

ise;

$$S_l(x_{l+1}) = a_l + b_l(x_{l+1} - x_l) + c_l \sin[\tau(x_{l+1} - x_l)] + d_l \cos[\tau(x_{l+1} - x_l)] = u_{l+1}$$

$$= a_l + b_l h + c_l \sin[\tau h] + d_l \cos[\tau h] = u_{l+1}$$

$$= a_l + b_l h + c_l \sin\theta + d_l \cos\theta = u_{l+1}$$

$$= u_l + \frac{M_l}{\tau^2} + b_l h + \frac{M_l \cos\theta - M_{l+1}}{\tau^2 \sin\theta} \sin\theta + \left(-\frac{M_l}{\tau^2}\right) \cos\theta = u_{l+1}$$

$$u_{l+1} - u_l - \frac{M_l}{\tau^2} - \frac{M_l}{\tau^2} \cos\theta + \frac{M_{l+1}}{\tau^2} + \frac{M_l}{\tau^2} \cos\theta = b_l h$$

$$b_l = \frac{u_{l+1} - u_l}{h} + \frac{M_{l+1} - M_l}{h \tau^2}$$

$$b_l = \frac{u_{l+1} - u_l}{h} + \frac{M_{l+1} - M_l}{\tau \theta}$$

bulunur.

Cebirsel işlemler sonucunda aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned} a_l &= u_l + \frac{M_l}{\tau^2}, & b_l &= \frac{u_{l+1} - u_l}{h} + \frac{M_{l+1} - M_l}{\tau \theta} \\ c_l &= \frac{M_l \cos \theta - M_{l+1}}{\tau^2 \sin \theta}, & d_l &= -\frac{M_l}{\tau^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

burada $\theta = \tau h$ ve $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ dir.

(x_l, u_l) noktasındaki birinci türevin sürekliliğini kullanarak

$$S_{l-1}'(x_l) = S_l'(x_l) \quad l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

eşitlik yazılabilir. Buradan da aşağıdaki cebirsel işlemlerin ardından tekrarlama bağıntısı elde edilir.

$$S_l(x) = a_l + b_l(x - x_l) + c_l \sin[\tau(x - x_l)] + d_l \cos[\tau(x - x_l)]$$

$$S_l'(x) = b_l + c_l \tau \cos[\tau(x - x_l)] - d_l \tau \sin[\tau(x - x_l)]$$

$$S_l'(x_l) = b_l + c_l \tau \cos[\tau(x_l - x_l)] - d_l \tau \sin[\tau(x_l - x_l)]$$

$$S_l'(x_l) = b_l + c_l \tau \cos 0 - d_l \tau \sin 0$$

$$S_l'(x_l) = b_l + c_l \tau \quad (*)$$

$$S_{l-1}'(x) = b_{l-1} + c_{l-1} \tau \cos[\tau(x - x_{l-1})] - d_{l-1} \tau \sin[\tau(x - x_{l-1})]$$

$$S_{l-1}'(x_l) = b_{l-1} + c_{l-1} \tau \cos[\tau(x_l - x_{l-1})] - d_{l-1} \tau \sin[\tau(x_l - x_{l-1})]$$

$$S_{l-1}'(x_l) = b_{l-1} + c_{l-1} \tau \cos(\tau h) - d_{l-1} \tau \sin(\tau h)$$

$$S_{l-1}'(x_l) = b_{l-1} + c_{l-1} \tau \cos \theta - d_{l-1} \tau \sin \theta \quad (**)$$

(*) ve (**) eşitlikleri birbirine eşit olacağından;

$$b_l + c_l \tau = b_{l-1} + c_{l-1} \tau \cos \theta - d_{l-1} \tau \sin \theta$$

$$\frac{u_{l+1} - u_l}{h} + \frac{M_{l+1} - M_l}{\tau \theta} + \frac{M_l \cos \theta - M_{l+1}}{\tau^2 \sin \theta} \tau =$$

$$\frac{u_l - u_{l-1}}{h} + \frac{M_l - M_{l-1}}{\tau \theta} + \frac{M_{l-1} \cos \theta - M_l}{\tau^2 \sin \theta} \tau \cos \theta - \left(-\frac{M_{l-1}}{\tau^2}\right) \tau \sin \theta$$

eşitliğin her iki tarafı $h\tau^2$ ile çarpılırsa;

$$\tau^2 u_{l+1} - \tau^2 u_l + M_{l+1} - M_l + h \tau M_l \cot \theta - h \tau M_{l+1} \operatorname{cosec} \theta =$$

$$\tau^2 u_l - \tau^2 u_{l-1} + M_l - M_{l-1} + h \tau \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} M_{l-1} h \tau \cot \theta M_l + h \tau \sin \theta M_{l-1}$$

$$\tau^2 (u_{l+1} - 2u_l + u_{l-1}) = (-1 + h \tau \operatorname{cosec} \theta) M_{l+1} + (2 - 2h \tau \cot \theta) M_l + (-1 + h \tau \operatorname{cosec} \theta) M_{l-1}$$

eşitliğin her iki tarafını θ^2 ile bölünürse;

$$\left(\frac{\tau^2}{\theta^2}\right)(u_{l+1} - 2u_l + u_{l-1}) =$$

$$\left(\frac{1}{\theta^2}\right)(\theta \operatorname{cosec} \theta - 1) M_{l+1} + 2\left(\frac{1}{\theta^2}\right)(1 - \theta \cot \theta) M_l + \left(\frac{1}{\theta^2}\right)(\theta \operatorname{cosec} \theta - 1) M_{l-1}$$

$$\alpha M_{l+1} + 2\beta M_l + \alpha M_{l-1} = \left(\frac{1}{h^2}\right)(u_{l+1} - 2u_l + u_{l-1}), \quad (2.7)$$

burada

$$\alpha = \left(\frac{1}{\theta^2}\right)(\theta \operatorname{cosec} \theta - 1), \quad \beta = \left(\frac{1}{\theta^2}\right)(1 - \theta \cot \theta) \text{ ve } \theta = \tau h \text{ dir.}$$

$\tau \rightarrow 0$ iken $\theta \rightarrow 0$ olur.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \alpha = \frac{1}{6} \quad \text{ve} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \beta = \frac{1}{3} \quad \text{olduğu kolayca gösterilebilmektedir. Bu durumda (2.7)}$$

aşağıdaki şekli alacaktır.

$$\frac{1}{6} M_{l+1} + 2 \frac{1}{3} M_l + \frac{1}{6} M_{l-1} = \left(\frac{1}{h^2}\right)(u_{l+1} - 2u_l + u_{l-1})$$

$$\left(\frac{h^2}{6}\right)(M_{l+1} + 4M_l + M_{l-1}) = (u_{l+1} - 2u_l + u_{l-1}). \quad (2.8)$$

elde edilir.

2.3. Metot

$R = [0, r] \times [0, \infty]$ bölgesi $R_{h,k}$ noktalar kümesine ayrılınsın. Bu noktalar grid noktaları olup (x_l, t_j) şeklinde gösterilir. Burada $x_l = l \cdot h, l = 0, 1, 2, \dots, n, n \cdot h = 1$ ve $t_j = j \cdot k,$

$j = 0, 1, 2, 3$ şeklindedir. h ve k sırasıyla konum ve zaman yönünde adım büyüklükleridir.

(2.1) denklemini için yeni bir yaklaşım elde edilecektir. Bunu elde etmek için denkleme zamana göre türev yerine sonlu fark yaklaşımı, konuma göre türev yerine de polinom olmayan kübik spline yaklaşımı kullanılacaktır. U 'nun zamana göre türevi için aşağıdaki merkezi sonlu fark yaklaşımı kullanılır.

$$\overline{u_{tl}^j} = \frac{(u_l^{j+1} - u_l^{j-1})}{2k} = u_{tl}^j + O(k^2). \quad (2.9)$$

(l, j) grid noktasında (2.1) denklemini aşağıdaki şekilde ayrıştırılabilir.

$$\overline{u_{tl}^j} = v \overline{u_{xxl}^j}. \quad (2.10)$$

(2.9) eşitliğini (2.10) denkleminde kullanıp kesme hatasını ihmal edersek (2.11)' i elde ederiz.

$$\frac{(u_l^{j+1} - u_l^{j-1})}{2k} = v M_l^j, \quad (2.11)$$

burada $M_l^j = S_l''(x_l, t_j)$, (x_l, t_j) noktasında 2.spline türevidir.(2.11)'den

$$M_l^j = \frac{(u_l^{j+1} - u_l^{j-1})}{2kv} \quad (2.12)$$

olur. Buradan da

$$M_{l+1}^j = \frac{(u_{l+1}^{j+1} - u_{l+1}^{j-1})}{2kv}, \quad (2.13)$$

ve

$$M_{l-1}^j = \frac{(u_{l-1}^{j+1} - u_{l-1}^{j-1})}{2kv}, \quad (2.14)$$

yazılır. (2.12),(2.13) ve (2.14) eşitliklerini (2.7)'de yerine yazarsak ve ifadeyi basitleştirirsek;

$$\begin{aligned} & \alpha \left(\frac{(u_{l+1}^{j+1} - u_{l+1}^{j-1})}{2kv} \right) + 2\beta \left(\frac{(u_l^{j+1} - u_l^{j-1})}{2kv} \right) + \alpha \left(\frac{(u_{l-1}^{j+1} - u_{l-1}^{j-1})}{2kv} \right) = \\ & \left(\frac{1}{h^2} \right) (u_{l+1}^j - 2u_l^j + u_{l-1}^j) \\ & \alpha u_{l+1}^{j+1} - \alpha u_{l+1}^{j-1} + 2\beta u_l^{j+1} - 2\beta u_l^{j-1} + \alpha u_{l-1}^{j+1} - \alpha u_{l-1}^{j-1} = \\ & 2 \frac{k.v}{h^2} u_{l+1}^j - 4 \frac{k.v}{h^2} u_l^j + 2 \frac{k.v}{h^2} u_{l-1}^j \\ & \alpha u_{l+1}^{j+1} + 2\beta u_l^{j+1} + \alpha u_{l-1}^{j+1} - 2 \frac{k.v}{h^2} u_{l+1}^j + 4 \frac{k.v}{h^2} u_l^j - \\ & \quad 2 \frac{k.v}{h^2} u_{l-1}^j - \alpha u_{l+1}^{j-1} - 2\beta u_l^{j-1} - \alpha u_{l-1}^{j-1} = 0 \\ & \alpha u_{l+1}^{j+1} + 2\beta u_l^{j+1} + \alpha u_{l-1}^{j+1} - 2\lambda u_{l+1}^j + 4\lambda u_l^j - 2\lambda u_{l-1}^j - \\ & \quad \alpha u_{l+1}^{j-1} - 2\beta u_l^{j-1} - \alpha u_{l-1}^{j-1} = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

elde edilir. Burada $\lambda = \frac{kv}{h^2}$ ve α, β parametrelerdir.

Uygun α, β parametrelerinin seçilmesiyle (2.1) denklemi için çeşitli metotlar elde edilir.

i) Eğer τ parametresi $\tan x = x$ denkleminin kökünün yarısına yakınsıyorsa $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$ sağlanmış olur. Bu durumda $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$ ve $\alpha \neq \frac{1}{12}$ için $\alpha = \frac{1}{6}, \beta = \frac{1}{3}$ alındığında (2.15) de $O(k^4 + h^2)$ hata mertebesi elde edilir.

ii) Eğer $\alpha = \frac{1}{12}$ ve $\beta = \frac{5}{12}$ ise o zaman (2.15) de $O(k^4 + h^4)$ hata mertebesi elde edilir.

2.4. Sınır Koşullarına Uyan Denklem Çıkarılması

Denklemin çözümü için homojen ve homojen olmayan Dirichlet sınır koşulları uygulanabildiği gibi türev sınır koşulları olan Neumann koşulları ve homojen olmayan karışık sınır koşulları da kullanılabilir.

i) Eğer $u(0,t) = g_0(t) = 0$ ve $u(1,t) = g_1(t) = 0$ ise homojen Dirichlet sınır koşulları vardır.

ii) Eğer $g_0(t) \neq 0$ veya $g_1(t) \neq 0$ ise homojen olmayan Dirichlet sınır koşulları vardır.

iii) (2.1) denklemi ilave türev sınır koşulları ile düşünürsek, bu koşullar;

$$u_x(0, t) = p(t), \quad u_x(1, t) = q(t).$$

şeklindedir.

$x = 0$ noktasında sınır koşulu sonlu fark terimidir. Yani;

$$\frac{u_1(t) - u_{-1}(t)}{2h} = p(t) \quad (2.16)$$

yazılabilir. Eğer (2.15) denkleminde $l = 0$ alınır;

$$\alpha u_1^{j+1} + 2\beta u_0^{j+1} + \alpha u_{-1}^{j+1} - 2\lambda u_1^j + 4\lambda u_0^j - 2\lambda u_{-1}^j - \alpha u_1^{j-1} - 2\beta u_0^{j-1} - \alpha u_{-1}^{j-1} = 0 \quad (2.17)$$

denkleminde elde edilir. (2.16) ve (2.17) denklemlerinden u_{-1} terimi elimine edilirse;

$$u_{-1}(t) = u_1(t) - 2hp(t)$$

$$\alpha u_1^{j+1} + 2\beta u_0^{j+1} + \alpha u_1^{j+1} - 2\alpha hp(t_{j+1}) - 2\lambda u_1^j + 4\lambda u_0^j - 2\lambda u_1^j + 4\lambda hp(t_j) - \alpha u_1^{j-1}$$

$$- 2\beta u_0^{j-1} - \alpha u_1^{j-1} + 2\alpha hp(t_{j-1}) = 0$$

$$2\alpha u_1^{j+1} + 2\beta u_0^{j+1} - 4\lambda u_1^j + 4\lambda u_0^j - 2\alpha u_1^{j-1} - 2\beta u_0^{j-1} =$$

$$2\alpha hp(t_{j+1}) - 4\lambda hp(t_j) - 2\alpha hp(t_{j-1}) \quad (2.18)$$

elde edilir.

$x = r$ noktası içinde benzer denklem elde edilir.

$$\frac{u_{n+1}(t) - u_{n-1}(t)}{2h} = q(t)$$

$$u_{n+1}(t) = 2hq(t) + u_{n-1}(t)$$

$$\alpha u_{n+1}^{j+1} + 2\alpha hq(t_{j+1}) + 2\beta u_n^{j+1} + \alpha u_{n-1}^{j+1} - 2\lambda u_{n-1}^j - 4\lambda hq(t_j) + 4\lambda u_n^j - 2\lambda u_{n-1}^j - \alpha u_{n-1}^{j-1} - 2\alpha hq(t_{j-1}) - 2\beta u_n^{j-1} - \alpha u_{n-1}^{j-1} = 0$$

$$2\alpha u_{n-1}^{j+1} + 2\beta u_n^{j+1} - 4\lambda u_{n-1}^j + 4\lambda u_n^j - 2\alpha u_{n-1}^{j-1} - 2\beta u_n^{j-1} = -2\alpha hq(t_{j+1}) + 4\lambda hq(t_j) + 2\alpha hq(t_{j-1}). \quad (2.19)$$

(2.15), (2.18) ve (2.19)'u kullanarak türev sınır koşulları yardımıyla (2.1) denklemini çözülebilir.

iv) (2.1) denklemini karışık sınır koşulları ile birlikte düşünelim:

$$u_x(0, t) - w_1 u(0, t) = p(t), \quad w_1 > 0,$$

$$u_x(1, t) - w_2 u(1, t) = q(t), \quad w_2 > 0.$$

Benzer şekilde $x=0$ noktasında sınır koşulu merkezi farklar cinsinden

$$\frac{u_1(t) - u_{-1}(t)}{2h} - w_1 u_0(t) = p(t). \quad (2.20)$$

şeklinde yazılır. (2.20) ve (2.17) denklemlerinden u_{-1} terimi elimine edilirse;

$$2\alpha u_1^{j+1} + (2\beta - 2\alpha w_1 h) u_0^{j+1} - 4\lambda u_1^j + (4\lambda + 4\lambda w_1 h) u_0^j - 2\alpha u_1^{j-1} - (2\beta - 2\alpha w_1 h) u_0^{j-1} = 2\alpha h p(t_{j+1}) - 4\lambda h p(t_j) - 2\alpha h p(t_{j-1}). \quad (2.21)$$

denklemini elde edilir. $x = r$ noktasında sınır koşulunu elde etmek için u_{n+1} terimi elimine edilir ve

$$2\alpha u_{n-1}^{j+1} + (2\beta - 2\alpha w_2 h) u_n^{j+1} - 4\lambda u_{n-1}^j + (4\lambda + 4\lambda w_2 h) u_n^j - 2\alpha u_{n-1}^{j-1} + (-2\beta + 2\alpha w_2 h) u_n^{j-1} = -2\alpha h q(t_{j+1}) + 4\lambda h q(t_j) + 2\alpha h q(t_{j-1}) \quad (2.22)$$

elde edilir. (2.15), (2.21) ve (2.22) denklemlerini kullanarak karışık sınır koşulları ile (2.1) denklemini çözebiliriz.

