T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

İKİ BAĞLANTILI BÖLGELERDE TANIMLI DEĞİŞKEN ÜSLÜ SMIRNOV SINIFLARINDA YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS

PELİN SU ADALI

BALIKESİR, HAZİRAN - 2019

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

İKİ BAĞLANTILI BÖLGELERDE TANIMLI DEĞİŞKEN ÜSLÜ SMIRNOV SINIFLARINDA YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS

PELİN SU ADALI

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLZADE (Tez Danışmanı)

Prof. Dr. Fatma AYAZ

Prof. Dr. Ali GÜVEN

BALIKESİR, HAZİRAN - 2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

Pelin Su ADALI tarafından hazırlanan **"İKİ BAĞLANTILI BÖLGELERDE TANIMLI DEĞİŞKEN ÜSLÜ SMIRNOV SINIFLARINDA YAKLAŞIM"** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 24.06.2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLZADE	....
Üye Prof. Dr. Fatma AYAZ	....
Üye Prof. Dr. Ali GÜVEN	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

Bu tez çalışması TUBİTAK tarafından 1001 kodlu 114F422 nolu Değişken Üslü Lebesgue Uzaylarında Yaklaşım Problemleri projesi ile desteklenmiştir.

ÖZET

İKİ BAĞLANTILI BÖLGELERDE TANIMLI DEĞİŞKEN ÜSLÜ SMIRNOV SINIFLARINDA YAKLAŞIM
YÜKSEK LİSANS
PELİN SU ADALI
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. DANIYAL M. ISRAFILZADE)
BALIKESİR, HAZİRAN – 2019

Bu çalışma giriş, ön bilgiler kısmı, iki ana bölüm (3 ve 4. bölümler), sonuç ve kaynak kısımlarından oluşmaktadır. Giriş bölümünde verilen sonuçlar Reel eksenin belirli aralıklarında ve kompleks düzlemin belirli özelliklere sahip bölgelerinde tanımlı fonksiyonlar uzayında yaklaşım problemlerinin incelenmesi ile ilgilidir. Birinci ana bölümde, Γ Dini düzgün Jordan eğrisi ile yapılandırılan Faber-Laurent rasyonel fonksiyonları tanımlanmış ve bu fonksiyonlar yardımı ile $L^{p(.)}(\Gamma)$ uzaylarında yaklaşım teorisinin bilinen bir düz teoreminin ayrıntılı ispatı verilmiştir. İkinci ana bölümde, iki bağlantılı B bölgesinde tanımlı $E^{p(.)}(B)$ değişken üslü Smirnov sınıflarında yaklaşım teorisinin bir düz teoremi ispatlanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Değişken üs, Smirnov sınıfları, düz teoremler, Faber serileri, düzgünlük modülü.

ABSTRACT

APPROXIMATION ON DOUBLE CONNECTED DOMAINS WITH VARIABLE EXPONENT SMIRNOV CLASSES
MSC THESIS
PELİN SU ADALI
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. DANIYAL M. ISRAFILZADE)
BALIKESİR, JUNE 2019

This work consists of introduction, auxiliary part, two main volumes (volume 3 and 4), conclusion and references parts. In introduction are given some results relating to the approximation properties of Faber polynomials and Faber rational functions constructed by given continuums in the complex plane. In main volume I (volume 3) the Faber- Laurent rational functions, constructed via Dini-smooth Jordan curve Γ are defined and then, the proof one direct theorem of approximation theory in the variable exponent Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ is given. In main volume II (volume 4), one direct theorem of approximation theory in the classes $E^{p(\cdot)}(B)$, defined on the double connected domain are proved.

KEYWORDS: Variable exponent, Smirnov classes, direct theorems, Faber polynomials, modulus of smoothness.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{T}$	: Kompleks düzlemde birim çember
$\mathbb{D}$	: Kompleks düzlemde birim disk
$\boldsymbol{\Gamma}$	: Kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi
$\mathfrak{D}$	: Dini düzgün eğrilerin kümesi
$\boldsymbol{L^{p(.)}(\Gamma)}$	: Γ da değişken üslü Lebesgue uzayı
$\boldsymbol{E^{p}(G)}$	: G bölgesinde fonksiyonların klasik Smirnov sınıfı
$\boldsymbol{E^{p(.)}(G)}$	: G bölgesinde fonksiyonların değişken üslü Smirnov sınıfı
$\boldsymbol{\Omega(f,.)_{p(.)}}$	: $L^{p(.)}(\mathbb{T})$ de f in düzgünlük modülü
$\boldsymbol{S_\Gamma}$	: Cauchy Singüler operatörü
$\boldsymbol{F_k(z)}$	: Faber polinomları
$\boldsymbol{\widetilde{F}_k(1/z)}$	: Faber-Laurent rasyonel fonksiyonu
C [a, b]	: [a, b] aralığında sürekli fonksiyonlar sınıfı
$\boldsymbol{L^p(0, 2\pi)}$	: $(0,2\pi)$ aralığında Lebesgue uzayı

ÖNSÖZ

Yüksek lisans çalışmam boyunca bana hiçbir destekten kaçınmayan ve çok değerli zamanını ayıran, bilgisi ve tecrübeleri ile bu çalışmamda bana yardımcı olan değerli hocam ve danışmanım Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLZADE'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Değerli yardımlarından dolayı, Prof. Dr. Ali GÜVEN' e çok teşekkür ederim. Her zaman manevi desteği ile beni umutlandıran, yüreklendiren sevgili eşim Ege ADALI' ya, beni hayata hazırlayan ve hep arkamda olan annem Tümay KARLIDERE ve babam Tunay KARLIDERE' ye teşekkürlerimi sunarım.

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinde genellikle belirli özelliklere sahip olan fonksiyonlara daha basit fonksiyonlarla yaklaşım problemleri incelenmektedir. Başlangıçta verilen fonksiyonlar uzayı araştırılan probleme göre değişmektedir. Özel halde belli aralıklarda veya kompleks düzlemin belli bölgelerinde analitik olup bölgenin kapanışında sürekli fonksiyonlar uzayı temel uzay olarak değerlendirilebilir. Bunun dışında, reel eksenin belli aralıklarında tanımlı Lebesgue uzayları veya kompleks düzlemin belli bölgelerinde analitik olup ek olarak bazı özelliklere sahip olan Smirnov fonksiyonları sınıflarında da yaklaşım problemleri incelenmektedir.

Yaklaşım görevini üstlenen basit fonksiyonlar ise temel uzaya bağlı olarak cebirsel polinomlar, rasyonel ve trigonometrik fonksiyonlar olabilir.

Özel halde C [a, b], $L^p(0, 2\pi)$, $E^p\ (G)$, $L^p(\Gamma)$ uzaylarında yaklaşım teorisi ile ilgili sonuçlar [1-4] kaynaklarında detaylı bir şekilde incelenmiştir. Bu kaynaklarda aynı zamanda bazı toplama yöntemlerinin yaklaşım özellikleri de incelenmiştir. Bu tez çalışmasında iki bağlantılı bölgede tanımlı değişken üslü Smirnov sınıflarında, Faber polinomları ve Faber- Laurent rasyonel fonksiyonlarının yaklaşım özellikleri incelenmektedir.

Yaklaşım teorisinde elde edilen sonuçların bir kısmı yaklaşım teorisinin düz teoremleri diğer bir kısmı ise yaklaşım teorisinin ters teoremleri olarak bilinmektedir. Düz teoremlerde belli özelliklere sahip fonksiyonlar sınıfında polinomları veya rasyonel fonksiyonlarla yaklaşım hızı değerlendirilir. Bunun için düzgünlük modülü denilen fonksiyonlar kullanılır. Ters teoremde ise polinom veya rasyonel fonksiyonlarla yaklaşım hızı verilen fonksiyonlar sınıfının diferansiyel özellikleri bulunur. Bu çalışmanın 1. ana bölümünde (bölüm 3) yaklaşım teorisinin bir düz teoremi ispatlanmıştır. Bunun dışında bu problemle ilgili diğer bir problemin araştırılması 2. ana bölümde (bölüm 4) elde edilmiştir.

Değişken üslü uzaylar 1930 yılında Orlicz tarafından matematik literatürüne dahil edilmiş olsa da bu uzaylarla ilgili önemli araştırmalar 1970 yılından sonra yapılmıştır. Bu çalışmalar içerisinde Sharpadinov tarafından yazılan [5] monografisi yaklaşım teorisi açısından önemli bir araştırma kaynağı olmuştur. Bu kitapta değişken üslü uzaylarda yaklaşımın mümkünlüğü için $p(.)$ değişken üssünün sağlaması gereken özellikler incelenmiş ve bu üssün belirli koşulları sağladığı taktirde trigonometrik polinomlar kümesinin Lebesgue uzaylarında yoğunluğu ispat edilmiştir.

Daha sonra [6] çalışmasında değişken üslü ağırlıklı uzaylarda yaklaşım teorisinin bazı düz ve ters teoremleri ispatsız olarak ifade edilmiştir. $L^{p(.)}[0, 2\pi]$ uzaylarında yaklaşım teorisinin bir düz teoremi [7] çalışmasında ispatlanmıştır. Bu çalışmada aynı zamanda bazı özel toplama yöntemlerinin yaklaşım özellikleri de incelenmiştir.

$L^{p(.)}[0, 2\pi]$ uzaylarında trigonometrik polinomlar ile yaklaşım problemleri ve kompleks düzlemin belirli özelliklere sahip basit bağlantılı bölgelerinde tanımlı değişken üslü uzaylarda cebirsel polinomlar ile yaklaşımla ilgili bazı çalışmalar [8-10] da yapılmıştır.

Değişken üslü uzaylarda yaklaşım alanında yapılan çalışmalar son yıllarda hızla artmaktadır. Bu tezde, araştırdığımız konu kompleks düzlemin iki bağlantılı bölgelerinde tanımlı değişken üslü Smirnov sınıflarının tanımı ve bu sınıflarda yaklaşım teorisinin bir düz teoreminin elde edilmesidir. Bu konuya oldukça yakın çalışmalar [11,12] çalışmalarıdır. Tezin 3.bölümünde bu çalışmalardan birincisinin detaylı ispatı da sunulmaktadır. Bu çalışmada kullanılan teknik ve yöntemler yardımı ile 4 bölümde iki bağlantılı bölgelerde tanımlı Smirnov sınıflarında Faber polinomları ve Faber rasyonel fonksiyonlarının özellikleri incelenmiş ve bunlar yardımı ile inşa edilen Faber-Laurent rasyonel fonksiyonları ile yaklaşım teorisinin bir düz teorisi ispatlanmıştır. Burada not edilmesi gereken nokta, $p(.)$ sabit olduğu durumda klasik Smirnov sınıflarında yaklaşım problemleri birçok matematikçi tarafından incelenmiştir. Detaylı bilgilere [7, 12-24] çalışmalarından ulaşılabilir.

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Temel Tanımlar ve Teoremler

2.1.1 Tanım: Kompleks düzlemde bağlantılı ve açık kümeye bir bölge; bağlantılı ve kapalı bir kümeye de kontinyum denir [25, s.1].

2.1.2 Tanım: *G*, $\mathbb{C}$ de bir bölge olsun. Eğer *G* içindeki her $\boldsymbol{\Gamma}$ eğrisi yine *G* içinde sabit bir $\boldsymbol{z_0}$ noktasına homotop ise *G* ye basit bağlantılı bölge denir.

2.1.3 Tanım: Bir f karmaşık fonksiyonu bir $\boldsymbol{z_0}$ noktasının belli bir $\boldsymbol{D(z_0, \delta)}$, $\boldsymbol{\delta > 0}$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa *f*, $\boldsymbol{z_0}$ da analitiktir denir [26, s.97].

2.1.4 Tanım: $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir

$$\Gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$$

fonksiyonuna kompleks düzlemde bir eğri denir. Burada $\Gamma(a)$ ve $\Gamma(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları; bir Γ eğrisi verildiğinde $\Gamma(a) = \Gamma(b)$ oluyorsa Γ ya kapalı eğri; Γ türevi var ve sürekli ise Γ ya diferansiyellenebilir eğri; diferansiyellenebilir bir Γ eğrisi için $\Gamma'(t) \neq 0,\ \forall t \in [a, b]$ oluyorsa Γ ya düzgün eğri; bir Γ eğrisi için sadece $t_1 = t_2$ durumunda $\Gamma(t_1) = \Gamma(t_2)$ oluyorsa Γ ya Jordan eğrisi denir [27].

