T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SAYISAL YARIGRUPLARIN FROBENIUS SAYILARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YELİZ KURTULDU

BALIKESİR, HAZİRAN - 2019

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SAYISAL YARIGRUPLARIN FROBENIUS SAYILARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YELİZ KURTULDU

Jüri Üyeleri : Dr. Öğr. Üyesi Pınar METE (Tez Danışmanı)
Dr. Öğr. Üyesi Dilek NAMLI
Dr. Öğr. Üyesi Cansu BETİN ONUR

BALIKESİR, HAZİRAN – 2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

Yeliz KURTULDU tarafından hazırlanan "**SAYISAL YARIGRUPLARIN FROBENIUS SAYILARI**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 12.06.2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Dr. Öğr. Üyesi Pınar METE	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Dilek NAMLI	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Cansu BETİN ONUR	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

ÖZET

SAYISAL YARIGRUPLARIN FROBENIUS SAYILARI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
YELİZ KURTULDU
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ PINAR METE)

BALIKESİR, HAZİRAN - 2019

$S=\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$, $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$ doğal sayılar ile üretilen bir sayısal yarıgrup olsun. Sayısal yarıgrupların Frobenius problemi, bu yarıgrupların üreteçlerini kullanarak Frobenius sayılarını, cinslerini ve Hilbert fonksiyonunu bulmaktır.

Bu tezde, Frobenius problemini çözmek için basit bir yöntem olan minimal transversal metodu ele alınacaktır. Bu çalışma, E. Leher'in [1] sayısal yarıgrupların Frobenius problemi ile ilgili makalesindeki sonuçların bir derlemesi olup, bu makaledeki teoremlerin ayrıntılı ispatlarını vermektedir.

ANAHTAR KELİMELER: Frobenius sayısı, sayısal yarıgrup, Apery kümesi, minimal transversal.

ABSTRACT

FROBENIUS NUMBERS OF NUMERICAL SEMIGROUPS
MSC THESIS
YELIZ KURTULDU
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: ASSIST. PROF. DR. PINAR METE)

BALIKESİR, JUNE 2019

Let $S=\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ be the numerical semigroup generated by the natural numbers $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$. The Frobenius problem for numerical semigroups is to find their Frobenius numbers, genus and Hilbert function by using their generators.

In this thesis, minimal transversal method, which is an elementary technique to solve the Frobenius problem, will be revisited. This study is a survey of the results of the paper of E. Leher [1] about the Frobenius problem of numerical semigroups and gives detailed proofs of the theorems of his paper.

KEYWORDS: Frobenius number, numerical semigroup, Apery set, minimal transversal.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

S	:	Sayısal yarıgrup
$S=\langle a_1,\dots a_n\rangle$	:	$a_1,\dots,a_n$ elemanları tarafından üretilen sayısal yarıgrup
$F(S)$	:	S’nin Frobenius sayısı
$e(S)$	:	S’nin gömme boyutu
$m(S)$	:	S’nin katlılığı
$G(S)$	:	S’nin boşlukları
$g(S)$	:	S’nin cinsi
$C_{k,b}$	:	k’nın $\bmod b$ ’ye göre S ’deki koseti
$T(b)$	:	S ’nin b moduna göre minimal transversali
$Ap(S)$	:	S ’nin Apery kümesi
$r(k,b)$	:	S ’nin b moduna göre minimal temsilcisi

ÖNSÖZ

İlk olarak, değişmeli cebir ve cebirsel geometri ile tanışmamı sağlayan ve her zaman sabırla, ilgiyle sorularımı yanıtlayan ve benim için çok değerli olan sayın danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Pınar METE'ye teşekür ederim.

Hayatımın her anına ortak olan, her zaman yanımda olan babam Yüksel KURTULDU annem Gülnur KURTULDU ve kardeşim Güliz KURTULDU'ya destekleri, sabırları ve özverileri için teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

F.G. Frobenius (1849-1917) ‘un derslerinde öne sürdüğü ve hiçbir yerde yayınlamadığı, bir S sayısal yarıgrubunun minimal üreteçleri yardımıyla yarıgrupta olmayan en büyük tamsayıyı bulma problemi, günümüzde Frobenius problemi olarak adlandırılır.

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n sayısının S sayısal yarıgrubundaki Apery kümesi, R. Apery [2] tarafından

$$Ap(n) = \{s \in S \mid \mathrm{s} - \mathrm{n} \notin \mathrm{S}\}$$

olarak tanımlanmıştır. Eğer, $n \in S$ ise, $Ap(S)$, n ’nin tam olarak minimal transversalidir. 1962 yılında Brauer ve Shockly [3], 1977 yılında da Selmer [4] S sayısal yarıgrubunun bir üretecine göre Apery kümesi aracılığıyla, S ’nin Frobenius sayısını ve cinsini veren bir formül verdiler. Bununla birlikte bu formüller hemen hemen hiç kullanılmamışlardır.

Bu tezde asıl amaç, E. Leher [1] ’in ”Sayısal Yarıgrupların Frobenius Problemi Üzerine” başlıklı makalesinde verdiği minimal transversal tekniğini tanıtmak ve bu tekniği Frobenius probleminin çözümünde nasıl kullandıklarını göstermektir.

Tezin 2. bölümünde, sayısal yarıgruplar kısaca tanıtılarak, bir S sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı, cinsi ve Hilbert fonksiyonu hakkında temel bilgiler verilecektir.

Tezin 3. bölümünde, Frobenius problemini çözmek amaçlı bir yöntem olan minimal transversal tekniği anlatılacaktır.

Tezin 4. bölümünde, minimal transversal yöntemi kullanılarak düzgün diziler ile üretilen sayısal yarıgrupların ve tezin 5. bölümünde de, aritmetik diziler ile üretilen sayısal yarıgrupların Frobenius sayıları, cinsleri ve Hilbert fonksiyonlarının nasıl hesaplandığı gösterilecektir.

2. FROBENIUS PROBLEMİ

$a_1,...,a_n$ sayıları aralarında asal ve, $x_1,...,x_n$ sayıları negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$$a_1x_1+...+\mathrm{a}_n\,x_n$$

şeklinde yazılamayan en büyük tamsayı vardır ve bu tamsayıyı hesaplama problemi, Frobenius problemi olarak bilinmektedir.

$b\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$a_1x_1+...+a_nx_n=b \tag{2.1}$$

denkleminin negatif olmayan tamsayı çözümlerinin kümesi

$$\{a_1x_1+...+\mathrm{a}_n\,x_n \mid x_1,...,\mathrm{x}_n\in\mathbb{N}\}$$

olarak veya kısaca

$$S=\langle a_1,...,a_n\rangle$$

ile gösterilebilir. S , $\{a_1,...,a_n\}$ 'ler tarafından üretilen ve sayısal yarıgrup olarak adlandırılan özel bir yarıgrupdur. Bu durumda, Frobenius problemi, bir sayısal yarıgrubun minimal üreteçleri aracılığıyla hesaplanabilen formüller bulma problemine dönüşür.

2.1 Sayısal Yarıgruplar

$G\neq\varnothing$ bir küme, $(G,*)$ cebirsel yapısı verilsin. "*" ikili işleminin birleşme özelliği var ise $(G,*)$ yapısına yarıgrup, buna ek olarak, "*" işlemine göre birim elemana sahip ise $(G,*)$ 'a monoid denir.

$\mathbb{N}=\{0,1,2,..\}$ kümesinin, 0 elemanını içeren S alt kümesi, $\forall x,y\in S$ için

$$x+y\in S$$

oluyor ise, S 'ye $\mathbb{N}$ 'nin alt monoidi denir.

Şimdi, sayısal yarıgrubu tanımlayalım.

2.1.1 Tanım S, $\mathbb{N}$ 'nin bir alt monoidi olsun. S kümesi,

(i) $0\in S$

(ii) $\forall x,y\in S$ için $x+y\in S$

(iii) $\mathbb{N}\setminus S$ sonlu

şartlarını sağlıyor ise, S 'ye sayısal yarıgrup denir.

2.1.1 Örnek $S=\langle 4,5,7\rangle=\{4x_1+5x_2+7x_3 \mid x_1,x_2,x_3\in\mathbb{N}\}$

$a_1=4, a_2=5, a_3=7$ ve $(4,5,7)=1$ ‘dir.

(i) $0=4.0+5.0+7.0$ olarak yazılabildiğinden $0\in S$

(ii) $x,y\in S$ olsun.

$x=4x_1+5x_2+7x_3 \quad ,x_1,x_2,x_3\in\mathbb{N}$

$y=4y_1+5y_2+7y_3 \quad ,y_1,y_2,y_3\in\mathbb{N}$

yazabiliriz.

$$x+y=(4x_1+5x_2+7x_3)+(4y_1+5y_2+7y_3)$$

$$=4(x_1+y_1)+5(x_2+y_2)+7(x_3+y_3)$$

olduğundan $x+y\in S$ 'dir.

(iii) $\mathbb{N}\setminus S=\{1,2,3,6\}$ sonlu bir kümedir. Böylece 2.1.1 Tanım gereği $S=\langle 4,5,7\rangle$ bir sayısal yarıgruptur.

$(4,5,7)=1$ ve $1\mid 7$ olduğundan , $\forall n\geq 7$ için

$$4x_1+5x_2+7x_3=n$$

denkleminin doğal sayılarda çözümü vardır. Böylece,

$$S=\{0,4,5,7,8,9,10,11,12,13,14,15,..\}$$

olur.

2.1.3 Yardımcı Teorem $\{a_1,...,a_r\}$, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin alt kümesi olsun.

$$\langle a_1,...,a_r\rangle=\left\{\sum_{i=1}^{r}n_i a_i \mid n_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\right\} \tag{2.2}$$

kümesi bir sayısal yarıgruptur $\Leftrightarrow obeb(a_1,...,a_r)=1$

İspat: [5]

2.1.4 Tanım S bir sayısal yarıgrup ve $A=\{a_1,...,a_r\}$, S 'nin bir üreteç kümesi olsun. A'nın öz altkümelerinden hiçbirisi S 'yi üretmiyor ise A 'ya S 'nin minimal üreteç kümesi denir

2.1.5 Teorem Her sayısal yarıgrup bir tek sonlu minimal üreteç kümesine sahiptir.

İspat: [5]

2.1.6 Tanım S bir sayısal yarıgrup ve $\{0\neq n_1<n_2<...<n_p\}$, S 'nin bir minimal üreteç kümesi olsun. n_1 sayısına, S 'nin katlılığı denir ve $m(S)$ ile gösterilir. Minimal üreteç kümesinin eleman sayısına S 'nin gömme boyutu denir ve $e(S)$ ile gösterilir.

2.1.7 Tanım Frobenius problem $a_1,...,a_n$ 'ler $obeb(a_1,...,a_n)=1$ olan pozitif tamsayılar iken,

$$S=\langle a_1,...,a_n\rangle$$

sayısal yarıgrubunda olmayan en büyük tamsayıyı bulma problemine eşdeğerdir.

$$\max(\mathbb{N}\setminus S)$$

sayısı, S 'nin Frobenius sayısı olarak bilinir ve $F = F(S)$ ile gösterilir. $\mathbb{N} \setminus S$ kümesine, S 'nin boşlukları ve bu kümenin eleman sayısına S 'nin cinsi denir ve sırasıyla $G(S)$ ve $g(S)$ ile gösterilir.