2.5. Kesme Hatası ve Kararlılık Analizi

(2.15) eşitliğini $u(x_l, t_j)$ teriminin ve türevlerinin cinsinden Taylor serisine açarsak, aşağıdaki kesme hatasını elde ederiz.

$$\begin{aligned}
T_l^j &= \alpha u_{l+1}^{j+1} + 2\beta u_l^{j+1} + \alpha u_{l-1}^{j+1} - 2\lambda u_{l+1}^j + 4\lambda u_l^j - 2\lambda u_{l-1}^j - \alpha u_{l+1}^{j-1} - 2\beta u_l^{j-1} - \alpha u_{l-1}^{j-1} \\
&= \left\{ \alpha + \alpha h D_x + \alpha k D_t + \frac{1}{2} \alpha h^2 D_x^2 + \frac{1}{2} \alpha k^2 D_t^2 + \alpha h k D_x D_t + \dots + 2\beta + 2\beta k D_t + \beta k^2 D_t^2 + \frac{1}{3} \beta k^3 D_t^3 + \dots + \alpha \right. \\
&\quad - \alpha h D_x + \alpha k D_t + \frac{1}{2} \alpha h^2 D_x^2 + \frac{1}{2} \alpha k^2 D_t^2 - \alpha h k D_x D_t + \dots + 4\lambda - 2\lambda + 2\lambda h D_x - \lambda h^2 D_x^2 - \frac{1}{3} \lambda h^3 D_x^3 + \dots - \alpha \\
&\quad - \alpha h D_x + \alpha k D_t - \frac{1}{2} \alpha h^2 D_x^2 - \frac{1}{2} \alpha k^2 D_t^2 + \alpha h k D_x D_t + \dots - 2\beta + 2\beta k D_t - \beta k^2 D_t^2 - \frac{1}{3} \beta k^3 D_t^3 + \dots \\
&\quad \left. - \alpha + \alpha h D_x + \alpha k D_t - \frac{1}{2} \alpha h^2 D_x^2 - \frac{1}{2} \alpha k^2 D_t^2 - \alpha h k D_x D_t + \dots - \frac{1}{360} \alpha k^6 D_t^6 \right\} u_l^j \quad (2.23)
\end{aligned}$$

(2.23) ifadesi;

$$\begin{aligned}
T_l^j &= \left\{ [2v(2\alpha + 2\beta - 1)] D_x^2 + \left[v \left(2\alpha - \frac{1}{6} \right) \right] h^2 D_x^4 + \left[\frac{\alpha}{3v} \right] k^4 D_t^4 \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{1}{6} v \left(\alpha - \frac{1}{15} \right) \right] h^4 D_x^6 + \dots \right\} u_l^j. \quad (2.24)
\end{aligned}$$

şeklinde de gösterilebilir.

α , β ve λ parametrelerinin farklı değerleri için kesme hataları elde edilebilir (2.15) denkleminin kararlılığı için (2.15) denkleminin çözümünün (l, j) grid noktasında

$$u_l^j = \xi^j e^{li\theta}, \quad (2.25)$$

formunda olduğunu kabul edelim. Burada $i = \sqrt{-1}$, θ reel ve ξ genel olarak kompleks bir ifadedir. (2.18) eşitliğinin (2.15) de yerine yazılmasıyla aşağıdaki karakteristik denklem elde edilir.

$$(\alpha e^{i\theta} + 2\beta + \alpha e^{-i\theta}) \xi^2 + (-2\lambda e^{i\theta} + 4\lambda - 2\lambda e^{-i\theta}) \xi + (-\alpha e^{i\theta} - 2\beta - \alpha e^{-i\theta}) = 0. \quad (2.26)$$

Bu denklem;

$$\varphi \xi^2 + M \xi + N = 0, \quad (2.27)$$

şeklinde de yazılabilir. Burada

$$\varphi = \alpha e^{i\theta} + 2\beta + \alpha e^{-i\theta}, \quad M = -2\lambda e^{i\theta} + 4\lambda - 2\lambda e^{-i\theta}, \quad N = -\alpha e^{i\theta} - 2\beta - \alpha e^{-i\theta}.$$

dir. $\xi = (1+z/1-z)$ dönüşümü altında (2.20)'yi tekrar aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$(\varphi - M + N)z^2 + 2(\varphi - N)z + (\varphi + M + N) = 0. \quad (2.28)$$

$$|\xi| < 1 \text{ gerek ve yeter şartı için } \varphi - M + N > 0, \quad \varphi - N > 0,$$

$\varphi + M + N > 0$ olmalıdır. Bu koşullar her reel θ açısı için sağlanır ve $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ dır.

2.6.Nümerik Örnekler

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 1, & 0.5 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1, \quad t \geq 0$$

problemini ele alalım. Bu problem için tanımlanan seri çözümü

$$u(x, t) = x + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2 \pi^2} \right) \left(\sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right) \sin n\pi x e^{-n^2 \pi^2 t}$$

şeklindedir. Bu serinin düzgün yakınsaklığı gösterilebilir.

Ele alınan problem polinom olmayan spline fonksiyonlar yardımıyla çözüldüğünde elde edilen sonuçlar tablo halinde verilmiştir. Tabloda ayrıca düğüm noktalarında elde edilen maksimum mutlak hatalar ($\max |u(x_i) - u_i|$) da verilmiştir.

Çizelge 2.1. Problemin çözümünde elde edilen maksimum mutlak hatalar.

h	k	λ	$O(k^4 + h^2)$	$O(k^4 + h^4)$	(Sallam, 2004)
0.100	0.010	1.00	1.66 (-06)	1.50 (-08)	2.3 (-6)
0.050	0.010	4.00	5.60 (-07)	2.46 (-09)	6.0 (-7)
0.025	0.010	16.0	1.59 (-07)	1.22 (-09)	1.0 (-7)
0.020	0.001	2.50	1.01 (-08)	2.08 (-10)	7.6 (-8)
0.010	0.001	10.0	3.94 (-09)	2.44 (-11)	1.9 (-8)
0.005	0.001	40.0	6.95 (-10)	6.20 (-12)	4.7 (-9)

2.7. Sonuç

Tablodan görüldüğü gibi uygulanan metot ile elde edilen hatalar diğer yöntemlerden elde edilen hatalardan daha küçüktür. Bundan dolayı uygulanan yöntemin geçerliliği ve etkinliği anlaşılmaktadır.

3. BRATU PROBLEMİNİN POLİNOM OLMAYAN SPLİNE FONKSİYONLAR YARDIMIYLA ÇÖZÜMLERİ

3.1. Giriş

Bu bölümde Bratu problemi olarak ve (Caglar vd., 2010; Buckmire, 2004; Jacobsen ve Schmitt, 2002; McGough, 1998; Mounim ve Dormale, 2006) ile verilen Liouville-Bratu-Gelfand denklemini ele alalım;

$$\begin{aligned}\Delta u(x) + \lambda e^{u(x)} &= 0, \quad x \in \Omega \\ u(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega,\end{aligned}\quad (3.1)$$

Burada Δ laplace operatörüdür, $\lambda > 0$ ve Ω sınırlı bir bölgedir. Aşağıdaki sınır koşulları ile verilen klasik Bratu problemini ele alalım;

$$\begin{aligned}u''(x) + \lambda e^{u(x)} &= 0, \\ u(0) = u(1) &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Bir boyutlu Bratu probleminin analitik çözümü aşağıdaki formda verilmektedir.

$$u(x) = -2 \ln \left[\frac{\cosh\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{\theta}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\theta}{4}\right)} \right], \quad (3.3)$$

Burada $\theta = \sqrt{2\lambda} \cosh\left(\frac{\theta}{4}\right)$ denkleminin çözümüdür.

Bratu problemi $\lambda > \lambda_c$ için sıfır çözüme,

$\lambda = \lambda_c$ için bir çözüme,

$\lambda < \lambda_c$ için iki çözüme sahiptir.

Burada λ_c kritik değeri $1 = \frac{1}{4} \sqrt{2\lambda_c} \sinh\left(\frac{\theta}{4}\right)$ denklemini sağlar ve (Buckmire, 2004; Jacobsen ve Schmitt, 2002; Boyd, 2003; Frank-Kamenetski, 1955) de hesaplandığı gibi

$\lambda_c = 3,513830719$ şeklindedir.

Bu çalışmanın esas amacı bir boyutlu Bratu probleminin polinom olmayan spline fonksiyonlar yardımıyla nümerik çözümlerini elde etmektir. Ayrıca bu çalışmada metodun yakınsaklık analizi de incelenmiştir.

3.2. Metodun Tanımlanması ve Sınır Koşullarının Geliştirilmesi

$[a, b]$ aralığı üzerinde x_i düğüm noktaları ile aşağıdaki şekilde bir bölüntü düşünelim:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

Burada $h = \frac{b-a}{n}$ dir. (Rashidinia vd., 2007) da verilen polinom olmayan spline fonksiyonları arasındaki bağıntılar (3.5)-(3.7) ve (3.9)-(3.10) gibidir. (Rashidinia vd., 2007) da ki (3.10) bağıntısı spline fonksiyonları için tutarlıdır. (3.2) problemi için bu bağıntı faydalıdır. Buna göre;

$$\begin{aligned} pM_{i-2} + rM_{i-1} + sM_i + rM_{i+1} + pM_{i+2} = \\ \frac{1}{h^2} [\alpha(u_{i+2} + u_{i-2}) + 2(\beta - \alpha)(u_{i+1} + u_{i-1}) + (2\alpha - 4\beta)u_i], \\ i = 2, \dots, n-2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Burada

$$\begin{aligned} p = \alpha_1 + \frac{\alpha}{6}, \quad r = 2 \left[\frac{1}{6}(2\alpha + \beta) - (\alpha_1 + \beta_1) \right], \quad s = 2 \left[\frac{1}{6}(\alpha + 4\beta) + (\alpha_1 - 2\beta_1) \right], \\ \alpha = \left(\frac{1}{\theta^2} \right) (\theta csc\theta - 1), \quad \beta = \left(\frac{1}{\theta^2} \right) (1 - \theta cot\theta), \\ \alpha_1 = \frac{1}{\theta^2} \left(\frac{1}{6} - \alpha \right), \quad \beta_1 = \frac{1}{\theta^2} \left(\frac{1}{3} - \beta \right), \quad \theta = \tau h, \end{aligned}$$

Burada τ spline fonksiyonunun trigonometrik kısmının sıklığıdır. x_i düğüm noktasında önerilen (3.2) diferensiyel denklemi:

$$M_i = -\lambda e^{u_i}, \quad (3.5)$$

Burada $M_i = S_i''(x_i)$, $u_i = u(x_i)$ tam değerinin yaklaşık değeri ve $S_i(x)$ (Rashidinia vd., 2007) da belirtilen polinom olmayan spline fonksiyondur. (3.5) eşitliğini (3.4) de yerine yazarsak aşağıdaki formda lineer olmayan denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned} (\alpha u_{i-2} + p\lambda h^2 e^{u_{i-2}}) + (2(\beta - \alpha)u_{i-1} + \lambda h^2 r e^{u_{i-1}}) + ((2\alpha - 4\beta)u_i + \lambda s h^2 e^{u_i}) \\ + (2(\beta - \alpha)u_{i+1} + \lambda h^2 r e^{u_{i+1}}) + (\alpha u_{i+2} + \lambda p h^2 e^{u_{i+2}}) = 0, \quad i = 2(1)n - 2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Lineer olmayan sisteminin tek çözümünü elde etmek için sınır koşullarını sağlayan iki tane daha denkleme ihtiyaç vardır.

(Rashidinia vd., 2007)'dan 6.mertebeden sınır değer problemini elde etmek için aşağıdaki özdeşliği tanımlayabiliriz:

$$\sum_{k=0}^3 a_k u_k + h^2 \sum_{k=0}^5 b_k u_k'' + t_1 h^8 u_0^{(8)} = 0, \quad i = 1,$$

$$\sum_{k=0}^3 a_k u_{n-k} + h^2 \sum_{k=0}^5 b_k u_{n-k}'' + t_{n-1} h^8 u_n^{(8)} = 0, \quad i = n - 1. \quad (3.7)$$

Bilinmeyen a ve b katsayılarını elde etmek için Taylor seri açılımları yapılırsa aşağıdaki a ve b katsayıları bulunmuş olur.

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) = (-10, 19, -8, -1), \quad t_1 = t_{n-1} = \left(\frac{2179}{60480} \right),$$

$$(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) = \left(\frac{179}{240}, \frac{1057}{120}, \frac{39}{40}, \frac{41}{60}, \frac{-61}{240}, \frac{1}{24} \right).$$

3.3. Kararlılık Analizi

Bu bölümde (3.7) sınır koşulları ile verilen (3.6) denkleminin kararlılık analizi incelenilecektir. Denklem matris formunda yazılırsa;

$$A_0 U^{(1)} + \lambda h^2 B f^{(1)}(U^{(1)}) = R^{(1)}, \quad (3.8)$$

burada $f^{(1)}(U^{(1)}) = e^{U^{(1)}}$ dir. A_0 ve B matrisleri $(n-1) \times (n-1)$ boyutlu matrislerdir ve aşağıdaki formda tanımlanır.

$$A_0 = P_{n-1}(1, 2, 1) P_{n-1}(-1, 4, -1) + 6 P_{n-1}(1, 2, 1), \quad (3.9)$$

burada;

$$P_{n-1}(x, z, y) = \begin{pmatrix} z & -y & & & \\ -x & z & -y & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -x & z & -y \\ & & & -x & z \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{-1057}{120} & \frac{-39}{672} & \frac{-41}{2952} & \frac{61}{60} & \frac{-1}{24} \\ \frac{61}{240} & \frac{-1}{24} & \frac{672}{360} & \frac{12}{360} & \frac{672}{360} \\ \frac{672}{360} & \frac{2952}{360} & \frac{672}{360} & \frac{12}{360} & \frac{672}{360} \\ \frac{360}{12} & \frac{360}{672} & \frac{360}{2952} & \frac{360}{672} & \frac{360}{12} \\ \frac{360}{360} & \frac{360}{360} & \frac{360}{360} & \frac{360}{360} & \frac{360}{360} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \frac{12}{360} & \frac{672}{360} \\ & & & \frac{12}{360} & \frac{672}{360} \\ & & & \frac{12}{360} & \frac{672}{360} \\ & & & \frac{61}{240} & \frac{2952}{360} \\ & & & \frac{-1}{24} & \frac{61}{240} \\ & & & \frac{672}{360} & \frac{360}{360} \\ & & & \frac{360}{360} & \frac{-39}{40} \\ & & & \frac{-41}{60} & \frac{-1057}{120} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

dir.

$D_n = \det(P_n)$ 'i gösterir. Böylece son satır elemanlarına göre determinantın açılımı aşağıdaki tekrarlama bağıntısını verir.

$$D_n = z D_{n-1} - xy D_{n-2}, \quad n=1,2,\dots, \quad (3.12)$$

$$D_{-1} = 0, \quad D_0 = 1.$$

Birçok sonuç bu fark denklemlerinden direk elde edilir.

Teorem3.1. (3.12) başlangıç değer probleminin çözümü;

$$D_n = \begin{cases} z^n, & xy = 0, \\ (1+n)\left(\frac{z}{2}\right)^n, & \sqrt{xy} = \frac{z}{2}, \\ \left(\frac{z}{2\cos(\theta)}\right)^n \left(\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}\right), & \sqrt{xy} = \frac{z}{2\cos(\theta)}, \sqrt{xy} > \frac{z}{2}, \\ \left(\frac{z}{2\cosh(\theta)}\right)^n \left(\frac{\sinh((n+1)\theta)}{\sinh(\theta)}\right), & \sqrt{xy} = \frac{z}{2\cosh(\theta)}, 0 < \sqrt{xy} < \frac{z}{2}, \end{cases} \quad (3.13)$$

dür.