2.1.5 Tanım: $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\Gamma: z = z(t) = x(t) + iy(t)$$

sürekli eğrisi verilmiş olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$t_1 = a < t_2 < t_3 < \cdots < t_{n+1} = b$$

koşulunu sağlayan $\forall t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{n+1}$ değerleri için

$$\sum_{k=1}^{n} |z(t_{k+1}) - z(t_k)|$$

toplamı sınırlı kalıyorsa Γ eğrisine sonlu uzunluklu eğri denir. Başka bir ifade ile Γ eğrisini gösteren z fonksiyonu sınırlı değişimli ise Γ ya sonlu uzunluklu eğri denir [28, s.417].

2.1.6 Tanım: G, sınırı kapalı $\boldsymbol{\Gamma}$ Jordan eğrisi olan sınırlı bir bölge, $\boldsymbol{z_0} \in \boldsymbol{\Gamma}$ ve $\boldsymbol{\Gamma}$ nın $\boldsymbol{z_0}$ da bir tek teğeti var olsun, $\boldsymbol{z_0}$ ın komşuluğunda $\boldsymbol{\Gamma}$ eğrisi normalin her iki yanı üzerinde bulunsun. Bu durumda eğer G içinde bulunan ve $\boldsymbol{z_0}$ noktasında son bulan sürekli bir $\boldsymbol{\ell}$ eğrisinin, $\boldsymbol{z_0}$ ın komşuluğundaki kısmı, köşesi $\boldsymbol{z_0}$ da bulunan, büyüklüğü $\boldsymbol{\pi}$ den daha küçük olan ve açıortayı $\boldsymbol{\Gamma}$ ya içten normal ile çakışan bir açı içinde kalıyorsa bu $\boldsymbol{\ell}$ eğrisine açısal yol denir. Eğer G içinde analitik olan bir $\boldsymbol{f(z)}$ fonksiyonu, z, $\boldsymbol{\Gamma}$ zerindeki bir $\boldsymbol{z_0}$ noktasına $\boldsymbol{\Gamma}$ içindeki keyfi bir açısal yol boyunca yaklaşırken bir a değerine yaklaşıyorsa, kısaca $\boldsymbol{f(z)}$ açısal yollar üzerinden a değerini alır veya $\boldsymbol{f(z)}$, $\boldsymbol{z_0}$ noktasından açısal limite sahiptir denir [28].

G, Γ Jordan eğrisi ile sınırlı, $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde sonlu bölge ve $G^{-}:= Ext\,\Gamma$ olsun. Genelliği kaybetmeden, $0 \in G$ alalım. $\mathbb{T}:=\{w \in \mathbb{C}: |w|=1\}$, $\mathbb{D}:= Int\,\mathbb{T}$, $\mathbb{D}^{-}:= Ext\,\mathbb{T}$ olsun.

2.1.7 Teorem (Riemann Konform Dönüşüm Teoremi): *G* kompleks düzlemde sınırı en az iki noktadan oluşan basit bağlantılı bir bölge ve $\boldsymbol{z_0} \in \boldsymbol{G}$ olsun. Bu durumda, *G* bölgesini $\mathbb{D}$ ye

$$f(z_0) = 0 \text{ ve } f'(z_0) > 0$$

koşulları altında resmeden bir tek konform dönüşüm vardır. [1, s.8]

2.1.8 Teorem: Eğer *G* bölgesinin sınırı Jordan eğrisi ise, *G* nin $\mathbb{D}$ ya her konform dönüşümü $\overline{\boldsymbol{G}}$ ye birebir ve sürekli olarak genişletilebilir. Aynı şekilde *G* nin sınırı bir Jordan eğrisi ise, $\boldsymbol{C}\overline{\boldsymbol{G}}$ nin $\boldsymbol{C}\overline{\mathbb{D}}$ ye her konform dönüşümü *CG* ye birebir ve sürekli olarak genişletilebilir [25, s.24].

2.1.9 Tanım: $\boldsymbol{\Gamma}$, kompleks düzlemde sonlu uzunluklu kapalı bir Jordan eğrisi olsun. $\boldsymbol{p}: \boldsymbol{\Gamma} \to [\mathbf{1}, \infty)$ değişken üssü, $\boldsymbol{\Gamma}$ üzerinde tanımlı Lebesgue ölçülebilir fonksiyon olsun.

$$\int_{\Gamma} |f(z)|^{p(z)} |dz| < \infty$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir *f* fonksiyonları kümesine değişken üslü Lebesgue uzayı denir ve $L^{p(.)}(\Gamma)$ ile gösterilir.

2.1.10 Tanım: $\boldsymbol{\Gamma}$, kompleks düzlemde sonlu uzunluklu kapalı bir Jordan eğrisi olsun. Değişken üslü $\boldsymbol{L^{p(.)}(\Gamma)}$, $\boldsymbol{ess\,\sup_{z\in\Gamma} p(z)} < \infty$ Lebesgue uzayı

$$\|f\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} := inf \left\{ \lambda \geq 0 : \int_{\Gamma} \left| {f(z)}/{\lambda} \right|^{p(z)} |dz| \leq 1 \right\} < \infty$$

normu ile donatıldığında bir Banach uzayı olur.

2.1.11 Tanım: *G*, basit bağlantılı bir bölge ve f fonksiyonu G de analitik olsun. $\boldsymbol{1 \leq p < \infty}$ alalım. G de yerleşen ve $\boldsymbol{\Gamma_n \to \Gamma}$ özelliğine sahip sonlu uzunluklu kapalı Jordan eğrilerinin bir $(\boldsymbol{\Gamma_n})$ dizisi için

$$\int_{\Gamma_n} |f(z)|^p \, |dz| < M$$

olacak şekilde n'den bağımsız $M = M(f)$ sayısı bulunabiliyorsa $f \in E^p(G)$ dir denir. $E^p(G)$ uzayına Smirnov sınıfı denir [28, s438].

2.1.12 Tanım: *G*, basit bağlantılı bir bölge olsun. $\boldsymbol{p(.)\colon \Gamma \to [1, \infty)}$ Lebesgue ölçülebilir fonksiyon olsun. O halde

$$E^{p(.)}(G) := \{ f \in E^1(G) : f \in L^{p(.)}(\Gamma) \}$$

uzayına *G* deki *f* analitik fonksiyonlarının değişken üslü Smirnov sınıfı denir.

$f \in E^{p(.)}(G)$ fonksiyonunun normu $\|f\|_{E^{p(.)}(G)} := \|f\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}$ olarak tanımlanır ve $E^{p(.)}(G)$ nin bir Banach uzayı olduğu görülür.

2.1.13 Tanım: $\boldsymbol{F}, [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{2\pi}]$ aralığı ya da bir $\boldsymbol{\Gamma} \subset \mathbb{C}$ Jordan eğrisi olsun ve $\boldsymbol{p}(.)\colon \boldsymbol{F} \to \mathbb{R}^+ := [\boldsymbol{0}, \infty)$, Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon,

$$1 \le p_- := \operatorname*{ess\,inf}_{z\in F} p(z) \le \operatorname*{ess\,sup}_{z\in F} p(z) := p^+ < \infty \qquad (2.1)$$

olsun.

$|F|$, F in Lebesgue ölçümü olsun. Eğer $p(.)$, (2.1) ve $\forall z_1, z_2 \in F$ ve z_1, z_2 noktalarından bağımsız pozitif bir c sabiti için

$$|p(z_1) - p(z_2)| \ln\left({}^{|F|}\!\big/_{|z_1 - z_2|} \right) \le c$$

koşullarını sağlıyorsa, $p(.) \in \mathcal{P}^{\log}(F)$ denir. Eğer $p(.) \in \mathcal{P}^{\log}(F)$ ve $p_- > 1$ ise o halde $p(.) \in \mathcal{P}_0{}^{\log}(F)$ olduğu söylenir.

2.1.14 Teorem (Hölder Eşitsizliği): $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{p}(\mathbf{z})}(\boldsymbol{\Gamma}), \boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{p}'(\mathbf{z})}(\boldsymbol{\Gamma}), \mathbf{1} \le \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \le \infty$, $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p(z)}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p'(z)}} = \mathbf{1}$ olsun. O halde

$$\int_\Gamma |f(z)g(z)dz| \le k\|f\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}\|g\|_{L^{p'(.)}(\Gamma)}, \qquad k = sup\frac{1}{p(z)} + sup\frac{1}{p'(z)}$$

özel halde $p(.) = p = \ sabit$ olduğunda *k=1* olur.

2.1.15 Teorem (Minkowski Eşitsizliği): $\mathbf{1 \leq p(x) \leq \infty}$ olsun ve $\boldsymbol{f, g} \in \boldsymbol{L^{p(.)}(\Gamma)}$ olsun. O halde $\boldsymbol{f + g} \in \boldsymbol{L^{p(.)}(\Gamma)}$ ve

$$\|f + g\|_{p(.)} \leq \|f\|_{p(.)} + \|g\|_{p(.)}$$

olur.

2.1.16 Teorem (İntegral Minkowski Eşitsizliği): $\mathbf{1 \leq p(x) \leq p_+ <} \infty$ olsun. $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{\Gamma\, x\, \Gamma} \to \mathbb{C}$ ölçülebilir fonksiyonu ve tüm $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\Gamma}$ için $\boldsymbol{f(., y)} \in \boldsymbol{L^{p(.)}(\Gamma)}$ olduğunu varsayalım. O halde

$$\left\| \int_{\Gamma} f(., y) d\, y \right\|_{p(.)} \leq c(p) \int_{\Gamma} \|f(., y)\|_{p(.)}\, dy$$

olur. Burada $c(p), p(z)$ e bağlı bir sabittir.

g sürekli bir fonksiyon ve

$$\omega(g, t) := \sup_{|t_1 - t_2| \leq t} |g(t_1) - g(t_2)|, \qquad t > 0$$

süreklilik modülü olsun.

2.1.17 Tanım: $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\boldsymbol{\Gamma}: [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \to \mathbb{C}$ fonksiyonu kompleks düzlemde diferansiyellenebilir bir eğri olsun. $\boldsymbol{\Gamma}$ eğrisi için $\boldsymbol{\Gamma'}\ (\boldsymbol{t}) \neq \mathbf{0}$, $\forall \boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ oluyorsa $\boldsymbol{\Gamma}$ ya düzgün eğri denir.

2.1.18 Tanım: $\boldsymbol{\Gamma}$ düzgün Jordan eğrisi olsun. $\boldsymbol{\theta(s)}$ ile s değerine karşılık gelen eğri noktasına çizilen teğetin reel eksenin pozitif yönü ile oluşturduğu açıyı gösterelim ve $\boldsymbol{\theta}$ nın $\boldsymbol{\omega(\theta, s)}$ süreklilik modülü

$$\int_{0}^{\delta}\left[\omega(\theta,s)\big/_{s}\right]ds<\infty,\delta>0,$$

koşulunu sağlıyor ise Γ ye Dini- düzgün eğri denir. Dini- düzgün eğrilerin kümesi $\mathfrak{D}$ ile gösterilir.

2.2 Düzgünlük Modülü

Klasik ötelemeye göre $L^{p(.)}(\mathbb{T})$ invaryant olmadığından bu uzayda düzgünlük modülünü tanımlamak için,

$$\sigma_h f(w):=\frac{1}{h}\int_0^h f\left(we^{it}\right)dt$$

operatörü tanımlanır. Burada $w\in\mathbb{T}$, $0<h<\pi$ dir. Bu operatör $p\in\mathcal{P}^{\log}(\mathbb{T})$ olduğunda $L^{p(.)}(\mathbb{T})$ uzayında sınırlı olduğundan [27] düzgünlük modülünün aşağıdaki tanımı verilebilir.