2.1.8 Örnek $S = \langle 4,5,6 \rangle = \{0,4,5,7,8,9,10,11,12,\rightarrow\}$

$\{4,5,7\}$ kümesi, S 'nin minimal üreteç kümesidir.

$$m(S) = 4 \text{ , } S \text{ ‘nin katlılığı}$$

$$e(S) = 3 \text{ , } S \text{ ‘nin gömme boyutu}$$

olur.

$$G(S) = \mathbb{N} \setminus S = \{1,2,3,6\}$$

$$g(S) = 4$$

$$F(S) = \max(N \setminus S) = 6$$

Gömme boyutu $e(S) > 2$ olan sayısal yarıgrupların cins ve Frobenius sayıları için genel bir formül bilinmemektedir [6]. Fakat, gömme boyutu 2 olan sayısal yarıgruplar için bir formül bilinmektedir.

2.1.9 Teorem a ve b **,** $obeb(\mathrm{a},\mathrm{b}) = 1$ olan pozitif tamsayılar ve $S = \langle a,b \rangle$ sayısal yarıgrup olsun. Bu durumda,

$$F(S) = ab - a - b$$

$$g(S) = \frac{ab - a - b + 1}{2}$$

İspat: [7]

2.1.10 Örnek $S = \langle 3,8 \rangle = \{0,3,6,8,9,11,12,14,15,16,17,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunu alalım.

$$G(S)=\mathbb{N}\setminus S=\{1,2,4,5,7,10,13\}$$

$$g(S)=7$$

$$F(S)=\max(\mathbb{N}\setminus S)=13$$

olduğu tanımlar kullanılarak bulunabilir. Yine 2.1.9 Teoremden

$$F(\langle 3,8\rangle)=3.8-3-8=13$$

$$g(\langle 3,8\rangle)=\frac{(3.8-3-8)+1}{2}=7$$

olduğu kolayca elde edilir.

2.2 Simetrik Sayısal Yarıguplar

S bir sayısal yarıgrup ve $F(S)$, S'nin Frobenius sayısı olsun. Her k doğal sayısı için, k veya $F(S)-k$ sayılarından en az birisi S sayısal yarıgrubuna ait olamaz. Gerçekten de, eğer k ve $F(S)-k$ S'nin elemanı olsaydı, S yarıgrup olduğundan

$$(F(S)-k)+k\in S$$

$$F(S)\in S$$

olur. Bu Frobenius sayısının tanımı ile çelişir. Böylece, a ve b doğal sayılar olmak üzere, her

$$F(S)=a+b$$

ayrışımı için, a ve b'den en az birisi S'ye ait değildir.

$F(S)+1$ tane (a,b) ikilisi olduğundan ve her eleman iki kere sayıldığından

$$g(S) \geq \frac{F(S)+1}{2}$$

olduğu elde edilir.

2.2.1 Tanım S sayısal yarıgrup olsun.

$$g(S) = \frac{F(S)+1}{2} \tag{2.3}$$

ise , S 'ye simetrik sayısal yarıgrup denir. Böylece, her k tamsayısı için k veya $F(S)-k$ sayısı, S 'ye ait ise, S 'ye simetriktir denir.

2.2.2 Örnek $S = \langle 4,7 \rangle = \{0,4,7,8,11,12,14,15,16,18,19,20,21,22,\rightarrow\}$

sayısal yarıgrubunu alalım.

$$G(S) = \{1,2,3,5,6,9,10,13,17\}$$

$$F(S) = 17$$

olur.

$$k=1 \text{ için } F(S)-k = 17-1 = 16 \in S$$

$$k=2 \text{ için } F(S)-k = 17-2 = 15 \in S$$

$$k=3 \text{ için } F(S)-k = 17-3 = 14 \in S$$

$$k=4 \text{ ise } S = \langle 4,7 \rangle \text{ olduğundan } k \in S \text{ 'dir.}$$

$$k=5 \text{ için } F(S)-k = 17-5 = 12 \in S$$

$$k=6 \text{ için } F(S)-k = 17-6 = 11 \in S$$

$$k=7 \text{ ise } S = \langle 4,7 \rangle \text{ olduğundan } k \in S \text{ 'dir.}$$

$$k=8 \text{ ise } S = \langle 4,7 \rangle \text{ ve } 8 = 2.4 + 0.7 \text{ olduğundan } k \in S \text{ 'dir.}$$

$k=9$ için $F(S)-k=17-9=8\in S$

$k=10$ için $F(S)-k=17-10=7\in S$

$k=11$ ise $S=\langle 4,7\rangle$ ve $11=1.4+1.7$ olduğundan $k\in S$ 'dir.

$k=12$ ise $S=\langle 4,7\rangle$ ve $12=3.4+0.7$ olarak yazılabileceğinden $k\in S$ 'dir.

$k=13$ için $F(S)-k=17-13=4\in S$

$k=14$ için $14=0.4+2.7$ olduğundan $k\in S$

$k=15$ için $15=2.4+1.7$ olduğundan $k\in S$

$k=16$ için $16=4.4+0.7$ olduğundan

$k=17$ için $F(S)-k=17-17=0\in S$

Bu durumda, $S=\langle 4,7\rangle$ sayısal yarıgrubu simetriktir.

2.3 Apery Kümeleri ve Hilbert Serileri

İsmini Roger Apery [2]'den sonra alan Apery kümeleri, bir sayısal yarıgrubun Frobenius sayısı ve cinsini hesaplamak için önemli araçlardan birisidir.

2.3.1 Tanım S bir sayısal yarıgrup ve $n\in S\setminus\{0\}$ olsun.

$$Ap(S,n)=\{n\in S \mid s-n\notin S\} \tag{2.4}$$

kümesine, n 'nin S'deki Apery kümesi denir.

2.3.2 Örnek $S=\langle 3,7,8\rangle=\{0,3,6,7,8,9,10,11,12,13,14,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunu alalım.

$n=8\in S$ olsun.

$$Ap(S,8)=\{s\in S \mid s-8\notin S\}$$

kümesini bulalım.

$$0-8 \notin S \Rightarrow 0 \in Ap(S,8)$$

$$3-8 \notin S \Rightarrow 3 \in Ap(S,8)$$

$$6-8 \notin S \Rightarrow 6 \in Ap(S,8)$$

$$7-8 \notin S \Rightarrow 7 \in Ap(S,8)$$

$$9-8 \notin S \Rightarrow 9 \in Ap(S,8)$$

$$10-8 \notin S \Rightarrow 10 \in Ap(S,8)$$

$$12-8 \notin S \Rightarrow 12 \in Ap(S,8)$$

$$13-8 \notin S \Rightarrow 13 \in Ap(S,8)$$

Burada $s \geq 14$ için $s-8 \geq 6$ ve 6 ve 6'dan büyük tüm tamsayılar S 'de olduğundan

$$Ap(S,8) = \{0,3,6,7,9,10,12,13\}$$

elde edilir.

2.3.3 Teorem $n \in S \setminus \{0\}$ olmak üzere $Ap(S,n)$ kümesinin eleman sayısı n tanedir.

İspat: [5]

S bir sayısal yarıgrup ve $n \in S \setminus \{0\}$ olsun. $Ap(S,n)$ kümesini kullanarak S 'nin Frobenius sayısı ve cinsi kolayca hesaplanabilir.

2.3.4 Teorem S bir sayısal yarıgrup ve $n \in S \setminus \{0\}$ olmak üzere

$$F(S) = \max\left(Ap(S,n)\right) - n$$

$$g(S) = \frac{1}{n}\left(\sum_{w \in Ap(S,n)} w\right) - \frac{n-1}{2}$$

İspat: [4]

2.3.5 Örnek $S=\langle 4,5,7\rangle=\{0,4,5,7,8,9,10,11,12,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunu alalım.

$n=4\in S$ için

$$Ap(S,4)=\{s\in S\mid s-4\notin S\}$$

$$=\{0,5,7,10\}$$

$$F(S)=\max(Ap(S,n))-n$$

$$=10-4=6$$

$$g(S)=\frac{1}{4}\left(\sum_{w\in Ap(S.4)} w\right)-\left(\frac{4-1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(0+5+7+10)-\frac{3}{2}$$

$$=\frac{22}{4}-\frac{3}{2}=4$$

2.3.6 Tanım S bir sayısal yarıgrup olsun. S 'nin Hilbert serisi

$$H_s(x)=\sum_{s\in S} x^s$$

olarak tanımlanır.

2.3.7 Örnek $S=\langle 4,5,7\rangle=\{0,4,5,7,8,9,10,11,12,\rightarrow\}$

sayısal yarıgrubunun Hilbert serisi

$$H_s(x)=1+x^4+x^5+x^7+x^8+x^9+x^{10}+\dots$$

2.3.8 Teorem $n_1<n_2<\dots<n_k$ olmak üzere $S=\langle n_1,n_2,\dots,n_k\rangle$ bir sayısal yarıgrup olsun.

$$Ap(S,n_1)=\{a_1,a_2,\ldots,a_{n_1}\}$$

olmak üzere

$$H_s(x)=\sum_{s\in S}x^s=\frac{x^{a_1}+x^{a_2}+\ldots}{1-x^{n_1}}$$

şeklindedir.

İspat: [8]

2.3.9 Örnek $S=\langle 6,9,20\rangle=\{0,6,9,12,15,18,20,21,24,26,27,29,30,32,33,$

$35,36,38,39,40,41,42,44,45,47,48,49,50,\rightarrow\}$

sayısal yarıgrubunu ve $n_1=6\in S$ alalım. 2.3.8 Teorem kullanılarak,

$$Ap(S,6)=\{s\in S \mid \mathrm{s}-6\notin \mathrm{S}\}=\{0,9,20,29,40,49\}$$

$$H_s(x)=\frac{1+x^9+x^{20}+x^{29}+x^{40}+x^{49}}{1-x^6}$$

olarak bulunur.

3. MİNİMAL TRANSVERSAL

Bu bölümde, minimal transversal tekniğini tanıtacağız. İlk olarak bu teknik için gerekli kavramları verelim.

3.1 Kosetler ve Minimal Temsilci

3.1.1 Tanım S bir sayısal yarıgrup ve $b>1$ olan bir tamsayı olsun. Her $k\in\mathbb{Z}$ için

$$C_k = C_{k,b} = \left\{ s\in S \mid s = k\left(\operatorname{mod} b\right)\right\} \tag{3.1}$$

kümesine, k 'nın $\operatorname{mod} b$ 'ye göre S içindeki koseti denir.

3.1.2 Uyarı $S=\bigcup_{k=0}^{b-1} C_k$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} s = k\left(\operatorname{mod} b\right) &\Rightarrow b \mid \left(s-k\right) \\ &\Rightarrow s = k+bj\,,\ j\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Öncelikle, $k\neq k^{'}\left(\operatorname{mod} b\right)$ için

$$C_k \cap C_{k^{'}} = \varnothing$$

dir. $s\in C_k\cap C_{k'}$ olduğunu varsayalım.

$$\Rightarrow s\in C_k \text{ ve } s\in C_{k^{'}}$$

$$\Rightarrow s = k\left(\operatorname{mod} b\right) \text{ ve } s = k^{'}\left(\operatorname{mod} b\right)$$

$$\Rightarrow s = k+bj\,,\ j\in\mathbb{Z} \text{ ve } s = k^{'}+bj^{'}\,,\ j\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow k+bj = k^{'}+bj^{'}$$

$$\Rightarrow k-k^{'} = b\left(j^{'}-j\right)$$

$$\Rightarrow b \mid \left(k-k^{'}\right) \Rightarrow k = k^{'} \left(\mathrm{mod}\, b\right)$$

elde edilir ki, bu $k \neq k^{'} \left(\mathrm{mod}\, b\right)$ ile çelişir. Böylece,

$$C_k \cap C_{k^{'}} = \varnothing$$

olur. $\forall k = 0, \ldots, \mathrm{b}-1$ için

$$C_k \subset S$$

$$\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{b-1} C_k \subset S$$

$s \in S$ olsun. $b > 1$ tamsayısı için Bölme Algoritmasından

$$s = b.q + k$$

olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}$ vardır.

$$\Rightarrow s = k\left(\mathrm{mod}\, b\right)$$

$$\Rightarrow s \in C_k \subset \bigcup_{k=1}^{b-1} C_k$$

$$\Rightarrow S \subset \bigcup_{k=1}^{b-1} C_k$$

Böylece,

$$S = \bigcup_{k=1}^{b-1} C_k$$

elde edilir. Her k kalanı için, S sayısal yarıgrubu doğal sayıların sonsuz yarıgrubu olduğundan $C_k \neq \varnothing$ bulunur.