İspat:

(Fischer ve Usmani, 1969) kullanılarak (3.12) nin karakteristik denklemi

$$s^2 - zs + xy = 0, \quad (3.14)$$

ve bu denklemin kökleri;

$$s_1, s_2 = \frac{z \mp \sqrt{z^2 - 4xy}}{2}$$

şeklindedir. xy 'nin değerine göre dört durum ortaya çıkar.

1. Durum: Eğer $xy = 0$ ise $D_n = c_1(z)^n$ ve $D_0 = 1$ için $D_n = (z)^n$ olur.

2. Durum: Eğer $xy = \frac{z^2}{4}$ ise $D_n = (c_1 + c_2 n) \left(\frac{z}{2}\right)^n$ dir. $D_{-1} = 0$ ve $D_0 = 1$ başlangıç koşulları kullanılırsa $D_n = (1 + n) \left(\frac{z}{2}\right)^n$ olur.

3. Durum: Eğer $xy > \frac{z^2}{4}$ ise $\sqrt{xy} = \frac{z}{2\cos(\theta)}$ ve

$$D_n = c_1 \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - \frac{4z^2}{4\cos^2(\theta)}}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - \frac{4z^2}{4\cos^2(\theta)}}}{2} \right)^n$$

elde edilir. Sadeleştirme yapıldıktan sonra;

$$D_n = (c_1 e^{in\theta} + c_2 e^{-in\theta}) \frac{z^n}{2^n \cos^n(\theta)}$$

olur. Bu denkleme başlangıç koşulları uygulandığında

$$D_n = \left(\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \right) \frac{z^n}{2^n \cos^n(\theta)}$$

eşitliği elde edilir.

4. Durum: Eğer $0 < xy < \frac{z^2}{4}$ ise $\sqrt{xy} = \frac{z}{2\cosh(\theta)}$ ve

$$D_n = c_1 \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - \frac{4z^2}{4\cosh^2(\theta)}}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - \frac{4z^2}{4\cosh^2(\theta)}}}{2} \right)^n$$

şeklindedir. Yine sadeleştirme yapıldıktan sonra;

$$D_n = (c_1 e^{n\theta} + c_2 e^{-n\theta}) \frac{z^n}{2^n \cosh^n(\theta)}$$

elde edilen denkleme başlangıç koşulları uygulandığında;

$$D_n = \left(\frac{\sinh((n+1)\theta)}{\sinh(\theta)} \right) \frac{z^n}{2^n \cosh^n(\theta)}.$$

Not: Yukarıdaki teoremin ispatında (3.10) daki P_{n-1} matrisinin özel durumu $x = y = 1$ için (3.27) de verilmiştir. $P_{n-1}^{-1}(x, z, y)$ değerinin hesaplanması için $R_i = \sum_{j=1}^n |P_{ij}|$ tanımlanırsa

burada $P_{n-1}^{-1}(x, z, y) = [P_{ij}]$, $\|P_{n-1}^{-1}(x, z, y)\| = Ma x_i R_i$ olur. $0 \leq xy \leq \frac{z^2}{4}$ için $\|P_{n-1}^{-1}(x, z, y)\|$ belirlenebilir.

Teorem3.2. $x, z, y \in S$ için $P_{n-1}(x, z, y)$ matrisi iyi koşulludur. Burada

$$S = \{(x, z, y) | x \geq 0, z > 0, y \geq 0, x + y \leq z\} \quad (3.15)$$

İspat: $P_{n-1}(x, z, y)$ matrisi $0 \leq xy \leq \frac{z^2}{4}$ için monoton olduğunda $P_{n-1}^{-1}(x, z, y) > 0$ dir.

Ayrık sınır değer probleminin çözülmesiyle R_i elde edilir.

$$-x R_{i-1} + z R_i - y R_{i+1} = 1,$$

$$R_0 = R_{n+1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.16)$$

$$P_{n-1}(x, z, y) P_{n-1}^{-1}(x, z, y) = 1, \quad (3.17)$$

(3.17) denklemini $\Psi = [111 \dots 1]^T$, ile çarptığımızda

$$P_{n-1}(x, z, y) P_{n-1}^{-1}(x, z, y) \Psi = \Psi \quad \Rightarrow \quad P_{n-1}(x, z, y) R = \Psi$$

elde ederiz. Burada; $R = [R_1, R_2, \dots, R_{n-1}]$ dir. x, y ve z 'nin değerlerine bağlı olarak birkaç durum düşünelim.

1. Durum: $xy = 0$. Bu durumda $y > 0$ ve $x = 0$ kabul edelim. Böylece $P_{n-1}^{-1}(0, z, y)$ üst üçgensel matris haline gelir.

$$P_{n-1}^{-1}(0, z, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & \frac{y}{z^2} & \frac{y^2}{z^3} & \dots & \frac{y^{n-3}}{z^{n-2}} & \frac{y^{n-2}}{z^{n-1}} \\ & & \ddots & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{z} & \frac{y}{z^2} & \frac{y}{z^3} \\ & & & & \frac{1}{z} & \frac{y}{z^2} \\ & & & & & \frac{1}{z} \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

ve

$$\begin{aligned} \|P_{n-1}^{-1}(0, z, y)\| &= \frac{1}{y} \left(\frac{y}{z} + \frac{y^2}{z^2} + \dots + \frac{y^{n-1}}{z^{n-1}} \right) \\ &\leq \frac{z}{yz - y^2}, \quad \frac{y}{z} < 1 \end{aligned}$$

ise böylece;

$$\|P_{n-1}^{-1}(0, z, y)\| \leq \begin{cases} \frac{1}{z}, & x = y = 0, \\ \frac{z}{yz-y^2}, & x = 0, 0 < \frac{y}{z} < 1, \\ \frac{z}{xz-x^2}, & y = 0, 0 < \frac{x}{z} < 1. \end{cases} \quad (3.19)$$

yazılabilir.

2. Durum: $xy = \frac{z^2}{4}$. Bu durumu incelerken iki alt durumdan söz edeceğiz.

i) Eğer $xy = \frac{z^2}{4}$ ve $x + y = z$ ise tek çözüm $x = y = \frac{z}{2}$ dir. Bu durumda $P_{n-1}\left(\frac{z}{2}, z, \frac{z}{2}\right) = \frac{z}{2} P_{n-1}(1, 2, 1)$ olur. Böylece $P_{n-1}^{-1}\left(\frac{z}{2}, z, \frac{z}{2}\right) = \frac{2}{z} P_{n-1}^{-1}(1, 2, 1)$ yazılabilir. (Henrici, 1961) yayını kullanılarak;

$$\|P_{n-1}^{-1}\left(\frac{z}{2}, z, \frac{z}{2}\right)\| \leq \frac{2}{z} \|P_{n-1}^{-1}(1, 2, 1)\| \leq \frac{2}{z} \left(\frac{n^2}{8}\right) = \left(\frac{n^2}{4z}\right) \text{ olur.}$$

ii) $xy = \frac{z^2}{4}$ ve $x + y > z$ ise iki olasılık söz konusudur. $x > \frac{z}{2}$, $y < \frac{z}{2}$ veya

$x < \frac{z}{2}$, $y > \frac{z}{2}$ dir. Şimdi $R_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-1} P_{ij}$ 'i düşünelim. Burada $P_{n-1}^{-1}(x, z, y) = [P_{ij}]$ dir. Eğer $(n-1) \rightarrow \infty$, $x > \frac{z}{2}$ sonra $R_{n-1}^{-1} \rightarrow \infty$ olur. Dolayısıyla $P_{n-1}(x, z, y)$ matrisi iyi koşullu değildir. $x < \frac{z}{2}$, $y > \frac{z}{2}$ içinde benzer işlemler yapılabilir.

3. Durum: $0 \leq xy \leq \frac{z^2}{4}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki durumları inceleyelim.

(I) Eğer $0 < xy < \frac{z^2}{4}$ ve $0 < x + y < z$ ise $P_{n-1}(x, z, y)$ matrisi iyi koşullanmış olur.

(II) Eğer $0 < xy < \frac{z^2}{4}$ ve $x + y = z$ ise $P_{n-1}(x, z, y)$ matrisi iyi koşullanmış olur.

(III) Eğer $0 < xy < \frac{z^2}{4}$ ve $x + y > z$ ise $P_{n-1}(x, z, y)$ matrisi kötü koşullanmış olur.

3. Durumun ispatı kolayca (3.12) ve (3.13) tarafından sağlanır.

3.4. Nümerik Örnekler

Önerilen metodun geçerliliğini ve etkinliğini göstermek için yakınsaklığına dikkat edilir. (3.2) sınır değer problemini düşünelim. Bu problem farklı n değerleri için ve

$$\alpha = \frac{1}{12}, \beta = \frac{5}{12}, p = \frac{1}{360}, r = \frac{56}{360}, s = \frac{246}{360}$$

değerleri için incelenmiştir.

Çözümde elde edilen maksimum mutlak hata Çizelge 3.1.'de verilmiştir. n=10 için problemin çözümünden elde edilen mutlak hatalar (Caglar vd., 2010; McGough, 1998; Liao ve Tan, 2007)'deki metodlarla karşılaştırılarak Çizelge 3.2., 3.3., 3.4.'de verilmiştir. Çizelgelerdeki

verilere göre uygulanan yöntemden elde edilen sonuçlar, yöntemin iyi sonuçlar verdiğini göstermiştir.

Çizelge 3.1. Maksimum mutlak hata.

N	$\lambda = 3.51$	$\lambda = 2$	$\lambda = 1$
8	3.51×10^{-5}	4.53×10^{-8}	5.64×10^{-9}
16	1.45×10^{-7}	1.76×10^{-9}	4.66×10^{-11}
32	1.02×10^{-9}	2.13×10^{-11}	8.33×10^{-13}
64	1.48×10^{-11}	2.87×10^{-13}	9.21×10^{-15}
128	1.58×10^{-13}	2.47×10^{-14}	-

Çizelge 3.2. $\lambda = 1$ için maksimum mutlak hata.

X	Uygulanan Metot	Laplace[4]	Ayrıştırma[13]	B-Spline[1]
0.1	5.77×10^{-10}	1.98×10^{-6}	2.68×10^{-3}	2.98×10^{-6}
0.2	2.47×10^{-10}	3.94×10^{-6}	2.02×10^{-3}	5.46×10^{-6}
0.3	4.56×10^{-11}	5.85×10^{-6}	1.52×10^{-4}	7.33×10^{-6}
0.4	9.64×10^{-11}	7.70×10^{-6}	2.20×10^{-3}	8.50×10^{-6}
0.5	1.46×10^{-10}	9.47×10^{-6}	3.01×10^{-3}	8.89×10^{-6}
0.6	9.64×10^{-11}	1.11×10^{-5}	2.20×10^{-3}	8.50×10^{-6}
0.7	4.56×10^{-11}	1.26×10^{-5}	1.52×10^{-4}	7.33×10^{-6}
0.8	2.47×10^{-10}	1.35×10^{-5}	2.02×10^{-3}	5.46×10^{-6}
0.9	5.77×10^{-10}	1.20×10^{-5}	2.68×10^{-3}	2.98×10^{-6}

Çizelge 3.3. $\lambda = 2$ için maksimum mutlak hata.

X	Uygulanan Metot	Laplace[4]	Ayrıştırma[13]	B-Spline[1]
0.1	9.71×10^{-9}	2.13×10^{-3}	1.52×10^{-2}	1.72×10^{-5}
0.2	1.41×10^{-8}	4.21×10^{-3}	1.47×10^{-2}	3.26×10^{-5}
0.3	1.98×10^{-8}	6.19×10^{-3}	5.89×10^{-3}	4.49×10^{-5}
0.4	2.42×10^{-8}	8.00×10^{-3}	3.25×10^{-3}	5.28×10^{-5}
0.5	2.60×10^{-8}	9.60×10^{-3}	6.98×10^{-3}	5.56×10^{-5}
0.6	2.42×10^{-8}	1.09×10^{-3}	3.25×10^{-3}	5.28×10^{-5}
0.7	1.98×10^{-8}	1.19×10^{-2}	5.89×10^{-3}	4.49×10^{-5}
0.8	1.41×10^{-8}	1.24×10^{-2}	1.47×10^{-2}	3.26×10^{-5}
0.9	9.71×10^{-9}	1.09×10^{-2}	1.52×10^{-2}	1.72×10^{-5}

Çizelge 3.4. $\lambda = 3.51$ için maksimum mutlak hata.

X	Uygulanan Metot	B-Spline[1]
0.1	6.61×10^{-6}	3.84×10^{-2}
0.2	5.83×10^{-6}	7.48×10^{-2}
0.3	6.19×10^{-6}	1.06×10^{-1}
0.4	6.89×10^{-6}	1.27×10^{-1}
0.5	7.31×10^{-6}	1.35×10^{-1}
0.6	6.89×10^{-6}	1.27×10^{-1}
0.7	6.19×10^{-6}	1.06×10^{-1}
0.8	5.83×10^{-6}	7.48×10^{-2}
0.9	6.61×10^{-6}	3.84×10^{-2}

3.5. Sonuç

Polinom olmayan Spline metodu uygulanarak yaklaşık çözümü elde edilen ikinci mertebeden lineer olmayan sınır-değer problemleri, etkin çözümlere sahiptir.

4. BURGER DENKLEMİNİN POLİNOM OLMAYAN SPLİNE FONKSİYONLAR YARDIMIYLA ÇÖZÜMÜ

4.1.Giriş

$$u_t + uu_x - vu_{xx} = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq 0 \quad (4.1)$$

formunda Burger denklemini ele alalım. Bu denklem için sınır koşulları;

$$\begin{aligned} u(a, t) &= \beta_1(t), & u(b, t) &= \beta_2(t), \\ u_x(a, t) &= \lambda_1, & u_x(b, t) &= \lambda_2, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

şeklindedir.

(4.2) deki son iki koşul $0 < v < 1$ için doğru başlangıç zamanıdır. Bunun her zaman sağlandığını kabul edelim ve başlangıç koşulu olarak;

$$u(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (4.3)$$

denklemini alalım.

Bu bölümde polinom olmayan spline fonksiyonlar yardımıyla çözüm metodu tanıtılacak, kararlılık analizi yapılacak, yöntemin uygulanışına dair nümerik örnekler sunulacaktır. Önerilen metodun etkinliğini göstermek için elde edilen nümerik sonuçlar tablo halinde gösterilerek yorumlanacaktır.

Bu çalışmada, (4.1) lineer olmayan Burger denkleminin çözümüne ait bir yaklaşım elde edebilmek için polinom olmayan spline fonksiyonların uygulanmasıyla nümerik metod geliştirilecektir. Bu çalışmadaki polinom olmayan spline fonksiyon trigonometrik ve birinci dereceden polinomlar içerir.

4.2. Metot

Polinom olmayan spline metodunu uygulamak için $N > 0$ ve zaman adımı olarak $k > 0$ seçelim. Konum adımı olarak $h = \frac{b-a}{N+1}$, her $i = 0, 1, \dots, N + 1$ için (x_i, t_j) düğüm noktalarında $x_i = a + ih$ ve her $j = 0, 1, \dots$ için $t_j = jk$ olur.

$u_i^j \equiv u(x_i, t_j)$, (x_i, U_i^j) ikilisi ve (x_{i+1}, U_{i+1}^j) noktalarından geçen karışık spline fonksiyonunun $P_i(x, t_j)$ yardımıyla elde edilen yaklaşık çözümü olsun.