2.2.1 Tanım: $\boldsymbol{f\in L^{p(.)}(\mathbb{T})}$, $\boldsymbol{p\in\mathcal{P}^{\log}(\mathbb{T})}$ olsun.

$$\Omega(f,\delta)_{p(.)}:=\sup_{0<h\le\delta}\|f(.)-\sigma_h f(.)\|_{L^{p(.)}(\mathbb{T})}$$

şeklinde tanımlanan $\Omega(f,.)_{p(.)}:[0,\infty)\to[0,\infty)$ fonksiyonu $L^{p(.)}(\mathbb{T})$ de f in düzgünlük modülüdür.

Vurgulayalım ki bu şekilde modül Sharapudinov'un [29] çalışmasında da kullanılmaktadır.

2.3 Cauchy Singüler İntegrali

Γ kompleks düzlemde kapalı sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olsun.

Bu durumda

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\,\zeta, \qquad z \notin \Gamma$$

Cauchy integralini ele alalım.

Γ üzerinde bulunan bir z noktasını göz önüne alalım. $f \in L^1(\Gamma)$ ve keyfi bir $\varepsilon > 0$ için $\Gamma(z, \varepsilon) := \{\zeta \in \Gamma : |\zeta - z| < \varepsilon\}$ olsun.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma \setminus \Gamma(z,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \mathrm{z}} d\,\zeta$$

limiti varsa bu limite Cauchy Singüler integrali denir ve

$$S_{\Gamma} f(\mathrm{z}) \coloneqq \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \setminus \Gamma(z,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

veya

$$S_{\Gamma}f(\mathrm{z}) := \frac{1}{2\pi i}(P.V)\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

şeklinde gösterilir.

Verilen $f \in L^{1}(\Gamma)$ için $S_{\Gamma}(f)$, Γ de hemen her yerde $S_{\Gamma}(f)(z)$ değerini alır. $S_{\Gamma}(f)$ lineer operatörü Cauchy singüler operatörü olarak adlandırılır.

2.3.1 Lemma (Privalov Lemması): Eğer Cauchy integrali $\boldsymbol{\Gamma}$ üzerinde hemen her yerde $\boldsymbol{\Gamma}$ nın bir tarafı üzerinde bulunan bütün açısal yollar boyunca belirli limit değerlerine sahipse, Cauchy singüler integrali $\boldsymbol{\Gamma}$ üzerinde hemen her yerde mevcuttur ve Cauchy integrali $\boldsymbol{\Gamma}$ nın diğer tarafı üzerinden $\boldsymbol{\Gamma}$ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerine sahiptir. Tersine, Cauchy singüler integrali $\boldsymbol{\Gamma}$ üzerinde hemen her yerde mevcutsa Cauchy integrali $\boldsymbol{\Gamma}$ nın her iki tarafı üzerinden de $\boldsymbol{\Gamma}$ üzerinde hemen her yerde açısal limit değerlerine sahiptir [28, s. 431].

Eğer $f \in L^{p(.)}(\Gamma)$, $p \in \mathcal{P}^{\log}(\Gamma)$ ise o zaman

$$f^{+}(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta,\ z \in G \tag{2.2}$$

$$f^{-}(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta,\quad z \in G \tag{2.3}$$

fonksiyonları sırasıyla G ve G^{-} de analitiktir ve $f^{-}(\infty) = 0$ dır. Privalov 'un lemmasına göre Γ de hemen her yerde açısal yollar üzerinden limitleri vardır ve

$$f^{+}(z) = S_{\Gamma}(f)(z) + \tfrac{1}{2}f(z) \text{ ve } f^{-}(z) = S_{\Gamma}(f)(z) - \tfrac{1}{2}f(z) \tag{2.4}$$

formülleri Γ de hemen her yerde geçerlidir. Bununla birlikte

$$f(z) = f^{+}(z) - f^{-}(z) \tag{2.5}$$

Γ de hemen her yerde sağlanır [9, s.431]. Dahası $f_0^{-}(\infty) = f_1^{-}(\infty) = 0$.

2.4 Yardımcı Teoremler

Γ, kompleks düzlemde sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olsun. Jordan eğri teoremine göre her Jordan eğrisi kompleks düzlemi biri sınırlı diğeri sınırsız iki basit bağlantılı bölgeye ayırır.

G, Γ Jordan eğrisi ile sınırlı, $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde sonlu bölge ve $G^{-} := Ext\, \Gamma$ olsun. Genelliği kaybetmeden, $0 \in G$ alalım. Ayrıca $\mathbb{T} := \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$, $\mathbb{D} := Int\, \mathbb{T}$, $\mathbb{D}^{-} := Ext\, \mathbb{T}$ olsun.

Riemann konform dönüşüm teoremine göre G^{-} ve G nin $\mathbb{D}^{-}$ bölgesine konform dönüşümleri vardır. Bu dönüşümler sırasıyla φ ve φ_1 ile gösterilsin. Ayrıca

$$\varphi(\infty) = \infty, \lim_{z \to \infty} \varphi(z)/z > 0$$

ve

$$\varphi_1(0) = \infty, \lim_{z \to 0} z.\varphi_1(z) > 0$$

olsun. Bununla birlikte φ ve φ_1 dönüşümlerinin tersleri sırasıyla ψ ve ψ_1 olsun.

3. EĞRİ ÜZERİNDE TANIMLI DEĞİŞKEN ÜSLÜ LEBESGUE UZAYLARINDA FABER-LAURENT RASYONEL FONKİYONLARIYLA YAKLAŞIM

3.1 Giriş

Değişken üslü Lebesgue uzayları, Klasik Lebesgue uzaylarının bir genellemesidir. Burada p sabit üssünün yerini, değişken üslü fonksiyon $p(.)$ alır. Değişken üslü Lebesgue uzaylarının, mekanikte farklı uygulama problemlerinde, özellikle akışkan dinamiğindeki elektroreolojik akışkanların modellenmesinde ve ayrıca görüntü işleme çalışmalarında ve bazı fiziksel problemlerde kullanılması nedeniyle 1990'lı yıllardan itibaren bu uzaylara olan ilgi artmıştır. (Örneğin [5, 30, 1] monografları ve orada belirtilmiş kaynaklarda görülebilir) Günümüzde, potansiyel teori, maksimal ve singüler integral operatör teorisi ışığında bu uzayların temel problemleri ile ilgili yeterince geniş araştırma yapılmıştır. İlgili sonuçların sunumu, yukarıdaki monograflarda ve ayrıca [32-35] de bulunabilir. Ama değişken üslü Lebesgue uzaylarında yaklaşım problemleri özel olarak kompleks bölgede yeterince geniş olarak araştırılmamıştır. Bu arada, reel eksende tanımlanan periyodik ve periyodik olmayan fonksiyonların değişken üslü Lebesgue uzaylarında yaklaşım teorisinin temel problemlerinden bazıları Sharapudinov tarafından çalışılmış ve çözülmüştür [5], ayrıca bakınız: [29, 36].

Bu bölümde, Γ- Dini düzgün Jordan eğrisiyle oluşturulan Faber-Laurent serilerinin kısmi toplamlarının yaklaşım özellikleri çalışılmış ve değişken üslü $L^{p(.)}(\Gamma)$ Lebesgue uzaylarında var olan bir düz teoremin detaylı ispatı verilmiştir.

Verilen f ve Γ de tanımlı $p(.)$ değişken üssü için;

$$f_0\,(w) := f\,[\psi\,(w)] \text{ ve } f_1\,(w) := f\,[\psi_1\,(w)] \tag{3.1}$$

$$p_0(w) := p\big(\psi(w)\big) \text{ ve } p_1(w) := p\big(\psi_1(w)\big) \tag{3.2}$$

olsun.

3.2 Yardımcı Sonuçlar

c, c₁, . . . , ile genellikle birbirinden farklı olup sadece parantez içindeki parametrelere bağlı olan ve n den bağımsız sabitleri göstereceğiz.

3.2.1 Lemma: $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathfrak{D}$ ise $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L^{p(.)}(\Gamma)} \Leftrightarrow \boldsymbol{f_0} \in \boldsymbol{L^{p_0(.)}}(\mathbb{T}) \Leftrightarrow \boldsymbol{f_1} \in \boldsymbol{L^{p_1(.)}}(\mathbb{T})$ ve $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P^{log}(\Gamma)} \Leftrightarrow \boldsymbol{p_0} \in \boldsymbol{P^{log}}(\mathbb{T}) \Leftrightarrow \boldsymbol{p_1} \in \boldsymbol{P^{log}}(\mathbb{T})$ olur.

İspat. $\Gamma \in \mathfrak{D}$ ise [37] e göre

$$0 < c_1 < |\psi'(w)| < c_2 < \infty\,,\ 0 < c_3 < |\varphi'(w)| < c_4 < \infty \tag{3.3}$$

$$0 < c_5 < |\psi_1'(w)| < c_6 < \infty\,,\ 0 < c_7 < |\varphi_1'(w)| < c_8 < \infty \tag{3.4}$$

burada $c_i > 0, i = 1,2,\ldots,8$ dir. (3.3) e göre,

$$\|f\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} \leq c_2\,\|f_0\|_{L^{p_0(.)}(\mathbb{T})} \leq c_2 c_4\,\|f\|_{L^{p(.)}(\Gamma)}$$

dir ve bu da

$$f \in L^{p(.)}(\Gamma) \Leftrightarrow f_0 \in L^{p_0(.)}(\mathbb{T})$$

olmasını gerektirir.

Benzer bir yolla (3.4) den,

$$f \in L^{p(.)}(\Gamma) \Leftrightarrow f_1 \in L^{p_1(.)}(\mathbb{T})$$

elde edilir.

Diğer taraftan eğer $p \in P^{\log}(\Gamma)$, $w_i \in \mathbb{T}$, $i = 1,2$ ise o halde $w_i := \varphi(z_i) \in \mathbb{T}$, $z_i \in \Gamma$ olur. (3.3) e göre $|p_0(w_1) - p_0(w_2)|\ln\left({}^{2\pi}\!/_{|w_1 - w_2|}\right) \leq c_9|p(z_1) - p(z_2)|\ln\left({}^{|\Gamma|}\!/_{|z_1 - z_2|}\right) \leq c_{10}|p_0(w_1) - p_0(w_2)|\ln\left({}^{2\pi}\!/_{|w_1 - w_2|}\right)$, ki bu da $p \in P^{\log}(\Gamma) \Leftrightarrow p_0 \in P^{\log}(\mathbb{T})$ olmasını gerektirir.

Benzer şekilde (3.4) ü kullanarak $p \in P^{\log}(\Gamma) \Leftrightarrow p_1 \in P^{\log}(\mathbb{T})$ olduğu gösterilir.

■

Eğer $f \in L^{p(.)}(\Gamma)$, $p \in \mathcal{P}^{\log}(\Gamma)$ ise o zaman

$$f^+(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\mathbb{T} \frac{[\psi'(w)]}{\psi(w) - z} f_0(w)dw, \ z \in G \qquad (3.5)$$

$$f^-(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}}\int_\mathbb{T} \frac{[\psi_1'(w)]}{\psi_1(w) - z} f_1(w)\,dw, \ z \in G \qquad (3.6)$$

fonksiyonları sırasıyla G ve G^- de analitiktir ve $f^-(\infty) = 0$ dır.

Dahası $f_0^-(\infty) = f_1^-(\infty) = 0$ ve $\mathbb{T}$ de hemen her yerde

$$f_0(w) = f_0^+(w) - f_0^-(w) \tag{3.7}$$

$$f_1(w) = f_1^+(w) - f_1^-(w) \tag{3.8}$$

dir.

3.2.2 Lemma: Eğer $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{p}(.)}(\mathbb{T})$, $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{log}}(\mathbb{T})$ ise o halde

$$\Omega(S_{\mathbb{T}}[g],.)_{p(.)} \leq c(p)\, \Omega(g,.)_{p(.)}$$

olur.

