T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MUTLAK MÖBIUS BÖLEN FONKSİYONU VE ÖZELLİKLERİ

ÜMİT SARP

DOKTORA TEZİ

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ (Tez Danışmanı)**
Prof. Dr. Recep ŞAHİN
Prof. Dr. Fırat ATEŞ
Prof. Dr. Gökhan SOYDAN
Doç. Dr. Musa DEMİRCİ

BALIKESİR, ARALIK - 2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

Ümit SARP tarafından hazırlanan "MUTLAK MÖBIUS BÖLEN FONKSİYONU VE ÖZELLİKLERİ" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 25 Aralık 2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ Balıkesir Üniversitesi	
Üye Prof. Dr. Recep ŞAHİN Balıkesir Üniversitesi	
Üye Prof. Dr. Fırat ATEŞ Balıkesir Üniversitesi	
Üye Prof. Dr. Gökhan SOYDAN Bursa Uludağ Üniversitesi	
Üye Doç. Dr. Musa DEMİRCİ Bursa Uludağ Üniversitesi	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "Mutlak Möbius Bölen Fonksiyonu ve Özellikleri" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Ümit SARP

Bu tez çalışması Balıkesir Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından 2017/20 no'lu proje ile desteklenmiştir.

ÖZET

MUTLAK MÖBIUS BÖLEN FONKSİYONU VE ÖZELLİKLERİ
DOKTORA TEZİ
ÜMİT SARP
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. SEBAHATTİN İKİKARDEŞ)
(EŞ DANIŞMAN: PROF. DR. DAEYEOUL KIM)
BALIKESİR, ARALIK - 2019

Bu tezde Dirichlet çarpımı yardımıyla bir toplam fonksiyonu olan Mutlak Möbius Bölen Fonksiyonu $U(n)$ tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir. İlk olarak $U(n)$ ve Euler Totient $\varphi(n)$ Fonksiyonu arasındaki özellikler araştırılmıştır. Daha sonra $U(n)$ ile Fermat asalları arasındaki ilişki araştırılmış ve bazı sonuçlar elde edilmiştir. Ardından $U(n)$ yardımıyla şifreleme alanında kullanılan bazı denklemler çözülmüş ve son olarak Möbius-Stirling sayıları, $G_n(x)$ kuvvet serileri ve $V(n)$ toplam fonksiyonu tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir.

Bu tez dokuz bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; Möbius Fonksiyonu $\mu(n)$, Euler Totient Fonksiyonu $\varphi(n)$ gibi aritmetik fonksiyonlar tanıtılmış, çeşitli sayı kümeleri ile ilgili aritmetik fonksiyonların sonuçları değerlendirilmiş ve genel bir literatür özeti yapılmıştır. İkinci bölümde, temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Ayrıca aritmetik fonksiyonlar hakkında bazı özellikler açıklanmıştır. Üçüncü bölümde; Mutlak Möbius Bölen Fonksiyonu $U(n)$'nin tanımı yapılmış, $U(n)$ üzerinden $U_i(n)$ ve $Ord(n)$ fonksiyonları gibi diğer tanımlar verilmiş ve Mutlak Möbius Bölen Fonksiyonunun çokgen şekilleri açıklanarak örneklendirilmiştir. Dördüncü bölümde, $U(n)$ fonksiyonunun özellikleri açıklanmış ve $\varphi(n)$ fonksiyonu ile benzerlik ve farklılık gösteren yönleri incelenmiştir. Ayrıca $Ord(n)=2$ olacak biçimde $U(n)$ fonksiyonu yardımıyla oluşturulan çokgen şekillerin sınıflandırılması yapılmıştır. Beşinci bölümde, kriptoloji için önemli olarak değerlendirilen $\varphi(n)=\varphi(n+1)$ ifadesinden yola çıkarak $\varphi(n)=\varphi(n+1)=U(n)=U(n+1)$ eşitlikleri incelenmiş ve çeşitli sonuçlara ulaşılmıştır. Altıncı bölümde, $U(n)$ yardımıyla $G_n(x)$ kuvvet serileri tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir. Yedinci bölümde, Möbius-Stirling sayıları tanımlanmış ve bazı özellikleri açıklanmıştır. Sekizinci bölümde, $U(n)$ yardımıyla $V(n)$ toplam fonksiyonu tanımlanmış ve özellikleri verilmiştir. Dokuzuncu bölümde; tez genelinde elde edilen sonuçlar özetlenmiş ve bazı önerilere yer verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Mutlak Möbius Bölen Fonksiyonu, Möbius Fonksiyonu, bölen fonksiyonu, Euler Totient Fonksiyonu, Stirling sayıları.

Bilim Kodları : 20401 Sayfa Sayısı: 88

ABSTRACT

ABSOLUTE MÖBIUS DIVISOR FUNCTION AND PROPERTIES
PH.D. THESIS
ÜMİT SARP
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. SEBAHATTİN İKİKARDEŞ)
(CO-SUPERVISOR: PROF. DR. DAEYEOUL KIM)
BALIKESİR, DECEMBER - 2019

In this thesis, we introduce Absolute Möbius Divisor Function $U(n)$ which is a total function is defined by Dirichlet product, and its properties are examined. First, some properties between $U(n)$ and Euler Totient Function have been investigated. Then, the relationship between $U(n)$ and Fermat prime numbers have been investigated and some results have been obtained. Also, with the help of $U(n)$, some equations are solved and finally Möbius-Stirling numbers, $G_n(x)$ power series and $V(n)$ function are defined and examined.
This thesis consists of nine chapters.
In the first chapter; arithmetic functions such as Möbius Function $\mu(n)$, Euler Totient Function $\varphi(n)$ and related results have been given, the results of arithmetic functions related to various number sets have been evaluated, and a general literature abstract has have been given. In the second chapter, basic definitions and theorems have been given and examined. Also some properties about arithmetic functions have been explained. In the third chapter; The absolute Möbius Divisor Function $U(n)$ has been defined, other definitions such as $U_i(n)$ and $Ord(n)$ functions have been given and the polygonal shapes of the absolute Möbius Divisor Function have been explained and exemplified. In the fourth chapter, The properties of the $U(n)$ function have been explained and the similarities and the different aspects of $\varphi(n)$ function have been examined. Also for $Ord(n)=2$, polygonal shapes have been classified by the help of $U(n)$ function. In the fifth chapter, $\varphi(n)=\varphi(n+1)=U(n)=U(n+1)$ equations were examined based on $\varphi(n)=\varphi(n+1)$ expression which has been considered important for cryptology. In the sixth chapter, $G_n(x)$ power series have been defined and their properties have been examined with the help of $U(n)$. In the seventh chapter, Möbius-Stirling Numbers have been defined and some of their properties have been explained. In the eighth chapter, $V(n)$ total function has been defined and its properties have been given. In the ninth chapter, the results obtained throughout the thesis have been summarized and some suggestions have been given.

KEYWORDS: Absolute Möbius Divisor Function, Möbius Function, divisor function, Euler Totient Function, Stirling numbers.

Science Codes : 20401 Page Number : 88

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

TABLO LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{U(n)}$	:	Mutlak Möbius Bölen Fonksiyonu
$\boldsymbol{U_i(n)}$	:	Mutlak Möbius Bölen Fonksiyonu adımları
$\boldsymbol{U_{(r)}(n)}$	:	Genelleştirilmiş Mutlak Möbius Bölen Fonksiyonu
$\boldsymbol{Ord(n)}$	:	Sıra operatörü
$\boldsymbol{\mu(n)}$	:	Möbius Fonksiyonu
$\boldsymbol{\varphi(n)}$	:	Euler Totient Fonksiyonu
$\boldsymbol{\tau(n)}$	:	Pozitif bölen sayısı
$\boldsymbol{\sigma(n)}$	:	Pozitif bölenlerin toplamı
$\boldsymbol{\omega(n)}$	:	Asal çarpanların sayısı
$\boldsymbol{C(n)}$	:	Shaphiro Fonksiyonu
$*$	:	Dirichlet Çarpımı
$\boldsymbol{K(x)}$	:	Polinom
$\boldsymbol{der(K(x))}$	:	$K(x)$ polinomunun derecesi
$\boldsymbol{Sup(x_1,\ldots,x_r)}$	:	$x_1,\ldots,x_r$ ’lerin maksimumu
$\boldsymbol{G_n(x)}$	:	Mutlak Möbius bölen fonksiyonu için kuvvet serisi
$\boldsymbol{P_{n,m}(x)}$	:	Möbius-Stirling sayılarının üreteç fonksiyonu
$\boldsymbol{V(n)}$	:	Mutlak Möbius bölen toplam fonksiyonu
$\boldsymbol{\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}}$	:	Birinci tip Stirling sayıları
$\boldsymbol{\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_n}$	:	Möbius-Stirling sayıları
$\boldsymbol{V_n}$	:	n tarafından üretilen $m-$gen şeklin noktalar kümesi
$\boldsymbol{A(n)}$	:	Möbius $m-$gen şeklin alanı
$\boldsymbol{B(n)}$	:	Euler Totient $m'-$gen şeklin alanı
#	:	Bir kümenin eleman sayısı

ÖNSÖZ

Bu çalışmada sadece akademik bilgi ve birikimleriyle değil ayrıca daha birçok konuda her zaman desteğini yanımda hissettiğim danışman hocam Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ'e ve tezin hazırlık aşamasında ve daha birçok konuda yardımlarını benden esirgemeyen eş danışman hocam Prof. Dr. Daeyeoul KIM'e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Beni yetiştiren, desteklerini hep yanımda hissettiğim bana her zaman inanmış ve güvenmiş aileme, hocalarıma ve yakın arkadaşlarıma da teşekkürlerimi sunarım.

Balıkesir, 2019 **Ümit SARP**

1. GİRİŞ

Aritmetik fonksiyonların özelliklerini incelemek ve aralarında var olan ilişkileri bulmak sayılar teorisinde önemli bir yere sahiptir. Bu fonksiyonlardan bazıları Möbius Fonksiyonu, Euler Totient Fonksiyonu ve bölen fonksiyonudur. Bu fonksiyonlar ile çokgen sayılar, Fermat sayıları, Mersenne sayıları ve Stirling sayıları arasında sıkı bir ilişki vardır. Bunlar açıklanacak olursa ilk olarak Euler Totient $\varphi-$ Fonksiyonu'ndan başlanabilir.

Euler Totient $\varphi-$ Fonksiyonu'nun bilinen birçok özelliği ve bu özellikler yardımıyla elde edilmiş formülleri vardır [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. Bunlardan en önemlilerinden biri $\varphi(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}$ eşitliğidir [8]. Shaphiro 1943 yılında Euler Totient Fonksiyonunun sınıflamaları üzerine $C(n)$ fonksiyonunu tanımlamıştır [9].

Kim ve Bayad 2017 yılında tek bölen fonksiyonun toplamı ile ilgili $S(n)=\sum_{d|n,\, 2\nmid d} d$ fonksiyonunu tanımlamışlar ve bu fonksiyon üzerinden n sayısının adımlarını oluşturan adım fonksiyonlarını, mertebe operatörünü, konveks ve konkav çokgen şekillerini ve alanlarını incelemişlerdir. Ayrıca elde ettikleri sonuçların Mersenne asal sayıları ile olan ilişkilerini açıklamışlardır [10].

Möbius 1832 yılında $\sum_{n}\mu(n)\frac{\log n}{n}=-1$ varsayımında bulunmuştur ve Landau 1899'da Möbius varsayımını ispatlamıştır [11]. Möbius varsayımının ispatına farklı bir yaklaşım 2013 yılında Bayad ve Goubi tarafından verilmiştir [12].

Shapiro 1943 yılında $k\geq 2$ ve n bir tamsayı olmak üzere $\varphi_0(n)=n$, $\varphi_1(n)=\varphi(n)$, $\varphi_k(n)=\varphi(\varphi_{k-1}(n))$, $m>2$ bir tam sayı olmak üzere $C(n)$ fonksiyonunu $\varphi_m(n)=2$ olacak biçimde ifade etmiş ve $C(n)=m$ biçiminde göstermiştir [9].

Apostol, ilk baskısı 1976 yılında olan kitabında f ve g aritmetik fonksiyonlarının *Dirichlet Çarpımını* $(f*g)(n)=\sum_{d|n}f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$ olarak tanımlamıştır [8]. Ayrıca Dirichlet Çarpımı yardımıyla, f çarpımsal bir aritmetik fonksiyon ise $\sum_{d|n}\mu(d)f(d)=\prod_{p|n}(1-f(p))$ eşitliği sağlanır [8].

Kendisi hariç pozitif tam bölenlerinin toplamı kendisine eşit olan sayılara *mükemmel sayı (perfect number)* denir. Bu durumda kendisi ile birlikte düşünüldüğünde bir mükemmel sayı, bütün pozitif tam bölenlerinin toplamının yarısına eşittir $\sigma(n) = 2n$ [13].