3.1.3 Tanım k bir tamsayı ve $C_{k,b}$, S sayısal yarıgrubunun bir koseti olsun. C_k koseti içindeki en küçük sayıya, C_k'nın minimal temsilcisi denir ve

$$r\left(k\right) = r\left(k, b\right)$$

ile gösterilir. Bu temsilcilerin tümünün oluşturduğu

$$T = T(b) = \{ r(k,b) \mid r(k,b) \in C_k \, , \, k = 0,\dots,\mathrm{b}-1 \} \tag{3.2}$$

kümesine, S 'nin b modülüne göre minimal transversali denir.

3.1.4 Örnek $S = \langle 4,5,7 \rangle = \{0,4,5,7,8,9,10,11,12,\rightarrow\}$

sayısal yarıgrubunu alalım. $b=3$ olsun. $k=0,1,2$ için $C_{k,3}$ kosetlerini yazalım.

$$\begin{aligned} C_{0,3} &= \{ s \in S \mid s = 0 (\mathrm{mod}\, 3) \} \\ &= \{0,9,12,\dots\} \\ C_{1,3} &= \{ s \in S \mid s = 1 (\mathrm{mod}\, 3) \} \\ &= \{4,7,10,13,\dots\} \\ C_{2,3} &= \{ s \in S \mid s = 2 (\mathrm{mod}\, 3) \} \\ &= \{5,8,11,14,\dots\} \end{aligned}$$

elde edilir.

$k=0,1,2$ için $C_{k,3}$ kosetlerinin minimal temsilcileri

$$\begin{aligned} r(0) &= r(0,3) = 0 \\ r(1) &= r(1,3) = 4 \\ r(2) &= r(2,3) = 5 \end{aligned}$$

ve böylece,

$$T = T(b) = \{0,4,5\}$$

olur.

3.1.5 Uyarı $b \in S$ olsun. Bu durumda, her j için $b.j \in S$ olur.

$$\begin{aligned} C_{k,b} &= \{ s \in S \mid \mathrm{s} = k (\mathrm{mod}\, b) \} \\ &= \{ s \in S \mid s = k + bj \, , \, j \geq 0 \} \end{aligned}$$

$j=0$ için $s=k$, $C_{k,b}$ 'nin en küçük elemanı $r(k,b)$ olur. Buradan

$$C_k = \{r(k,b) + jb \mid j \geq 0\}$$

elde edilir.

3.1.6 Örnek $S = \langle 4,5,7 \rangle = \{0,4,5,7,8,9,10,11,12,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunu düşünelim. $b = 4 \in S$ olsun. $k = 2$ için

$$\begin{aligned} C_{2,4} &= \{s \in S \mid s = 2(\bmod 4)\} \\ &= \{10,14,18,\ldots\} \end{aligned}$$

$r(2,4) = 10$ ve $b = 4$ olduğundan

$$C_{2,4} = \{r(2,4) + 4j \mid j \geq 0\}$$

olarak yazılır.

3.2 Frobenius Sayısı

3.2.1 Önerme S bir sayısal yarıgrup ve $b \in S$ olsun.

$$T = T(b) = \{r(k,b) \mid r(k,b) \in C_k, \mathrm{k} = 0,\ldots,\mathrm{b}-1\}$$

kümesi, S 'nin b modülüne göre minimal transversali olsun. Bu durumda, $F(S)$, S 'nin Frobenius sayısı olmak üzere,

$$F(S) = \max T - b \tag{3.3}$$

İspat: $\max T = m$ diyelim. Kosetlerin elemanları, S sayısal yarıgrubunun elemanlarından oluşmasından ve m kosetlerdeki minimal eleman olduğundan, m 'den daha küçük olan $m-b \notin S$ olur. n,

$$n > m - b$$

olacak şekilde bir doğal sayı ve

$$C_{n,b} = \{r(n) + b \mid j \geq 0\}$$

kosetinin minimal temsilcisi

$$r(n) = r$$

olsun.

$$r \le n$$

olduğunu gösterelim. $r > n$ olduğunu varsayalım.

$$r \in C_n = C_{n,b} = \{s \in S \mid s = n(\mathrm{mod}\, b)\}$$
$$\Rightarrow r = n + bj\,,\; j \ge 0$$

$r > n$ olduğundan $j \ge 1$ ve bu eşitsizlik b ile çarpılırsa

$$\Rightarrow bj \ge b$$
$$\Rightarrow n + bj \ge n + b$$
$$\Rightarrow r \ge n + b$$

elde edilir.

$$n > m - b$$

eşitsizliğinden

$$n + b > (m - b) + b$$

$$\Rightarrow n + b > m$$

bulunur. Böylece,

$$r \ge n + b > m$$

olur. r minimal temsilci, m minimal temsilcilerin maksimal olanı ve

$$r > m$$

olması, m ‘nin maksimal eleman olmasıyla çelişir.

$$\Rightarrow r \le n$$

olmalıdır. Buradan, bir $l \ge 0$ için

$$n = r + l.b$$

elde edilir. $r \in S$ ve $b \in S$ olmasından

$$n \in S$$

olur. Bu,

$$m - b = F(S)$$

demektir.

Sayısal yarıgrubun bir elemanına göre minimal transversalini, yarıgrubun H_s Hilbert serisini ve $g(S)$ cinsini hesaplamak için kullanabiliriz.

3.2.2 Önerme S bir sayısal yarıgrup ve $b \in S$ olsun. $T = T(b)$, S 'nin b modülüne göre minimal transversali ise,

$$g(S) = \frac{1}{b}\sum_{t \in T} t - \frac{b-1}{2} \tag{3.4}$$

ve

$$H_s = \frac{1}{1 - x^b}\sum_{t \in T} x^t \tag{3.5}$$

.

İspat: k bir tamsayı, $b > 1$ ve

$$C_k = C_{k,b} = \{ s \in S \mid s = k(\operatorname{mod} b) \}$$

kosetini düşünelim.

$$n = k(\operatorname{mod} b)$$

olacak şekilde bir n sayısını alalım. $n \in S$ ise, $C_{k,b}$ 'nin tanımından

$$n \in C_k$$

ve $r(k)$, C_k 'nın minimal elemanı olduğundan $n \geq r(k)$ olur.

Tersine, $n \geq r(k)$ ise,

$$n = r(k) + bj,\; j \geq 0$$

$r(k) \in S$ ve $b \in S$ olmasından $n \in S$ 'dir. Böylece, $\bmod b$ 'ye göre k 'ya eşit ve S sayısal yarıgrubunda olmayan doğal sayılar kümesinin eleman sayısı

$$\frac{r(k)-k}{b}$$

kadardır. $k = 0,\ldots,b-1$ kalanları için

$$\begin{aligned} g(S) &= \sum_{k=0}^{b-1} \frac{r(k)-k}{b} \\ &= \frac{1}{b}\sum_{k=0}^{b-1} r(k) - \frac{1}{b}\sum_{k=0}^{b-1} k \\ &= \frac{1}{b}\sum_{t\in T} t - \frac{1}{b}\left(\frac{(b-1).b}{2}\right) \\ &= \frac{1}{b}\sum_{t\in T} t - \left(\frac{b-1}{2}\right) \end{aligned}$$

$s = k(\bmod b)$ olan $s \in S$ için

$$\begin{aligned} H_s(x) &= \sum_{s\in S} x^s = \sum_{j=0}^{\infty} x^{r(k)+jb} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} x^{r(k)}.x^{jb} \\ &= x^{r(k)}.\sum_{j=0}^{\infty} \left(x^b\right)^j \\ &= x^{r(k)}.\frac{1}{1-x^b} \\ &= \frac{1}{1-x^b}\sum_{t\in T} x^t \end{aligned}$$

elde edilir.

4. DÜZGÜN DİZİLER VE FROBENİUS PROBLEMİ

Bu bölümde düzgün diziler ile üretilen sayısal yarıgruplar üzerinde minimal transversal yönteminin nasıl kullanıldığını açıklayacağız.

4.1 Düzgün Diziler

$\left(a_1,\ldots,\mathrm{a}_n\right)$, $k=1,\ldots,n$ aralarında asal pozitif a_k, sayılarının bir dizisi ve

$$d_k = obeb\left(a_1,\ldots,a_k\right) \tag{4.1}$$

olsun. $a_1,\ldots,a_n$ sayıları aralarında asal olduğundan

$$d_n = obeb\left(a_1,\ldots,a_n\right) = 1$$

olur. $k=2,\ldots,n$ için

$$r_k = \frac{d_{k-1}}{d_k} \tag{4.2}$$

olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\prod_{i=2}^{n} r_i &= r_2.r_3\ldots r_n \\ &= \frac{d_1}{d_2}\cdot\frac{d_2}{d_3}\cdots\frac{d_{n-1}}{d_n} \\ &= \frac{d_1}{d_n} = \frac{a_1}{1} = a_1\end{aligned}$$

elde edilir.

4.1.1 Tanım $S_k=\left\langle a_1,\ldots,a_k\right\rangle$ yarıgrubu ve $S=S_n$ olsun. Her $k=2,\ldots,n$ için

$$r_k \cdot a_k \in S_{k-1}$$

ise , $(a_1,\ldots,a_n)$ dizisine düzgün dizi denir.

Bu koşul, sayısal yarıgruplar teorisinde özel bir rol oynar.

4.1.2 Uyarı

$$d_k = obeb(a_1,\ldots,a_k)$$

$$d_{k+1} = obeb(a_1,\ldots,a_{k+1})$$

olduğundan

$$\begin{aligned} d_{k+1} &= obeb((a_1,\ldots,a_k),a_{k+1}) \\ &= obeb(d_k,a_{k+1}) \end{aligned}$$

elde edilir.

$d_k = d_{k+1}$ ise,

$$r_{k+1} = \frac{d_k}{d_{k+1}} = 1$$

$$\Rightarrow r_{k+1} \cdot a_{k+1} = 1 \cdot a_{k+1}$$

bulunur. $(a_1,\ldots,a_n)$ düzgün dizi olduğundan , $\forall k = 1,\ldots,n$ için

$$r_{k+1} \cdot a_{k+1} \in S_k$$

$$\Rightarrow 1 \cdot a_{k+1} \in S_k$$

olur.

$S_k = \langle a_1,\ldots,a_k \rangle$ ve $1 \cdot a_{k+1} \in S_k$ ise

$$a_{k+1} \in \langle a_1,\ldots,a_k \rangle$$

$$\Rightarrow a_{k+1} = n_1 a_1 + \ldots + n_k a_k$$

olacak şekilde $n_1,\ldots,n_k \in \mathbb{N}$ elde edilir. Böylece, a_{k+1} elemanı, ne dizinin düzgünlüğünü ne de üretilmiş S yarıgrubunu değiştirmeyeceğinden diziden çıkarılabilir.