İspat. $\delta \in [0,\pi],\ h < \delta,\ w \in \mathbb{T}$ olsun. Fubini teoremine göre

$$\begin{aligned}
\sigma_h[S_{\mathbb{T}}(g)(w)] &= \left({}^{1}\!/_{h}\right) \int_0^h S_{\mathbb{T}}(g)\left(we^{it}\right) dt \\
&= \left({}^{1}\!/_{h}\right) \int_0^h \frac{1}{2\pi i}(P.V)\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{g\left(\tau e^{it}\right) d\tau}{\tau - w}\right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}(P.V) \int_{\mathbb{T}} \frac{\left({}^{1}\!/_{h}\right) \int_0^h g\left(\tau e^{it}\right) dt}{\tau - w} d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi i}(P.V) \int_{\mathbb{T}} \frac{\sigma_h(g)(\tau)}{\tau - w} d\tau \ = S_{\mathbb{T}}[\sigma_h(g)(w)]
\end{aligned}$$

ve $L^{p(.)}(\mathbb{T})$ de $S_{\mathbb{T}}[g]$ singüler operatörünün sınırlılığını kullanarak,

$$\|(S_{\mathbb{T}}(g)-\sigma_h[S_{\mathbb{T}}(g)])(w)\|_{L^{p(.)}(\mathbb{T})} = \|(S_{\mathbb{T}}[g-\sigma_h(g)])(w)\|_{L^{p(.)}(\mathbb{T})}$$
$$\leq c(p)\|[g-\sigma_h(g)](w)\|_{L^{p(.)}(\mathbb{T})}$$

elde edilir ki bu da $\Omega(S_{\mathbb{T}}[g],.)_{p(.)} \leq c(p)\,\Omega(g,.)_{p(.)}$ ilişkisini gerektirir. ■

3.2.3 Lemma: Eğer $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{p}(.)}(\mathbb{T}),\ \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{log}}(\mathbb{T})$ ise o halde

$$\Omega(g^+,.)_{p(.)} \leq c(p)\,\Omega(g,.)_{p(.)}$$

dır.

İspat. $\mathbb{T}$ de hemen her yerde

$$g^+ = \frac{1}{2}g + S_{\mathbb{T}}(g)$$

olduğundan *lemma 3.2.2* vasıtasıyla istenilen eşitsizliği elde ederiz. ■

3.2.4 Lemma: [12]. $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathfrak{D}$ ***ve*** $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{log}}(\boldsymbol{\Gamma})$ olsun. Eğer $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{p}(.)}(\boldsymbol{\Gamma}), \boldsymbol{\Gamma} \in \mathfrak{D}$ ve $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{log}}(\boldsymbol{\Gamma})$ ise o zaman $\boldsymbol{f}^+ \in \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{p}(.)}(\boldsymbol{G}),\ \boldsymbol{f}^- \in \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{p}(.)}(\boldsymbol{G}^-)$ olur.

3.2.5 Lemma: [12]. $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{p}(.)}(\mathbb{D}),\ \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{log}}(\boldsymbol{\Gamma})$ olsun. Eğer

$$\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{a_k}(g)\mathrm{w^k},$$

g nin orijinde Taylor serisinin n. kısmi toplamı ise o zaman $\forall n \in \mathbb{N}$ için;

$$\left\| g(w) - \sum_{k=0}^{n} a_k(g) w^k \right\|_{L^{p(.)}(\mathbb{T})} \leq c(p)\, \Omega\left(g, 1/n\right)_{p(.)},$$

olacak şekilde n den bağımsız $c(p) > 0$ sabiti vardır.

$\Gamma \in \mathfrak{D}$, $F_k(z)$, $k = 0,1,2,\ldots$, $\overline{G}$ nin Faber polinomları olsun. (bkz. [38]) Ayrıca $\widetilde{F_k}\left(1/z\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\overline{G^-}$ sınırsız kontinyumunun 1/z ye göre Faber polinomları olsun. Bir sonraki Lemma, yaklaşan rasyonel fonksiyonlar ve cebirsel polinomların inşa edilmesinde önemli bir rol oynamaktadır.

3.2.6 Lemma: [15]. Eğer $\boldsymbol{z \in G}$ **ve** $\boldsymbol{z' \in G^-}$ ise o halde $\forall \boldsymbol{w} \in \mathbb{D}^-$ için

$$\frac{\psi'(w)}{\psi(w) - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(z)}{w^{k+1}} \text{ ve } \frac{\psi_1'(w)}{\psi_1(w) - z'} = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{\widetilde{F_k}\left(1/z'\right)}{w^{k+1}}$$

olur.

$F_k(z)$ Faber polinomları ve $\widetilde{F_k}\left(1/z\right)$ rasyonel fonksiyoları için aşağıdaki integral gösterimleri vardır;

3.2.7 Lemma: Eğer $\boldsymbol{z \in G^-}$ ise o halde

$$F_k(z) = \varphi^k(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi^k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

ve

$$\widetilde{F}_k(1/z) = \varphi_1^k(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi_1^k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \qquad z \in G$$

olur.

Lemma 3.2.6 ve (3.5), (3.6) yi hesaba katarak, verilen $f \in L^{p(.)}(\Gamma)$ fonksiyonu için

$$a_k = a_k(f) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f_0(w)}{w^{k+1}} dw, \; k = 0, 1, 2, \; . \; . \; . \tag{3.9}$$

$$\widetilde{a}_k = \widetilde{a}_k(f) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f_1(w)}{w^{k+1}} dw, \; k = 1, 2, \; . \; . \; . \tag{3.10}$$

olduğu yerde $f(z) = f^+(z) - f^-(z)$ den yola çıkarak

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k F_k(z) + \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{a}_k \, \widetilde{F}_k(1/z) \tag{3.11}$$

eşlemesini elde ederiz.

3.3 Ana Sonuç

3.3.1 Teorem: $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathfrak{D}$, $\boldsymbol{p}(.) \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_{\boldsymbol{0}}{}^{\boldsymbol{log}}(\boldsymbol{\Gamma})$ olsun. Eğer $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{p}(.)}(\boldsymbol{\Gamma})$ ise o halde $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ için

$$\|f - R_n(.,f)\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} \leq c(p)\left[\Omega\left(f_0, {}^1\!/_n\right)_{p_0(.)} + \Omega\left(f_1, {}^1\!/_n\right)_{p_1(.)}\right],$$

olacak şekilde n den bağımsız bir $c(p) > 0$ sabiti vardır.

Burada $R_n(z\,, f)$ rasyonel fonksiyonları, f in Faber-Laurent serilerinin n. kısmi toplamları olarak inşa edilir.

İspat. $f \in L^{p(.)}(\Gamma)$ olsun. Yaklaşan rasyonel fonksiyon (3.11) den hareketle,

$$R_n(f,z) := \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z) + \sum_{k=0}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k\left({}^1\!/_z\right)$$

olarak inşa edilir. Bu durumda $f(z) = f^+(z) - f^-(z)$ bağıntısını dikkate alırsak

$$\left\|f^-(z) + \sum\nolimits_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k\left({}^1\!/_z\right)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} \leq c(p)\Omega\left(f_1\,, \frac{1}{n}\right)_{p_1(.)} \qquad (3.12)$$

ve

$$\|f^+(z) - \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_k F_k(z)\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} \leq c(p)\Omega\left(f_0\,, {}^1\!/\quad\right)_{p_0(.)} \qquad (3.13)$$

eşitsizliklerini ispatlamak yeterlidir. (3.7) ve (3.8) bağıntılarında Γ da hemen her yerde w yerine sırasıyla $\varphi(z)$ ve $\varphi_1(z)$ alınırsa, (2.5) dikkate alındığında

$$f(z) = \left[f_0^{+}\big(\varphi(z)\big) - f_0^{-}\big(\varphi(z)\big)\right] \tag{3.14}$$

$$f(z) = \left[f_1^{+}\big(\varphi_1(z)\big) - f_1^{-}\big(\varphi_1(z)\big)\right] \tag{3.15}$$

elde edilir.

Böylece (3.12) eşitsizliği ispatlanır. (3.13) eşitsizliği de benzer yolla ispatlanır.

$z' \in G$ olsun. *Lemma 3.2.7'*nin 2. bağıntısını ve (3.15) i kullanarak

$$\sum_{k=0}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k\left({}^{1}/_{z'}\right) = \sum_{k=0}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(z') - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\sum_{k=0}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(\zeta)}{\zeta - z'} d\zeta$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(z') - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\sum_{k=0}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(\zeta) - f_1^{+}\big(\varphi_1(\zeta)\big)}{\zeta - z'} d\zeta$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f_1^{-}\big(\varphi_1(\zeta)\big)}{\zeta - z'} d\zeta \;\; - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z'} d\,\zeta$$

elde edilir.

Lemma 3.2.4'e göre $f_1^{-}\big(\varphi_1(\zeta)\big) \in E^{p(.)}(G) \subset E^{1}(G)$ ve bundan dolayı

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f_1^{-}\big(\varphi_1(\zeta)\big)}{\zeta - z'} d\zeta = f_1^{-}\big(\varphi_1(z')\big)$$

olur.

Bu nedenle,

$$\sum_{k=0}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k(1/_{z'}) = \sum_{k=0}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(z')$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\sum_{k=0}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(\zeta) - f_1^+(\varphi_1(\zeta))}{\zeta - z'} d\zeta - f_1^-(\varphi_1(z')) - f^+(z')$$

dir.

$$f^+(z) = S_\Gamma(f)(z) + \frac{1}{2} f(z)$$

ve

$$f^+(z) = S_\Gamma(f)(z) + \frac{1}{2} f(z)$$

bağıntılarına göre ve Γ eğrisinin tüm z noktalarında açısal yollar üzerinde $z' \to z$ olduğunda limit alırsak, Γ de hemen her yerde

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k(1/_z) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(z) - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(z) - f_1^+(\varphi_1(z))\right)$$
$$-S_\Gamma\left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(z) - f_1^+(\varphi_1(z))\right) - f_1^-(\varphi_1(z)) - f^+(z)$$

Bundan dolayı, $f(z) = f^+(z) - f^-(z)$ ve (3.15) bağıntılarından

$$f^-(z) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k(1/_z) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \varphi_1^k(z) - f_1^+(\varphi_1(z))\right)$$

$$-S_{\Gamma}\left(\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\varphi_1^k(z)-f_1^+\left(\varphi_1(z)\right)\right)$$

elde edilir.

Şimdi $L^{p(.)}(\Gamma)$ de S_{Γ} nin sınırlılığı ve *lemma 3.2.5 ve lemma 3.2.3* ten

$$\begin{aligned}
\left\|f^-(z)+\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\tilde{F}_k\left({}^{1}\!/_{z}\right)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} &\leq \frac{1}{2}\left\|\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\varphi_1^k(z)-f_1^+\left(\varphi_1^k(z)\right)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} \\
&+\left\|S_{\Gamma}\left(\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\varphi_1^k(z)-f_1^+\left(\varphi_1^k(z)\right)\right)\right\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} \\
\leq \frac{1}{2}\left\|\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k w^k-f_1^+(w)\right\|_{L^{p_1(.)}(\mathbb{T})} &+c_1(p)\left\|\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k w^k-f_1^+(w)\right\|_{L^{p_1(.)}(\mathbb{T})} \\
&\leq c(p)\left\|\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k w^k-f_1^+(w)\right\|_{L^{p_1(.)}(\mathbb{T})} \\
&= c(p)\left\|\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k(f_1^+)w^k-f_1^+(w)\right\|_{L^{p_1(.)}(\mathbb{T})} \\
&\leq c(p)\Omega\left(f_1^+,{}^{1}\!/_{n}\right)_{p_1(.)}\leq c(p)\Omega\left(f_1,{}^{1}\!/_{n}\right)_{p_1(.)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(3.13) tahmini, *lemma 3.2.7*, (3.14) bağıntısı kullanılarak ve Γ nin dışındaki tüm açısal olmayan yollar üzerinde limit alınarak ve (3.12) in ispat sürecinin son aşamasını tekrarlayarak elde edilir. Böylece (3.12) ve (3.13) tahminleri ispatı tamamlar. ■

Bu teoremden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

3.3.2 Sonuç: $\boldsymbol{f \in E^{p(.)}(G)}$, $\boldsymbol{\Gamma \in \mathfrak{D}}$, $\boldsymbol{p(.) \in \mathcal{P}_0^{log}(\Gamma)}$ ise, $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ için n den bağımsız $\boldsymbol{c(p) > 0}$ sabiti ile

$$\|f - P_n(.,f)\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} \leq c(p)\,\Omega\left(f_0, {}^{1}/_{n}\right)_{p_0(.)},$$

koşulunu sağlayan cebirsel bir

$$P_n(.,f) := \sum_{k=0}^{n} a_k\ F_k(z)$$

polinomu vardır. Burada $P_n(z,f)$ polinomları, f in Faber dizilerinin n. kısmi toplamları olarak inşa edilir.