Bu durumda her $i = 0, 1, \dots, N$ için

$$P_i(x, t_j) = a_i(t_j) \cos w(x - x_i) + b_i(t_j) \sin w(x - x_i) + c_i(t_j)(x - x_i) + d_i(t_j) \quad (4.4)$$

olur. U_i^j, U_{i+1}^j, S_i^j ve S_i^{j+1} terimlerinin katsayılarını elde etmek için ilk olarak

$$P_i(x_i, t_j) = U_i^j, \quad P_i(x_{i+1}, t_j) = U_{i+1}^j, \quad P_i^{(2)}(x_i, t_j) = S_i^j, \quad \text{ve} \quad P_i^{(2)}(x_{i+1}, t_j) = S_{i+1}^j \quad (4.5)$$

tanımlanır. (4.4) ve (4.5) denklemleri kullanılarak;

$$P_i(x_i, t_j) = U_i^j$$

ise;

$$P_i(x_i, t_j) = a_i(t_j) \cos w(x_i - x_i) + b_i(t_j) \sin w(x_i - x_i) + c_i(t_j)(x_i - x_i) + d_i(t_j) = U_i^j$$

$$a_i(t_j) \cos 0 + b_i(t_j) \sin 0 + c_i(t_j)(0) + d_i(t_j) = U_i^j$$

$$a_i(t_j) + d_i(t_j) = U_i^j$$

$$a_i + d_i = U_i^j.$$

$$P_i(x_{i+1}, t_j) = U_{i+1}^j$$

ise;

$$P_i(x_{i+1}, t_j) = a_i(t_j) \cos w(x_{i+1} - x_i) + b_i(t_j) \sin w(x_{i+1} - x_i) + c_i(t_j)(x_{i+1} - x_i) + d_i(t_j) \\ = U_{i+1}^j$$

$$a_i(t_j) \cos wh + b_i(t_j) \sin wh + c_i(t_j)h + d_i(t_j) = U_{i+1}^j$$

$$a_i \cos \theta + b_i \sin \theta + c_i h + d_i = U_{i+1}^j.$$

$$P_i^{(2)}(x_i, t_j) = S_i^j$$

ise;

$$P_i^{(1)}(x, t_j) = -a_i(t_j)w \sin w(x - x_i) + b_i(t_j)w \cos w(x - x_i) + c_i(t_j)$$

$$P_i^{(2)}(x, t_j) = -a_i(t_j)w^2 \cos w(x - x_i) - b_i(t_j)w^2 \sin w(x - x_i)$$

$$P_i^{(2)}(x_i, t_j) = -a_i(t_j)w^2 \cos w(x_i - x_i) - b_i(t_j)w^2 \sin w(x_i - x_i) = S_i^j$$

$$P_i^{(2)}(x_i, t_j) = -a_i(t_j)w^2 \cos 0 - b_i(t_j)w^2 \sin 0 = S_i^j$$

$$-a_i(t_j)w^2 = S_i^j$$

$$-a_i w^2 = S_i^j.$$

$$P_i^{(2)}(x_{i+1}, t_j) = S_{i+1}^j$$

ise;

$$P_i^{(2)}(x, t_j) = -a_i(t_j)w^2 \cos w(x - x_i) - b_i(t_j)w^2 \sin w(x - x_i)$$

$$P_i^{(2)}(x_{i+1}, t_j) = -a_i(t_j)w^2 \cos w(x_{i+1} - x_i) - b_i(t_j)w^2 \sin w(x_{i+1} - x_i) = S_{i+1}^j$$

$$-a_i w^2 \cos wh - b_i w^2 \sin wh = S_{i+1}^j$$

$$-a_i w^2 \cos \theta - b_i w^2 \sin \theta = S_{i+1}^j. \quad (4.6)$$

elde edilir. Burada;

$a_i \equiv a_i(t_j)$, $b_i \equiv b_i(t_j)$, $c_i \equiv c_i(t_j)$, $d_i \equiv d_i(t_j)$ ve $\theta = wh$ 'dır. Son dört denklemin çözülmesiyle aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$a_i = -\frac{h^2}{\theta^2} S_i^j, \quad b_i = \frac{h^2(\cos \theta S_i^j - S_{i+1}^j)}{\theta^2 \sin \theta}, \quad c_i = \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h} + \frac{h(S_{i+1}^j - S_i^j)}{\theta^2},$$

$$d_i = \frac{h^2}{\theta^2} S_i^j + U_i^j, \quad (4.7)$$

$x = x_i$ noktasındaki birinci türevin süreklilik koşulu kullanılarak yani;

$$P_i^{(1)}(x_i, t_j) = P_{i-1}^{(1)}(x_i, t_j) \text{ alınarak aşağıdaki bağıntı elde edilir.}$$

$$\begin{aligned} & -a_i(t_j)w \sin w(x_i - x_i) + b_i(t_j)w \cos w(x_i - x_i) + c_i(t_j) \\ & = -a_{i-1}(t_j)w \sin w(x_i - x_{i-1}) + b_{i-1}(t_j)w \cos w(x_i - x_{i-1}) + c_{i-1}(t_j) \end{aligned}$$

$$-a_i(t_j)w \sin 0 + b_i(t_j)w \cos 0 + c_i(t_j) = -a_{i-1}(t_j)w \sin wh + b_{i-1}(t_j)w \cos wh + c_{i-1}(t_j)$$

$$b_i w + c_i = -a_{i-1} w \sin wh + b_{i-1} w \cos wh + c_{i-1}$$

$$b_i w + c_i = -a_{i-1} w \sin \theta + b_{i-1} w \cos \theta + c_{i-1}. \quad (4.8)$$

(4.7) eşitliklerinin (4.8) de kullanılmasıyla aşağıdaki üçgensel sistem elde edilir.

Her $i = 1, 2, \dots, N$ için

$$\frac{h^2(\cos\theta S_i^j - S_{i+1}^j)}{\theta^2 \sin\theta} w + \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h} + \frac{h(S_{i+1}^j - S_i^j)}{\theta^2} = \frac{h^2}{\theta^2} S_{i-1}^j w \sin\theta + \frac{h^2(\cos\theta S_{i-1}^j - S_i^j)}{\theta^2 \sin\theta} w \cos\theta$$

$$+ \frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{h} + \frac{h(S_i^j - S_{i-1}^j)}{\theta^2}$$

$$U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j = \left(\frac{h^2}{\theta \sin\theta} - \frac{h^2}{\theta^2}\right) S_{i+1}^j + \left(\frac{-2h^2 \cos\theta}{\theta \sin\theta} + \frac{2h^2}{\theta^2}\right) S_i^j + \left(\frac{h^2}{\theta \sin\theta} - \frac{h^2}{\theta^2}\right) S_{i-1}^j$$

$$U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j = \alpha S_{i+1}^j + \beta S_i^j + \alpha S_{i-1}^j \quad (4.9)$$

Burada

$$\alpha = \frac{h^2}{\theta \sin\theta} - \frac{h^2}{\theta^2}, \beta = \frac{-2h^2 \cos\theta}{\theta \sin\theta} + \frac{2h^2}{\theta^2}$$

ve

$$S_i^j = \frac{\partial^2 U_i^j}{\partial x^2} = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial U_i^j}{\partial t} + (U_i^j) \frac{\partial U_i^j}{\partial x} \right)$$

dir.

(4.9) sisteminde j yerine $j + \frac{1}{2}$ yazılmasıyla

$$U_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - 2U_i^{j+\frac{1}{2}} + U_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} = \alpha S_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} + \beta S_i^{j+\frac{1}{2}} + \alpha S_{i-1}^{j+\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2, K, N. \quad (4.10)$$

burada

$$U_i^{j+\frac{1}{2}} \equiv U\left(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}\right), \quad t_{j+\frac{1}{2}} = \frac{t_{j+1} + t_j}{2}$$

ve

$$S_i^{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial U_i^{j+\frac{1}{2}}}{\partial t} + (U_i^{j+\frac{1}{2}}) \frac{\partial U_i^{j+\frac{1}{2}}}{\partial x} \right)$$

dir.

Sonlu fark yöntemini kullanarak (4.11)'i elde edilir.

$$U_i^{j+\frac{1}{2}} \approx \frac{U_i^{j+1} + U_i^j}{2}, \quad \frac{\partial}{\partial t} U_i^{j+\frac{1}{2}} \approx \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial}{\partial t} U_i^j \approx \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h}. \quad (4.11)$$

Bu formülü kullanarak $S_i^{j+\frac{1}{2}}$ aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$S_i^{j+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{vk} (U_i^{j+1} - U_i^j) + \frac{\left(U_i^{j+\frac{1}{2}}\right)}{2v} \left(\frac{U_{i+1}^{j+1} - U_i^{j+1}}{h} + \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h}\right) \quad (4.12)$$

(4.11) ve (4.12)'yi (4.10) denkleminde kullanarak aşağıdaki sistemi elde ederiz.

Her bir $i = 1, 2, \dots, N - 1$ $j = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} & \frac{U_{i+1}^{j+1} + U_{i+1}^j}{2} - 2 \frac{U_i^{j+1} + U_i^j}{2} + \frac{U_{i-1}^{j+1} + U_{i-1}^j}{2} = \alpha \left[\frac{1}{vk} (U_{i+1}^{j+1} - U_{i+1}^j) \right. \\ & \left. + \frac{\left(U_{i+1}^{j+\frac{1}{2}}\right)}{2v} \left(\frac{U_{i+1}^{j+1} - U_{i+1}^j}{h} + \frac{U_{i+1}^j - U_{i+1}^{j-1}}{h}\right) \right] + \beta \frac{1}{vk} (U_i^{j+1} - U_i^j) + \frac{\left(U_i^{j+\frac{1}{2}}\right)}{2v} \left(\frac{U_{i+1}^{j+1} - U_i^{j+1}}{h} + \right. \\ & \left. \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h}\right) + \alpha \frac{1}{vk} (U_{i-1}^{j+1} - U_{i-1}^j) + \frac{\left(U_{i-1}^{j+\frac{1}{2}}\right)}{2v} \left(\frac{U_{i+1}^{j+1} - U_{i-1}^{j+1}}{h} + \frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{h}\right) \end{aligned}$$

gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{vk} - \frac{\alpha\delta_{i-1}}{2vh}\right) U_{i-1}^{j+1} + \left(1 + \frac{\beta}{vk} - \frac{\beta\delta_i}{2vh} + \frac{\alpha\delta_{i-1}}{2vh}\right) U_i^{j+1} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{vk} - \frac{\alpha\delta_{i+1}}{2vh} + \frac{\beta\delta_i}{2vh}\right) U_{i+1}^{j+1} \\ & + \left(\frac{\alpha\delta_{i+1}}{2hv}\right) U_{i+2}^{j+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\beta}{vk} + \frac{\alpha\delta_{i-1}}{2vh}\right) U_{i-1}^j + \left(-1 + \frac{\beta}{vk} + \frac{\beta\delta_i}{2vh} - \frac{\alpha\delta_{i-1}}{2vh}\right) U_i^j + \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{vk} + \frac{\alpha\delta_{i+1}}{2vh} \right. \\ & \left. - \frac{\beta\delta_i}{2vh}\right) U_{i+1}^j + \left(\frac{-\alpha\delta_{i+1}}{2hv}\right) U_{i+2}^j. \end{aligned}$$

$$A_i U_{i-1}^{j+1} + B_i U_i^{j+1} + C_i U_{i+1}^{j+1} + D_i U_{i+2}^{j+1} = A_i^* U_{i-1}^j + B_i^* U_i^j + C_i^* U_{i+1}^j + D_i^* U_{i+2}^j \quad (4.13)$$

Burada;

$$\begin{aligned} D_i &= \frac{\alpha\delta_{i+1}}{2hv}, & D_i^* &= \frac{-\alpha\delta_{i+1}}{2hv}, \\ C_i &= -\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{vk} - \frac{\alpha\delta_{i+1}}{2vh} + \frac{\beta\delta_i}{2vh}, & C_i^* &= \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{vk} + \frac{\alpha\delta_{i+1}}{2vh} - \frac{\beta\delta_i}{2vh}, \\ B_i &= 1 + \frac{\beta}{vk} - \frac{\beta\delta_i}{2vh} + \frac{\alpha\delta_{i-1}}{2vh}, & B_i^* &= -1 + \frac{\beta}{vk} + \frac{\beta\delta_i}{2vh} - \frac{\alpha\delta_{i-1}}{2vh}, \\ A_i &= -\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{vk} - \frac{\alpha\delta_{i-1}}{2vh}, & A_i^* &= \frac{1}{2} + \frac{\beta}{vk} + \frac{\alpha\delta_{i-1}}{2vh}, \\ \delta_i &= \left(U_i^{j+\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}$$

dir. (4.13) sistemi N-1 denklem ama N+2 bilinmeyen içermektedir. Çözüm elde etmek için üç tane ilave denkleme ihtiyaç vardır. Bu denklemlerde (4.2) koşullarından elde edilir.(4.2) deki ilk kısım;

$$U_0^j = \beta_1(t_j), \quad U_{N+1}^j = \beta_2(t_j), \quad j = 0, 1, \dots \quad (4.14)$$

ile yer değiştirir fakat (4.2) deki son kısım aşağıdaki denklem ile ayrıştırılır.

$$U_{N-2}^j + U_{N-1}^j - 13U_N^j + 11U_{N+1}^j \approx 8h \frac{\partial}{\partial x} U_{N+1}^j = 8h\lambda_2(t_j), \quad j \geq 0. \quad (4.15)$$

Son denklem her zaman için doğrudur. (4.13)-(4.15) denklemleri matris formunda yazılırsa;

$$QU^{j+1} = Q^*U^j + r^{j+1} \quad (4.16)$$

burada

$$U^j = (U_0^j, U_1^j, U_2^j, \dots, U_{n-1}^j, U_n^j, U_{n+1}^j)^T,$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 0 & A_{N-2} & B_{N-2} & C_{N-2} & D_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{N-2} & B_{N-2} & C_{N-1} & D_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -13 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Q^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_1^* & B_1^* & C_1^* & D_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2^* & B_2^* & C_2^* & D_2^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 0 & A_{N-2}^* & B_{N-2}^* & C_{N-2}^* & D_{N-2}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{N-1}^* & B_{N-1}^* & C_{N-1}^* & D_{N-1}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ve

$$r^j = (\beta_1(t_j), 0, 0, \dots, 0, 8h\lambda_2(t_j), \beta_2(t_j))^T$$

dir. Burada r^j (N+2) boyutlu sütun vektörü iken Q ve Q^* (N+2)x(N+2) boyutlu matrislerdir. $a \leq x \leq b$ için $U(x, 0) = f(x)$, her bir $i = 0, 1, \dots, N + 1$ için $U_i^0 = f(x_i)$ anlamına gelir.

Eğer işlemler bilinen U_i^1 yaklaşımının tamamına tekrar uygulanırsa U_i^2, U_i^3, \dots değerleri benzer şekilde elde edilir.

Hatırlatma:

(4.13) denklem sistemindeki lineer olmayan terimleri lineerleştirmek için aşağıdaki adımlar takip edilir.

1) $j=0$ için δ_i yaklaşık değerini U_i^0 'dan hesaplanan δ_i^0 ile hesaplarız. Bu ise her $i = 0, 1, \dots, N$, için $\delta_i \approx \delta_i^0 = U_i^0$ demektir. Bu işlemi yapabilmek için Q ve Q^* elemanlarının hesaplanması gerekir. Böylece (4.16) dan U^1 elde edilir.

2) $j=1$ için δ_i yaklaşık değerini $0.5(U_i^0 + U_i^1)$ den δ_i^1 ile hesaplarız. Bu ise her $i = 0, 1, \dots, N$, için $\delta_i \approx \delta_i^1 = 0.5(U_i^0 + U_i^1)$ demektir. Bu işlemi yapabilmek için Q ve Q^* elemanlarının hesaplanması gerekir. Böylece (4.16) dan U^2 elde edilir.

3) $j=n$ için δ_i yaklaşık değerini $0.5(U_i^{n-1} + U_i^n)$ den δ_i^n ile hesaplarız. Bu ise her $i = 1, 2, \dots, N$, için $\delta_i \approx \delta_i^n = 0.5(U_i^{n-1} + U_i^n)$ demektir. Bu işlemi yapabilmek için Q ve Q^* elemanlarının hesaplanması gerekir. Böylece (4.16) dan U^{n+1} elde edilir.