4.1.3 Önerme $(a_1,\ldots,a_n)$ düzgün bir dizi ve $S=\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ sayısal bir yarıgrup olsun. Bu durumda, her $s\in S$ için

$$s=\sum_{i=1}^{n} k_i a_i \ ,\ 0\le k_i < r_i \ ,\ i=2,\ldots,n \tag{4.3}$$

olacak şekilde yazılabilir.

a_1 için bir kısıtlama olmadığına dikkat ediniz.

İspat: $s\in S=\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ olmasından

$$s=\sum_{i=1}^{n} k_i a_i \ ,\ k_i\in\mathbb{N} \ ,\ i=1,\ldots,n$$

yazabiliriz. Bu gösterimde, $i=2,\ldots,n$ için

$$0\le k_i<r_i$$

koşulunun sağlanmadığını varsayalım.

j, $k_j\ge r_j$ olan maksimum indis olsun. Bölme Algoritmasından ,

$$k_j=br_j+c \ ,\ 0\le c<r_j$$

yazabiliriz. $(a_1,\ldots,a_n)$ düzgün dizi olduğundan , her $j=2,\ldots,n$

$$r_j\cdot a_j\in S_{j-1}$$

ve $S_{j-1}=\langle a_1,\ldots,a_{j-1}\rangle$ sayısal yarıgrubu olmasından

$$br_j a_j\in S_{j-1}$$

$$\Rightarrow br_j a_j=\sum_{i=1}^{j-1} l_i a_i \ ,\ l_i\in\mathbb{N}$$

olarak yazılır.

$$s = k_1 a_1 + \ldots + k_{j-1} a_{j-1} + k_j a_j + \sum_{i=j+1}^{n} k_i a_i$$

olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned}
&= k_1 a_1 + \ldots + k_{j-1} a_{j-1} + \left(br_j + c\right) a_j + \sum_{i=j+1}^{n} k_i a_i \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} k_i a_i + br_j a_j + ca_j + \sum_{i=j+1}^{n} k_i a_i \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} k_i a_i + \sum_{i=1}^{j-1} l_i a_i + ca_j + \sum_{i=j+1}^{n} k_i a_i \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \left(k_i + l_i\right) a_i + ca_j + \sum_{i=j+1}^{n} k_i a_i
\end{aligned}$$

Bu yeni gösterimde katsayılar ya önermedeki koşulu sağlarlar ya da koşulu sağlamayan j' maksimal indisi j indisinden küçük olur. Böylece katsayılar koşulu sağlayacak şekilde bir gösterim elde edene kadar bu şekilde devam edilir.

$T = T\left(a_1\right)$, a_1'e göre S'nin minimal transversali olsun. Bu durumda bir k tamsayısı için, $r\left(k, a_1\right)$,

$$C_k = C_{k,a_1} = \left\{ s \in S \mid s = k \left(\operatorname{mod} a_1\right) \right\}$$

kosetinin minimal temsilcisi olmak üzere

$$T = T\left(a_1\right) = \left\{ r\left(k, a_1\right) \mid r\left(k, a_1\right) \in C_k , k = 0, \ldots, a_1 - 1 \right\}$$

olur.

4.1.4 Teorem T **'nin her elemanı**

$$\sum_{i=2}^{n} k_i a_i \ , \ 0 \leq k_i < r$$

doğal sayıların bir kombinasyonu olarak yazılır.

İspat: $s \in S$ olsun. (4.3) eşitliğinden

$$s=\sum_{i=1}^{n}k_i a_i \ , \ 0\le k_i<r_i \ , \ i=2,\ldots,n$$

olarak yazılır. $k_1>0$ olsun.

$$s\in T\Rightarrow s=k_1a_1+k_2a_2+\ldots+k_na_n=k\left(\operatorname{mod}a_1\right)$$

ve S minimaldir.

$$\Rightarrow k_2a_2+\ldots+k_na_n=k\left(\operatorname{mod}a_1\right)$$

Bu durumda, $k_2a_2+\ldots+k_na_n\in T$ olur. $k_2a_2+\ldots+k_na_n<s$ ve s minimal olmasından çelişki çıkar. Bu durumda $k_1=0$ olmalıdır. Böylece, $k_1>0$ iken

$$s\notin T$$

olur. Bu durumda, T ‘nin her t elemanı

$$\sum_{i=2}^{n}k_i a_i \ , \ 0\le k_i<r_i$$

kombinasyonu şeklinde yazılır. Bu kombinasyonların sayısı,

$$\begin{aligned}\prod_{i=2}^{n}r_i&=\prod_{i=2}^{n}\frac{d_{i-1}}{d_i}\\&=\frac{d_1}{d_2}\cdot\frac{d_2}{d_3}\cdots\frac{d_{n-1}}{d_n}\\&=\frac{d_1}{d_n}=\frac{a_1}{1}=a_1\end{aligned}$$

tanedir. T ’nin eleman sayısı a_1 olduğundan ve T ’nin elemanlarından her birinin en az böyle bir kombinasyonu olacağından her bir kombinasyon farklı bir gösterim verir.

4.1.5 Uyarı 4.1.4 Teoremden S ’nin her s elemanının $i=2,\ldots,n$ için $0\le k_i<r_i$ olacak şekilde

$$s=\sum_{i=1}^{n}k_i a_i$$

olan bir tek gösterimi vardır, sonucunu elde ederiz.

4.1.6 Sonuç $(a_1,\ldots,a_n)$ düzgün bir dizi ve $S=\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ bir sayısal yarıgrup olsun. Bu durumda,

(i) $F(S)=\sum_{i=2}^{n} r_i a_i-\sum_{i=1}^{n} a_i$

(ii) S simetrik yargruptur.

(iii) $H(S)=\dfrac{\prod_{i=2}^{n}\left(1-x^{r_i a_i}\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(1-x^{a_i}\right)}$

İspat: **(i)** $a_1\in S$ ve $T=T(a_1)$ olmak üzere S 'nin Frobenius sayısı (3.3) eşitliğinden

$$F(S)=\max T-a_1$$

olur. T 'nin elemanları, 4.1.4 Teorem gereği $i=2,\ldots,n$ için $0\le k_i<r_i$ olmak üzere

$$t=\sum_{i=2}^{n} k_i a_i$$

şeklindedir.

$$\Rightarrow t=k_2a_2+\ldots+k_na_n \ ,\ 0\le k_i\le r_i-1$$

ve böylece S 'nin Frobenius sayısı,

$$\begin{aligned}F(S)&=\left((r_2-1)a_2+(r_3-1)a_3+\ldots+(r_n-1)a_n\right)-a_1\\&=r_2a_2+r_3a_3+\ldots+r_na_n-(a_1+a_2+\ldots+a_n)\\&=\sum_{i=2}^{n} r_i a_i-\sum_{i=1}^{n} a_i\end{aligned}$$

olur.

(ii) S ‘nin simetrik olduğunu göstermek için (2.3) eşitliğini sağlamalıyız. Yine S 'nin $g(S)$ cinsini hesaplamak için (3.4) eşitliği kullanacağız. Öncelikle

T 'nin elemanlarını toplayalım.

$$t=\sum_{i=2}^{n}k_i a_i \ ,\ 0\le k_i\le r_i-1$$

eşitliğinden

$$\sum_{t\in T}t=\sum_{k_2=0}^{r_2-1}\sum_{k_3=0}^{r_3-1}\cdots\sum_{k_n=0}^{r_n-1}(k_2a_2+k_3a_3+\ldots+k_na_n)$$

Bu toplamı içten başlayarak açarak yazalım.

$$\begin{aligned}\sum_{k_2=0}^{r_2-1}\cdots\sum_{k_{n-1}=0}^{r_{n-1}}&\left[\left(k_2a_2+k_3a_3+\ldots+k_{n-1}a_{n-1}\right)+0.\mathrm{a}_n\right]\\&+\left[\left(k_2a_2+k_3a_3+\ldots+k_{n-1}a_{n-1}\right)+1.\mathrm{a}_n\right]\\&+\cdots\\&+\left[\left(k_2a_2+k_3a_3+\ldots+k_{n-1}a_{n-1}\right)+\left(r_n-1\right).\mathrm{a}_n\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\sum_{k_2=0}^{r_2-1}\cdots\sum_{k_{n-1}=0}^{r_{n-1}-1}\left[\left(k_2a_2+\ldots+k_{n-1}a_{n-1}\right).r_n+\left(0.\mathrm{a}_n+1.a_n+\ldots+\left(r_n-1\right)a_n\right)\right]\\&=\sum_{k_2=0}^{r_2-1}\cdots\sum_{k_{n-1}=0}^{r_{n-1}-1}\left[\left(k_2a_2+\ldots+k_{n-1}a_{n-1}\right).r_n+\left(0+1+2+\ldots+\left(r_n-1\right)\right).a_n\right]\\&=\sum_{k_2=0}^{r_2-1}\cdots\sum_{k_{n-1}=0}^{r_{n-1}-1}\left[\left(k_2a_2+\ldots+k_{n-1}a_{n-1}\right).r_n+a_n.\frac{\left(r_n-1\right).r_n}{2}\right]\\&=\sum_{k_2=0}^{r_2-1}\cdots\sum_{k_{n-1}=0}^{r_{n-1}-1}r_n.\left[k_2a_2+\ldots+k_{n-1}a_{n-1}+\frac{a_n.\left(r_n-1\right)}{2}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=r_n.\sum_{k_2=0}^{r_2-1}\cdots\sum_{k_{n-1}=0}^{r_{n-1}-1}\left[k_2a_2+\ldots+k_{n-1}a_{n-1}+\frac{a_n.\left(r_n-1\right)}{2}\right]\\&=r_n\sum_{k_2=0}^{r_2-1}\cdots\sum_{k_{n-1}=0}^{r_{n-1}-1}\left(k_2a_2+\ldots+k_{n-2}a_{n-2}+0.a_{n-1}+\frac{a_n.\left(r_n-1\right)}{2}\right)\\&\qquad+\left(k_2a_2+\ldots+k_{n-2}a_{n-2}+1.a_{n-1}+\frac{a_n.\left(r_n-1\right)}{2}\right)\\&\qquad+\ldots\\&\qquad+\left(k_2a_2+\ldots+k_{n-2}a_{n-2}+\left(r_{n-1}-1\right).a_{n-1}+\frac{a_n.\left(r_n-1\right)}{2}\right)\end{aligned}$$

$$= r_n . \sum_{k_2=0}^{r_2-1} \cdots \sum_{k_{n-1}=0}^{r_{n-1}-1} \left[k_2 a_2 + \ldots + k_{n-1} a_{n-1} + \frac{a_n.(r_n - 1)}{2} \right]$$

$$= r_n . \sum_{k_2=0}^{r_2-1} \cdots \sum_{k_{n-1}=0}^{r_{n-1}-1} \left[\left(k_2 a_2 + \ldots + k_{n-2} a_{n-2} \right) r_{n-1} + \left(1 + 2 + \ldots + \left(r_{n-1} - 1 \right) \right) a_{n-1} + \frac{a_n \left(r_n - 1 \right)}{2} \cdot r_{n-1} \right]$$

$$= r_n . \sum_{k_2=0}^{r_2-1} \cdots \sum_{k_{n-1}=0}^{r_{n-1}-1} \left[\left(k_2 a_2 + \ldots + k_{n-2} a_{n-2} \right) r_{n-1} + \frac{\left(r_{n-1} - 1 \right) . r_{n-1}}{2} \cdot a_{n-1} + \frac{a_n \left(r_n - 1 \right)}{2} \cdot r_{n-1} \right]$$

$$= r_n . \mathrm{r}_{n-1} \sum_{k_2=0}^{r_2-1} \cdots \sum_{k_{n-1}=0}^{r_{n-1}-1} \left[\left(k_2 a_2 + \ldots + k_{n-2} a_{n-2} \right) + \frac{\left(r_{n-1} - 1 \right) . \mathrm{a}_{n-1}}{2} + \frac{a_n \left(r_n - 1 \right)}{2} \right]$$