3.3.3 Sonuç: Eğer $\boldsymbol{f \in E^{p(.)}(G^-)}$, $\boldsymbol{\Gamma \in \mathfrak{D}}$, $\boldsymbol{p(.) \in \mathcal{P}_0^{\log}(\Gamma)}$ ise o zaman $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ için,

$$\|f - P_n(.,f)\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} \leq c(p)\,\Omega\left(f_1, {}^{1}/_{n}\right)_{p_1(.)},$$

Olacak şekilde, ${}^{1}/_{z}$ ye göre cebirsel bir

$$P_n\left({}^{1}/_{z}, f\right) := \sum_{k=0}^{n} a_k / \widetilde{F}_k\left({}^{1}/_{z}\right)$$

polinomu ve n den bağımsız $c(p) > 0$ sabiti vardır. Burada $P_n\left(1/_z, f\right)$ polinomları, f in Faber serilerinin n. kısmi toplamları olarak inşa edilir.

$p(.)$ sabit durumunda, Smirnov sınıflarında yaklaşım problemleri detaylı bir şekilde çalışılmıştır. Bu yönde ilk sonuç Γ analitik bir eğri olduğunda Walsh ve Russell [39] tarafından elde edilmiştir. $\Gamma \in \mathfrak{D}$ olduğu durumda, düz ve ters teoremlerin ispatı S.Y Alper tarafından yapılmıştır. Sonrasında bu sonuçların farklı genellemeleri ve geliştirilmişleri ağırlıksız durumda [14, 15, 17, 22-24, 40] ve ağırlıklı durumda [16, 18-21] kaynaklarında çalışılmıştır.

Değişken üslü Lebesgue uzaylarında yaklaşımla ilgili bazı sonuçlar benzer bir düzgünlük modülü kullanılarak ispatsız olarak [6-9] çalışmalarında verilmiştir. Dikkat edilecek olursa, *Teorem 3.3.1* de kullanılan modüller, [6-9] çalışmalarında kullanılan modüllere göre daha duyarlıdır.

4. İKİ BAĞLANTILI BÖLGEDE TANIMLI DEĞİŞKEN ÜSLÜ SMİRNOV SINIFLARINDA RASYONEL FONSİYONLARLA YAKLAŞIM

4.1 Giriş

B, bir Γ Jordan eğrisi ile sınırlı basit bağlantılı bir bölge olsun. $L^p(\Gamma)$ ve $E^p(B)$, $1 \leq p < \infty$ sırasıyla Γ eğrisi üzerinde Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar ve B de analitik fonksiyonların Smirnov sınıfı olsun.

$f \in E^p(B)$ ise f in Γ de hemen her yerde açısal yollar üzerinden limitleri vardır ve bu limit fonksiyonu $f \in L^p(\Gamma)$ olur. $L^p(\Gamma)$ ve $E^p(B)$ uzayları

$$\|f\|_{E^p(B)} := \|f\|_{L^p(\Gamma)} := \left(\int_\Gamma |f(z)|^p |dz|\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty$$

normuna göre Banach uzaylarıdır.

$G \subset \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde iki bağlantılı bölge olsun. G bölgesinin sonlu uzunluklu Γ_1 ve Γ_2 Jordan eğrileri ile sınırlı olduğunu ve Γ_2 nin Γ_1 in içinde olsun.

$G_1^- := Ext\,\Gamma_1$, $G_1 := Int\,\Gamma_1$ ve $G_2^- := Ext\Gamma_2$, $G_2 := Int\Gamma_2$ olsun. Genelliği kaybetmeden $0 \in G_2$ kabul edelim. $\mathbb{T} := \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$, $\mathbb{D} := Int\,\mathbb{T}$, $\mathbb{D}^- := Ext\,\mathbb{T}$ olsun.

İki bağlantılı G bölgesinde Smirnov sınıfını tanımlayalım. f, G de analitik olsun. Sınırları iki sonlu uzunluklu Jordan eğrisinden oluşan $(\Delta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ bölgelerinin bir dizisini alalım. Δ_ν bölgesinin sınırını $\Gamma_\nu$ile gösterelim. G bölgesindeki her kompakt alt kümenin belli bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için $n \geq n_0$ olduğunda Δ_n bölgesi ile örtülsün.

Eğer

$$\lim_{\nu\to\infty} \sup\left\{\int_{\Gamma_\nu} |f(z)|^p |dz|\right\} < \infty$$

koşulu sağlanıyorsa $f \in E^P(G), p \geq 1$ dir denir [41, s. 182].

4.1.1 Tanım: $\boldsymbol{\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathfrak{D}, \Gamma := \Gamma_1 \cup \Gamma_2^-}$ ve G, $\boldsymbol{\Gamma}$ ile sınırlı olsun. $\boldsymbol{E^{p(.)}(G) := \{f \in E^1(G) : f \in L^{p(.)}(\Gamma)\}}$ kümesine G bölgesinde analitik fonksiyonların değişken üslü Smirnov sınıfı denir.

φ ve φ_1 sırasıyla G_1^- ve G_2 bölgelerinin $\mathbb{D}^-$ ye konform dönüşümlerini gösterelim. Bu dönüşümler için aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım:

$$\varphi(\infty) = \infty, \lim_{z\to\infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0 \text{ ve } \varphi_1(0) = 0, \lim_{z\to 0} z.\varphi_1(z) > 0,$$

ψ ve ψ_1 sırasıyla φ ve φ_1 in tersleri olsun. φ ve ψ , Γ_1 ve $\mathbb{T}$ ye sürekli genişletilebilirler, onların φ' ve ψ' türevleri Γ_1 ve $\mathbb{T}$ üzerinde hemen her yerde açısal limit fonksiyonları sırasıyla Γ_1 ve $\mathbb{T}$ üzerinde Lebesgue ölçümüne göre integrallenebilirdir. Benzer şekilde φ_1 ve ψ_1 fonksiyonları Γ_2 ve $\mathbb{T}$ ye sürekli genişletilebilirdirler, onların φ_1' ve ψ_1' türevleri hemen her yerde Γ_2 ve $\mathbb{T}$ üzerinde açısal limitlere sahiptirler ve bu limit fonksiyonlar sırasıyla Γ_2 ve $\mathbb{T}$ üzerinde [28, s.419-438] Lebesgue ölçümüne göre integrallenebilirdirler.

$L_r := \{z \in G_1^- : |\varphi(z)| = r > 1\}$, $L_R := \{z \in G_2 : |\varphi(z)| = R > 1\}$ ve $G_r^- := Ext\ L_r$, $G_r := Int\ L_r$ ve $G_R^- := Ext\ L_R$, $G_R := Int\ L_R$ olsun.

φ, G_r^- de analitik olsun ve $[\varphi(z)]^k$ sonsuzda k. mertebede kutup yerine sahiptir. φ_1 fonksiyonu ise G_R de analitiktir ve $[\varphi_1(z)]^k$ için sıfır noktası k. mertebeden kutup yeridir. Yaklaşan polinomları inşa etmek için bazı açılımlara gerek duyulmaktadır. [18] de kullanılan teknik yöntemler uygulandığında;

$$\frac{\psi'(w)}{\psi(w) - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(z)}{w^{k+1}} \ , z \in G_r\ |w| > \Gamma\ ;$$

$$\frac{w\psi_1'(w)}{\psi_1(w) - z} = \sum_{k=0}^{\infty} - \frac{\tilde{F}_k(z)}{w^{k+1}} \ , z \in G_R^-, w \in \mathbb{D}^-$$

elde edilir. Burada $F_k(z)$ ve $\tilde{F}_k(1/z)$ sırasıyla z ve $1/z$ ye göre polinomlardır.

Vurgulayalım ki $F_k(z)$ ve $\tilde{F}_k(1/z)$ polinomlarından ilk defa [19] çalışmasında bahsedilmiştir.

$F_k(z)$ ve $\tilde{F}_k(1/z)$, her k=1,2,…. için aşağıdaki integral gösterimleri vardır.

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_r} \frac{[\varphi(\zeta)]^k}{\zeta - z}\, d\zeta \ , \qquad z \in G_r \ , \qquad r > 1 \tag{4.1}$$

$$\tilde{F}_k\,(1/z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_R} \frac{[\varphi(\xi)]^k}{\xi - z}\, d\xi \ , \qquad z \in G_R^- \ , \qquad R > 1 \tag{4.2}$$

$F_k(z)$ ve $\tilde{F_k}\left({}^{1}/{}_{z}\right)$ polinomlarına sırasıyla G_1 ve G_2 bölgelerinin Faber polinomları denir. Eğer f , L_R ve L_r eğrileri ile sınırlı iki bağlantılı bölgede analitik ise k=1,2,… için Cauchy integral formülü ve $F_k(z)$ ve $\tilde{F_k}\left({}^{1}/{}_{z}\right)$ polinomlarına bağlı olan seri açılımlarından

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)\, F_k(z) \;+\; \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k(f)\, \tilde{F}_k\left({}^{1}/{}_{z}\right),$$

bağıntısı elde edilir.

Burada

$$a_k(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_1} \frac{f[\psi(w)].\psi'(w)}{w^{k+1}} dw \, , 1 < r_1 < r \, ,$$

$$\tilde{a_k}(f) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R_1} \frac{f[\psi_1(w)].\psi_1'(w)}{w^{k+1}} dw \, , 1 < R_1 < R$$

olarak tanımlanır.

$$R_n(f)(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k(f).F_k(z) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{a_k}(f).\tilde{F_k}\left({}^{1}/{}_{z}\right)$$

rasyonel fonksiyonuna f nin n dereceli Faber-Laurent rasyonel fonksiyonu denir.

4.1.2 Tanım: $\boldsymbol{z \in \Gamma,\ r > 0}$ olsun. $\boldsymbol{\Gamma(z, r)}$ ile $\boldsymbol{z}$ merkezli $\boldsymbol{r}$ yarıçaplı diskin $\boldsymbol{\Gamma}$ eğrisi ile kesişimini gösterelim.

$$\sup_{z \in \Gamma} \sup_{r>0} \frac{|\Gamma(z,r)|}{r} < \infty$$

ise Γ eğrisine Carleson eğrisi denir. $|\Gamma(z,r)|$, Γ eğrisinin uzunluğudur. Carleson eğrilerinin kümesi S ile gösterilir.

Basit bağlantılı bölge sınırlarının farklı özelliklere sahip eğriler olduğunda ağırlıklı ve ağırlıksız Smirnov sınıflarında yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremleri matematik literatürde geniş bir şekilde araştırılmıştır. Γ eğrisinin analitik eğri olduğu durumda bazı sonuçlar Walsh ve Russell tarasından elde edilmiştir [39]. Γ-Dini düzgün eğri olduğu durumda düz ve ters teoremler S. Y. Alper tarafından ispatlanmıştır. Γ, Carleson eğrisi olduğu durumda bu sonuçlar [14] çalışmasında Andersson tarafından genelleştirilmiştir. Ağırlıklı Smirnov sınıflarında ise Carleson eğri durumunda bazı sonuçlar [16, 18-21, 42] çalışmalarında verilmiştir. Bu problemler Smirnov- Orlicz sınıflarında [43-46] çalışmalarında incelenmiştir. Γ-Dini düzgün eğri olduğunda değişken üslü Smirnov sınıflarında yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremleri [12, 47] çalışmalarında ispatlanmıştır. Benzer sonuçlar ispatsız olarak [6], [8] çalışmalarında verilmiştir.