Pollack ve Shevelev 2012 yılında "d sayısı, n pozitif tam sayısının bir böleni olmak üzere $\sigma(n) = 2n + d$ eşitliğini sağlayan sayılara *yakın mükemmel sayı (near-perfect number)* denir" tanımını vermiştir [13].

Birinci tip Stirling sayısı $S_1(n,k)$; n elemanlı kümenin k devirlerinin sayısı olarak tanımlanır. Ayrıca $S_1(0,0) = 1$ ve $k > 0$ için $S_1(0,k) = 0$ 'dır [14].

Fransız matematikçi Pierre de Fermat, 1640 yılında arkadaşına yazdığı bir mektupta $2^{2^n} + 1$ formundaki sayıların hepsinin asal olduğu varsayımında bulunmuştur [15, 16]. Ardından 1700'lü yıllarda Alman matematikçi Leonhard Paul Euler, bu durumun aksini ispatlayarak bir Fermat sayısı olan $f_5 = 2^{32} + 1$'i $2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$ şeklinde çarpanlarına ayırmış ve $2^{2^n} + 1$ formundaki sayıların bileşik sayılar da olabildiğini göstermiştir [15, 17]. Zamanla $2^{2^n} + 1$ formundaki asal sayılara *Fermat asal sayısı* denilmiştir. Doğal olarak Euler'in ispatın ardından "Fermat asal sayıları sonlu mu sonsuz mu?" sorusu ortaya çıkmıştır. Sorunun cevabı hâlâ keşfedilmeyi bekleyen açık bir problemdir. Günümüzde keşfedilmiş beş adet Fermat asal sayısı bulunmaktadır.

Fermat sayılarına benzer olarak Fransız matematikçi Marin Mersenne'nin adının verildiği *Mersenne sayıları*; $2^n - 1$ şeklinde tanımlanır. Fermat sayılarından farklı olarak sonucu sadece asal olan sayılar, Mersenne sayıları olarak ifade edilmiştir [15]. *The Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS)*'in yaptığı son çalışmalar ile 7 Aralık 2018'de keşfedilmiş en büyük Mersenne asal sayısı $2^{82,589,933} - 1$'dir [18]. Ayrıca bu sayı günümüzde bilinen en büyük asal sayıdır.

Alman matematikçi Carl Friedrich Gauss 1796 yılında Öklid Geometrisi'ndeki sadece cetvel ve pergel yardımıyla oluşturulan düzgün çokgenler ile Fermat asal sayıları arasında ilginç bir ilişki olduğunu keşfetmiştir. Bu teorem günümüzde *Gauss Teoremi* olarak bilinmektedir [15].

Ratat, $\varphi(n) = \varphi(n+1)$ eşitliğini sağlayan n pozitif tamsayılarını araştırmıştır [19]. Araştırmanın sonucuna göre $n = 1,\ 3,\ 15,\ 104$ değerleri $\varphi(n) = \varphi(n+1)$ eşitliğini sağlamaktadır. Ardından Goormaghtigh, 1918 yılında Ratat'ın araştırmasına ek olarak $n = 164,\ 194,\ 255,\ 495$ değerlerinin de aynı eşitliği sağladığını kanıtlamıştır [20].

Klee [21], Moser [4], Lal ve Gillard [22], Ballew, Case ve Higgins [23], Baillie [24, 25] ve Erdös, Pomerance ve Sarközy [26], $\varphi(n) = \varphi(n+k)$ ve $\sigma(n) = \sigma(n+k)$ eşitliklerini sağlayan değerler üzerine çalışmışlardır. Öte yandan $\sigma(n) = \sigma(n+1)$ ifadesi sağlayan değerlerinin sonsuz olup olmadığı açık bir problemdir ([2] s:103, [6] s:166).

Bu çalışma dokuz bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, diğer bölümlerde yer alan çalışmalar için genel bir literatür özeti yapılmıştır.

İkinci bölümde, temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; Mutlak Möbius Bölen Fonksiyonu $U(n)$'in tanımı yapılmış, aynı fonksiyon üzerinden $U_i(n)$ ve $Ord(n)$ fonksiyonları gibi diğer tanımlar verilmiş ve Mutlak Möbius Bölen Fonksiyonunun çokgen şekilleri açıklanmıştır.

Dördüncü bölümde, $U(n)$ fonksiyonunun özellikleri açıklanmış ve $\varphi(n)$ fonksiyonu ile benzerlik ve farklılık gösteren yönleri incelenmiştir. Ayrıca $Ord(n) = 2$ olacak biçimde $U(n)$ fonksiyonu yardımıyla oluşturulan çokgen şekillerin sınıflandırılması yapılmıştır.

Üçüncü ve dördüncü bölümlerde Mutlak Möbius Bölen Fonksiyonu, Kim ve Bayad'ın [10] makalesindeki $S(n) = \sum_{d \mid n,\ 2 \nmid d} d$ fonksiyonu ve Shaphiro 'nun [9] makalesindeki $C(n)$ fonksiyonu ile karşılaştırılmıştır.

Beşinci bölümde, [4, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 27]'de yer alan çalışmalara ek olarak $\varphi(n) = \varphi(n+1) = U(n) = U(n+1)$ eşitlikleri incelenmiş ve çeşitli sonuçlara ulaşılmıştır.

Altıncı bölümde, $G_n(x)$ kuvvet serileri tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir.

Yedinci bölümde, Möbius-Stirling sayıları $\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_n$ tanımlanmış ve bazı özellikleri açıklanmıştır.

Sekizinci bölümde, $U(n)$ yardımıyla $V(n)$ toplam fonksiyonu tanımlanmış ve özellikleri verilmiştir.

Son olarak dokuzuncu bölümde, çalışma genelinde elde edilen sonuçlar özetlenmiş ve araştırılabilecek benzer çalışmalar için önerilere yer verilmiştir.

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Tezin bu bölümünde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan literatürde bilinen bazı temel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1 Tanım a ve b tamsayı olmak üzere $a = bc$ olacak şekilde bir c tamsayısı bulunabiliyorsa b, a 'yı böler denir ve $b | a$ biçiminde gösterilir.

2.2 Tanım Pozitif tam sayılar kümesinden kompleks sayılar kümesinin herhangi bir alt kümesine tanımlanan fonksiyona **aritmetik fonksiyon** denir [8].

2.3 Tanım $n, m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $(n,m)=1$ için $f(mn) = f(m)f(n)$ koşulunu sağlayan aritmetik fonksiyona **çarpımsal fonksiyon** denir [8].

2.4 Tanım $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere n ‘nin bütün pozitif bölenlerinin sayısı $\tau(n)$, bu bölenlerin toplamı $\sigma(n)$ ve asal çarpanlarının sayısı $\omega(n)$ ‘dir.

2.1 Teorem $\tau(n)$ ’nin bir tek sayı olması için gerek ve yeter şart n ’nin bir tamsayının karesi olmasıdır [8].

2.5 Tanım n bir pozitif tamsayı olmak üzere;

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \ \ ise, \\ 0, & p^2 | \ n, \ \ p \ \ asal \ \ ise, \\ (-1)^r, & n = p_1 p_2 \dots p_r \ \ ise, \ burada \ i \neq j \ \ için \ \ p_i \neq p_j, \end{cases} \tag{2.1}$$

fonksiyonuna **Möbius $\boldsymbol{\mu}-$ Fonksiyonu** denir [8].

2.1 Sonuç Möbius Fonksiyonu $\mu(n)$, bir aritmetik fonksiyondur.

2.1 Örnek $\mu(30) = \mu(2.3.5) = (-1)^3 = -1$, $\mu(40) = \mu(2^3.5) = 0$ ’dır.

2.2 Teorem p bir asal sayı olmak üzere $\mu(p) = -1$ ve $k \geq 2$ tamsayısı için $\mu(p^k) = 0$ ’dır.

2.3 Teorem μ fonksiyonu çarpımsal bir fonksiyondur [8].

2.6 Tanım $n \geq 1$ bir tam sayı olsun $(k,n) = 1$ ve $1 \leq k < n$ koşulunu sağlayan k tamsayılarının sayısını veren fonksiyona **Euler’in Totient Fonksiyonu** denir ve $\varphi(n)$ ile gösterilir. $\varphi(1) = 1$ olarak tanımlanır.

2.2 Sonuç Euler Totient Fonksiyonu $\varphi(n)$, bir aritmetik fonksiyondur.

2.2 Örnek $\varphi(2)=1$, $\varphi(3)=2$ ve $\varphi(6)=2$'dir.

2.4 Teorem $n>1$ olan bir tamsayının asal olması için gerekli ve yeterli şart $\varphi(\mathrm{n})=n-1$ olmasıdır [8].

2.5 Teorem φ fonksiyonu çarpımsal bir fonksiyondur [8].

2.6 Teorem n bir pozitif tam sayı, μ Möbius Fonksiyonu, φ Euler'in Totient Fonksiyonu ve d'ler, n'nin pozitif bölenleri olmak üzere;

$$\varphi(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d} \tag{2.2}$$

eşitliği sağlanır [8].

2.7 Tanım f ve g aritmetik fonksiyonlarının **Dirichlet çarpımı,**

$$(f*g)(n)=\sum_{d|n}f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır [8].

2.7 Teorem n bir pozitif tam sayı, f çarpımsal bir aritmetik fonksiyon, p'ler n'nin farklı asal bölenleri ve d'ler, n'nin pozitif bölenleri olmak üzere;

$$\sum_{d|n}\mu(d)f(d)=\prod_{p|n}\left(1-f(p)\right) \tag{2.4}$$

eşitliği sağlanır [8, 28].

2.3 Örnek $f(n)=n$ olarak alınırsa *2.4 Teorem*'den

$$\varphi^{-1}(n)=\prod_{p|n}(1-p) \tag{2.5}$$

elde edilir ki, bu eşitlik Dirichlet çarpımını yardımıyla elde edilmiş Euler Totient Fonksiyonu'nun tersidir [28].

2.8 Tanım n bir doğal sayı olmak üzere $f_n=2^{2^n}+1$ biçiminde tanımlanan sayılara **Fermat sayıları** denir [15].

Fermat, $f_n=2^{2^n}+1$ biçiminde yazılan sayıları ilk kez tanımladığında hepsinin asal sayı olduğunu düşünmüştür [15, 16]. 1600'lü yıllarda hesap makinesi ve bilgisayar gibi imkânlar olmadığı ve hesaplamaların elle yapıldığı düşünülürse bu teorinin doğruluğunu araştırmanın güçlüğü anlaşılmış olur.

Fermat'ın hesapladığı ilk beş sayı $f_0 = 3,\ f_1 = 5,\ f_2 = 17,\ f_3 = 257$ ve $f_4 = 65537$ dir. Bu sayılar incelendiğinde asal oldukları anlaşılmış ve "*Fermat sayıları asaldır*" varsayımı ortaya atılmıştır. Ardından Euler, $f_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$ Fermat sayısının iki farklı asal çarpanı olduğunu keşfettikten sonra Fermat sayılarının hepsinin asal olmadığı sonucu ortaya çıkmıştır.

Bütün bu keşifler ile birlikte ilk beş Fermat sayısının asal olduğu ve bu sayılardan farklı bir Fermat asal sayısının olup olmadığı, Fermat asal sayıları olarak isimlendirilen $3, 5, 17, 257$ ve 65537 sayılarını içeren kümenin sonsuz olup olmadığı henüz cevabını bulamamış sorular arasında yer almaktadır [15].

2.9 Tanım n bir doğal sayı olmak üzere $M_n = 2^n - 1$ biçiminde tanımlanan sayılara **Mersenne sayıları** denir [29].

Bugüne kadar keşfedilmiş en büyük Mersenne asal sayısı $2^{82,589,933} - 1$'dir [18]. The Great Internet Mersenne Prime Search *(GIMPS)* kuruluşu, birçok akademisyen ve araştırmacı bir sonraki Mersenne asal sayısını keşfetmek için çalışmaktadır.

2.10 Tanım Kendisi hariç pozitif tam bölenlerinin toplamı kendisine eşit olan sayılara **mükemmel sayı (perfect number)** denir. Bu durumda bir mükemmel sayı, bütün pozitif tam bölenlerinin toplamının yarısına eşittir $\sigma(n) = 2n$ [13].

2.11 Tanım d sayısı, n pozitif tam sayısının bir böleni olmak üzere $\sigma(n) = 2n + d$ eşitliğini sağlayan sayılara **yakın mükemmel sayı (near-perfect number)** denir [13].