4.3. Kararlılık Analizi

Kararlılık analizi için VonNeumann metodu kullanılır. Bunu yapabilmek için (4.16) nümerik algoritmasında $\delta_{i+1} = \delta_i = \delta_{i-1} = d$ alınarak (4.1) burger denklemindeki UU_x lineer olmayan terimi lineerleştirilmiş olur. Von Neumann metoduna göre:

$$U_i^j = \zeta^j \exp(q\phi ih), \quad (4.17)$$

dir. Burada ϕ mod sayısı, $q = \sqrt{-1}$, h adım aralığı ve ζ düzenin genişletme faktörüdür. (4.17) denklemi (4.13) de yerine yazıldığında

$$\zeta^{j+1} \left\{ \begin{array}{l} A_i \exp(q\phi(i-1)h) + B_i \exp(q\phi ih) + \\ C_i \exp(q\phi(i+1)h) + D_i \exp(q\phi(i+2)h) \end{array} \right\} = \zeta^j \left\{ \begin{array}{l} A_i^* \exp(q\phi(i-1)h) + B_i^* \exp(q\phi ih) + \\ C_i^* \exp(q\phi(i+1)h) + D_i^* \exp(q\phi(i+2)h) \end{array} \right\} \quad (4.18)$$

burada;

$$\delta_{i+1} = \delta_i = \delta_{i-1} = d$$

olduğundan

$$D_i = \frac{\alpha\delta_{i+1}}{2hv} = \frac{\alpha d}{2hv}, \quad D_i^* = \frac{-\alpha\delta_{i+1}}{2hv} = \frac{-\alpha d}{2hv},$$

$$C_i = -\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{vk} - \frac{\alpha\delta_{i+1}}{2vh} + \frac{\beta\delta_i}{2vh} = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{vk} - \frac{\alpha d}{2vh} + \frac{\beta d}{2vh}, \quad C_i^* = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{vk} + \frac{\alpha\delta_{i+1}}{2vh} - \frac{\beta\delta_i}{2vh} = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{vk} + \frac{\alpha d}{2vh} - \frac{\beta d}{2vh},$$

$$B_i = 1 + \frac{\beta}{vk} - \frac{\beta\delta_i}{2vh} + \frac{\alpha\delta_{i-1}}{2vh} = 1 + \frac{\beta}{vk} - \frac{\beta d}{2vh} + \frac{\alpha d}{2vh}, \quad B_i^* = -1 + \frac{\beta}{vk} + \frac{\beta\delta_i}{2vh} - \frac{\alpha\delta_{i-1}}{2vh} = -1 + \frac{\beta}{vk} + \frac{\beta d}{2vh} - \frac{\alpha d}{2vh},$$

$$A_i = -\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{vk} - \frac{\alpha\delta_{i-1}}{2vh} = -\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{vk} - \frac{\alpha d}{2vh}, \quad A_i^* = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{vk} + \frac{\alpha\delta_{i-1}}{2vh} = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{vk} + \frac{\alpha d}{2vh} \quad (4.19)$$

dır. (4.18) denkleminin her iki tarafının $\exp(q\phi h)$ ile bölünmesiyle;

$$\zeta^{j+1}\{A_i \exp(-q\phi h) + B_i + C_i \exp(q\phi h) + D_i \exp(2q\phi h)\} =$$

$$\zeta^j\{A_i^* \exp(-q\phi h) + B_i^* + C_i^* \exp(q\phi h) + D_i^* \exp(2q\phi h)\} \quad (4.20)$$

Elde edilir. Euler formülü kullanılırsa

$$\exp(q\phi) = \cos\phi + q\sin\phi, \quad \phi = \phi h \quad (4.21)$$

yazılabilir. (4.20) denklemi aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir.

$$\zeta^{j+1}\{A_i \exp(-q\phi) + B_i + C_i \exp(q\phi) + D_i \exp(2q\phi)\} =$$

$$\zeta^j\{A_i^* \exp(-q\phi) + B_i^* + C_i^* \exp(q\phi) + D_i^* \exp(2q\phi)\}.$$

$$\zeta^{j+1}\{A_i(\cos\phi - q\sin\phi) + B_i + C_i(\cos\phi + q\sin\phi) + D_i(\cos 2\phi + q\sin 2\phi)\} =$$

$$\zeta^j\{A_i^*(\cos\phi - q\sin\phi) + B_i^* + C_i^*(\cos\phi + q\sin\phi) + D_i^*(\cos 2\phi + q\sin 2\phi)\}.$$

Basit hesaplamalar yapılırsa;

$$\frac{\zeta^{j+1}}{\zeta^j} = \frac{\{A_i^*(\cos\phi - q\sin\phi) + B_i^* + C_i^*(\cos\phi + q\sin\phi) + D_i^*(\cos 2\phi + q\sin 2\phi)\}}{\{A_i(\cos\phi - q\sin\phi) + B_i + C_i(\cos\phi + q\sin\phi) + D_i(\cos 2\phi + q\sin 2\phi)\}}$$

$$\frac{\zeta^j \cdot \zeta}{\zeta^j} = \frac{\{(A_i^* + C_i^*)\cos\phi + D_i^*\cos 2\phi + B_i^* + q((C_i^* - A_i^*)\sin\phi + D_i^*\sin 2\phi)\}}{\{(A_i + C_i)\cos\phi + D_i\cos 2\phi + B_i + q((C_i - A_i)\sin\phi + D_i\sin 2\phi)\}}$$

$$\zeta = \frac{X^* + qY^*}{X + qY} \quad (4.22)$$

elde edilir. Burada;

$$\begin{aligned} X^* &= (A_i^* + C_i^*)\cos\phi + D_i^*\cos 2\phi + B_i^* \\ X &= (A_i + C_i)\cos\phi + D_i\cos 2\phi + B_i \\ Y^* &= (C_i^* - A_i^*)\sin\phi + D_i^*\sin 2\phi \\ Y &= (C_i - A_i)\sin\phi + D_i\sin 2\phi \end{aligned} \quad (4.23)$$

dür.(4.19) ve (4.23) denklemlerinden

$$\begin{aligned} X^* &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{vk} + \frac{\alpha d}{2vh} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{vk} + \frac{\alpha d}{2vh} - \frac{\beta d}{2vh} \right) \cos\phi + \frac{-\alpha d}{2hv} \cos 2\phi - 1 \\ &\quad + \frac{\beta}{vk} + \frac{\beta \delta_i}{2vh} - \frac{\alpha \delta_{i-1}}{2vh} \\ &= \frac{1}{vk} (\beta + 2\alpha) - \frac{4\alpha}{vk} \sin^2 \frac{\phi}{2} - 2 \sin^2 \frac{\phi}{2} + \frac{d}{vh} (\beta - 2\alpha) \sin^2 \frac{\phi}{2} + \frac{\alpha d}{vh} \sin^2 \frac{\phi}{2}, \\ X &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{vk} - \frac{\alpha d}{2vh} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{vk} - \frac{\alpha d}{2vh} + \frac{\beta d}{2vh} \right) \cos\phi + \frac{\alpha d}{2hv} \cos 2\phi + 1 \\ &\quad + \frac{\beta}{vk} - \frac{\beta d}{2vh} + \frac{\alpha d}{2vh} \\ &= \frac{1}{vk} (\beta + 2\alpha) - \frac{4\alpha}{vk} \sin^2 \frac{\phi}{2} + 2 \sin^2 \frac{\phi}{2} - \frac{d}{vh} (\beta - 2\alpha) \sin^2 \frac{\phi}{2} - \frac{\alpha d}{vh} \sin^2 \frac{\phi}{2}, \\ Y^* &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{vk} + \frac{\alpha d}{2vh} - \frac{\beta d}{2vh} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{vk} + \frac{\alpha d}{2vh} \right) \right) \sin\phi + \frac{-\alpha d}{2hv} \sin 2\phi \\ &= \frac{\beta d}{2vh} \sin\phi - \frac{\alpha d}{2hv} \sin 2\phi \\ Y &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{vk} - \frac{\alpha d}{2vh} + \frac{\beta d}{2vh} - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{vk} - \frac{\alpha d}{2vh} \right) \right) \sin\phi + \frac{\alpha d}{2hv} \sin 2\phi \\ &= \frac{\beta d}{2vh} \sin\phi + \frac{\alpha d}{2hv} \sin 2\phi \end{aligned} \quad (4.24)$$

elde edilir. (4.13) ün kararlılık koşulu için gerek ve yeter şart $|\zeta| = \sqrt{\frac{X^{*2} + Y^{*2}}{X^2 + Y^2}} \leq 1$ olmasıdır. Yukarıdaki eşitsizliği basitleştirerek

$$X^2 \geq X^{*2} \quad (4.25)$$

elde edilir. Burada $Y^2 = Y^{*2}$ dir. Geçen eşitsizlikten;

$$\left[\frac{1}{vk} (\beta + 2\alpha) - \frac{4\alpha}{vk} \sin^2 \frac{\phi}{2} \right] \left[2\sin^2 \frac{\phi}{2} - \frac{d}{vh} (\beta - 2\alpha) \sin^2 \frac{\phi}{2} - \frac{\alpha d}{vh} \sin^2 \phi \right] \geq 0 \quad (4.26)$$

elde edilir. $\beta > 2\alpha$, $\beta > 0$ ve $\alpha > 0$ için

$$\left[\frac{1}{vk} (\beta + 2\alpha) - \frac{4\alpha}{vk} \sin^2 \frac{\phi}{2} \right] \geq 0$$

elde edilir. Bu ifade ile birlikte (4.26) dan

$$\left[2\sin^2 \frac{\phi}{2} - \frac{d}{vh} (\beta - 2\alpha) \sin^2 \frac{\phi}{2} - \frac{\alpha d}{vh} \sin^2 \phi \right] \geq 0 \quad (4.27)$$

yazılabilir. Sistem koşullu kararlıdır. $\beta \geq 2\alpha$ koşulunu sağlayan tüm durumlarda sistem kararlıdır.

4.4. Nümerik Örnekler

Bu bölümde Burger denkleminin yaklaşık çözümü için bir standart problem incelenecektir. Uygulanan nümerik metodun doğruluğunu ölçmek için her düğüm noktasındaki analitik ve nümerik çözümler hesaplanacak ve bunlar arasındaki farklar kullanılarak L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanacaktır.

(4.1) Burger denkleminin analitik çözümü (Ramadan vd., 2005)

$$u(x, t) = \frac{(x/t)}{1 + (t/\sigma)^{1/2} \exp(x^2/4vt)}, \quad (4.28)$$

ile verilir. Burada

$$0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 1$$

dir.

Analitik çözümdeki $\sigma = \exp(1/8v)$ alınarak $t = 1$ için (4.28) de başlangıç koşulu hesaplanır. Sınır koşulları ise

$$u(0, t) = 0, u(1, t) = \frac{(1/t_j)}{1+(t_j/\sigma)^{1/2}\exp(1/4vt_j)} \quad (4.29)$$

şeklindedir.

İlave koşullar $u_x(a, t) = \frac{\partial}{\partial x}u(0, t_0)$ ve $u_x(b, t) = \frac{\partial}{\partial x}u(1, t_0)$ $0 < v < 1$ için başlangıç zamanında doğrulanır. Böylece (4.28) analitik çözümü bu koşulları da sağlar.

Elde edilen nümerik sonuçlar $\Delta(x) = 0.025$ için Çizelge (4.1.-4.4.) de özetlenmiştir. Çizelge 4.1. $t = 3$ anında nümerik ve tam çözümleri vermektedir. Çizelge 4.2.-4.3.-4.4. ise farklı zaman adımlarında

L_2 ve L_∞ hata normlarını vermektedir.

Çizelge 4.1. $v = 0.05$, $\Delta t = 0.01$, $\alpha = 0.2 \cdot 10^{-6}$ ve $\beta = 6 \cdot 10^{-4}$.

x_i	Tam Çözüm	Nümerik Çözüm
0.0	0.0000000	0.0000000
0.1	0.0221546	0.0220390
0.2	0.0435601	0.0433457
0.3	0.0634297	0.0631439
0.4	0.0809113	0.0805862
0.5	0.0950889	0.0947549
0.6	0.1050300	0.1047120
0.7	0.1099090	0.1096260
0.8	0.1092040	0.1089760
0.9	0.1029440	0.1028100
1.0	0.0918946	0.0918946

Çizelge 4.2. $v = 0.05$, $\Delta t = 0.01$, $\alpha = 0.2 \cdot 10^{-6}$ ve $\beta = 6 \cdot 10^{-4}$.

Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
2	0.129883	0.203959
2.5	0.146748	0.235351
3	0.246727	0.334341
3.5	0.311609	0.428702
5	0.342211	0.482112

Çizelge 4.3. $v = 0.5$, $\Delta t = 0.1$, $\alpha = 0.2 \cdot 10^{-6}$ ve $\beta = 6 \cdot 10^{-4}$.

Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
2	0.6625430	0.9333200
2.5	0.3534180	0.4977590
3	0.2141600	0.3015790
3.5	0.1422560	0.2002460
5	0.0574751	0.0808847

Çizelge 4.4. $v = 0.005$, $\Delta t = 0.05$, $\alpha = 0.2 \cdot 10^{-9}$ ve $\beta = 4 \cdot 10^{-4}$.

Zaman	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
2	8.015390	2.187940
2.5	9.622790	2.618230
3	9.835130	2.848630
3.5	5.998950	1.912170
5	1.520370	0.228921

4.5.Sonuç

Bu çalışmada Burger denkleminin polinom olmayan spline fonksiyonlar yardımıyla nümerik çözümü incelenmiştir. Kararlılık analizi yapılmış ve sistemin koşullu kararlı olduğu görülmüştür. Elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümler ile uyum içinde olduğu görülmektedir. Yöntem denklemin çözümü için uygun bir yöntemdir.

5.RLW DENKLEMİNİN POLİNOM OLMAYAN SPLİNE FONKSİYONLAR İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

5.1.Giriş

Lineer olmayan oluşum denklemi olarak RLW denklemi

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \epsilon u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right) \quad (5.1)$$

şeklindedir.

Bu çalışmada ise RLW denkleminin polinom olmayan spline fonksiyonlar ile nümerik çözümü incelenecektir.

5.2.Metot

(5.1) denklemi aşağıdaki başlangıç ve sınır koşulları ile ele alınsın.

$$u(a, t) = g_a(t), \quad u(b, t) = g_b(t), \quad t \geq 0 \quad (5.2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

RLW denkleminin çözümü için nümerik algoritmayı oluşturmak üzere $n > 0, k > 0$ ve $h = \frac{b-a}{n+1}$ alalım. Bu durumda

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n + 1$$

$$t_j = jk, \quad j = 0, 1, \dots$$

dir. Her $j > 0$ sabit sayısı için aşağıdaki spline fonksiyonlar ele alınacaktır.

$$P(x, t_j) = \begin{cases} p_0(x, t_j), & x \in [x_0, x_1] \\ p_1(x, t_j), & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots \\ p_n(x, t_j), & x \in [x_n, x_{n+1}] \end{cases}$$

burada

$$p_i(x, t_j) = a_i(t_j) \cos w(x - x_i) + b_i(t_j) \sin w(x - x_i) + c_i(t_j)(x - x_i) + d_i(t_j) \quad (5.3)$$

Burada her $i = 0, 1, \dots, n$ için a_i, b_i, c_i ve d_i bilinmeyen katsayılardır. U_i^j , $u(x_i, t_j)$ için bir yaklaşım olsun. Yine U_i^j değeri $p_i(x, t_j)$ yardımıyla elde edilir.(5.3)deki dört katsayı için kapalı bir gösterim geliştirilirse U_i^j, U_{i+1}^j, S_i^j ve S_{i+1}^j değerleri (5.4) deki gibi oluşturulur.

$$\begin{aligned}
U_i^j &= p_i(x_i, t_j), \quad U_{i+1}^j = p_i(x_{i+1}, t_j), \\
S_i^j &= p_i''(x_i, t_j), \quad S_{i+1}^j = p_i''(x_{i+1}, t_j)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