İki Carleson eğrisi ile sınırlı iki bağlantılı bölgede p- Faber Laurent fonksiyonlarının Smirnov sınıflarındaki yaklaşım özellikleri [48] çalışmasında öğrenilmiştir.

Hemen her yerde $z_0 \in \Gamma,\ f \in L^1(\Gamma)$ için $M_\Gamma(f)$ Hardy- Littlewood maksimal fonksiyonu ve $S_\Gamma(f)$ Cauchy Singular integrali aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$S_\Gamma(f)(z_0) := \lim_{r \to 0} \int_{\Gamma \setminus \Gamma(z_0,r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

$$M_\Gamma(f)(z_0) := \sup_{r>0} \frac{1}{r} \int_{\Gamma(z_0,r)} |f(z)||dz|$$

4.1.3 Teorem: [33, 34] $\boldsymbol{\Gamma \in \mathfrak{D}, p \in P_0(\Gamma)}$ olsun. $\boldsymbol{S_\Gamma : f \to S_\Gamma(f), M_\Gamma : f \to M_\Gamma(f)}$ operatörleri $\boldsymbol{L^{p(.)}(\Gamma)}$ uzaylarında sınırlıdır.

$f \in L^{p(.)}(\mathbb{T}), p \in P_0(\mathbb{T}), r = 1,2,3\ldots$ olsun.

$$\Delta_t^r f(w) := \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r+s+1} . \binom{r}{s} . f\left(we^{ist}\right), t > 0$$

$\sigma_h^r f(w) := \frac{1}{h}\int_0^h |\Delta_t^r f(w)| dt$ operatörünü tanımlayalım. $0 < h < \infty$ olsun. *Teorem 4.1.3*'e göre $\sup_{|h|\le\delta} \|\sigma_h^r f(w)\|_{L^{p(.)}(\mathbb{T})} \le c. \|f\|_{L^{p(.)}(\mathbb{T})} < \infty$ ve bundan dolayı aşağıdaki tanımın iyi tanımlı olduğu görülmektedir.

$f \in L^{p(.)}(\mathbb{T}), p \in P_0(\mathbb{T}), \delta > 0$ olsun. $\Omega_r(f,\delta)_{p(.)} := \sup_{|h|\le\delta} \|\sigma_h^r f(w)\|_{L^{p(.)}(\mathbb{T})}$ olarak tanımlanan $\Omega_r(f,.) : [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonuna *f* nin r. düzgünlük modülü denir.

$f \in L^{p(.)}(\Gamma_1)$ için

$$f_0(w) := f[\psi(w)] \tag{4.3}$$

ve $f \in L^{p(.)}(\Gamma_2)$ için

$$f_1(w) := f[\psi_1(w)] \tag{4.4}$$

olsun. Açıktır ki $f_0, f_1 \in L^{p(.)}(\mathbb{T})$.

B, Γ^* Jordan eğrisi ile sınırlı basit bağlantılı bir bölge ve $f \in E^1(B)$ olsun. O halde f in Γ^* de hemen her yerde açısal limiti vardır ve sınır fonksiyonu $L^1(\Gamma^*)$ üzerindedir.

Verilen $f \in L^{p(.)}(\Gamma^*)$ fonksiyonu için;

$$f^+(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^*}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\,\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{\psi'(w)}{\psi(w)-z}f_0(w)\ dw, z \in B,$$

$$f^-(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^*}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{\psi_1'(w)}{\psi_1(w)-z}f_1(w)\,dw\,, z \in B^-,$$

olarak tanımlanan fonksiyonlar sırasıyla B ve B^- de analitiktirler ve $f^-(\infty) = 0$. f^+, f^- fonksiyonlarının Γ de hemen her yerde açısal limitleri vardır ve aşağıdaki formüller de sağlanır:

$$f^+(z) := S_\Gamma(f)(z) + \frac{1}{2}f(z), \qquad f^-(z) := S_\Gamma(f)(z) - \frac{1}{2}f(z) \tag{4.5}$$

$$f(z) = f^+(z) - f^-(z) \tag{4.6}$$

formülü de sağlanır.

4.2 Yardımcı Sonuçlar

c, c_1, c_2, … genellikle birbirinden farklı olup n den bağımsız sabitleri göstereceğiz.

Bu alt bölümde Faber polinomları ve rasyonel fonksiyonların bazı gösterimlerini göstereceğiz. Bu fonksiyonların temel özellikleri [11, 38, 52] kaynaklarında bulunmaktadır. $F_k(z)$ ve $\tilde{F_k}\left({}^1\!/_z\right)$ nin integral gösterimleri tanımlanacak olursa;

Eğer $z \in G_r^-$ ise o halde

$$F_k(z) = [\varphi(z)]^k + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_r} \frac{[\varphi(\zeta)]^k}{\zeta - z} d\zeta, \tag{4.7}$$

ve eğer $z \in$ G ise o halde

$$\tilde{F_k}\left({}^1\!/_z\right) = [\varphi_1(z)]^k - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_R} \frac{[\varphi_1(\xi)]^k}{\xi - z} d\xi \tag{4.8}$$

dir.

Cauchy integral formülünü kullanarak,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi\,, \qquad z \in G$$

dir.

Eğer $z \in G_2$ ya da $z \in G_1^-$ ise o halde

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=0. \qquad (4.9)$$

$$I_1(z):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \text{ ve } I_2(z):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

fonksiyonlarını tanımlayalım.

I_1 fonksiyonu, $z\in G_1$ için I_1^+ ve $z\in G_1^-$ için I_1^- analitik fonksiyonlarını, I_2 fonksiyonu ise $z\in G_2$ ve $z\in G_2^-$ için sırasıyla I_2^+ ve I_2^- analitik fonksiyonlarını tanımlar.

4.2.1 Lemma: [54] $\boldsymbol{\Gamma\in\mathfrak{D}}$, $\boldsymbol{p\in P_0(\Gamma)}$ olsun. Eğer $\boldsymbol{f\in L^{p(.)}(\Gamma)}$ ise $\boldsymbol{f^+\in E^{p(.)}(G)}$ ve $\boldsymbol{f^-\in E^{p(.)}(G^-)}$ dir.

$f_0\in L^{p(.)}(\mathbb{T})$ için *Lemma 4.2.1* $f_0^+\in E^{p(.)}(\mathbb{D})$ ve $f_0^-\in E^{p(.)}(\mathbb{D}^-), f_0^-(\infty)=0$ olmasını gerektirir. Benzer şekilde $f_1\in L^{p(.)}(\mathbb{T})$ ise *Lemma 4.2.1*, $f_1^+\in E^{p(.)}(\mathbb{D})$ ve $f_1^-\in E^{p(.)}(\mathbb{D}^-)$, $f_0^-(\infty)=0$ olmasını gerektirir.

(4.6) ya göre $k=0,1,2..$ için,

$$a_k(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{f_0^+(w)}{w^{k+1}}dw-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{f_0^-(w)}{w^{k+1}}dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{f_0^+(w)}{w^{k+1}}d\,w$$

ve

$$\tilde{a}_k(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{f_1^{+}(w)}{w^{k+1}}dw-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{f_1^{-}(w)}{w^{k+1}}dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{f_1^{+}(w)}{w^{k+1}}dw$$

dir.

Böylece a_k , $k=0,1,2..$ ve $\tilde{a}_k$, $k=1,2,3..$ sırasıyla $f_0^{+}\in E^{p(.)}(\mathbb{D})$ ve $f_1^{+}\in E^{p(.)}(\mathbb{D})$ fonksiyonlarının Taylor katsayılarıdır.

4.2.2 Lemma: Eğer $\boldsymbol{g\in L^{p(.)}(\mathbb{T})}$, $\boldsymbol{p\in P_0(\Gamma)}$ ise $\boldsymbol{r=1,2,3..}$ için $\boldsymbol{\Omega_r(g^{+},.)_{p(.)}\leq c.\Omega_r(g,.)_{p(.)}}$ olacak şekilde bir pozitif c sabiti vardır.

İspat. $g\in L^{p(.)}(\mathbb{T})$ olsun. Öncelikle $\Omega_r(S_{\mathbb{T}}(g),.)_{p(.)}\leq c.\Omega_r(g,.)_{p(.)}$ olduğunu gösterelim.

$\zeta=ue^{ist}$ değişken dönüşümünü ve Fubini teoremini kullanırsak,

$$\sigma_h^r[S_{\mathbb{T}}(g)(w)]=\frac{1}{h}\int_0^h \Delta_t^r S_{\mathbb{T}}\big(g(w)\big)dt$$

$$=\frac{1}{h}\int_0^h\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r+s+1}\binom{r}{s}S_{\mathbb{T}}\left(g\left(we^{ist}\right)\right)dt$$

$$=\frac{1}{h}\int_0^h\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r+s+1}\binom{r}{s}\left\{\frac{1}{2\pi i}(P.V)\int_{\mathbb{T}}\frac{g(\zeta)}{\zeta-we^{ist}}d\zeta\right\}dt$$

$$=\frac{1}{h}\int_0^h\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r+s+1}\binom{r}{s}\left\{\frac{1}{2\pi i}(P.V)\int_{\mathbb{T}}\frac{g\left(ue^{ist}\right)}{ue^{ist}-we^{ist}}e^{ist}du\right\}dt$$

$$=\frac{1}{h}\int_0^h\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r+s+1}\binom{r}{s}\left\{\frac{1}{2\pi i}(P.V)\int_{\mathbb{T}}\frac{g\left(ue^{ist}\right)}{u-w}du\right\}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}(P.V)\int_{\mathbb{T}} \frac{\left\{\frac{1}{h}\int_0^h \sum_{s=0}^{r}(-1)^{r+s+1}\binom{r}{s} g\left(ue^{ist}\right)dt\right\}}{u-w}du$$

$$= \frac{1}{2\pi i}(P.V)\int_{\mathbb{T}} \frac{\left\{\frac{1}{h}\int_0^h \Delta_t^r\big(g(u)\big)dt\right\}}{u-w}du = S_{\mathbb{T}}[\sigma_h^r g(w)]$$

elde edilir.

$h \leq \delta$ olduğunda supremuma ve norma geçersek *Teorem 4.1.3* uygulandığında,

$$\begin{aligned} \Omega_r(S_{\mathbb{T}}(g),.)_{p(.)} &= \sup_{h\leq\delta}\|\sigma_h^r[S_{\mathbb{T}}(g)(w)]\|_{L^{p(.)}(\mathbb{T})} \\ &= \sup_{h\leq\delta}\|S_{\mathbb{T}}[\sigma_h^r(g)(w)]\|_{L^{p(.)}(\mathbb{T})} \\ &\leq \sup_{h\leq\delta} c\|\sigma_h^r g(w)\|_{L^{p(.)}(\mathbb{T})} \\ &\leq c.\sup_{h\leq\delta}\|\sigma_h^r g(w)\|_{L^{p(.)}(\mathbb{T})} = c\Omega_r(g,.)_{p(.)} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Böylece (4.5) ve (4.10) yardımı ile

$$\Omega_r(g^+,.)_{p(.)} \leq c\left\{\Omega_r(g,.)_{p(.)} + \Omega_r(S_{\mathbb{T}}(g),.)_{p(.)}\right\} \leq c.\Omega_r(g,.)_{p(.)}$$

elde edilir.

4.2.3 Lemma: [49] $\boldsymbol{g \in E^{p(.)}(\mathbb{D}), p \in P_0(\Gamma)}$ olsun. Eğer $\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n}\gamma_k(g)w^k}$ g fonksiyonunun orijine göre Taylor serisinin n. kısmi toplamı ise her $\boldsymbol{n = 1, 2, ..}$ için

$$\left\| g(w) - \sum_{k=0}^{n} \gamma_k(g) w^k \right\|_{L^{p(.)}(\mathbb{T})} \leq c\Omega_r\left(g, \frac{1}{n}\right)_{p(.)}, r = 1,2,3,\dots$$

olacak şekilde n den bağımsız pozitif c sabiti vardır.