2.12 Tanım Birinci tip Stirling sayısı $S_1(n,k)$, S_n simetrik grubunda k ayrık devrin çarpımı olarak yazılan elamanların sayısı olarak tanımlanır. Genel olarak n elemanlı kümenin k devirlerinin sayısı bir örnek ile açıklanacak olursa; *"n kişi k tane yuvarlak masaya, her masada en az bir kişi olma koşuluyla kaç farklı biçimde yerleştirilebilir?"* Sorusunun cevabı olan sayı birinci tip Stirling sayısıdır. Birinci tip Stirling sayıları yaygın kullanımda $S_1(n,k) = |s(n,k)|$ ya da $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ ile gösterilir [30]. *Tablo 2.1*'de bazı birinci tip Stirling sayıları gösterilmiştir.

2.4 Örnek $S_1(3,2)$ 'yi hesaplayalım. S_3 simetrik grubunda iki ayrık devrin çarpımı olarak yazılan elamanlar; $(1)(23)$, $(2)(13)$ ve $(3)(21)$ olduğundan $S_1(3,2) = 3$ 'tür.

2.5 Örnek $S_1(4,3)$ 'ü hesaplayalım. S_4 simetrik grubunda üç ayrık devrin çarpımı olarak yazılan elamanlar; $(1)(2)(34)$, $(1)(3)(24)$, $(1)(4)(23)$, $(2)(3)(14)$, $(2)(4)(13)$ ve $(3)(4)(12)$ olduğundan $S_1(4,3) = 6$ 'dır.

Tablo 2.1: Birinci tip Stirling sayıları.

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	2	3	1					
4	0	6	11	6	1				
5	0	24	50	35	10	1			
6	0	120	274	225	85	15	1		
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1	
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1

2.8 Teorem Birinci tip Stirling sayısı $S_1(n,k)$ $n>0$ için

$$P_n(x)=x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1) \tag{2.6}$$

polinomunda x^k 'nın katsayısıdır [30].

3. MUTLAK MÖBIUS BÖLEN FONKSİYONU

Bu bölümde tezin temelini oluşturan Mutlak Möbius Bölen Fonksiyonu $U(n)$ tanımlanmış, $U(n)$ fonksiyon üzerinden $U_i(n)$ ve $Ord(n)$ fonksiyonlarının tanımları verilmiş ve Mutlak Möbius Bölen Fonksiyonunun çokgen şekilleri açıklanmıştır. Bu bölümde elde edilen sonuçlar özgündür. Bu bölümdeki çalışmalar Kim, Sarp ve İkikardeş'in "Iterating the Sum of Möbius Divisor Function and Euler Totient Function, *Mathematics*, 7 (1083), 2019." makalesinde yayımlanmıştır [31].

3.1 Tanım n pozitif bir tam sayı, μ Möbius Fonksiyonu ve d, n'nin pozitif bölenleri olmak üzere **Mutlak Möbius Bölen Fonksiyonu**;

$$U(n) := \left| \sum_{d|n} d\mu(d) \right| \tag{3.1}$$

olarak tanımlanır [31, 32].

$1 \le n \le 100$ için $U(n)$ fonksiyonunun aldığı değerler *Ek A*'da verilmiştir.

3.1 Örnek $U(n)$ fonksiyonunun bazı örnekleri;

$U(1) = |\mu(1)1| = 1$,
$U(2) = |\mu(1)1 + \mu(2)2| = 1$,
$U(4) = |\mu(1)1 + \mu(2)2 + \mu(4)4| = 1$ ve
$U(6) = |\mu(1)1 + \mu(2)2 + \mu(3)3 + \mu(6)6| = 2$

'dir.

$U(n)$ ve $\varphi(n)$'nin ilk yirmi değeri *Tablo 3.1*'de gösterilmiştir.

Tablo 3.1: $U(n)$ ve $\varphi(n)$, $(1 \le n \le 20)$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$U(n)$	1	1	2	1	4	2	6	1	2	4	10	2	12	6	8	1	16	2	18	4
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18	8

Tablo 3.1'den anlaşılacağı üzere $U(n)$ ve $\varphi(n)$ fonksiyonları bazı değerler için eşittir. Sayı fonksiyonları ile ilgili eşitlikler kriptolojide kullanım alanlarına sahiptir. $U(n)$ ve $\varphi(n)$'nin kriptoloji uygulamalarına tezin beşinci bölümünde yer verilmiştir.

3.2 Tanım $m \ge 1$ ve $n \ge 1$ birer tam sayı olmak üzere Mutlak Möbius Bölen Fonksiyonunun iterasyonları $U_0(n) := n$, $U(n) := U_1(n)$ ve $U_m(n) := U_{m-1}(U(n))$ olarak tanımlanır.

3.2 Örnek $U_0(7) = 7$, $U_1(7) = 6$, $U_2(7) = 2$ ve $U_3(7) = 1$'dir.

3.3 Tanım $n > 1$ bir tam sayı olmak üzere $U_m(n) = 1$ olduğunda, buradaki en küçük m sayısına n 'nin mertebesi denir ve $Ord(n) = m$ ile gösterilir. $Ord(1) = 0$ olarak tanımlanır.

3.1 Uyarı $k \geq 2$ bir tamsayı olmak üzere $\varphi_0(n) = n$, $\varphi_1(n) = \varphi(n)$ ve $\varphi_k(n) = \varphi(\varphi_{k-1}(n))$ olarak tanımlansın. Shapiro, n tam sayısı için $C(n)$ fonksiyonunu $m > 2$ bir tam sayı ve $\varphi_m(n) = 2$ olacak biçimde tanımlar ve $C(n) = m$ biçimide gösterir [9]. $Ord(n)$ 'nin bazı değerleri ile $C(n)+1$'in bazı değerleri birbirine eşittir. Shapiro, $C(1)+1 = C(2)+1 = 1$ olarak tanımlamıştır [9]. Bu tezde $C(1)+1 = 0$ ve $C(2)+1 = 1$ olarak kabul edilmiştir. Öte yandan Kim ve Bayad, bölen fonksiyonu ile ilgili çalışmalarında bölen fonksiyonunun mertebe fonksiyonu $Ord_2(n)$ 'ye yer vermişlerdir [10].

3.4 Tanım $Ord(n) = m-2$ olacak biçimde $V_n = \{(i, U_i(n)) \mid i = 0, ..., m-2\} \cup \{(0,1)\}$ kümesini düşünelim. V_n kümesindeki sıralı ikilileri birleştiren doğru parçalarının oluşturduğu çokgene **$m-$gen şekil** denir. Buradaki $n = 1$ dışındaki n pozitif tam sayısına U ve V_n yardımıyla üretilen **Möbius $m-$gen sayısı** denir. Benzer olarak **Euler Totient $m'-$gen Şekil Sayıları** $C(n)+1 = m'$ olacak biçimde $R_n = \{(i, \varphi_i(n)) \mid i = 0, ..., m'-2\} \cup \{(0,1)\}$ kümesini düşünelim. R_n kümesindeki sıralı ikilileri birleştiren doğru parçalarının oluşturduğu çokgene **$m'-$gen şekil** denir. Buradaki $n = 1$ dışındaki n pozitif tam sayısına φ ve R_n tarafından üretilen **Euler Totient $m'-$gen sayısı** denir.

Shaphiro'nun tanımladığı $C(n)$ fonksiyonu ile $Ord(n)$ fonksiyonunun aynı değerleri aldığı tam sayılar vardır.

$Ord(n)$ ve $C(n)+1$'in ilk yirmi değeri *Tablo 3.2*'de gösterilmiştir.

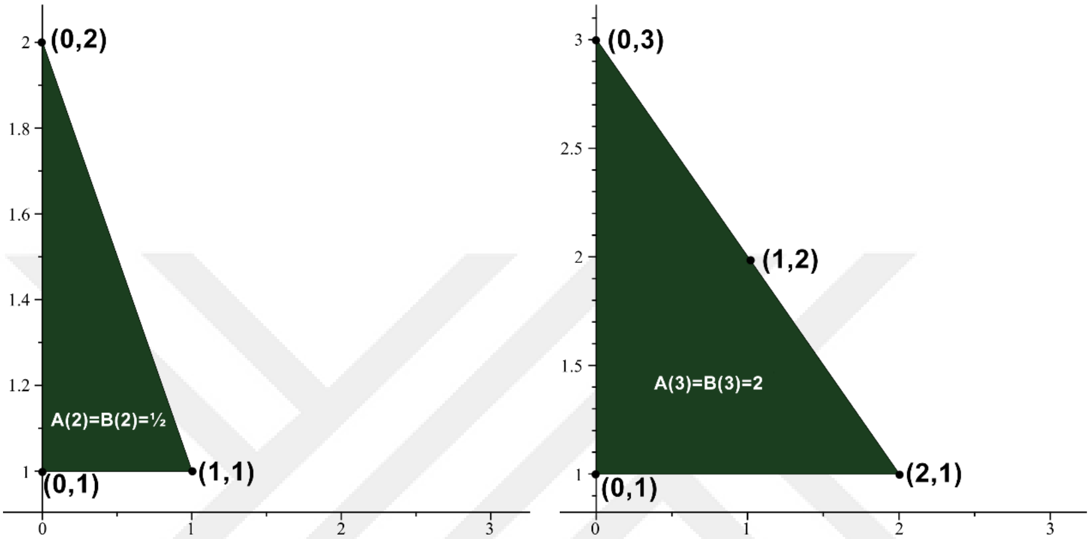
Tablo 3.2: $Ord(n)$ ve $C(n)+1$, $(1 \leq n \leq 20)$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$Ord(n)$	0	1	2	1	2	2	3	1	2	2	3	2	3	3	2	1	2	2	3	2
$C(n)+1$	0	1	2	2	3	2	3	3	3	3	4	3	4	3	4	4	5	3	4	4

3.3 Tanım Kim ve Bayad'ın bölen fonksiyonu ile ilgili çalışmasındaki notasyonlara benzer olarak konvekslik ve konvekslik alanı ifadelerini tanımlamak için mutlak Möbius bölen fonksiyonu U tarafından üretilen $\{(i, U_i(n)) | i = 0, ..., m-2\} \cup \{(0,1)\}$ kümesinin oluşturduğu çokgen düşünüldüğünde oluşan şeklin konveks (dış bükey) ya da konkav (iç bükey) olduğu görülmektedir. Buradaki n sayısına **konveks (ya da konkav) mutlak Möbius $m-$gen şekil sayısı** denir [10]. Bu şeklin alanı ise $\boldsymbol{A(n)}$ olarak gösterilir. Bu çalışmada Euler Totient Fonksiyonu $\varphi(n)$ tarafından üretilen çokgenler için *3.3 Tanım*'a benzer biçimde **konveks (ya da konkav) Totient $m'-$gen şekil sayıları** ve $\boldsymbol{B(n)}$'de oluşan çokgenin alanı olarak tanımlanmıştır.

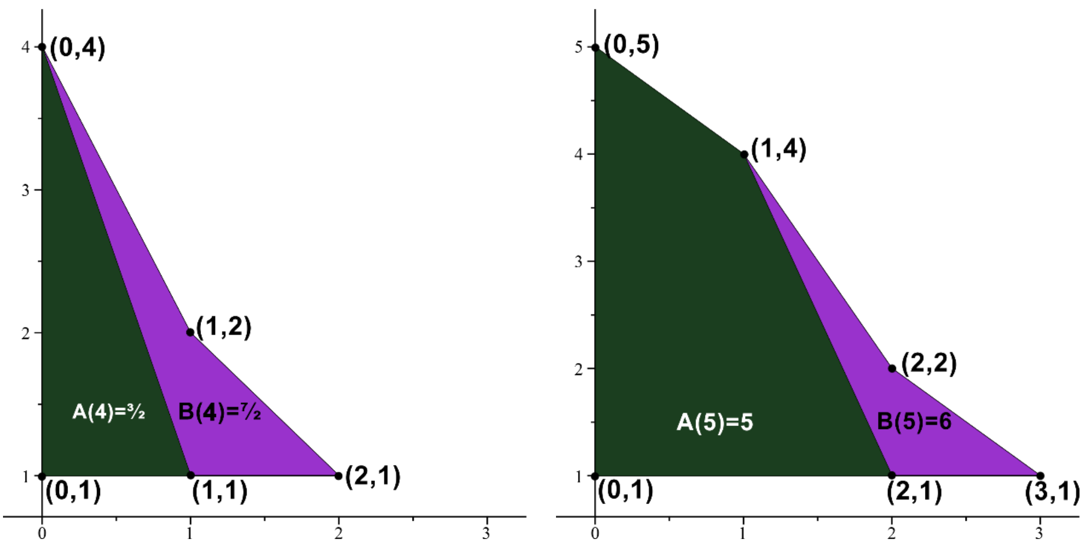
3.3 Örnek $n=2$ olmak üzere $U(2)$ ve $\varphi(2)$ yardımıyla üretilen noktaların kümesi $V_2 = R_2 = \{(0,2),(1,1),(0,1)\}$'dir. Bu durumda 2, mutlak Möbius üçgen konveks sayıdır ve alanı $A(2)=\dfrac{1}{2}$'dir.