(5.3) eşitliğinin katsayıları aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$p_i(x, t_j) = a_i(t_j)\cos w(x - x_i) + b_i(t_j)\sin w(x - x_i) + c_i(t_j)(x - x_i) + d_i(t_j)$$

$$p_i'(x, t_j) = -a_i(t_j)w\sin w(x - x_i) + b_i(t_j)w\cos w(x - x_i) + c_i(t_j)$$

$$p_i''(x, t_j) = -a_i(t_j)w^2\cos w(x - x_i) - b_i(t_j)w^2\sin w(x - x_i)$$

$$S_i^j = p_i''(x_i, t_j)$$

$$S_i^j = p_i''(x_i, t_j) = -a_i(t_j)w^2\cos w(x_i - x_i) - b_i(t_j)w^2\sin w(x_i - x_i)$$

$$S_i^j = -a_i(t_j)w^2\cos 0 - b_i(t_j)w^2\sin 0$$

$$S_i^j = -a_i(t_j)w^2$$

$$a_i = -\frac{S_i^j}{w^2}$$

$$a_i = -\frac{h^2}{\theta^2} S_i^j$$

$$U_i^j = p_i(x_i, t_j)$$

$$U_i^j = a_i(t_j)\cos w(x_i - x_i) + b_i(t_j)\sin w(x_i - x_i) + c_i(t_j)(x_i - x_i) + d_i(t_j)$$

$$U_i^j = a_i(t_j)\cos 0 + b_i(t_j)\sin 0 + c_i(t_j)0 + d_i(t_j)$$

$$U_i^j = a_i(t_j) + d_i(t_j)$$

$$U_i^j = -\frac{h^2}{\theta^2} S_i^j + d_i(t_j)$$

$$d_i = U_i^j + \frac{h^2}{\theta^2} S_i^j$$

$$S_{i+1}^j = p_i''(x_{i+1}, t_j)$$

$$S_{i+1}^j = -a_i(t_j)w^2\cos w(x_{i+1} - x_i) - b_i(t_j)w^2\sin w(x_{i+1} - x_i)$$

$$S_{i+1}^j - \frac{h^2}{\theta^2} S_i^j w^2 \cos wh = -b_i(t_j) w^2 \sin wh$$

$$S_{i+1}^j - \frac{h^2}{\theta^2} S_i^j \frac{\theta^2}{h^2} \cos \theta = -b_i(t_j) \frac{\theta^2}{h^2} \sin \theta$$

$$S_{i+1}^j - S_i^j \cos \theta = -b_i(t_j) \frac{\theta^2}{h^2} \sin \theta$$

$$b_i = \frac{h^2 (S_i^j \cos \theta - S_{i+1}^j)}{\theta^2 \sin \theta}$$

$$U_{i+1}^j = p_i(x_{i+1}, t_j)$$

$$U_{i+1}^j = a_i(t_j) \cos w(x_{i+1} - x_i) + b_i(t_j) \sin w(x_{i+1} - x_i) + c_i(t_j)(x_{i+1} - x_i) + d_i(t_j)$$

$$U_{i+1}^j = a_i(t_j) \cos wh + b_i(t_j) \sin wh + c_i(t_j)h + d_i(t_j)$$

$$U_{i+1}^j = a_i(t_j) \cos \theta + b_i(t_j) \sin \theta + c_i(t_j)h + d_i(t_j)$$

$$U_{i+1}^j = -\frac{h^2}{\theta^2} S_i^j \cos \theta + \frac{h^2 (S_i^j \cos \theta - S_{i+1}^j)}{\theta^2 \sin \theta} \sin \theta + c_i(t_j)h + U_i^j + \frac{h^2}{\theta^2} S_i^j$$

$$c_i(t_j)h = U_{i+1}^j - U_i^j + \frac{h^2}{\theta^2} S_i^j \cos \theta - \frac{h^2 (S_i^j \cos \theta - S_{i+1}^j)}{\theta^2 \sin \theta} \sin \theta - \frac{h^2}{\theta^2} S_i^j$$

$$c_i(t_j) = \frac{U_{i+1}^j - U_i^j + \frac{h^2}{\theta^2} S_i^j \cos \theta - \frac{h^2 (S_i^j \cos \theta - S_{i+1}^j)}{\theta^2 \sin \theta} \sin \theta - \frac{h^2}{\theta^2} S_i^j}{h}$$

$$c_i = \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h} + \frac{h(S_{i+1}^j - S_i^j)}{\theta^2} \quad (5.5)$$

Burada $d_i \equiv d_i(t_j)$, $c_i \equiv c_i(t_j)$, $b_i \equiv b_i(t_j)$ ve $a_i \equiv a_i(t_j)$ ve $\theta = wh$ dir. (x_i, t_j) noktasının birinci dereceden türevlerinden oluşan $p'_i(x_i, t_j) = p'_{i-1}(x_i, t_j)$ eşitliği aşağıdaki gibi yazılır.

$$p'_i(x_i, t_j) = p'_{i-1}(x_i, t_j)$$

$$\begin{aligned} -a_i(t_j) w \sin w(x_i - x_i) + b_i(t_j) w \cos w(x_i - x_i) + c_i(t_j) &= -a_{i-1}(t_j) w \sin w(x_i - x_{i-1}) \\ &+ b_{i-1}(t_j) w \cos w(x_i - x_{i-1}) + c_{i-1}(t_j) . \end{aligned}$$

$$-a_i(t_j) w \sin 0 + b_i(t_j) w \cos 0 + c_i(t_j) = -a_{i-1}(t_j) w \sin wh$$

$$+ b_{i-1}(t_j)w \cos wh + c_{i-1}(t_j).$$

$$b_i w + c_i = -a_{i-1} w \sin \theta + b_{i-1} w \cos \theta + c_{i-1} \quad (5.6)$$

(5.5) deki katsayılar (5.6) da yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} & \frac{h^2(S_i^j \cos \theta - S_{i+1}^j)}{\theta^2 \sin \theta} w + \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h} + \frac{h(S_{i+1}^j - S_i^j)}{\theta^2} \\ &= \frac{h^2}{\theta^2} S_{i-1}^j w \sin \theta + \frac{h^2(S_{i-1}^j \cos \theta - S_i^j)}{\theta^2 \sin \theta} w \cos \theta + \frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{h} \\ &+ \frac{h(S_i^j - S_{i-1}^j)}{\theta^2} \end{aligned}$$

gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j &= \left(\frac{h^2}{\theta \sin \theta} - \frac{h^2}{\theta^2} \right) S_{i+1}^j + \left(\frac{-2h^2 \theta}{\theta \sin \theta} - \frac{2h^2}{\theta^2} \right) S_i^j + \left(\frac{h^2}{\theta \sin \theta} - \frac{h^2}{\theta^2} \right) S_{i-1}^j \\ U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j &= \alpha S_{i+1}^j + \beta S_i^j + \alpha S_{i-1}^j \end{aligned} \quad (5.7)$$

elde edilir. Burada $\alpha = \left(\frac{h^2}{\theta \sin \theta} - \frac{h^2}{\theta^2} \right)$, $\beta = \frac{-2h^2 \theta}{\theta \sin \theta} - \frac{2h^2}{\theta^2}$ dir.

$j+1$ ve j iki zaman seviyelerinin farkını (5.7) de yazarsak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} (U_{i+1}^{j+1} - U_{i+1}^j) - 2(U_i^{j+1} - U_i^j) + (U_{i-1}^{j+1} - U_{i-1}^j) &= \\ \alpha (S_{i+1}^{j+1} - S_{i+1}^j) + \beta (S_i^{j+1} - S_i^j) + \alpha (S_{i-1}^{j+1} - S_{i-1}^j) & \end{aligned} \quad (5.8)$$

Teorem 5.1. (5.8) fark denkleminin lokal kesme hatası aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} T_i^j &= k(h^2 - 2\alpha - \beta) D_x^2 D_t u_i^j \\ &+ k^2 \left(\frac{h^2}{2} - \alpha - \frac{\beta}{2} \right) D_x^2 D_t^2 u_i^j \\ &+ k^3 \left(\frac{h^2}{6} - \frac{2\alpha}{6} - \frac{\beta}{6} \right) D_x^2 D_t^3 u_i^j \\ &+ h^2 k \left(\frac{h^2}{12} - \alpha \right) D_x^4 D_t u_i^j \\ &+ h^2 k^2 \left(\frac{h^2}{24} - \frac{\alpha}{2} \right) D_x^4 D_t^2 u_i^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +h^2k^3 \left(\frac{h^2}{72} - \frac{\alpha}{6} \right) D_x^4 D_t^3 u_i^j \\
& +h^4k \left(\frac{h^2}{360} - \frac{\alpha}{12} \right) D_x^6 D_t u_i^j \\
& +h^4k^2 \left(\frac{h^2}{720} - \frac{\alpha}{24} \right) D_x^6 D_t^2 u_i^j \\
& +h^4k^3 \left(\frac{h^2}{4320} - \frac{\alpha}{144} \right) D_x^6 D_t^3 u_i^j + \dots
\end{aligned}$$

İspat: Taylor açılımı kullanılarak çıkarılabilir.

Hatırlatma 5.2: α ve βh^2 ile orantılı olsun. Eğer $\beta + 2\alpha \neq h^2$ ise (5.8) fark denkleminin lokal kesme hatası $O(h^2)$ dir. Eğer $\alpha \neq \frac{h^2}{12}$ ise bu denklemin lokal kesme hatası $O(h^4)$ dir. Bu denklem için $O(h^6)$ lokal kesme hatası da vardır.

Diğer yandan (5.1) denklemini yeniden ele alırsak;

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu} u(x, t) \right) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \epsilon u(x, t) \right) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

ve aşağıdaki ünlü Cranck-Nicolson düzeni türetilir.

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^2 u(x_i, t_{j+1})}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu} u(x_i, t_{j+1}) \right) - \left(\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu} u(x_i, t_j) \right) \\
& = \frac{k}{4\mu h} \left(1 + \epsilon u(x_i, t_{j+1}) \right) + \left(u(x_{i+1}, t_{j+1}) - u(x_{i-1}, t_{j+1}) \right) \\
& + \frac{k}{4\mu h} \left(1 + \epsilon u(x_i, t_j) \right) \times \left(u(x_{i+1}, t_j) - u(x_{i-1}, t_j) \right) + O(k^3 + kh^2).
\end{aligned}$$

Bu denklemden aşağıdaki fark denklemini elde edilebilir.

$$S_i^{j+1} - S_i^j = \frac{1}{\mu} (U_i^{j+1} - U_i^j) + r(1 + \epsilon U_i^{j+1})(U_{i+1}^{j+1} - U_{i-1}^{j+1}) + r(1 + \epsilon U_i^j)(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j) \quad (5.9)$$

burada $r = k/(4\mu h)$ ve $i=1, \dots, n$. (5.8) de (5.9) yazılır ve hesaplamalar yapılırsa

$$A_i U_{i-1}^{j+1} + B_i U_i^{j+1} + C_i U_{i+1}^{j+1} = D_i U_{i-1}^j + E_i U_i^j + F_i U_{i+1}^j \quad (5.10)$$

elde edilir. Burada;

$$A_i = 1 - \frac{\alpha}{\mu} + 2\alpha r(1 + \epsilon U_{i-1}^{j+1}) + \beta(1 + \epsilon U_i^{j+1}),$$

$$B_i = -2 - \frac{\beta}{\mu} + 2\alpha \epsilon r(U_{i+1}^{j+1} - U_{i-1}^{j+1}),$$

$$C_i = 1 - \frac{\alpha}{\mu} - 2\alpha r(1 + \epsilon U_{i+1}^{j+1}) - \beta(1 + \epsilon U_i^{j+1}),$$

$$D_i = 1 - \frac{\alpha}{\mu} + 2\alpha r(1 + \epsilon U_{i-1}^j) - \beta(1 + \epsilon U_i^j),$$

$$E_i = -2 - \frac{\beta}{\mu} - 2\alpha \epsilon r(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j),$$

$$F_i = 1 - \frac{\alpha}{\mu} + 2\alpha r(1 + \epsilon U_{i+1}^j) + \beta(1 + \epsilon U_i^j),$$

dır. (5.2) sınır koşulları kullanılarak (5.10) denklemi n bilinmeyenli n denklemden oluşan lineer olmayan sistem Newton metodu kullanılarak çözülebilir.(Griewanka ve El-Danaf, 2009; El-Danaf vd., 2011)de uygulanan iteratif yöntemle sistemi çözmek tercih edilebilir. Bu amaçla ilk olarak bu sistem aşağıdaki gibi bir matris formunda yazmalıdır.

$$MU^{j+1} + L^{j+1} = NU^j + R^j, \quad (5.11)$$

burada

$$U^j = (U_1^j U_2^j \dots U_{n-1}^j U_n^j)^T,$$

$$M = \begin{bmatrix} B_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 & C_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & 0 & 0 & A_{n-1} & B_{n-1} & C_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & A_n & B_n \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} E_1 & F_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ D_2 & E_2 & F_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_3 & E_3 & F_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & 0 & 0 & D_{n-1} & E_{n-1} & F_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & D_n & E_n \end{bmatrix}$$

ve

$$L^{j+1} = (A_1 U_0^{j+1} 0 \dots 0 C_n U_{n+1}^{j+1})^T,$$

$$R^j = (D_1 U_0^j 0 \dots 0 F_n U_{n+1}^j)^T \text{ dir.}$$

5.3. Kararlılık Analizi

Bu bölümde, düzenin kararlılık analizini araştırmak için standart VonNeumann metodu kullanılır. İlk başta, yerel sabiti ε olarak RLW denkleminin doğrusal olmayan terimi εU_m^j 'i linearize yapmak gerekir. Von Nuemann metoduna göre;

$$U_m^j = \zeta^j \exp(im\phi) \quad (5.12)$$

olur. Burada ϕ sayı modu, $i=\sqrt{-1}$ ve ζ düzenin amplifikasyon faktörüdür.(5.12) denklemini (5.10) fark denkleminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} & \zeta^{j+1}(A \exp(i(m-1)\phi) + B \exp(im\phi) + C \exp(i(m+1)\phi)) \\ & = \zeta^j (D \exp(i(m-1)\phi) + E \exp(im\phi) + F \exp(i(m+1)\phi)) \end{aligned} \quad (5.13)$$

olur. Burada

$$A = 1 - \frac{\alpha}{\mu} + 2\alpha r(1 + \varepsilon) + \beta(1 + \varepsilon),$$

$$B = -2 - \frac{\beta}{\mu},$$

$$C = 1 - \frac{\alpha}{\mu} - 2\alpha r(1 + \varepsilon) - \beta(1 + \varepsilon),$$

$$D = 1 - \frac{\alpha}{\mu} - 2\alpha r(1 + \varepsilon) - \beta(1 + \varepsilon),$$

$$E = -2 - \frac{\beta}{\mu},$$

$$F = 1 - \frac{\alpha}{\mu} + 2\alpha r(1 + \varepsilon) + \beta(1 + \varepsilon).$$

dir.(5.13) denklemini basit işlemler sonrasında aşağıdaki gibi olur.

$$\zeta = \frac{D \exp(-i\phi) + E + F \exp(i\phi)}{A \exp(-i\phi) + B + C \exp(i\phi)}.$$

İyi tanımlı Euler formülü kullanılırsa;

$$\zeta = \frac{X + iY}{X - iY}$$

olur. Burada $X = \left(2 - \frac{2\alpha}{\mu}\right) \cos\phi - 2 - \frac{\beta}{\mu}$ ve $Y = r(1 + \varepsilon)(2\alpha + \beta)\sin\phi$ dir. Açık olarak

$|\zeta| = 1$ ve bu nedenle lineerleştirilmiş düzen koşulsuz kararlıdır.

5.4. Nümerik Örnekler

Bu bölümde (5.1) RLW denkleminin nümerik çözümü için uygulanan yöntemin geçerliliğini test problemleri ile inceleyelim. RLW denkleminin çözümünün doğruluğunu incelemek için korunum sabitlerinin değerleri de incelenir.

Burada

$$C_1 = \int_a^b u \, dx,$$

$$C_2 = \int_a^b (u^2 + \mu u_x)^2 \, dx,$$

$$C_3 = \int_a^b (u^3 + 3u^2) \, dx$$

şeklindedir.

5.4.1. Tek solitary dalganın yayılımı

Örnek 5.1.

(5.1)denkleminin aşağıdaki şekilde verilen ve literatürde iyi bilinen

$$u(x, t) = 3d \operatorname{sech}(K(x - vt - x_0))$$

analitik çözümünü ele alalım. Burada

$$K = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon d}{v\mu}}$$

dır. Bu analitik çözüm $3d$ genliğine ve $v = 1 + \varepsilon d$ hızına sahip tek solitary dalga çözümünü verir. Başlangıç ve sınır koşulları analitik çözümden elde edilebilir. $\varepsilon = \mu = 1$ alınarak işlemler yapılacaktır. L_2 , L_∞ hata normları ve C_1, C_2, C_3 korunum sabitleri hesaplanarak tablo1 de gösterilmiştir. Dalga hareketi boyunca L_2 ve L_∞ hata normlarının sırasıyla 4.02×10^{-5} ve 1.28×10^{-5} den küçük olduğu gözlemlenmektedir. Dalga hareketi boyunca solitary dalganın

zirve yaptığı nokta 0.299989 olarak ölçülmüştür. Bu değer $t = 20$ zamanında $x = 22$ konumunda gerçekleşmiştir. Zirve noktasında tam çözüm ile nümerik çözüm arasındaki mutlak hata 1.06×10^{-5} den küçüktür.