4.3 Ana Sonuç

4.3.1 Teorem: $\boldsymbol{\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathfrak{D}}$ ve $\boldsymbol{G, \Gamma_1}$ ve $\boldsymbol{\Gamma_2}$ ile sınırlı iki bağlantılı sınırlı bir bölge olsun. $\boldsymbol{\Gamma \coloneqq \Gamma_1 \cup \Gamma_2^-}$ alalım. Eğer $\boldsymbol{f \in E^{p(.)}(G)}$ise her $\boldsymbol{n_0} \in \mathbb{N}$ için

$$\|f - R_n(f)\|_{p(.)} \leq c.\left[\Omega_r\left(f_0, \frac{1}{n}\right)_{p(.)} + \Omega_r\left(f_1, \frac{1}{n}\right)_{p(.)}\right]$$

olacak şekilde pozitif bir c sabiti vardır. Burada $r = 1,2,3,\dots$ ve $R_n(f)$, f fonksiyonun n. Faber- Laurent toplamıdır.

İspat. $p \in P_0(\Gamma), \Gamma: \Gamma_1 \cup \Gamma_2^-, \Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathfrak{D}$ ve $f \in E^p(G)$ olsun. Bu durumda

$$\|f - R_n(f)\|_{L^{p(.)}(\Gamma)} \leq \|f - R_n(f)\|_{L^{p(.)}(\Gamma_1)} + \|f - R_n(f)\|_{L^{p(.)}(\Gamma_2)}$$

$f \in E^{p(.)}$(G) olduğundan $f_0 \in L^{p(.)}(\Gamma_1), f_1 \in L^{p(.)}(\Gamma_2), \zeta \in \Gamma_1, \xi \in \Gamma_2$ için (4.3), (4.4) ve (4.6) kullanıldığında

$$f(\zeta) = f_0^+\big(\varphi(\zeta)\big) - f_0^-\big(\varphi(\zeta)\big) \qquad (4.11)$$

ve

$$f(\xi) = f_1^+\big(\varphi(\xi)\big) - f_1^-\big(\varphi(\xi)\big) \qquad (4.12)$$

Şimdi

$$\|f-R_n(f)\|_{L^{p(.)}(\Gamma_1)} \leq c\left\{\Omega_r\left(f_0,\frac{1}{n}\right)_{p(.)}+\Omega_r\left(f_1,\frac{1}{n}\right)_{p(.)}\right\} \qquad (4.13)$$

ve

$$\|f-R_n(f)\|_{L^{p(.)}(\Gamma_2)} \leq c\left\{\Omega_r\left(f_0,\frac{1}{n}\right)_{p(.)}+\Omega_r\left(f_1,\frac{1}{n}\right)_{p(.)}\right\} \qquad (4.14)$$

doğruluğunun gösterilmesi gerekir.

Öncelikle, (4.13) değerlendirmesini ispatlayalım. $z' \in G_1^-$ olsun. Bu durumda (4.7) ve (4.11) bağıntılarından,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k\, F_k(z') &= \sum_{k=0}^{n} a_k[\varphi(z')]^k + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\sum_{k=0}^{n} a_k[\varphi(\zeta)]^k}{\zeta-z'}d\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k[\varphi(z')]^k + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\sum_{k=0}^{n} a_k[\varphi(\zeta)]^k}{\zeta-z'}d\zeta \\ &\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f_0^+\big(\varphi(\zeta)\big)}{\zeta-z'}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f_0^-\big(\varphi(\zeta)\big)}{\zeta-z'}d\zeta \\ &\quad +\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z'}d\zeta\end{aligned}$$

elde edilir.

$f_0^-\big(\varphi(\zeta)\big) \in E^1(G_1^-)$ olduğu için,

$$-f_0^-\big(\varphi(z')\big) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f_0^-\big(\varphi(\zeta)\big)}{\zeta - z'}\,d\zeta$$

olur.

Bu nedenle,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z') = \sum_{k=0}^{n} a_k[\varphi(z')]^k - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{\left[f_0^+\big(\varphi(\zeta)\big) - \sum_{k=0}^{n} a_k\big(\varphi(\zeta)\big)^k\right]}{\zeta - z'}\,d\zeta - f_0^-\big(\varphi(z')\big) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z'}\,d\zeta \qquad (4.15)$$

dır.

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k\left({}^{1}/_{z'}\right) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k[\varphi_1(\xi)]^k}{\xi - z'}\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f_1^+\big(\varphi_1(\xi)\big) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k[\varphi_1(\xi)]^k}{\xi - z'}\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f_1^-\big(\varphi_1(\xi)\big)}{\xi - z'}\,d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z'}\,d\xi$$

olur.

Şimdi $f_1^-\left(\varphi_1(\xi)\right) \in E^1(G_2)$ fonksiyonuna Cauchy integral formülü uygulanırsa,

$$\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k\left({}^{1}/_{z'}\right)$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z'} d\xi$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f_1^+\left(\varphi_1(\xi)\right) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k [\varphi_1(\xi)]^k}{\xi - z'} d\xi \qquad (4.16)$$

olduğu görülür.

Bu durumda $z' \in G_1^-$ için (4.15), (4.16) ve (4.9) bağıntılarından

$$\sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z') + \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k\left({}^{1}/_{z'}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k [\varphi(z')]^k$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{\left[f_0^+\left(\varphi(\zeta)\right) - \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\varphi(\zeta)\right)^k\right]}{\zeta - z'} d\zeta$$

$$-f_0^-\left(\varphi(z')\right) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f_1^+\left(\varphi_1(\xi)\right) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k [\varphi_1(\xi)]^k}{\xi - z'} d\xi$$

elde edilir.

Şimdi $z' \to z \in \Gamma_1$ olduğunda Γ_1 dışında tüm açısal yollar üzerinden limit alırsak hemen her yerde

$$f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k\left(1/z\right) = \left[f_0^{+}\big(\varphi(z)\big) - \sum_{k=0}^{n} a_k \big(\varphi(z)\big)^k\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[f_0^{+}\big(\varphi(z)\big) - \sum_{k=0}^{n} a_k \big(\varphi(z)\big)^k\right]$$

$$+S_{\Gamma_1}\left[(f_0^{+} \circ \varphi) - \sum_{k=0}^{n} a_k (\varphi)^k\right](z)$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k [\varphi_1(\xi)]^k - f_1^{+}\big(\varphi_1(\xi)\big)}{\xi - z} d\xi \tag{4.17}$$

elde edilir.

Γ_1 için *Teorem 4.1.3* uygulanıp (4.17) bağıntısı ve Minkowski eşitsizliği kullanılacak olursa,

$$\|f - R_n(f)\|_{L^{p(.)}(\Gamma_1)} \leq c\left\{\left\|f_0^{+}(w) - \sum_{k=0}^{n} a_k w^k\right\|_{L^{p(.)}(\mathbb{T})} + \left\|f_1^{+}(w) - \sum_{k=0}^{n} \tilde{a}_k w^k\right\|_{L^{p(.)}(\mathbb{T})}\right\}$$

olduğu görülür.

Burada $a_k$ve $\tilde{a}_k$ katsayıları sırasıyla f_0^{+} ve f_1^{+} fonksiyonlarının orijine göre Taylor katsayılarıdır.

Lemma 4.2.2 ve *lemma 4.2.3* kullanıldığında eşitsizlikten,

$$\|f-R_n(f)\|_{L^{p(.)}(\Gamma_1)} \le c\left\{\Omega_r\left(f_0,\frac{1}{n}\right)_{p(.)} + \Omega_r\left(f_1,\frac{1}{n}\right)_{p(.)}\right\}$$

elde edilir.

$z'' \in G_2$ olsun. Bu durumda (4.8) ve (4.12) ye göre

$$\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\tilde{F}_k\left(1/_{z''}\right) = \sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\big(\varphi_1(z'')\big)^k - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\big(\varphi_1(\xi)\big)^k}{\xi - z''}d\xi$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\big(\varphi_1(z'')\big)^k + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f_1^{+}\big(\varphi_1(\xi)\big) - \sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\big(\varphi_1(\xi)\big)^k}{\xi - z''}d\xi$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f_1^{-}\big(\varphi_1(\xi)\big)}{\xi - z''}d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\xi)}{\xi - z''}d\xi$$

$f_1^{-}\big(\varphi_1(\xi)\big) \in E^1(G_2)$ olduğundan,

$$f_1^{-}\big(\varphi_1(z'')\big) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f_1^{-}\big(\varphi_1(\xi)\big)}{\xi - z''}d\xi$$

ve bu bağıntıdan;

$$\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\tilde{F}_k\left(1/_{z''}\right) = \sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\left(\varphi_1(z'')\right)^k$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f_1^+\left(\varphi_1(\xi)\right)-\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\left(\varphi_1(\xi)\right)^k}{\xi-z''}d\xi$$

$$-f_1^-\left(\varphi_1(z'')\right)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z''}d\xi \tag{4.19}$$

olduğu görülür.

$z''\in G_1$ olsun. Bu durumda (4.1) ve (4.11) bağıntılarından,

$$\sum_{k=0}^{n}a_kF_k(z'')=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\sum_{k=0}^{n}a_k[\varphi(\zeta)]^k}{\zeta-z''}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\left[\sum_{k=0}^{n}a_k\left(\varphi(\zeta)\right)^k-f_0^+\left(\varphi(\zeta)\right)\right]}{\zeta-z''}d\zeta$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f_0^-\left(\varphi(\zeta)\right)}{\zeta-z''}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z''}d\zeta,$$

ve $f_0^-\left(\varphi(\zeta)\right)\in E^1(G_1^-)$ için Cauchy integral formülü uygulandığında,

$$\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\tilde{F}_k(z'')=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z''}d\zeta$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\left[\sum_{k=0}^{n}a_k\left(\varphi(\zeta)\right)^k-f_0^+\left(\varphi(\zeta)\right)\right]}{\zeta-z''}\,d\zeta \tag{4.20}$$

elde edilir.

(4.19), (4.20) ve (4.9) bağıntılarından $z'' \in G_2$ için,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z'') + \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k\left({}^1/_{z''}\right) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \left(\varphi_1(z'')\right)^k$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f_1^+\left(\varphi_1(\xi)\right) - \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \left(\varphi_1(\xi)\right)^k}{\xi - z''} d\xi - f_1^-\left(\varphi_1(z'')\right)$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{\left[\sum_{k=0}^{n} a_k\left(\varphi(\zeta)\right)^k - f_0^+\left(\varphi(\zeta)\right)\right]}{\zeta - z''} d\zeta$$

elde edilir.

$z'' \to z \in \Gamma_2$ olduğunda Γ_2 dışında açısal yollar üzerinden limit alırsak (4.11) e göre Γ_2 de hemen her yerde

$$f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k F_k(z) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \tilde{F}_k\left({}^1/_{z}\right) = f_1^+\left(\varphi_1(z)\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k [\varphi_1(z)]^k - f_1^+\left(\varphi_1(z)\right)\right]$$

$$-S_{\Gamma_2}\left[\sum_{k=0}^{n} \tilde{a}_k (\varphi_1)^k - (f_1^+ \circ \varphi_1)\right](z)$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{\left[\sum_{k=0}^{n} a_k\left(\varphi(\zeta)\right)^k - f_0^+\left(\varphi(\zeta)\right)\right]}{\zeta - z} d\zeta \qquad (4.21)$$

olur.

Γ_2 durumunda *Teorem 4.1.3* uygulandığında (4.17) ve Minkowski eşitsizliklerini de kullanarak,

$$\|f - R_n(f)\|_{L^{p(.)}(\Gamma_2)} \leq c\left\{\left|f_0^+(w) - \sum_{k=0}^{n} a_k w^k\right|_{L^{p(.)}(\mathbb{T})} + \left|f_1^+(w) - \sum_{k=0}^{n} \tilde{a}_k w^k\right|_{L^{p(.)}(\mathbb{T})}\right\}$$

olduğu görülür.

Burada $a_k$ve $\tilde{a}_k$ katsayıları sırasıyla f_0^+ ve f_1^+ fonksiyonlarının Taylor katsayılarıdır.