$n=2,3,4,5$ değerleri için mutlak Möbius $m-$gen şekil sayıları, Euler Totient $m'-$gen şekil sayıları ve oluşan şekillerin alanları *Şekil 3.1* ve *Şekil 3.2*'de gösterilmiştir.



$U(2)=\varphi(2)$ $\qquad$ $U(3)=\varphi(3)$

Şekil 3.1: $n=2,3$ için $U(\text{n})$ ve $\varphi(\text{n})$'nin çokgenleri ve alanları.



$U(4)$ ve $\varphi(4)$ $\qquad$ $U(5)$ ve $\varphi(5)$

Şekil 3.2: $n=4,5$ için $U(\text{n})$ ve $\varphi(\text{n})$'nin çokgenleri ve alanları.

$U(n)$ ve $\varphi(n)$ yardımıyla üretilen $A(n)$ ve $B(n)$ alanlarının ilk on dokuz değeri *Tablo 3.3*'de verilmiştir.

Tablo 3.3: $A(n)$ **ve** $B(n)$**,** $(2 \leq n \leq 20)$**.**

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$A(n)$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	5	$\frac{7}{2}$	9	$\frac{7}{2}$	5	$\frac{15}{2}$	17	$\frac{13}{2}$	18	$\frac{25}{2}$	14	$\frac{15}{2}$	23	$\frac{19}{2}$	27	$\frac{25}{2}$
$B(n)$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	6	$\frac{7}{2}$	9	$\frac{15}{2}$	10	$\frac{17}{2}$	18	$\frac{19}{2}$	21	$\frac{25}{2}$	18	$\frac{37}{2}$	34	$\frac{29}{2}$	32	$\frac{41}{2}$

4. $U(n)$ VE $\varphi(n)$'NİN BAZI ÖZELLİKLERİ VE ÇOKGEN ŞEKİLLERİ

Bu bölümde Mutlak Möbius Bölen Fonksiyonu ile Euler Totient Fonksiyonunun çokgen şekiller ile olan ilişkileri ve özellikleri incelenmiştir. Çokgen şekillerin bazıları için sınıflamalar yapılmıştır. Bu bölümdeki çalışmalar Kim, Sarp ve İkikardeş'in "Iterating the Sum of Möbius Divisor Function and Euler Totient Function, *Mathematics*, 7 (1083), 2019." makalesinde yayımlanmıştır [31].

4.1 Teorem $p_1 < p_2 < \ldots < p_u$ Fermat asal sayıları ve $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere;

$$F_0 := \{p_1, \ldots, p_u\},$$

$$F_1 := \left\{ \prod_{i=1}^{t} p_i \mid p_i \in F_0, 1 \le t \le 5 \right\} \text{ ve}$$

$$F_2 := \left\{ \prod_{j=1}^{r} p_{i_j} \mid p_{i_j} \in F_0, p_1 \le p_{i_1} < p_{i_2} \ldots < p_{i_r} \le p_u, r \le u \right\} - (F_0 \cup F_1)$$

kümeleri verilsin. Eğer $Ord(m) = 1$ ya da 2 ise $m > 1$ olmak üzere,

$$m; \begin{cases} \textit{Mutlak Möbius üçgen sayıdır}, & m = 2^k \textit{ veya } m \in F_1 \textit{ ise} \\ \textit{Mutlak Möbius dörtgen konveks sayıdır}, & m \in F_0 - \{3\} \textit{ veya } m \in F_2 \textit{ ise} \\ \textit{Mutlak Möbius dörtgen konkav sayıdır}, & \textit{aksi halde} \end{cases}$$

4.1 Teorem'in ispatı için aşağıdaki sonuçlardan yararlanılacaktır.

4.1 Uyarı Shapiro, $C(m)+1=2$ ifadesini sağlayan m pozitif tam sayılarını $m = 3,4,6$ olarak hesaplamıştır [9]. Bu durumda $C(m)+1=1$ ya da 2 olduğunda;

i) Eğer $m = 2,3$ ise m; Totient üçgen sayıdır.
ii) Eğer $m = 4,5$ ise m; Totient dörtgen konkav sayıdır.

4.1 $U(n)$ ve $\varphi(n)$ 'nin Bazı Özellikleri

Euler Totient Fonksiyonu $\varphi(n)$, başta sayılar teorisi olmak üzere birçok bilim dalında kullanılan bir sayı fonksiyondur. Ayrıca bilinen birçok farklı özelliği vardır. Bu özelliklerden bazılarına [2, 3, 5, 6, 33, 34, 35, 36]'daki kitaplarda ve [1, 4, 7, 37, 38]'daki makalelerde yer verilmiştir. Örneğin; bu özelliklerden bir tanesi çarpımsal fonksiyon olmasıdır. Bir diğeri de y, x'in bir çarpanı ise $\varphi(xy) = y\varphi(x)$'dir.

Bu başlıkta $U(n)$ ve $\varphi(n)$ aritmetik fonksiyonlarının benzer ve farklı özellikleri birlikte araştırılmıştır.

4.1 Lemma n bir pozitif tamsayı, p_r 'ler birbirinden farklı asal sayılar ve e_r 'ler pozitif tam sayılar olmak üzere $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_r^{e_r}$ olsun. Bu durumda (2.5) eşitliğine benzer olarak,

$$U(n) = \prod_{i=1}^{r} (p_i - 1) \tag{4.1}$$

'dir.

İspat: $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$ şeklinde çarpanlarına ayrılabilen herhangi bir tam sayı olmak üzere (3.1) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} U(n) &= \left| \sum_{d|n} \mu(d) d \right| \\ &= \left| 1 - p_1 - p_2 - \dots - p_r + p_1 p_2 + \dots + (-1)^n p_1 p_2 \dots p_r \right| \\ &= \left| (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_r) \right| \\ &= (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_r - 1) \end{aligned} \tag{4.2}$$

'dir.

4.1 Lemma'nın ispatı tamamlanmış olur.

□

4.1 Sonuç p bir asal sayı ve α pozitif bir tam sayı olmak üzere $U(p) = p - 1$ ve $U(p^{\alpha}) = U(p)$ 'dir. Ayrıca $U(2^{\alpha}) = 1$'dir.

4.2 Sonuç $n > 1$ pozitif bir tam sayı ve $Ord(n) = m$ olmak üzere, $U_i(n)$'ler azalan değerlerdir. Başka bir ifadeyle,

$$U_0(n) > U_1(n) > U_2(n) > \cdots > U_m(n) \tag{4.3}$$

'dir.

4.2 Uyarı $U(n)$ fonksiyonu ile $\varphi(n)$ fonksiyonunun bazı özelliklerini *Tablo 4.1*'de karşılaştırılmıştır.

Tablo 4.1: $U(n)$ ve $\varphi(n)$ fonksiyonlarının karşılaştırılması – a.

	$U(n)$	$\varphi(n)$
$n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$	$(p_1 - 1) \cdots (p_r - 1)$	$(p_1^{e_1} - p_1^{e_1 - 1}) \cdots (p_r^{e_r} - p_r^{e_r - 1})$
$n = 2^k$	1	2^{k-1}
iterasyon	$U_0(n) > U_1(n) > U_2(n) > \cdots$	$\varphi_0(n) > \varphi_1(n) > \varphi_2(n) > \cdots$

4.1 Örnek $\{U_i(n)\}$ 'in ilk yirmi değeri *Tablo 4.2*'de gösterilmiştir.

Tablo 4.2: $\{U_i(n)\}$ değerleri, $(1 \le n \le 20)$.

n	$\{U_i(n)\}$	n	$\{U_i(n)\}$	n	$\{U_i(n)\}$	n	$\{U_i(n)\}$
1	$\{1\}$	6	$\{6,2,1\}$	11	$\{11,10,4,1\}$	16	$\{16,1\}$
2	$\{2,1\}$	7	$\{7,6,2,1\}$	12	$\{12,2,1\}$	17	$\{17,16,1\}$
3	$\{3,2,1\}$	8	$\{8,1\}$	13	$\{13,12,2,1\}$	18	$\{18,2,1\}$
4	$\{4,1\}$	9	$\{9,2,1\}$	14	$\{14,6,3,2,1\}$	19	$\{19,18,2,1\}$
5	$\{5,4,1\}$	10	$\{10,4,1\}$	15	$\{15,8,1\}$	20	$\{20,4,1\}$

4.2 Lemma $U(n)$ fonksiyonu çarpımsal bir fonksiyondur. m ve n birer pozitif tamsayı olmak üzere; eğer $(m,n)=1$ ise $U(mn)=U(m)U(n)$ 'dir. Ayrıca n, m 'nin bir çarpanı ise $U(mn)=U(m)$'dir.

İspat: $m=p_1^{e_1}p_2^{e_2}...p_i^{e_i}$ ve $n=q_1^{f_1}q_2^{f_2}...q_s^{f_s}$ birer pozitif tam sayı olsun. $p_1^{e_1}p_2^{e_2}...p_i^{e_i}$ ve $q_1^{f_1}q_2^{f_2}...q_s^{f_s}$ değerleri m ve n'nin asal çarpanlarına ayrılmış hali olmak üzere; Eğer $(m,n)=1$ ise *Lemma 4.1*'den dolayı m ve n'nin herhangi birer asal çarpanı p ve q için $p| m$, $p\nmid n$, $q| n$ ve $q\nmid m$'dir. Bu durumda;

$$\begin{aligned} U(mn) &= \prod_{t_k|mn}(t_k-1) \\ &= \prod_{p_i|m}(p_i-1)\prod_{q_s|n}(q_s-1) \\ &= U(m)U(n) \end{aligned} \tag{4.4}$$

'dir.

Ayrıca n, m'nin bir çarpanı olsun. Bu durumda eğer $p_i \mid n$ ise $p_i \mid m$ olmalıdır. *4.1 Lemma*'dan dolayı $U(mn)=U(m)$ olur ki,

4.2 Lemma'nın ispatı tamamlanmış olur.

□

4.3 Uyarı $U(n)$ ve $\varphi(n)$ fonksiyonları çarpımsal fonksiyonlardır. $n| m$ olmak üzere $U(n)$ ve $\varphi(n)$ fonksiyonlarının karşılaştırılması *Tablo 4.3*'de verilmiştir.

Tablo 4.3: $U(n)$ ve $\varphi(n)$ fonksiyonlarının karşılaştırılması – b.

	$(m,n)=1$	$n\| m$
$U(mn)$	$U(m)U(n)$	$U(m)$
$\varphi(mn)$	$\varphi(m)\varphi(n)$	$n\varphi(m)$

4.2 Teorem Her $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ için $U_m(n) = 1$ olacak biçimde bir $m \in \mathbb{N}$ vardır.

İspat: $p_1, ..., p_r$ 'ler; $p_1 < p_2 < ... < p_r$ şartını sağlayan birbirinden farklı asal sayılar olsun, *4.1 Lemma*'dan dolayı $U(n) = \prod_{i=1}^{r}(p_i - 1)$ olmalıdır. Bu durumda;

Eğer $r = 1$ ve $p_1 = 2$ ise $U(n) = 1$ olmalıdır (*4.1 Sonuç*).

Eğer p_i tek asal sayı ise $U(p_i^{e_i}) = p_i - 1$ olmalıdır (*4.1 Lemma*).