Çizelge 5.1. $T = 20, \alpha = h^2/4, a = -40$ ve $b = 60$ değerleri için tek solitary dalga hareketi.

	h/k	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$	C_1	C_2	C_3
Analitik Çözüm		0.0	0.0	3.979908	0.81046249	2.57900743
Uygulanan Metot	0.125/0.1	0.40198	0.127649	3.979908	0.81046252	2.57900744
MQ [2]	0.125/0.1	2.06910	0.78027	3.979883	0.81046248	2.5790074
MQ [6]	0.125/0.1	2.06910	0.78027	3.979883	0.81046248	2.5790074
CBSCM1 [17]	0.125/0.1	2.6086	1.0299	3.979958	0.8104596	2.578999
CBSCM2 [17]	0.125/0.1	2.2050	0.8448	3.980016	0.8104624	2.519006
QBSCM [17]	0.125/0.1	0.4315	0.1321	3.979890	0.8104625	2.578999
QBGM1 [18]	0.125/0.1	1.9215	0.7337	3.979883	0.8104612	2.5790031
QBGM2 [18]	0.125/0.1	3.5489	1.2848	3.9798830	0.8104616	2.5790043
LGM [19]	0.125/0.1	2.19	0.86	3.97988	0.810465	2.57901
CDQ-CN [20]	3/0.1	2.58	0.68	3.97989	0.79613	2.57900
Kübik BSDQ [21]	1/0.00125	29.4	11.4	3.97991	0.81027	2.57838
Quartik BSDQ [21]	1/0.00125	1.0	0.4	3.97987	0.81043	2.57890
Quintik BSDQ [21]	1/0.00125	0.6	0.2	3.97988	0.81043	2.57890
CDQ [27]	2.5/0.01	0.25	0.07	3.97989	0.81046	2.57900
QBSGM [28]	0.125/0.1	1.92	0.73	3.97989	0.81046	2.57901
QBSFEM [29]	0.125/0.1	3.7841	1.3993	3.97995	0.81046	2.57900

Örnek 5.2.

Biswas (2010) (5.1) denklemini için aşağıdaki analitik çözümü tanımlamıştır.

$$u(x, t) = \frac{A}{\cosh^2(B(x - vt))}$$

Burada B solitary dalganın ters genişliği (widthinverse), $v = 1/(1 - 4\mu B^2)$ solitary dalga hızı, $A = 12\mu v B^2/\epsilon$ solitary dalga genliğidir. Lie simetri yaklaşımı kullanılarak Biswas ve arkadaşları (Biswas ve Kara, 2011) aşağıdaki korunum sabitlerini elde etmiştir. Bu korunum sabitleri yukarıda tanımlanan solitary dalga denklemini için hesaplanmıştır.

$$C_m = \int_a^b \left(u - \frac{\mu}{3} u_{xx} \right) dx$$

$$C_p = \frac{1}{6} \int_a^b (3u^2 + \mu u_x^2 - 2\mu u u_{xx}) dx,$$

$$C_e = \frac{1}{72\mu} \int_a^b (-6\epsilon u^4 - 3\epsilon\mu u^2 u_x^2 - \epsilon\mu u^3 u_{xx} + 6\mu(3u_t u_x + 3u_x^2 - 2\mu u_{xt} u_{xx} - \mu u_x u_{xxt}) - 6\mu v(-3u_{xt} + 3u_{xx} - \mu u_{xxx})) dx.$$

Bu değerler sırasıyla kütle, momentum ve enerjiye karşılık gelmektedir. L2 ve L ∞ hata normları, $C_1, C_2, C_3, C_m, C_p, C_e$ korunum sabitleri hesaplanarak Çizelge 5.2 de gösterilmiştir.

Çizelge 5.2. $B = 0.13, T = 20, n = 800, k = 0.1, \alpha = h^2/4, a = -40$ ve $b = 60$ değerleri için tek solitary dalga hareketi.

Zaman	L2x10 ⁵	L ∞ x10 ⁶	C ₁	C ₂	C ₃	C _m	C _p	C _e
20(exact)	0	0	3.3461	0.49176666	1.54004719	3.3461	0.24588	0.00311
0	0	0	3.3461	0.49176666	1.54004719	3.3461	0.24586	0.00309
5	0.5	1.9	3.3462	0.49176667	1.54004720	3.3462	0.24586	0.00309
10	1.0	3.7	3.3462	0.49176667	1.54004720	3.3462	0.24586	0.00309
15	1.4	4.8	3.3462	0.49176667	1.54004720	3.3462	0.24586	0.00309
20	1.8	5.7	3.3461	0.49176666	1.54004719	3.3461	0.24586	0.00309

5.4.2. Solitary dalgaların etkileşimi

Hesaplanan sonuçları (Islam vd., 2009) ile karşılaştırmak için iki pozitif solitary dalganın etkileşimi çalışılmıştır. Bu solitary dalgalar için homojen sınır koşulları ve aşağıdaki başlangıç koşulu kullanılmıştır.

$$U(x, 0) = 3A_1 \operatorname{sech}^2(K_1(x - x_1)) + 3A_2 \operatorname{sech}^2(K_2(x - x_2))$$

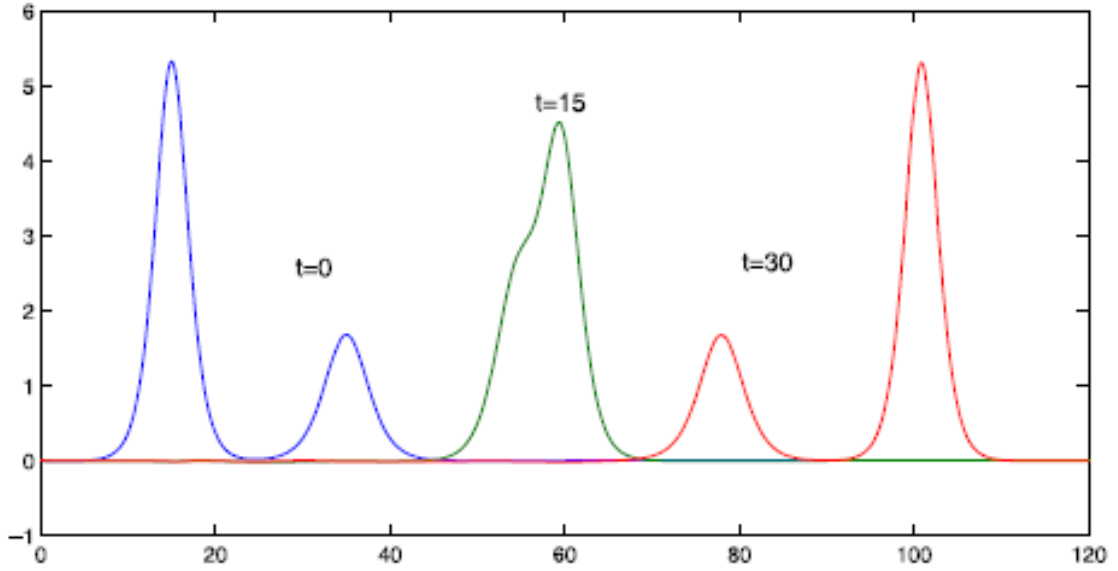
Burada

$$k_1 = 0.4, \quad k_2 = 0.3, \quad x_1 = 15,$$

$$x_2 = 35, \quad A_j = \frac{4K_j^2}{1 - 4K_j^2}, \quad j = 1, 2.$$

dir. Bu koşullar $x = 15$ ve $x = 35$ konumlarında ve 5.333375 ve 1.687502 genliklerinde solitary dalgaların oluşmasını sağlar. Hesaplamalar $[0, 120]$ aralığında $t = 30$ zamanında ve $k = 0.1$ zaman adımı kullanılarak $n = 1200$ düğüm noktası için gerçekleştirilmiştir.

Bu hesaplama sürecinde en geniş ve en küçük dalgalar birleşir ve ayrılır. Buna rağmen orijinal şekillerini korurlar. Bu durum $t = 0, 15, 30$ için şekil 5.1.'te gösterilmiştir.



Şekil 5.1. İki solitary dalganın etkileşimi.

C_1, C_2, C_3 büyüklükleri Çizelge 5.3.'de verilmiştir.

Çizelge 5.3. İki solitary dalganın ve üç solitary dalganın etkileşiminde korunum sabitleri.

Zaman	C_1	C_2	C_3	Zaman	C_1	C_2	C_3
0	37.9165	120.5	744.1	0	0.4289	1.088	6.12
5	37.9167	120.5	744.1	5	0.4290	1.088	6.12
10	37.9167	120.6	744.4	10	0.4290	1.089	6.12
15	37.9167	120.7	745.2	15	0.4290	1.090	6.13
20	37.9167	120.5	744.2	20	0.4290	1.088	6.12
25	37.9167	120.5	744.1	25	0.4290	1.088	6.12
30	37.9167	120.5	744.1	30	0.4290	1.088	6.12

Üç pozitif solitary dalganın etkileşimini inceleyelim. Bunun için homojen sınır koşulları ve

$$u(x, 0) = \sum_{j=1}^3 \frac{12K_j^2}{1 - 4K_j^2} \operatorname{sech}^2(K_j(x - x_j))$$

başlangıç koşulları ele alınsın. Burada

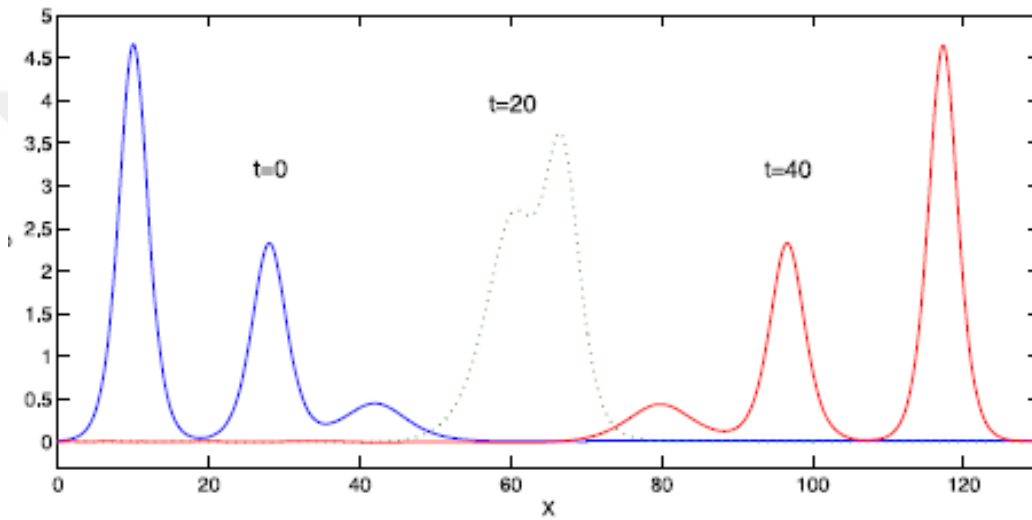
$$K_1 = 0.39, \quad K_2 = 0.33, \quad K_3 = 1.8,$$

$$x_1 = 10, \quad x_2 = 28, \quad x_3 = 42$$

dir. Bu koşullar $x = 10, x = 28, x = 42$ konumlarında ve 4.660878, 2.315379 ve 0.446691 genliklerinde solitary dalga üretirler. Hesaplamalar $[0,130]$ aralığında $t = 40$ zamanında ve $k = 0.1$ zaman adımı kullanılarak $n = 1300$ düğüm noktası için gerçekleştirir.

Bu işlem sonucunda tüm dalgalar birleşir ve ayrılır. Buna rağmen çarpışma sonucunda orijinal şekillerini korurlar.

$t = 0, t = 20, t = 40$ zamanlarındaki dalga etkileşimleri şekil 5.2.'de gösterilmiştir.



Şekil 5.2. Üç solitary dalganın etkileşimi.

5.4.3. Tek dalganın hareketi(Wave undulation)

Hesaplanan sonuçları (Islam vd., 2009) ile karşılaştırmak için

$$u(a, t) = u_0, \quad u(b, t) = 0$$

sınır koşullarını ve

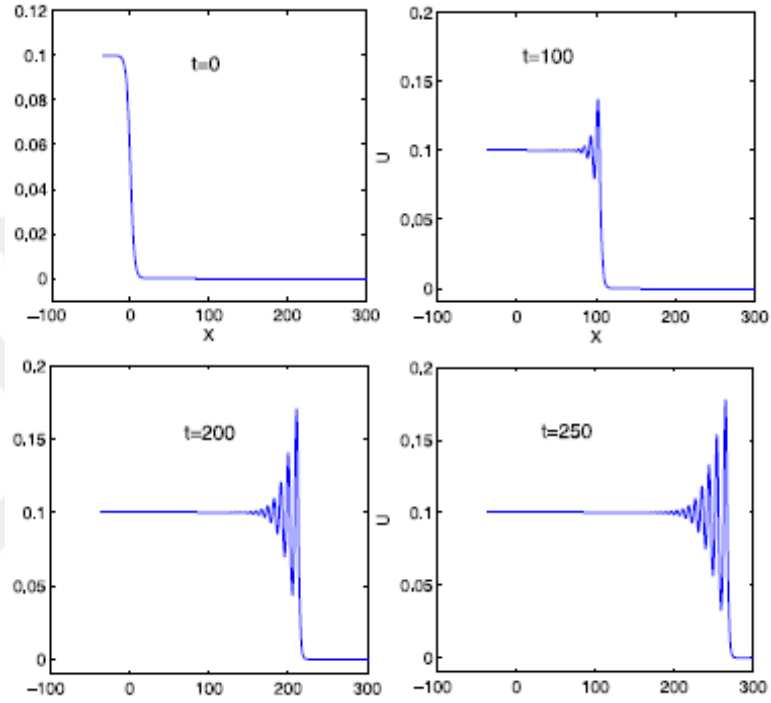
$$u(x, 0) = 0.5u_0(1 - \tanh((x - x_c)/d))$$

başlangıç koşulunu kullanalım. Burada $u(x, 0)$ $t = 0$ anında denge seviyesinin altında kalan su yüzeyinin yüksekliğini, d durgun ve derin su seviyesi arasındaki eğimi ve u_0 $x = x_c$ merkezli su seviyesindeki değişimin büyüklüğünü verir. Hesaplamalarda parametre değerleri olarak

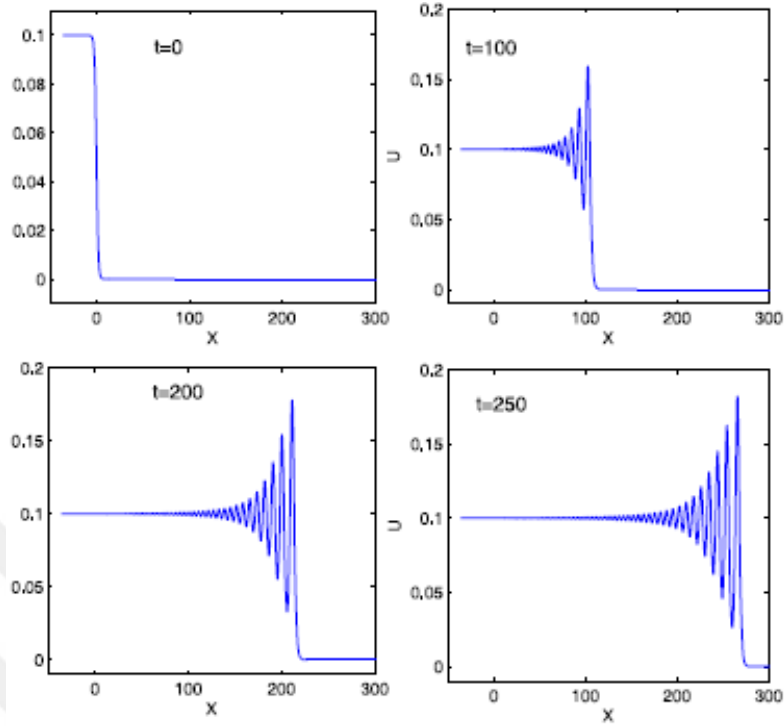
$$\epsilon = 1.5, \quad \mu = \frac{1}{6}, u_0 = 0.1, a = -36, b = 300, x_c = 0, k = 0.1, n = 1400, d = 5, d = 2$$

alınarak karşılaştırmalar yapılacaktır. Bu çalışmada belirtilen parametreler kullanılarak RLW denklemleri için $t = 250$ zamanına kadar hesaplamalar yapılmıştır.

Ele alınan dalganın $t = 0, 100, 200, 250$ zamanlarındaki hareketi şekil 5.3. ve 5.4.'de gösterilmiştir.



Şekil 5.3. $d=5$ dalgalanma profili.



Şekil 5.4. $d=2$ dalgalanma profili.

$d = 2$ için çalışma zamanının başlangıcında dalgalanma genliği büyümektedir. Bu ise dalga hareketinin başlangıç dalgalanmasının formu ile bağlantılı olduğu anlamına gelir.