Bu şekilde devam edersek

$$= r_n . r_{n-1} . r_{n-2} \ldots r_3 . r_2 \left[\frac{a_n \left(r_n - 1 \right)}{2} + \frac{a_{n-1} \left(r_{n-1} - 1 \right)}{2} + \cdots + \frac{a_2 \left(r_2 - 1 \right)}{2} \right]$$

elde edilir.

$$R_i = \prod_{j \neq i} r_j = r_2 \ldots r_{i-1} . r_{i+1} \ldots r_n$$

$$= \frac{\prod_{j=2}^{n} r_j}{r_i}$$

elde ederiz. Bu, son eşitlikte yerine yazılırsa

$$= r_n . r_{n-1} \ldots r_3 . r_2 \left[\frac{a_n \left(r_n - 1 \right)}{2} \right] + r_n . r_{n-1} \ldots r_3 . r_2 \left[\frac{a_{n-1} \left(r_{n-1} - 1 \right)}{2} \right] + \ldots + r_n . r_{n-1} \ldots r_3 . r_2 \left[\frac{a_2 \left(r_2 - 1 \right)}{2} \right]$$

$$= r_{n-1} \ldots r_3 . r_2 \left[\frac{r_n \left(r_n - 1 \right)}{2} \right] a_n + r_n . r_{n-2} \ldots r_3 . r_2 \left[\frac{r_{n-1} \left(r_{n-1} - 1 \right)}{2} \right] a_{n-1} + \ldots + r_n . r_{n-1} \ldots r_3 \left[\frac{r_2 \left(r_2 - 1 \right)}{2} \right] a_2$$

$$= \left(\frac{r_n . r_{n-1} \ldots r_3 . r_2}{r_n} \right) \left(\sum_{k_n=0}^{r_n-1} k_n a_n \right) + \left(\frac{r_n . \mathrm{r}_{n-1} . r_{n-2} \ldots r_3 . r_2}{r_{n-1}} \right) \left(\sum_{k_{n-1}=0}^{r_{n-1}-1} k_{n-1} a_{n-1} \right) + \cdots + \left(\frac{r_n . r_{n-1} \ldots r_3 . r_2}{r_2} \right) \left(\sum_{k_2=0}^{r_2-1} k_2 a_2 \right)$$

$$= R_n \sum_{k_n=0}^{r_n-1} k_n a_n + R_{n-1} \sum_{k_{n-1}=0}^{r_{n-1}-1} k_{n-1} a_{n-1} + \cdots + R_2 \sum_{k_2=0}^{r_2-1} k_2 a_2$$

Yine,

$$\prod_{i=2}^{n} r_i = a_1$$

eşitliğinden

$$R_i = \frac{\prod_{j=2}^{n} r_j}{r_i} = \frac{a_1}{r_i}$$

olur. Böylece ,

$$\begin{aligned}\sum_{t\in T} t &= R_n \sum_{k_n=0}^{r_n-1} k_n a_n + \cdots + R_2 \sum_{k_2=0}^{r_2-1} k_2 a_2 \\ &= R_n\left(\frac{r_n\left(r_n-1\right)}{2}\cdot a_n\right) + \cdots + R_2\left(\frac{r_2\left(r_2-1\right)}{2}\cdot a_2\right) \\ &= \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{2} R_i . r_i . \left(r_i-1\right) . a_i\end{aligned}$$

Burada $R_i = \dfrac{a_1}{r_i}$ yazılırsa

$$\begin{aligned}&= \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{2}\cdot\frac{a_1}{r_i}\cdot r_i\cdot\left(r_i-1\right)\cdot a_i \\ &= \frac{1}{2}\cdot a_1\cdot\sum_{i=2}^{n}\left(r_i-1\right)\cdot a_1\end{aligned}$$

3.2.2 Önermeden,

$$\begin{aligned}g\left(S\right) &= \frac{1}{a_1}\sum_{t\in T} t - \frac{a_1-1}{2} \\ &= \frac{1}{a_1}\left(\frac{1}{2}a_1\sum_{i=2}^{n}\left(r_i-1\right)a_i\right) - \frac{a_1-1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=2}^{n}\left(r_i-1\right)a_i - \left(a_1-1\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=2}^{n} r_i a_i - \sum_{i=2}^{n} a_i + 1\right)\end{aligned}$$

ve (i) şıkkından

$$F\left(S\right) = \sum_{i=2}^{n} r_i a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i$$

olmasından

$$g(S)=\frac{1}{2}\left(F(S)+1\right)$$

elde edilir. Bu S 'nin simetrik oldugunu gösterir.

(iii) a_1 modülüne göre S 'nin minimal transversali $T=T(a_1)$ iken (3.5) eşitliğinden

$$H_s(x)=\frac{1}{1-x^{a_1}}\sum_{t\in T}x^t$$

yazarız. Bu ifade S 'nin Hilbert serisidir.

$$\sum_{t\in T}x^t=\sum_{k_2=0}^{r_2-1}\sum_{k_3=0}^{r_3-1}\cdots\sum_{k_n=0}^{r_n-1}x^{k_2a_2+\ldots+k_na_n}$$

$$=\sum_{k_2=0}^{r_2-1}\sum_{k_3=0}^{r_3-1}\cdots\sum_{k_{n-1}=0}^{r_{n-1}-1}\left(x^{k_2a_2+\ldots+0.a_n}+x^{k_2a_2+\ldots+1.\mathrm{a}_n}+\ldots+x^{k_2a_2+\ldots+(r_n-1)a_n}\right)$$

$$=\sum_{k_2=0}^{r_2-1}\sum_{k_3=0}^{r_3-1}\cdots\sum_{k_{n-1}=0}^{r_{n-1}-1}\left(x^{k_2a_2+\ldots+k_{n-1}a_{n-1}}\left(x^0+x^{a_n}+x^{2a_n}+\ldots+x^{(r_n-1)a_n}\right)\right)$$

$$=\sum_{k_2=0}^{r_2-1}\sum_{k_3=0}^{r_3-1}\cdots\sum_{k_{n-1}=0}^{r_{n-1}-1}\left(x^{k_2a_2+\ldots+k_{n-1}a_{n-1}}\left(\sum_{k_n=0}^{r_n-1}x^{k_na_n}\right)\right)$$

$$=\left(\sum_{k_n=0}^{r_n-1}x^{k_na_n}\right)\left(\sum_{k_2=0}^{r_2-1}\sum_{k_3=0}^{r_3-1}\cdots\sum_{k_{n-2}=0}^{r_{n-2}-1}\left(x^{k_2a_2+\ldots+0.a_{n-1}}+x^{k_2a_2+\ldots+1.a_{n-1}}+\ldots+x^{k_2a_2+\ldots+(r_{n-1}-1)a_n}\right)\right)$$

$$=\left(\sum_{k_n=0}^{r_n-1}x^{k_na_n}\right)\left(\sum_{k_2=0}^{r_2-1}\cdots\sum_{k_{n-2}=0}^{r_{n-2}-1}x^{k_2a_2+\ldots+k_{n-2}.a_{n-2}}\left(x^0+x^{1.a_{n-1}}+\ldots+x^{(r_{n-1}-1)a_{n-1}}\right)\right)$$

$$=\left(\sum_{k_n=0}^{r_n-1}x^{k_na_n}\right)\left(\sum_{k_2=0}^{r_2-1}\cdots\sum_{k_{n-2}=0}^{r_{n-2}-1}x^{k_2a_2+\ldots+k_{n-2}.a_{n-2}}\left(\sum_{k_{n-1}=0}^{r_{n-1}-1}x^{k_{n-1}a_{n-1}}\right)\right)$$

$$=\left(\sum_{k_n=0}^{r_n-1}x^{k_na_n}\right)\left(\sum_{k_{n-1}=0}^{r_{n-1}-1}x^{k_{n-1}a_{n-1}}\right)\cdots\left(\sum_{k_2=0}^{r_2-1}x^{k_2a_2}\right)$$

$$=\left(\frac{1-x^{k_na_n}}{1-x^{a_n}}\right)\left(\frac{1-x^{k_{n-1}a_{n-1}}}{1-x^{a_{n-1}}}\right)\cdots\left(\frac{1-x^{k_2a_2}}{1-x^{a_2}}\right)$$

$$=\prod_{i=2}^{n}\frac{1-x^{r_ia_i}}{1-x^{a_i}}$$

elde edilir. O halde

$$H_s(x)=\frac{1}{1-x^{a_1}}\cdot\frac{\prod_{i=2}^{n}\left(1-x^{r_i a_i}\right)}{\prod_{i=2}^{n}\left(1-x^{a_i}\right)}$$

$$=\frac{\prod_{i=2}^{n}\left(1-x^{r_i a_i}\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(1-x^{a_i}\right)}$$

4.2 Çarpımlar Yarıgrubu

Şimdi bir önceki bölümde elde edilen sonuçları açıklamak için düzgün dizilerin ilk örneği olan çarpımlar yarıgrubunu tanıtalım.

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ ikişerli olarak aralarında asal olan pozitif tamsayılar,

$$P=\prod_{i=1}^{n} p_i$$

ve $P_i=\dfrac{P}{p_i}$ olsun. Bu durumda,

$$P_j=\frac{P}{p_j}=\frac{p_1.p_2\cdots p_j\cdots p_n}{p_j}=p_1.p_2\cdots p_{j-1}.p_{j+1}\cdots p_n$$

olur.

$q_1=1$ ve $q_i \nmid p_i$ iken

$$a_i=q_i.P_i \tag{4.4}$$

olsun. Bu durumda,

$$a_1=q_1.P_1=q_1.\frac{p_1p_2\cdots p_n}{p_1}=q_1p_2p_{3\ldots}p_n$$

$$\ldots$$

$$a_i = q_i.P_i = q_i.\frac{p_1 \cdots p_i \cdots p_n}{p_i} = q_i\, p_1 \cdots p_{i-1}.p_{i+1} \ldots p_n$$

$$\ldots$$

$$a_n = q_n.P_n = q_n.\frac{p_1 \cdots p_n}{p_n} = q_n.p_1 \cdots p_{n-1}$$

ve $q_i \nmid p_i$ olmasından

$$\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right) = 1$$

olur. $\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$ düzgün bir dizidir. (4.4) eşitliğinden

$$\begin{aligned} &a_1 = q_1.p_2 \cdots p_n \\ &a_2 = q_1.p_1.p_3 \cdots p_n \\ &\vdots \\ &a_k = q_k.p_1 \cdots p_{k-1}.p_{k+1} \cdots p_n \end{aligned}$$

$$obeb\left(q_1.p_2 \cdots p_n, \mathrm{q}_2.p_1.\mathrm{p}_3, \cdots p_n, q_k.p_1 \cdots p_{k-1}.p_{k+1} \cdots p_n\right)$$

$$\Rightarrow d_k = \prod_{i=k+1}^{n} p_i \quad , k = 1, \ldots, n$$

$$r_k = \frac{d_{k-1}}{d_k} = \frac{p_k p_{k+1} \cdots p_n}{p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_n} = p_k \quad , \quad k = 2, \ldots, n$$

$$\begin{aligned} r_k.a_k = p_k.a_k &= p_k.\mathrm{q}_k.P_k \\ &= p_k.q_k.\left(\frac{p_1 \cdots p_k \cdots p_n}{p_k}\right) \\ &= q_k.\left(p_1 \cdots p_k \cdots p_n\right) \\ &= q_k.P \\ &= q_k\left(p_1 \ldots p_k \ldots p_n\right) \\ &= \left(q_k.p_1\right)\left(p_2 \cdots p_n\right) \end{aligned}$$

$P_1 = p_2 \ldots p_n$ eşitliğinden,

$$\Rightarrow r_k.a_k = (q_k.p_1).\mathrm{P}_1$$

$$a_1 = q_1.P_1 \ \ ve \ \ q_1 = 1 \ \ olmasından \ \ a_1 = P_1$$

$$\Rightarrow r_k.a_k = (q_k.p_1)a_1 \in S_1 \ , \ k \geq 2$$

$$\Rightarrow r_k a_k \in S_{k-1}$$

elde edilir.