Bunların dışındaki değerler için $p_i - 1$ çift tam sayı ayrıca $f_{i_s} \geq 1,\ l_i \geq 1$ ve $q_{i_1} < \cdots < q_{i_s}$ olmak üzere, $p_i - 1 = 2^{l_i} q_{i_1}^{f_{i_1}} \cdots q_{i_s}^{f_{i_s}}$ eşitliği sağlayan $q_{i_1}, ..., q_{i_s}$ birbirinden farklı asal sayılar vardır. Bu durumda $q_{i_s} \leq \frac{p_i - 1}{2} \leq \frac{p_r - 1}{2}$ şeklinde yazılabilir. *4.2 Lemma*'dan

$$U_2(p_i^{e_i}) = U(p_i - 1) = U(q_{i_1}) \cdots U(q_{i_s}) \tag{4.5}$$

'dir. (4.5) eşitliği için $1 \leq i_j \leq s$ ve $q_{j_1}^{(2)} < q_{j_2}^{(2)} < ... < q_{j_k}^{(2)}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} U_2(n) &= U\left(\prod_{i=1}^{r}(p_i - 1)\right) \\ &= U\left(2^{l_1 + l_2 + ... + l_r} \prod_{i=1}^{r} q_{i_1}^{e_{i_1}} ... q_{i_u}^{e_{i_u}}\right) \\ &= U\left(\prod_{i=1}^{r} q_{i_1}^{e_{i_1}} ... q_{i_u}^{e_{i_u}}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{r}(q_{i_1} - 1) \cdots (q_{i_u} - 1) \\ &= q_{j_1}^{(2)} \cdots q_{j_k}^{(2)} \end{aligned} \tag{4.6}$$

olur. Bu durumda $q_{j_k}^{(2)} \leq \max\{\frac{q_{1_u} - 1}{2}, ..., \frac{q_{r_u} - 1}{2}\}$ olmalıdır. Aynı yöntemi kullanarak, $q_{j_u}^{(l)} < 100$ olmak üzere $U_{l-1}(n) = \left(q_{j_1}^{(l-1)} - 1\right) \cdots \left(q_{j_u}^{(l-1)} - 1\right) = 2^h \prod_{u=1}^{s'} q_{j_u}^{(l)}$ eşitliğini sağlayan l değerleri bulunabilir. Ek A'da $U(n)$ değerlerini içeren tablodan $1 \leq n' \leq 100$ aralığındaki sayılar için $U_v(n') = 1$ $\quad (U_v(U_{l-1}(n)) = 1)$ eşitliğini sağlayan v değerleri bulunabilir. Sonuç olarak, her n pozitif tamsayısı için $U_m(n) = 1$ eşitliğini sağlayan $m = v + l - 1 \in \mathbb{N}$ değeri vardır.

4.2 Teorem'in ispatı tamamlanmış olur.

□

4.3 Sonuç Her $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ için $Ord(n) = m$ olacak biçimde $m \in \mathbb{N}$ vardır.

İspat: *4.2 Teorem*'den aşikârdır.

□

4.4 Uyarı Kim ve Bayad, tek bölen fonksiyonunun iterasyonu olan $S_m(n)$ ve n değerlerinin mertebe fonksiyonu olan $Ord_2(n)$'yi incelemişlerdir. İncelemeleri sonucunda mertebe fonksiyonu $Ord_2(n)$'nin sonsuz olup olmadığı açık bir problem olarak kalmıştır. Fakat $U_m(n)$ için *4.3 Sonuç* ve Erdös'ün çalışmalarından dolayı $Ord(n) < \infty$ olduğu anlaşılmaktadır [9, 26].

4.3 Teorem $n > 1$ pozitif tamsayı ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $Ord(n) = 1$ olması için gerek ve yeter şart $n = 2^k$ olmasıdır.

İspat: $(\Leftarrow)$ $n = 2^k$ olsun. Bu durumda $U(n) = U_1(n) = 1$ olduğu açıktır.

$(\Rightarrow)$ $p_1, ..., p_r$'ler birbirinden farklı asal sayılar ve $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_r^{e_r}$ pozitif tamsayısının çarpanlara ayrılmış hali olmak üzere, eğer $Ord_2(n) = 1$ ise *4.1 Lemma*'dan dolayı $1 = (p_1 - 1)(p_2 - 1)\ldots(p_r - 1)$ eşitliğini sağlamalıdır.

Bu durumda $p_1, ..., p_r$'ler birbirinden farklı asal sayılar olması gerektiği için $p_1 = 2$ dışında bir asal sayı olması durumda sonuç 1 olmayacağından sadece $p_1 = 2$ olmalıdır. $p_1 = 2$ olması için ise $n = 2^k$ (her $k \in \mathbb{N}$ için) olmalıdır.

4.3 Teorem'in ispatı tamamlanmış olur.

□

4.5 Uyarı $k > 0$ pozitif bir tamsayı olmak üzere 2^k mutlak Möbius üçgen sayıdır ve alanı $A(2^k) = \frac{1}{2}(2^k - 1)$'dir.

4.4 Teorem n, m ve m' birden büyük pozitif tam sayılar ve $Ord(n) = m$ ve $C(n) + 1 = m'$ olmak üzere, $A(n), B(n) \in \mathbb{Z}$ olması için gerek ve yeter şart $n \equiv 1 \ (\text{mod } 2)$ olmasıdır. Ayrıca,

$$A(n) = \sum_{k=1}^{m-1} U_k(n) + \frac{1}{2}(1 + n) - m \tag{4.7}$$

ve

$$B(n)=\sum_{k=1}^{m'-1}\varphi_k(n)+\frac{1}{2}(1+n)-m' \tag{4.8}$$

’dir.

İspat: $A(n)$ alanını bulmak için $\{(0,U_0(n)),(1,U_1(n)),\ldots,(m,U_m(n))\}$ kümesinin oluşturduğu kapalı bölge değerlendirildiğinde, $A(n)$ alanı,

$$\begin{aligned}A(n)&=\frac{1}{2}\big(U_0(n)+U_1(n)\big)+\frac{1}{2}\big(U_1(n)+U_2(n)\big)+\ldots+\frac{1}{2}\big(U_{m-1}(n)+U_m(n)\big)-m\\&=U_1(n)+\ldots+U_{m-1}(n)+\frac{1}{2}(1+n)-m\\&\equiv\frac{1}{2}(1+n)\pmod 1\end{aligned}$$

’dir. $B(n)$ alanı da benzer biçimde bulunabilir.

4.4 Teorem’in ispatı tamamlanmış olur.

□

4.2 $Ord(n)=2$ için $U(n)$ Çokgen Şekillerin Sınıflandırılması

Bu bölümde $Ord(n)=2$ olacak biçimde pozitif n tamsayıları araştırılmış ve sonuç olarak üç farklı sınıflandırma bulunmuştur. Bu sınıflandırmalar *Mutlak Möbius üçgen sayılar, Mutlak Möbius dörtgen konveks sayılar* ve *Mutlak Möbius dörtgen konkav sayılar’*dır.

Şekil 4.1: üçgen, dörtgen konveks ve dörtgen konkav şekiller.

4.5 Teorem $p_1,\ldots,p_r$ ’ler Fermat asal sayıları ve $e_1,\ldots,e_r$ ’ler pozitif tam sayılar olmak üzere eğer $n=2^k p_1^{e_1}p_2^{e_2}\ldots p_r^{e_r}$ ise $Ord(n)=2$ ’dir.

İspat: $p_i = 2^{2^{m_i}} + 1,\ (1 \le i \le r)$'ler Fermat asal sayıları olmak üzere, *4.1 Sonuç*'tan dolayı $U(p_i) = p_i - 1$ olmalıdır. Bu durumda, $n = 2^k p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_r^{e_r}$ pozitif tam sayısı için,

$$\begin{aligned} U(n) &= U\left(2^k p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_r^{e_r}\right) \\ &= U\left(2^k\right) U\left(p_1^{e_1}\right) U\left(p_2^{e_2}\right) ... U\left(p_r^{e_r}\right) \\ &= (p_1 - 1)(p_2 - 1)...(p_r - 1) \\ &= 2^{2^{m_1}} 2^{2^{m_2}} ... 2^{2^{m_r}} \\ &= 2^t \end{aligned} \tag{4.9}$$

'dir.

Sonuç olarak $U(n) = U_1(n) = 2^t$ ve $U_2(n) = U(U_1(n)) = U(2^t) = 1$ olacağından $Ord(n) = 2$ olmalıdır.

4.5 Teorem'in ispatı tamamlanmış olur.

□

4.6 Uyarı Tek bölen fonksiyonu toplamı $S(n)$, Mutlak Möbius Bölen Fonksiyonu $U(n)$ ve Euler Totient Fonksiyonu $\varphi(n)$ bazı farklılıklarla benzer özellikler göstermektedirler. *Tablo 4.4*'de $t = 1, 2$ için $\varphi_t(n)$, $U_t(n)$ ve $S_t(n)$'nin bazı özelliklerine yer verilmiştir [9, 10].

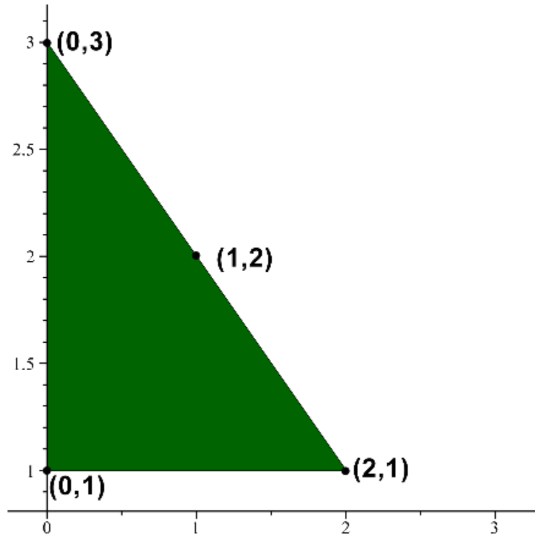
Tablo 4.4: $t = 1, 2$ için $\varphi_t(n),\ U_t(n)$ ve $S_t(n)$.

fonksiyon	$U(n)$	$\varphi(n)$	$S(n)$
$f_1(n) = 1$	$n = 2^k\ (k \ge 0)$	$n = 2^k\ (k = 0,1)$	$n = 2^k\ (k \ge 0)$
$f_2(n) = 1$	$n = 2^k p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ $(k \ge 0)$ p_i : *Fermat asal sayısı* *(4.5 Teorem)*	$n = 2^{k_1} 3^{k_2}$ $(k_1 = 0,1)$, $(k_2 = 0,1)$ *([8], safya 21)*	$n = 2^k q_1 \dots q_s$ $(k \ge 0)$ q_i : *Mersenne sayısı* *([9], Teorem 2.3)*

$n = 2^k p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_r^{e_r}$ için $U(n)$ ve $\varphi(n)$'nin ilk otuz iki değeri *Ek B*'de verilmiştir.

4.3 Lemma p_i Fermat asal sayısı olmak üzere; $p_i = 3$ ise mutlak Möbius üçgen sayı ve $p_i \ne 3$ ise mutlak Möbius dörtgen konveks sayıdır.

İspat: $\{(0,3),(1,2),(2,1),(1,0)\}$ kümesi üçgen bir bölge oluşturduğu için 3 mutlak Möbius üçgen sayıdır (*Şekil 4.2*).



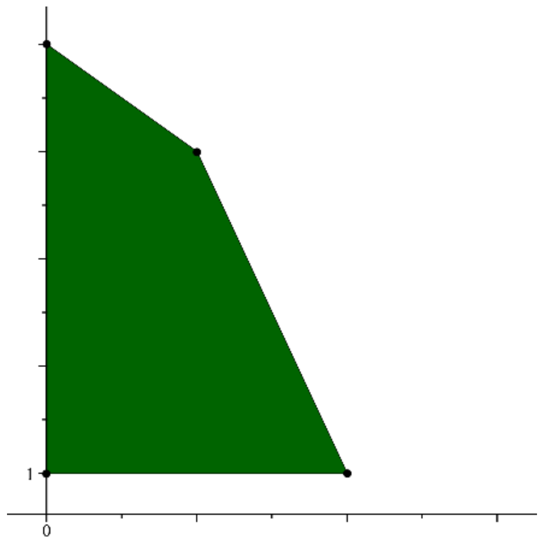
Şekil 4.2: $p_i = 3$ sayısı için üçgen şekil.

$p_i = 2^{2^{m_i}} + 1$ sayısı 3 dışında bir Fermat asal sayı olmak üzere; $U(p_i) = 2^{2^{m_i}}$ olur ki bu durum da oluşan küme,

$$\mathbf{A} = \left\{ \left(0, 2^{2^{m_i}} + 1\right), \left(1, 2^{2^{m_i}}\right), (2,1), (0,1) \right\}$$

'dir.

$\left(2^{2^{m_i}} + 1 - 2^{2^{m_i}}\right) < \left(2^{2^{m_i}} - 1\right)$ olacağı için **A** kümesinin oluşturacağı kapalı şekil konveks yapıdadır (*Şekil 4.3*).



Şekil 4.3: $p_i = 2^{2^{m_i}} + 1$ ($p_i \neq 3$) sayısı için dörtgen konveks şekil.

4.3 Lemma'nın ispatı tamamlanmış olur.

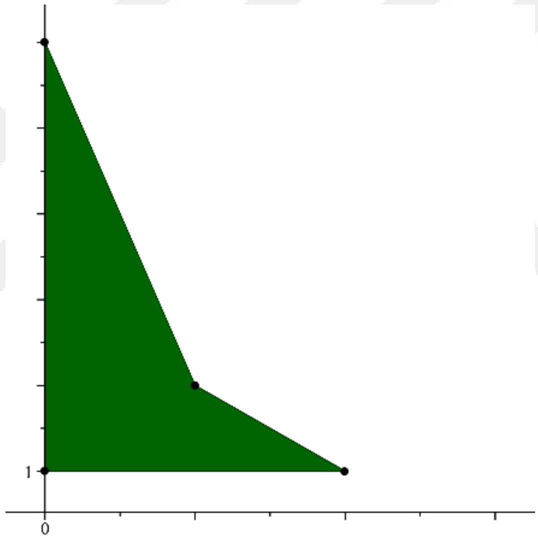
□

4.4 Lemma p_i Fermat asal sayısı ve $m_1 \geq 2$, $m_2 \geq 2$ pozitif tamsayılar olmak üzere $2^{m_1} p_i$ ve $p_i^{m_2}$ sayıları mutlak Möbius dörtgen konkav sayılardır.