Sonuç olarak *lemma 4.2.2* ve *lemma 4.2.3* kullanıldığında,

$$\|f - R_n(f)\|_{L^{p(.)}(\Gamma_2)} \leq c\left\{\Omega_r\left(f_0, \frac{1}{n}\right)_{p_0(.)} + \Omega_r\left(f_1, \frac{1}{n}\right)_{p_1(.)}\right\} \quad (4.22)$$

olur.

Burada (4.18) ve (4.22) bağıntılarını dikkate alırsak *Teorem 4.1.5*’in ispatını elde etmiş oluruz.

Teorem 4.3.1, özel halde r=1 durumunda [11] çalışmasında ispatlanmıştır.

p(.)=p sabit olduğu durumda Faber-Laurent rasyonel fonksiyonlarının yaklaşım özellikleri [48] çalışmasında incelenmiştir.

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında değişken üslü Smirnov sınıflarında yaklaşım teorisinin düz teoremleri araştırılmıştır.

1. Dini düzgün eğrilerde tanımlı $L^{p(\cdot)}(\Gamma)$ değişken üslü Lebesgue uzaylarında Faber polinomları ve Faber rasyonel fonksiyonları yardımı ile inşa edilen genelleşmiş polinomların yaklaşımı ile ilgili bilinen bir düz teoremin ispatı verilmiştir.

2. İki bağlantılı bölgelerde değişken üslü Smirnov sınıfları tanımlanmıştır.

3. Değişken üs fonksiyonlarının belli koşulları sağladığı taktirde iki bağlantılı bölgelerde tanımlı Smirnov sınıflarında yaklaşım problemleri incelenmiş ve bir düz teorem ispatlanmıştır.

6. KAYNAKLAR

[1] Bary N. K., *A Treatise on trigonometric series, Volume I-II*, New York: Pergamon Press, (1964).

[2] DeVore Ronald A. and Lorentz George G., *Constructive Approximation*, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, (1993).

[3] Timan, A. F., *Theory of Approximation of Functions of a Real Variable*, Newyork: Macmillan, (1963).

[4] Suetin, P.K., *Polynomials orthogonal over a region and Bieberbach polynomials. Proc. Steklov Inst. Math, 100*, Providence, RI: American Mathematical Society, (1974).

[5] Sharapudinov, I.I., "Some problems of theory of approximation in the Lebesgue spaces with variable exponent", *Vladikavkaz* (2012).

[6] Israfilov, D., Kokilashvili, V. and Samko, S., "Approximation in weighted Lebesgue and Smirnov spaces with variable exponents, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, 143, 25–35, (2007).

[7] Guven, A. and Israfilov, D.M., "Trigonometric approximation in generalized Lebesgue spaces Lp(·)", *J. Math. Inequal.*, 4 (2), 285–299, (2010).

[8] Akgun, R., "Polynomial approximation of functions in weighted Lebesgue and Smirnov spaces with nonstandard growth", *Georgian Math. J.*, 18, 203–235, (2011).

[9] Akgun, R., "Trigonometric approximation of functions in generalized Lebesgue spaces with variable exponent", *Ukrainian Math. J*, 63 (1), 3–23, (2011).

[10] Akgün, R. and Kokilashvili, V., "On converse theorems of trigonometric approximation in weighted variable exponent Lebesgue spaces", *Banach J. Math. Anal*, 5 (1), 70-82, (2011).

[11] Kinj, A., Ali, M. and Mahmoud, S., “Aproximation by rational functions in Smirnov clsses with variable exponent”, *Arabian Journal of Mathematics*, 37 (1), 79-86, (2017).

[12] Israfilov, D.M. and Testici, A., “Approximation in Smirnov classes with variable exponent”, *Complex Var. Elliptic Equ.*, 60(9), 1243–1253, (2015).

[13] Alper, S. Y., “Approximation in the mean of analytic functions of class Ep. in: Investigations on the Modern Problems of the Function Theory of a Complex Variable”, *Gos. Izdat. Fiz.-Mat. Lit*, Moscow, 272–286 (in Russian), (1960).

[14] Andersson, J.E., “On the degree of polynomial approximation in Ep(D)”, *J. Approx., Theory.*, 19, 61–68, (1977).

[15] Cavus, A., Israfilov, D.M., “Approximation by Faber-Laurent rational functions in the mean of functions of the class Lp (Γ) with 1 < p < ∞”, *Approx. Theory Appl.*, 11 (1), 105–118 (1995).

[16] Ibragimov, I.I. and Mamedkhanov, J.I., “A constructive characterization of a certain class of functions”, *Dokl.Akad.Nauk SSSR*, 223, 35–37, (1975), *Soviet Math Dokl.*, 4, 820–823, (1976).

[17] Ibragimov, I.I. and Mamedkhanov, J.I., Direct and inverse approximation theorems in the complex domain, in: The Theory of the Approximation of Functions, (*Proc. Internat. Conf., Kaluga, 1975) (Russian)*, Nauka, Moscow, pp. 190–194 (in Russian), (1977).

[18] Israfilov, D.M., “Approximation by p-Faber polynomials in the weighted Smirnov class Ep (G,ω) and the Bieberbach polynomials”, *Constructive Approximation*, 17, 335–351, (2001).

[19] Israfilov, D.M., “Approximation by p-Faber-Laurent Rational functions in weighted Lebesgue spaces”, *Czechoslovak Math. J.*, 54 (129), 751–765, (2004).

[20] Israfilov, D.M. and Guven, A., “Approximation in weighted Smirnov classes”, *East J. Approx.*, 11 (1), 91–102, (2005).

[21] Israfilov, D.M. and Testici, A., “Improved converse theorems in weighted Smirnov spaces”, *Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb.*, 40 (1), 44–54, (2014).

[22] Jafarov, S.Z., “Approximation by rational functions in Smirnov–Orlicz classes”, *J. Math. Anal. Appl*., 379, 870–877, (2011).

[23] Kokilashvili, V.M., “On approximation of analytic functions from Ep classes, Trudy Tbiliss”, *Mat. Inst. im. Razmadze Akad. Nauk Gruzin. SSR*, 34, 82–102 (in Russian), (1968).

[24] Kokilashvili, V.M., “The direct theorem on mean approximations of analytic functions”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 185, 749–752 (in Russian), (1969).

[25] Pommerenke, C., *Univalent functions*, Vandenhoeck & Ruprect, (1973).

[26] Gonzalez, M. O., *Classical Complex Analysis*, Marcel Dekker, Inc., (1992).

[27] Diening, L. and Ruzicka, M., “Calderon-Zygmund operators on generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ and problems related to fluid Dynamics”, *J. Reine Angew. Math.* 563, 197-220, (2003).

[28] Goluzin, G.M., “Geometric Theory of Functions of a Complex Variable”, *Translation of Mathematical Monographs*, AMS, (1969).

[29] Sharapudinov, I.I., “Approximation of functions in $L_{2\pi}^{p(x)}$ by trigonometric polynomials”, *Izv. Math.*, 77 (2), 407–434, (2013).

[30] Cruz-Uribe, D.V. and Fiorenza, A., *Variable Lebesgue Spaces Foundation and Harmonic Analysis*, Birkhäsuser, (2013).

[31] Diening, L., Harjulehto, P., Hästö, P. and Michael Ruzicka, M., *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Springer, Heidelberg, Dordrecht, London, New York, (2011).

[32] Karlovich, A. Yu. and Spitkovsky, I.M., “The Cauchy singular operator on weighted variable Lebesgue spaces”, *Operator Theory: Advance and Appl., 236*, Basel: Springer, 275–291, (2014).

[33] Kokilashvili, V.M., Samko, S.G., "Operators of harmonic analysis in weighted spaces with non-standard growth", *J. Math. Anal. Appl*, 352 (1), 15-34, (2008).

[34] Kokilashvili, V., Samko, S., "Weighted boundedness in Lebesgue spaces with variable exponents of classical operators on Carleson curves", *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, 138, 106–110, (2005).

[35] Kokilashvili, V., Paatasvili, V. and Samko, S., "Boundary Value Problems For Analytic Functions In The Class of Cauchy-type Integrals With Density In $L^{p(\cdot)}$ (Γ)", *Boundary Value Problems,* 2005, Hindawi Publ. Cor., 43–71, (2005).

[36] Sharapudinov, I.I., "Some questions of approximation theory in the spaces Lp(x) (E)", *Anal. Math.* 33 (2), 135–153, (2007).

[37] Warschawski, S., "Uber das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktionen bei konformer Abbildung", *Math. Z.*, 35, 321–456, (1932).

[38] Suetin, P.K., *Series of Faber Polynomials,* Nauka Moscow, New York: Gordon and Breach Science Publishers, (1998).

[39] Walsh, J.L. and Russel, H.G., "Integrated continuity conditions and degree of approximation by polynomials or by bounded analytic functions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 92, 355–370, (1959).

[40] Dyn'kin, E.M., "*The rate of polynomial approximation in complex domain", in: Complex Analysis and Spectral Theory*. Leningrad, Berlin: Springer-Verlag, 90–142, (1979/1980).

[41] Duren, P. L., *Theory of H^p spaces*, Academic Press, (1970).

[42] Israfilov, D. M. and Testici, A., "Approximation in weighted Smirnov classes", *Complex variable and elliptic equations*, 60 (1), 45-58, (2015).

[43] Kokilashvili, V.M., "On analytic functions of Smirnov-Orlicz classes", *Studia Math.*, 31, 43-59, (1968).

[44] Jafarov, S.Z., "Approximation by polynomials and rationals functions in Orlicz classes", *J. Comput. Anal. Appl.*, 13, 953-962, (2011).

[45] Jafarov, S.Z., “The inverse theorem of approximation theory in Smirnov Orlicz spaces”, *Math. Ineq. Appl.*, 12, 835-844, (2012).

[46] Akgun, R. and Israfilov, D.M., “Approximation and moduli of fractional orders in Smirnov Orlicz Classes”. *Glas. Math.*, 43, 121-136, (2008).

[47] Israfilov, D. M. and Testici, A., “Multiplier and Approximation Theorems in Smirnov Classes with Variable Exponent”, *Turkish Journal of Mathematics,* 42, 1442-1456, (2018).

[48] Jafarov, S.Z., “On approximation of functions by p-Faber-Laurent rational functions”, *Complex variable and elliptic equations*, 60 (3), 416-428, (2015).

[49] Israfilov, D. M. and Testici, A.," Approximation in Weighted Generalized Grand Lebesgue spaces”, *Colloquium Mathematicum, Institute of Mathmatics Polish Academy of Sciences*, 143 (1), 113-126, (2016).

[50] Fiorenza, A., “Duality and reflexivity in grand Lebesgue spaces”, *Collect. Math.,* 51 (2), 131-148, (2000).

[51] Markushevich, A. I., *Analytic Function Theory Vols I and II*, Nauka Moscow: Izdatelstvo, (1968).

[52] Gaier, D., *Lectures on complex approximation*, Boston-Stuttgart: Birkäuser-Verlag, (1987).

[53] Israfilov, D. M. and Testici, A., “Approximation by Faber Laurent Rational Functions in Lebesgue spaces with variable exponent”, *Indagationes Mathematicae*, 27 (4), 914-922, (2016).

[54] Israfilov, D. M. and Testici, A., “Approximation in Weighted Generalized Grand Smirnov Classes”, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 54 (4), 471-488, (2017).

[55] Greco, L., “A remark on equality det *Df=Det Df”, Differential Integral Equations*, 6, 1089-1100, (1993).

[56] Greco, L., Iwaniec, T. and Sbordone, C., “Inverting the harmonic operator”, *Manuscripta Math*., 92, 249-258, (1197).

[57] Carozza, M. and Sbordone, C., “The distance to L^∞ in some function spaces and applications”. *Differential Integral Equations*, 10, 599-607, (1997).

[58] Iwaniec, T. and Sbordone, C., “On integrability of the Jacobian under minimal hypotheses”, *Arch. Rational Mechanics Anal.*, 119, 129-143, (1992).

[59] Kokilashvili, V., “Boundedness criteria for singular integrals in weighted grand Lebesgue spaces”, *Jour. Math. Sci.*, 170 (1), 20-33, (2010).

[60] Markushevich, A.I., *Theory of Functions of a Complex Variable III*, Prentice Hall, Inc., (1967).