$S = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ olsun. Bu durumda , 4.1.6 Sonuç (i)'den

$$F(S) = \sum_{i=2}^{n} r_i a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=2}^{n} r_i a_i = \sum_{i=2}^{n} r_i.(q_i.P_i)$$

ve $k = 2, \ldots, n$ için $r_k = p_k$ olmasından

$$= \sum_{i=2}^{n} p_i \left(q_i.\frac{P}{p_i} \right)$$

$$= \sum_{i=2}^{n} q_i.\mathrm{P}$$

$$= \left(\sum_{i=2}^{n} q_i \right).P$$

$$\Rightarrow F(S) = \left(\sum_{i=2}^{n} q_i \right).P - \sum_{i=1}^{n} a_i$$

olur.

$$H_s(x) = \frac{\prod_{i=2}^{n} \left(1 - x^{r_i a_i}\right)}{\prod_{i=1}^{n} \left(1 - x^{a_i}\right)}$$

ve $i = 2,\ldots,n$ için

$$r_i a_i = p_i.q_i.P_i = p_i.q_i.\frac{p_1 \cdots p_n}{p_i} = q_i.P$$

olduğundan

$$H_s(x) = \frac{\prod_{i=2}^{n}\left(1-x^{q_i P}\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(1-x^{a_i}\right)}$$

4.3 Binom Yarıgrubu

Düzgün diziler tarafından üretilmiş yarıgruplara güzel bir örnek olan Binom yarıgrubunu verelim.

$a,b>1$, $(a,b)=1$ olan pozitif tamsayılar ve

$$B_m = \left\{a^m, ba^{m-1},\ldots,\mathrm{b}^{m-1}a,\mathrm{b}^m\right\}$$

kümesi ile üretilen yarıgrupların bir ailesini alalım.

$$a_k = a^{m-k}b^k \quad , \quad k = 0,\ldots,m$$

olsun. a_k dizisinin düzgün dizi olduğunu görelim. $k = 1,\ldots,m$ için

$$d_k = obeb\left(a_1,\ldots,a_k\right)$$

$$r_k = \frac{d_{k-1}}{d_k}$$

alırsak,

(4.1) ve (4.2) eşitliklerinden,

$$r_k = \frac{obeb\left(a_0,\ldots,a_{k-1}\right)}{obeb\left(a_0,\ldots,a_k\right)} = \frac{\left(a^m,\mathrm{ba}^{m-1},\ldots,b^{k-1}a^{m-(k-1)}\right)}{\left(a^m,\mathrm{ba}^{m-1},\ldots,b^{k-1}a^{m-(k-1)},b^k a^{m-k}\right)}$$

$$= \frac{a^{m-(k-1)}}{a^{m-k}} = \frac{a^{m-k}.a}{a^{m-k}} = a$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} r_k a_k &= aa_k \\ &= aa^{m-k}b^k \\ &= a^{m-(k-1)}bb^{k-1} \\ &= bb^{k-1}a^{m-(k-1)} \\ &= ba_{k-1} \end{aligned}$$

ve $a_{k-1} \in S = \langle a_0,\ldots,a_{k-1}\rangle$ olduğundan

$$r_k a_k \in S = \langle a_0,\ldots,a_{k-1}\rangle$$

olur.

$$F(S) = \sum_{k=1}^{m} r_k a_k - \sum_{k=0}^{m} a_k$$

eşitliğinde, $k = 1,\ldots,m$ için $r_k = a$ olduğunu kullanırsak

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} r_k a_k &= \sum_{k=1}^{m} aa_k \\ &= \sum_{k=1}^{m} aa^{m-k}b^k \\ &= \sum_{k=1}^{m} a^{m-(k-1)}b^k \end{aligned}$$

ve

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=0}^{m} a^{m-k}b^k$$

olduğunu kullanırsak

$$F(S)=\sum_{k=0}^{m} a^{m+1-k}b^{k}-\sum_{k=0}^{m} a^{m-k}b^{k}$$

elde edilir. Yine

$$H_s(x)=\frac{\prod_{k=1}^{m}\left(1-x^{r_k a_k}\right)}{\prod_{k=0}^{m}\left(1-x^{a_i}\right)}$$

eşitliğinde $k=1,\ldots,m$ için $r_k=0$ ve

$$a_k=a^{m-k}b^{k}$$

yazılırsa

$$H_s(x)=\frac{\prod_{k=1}^{m}\left(1-x^{a^{m+1-k}b^{k}}\right)}{\prod_{k=0}^{m}\left(1-x^{a^{m-k}b^{k}}\right)}$$

bulunur.

4.4 Geometrik Diziler

Bu bölümü geometrik diziler ile üretilen ile yarıgruplar bitirelim.

$t>0$, $j\le k, t$ ve q aralarında asal ve $i=1,\ldots,j-1$ için

$$s_i\le q.s_{i+1}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&a_0=q^{k}\\
&a_1=s_1.q^{k}+t.q^{j-1}\\
&a_2=s_2.q^{k}+t.q^{j-2}\\
&\vdots\\
&a_j=s_j.q^{k}+t
\end{aligned}$$

olsun. $i=0,\dots,n$ için (a_i) dizisinin düzgün dizi olduğunu görelim. $i\geq 1$ için

$$\begin{aligned} d_i &= obeb\left(a_0,\dots,a_i\right) \\ &= obeb\left(q^k, s_1 q^k + tq^{j-1},\dots, s_i q^k + tq^{j-i}\right) \\ &= q^{j-i} \end{aligned}$$

$i\geq 2$ için,

$$r_i = \frac{d_{i-1}}{d_i} = \frac{q^{j-(i-1)}}{q^{j-i}} = \frac{q^{j-i}q}{q^{j-i}} = q$$

$$\begin{aligned} r_i a_i &= q a_i \\ &= q\left(s_i q^k + tq^{j-i}\right) \end{aligned}$$

$a_{i-1} = s_{i-1}q^k + tq^{j-(i-1)}$ ve $a_0 = q^k$ olduğunu kullanırsak

$$\begin{aligned} &= s_i q^k q + tq^{j-i}q + \left(s_{i-1}q^k - s_{i-1}q^k\right) \\ &= s_{i-1}q^k + tq^{j-(i-1)} + s_i q^k q - s_{i-1}q^k \\ &= a_{i-1} + \left(s_i q - s_{i-1}\right)q^k \\ &= a_{i-1} + \left(s_i q - s_{i-1}\right)a_0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ,

$$r_i a_i = a_{i-1} + \left(s_i q - s_{i-1}\right)a_0 \in S\left(a_0,\dots,a_{i-1}\right)$$

demektir. $i=1$ için

$$r_1 a_1 \in S\left(a_0\right)$$

olduğunu görmeliyiz.

$$\begin{aligned} d_1 &= obeb\left(a_0, a_1\right) \\ &= obeb\left(q^k, s_1 q^k + tq^{j-1}\right) \\ &= q^{j-1} \end{aligned}$$

ve

$$r_1 = \frac{d_0}{d_1}$$

$$= \frac{q^k}{q^{j-1}} = q^{k-(j-1)}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} r_1 a_1 &= q^{k-(j-1)} \left(s_1 q^k + t q^{j-1} \right) \\ &= q^k \left(s_1 q^{k-(j-1)} + t \right) \\ &= a_0 \left(s_1 q^{k-(j-1)} + t \right) \in S = S\left(a_0\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow r_1 a_1 \in S = S\left(a_0\right)$$

elde edilir.

5. ARİTMETİK DİZİLER VE FROBENIUS SAYILARI

Bu bölümde $a_0,\dots,a_n$ aritmetik dizisi ile üretilen sayısal yarıgrupların Frobenius sayıları, cinsleri ve Hilbert serisinin hesaplanmasında minimal transversal yönteminin nasıl kullanıldığı anlatılacaktır.

5.1 Genelleştirilmiş Aritmetik Diziler

5.1.1 Tanım a, d, h, n pozitif sayılar , $a \geq 2$ ve $(a,d)=1$ iken

$$S = \langle a, ha+d, ha+2d, \dots, ha+nd \rangle$$

formundaki sayısal yarıgruplara,

$$a_k = ha + kd \ , \ k = 1,\dots,n \tag{5.1}$$

aritmetik dizisi ile üretilen yarıgruplar denir.

5.1.2 Örnek $a = 7, h = 2, d = 3, n = 4$ olsun.

$$a_k = 2.7 + k.3 \ , \ k = 1,\dots,4$$

ise

$$\begin{aligned} S &= \langle 7 \ , \ 2.7+3 \ , \ 2.7+2.3 \ , \ 2.7+3.3 \ , \ 2.7+4.3 \rangle \\ &= \langle 7, 17, 20, 23, 26 \rangle \end{aligned}$$

sayısal yarıgrubu, bir genelleştirilmiş aritmetik dizisi ile üretilen yarıgruptur.

5.1.3 Uyarı a, d, h, n pozitif tamsayılar ve

$$a_k = ha + kd \ , \ k = 1,\dots,n$$

olmak üzere $a_0 = a, a_1, \dots, a_n$ genelleştirilmiş dizisinde $k \geq a$ ise,

$$k = a + t \ , \ 0 \leq t < k$$

$$\Rightarrow a_k = a_{a+t} = ha + (a+t)d$$

$$= ha + ad + td$$

$$= (ha + td) + ad$$

$$= a_t + a_0.d$$

olarak yazılabileceğinden

$$0 < n < a$$

olarak kabul edebiliriz.

Şimdi, a modülüne göre S 'nin minimal transversalini bulalım.

5.1.4 Yardımcı Teorem $S = \langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle$ bir genelleştirilmiş aritmetik dizi ile üretilen bir sayısal yarıgrup olsun. S 'nin $a_0 = a$ modülüne göre her minimal temsilcisi

$$s.a_n$$

veya

$$1 \leq r < n$$

için

$$s.a_n + a_r$$

formunda yazabiliriz.