İspat: $p_i = 2^{2^{m_i}} + 1$ Fermat asal sayısı olsun bu durumda $2^{m_1} p_i - (p_i - 1) = 2^{m_1} \cdot 2^{2^{m_i}} - 2^{2^{m_i}}$ ve $(p_i - 1) - 1 = 2^{2^{m_i}} - 1$'dir.

4.3 Lemma'daki gibi oluşan şekli incelediğimizde, $2^{m_1} p_i - (p_i - 1) > (p_i - 1) - 1$ olacağı için şekil konkav yapıdadır. Sonuç olarak $2^{m_1} p_i$ mutlak Möbius dörtgen konkav sayıdır.

Benzer biçimde $p_i^{m_1} - (p_i - 1) > (p_i - 1) - 1$ olduğundan $p_i^{m_2}$ de mutlak Möbius dörtgen konkav sayıdır (*Şekil 4.4*).



Şekil 4.4: $2^{m_1} p_i$ ve $p_i^{m_2}$ sayıları için dörtgen konkav şekil.

4.4 Lemma'nın ispatı tamamlanmış olur.

□

4.5 Lemma $p_1, \ldots, p_r$'ler Fermat asal sayıları olmak üzere $2 p_1 \ldots p_r$ sayısı mutlak Möbius dörtgen konkav sayıdır.

Ayrıca $m, e_1, \ldots, e_r$ pozitif tam sayılar olmak üzere, $2^m p_1^{e_1} \ldots p_r^{e_r}$ sayısı mutlak Möbius dörtgen konkav sayıdır.

İspat: *4.4 Lemma*'nın ispatı ile benzer biçimdedir.

□

4.6 Lemma r pozitif tamsayı olmak üzere,

$$\prod_{i=0}^{r}\left(2^{2^i}+1\right)-2\prod_{i=0}^{r}2^{2^i}+1=0 \tag{4.10}$$

’dir.

İspat: Aşağıdaki eşitlikler birlikte değerlendirildiğinde,

$$\prod_{i=0}^{r}\left(x^{2^i}+1\right)=\frac{x^{2^{r+1}}-1}{x-1} \tag{4.11}$$

$$\prod_{i=0}^{r}x^{2^i}=x^{2^{r+1}-1} \tag{4.12}$$

$f(x):=\prod_{i=0}^{r}\left(2^{2^i}+1\right)-2\prod_{i=0}^{r}2^{2^i}+1$ fonksiyonu için $f(2)=0$ ’dır.

4.6 Lemma’nın ispatı tamamlanmış olur.

□

4.4 Sonuç $F_1:=\{3,3\times5,3\times5\times17,3\times5\times17\times257,3\times5\times17\times257\times65537\}$ olmak üzere $f_i\in F_1$ olsun. Bu durumda f_i sayısı mutlak Möbius üçgen sayıdır.

İspat: *4.5 Lemma*’dan aşikârdır.

□

4.7 Uyarı n sayısı sıfır ya da pozitif bir tam sayı olmak üzere, Fermat ilk çalışmalarında $f_n=2^{2^n}+1$ formunda olan bütün sayıları asal sayı olarak tanımlamıştır. Fakat zaman içerisinde hepsinin asal sayı olmadığı görülmüştür. Günümüzde sadece 5 adet Fermat asal sayısı bulunabilmiştir. Bu sayılar $f_0=3,\ f_1=5,\ f_2=17,\ f_3=257$ ve $f_4=65537$ ’dir [15]. Her ne kadar yeni bir Fermat asal sayısı bulunabilme ihtimali olsa da,

$$\prod_{i=0}^{4}\left(2^{2^i}+1\right)\times\left(2^{2^{r'}}+1\right)-2\left(\prod_{i=0}^{4}2^{2^i}\right)2^{2^{r'}}+1>0 \tag{4.13}$$

olacağından yeni bir mutlak Möbius üçgen sayı bulunamaz.

4.7 Lemma $F_1 := \{3, 3\times5, 3\times5\times17, 3\times5\times17\times257, 3\times5\times17\times257\times65537\}$ kümesi ve $p_1 < p_2 < \ldots < p_r < p_t$, $(t > 5)$ Fermat asal sayıları olmak üzere, eğer $n = \prod_{i=1}^{r} p_i \in F_1$ ise $n \times p_t$ mutlak Möbius dörtgen konveks sayıdır.

İspat: $p_t = 2^{2^k} + 1$ Fermat asal sayısı ve k pozitif tamsayı ve ayrıca $r \le 5$ ve $p_t = 2^{2^k} + 1 > 2^{2^6} + 1$ olsun. (4.13) ifadesine benzer biçimde,

$$p_1 \cdots p_r p_t - 2(p_1 - 1)\ldots(p_r - 1)(p_t - 1) + 1 = \left\{\prod_{i=0}^{r-1}\left(2^{2^i} + 1\right)\right\}\left(2^{2^k} - 1\right) - 2^{1+2^0+2^1+\ldots+2^{r-1}+2^k} + 1 > 0$$

yazılır. Buna göre *4.5 Teorem*'e göre $Ord_2(n \times p_t) = 2$ 'dir. Bu durumda $n \times p_t$ mutlak Möbius dörtgen konveks sayıdır.

*4.7 Lemma'*nın ispatı tamamlanmış olur.

□

4.8 Lemma $p_1 < p_2 < \ldots < p_r < p_t$ Fermat asal sayıları, $f_1, \ldots, f_u$ pozitif tam sayılar ayrıca

$F_0 := \{p_1, \ldots, p_u\}$,

$F_1 := \left\{\prod_{i=1}^{t} p_i \mid p_i \in F_0, 1 \le t \le 5\right\}$ ve

$F_2 := \left\{\prod_{j=1}^{r} p_{i_j} \mid p_{i_j} \in F_0, p_1 \le p_{i_1} < p_{i_2} \ldots < p_{i_r} \le p_u, r \le u\right\} - (F_0 \cup F_1)$

olmak üzere, $m \in F_0 \cup F_1 \cup F_2$ değerleri hariç $m = p_1^{f_1} \cdots p_u^{f_u}$ şeklindeki sayılar mutlak Möbius dörtgen konkav sayıdır.

İspat: *4.5 Lemma* ve *4.7 Lemma*'nın ispatı ile benzer biçimdedir.

□

4.1 Teorem'in İspatı; *4.5 Uyarı, 4.7 Uyarı, 4.3 Lemma, 4.4 Lemma, 4.7 Lemma, 4.8 Lemma* 'dan, *4.5 Teorem'*den ve *4.4 Sonuç'*tan tamamlanmış olur.

□

4.8 Uyarı Alman matematikçi Carl Friedrich Gauss 1796'da Öklid Geometrisi'ndeki sadece cetvel ve pergel yardımıyla oluşturulan düzgün çokgenler ile Fermat asal sayıları arasında ilginç bir ilişki olduğunu keşfetti. Bu teorem, günümüzde **Gauss Teoremi** olarak bilinmektedir [15].

Gauss Teoremi'ne göre $n \geq 3$, $i \geq 0$, $j \geq 0$ ve $p_1, p_2, \ldots, p_j$ birbirinden farklı Fermat asal sayıları olmak üzere, eğer $n = 2^i p_1 p_2 \ldots p_j$ ise n Öklid Geometrisi'nde düzgün çokgen sayıdır.

Sonuç olarak, eğer n mutlak Möbius üçgen ya da dörtgen konveks sayı ise *Gauss Teoremi*'ne göre n aynı zamanda bir düzgün çokgen sayıdır.

4.1 Örnek *4.3 Lemma*'dan anlaşılacağı üzere, V_3 kümesi $\{(0,3),(1,2),(2,1),(0,1)\}$'dir. Bu durumda, 3 mutlak Möbius üçgen sayıdır.

Benzer olarak, 15, 255, 65535, 4294967295 sayıları mutlak Möbius üçgen sayılardır.

$V_{15} = \{(0,15),(1,8),(2,1),(0,1)\}$,
$V_{255} = \{(0,255),(1,128),(2,1),(0,1)\}$,
$V_{65535} = \{(0,65535),(1,32768),(2,1),(0,1)\}$,
$V_{4294967295} = \{(0,4294967295),(1,2147483648),(2,1),(0,1)\}$.

4.9 Uyarı $Min(m)$; $m-$gen çokgenin çizilebildiği minimum sayıyı göstermek üzere, *Tablo 4.5*'de *Maple 13* Programını kullanarak mutlak Möbius üçgen sayılar ile $14-$gen sayılar arasındaki şekiller için minimum m değerleri gösterilmiştir.

Tablo 4.5: $Min(m)$ değerleri.

$m-gen\ şekil$	$Min(m)$	*Asal / Bileşik sayı*	$m-gen\ şekil$	$Min(m)$	*Asal / Bileşik sayı*
3	2	*asal sayı*	9	719	*asal sayı*
4	5	*asal sayı*	10	1439	*asal sayı*
5	7	*asal sayı*	11	2879	*asal sayı*
6	23	*asal sayı*	12	34549	*asal sayı*
7	47	*asal sayı*	13	138197	*asal sayı*
8	283	*asal sayı*	14	1266767	*asal sayı*

4.1 Açık Problem $m \geq 3$ olacak biçimdeki bütün pozitif tam sayılar için $Min(m)$ değeri bir asal sayıdır.

5. $\left(n,n+1\right)$ İKİLİSİ İÇİN $U\left(n\right)$ VE $\varphi\left(n\right)$

Bu bölümde, kriptolojide özellikle RSA *(Rivest–Shamir-Adleman)* [39] şifreleme alanında kullanılan Euler Totient Fonksiyonu yardımıyla elde edilmiş $\varphi\left(n\right)=\varphi\left(n+1\right)$ eşitliğine benzer olarak $\varphi\left(n\right)=\varphi\left(n+1\right)=U\left(n\right)=U\left(n+1\right)$ eşitliğini sağlayan $(n,n+1)$ ikilileri incelenmiş, çeşitli sonuçlara ulaşılmış ve örnekler verilmiştir. Bu bölümdeki çalışmalar Kim, Sarp ve İkikardeş'in "Certain Combinatoric Convolution Sums Arising From Bernoulli and Euler Polynomials, *Miskolc Mathematical Notes*, I(20), 311–330, 2019." makalesinde yayımlanmıştır [32].

$\mathbb{Z}^+$ pozitif tamsayılar kümesi olmak üzere; $n\in\mathbb{Z}^+$'nin asal çarpanlara ayrılmış hali $n=\prod_{i=1}^{\omega(n)} p_i^{\alpha_i}$'dir. Buradaki $\omega\left(n\right)$, n'nin asal çarpanlarının sayıdır.

Bölen fonksiyonu $\sigma(n)=\sum_{d|n} d$ ve Euler Totient Fonksiyonu $\varphi(n)$ sayılar teorisinde olduğu gibi kriptolojide oldukça geniş çalışma alanlarına sahip fonksiyonlaradır. Bu fonksiyonlarla ilgili,

$$\varphi(n)=\sum_{d|n} d \quad \text{ve} \quad \varphi(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d} \tag{5.1}$$

eşitlikleri iyi bilenen eşitliklerdir [5].

Mutlak Möbius Bölen Fonksiyonu $U(n)=\left|\sum_{d|n}\mu\left(d\right)d\right|$'i düşündüğümüzde eğer n tam kare böleni olmayan (square-free) bir pozitif tamsayı ise $U(n)=\varphi(n)$'dir. Benzer olarak eğer n tam kare böleni olan bir pozitif tamsayı ise $U(n)\neq\varphi(n)$'dir.

Öte yandan $n\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere, n sayısının **tek asal çarpanlarının sayısı**,

$$\omega_0\left(n\right)=\begin{cases}\omega\left(n\right), & n \text{ tek sayı ise,}\\ \omega\left(n\right)-1, & n \text{ çift sayı ise.}\end{cases} \tag{5.2}$$

olarak tanımlanır.