5.4.4. Maxwell başlangıç koşulu

Hesaplanan sonuçları (Mokhtari ve Torabi Ziaratgahi, 2011) ile karşılaştırabilmek için $\epsilon = 1$ için RLW denkleminin nümerik çözümünü ele alalım. Ayrıca farklı μ parametre değerleriyle homojen sınır koşulları ve Maxwell başlangıç koşulu

$$u(x, 0) = \exp(-(x - 7)^2), \quad x \in [0, 30]$$

ile hesaplama yapılsın.

Ele alınan denklem için $h = 0.04$, $k = 0.01$ ve $\mu = 0.04, 0.01, 0.001$ değerleri ele alınarak hesaplamalar yapılmıştır. Bu durumda elde edilen C_1, C_2, C_3 değerleri Çizelge 5.4.'de verilmiştir.

Çizelge 5.4. $\mu = 0.04$ (sol), $\mu = 0.01$ (merkez) ve $\mu = 0.001$ (sağ) ile tanımlı Maxwell başlangıç koşulları için değişkenler.

Zaman	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3
0	1.7724539	1.3035	4.7833	0.00177245385091	0.07855	3.48	1.7724539	1.255	4.78
1	1.7724539	1.3034	4.7833	0.00177245385091	0.07856	3.49	1.7724539	1.255	4.78
2	1.7724539	1.3034	4.7832	0.00177245385091	0.07857	3.49	1.7724538	1.255	4.78
3	1.7724539	1.3035	4.7832	0.00177245385090	0.07859	3.50	1.7724538	1.256	4.77
4	1.7724539	1.3035	4.7832	0.00177245385090	0.07860	3.50	1.7724539	1.256	4.77
5	1.7724539	1.3035	4.7832	0.00177245385090	0.07860	3.50	1.7724539	1.256	4.77
6	1.7724539	1.3035	4.7832	0.00177245385090	0.07861	3.50	1.7724539	1.257	4.77
7	1.7724539	1.3035	4.7832	0.00177245385090	0.07861	3.50	1.7724539	1.257	4.77
8	1.7724539	1.3035	4.7832	0.00177245385090	0.07861	3.50	1.7724539	1.257	4.77
9	1.7724539	1.3035	4.7832	0.00177245385090	0.07861	3.50	1.7724539	1.257	4.77
10	1.7724539	1.3035	4.7832	0.00177245385090	0.07861	3.50	1.7724539	1.257	4.77
11	1.7724538	1.3035	4.7832	0.00177245385090	0.07861	3.50	1.7724539	1.257	4.77
12	1.7724538	1.3035	4.7832	0.00177245385090	0.07861	3.50	1.7724539	1.257	4.77

Çizelge değerlerinden görüldüğü gibi C_1, C_2, C_3 sabitleri farklı t zamanları için korunmaktadır.

5.5.Sonuç

Bu çalışmada CrankNicolson algoritması kullanılarak kararlı nümerik metot olarak ele alınan polinom olmayan spline fonksiyonlar yardımıyla RLW denkleminin çözümü elde edilmiştir. Bu hesaplamada oluşan yerel kesme hatası $O(k^2 + h^2)$ mertebesindedir. Yöntemin etkinliğini göstermek için bazı test problemleri üzerinde çalışılmıştır. Bu test problemlerinde elde edilen sonuçlar aynı parametreler kullanılarak elde edilen benzer çalışmalar ile karşılaştırılmış ve bu sonuçlarla uyum içinde olduğu hatta daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

6.SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, birbirinden farklı özelliklere sahip lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin nümerik çözümleri için polinom olmayan spline fonksiyonlar kullanılmıştır. Elde edilen çözümler incelendiğinde uygulanan yöntemden elde edilen sonuçların genellikle Laplace, ayrıştırma, B- Spline ve benzeri nümerik yöntemlerden daha iyi olduğu görülmüştür.

Bu çözüm tekniği ile diğer lineer olmayan denklemlerin nümerik çözümleri de incelenebilir. Yapılan çalışmalara bakıldığında uygulanan yöntem, diğer denklem çözümleri için de iyi sonuçlar verecek etkinliktedir.



KAYNAKLAR DİZİNİ

Akram, G., Siddiqi, S., (2006), Solution of sixth order boundary value problems using non-polynomial spline technique, Appl. Math. Comput. 181, s.708-720.

Ames, W., (1977), Numerical Methods for Partial Differential Equations, Academic Pres, New York-London.

Amirali, G., Duru, H. (2002), Nümerik analiz. ISBN 975-6802-91-X. Pegem A Yayınları, Ankara, s.371.

Aregbesola, Y.A.S., (2003), Numerical solution of Bratu problem using the method of weighted residual, Electron. J. South Afr. Math. Sci. 3(1), s.1-7.

Biswas, A., (2010), Solitary waves for power-law regularized long-wave equation and $R(m, n)$ equation, Nonlinear Dyn., 59, s.423-426.

Biswas, A., Kara, A.H., (2011), Conservation laws for regularized long wave equation and $R(m, n)$ equation, Adv. Sci. Lett., 4, s.168-170.

Body, J.P., (2003), Chebyshev polynomial expansions for simultaneous approximation of two branches of a function with application to the one-dimensional Bratu equation, Appl. Math. Comput. 142, s.189-200.

Bona, J.L., Bryant, P.J., (1973), A mathematical model for long waves generated by wave makers in nonlinear dispersive system, Proc. Camp. Philos. Soc., 73, s.391-405.

Buckmire, R., (2004), Application of a Mickens finite-difference scheme to the cylindrical Bratu-Gelfand problem, Numer. Methods Partial Differential Equations 20(3), s.327-337.

Burger, J. M., (1948), A mathematical model illustrating the theory of turbulence, Adv in App Mech I, Academic Press, New York, s.171-99.

Caglar, H., Caglar, N., Özer, M., (2010), Antonios Valaristos, Antonios N. Anagnostopoulos, B-spline method for solving Bratu's problem, Int. J. Comput. Math. 87(8), s.1885-1891.

Chegini N.G., Salaripناه A., Mokhtari R., (2012), Numerical solution of the regularized long wave equation using nonpolynomial splines, Nonlinear Dyn, 69 s.459-471.

Cole, J. D., (1951), On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics, Quart Appl Math 9, s.225-36 .

Daele, M. V., Berghe, V., Meyer, H. D., (1994), A smooth approximation for the solution of a fourth- order boundary value problem based on nonpolynomial splines, J Comput Appl Math 51, s.383-94.

Deeba, E., Khuri, S.A., Xie, S., (2000), An algorithm for solving boundary value problems, J. Comput. Phys. 159, s.125-138.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- El-Danaf, T.S., Ramadan, A. M., (2007), On the analytical and numerical solutions of the one-dimensional nonlinear Burgers' equation, *Open Appl Math J*, I, s.1-8.
- El-Danaf, T.S., Ramadan, M.A., Abd-Alaal, F.E.I., (2011), Numerical studies of the cubic non-linear Schrödinger equation, *Nonlinear Dyn.*, s.11071-011-0014-6.
- El-Danaf, T. S., (2002), Numerical solution of the Korteweg-Vries Burgers' equation by quintic spline method, *Studia Univ. Babeş-Bolyai Mathematica*, XLVII (2), s.41-55.
- El-Danaf, T. S., Abd Alaal F. E. I., (2007), The use of non-polynomial splines for solving a fourth order parabolic partial differential equation, *Proceeding of the Mathematical and Physical Society of Egypt*.
- Evans, G., Blackledge, J., Yardley, P., (2000), *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Faculty of Computing Sciences & Engineering, De Montfort University, The Gateway, Leicester, s.290.
- Fischer, C.F., Usmani, R.A., (1969), Properties of some tridiagonal matrices and their application to boundary value problems, *SIAM J. Numer. Anal.* 6, s.127-142.
- Frank-Kamenetski, D.A., (1955), Diffusion and Heat Exchange in Chemical Kinetics, Princeton University Press, Princeton N.J.
- Gandarias, M. L., (1997), Nonclassical potential symmetries of the Burgers' equation, *Symmetry nonlinear Math Phys*, 1, s.130-7.
- Griewanka, A., El-Danaf, T.S., (2009), Efficient accurate numerical treatment of the modified Burgers' equation, *Appl. Anal.*, 88,s.75-87.
- Harris, S. L. (1996), Sonic shocks governed by the Burgers' equation, *EJAM*, 6, s.75-107.
- Hassan, I.H.A.H., Erturk, V.S., (2007), Applying differential transformation method to the one-dimensional planar Bratu problem, *Int. J. Concemp. Math. Sci.* 2, s.1493-1504.
- He, J.H., (2006), Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations, *Internat. J. Modern Phys. B* 20(10), s.1141-1199.
- He, J.H., (2008), Variational approach to the Bratu's problem, *J. Phys.: Conf. Ser.* 96, 012087.
- Henrici, P., (1961), Discrete Variable Methods in Ordinary in Differential Equations, Wiley, New York.
- Hiberman, R., (2004), Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems, New Jersey: Pearson Prentice Hall.
- Islam, S.U., Haq, S., Ali, A., (2009), A meshfree method for the numerical solution of the RLW equation, *J. Comput. Appl. Math.*, 223, s.997-1012.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Islam, S. U., Khan, M. A., Tirmizi, I. A., Twizell, E. H., (2005), Non-Polynomial spline approach to the solution of a system of third-order boundary-value problems, Appl Appl Math, 168, s.152-63.

Jacobsen, J., Schmitt, K., (2002), The Liouville-Bratu-Gelfand problem for radial operators, J. Differential Equations 184, s.283-298.

Jain, M.K., (1984), Numerical Solution of Differential Equations, New Delhi: Wiley Eastern.

Jalilian, R., (2010), Non-polynomial spline method for solving Bratu's problem, Contents Physics Communications, 181s.1868-1872.

Jalilian, R., (2010), Non-polynomial spline method for solving Bratu's problem, Comput. Phys. Commun., 181,s.1868-1872.

Khuri, S.A., (2004), A new approach to Bratu's problem, Appl. Math. Comput. 147, s.131-136.

Koca, K., (2003), Kısmi türevli denklemler, Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, Ankara, s.231.

Krstic, M., (1999), On global stabilization of Burgers' equation by boundary control, SYS Control Lett, 37, s.123-41.

Li, S., Liao, S.J., (2005), An analytic approach to solve multiple solutions of a strongly nonlinear problem, Appl. Math. Comput. 169, s.854-865.

Liao, S., Tan, Y., (2007), A general approach to obtain series solutions of nonlinear differential equations, Stud. Appl. Math. 119, s.297-354.

Ly, H. V., Mease, K. D., Tite, E. S., (1997), Distributed and boundary control of the viscous Burgers equation, Numer Funct Anal Optim, 18, s.143-88.

McGough, J. S., (1998), Numerical continuation and the Gelfand problem, Appl. Math. Comput. 89, s.225-239.

Mohamed, A., Ramadan, Talaat S., El-Danaf ve Faisal E.I.Abd Alaal, (2007), Application of the Non-Polynomial Spline Approach to the Solution of the Burgers' Equation, The Open Applied Mathematics Journal, 1s.15-20.

Mohammadi, M., Mokhtari, R., (2011), Solving the generalized regularized long wave equation on the basis of a reproducing kernel space, J. Comput. Appl. Math., 235,s.4003-1014.

Mohsen, A., Sedeek, L.F., Mohamed, S.A., (2008), New smoother to enhance multigrid-based methods for Bratu problem, Appl. Math. Comput. 204, s.325-339.

Mokhtari, R., Mohammadi, M., (2010), Numerical solution of GRLW equation using Sinc-collocation method, Comput. Phys. Commun., 181, s.1266-1274.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Mokhtari, R., Torabi Ziaratgahi, S., (2011), Numerical solution of RLW equation using integrated radial basis functions, *Int. J. Appl. Comput. Math.*, 10,s.428-448.

Mounim, A.S., de Dormale, B.M., (2006), From the fitting techniques to accurate schemes for the Liouville-Bratu-Gelfand problem, *Numer.Methods Partial Differential Equations* 22(4), s.761-775.

Rahidinia, J., Jalilian, R., Kazemi, V., (2007), Spline method for the solution of hyperbolic equations, *Appl Math Comput*, 082.

Ramadan, M., Lashien, I., Zahra, W., (2009), Quintic non-polynomial spline solutions for fourth order boundary value problem, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*14, s.1105-1114.

Ramadan, M. A., El-Danaf, T. S., (2005), Numerical treatment for the Burgers' equation, *Math Comput Simul*, 70, s.90-8.

Ramadan, M. A., El-Danaf, T. S., Abd Alaal, F. E. I., (2005), A numerical solution of the Burgers' equation using B-splines, *Chaos Solitons Fractals*, 26, s.1249-58.

Ramadan, M. A., Lashien, I. F., Zahra, W. K., (2007), Polynomial and nonpolynomial spline approaches to the numerical solution of second order boundary value problems, *Appl Math Comput*,184, s.476-84.

Ramadan, M. A., Lashien, I. F., Zahra, W. K., (2008), A class of methods based on septic non-polynomial spline function for the solution of sixty order two point boundary value problems, *Int J Comput Math*, 85, s.759-770.

Rashidinia, J. ve Mohammadi, R., (2008), Non-polynomial cubic spline methods for the solution of parabolic equations, *International Journal of Computer Mathematics*, 85(5) s.843-850.

Rashidinia, J., Jalilian, R., (2007), Non-polynomial spline for solution of boundary-value problems in plate deflection theory, *Int. J. Comput. Math.*84, s.1483-1494.

Rashidinia, J., Jalilian, R., Mohammadi, R., (2007), Non-polynomial spline methods for the solution of a system of obstacle problems, *Appl. Math. Comput.* 188, s.1984-1990.

Rashidinia, J., Mohammadi, R. ve Jalilian, R., (2006), Spline methods for the solution of hyperbolic equation with variable coefficients, *Wiley InterScience*, 23, s.1411-1419.

Rashidinia, J., Mohammadi, R.,(2009), Numerical methods based on non-polynomial sextic spline for solution of variable coefficient fourth-order wave equations.*Int.J. Comput. Methods Eng. Sci. Mech.*, 10,s.266-276.

Rashidinia, J., Mohammadi, R.,(2010), Tension spline approach for the numerical solution of nonlinear Klein-Gordon equation, *Comput. Phys. Commun.*, 181,s.78-91.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Saka, B., (1998), Parabolik denklemlerin nümerik çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, s.111.

Sallam, S., Naim Anwar, M. ve Abdel-Aziz, M.R., (2004), Unconditionally stable C^1 -cubic spline collocation method for solving parabolic equations, International Journal of Computer Mathematics 81, s.813-821.

Samarskii, A.A. A. (2001), The Theory of Difference Schemes, ISBN 0-8247-0468-1, Marcel Dekker, Inc., New York, s.761.

Scheid, F., (1988), Nümerik analiz, (Çev. H. H. Hacısalıhoğlu, A. Köksal), Nobel Yayın Dağıtım Ltd., Şti., s.470.

Smith, G.D., (1965), Numerical Solution of Partial Differential Equation:Finite Difference. Oxford University Pres, New York.

Smith, G.D., (1985), Numerical Solution of Partial Differential Equations, Oxford University Press.

Syam, M.I., Hamdan, A., (2006), An efficient method for solving Bratu equations, Appl. Math. Comput. 176, s.704-713.

Şınar, H., (2011), Parabolik denklemler için iki katlı fark şemaları, Yüksek Lisans Tezi, Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sinop.

Tirmizi, I.A., Twizell, E.H., (2002), Higher-order finite-difference methods for nonlinear second-order two-point boundary-value problems, Appl. Math. Lett. 15, s.897-902.

Ul Islam, S., Tirmizi, I.A., Haq, F., Taseer, S.K., (2008), Family of numerical methods based on non-polynomial splines for solution of contact problems, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 13, s.1448-1460.

Usmani, R.A., Warsi, S.A., (1980), Quintic spline solutions of boundary value problems, Comput. Math. Appl. 6, s.197-203.

Van Daele, M., Vanden Berghe, G., De Meyer, H.A., (1994), Smooth approximation for the solution of a fourth-order boundary value problem based on non-polynomial splines, J. Comput. Appl. Math. 51, s.383-394.

Weijiu, L., (2002), A asymptotic behavior of solutions of time-delayed Burgers' equation, Discrete and Continuous Dynamical Systems Ser B, 2(1), s.47-56.

Yıldız, H., (2010), Tek boyutlu parabolik denklemler için fark şemaları, Yüksek Lisans Tezi, Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Van, s.64.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Zorşahin, M., (2009), Polinom ve polinom olmayan kübik spline fonksiyonlar yardımıyla bazı kısmi diferensiyel denklemlerin sayısal çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