İspat:

$$S = \langle a, ha + d, ha + 2d, \ldots, ha + nd \rangle$$

a, l, m ve p 'nin, S 'nin a modülüne göre bir C_k kosetinin minimal temsilcisi olduğunu varsayalım.

$$s \in S \Rightarrow s = a.k_0 + \sum_{k=1}^{n} k_i a_i$$

$$C_k = \{ s \in S \mid s = k(\operatorname{mod} a) \}$$

ve p, C_k 'nın minimal elemanı olacağından

$$s \in S \Rightarrow s = a.k_0 + \sum_{k=1}^{n} k_i a_i$$

eşitliğinde

$$p = \sum_{k=1}^{n} k_i a_i$$

$$p = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n$$

elde edilir. p 'nin k_n 'i maksimal olan tüm temsilcilerinden,

$$\sum_{i=1}^{n-1} k_i$$

toplamı minimal olanı seçelim. Bu gösterimde

$$\sum_{i=1}^{n-1} k_i \leq 1$$

olduğunu görelim. $u < v < n$ öyle ki $k_u, k_v > 1$ olduğunu varsayalım. Böylece

$$p = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_u a_u + \ldots + k_v a_v + \ldots + k_n a_n$$

$k_u, k_v > 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} p &= a_u + a_v + k_1 a_1 + \ldots + (k_u - 1) a_u + \ldots + (k_v - 1) a_v + \ldots + k_n a_n \\ &= a_u + a_v + \sum_{i=1}^{n-1} l_i a_i + k_n a_n \quad , \quad l_i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$a_u = ha + ud$ ve $a_v = ha + vd$ olduğunu kullanırsak

$$p = (ha + ud) + (ha + vd) + \sum_{i=1}^{n-1} l_i a_i + k_n a_n \quad , \quad l_i \in \mathbb{N}$$

yazabiliriz. $w = u + v$ olsun. Bu durumda

$$a_w = ha + wd = ha + (u+v)d$$
$$\Rightarrow a_w = ha + ud + vd$$

üstteki p eşitliğinden

$$p - ha = ha + ud + vd + \sum_{i=1}^{n-1} l_i a_i + k_n a_n$$

$$p - ha = a_w + \sum_{i=1}^{n-1} l_i a_i + k_n a_n$$

olur. Eğer $w \le n$ ise

$$p - ha \in S$$

olur ki, eğer $h \ge 1$ ise bu p 'nin minimal olması ile çelişir. Eğer $h = 0$ ve $w = n$ ise

$$\begin{aligned} p &= a_n + \sum_{i=1}^{n-1} l_i a_i + k_n a_n \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} l_i a_i + (k_n + 1) a_n \end{aligned}$$

elde edilir ki, bu k_n 'nin maksimal olmasıyla çelişir. Eğer $w > n$ ise

$$w = n + t \quad , \quad t > 0$$

$$\begin{aligned} a_w = a_{n+t} &= ha + (n+t)d \\ &= ha + nd + td \\ &= ha + td + nd \\ &= a_t + nd \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p - ha = a_w + \sum_{i=1}^{n-1} l_i a_i + k_n a_n$$

$$= a_{n+t} + \sum_{i=1}^{n-1} l_i a_i + k_n a_n$$

$$p-ha=a_t+nd+\sum_{i=1}^{n-1}l_i a_i+k_n a_n$$

$$\Rightarrow p=a_t+\left(ha+nd\right)+\sum_{i=1}^{n-1}l_i a_i+k_n a_n$$

$$p=a_t+a_n+\sum_{i=1}^{n-1}l_i a_i+k_n a_n$$

$$p=a_{w-n}+\sum_{i=1}^{n-1}l_i a_i+\left(k_n+1\right)a_n$$

olur. Bu, k_n 'nin maksimal olması ile çelişir.

5.1.5 Teorem $S=\langle a_0,a_1,\ldots,a_n\rangle$, $a_0=a$ ve $k=1,\ldots,n$ için

$$a_k=ha+kd$$

genelleştirilmiş aritmetik dizisi ile üretilen bir yarıgrup olsun.

$$a-1=sn+r \quad , \quad 0\le r<n$$

ve T , $\bmod a$ 'ya göre S 'nin minimal transversali olsun. Bu durumda, T 'nin sayıları

$$k.a_n \quad k=0,\ldots,s$$

$$k.a_n+a_l \ \ , \ k=0,\ldots,\mathrm{s}-1 \ , \ l=1,\ldots,\mathrm{n}-1$$

ve

$$s.a_n+a_l \ \ , \ l=1,\ldots,r$$

olur.

İspat: S 'nin $k.a_n$ ve $k.a_n+a_l$ formundaki temsilcilerinin sayısı, $\bmod a$ 'ya göre a tane farklı koset olacağından, a'ya eşit olmalıdır. Böylece,

$$k.a_n \ \ , \ k=0,\ldots,s$$

formundakiler, $s+1$ tane,

$$ka_n+a_l \ \ , \ k=0,\ldots,s-1 \ , \ l=1,\ldots,n-1$$

formundakiler, $s(n-1)$ tane ve

$$sa_n + a_l \ , \ l = 1, \ldots, r$$

formundakiler de r tane, yani toplam

$$\begin{aligned} &(s+1) + s(n-1) + r \\ &= s + 1 + sn - s + r \\ &= sn + r + 1 \\ &= a \end{aligned}$$

olur.

5.2 Genelleştirilmiş Aritmetik Yarıgrupların Frobenius Sayıları

Bu bölümde genelleştirilmiş aritmetik diziler ile üretilen sayısal yarıgrupların Frobenius sayıları, cinsleri ve Hilbert serilerinin nasıl hesaplanacağı anlatılacaktır.

5.2.1 Sonuç $S = \langle a_0, \ldots, a_n \rangle$, $a_0 = a$ ve $k = 1, \ldots, n$ için

$$a_k = ha + kd$$

genelleştirilmiş aritmetik dizisi ile üretilen bir yarıgrup olsun. Eğer $s \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$a - 1 = sn$$

ise,

(i) $F(S) = a(hs + d - 1) - d$

(ii) $g(S) = \dfrac{a-1}{2}(sh + h + d - 1)$

(iii) $H_s(x) = \dfrac{1}{1-x^a}\left[1 + x^{a_1}\dfrac{(1-x^{nd})(1-x^{sa_n})}{(1-x^d)(1-x^{a_n})}\right]$

Diğer yandan,

$$a-1=sn+r \ \ , \ \ 0<r<n$$

ise, bu durumda

(i) $F(S)=sa_n+a_r-a=(sh+h-1+d)a-d$

(ii) $g(S)=\frac{a}{2}\left[(a-1-r)h(s+1)+d(a-1)\right]$

(iii) $H_s(x)=\frac{1}{1-x^a}\left[1+x^{a_1}\frac{(1-x^{dn})}{(1-x^d)}\frac{(1-x^{sa_n})}{(1-x^{a_n})}+x^{sa_n+a_1}\frac{(1-x^{dr})}{(1-x^d)}\right]$

İspat: $a-1=sn$ ise, S 'nin a modülüne göre minimal transversali 5.1.5. Teoremden

$$T=\{0\}\cup\{ka_n+a_l \mid k=0,\ldots,s-1, l=1,\ldots,n\}$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned}\max(T)&=(s-1)a_n+a_n\\&=s.a_n\end{aligned}$$

bulunur.

(i)3.1.6 Teoremden

$$\begin{aligned}F(S)&=\max(T)-a\\&=s.a_n-a\end{aligned}$$

$a_n=ha+nd$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}&=s(ha+nd)-a\\&=sha+snd-a\end{aligned}$$

ve $sn=a-1$'den

$$\begin{aligned}&=sha+(a-1)d-a\\&=a(hs+d-1)-d\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii)3.1.7 Önerme'den

$$g(S)=\frac{1}{a}\sum_{t\in T}t-\frac{a-1}{2}$$

olduğunu biliyoruz.

$$\sum_{t\in T}t=\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{l=1}^{n}\left(ka_n+a_l\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{s-1}\left(\left(ka_n+a_1\right)+\left(ka_n+a_2\right)+\ldots+\left(ka_n+a_n\right)\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{s-1}\left(nka_n+\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)\right)$$

$k=1,\cdots,n$ için $a_k=ha+kd$ olmasından

$$=\sum_{k=0}^{s-1}\left(nka_n+\left(\left(ha+d\right)+\left(ha+2d\right)+\ldots+\left(ha+nd\right)\right)\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{s-1}\left(nka_n+nha+d\left(1+2+\ldots+n\right)\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{s-1}\left(nka_n+nha+d\,\frac{n\left(n+1\right)}{2}\right)$$

$$=na_n\sum_{k=0}^{s-1}k+nha\sum_{k=0}^{s-1}1+d\,\frac{n\left(n+1\right)}{2}\sum_{k=0}^{s-1}1$$
$$=na_n\frac{\left(s-1\right)s}{2}+nhas+d\,\frac{n\left(n+1\right)}{2}s$$

$a-1=sn\Rightarrow n=\dfrac{a-1}{s}$ alırsak

$$=\frac{\left(a-1\right)}{s}a_n\frac{\left(s-1\right)s}{2}+\frac{\left(a-1\right)}{s}has+d\,\frac{\left(a-1\right)}{s}\frac{n+1}{2}s$$

$$=\frac{\left(a-1\right)}{2}\left[\left(s-1\right)a_n+2ha+d\left(n+1\right)\right]$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}(s-1)a_n &= (s-1)(ha+nd)\\ &= sha+snd-ha-nd\\ &= sha-ha+snd-nd\end{aligned}$$

ve $a-1=sn$ olduğundan

$$= sha-ha+(a-1)d-nd$$

ve böylece

$$\begin{aligned}\sum_{t\in T} t &= \frac{(a-1)}{2}\left[sha-ha+(a-1)d-nd+2ha+d(n+1)\right]\\ &= \frac{(a-1)}{2}\left[sha-ha+ad-d-nd+2ha+nd+d\right]\\ &= \frac{(a-1)}{2}\left[sha+ha+ad\right]\\ &= \frac{(a-1)}{2}\left[(s+1)ha+ad\right]\\ &= \frac{(a-1)}{2}\left[a(sh+h+d)\right]\end{aligned}$$

$$\sum_{t\in T} t = \frac{a(a-1)(sh+h+d)}{2}$$

Bu eşitlik,

$$g(S)=\frac{1}{a}\sum_{t\in T} t-\frac{a-1}{2}$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}g(S) &= \frac{1}{a}\left[\frac{a(a-1)(sh+h+d)}{2}\right]-\frac{a-1}{2}\\ &= \frac{a-1}{2}(sh+h+d)-\frac{a-1}{2}\\ &= \frac{a-1}{2}\left[sh+h+d-1\right]\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii)3.1.7 Önermeden

$$H_s(x) = \frac{1}{1-x^a}\sum_{t\in T} x^t$$

T’nin elemanları

$$ka_n + a_l \ , \ k = 0,\ldots,s-1 \ , \ l = 1,\ldots,n$$

olduğundan öncelikle

$$x^t = x^{ka_n + a_l} \ , \ l = 1,\ldots,n$$

elemanlarını inceleyelim.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x^{ka_n+a_l} &= x^{ka_n+a_l} + x^{ka_n+a_2} + \ldots + x^{ka_n+a_n} \\ &= x^{ka_n}x^{a_1} + x^{ka_n}x^{a_2} + \ldots + x^{ka_n}x^{a_n} \\ &= x^{ka_n}\left(x^{a_1} + x^{a_2} + \ldots + x^{a_n}\right)\end{aligned}$$

ve $i = 1,\ldots,n$, $a_i = ha + id$ olmasından

$$\begin{aligned}&= x^{ka_n}\left(x^{ha+d} + x^{ha+2d} + \ldots + x^{ha+nd}\right) \\ &= x^{ka_n}\left[\left(x^{ha}\left(x^{d} + x^{2d} + \ldots + x^{nd}\right)\right)\right] \\ &= x^{ka_n+ha}\left(x^{d} + \left(x^{d}\right)^2 + \ldots + \left(x^{d}\right)^n\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= x^{ka_n+ha}\sum_{r=1}^{n}\left(x^{d}\right)^r \\ &= x^{ka_n+ha}\sum_{r=1}^{n}x^{d}\left(x^{d}\right)^{r-1}\end{aligned}$$

$$= x^{ka_n+(ha+d)}\sum_{r=1}^{n}\left(x^{d}\right)^{r-1}$$

$\sum_{r=1}^{n}\left(x^{d}\right)^{r-1}$ geometrik toplamının $\frac{1-\left(x^{d}\right)^n}{1-x^{d}}$ ifadesine eşit olmasından

$$= x^{ka_n+a_1}.\frac{1-\left(x^d\right)^n}{1-x^d}$$

bulunur.