RSA yönteminde yaklaşık olarak eşit uzunluğa sahip, birbirinden bağımsız p ve q gibi iki büyük asal sayı seçilir. Bu asal sayıların çarpımı $n=pq$'dur. Çarpanların ikisi de asal sayı olduğu için $\varphi\left(n\right)=\left(p-1\right)\left(q-1\right)$'dir. Hesaplanan Euler Totient fonksiyonu değeri $\varphi\left(n\right)$ ile aralarında asal olan bir e sayısı alınır $1<e<\varphi\left(n\right)$. Genişletilmiş Öklid algoritması ile seçilen bu e sayısının $\left(\text{mod } \varphi\left(n\right)\right)$'e göre tersi hesaplanır; sonuç d gibi bir tamsayıdır.

$d \equiv e-1 \pmod{\varphi(n)}$ olmalıdır. Sonuç olarak alıcı tarafın genel anahtarı e ve özel anahtarı d olur [40]. "*RSA şifreleme algoritmasının güvenilirliğini arttırmak için çok büyük asal sayılar kullanılır. Şifreleme ve deşifreleme işlemi bu çok büyük asal sayılar kullanılarak gerçekleştirildiğinden dolayı sonuca ulaşma süresi artmaktadır*" [40]. Bu çalışmada yaklaşık olarak eşit asalların seçimi için Mutlak Möbius Bölen Fonksiyonu'ndan yararlanılmıştır.

Ratat [19], 1917 yılında $\varphi(n)=\varphi(n+1)$ eşitliğini sağlayan n değerlerini araştırmıştır. Aynı makalesinde 1, 3, 15 ve 104 değerlerinin bu eşitliği sağladığını keşfetmiştir. Ardından Goormaghtigh [20], 1918 yılında Ratat'ın araştırmasına ek olarak 164, 194, 255 ve 495 değerlerinin de aynı eşitliği sağladığını kanıtlamıştır.

Klee [21], Moser [4], Lal and Gillard [22], Ballew, Case and Higgins [23], Baillie [24, 25], ve Erdös, Pomerance ve Sarközy [26], $\varphi(n)=\varphi(n+k)$ ve $\sigma(n)=\sigma(n+k)$ eşitliklerini sağlayan değerler üzerine çalışmışlardır. Öte yandan $\sigma(n)=\sigma(n+1)$ ifadesi sağlayan değerlerinin sonsuz olup olmadığı açık bir problemdir ([2] s:103, [6] s:166).

Kapsamlı olarak Möbius Foksiyonu ile ilgili varsayımlar Bayad and Goubi tarafından 2013 yılında ele alınmıştır [12].

Tezin bu bölünde p ve $q_1,\dots,q_6$ 'lar aksi belirtilmedikçe $q_1<\dots<q_6$ şeklinde sıralı ve birbirinden farklı tek asal sayılar olarak kabul edilecektir.

Bu bölümde;

$$\varphi(n)=\varphi(n+1)=U(n)=U(n+1) \tag{5.3}$$

eşitliğini sağlayan n değerleri araştırılmıştır.

(5.3) eşitliğini sağlayan değerleri araştırmak için *5.1 Teorem* incelenirse;

5.1 Teorem ($(\omega_0(n),\omega_0(n+1))=(1,t)$ ya da $(t,1)$, $t\le 6$) olmak üzere;

$$\begin{cases} \textit{Koşul } 1) & n=p, \quad n+1=2\prod_{i=1}^{t} q_i \quad ya\ da \\ \textit{Koşul } 2) & n=2\prod_{i=1}^{t} q_i, \quad n+1=p \quad ya\ da \\ \textit{Koşul } 3) & n=2p, \quad n+1=\prod_{i=1}^{t} q_i \quad ya\ da \\ \textit{Koşul } 4) & n=\prod_{i=1}^{t} q_i, \quad n+1=2p \quad 'dir. \end{cases} \tag{5.4}$$

Sonuç olarak *5.1 Teorem*'i ve $\varphi(n)=\varphi(n+1)=U(n)=U(n+1)$ ifadesini sağlayan sadece iki adet sıralı ikili vardır. Bu değerler $(n,n+1)=(194,195)$ ve $(n,n+1)=(5186,5187)$ 'dir.

5.1 Uyarı $p, q, p_1, ..., p_t$ birbirinden farklı tek asal sayılar olsun. Euler Totient Fonksiyonu $\varphi(n)$, RSA şifrelemelerinde önemli bir role sahiptir. Bu yöntemlerde hesaplama süreleri çok önemlidir. p ve q farklı tek asal sayılar olmak üzere $N = pq$ verilsin. Eğer $n = 2p$ (ya da $p_1 \cdots p_t$) ve $n+1 = p_1 \cdots p_t$ (ya da $2p$) ise $2(p+1)q$'yu hesaplama süresi pq'yu hesaplama süresinden çok daha kısadır. Ayrıca bu şekilde $2(p+1)q$'dan türetilmiş $N = pq$ tespit edilmiş olur.

5.2 Uyarı *Ek C* ve *Ek D*'de $U(n) = U(n+1)$ ve $\varphi(n) = \varphi(n+1) = U(n) = U(n+1)$ sağlayan bazı n değerleri verilmiştir.

5.1 Varsayım $n = 1$ dışında 12| $U(n) = U(n+1)$ 'dir. Ayrıca *5.1 Teorem*'den $t \le 6$ ve $n \ne 1$ olmak üzere $(\omega(n), \omega(n+1)) = (1, t)$ ya da $(t, 1)$ için 12| $\varphi(n) = \varphi(n+1) = U(n) = U(n+1)$ 'dir.

5.1 5.1 Teorem'in İspatı $\left((1,t) \text{ ya da } (t,1), t \le 6\right)$

5.1 Teorem'in ispatı için gerekli Lemmalar;

5.1 Lemma $(\omega_0(n), \omega_0(n+1)) = (1,1)$ için p ve q_1 birbirinden farklı tek asal sayılar olmak üzere;

$$\begin{cases} n = p, & n+1 = 2q_1 \quad ya\ da \\ n = 2q_1, & n+1 = p \quad \text{'}dır. \end{cases} \tag{5.5}$$

koşullarını ve (5.3) eşitliğini sağlayan $(n, n+1)$ ikilisi yoktur.

İspat: $U(n) = U(n+1)$ olduğunu varsayalım.

$$\begin{aligned} &U(p) = U(2q_1) \\ &U(p) = U(2)U(q_1) \\ &U(p) = U(q_1) \\ &p = q_1 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Kolayca anlaşılacağı üzere $p = q_1$'dir. Fakat p ve q_1 birbirinden farklı tek asal sayı olmalıdır. Bu bir çelişkidir.

5.1 Lemma'nın ispatı tamamlanmış olur.

□

5.3 Uyarı Eğer p ve $2p+1$ sayılarının ikisi de asal sayı oluyorsa, p sayısına **Sophie Germain asal sayısı** (**ya da özel asal sayı**) denir. Buna göre *Lemma 5.1*'den dolayı

$U(2p)=U(q_1)=\varphi(2p)=\varphi(q_1)$ eşitliğini sağlayan hiçbir Sophie Germain asal sayısı yoktur.

5.2 Lemma $q_1, q_2, \ldots, q_r$ birbirinden farklı tek asal sayılar olmak üzere $q_1 < q_2 < \ldots < q_r$ ve $r \geq 2$ olsun. Eğer $S = \{1, 2, \ldots, r\}$ ve $S'' \subset S' \subset S$ ise

$$\prod_{j \in S'} \left(1 - q_j^{-1}\right) < \prod_{j \in S''} \left(1 - q_j^{-1}\right) \tag{5.7}$$

ve

$$\prod_{i=1}^{t} q_i^{-1} > \prod_{j=1}^{t+j} q_j^{-1} \quad (j \geq 1) \tag{5.8}$$

'dir.

Ayrıca, $i, i' \in S$ olmak üzere $i \leq i'$ ise,

$$\prod_{i=1}^{t} \left(1 - q_i^{-1}\right) > \prod_{i'=1}^{t} \left(1 - q_{i'}^{-1}\right) \tag{5.9}$$

ve

$$\prod_{i=1}^{t} q_i^{-1} \geq \prod_{i'=1}^{t+j} q_{i'}^{-1} \tag{5.10}$$

'dir.

İspat: *5.2 Lemma*'nın ispatı aşikârdır.

□

Sıradaki Lemma, *5.1 Teorem*'deki koşulları azaltmak için kullanılmıştır.

5.3 Lemma $p, q_1, ..., q_s$ birbirinden farklı tek asal sayılar ve $s \geq 2$ olmak üzere, $p+1 = 2q_1 \cdots q_s$ ya da $p-1 = 2q_1 \cdots q_s$ sayıları pozitif tam sayılar olsun. $\varphi(n) = \varphi(n+1) = U(n) = U(n+1)$ eşitliğini sağlayan $n = p$ $\left(ya\ da\ n = 2q_1 \cdots q_s\right)$ ve $n+1 = 2q_1 \cdots q_s$ $\left(ya\ da\ n+1 = p\right)$ ikilisi yoktur.

İspat: $U(n) = U(n+1)$ olsun bu durumda mutlak Möbius Bölen Fonksiyonu yardımıyla

$$p - 1 = (q_1 - 1) \cdots (q_s - 1) \tag{5.11}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{cases} \dfrac{p-1}{p+1} = \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{q_1}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{q_s}\right) & ya \ da \\ \quad 1 = \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{q_1}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{q_s}\right) & 'dir. \end{cases} \tag{5.12}$$

Buradaki ifadeden yola çıkılarak, *5.2 Lemma* yardımıyla;

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q_s}\right) < \frac{1}{2} \tag{5.13}$$

ve

$$1 > \frac{p-1}{p+1} = 1-\frac{2}{p+1} = 1-\frac{2}{q_1\cdots q_s} \geq 1-\frac{2}{3\cdot 5} > \frac{1}{2} \tag{5.14}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Açıkça görüleceği üzere birbirine eşit olan ifadeler aynı anda aynı reel sayıdan küçük ve büyük olamayacağından bu bir çelişkidir.

5.3 *Lemma'*nın ispatı tamamlanmış olur.

□

5.4 Lemma ($(\omega_0(n),\omega_0(n+1)) = (1,2)$ ya da $(2,1)$) için p, q_1, q_2 birbirinden farklı tek asal sayılar ve $q_1 < q_2$ olmak üzere;

$$\begin{cases} Koşul\ 1) & n = p, & n+1 = 2q_1q_2 & ya \ da \\ Koşul\ 2) & n = 2q_1q_2, & n+1 = p & ya \ da \\ Koşul\ 3) & n = 2p & n+1 = q_1q_2 & ya \ da \\ Koşul\ 4) & n = q_1q_2, & n+1 = 2p & 'dir. \end{cases} \tag{5.15}$$

Yukarıdaki koşulları ve $\varphi(n) = \varphi(n+1) = U(n) = U(n+1)$ eşitliğini sağlayan herhangi n ve $n+1$ pozitif tamsayısı yoktur.

İspat: *5.3 Lemma*'dan dolayı $\varphi(n) = \varphi(n+1) = U(n) = U(n+1)$ eşitliği ile *Koşul 1)* ve *Koşul 2)*'yi sağlayan n ve $n+1$ pozitif tamsayısı yoktur.

Bu durumda *Koşul 3)* ve *Koşul 4)* incelenecek olursa,

Koşul 3) $n = 2p$ ve $n+1 = q_1q_2$ değerleri $U(n) = U(n+1)$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$p-1 = U(2p) = U(q_1q_2) = (q_1-1)(q_2-1)$ (5.16)

ve

$$\left(q_1-2\right)\left(q_2-2\right)=-1 \tag{5.17}$$

elde edilir ki *Koşul 3)*'ü sağlayan q_1 ve q_2 değerleri yoktur.

Koşul 4) Benzer biçimde $n=q_1q_2$ ve $n+1=2p$ değerleri $\varphi(n)=\varphi(n+1)=U(n)=U(n+1)$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\left(q_1-2\right)\left(q_2-2\right)=1 \tag{5.18}$$

ve

$$q_1=q_2=3 \tag{5.19}$$

elde edilir ki birbirinden farklı asal q_1 ve q_2 değerleri yoktur.

5.4 Lemma'nın ispatı tamamlanmış olur.

□

5.5 Uyarı *Mathematica 11.0* programı kullanılarak $p<200$ için $p-1=U\left(2p\right)=U\left(q_1q_2\right)=\left(q_1-1\right)\left(q_2-1\right)$ eşitliğini sağlayan p,q_1,q_2 değerleri *Tablo 5.1*'de gösterilmiştir.