$$f\left(a\right) = x^{ka_n+a_1}.\frac{1-x^{nd}}{1-x^d}$$

diyelim. $k = 0,\ldots,s-1$ için $f\left(a\right)$'nın elemanlarını inceleyerek toplamına bakalım.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{s-1} x^{ka_n+a_1}\left(\frac{1-x^{nd}}{1-x^d}\right) &= \frac{1-x^{nd}}{1-x^d}\sum_{k=0}^{s-1} x^{ka_n+a_1}\\ &= \frac{1-x^{nd}}{1-x^d}\,x^{a_1}\sum_{k=0}^{s-1} x^{ka_n}\\ &= \frac{1-x^{nd}}{1-x^d}\,x^{a_1}\sum_{k=0}^{s-1}\left(x^{a_n}\right)^k\end{aligned}$$

ve yine $\sum_{k=0}^{s-1}\left(x^{a_n}\right)^k$ geometrik toplamı $\frac{1-\left(x^{a_n}\right)^s}{1-x^{a_n}}$ ifadesine eşit olduğundan

$$= \frac{1-x^{nd}}{1-x^d}\,x^{a_1}\,\frac{1-x^{sa_n}}{1-x^{a_n}} \tag{5.2}$$

elde edilir. T'nin elemanları

$$T = \{0\}\cup\{ka_n + a_l \mid k = 0,\ldots,s-1, l = 1,\ldots,n\}$$

olduğundan (5.2) eşitliğine $x^0 = 1$ ekleriz. Böylece

$$H_s\left(x\right) = \frac{1}{1-x^a}\left[1 + x^{a_1}\cdot\frac{\left(1-x^{nd}\right)\left(1-x^{sa_n}\right)}{\left(1-x^d\right)\left(1-x^{a_n}\right)}\right]$$

bulunur.

Şimdi,

$$a-1 = sn + r\ ,\ 0 < r < n$$

durumuna bakalım. Bu durumda, S 'nin a modülüne gore minimal transversali

$$T=\{0\}\cup\{ka_n+a_l \mid k=0,\ldots,s-1, l=1,\ldots,n\}\cup\{sa_n+a_l \mid l=1,\ldots,r\}$$

olur. Böylece,

$$\max(T)=sa_n+a_r$$

ve yine 3.1.6 Teoremden

$$\begin{aligned} F(S) &= \max(T)-a \\ &= sa_n+a_r-a \end{aligned}$$

$a_n=ha+nd$ ve $a_r=ha+rd$ olduğunu kullanırsak

$$\begin{aligned} &= s(ha+nd)+(ha+rd)-a \\ &= sha+snd+ha+rd-a \\ &= (sh+h-1)a+(sn+r)d \\ &= (sh+h-1)a+(a-1)d \\ &= (sh+h-1)a+ad-d \\ &= (sh+h-1+d)a-d \end{aligned}$$

bulunur.

(ii) $$g(S)=\frac{1}{a}\sum_{t\in T}t-\frac{a-1}{2}$$

eşitliğini kullanalım. Önce

$$\sum_{t\in T}t$$

toplamını bulalım.

$$\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{l=1}^{n}(ka_n+a_l)=\frac{ns(s-1)a_n}{2}+nsha+\frac{nsd(n+1)}{2}$$

eşitliğini önceki durumda elde etmiştik.

$$\sum_{l=1}^{r}\left(sa_n+a_l\right)=\left(sa_n+a_1\right)+\left(sa_n+a_2\right)+\ldots+\left(sa_n+a_r\right)$$
$$=rsa_n+\left(a_1+a_2+\ldots+a_r\right)$$

$$=rsa_n+\left(\left(ha+d\right)+\left(ha+2d\right)+\ldots+\left(ha+rd\right)\right)$$
$$=rsa_n+rha+\left(d+2d+\ldots+rd\right)$$
$$=rsa_n+rha+d\left(1+2+\ldots+r\right)$$
$$=rsa_n+rha+d\,\frac{r\left(r+1\right)}{2}$$

Böylece, T'nin tüm elemanlarının toplamı

$$\frac{ns\left(s-1\right)a_n}{2}+nsha+sd\,\frac{n\left(n+1\right)}{2}+rsa_n+rha+d\,\frac{r\left(r+1\right)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[ns^2a_n-nsa_n+2nsha+n^2sd+nsd+2rsa_n+2rha+r\left(r+1\right)d\right]$$

$a_n=ha+nd$ alırsak,

$$=\frac{1}{2}\left[ns^2a_n+\left(rsa_n+rsa_n\right)-ns\left(ha+nd\right)+2nsha+n^2sd+nsd+2rha+r^2d+rd\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(ns^2a_n+rsa_n\right)+rsa_n-nsha-n^2sd+2nsha+n^2sd+nsd+2rha+r^2d+rd\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[sa_n\left(ns+r\right)+rsa_n-nsha-n^2sd+2nsha+n^2sd+nsd+2rha+r^2d+rd\right]$$

$sn+r=a-1$ olduğunu hatırlarsak

$$=\frac{1}{2}\left[sa_n\left(a-1\right)+rsa_n+nsha+nsd+2rha+r^2d+rd\right]$$

ve yine $a_n=ha+nd$ eşitliğini kullanırsak,

$$=\frac{1}{2}\left[s\left(ha+nd\right)\left(a-1\right)+rs\left(ha+nd\right)+nsha+nsd+2rha+r^2d+rd\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[sha^2+snda-sha-snd+rsha+rsnd+nsha+nsd+2rha+r^2d+rd\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[sha^2+snda-sha+rsha+rsnd+ha\left(ns+r\right)+rha+r^2d+rd\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[sha^2+snda-sha+rsha+rd\left(sn+r\right)+ha\left(a-1\right)+rha+rd\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[sha^2+snda-sha+rsha+rd\left(a-1\right)+ha^2-ha+rha+rd\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[sha^2+snda-sha+rsha+rda-rd+ha^2-ha+rha+rd\right]$$
$$=\frac{1}{2}a\left[sha+snd-sh+rsh+rd+ha-h+rh\right]$$

$$=\frac{a}{2}\left[sh\left(a-1+r\right)+d\left(sn+r\right)+h\left(a-1+r\right)\right]$$
$$=\frac{a}{2}\left[\left(sh+h\right)\left(a-1-r\right)+d\left(a-1\right)\right]$$
$$=\frac{a}{2}\left[\left(a-1-r\right)h\left(s+1\right)+d\left(a-1\right)\right]$$

(iii) Yine,

$$T=\{0\}\cup\{ka_n+a_l \mid k=0,\ldots,s-1, l=1,\ldots,n\}\cup\{sa_n+a_l \mid l=1,\ldots,r\}$$

olmasından, T’nin elemanlarının toplamı

$$\sum_{t\in T} t = 1+\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{l=1}^{n-1} x^{ka_n+a_l} + \sum_{l=1}^{r} x^{sa_n+a_l}$$

olur. Bir önceki bölümün (iii) şıkkından ortadaki toplamın

$$x^{a_1}\cdot\frac{1-x^{nd}}{1-x^d}\cdot\frac{1-x^{sa_n}}{1-x^{a_n}}$$

olduğunu gördük.

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{r} x^{sa_n+a_l} &= x^{sa_n+a_1}+x^{sa_n+a_2}+\ldots+x^{sa_n+a_r}\\ &= x^{sa_n}x^{a_1}+x^{sa_n}x^{a_2}+\ldots+x^{sa_n}x^{a_r}\\ &= x^{sa_n}\left(x^{a_1}+x^{a_2}+\ldots+x^{a_r}\right)\end{aligned}$$

$a_i = ha+id$, $i=1,\ldots,r$ olduğunu kullanırsak

$$
\begin{aligned}
&= x^{sa_n}\left(x^{ha+d} + x^{ha+2d} + \ldots + x^{ha+rd}\right) \\
&= x^{sa_n}\left(x^{ha}x^{d} + x^{ha}x^{2d} + \ldots + x^{ha}x^{rd}\right) \\
&= x^{sa_n}\left(x^{ha}\left(x^{d} + x^{2d} + \ldots + x^{rd}\right)\right) \\
&= x^{sa_n+ha}\sum_{n=1}^{r}\left(x^{d}\right)^{n} \\
&= x^{sa_n+ha}\sum_{n=1}^{r}\left(x^{d}\right)\left(x^{d}\right)^{n-1} \\
&= x^{sa_n+ha+d}\sum_{n=1}^{r}\left(x^{d}\right)^{n-1}
\end{aligned}
$$

$\sum_{n=1}^{r}\left(x^{d}\right)^{n-1}$ geometrik toplamının $\frac{1-\left(x^{d}\right)^{r}}{1-x^{d}}$ ifadesine eşit olduğunu kullanırsak

$$
= x^{sa_n+a_1}\cdot\frac{1-\left(x^{d}\right)^{r}}{1-x^{d}}
$$

olur. Böylece,

$$
\sum_{t\in T} t = 1 + x^{a_1}\frac{1-\left(x^{d}\right)^{n}}{1-x^{d}}\frac{1-x^{sa_n}}{1-x^{a_n}} + x^{sa_n+a_1}\frac{1-\left(x^{d}\right)^{r}}{1-x^{d}}
$$

eşitliğinden

$$
H_s\left(x\right) = \frac{1}{1-x^{a}}\left[1 + x^{a_1}\frac{\left(1-x^{dn}\right)}{\left(1-x^{d}\right)}\frac{\left(1-x^{sa_n}\right)}{\left(1-x^{a_n}\right)} + x^{sa_n+a_1}\frac{\left(1-x^{dr}\right)}{\left(1-x^{d}\right)}\right]
$$

elde edilir.

6. KAYNAKLAR

[1] Leher, E., "On the Frobenius problem of numerical semigroups", *Comm. Algebra*,37, 639-649 (2009).

[2] Apery, R., "Sur les branches superlineaires des courbes algebriques", *C.R. Acad. Sci. Paris*,222, 1198-1200 (1946).

[3] Brauer, A., Shockly, J., "On a problem of Frobenius", *J. Reine Angew. Math.*, 293-294 (1962).

[4] Selmer, E., "On the linear diophantine problem of Frobenius", *J. Reine. Angew. Math.*,293/294, 1-17 (1997).

[5] Rosales, J., Garcia-Sanchez, P., *Numerıcal Semigroups* 20, New York Dordrecht Heidelberg London: Springer, (2009).

[6] Curtis, F., "On Formulas for the Frobenius number of a Numerical Semigroup", *Math. Scand.*, 2,67, 190-192 (1990).

[7] Sylvester, S., "Mathematical questions with their solutions", *Educ. Times*,41, 21 (1884).

[8] Bruns, W., Herzog, J., "Semigroup rings and simplicial complexes", *J. Pure and Appl. Algebra*, 3,122, 185-208 (1997).