Tablo 5.1: $p,\ q_1,q_2$ asal sayıları.

p	(p,q_1,q_2)	$(2p+1,q_1q_2)$	p	(p,q_1,q_2)	$(2p+1,q_1q_2)$
13	(13,3,7)	(27,21)	97	(97,7,17)	(195,119)
37	(37,3,19)	(75,57)	109	(109,7,19)	(219,133)
41	(41,5,11)	(83,55)	113	(113,5,29)	(227,145)
61	(61,3,31)	(123,93)	157	(157,3,79)	(315,237)
61	(61,7,11)	(123,77)	181	(181,7,31)	(363,217)
73	(73,3,37)	(147,111)	181	(181,11,19)	(363,209)
73	(73,5,19)	(147,95)	193	(193,3,97)	(387,291)
73	(73,7,13)	(147,91)	193	(193,13,17)	(387,221)
89	(89,5,23)	(179,115)			

Tablodaki sonuçlardan da anlaşılacağı üzere $n=2p$ ve $n+1=q_1q_2$ şartlarının sağlayan p,q_1,q_2 değerleri yoktur.

5.5 Lemma **(**$(\omega_0(n),\omega_0(n+1))=(1,3)$ ya da $(3,1)$) için p , q_1, q_2, q_3 birbirinden farklı tek asal sayılar ve $q_1<q_2<q_3$ olmak üzere;

$$\begin{cases} Koşul\ 1) & n = p, & n+1 = 2q_1q_2q_3 & ya\ da \\ Koşul\ 2) & n = 2q_1q_2q_3, & n+1 = p & ya\ da \\ Koşul\ 3) & n = 2p, & n+1 = q_1q_2q_3 & ya\ da \\ Koşul\ 4) & n = q_1q_2q_3, & n+1 = 2p & 'dir. \end{cases} \tag{5.20}$$

Yukarıdaki koşulları ve $\varphi(n) = \varphi(n+1) = U(n) = U(n+1)$ eşitliğini sağlayan sadece tek bir çözüm vardır; $(n, n+1) = (194,195)$ 'dir.

İspat: *5.3 Lemma*'dan dolayı sadece *Koşul 3)* ve *Koşul 4)*'ü incelemek ispat için yeterlidir. Buna göre, *5.4 Lemma*'daki ifadeye benzer olarak,

$$(p-1) = (q_1-1)(q_2-1)(q_3-1) \tag{5.21}$$

eşitliği elde edilir.

Koşul 3) ve *Koşul 4)* incelenecek olursa;

Koşul 3) $n = 2p$ ve $n+1 = q_1q_2q_3$ ifadeleri $U(n) = U(n+1)$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\left(1-\frac{3}{q_1q_2q_3}\right) = 2\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\left(1-\frac{1}{q_2}\right)\left(1-\frac{1}{q_3}\right) \tag{5.22}$$

eşitliği elde edilir.

Eğer yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı, $q_1 \geq 5$ olacak şekilde seçilecek asal sayılar için düşünülecek olursa;

$$2(1-\frac{1}{q_1})(1-\frac{1}{q_2})(1-\frac{1}{q_3}) \geq 2(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11}) = \frac{96}{77} > 1 \tag{5.23}$$

elde edilir.

Benzer şekilde eşitliğin sol tarafı $q_1 \geq 5$ olacak şekilde seçilecek asal sayılar için düşünülecek olursa; $\left(1-\frac{3}{q_1q_2q_3}\right) < 1$'dir.

Bu yüzden $q_1 \geq 5$ olacak biçimde birbirinden bağımsız tek asal sayılar yoktur.

$q_1 = 3$ olduğu varsayılırsa,

$$p-1 = 2(q_2-1)(q_3-1) \tag{5.24}$$

ve

$$2p+1=3q_2q_3 \tag{5.25}$$

eşitlikleri elde edilir. Kolayca anlaşılacağı üzere,

q_2-4	q_3-4	(q_2,q_3)	$2p+1$	p	asal sayı
1	9	(5,13)	195	97	✓

Görüldüğü üzere sadece $q_1=3$ olduğu durumda $(n,n+1)=(194,195)$ çözümü vardır.

Koşul 4) $n=q_1q_2q_3$ ve $n+1=2p$ ifadeleri $(p-1)=(q_1-1)(q_2-1)(q_3-1)$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\left(1-\frac{1}{q_1q_2q_3}\right)=2\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\left(1-\frac{1}{q_2}\right)\left(1-\frac{1}{q_3}\right) \tag{5.26}$$

elde edilir.

$q_1\geq 5$ olmak üzere *Koşul 3)*'teki yönteme benzer biçimde,

$$2\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\left(1-\frac{1}{q_2}\right)\left(1-\frac{1}{q_3}\right)>1 \tag{5.27}$$

ve

$$1-\frac{1}{q_1q_2q_3}<1 \tag{5.28}$$

eşitlikleri elde edilir ki birbirine eşit olması gereken iki ifade aynı anda 1'den büyük ve küçük olamayacağından $q_1\geq 5$ olduğu durumlarda çözümü yoktur.

$q_1=3$ olduğu durumda, $(q_2-4)(q_3-4)=11$ olur ki $(q_2,q_3)=(5,15)$ 'dir. Fakat q_3 asal sayı olmadığı için $q_1=3$ olduğu durumda da çözümü yoktur.

Koşul 3) ve *Koşul 4)* birlikte değerlendirildiğinde $(n,n+1)=(194,195)$ dışında başka bir çözüm olmadığı görülmüştür.

5.5 Lemma'nın ispatı tamamlanmış olur.

□

5.6 Uyarı *Mathematica 11* programı kullanılarak $p<400$ olduğu durumlar için $U(2p)=p-1=(q_1-1)(q_2-1)(q_3-1)=U(q_1q_2q_3)$ eşitliğini sağlayan p,q_1,q_2,q_3 değerleri *Tablo 5.2*'de gösterilmiştir.

Tablo 5.2: p, q_1, q_2, q_3 asal sayıları.

p	(q_1,q_2,q_3)	$2p$	$q_1q_2q_3-1$	$q_1q_2q_3+1$	$U(n)=U(n+1)=\varphi(n)=\varphi(n+1)$
97	(3,5,13)	194	194	196	✓
193	(3,7,17)	386	356	358	X
241	(3,5,31)	482	464	466	X
241	(3,11,13)	482	428	430	X
241	(5,7,11)	482	384	386	X
337	(3,5,43)	674	644	646	X
337	(3,7,29)	674	608	610	X

5.6 Lemma ($(\omega_0(n),\omega_0(n+1))=(1,4)$ ya da $(4,1)$) için p,q_1,q_2,q_3,q_4 birbirinden farklı tek asal sayılar ve $q_1<q_2<q_3<q_4$ olmak üzere

$$\begin{cases} Koşul\ 1) & n=p, & n+1=2q_1q_2q_3q_4 & ya\ da \\ Koşul\ 2) & n=2q_1q_2q_3q_4, & n+1=p & ya\ da \\ Koşul\ 3) & n=2p, & n+1=q_1q_2q_3q_4 & ya\ da \\ Koşul\ 4) & n=q_1q_2q_3q_4, & n+1=2p & 'dir. \end{cases} \tag{5.29}$$

Yukarıdaki koşulları ve $\varphi(n)=\varphi(n+1)=U(n)=U(n+1)$ eşitliğini sağlayan sadece bir tek çözüm vardır; $(n,n+1)=(5186,5197)$ ’dir.

İspat: *5.5 Lemma* ile benzer biçimdedir.

□

5.7 Uyarı $n=2p$ ve $n+1=\prod_{i=1}^{l} p_i$ (ya da $n-1=\prod_{i=1}^{l} p_i$) olsun. Buradaki p_i ’ler birbirinden farklı tek asal sayılar ve $p_1<p_2<\cdots<p_l$ olmak üzere;

$\varphi(n)=\varphi(n+1)=U(n)=U(n+1)$ olsun, bu durumda

$$2p+1=\prod_{i=1}^{l} p_i \quad ya\ da\ \ 2p-1=\prod_{i=1}^{l} p_i \tag{5.30}$$

ve

$$2(p-1)=2\prod_{i=1}^{l}\left(p_i-1\right) \tag{5.31}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca

$$\left(1-\frac{3}{\prod_{i=1}^{l} p_i}\right)=2\prod_{i=1}^{l}\left(1-\frac{1}{p_i}\right) \; ya \;\; da \; \left(1-\frac{1}{\prod_{i=1}^{l} p_i}\right)=2\prod_{i=1}^{l}\left(1-\frac{1}{p_i}\right) \tag{5.32}$$

’dir. Sonuç olarak

$$2\prod_{i=1}^{l}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)+\frac{3}{\prod_{i=1}^{l} p_i} \geq 2\prod_{i=1}^{l}\left(1-\frac{1}{p[i]}\right)+\frac{3}{\prod_{i=1}^{l} p[i]} \tag{5.33}$$

olmalıdır.

Buradaki $p[i]$’ler sırayla i’ninci asal sayılardır. (5.33) eşitsizliğini sağlayan değerler *Tablo 5.3*’de gösterilmiştir.

Tablo 5.3: l ’ye göre asal p_1 ’in sınırı.

l	$asal\ sayı : p_1$
$l \geq 3$	$p_1 = 3$
$l \geq 7$	$p_1 = 3, 5$
$l \geq 15$	$p_1 = 3, 5, 7$
$l \geq 27$	$p_1 = 3, 5, 7, 11$
$l \geq 41$	$p_1 = 3, 5, 7, 11, 13$
$l \geq 62$	$p_1 = 3, 5, 7, 11, 13, 17$
$l \geq 85$	$p_1 = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$
$l \geq 115$	$p_1 = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$
$l \geq 150$	$p_1 = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$
$l \geq 186$	$p_1 = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$
$l \geq 229$	$p_1 = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37$

Örneğin eğer $p_1 = 37$ ise $n+1$ ya da $n-1 \geq 7534773823371551068211969121548009585$4
448562813684825899164450906575211194302595271668401101983869939381732612638998623206611662429606577160229020901205782073917872287545170087475416051810829082770128252239632108848112410020471053537071820944495466783441141350235206673537791638288156403092270817765326481786801984613929655564556240057253387090327408646177691210480786948103160891681120747752822120795047461510487499681318260518950750720460461809770083784175152694827481327217473207521113240463271667495953476979942523163306588508228211175306492220206792011220179262582125599316942865472809350391827624056808076918715076875409l’dir ve $n+1$ ya da $n-1$’in basamak sayısı $l \geq 229$ için 627 ’den büyüktür.

5.7 Lemma $p, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5$ birbirinden farklı tek asal sayılar ve $q_1 < q_2 < q_3 < q_4 < q_5$ olmak üzere;

$$\begin{cases} Koşul\ 1) & n = p, & n+1 = 2q_1q_2q_3q_4 & ya\ da \\ Koşul\ 2) & n = 2q_1q_2q_3q_4, & n+1 = p & ya\ da \\ Koşul\ 3) & n = 2p, & n+1 = q_1q_2q_3q_4q_5 & ya\ da \\ Koşul\ 4) & n = q_1q_2q_3q_4q_5 & n+1 = 2p & 'dir. \end{cases} \tag{5.34}$$

Yukarıdaki koşulları ve $\varphi(n) = \varphi(n+1) = U(n) = U(n+1)$ eşitliğini sağlayan herhangi n ve $n+1$ pozitif tamsayısı yoktur.

İspat: *5.5 Lemma* ile benzer biçimdedir.

□

Sonuç olarak *5.1 Lemma, 5.4 Lemma, 5.5 Lemma, 5.6 Lemma* ve *5.7 Lemma*'dan anlaşılacağı üzere $\varphi(n) = \varphi(n+1) = U(n) = U(n+1)$ ve (5.4) eşitliklerini sağlayan sıralı ikililer $(n, n+1) = (194, 195)$ ve $(n, n+1) = (5186, 5187)$ 'dir.

5.8 Lemma $q_2, \ldots, q_6$'ler 3'den büyük ve birbirinden farklı tek asal sayılar olmak üzere $S = \{q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$, $S' = \{q_i \in S \mid q_i \equiv -1 \pmod 3\}$ ve $S'' = S - S'$ olsun.

Eğer $\#S' \equiv 1 \pmod 2$ ise,

$$3\left(\prod_{i=2}^{6} q_i - 1\right) \neq 4\prod_{i=2}^{6}(q_i - 1) \tag{5.35}$$

olur.

İspat: Eğer $\#S' = 1$ ya da 3 ise,

$$\begin{cases} \prod_{i=2}^{6} q_i - 1 \equiv -1 - 1 \equiv -2 \pmod 3, \\ \dfrac{4}{3}\prod_{i=2}^{6}(q_i - 1) \equiv 0 \pmod 3 \text{ 'dür.} \end{cases} \tag{5.36}$$

Öte yandan eğer $\#S' = 5$ ise,

$$\begin{cases} 3\left(\prod_{i=2}^{6}(q_i - 1)\right) \equiv 0 \pmod 3, \\ 4\prod_{i=2}^{6}(q_i - 1) \not\equiv 0 \pmod 3 \text{ 'dür.} \end{cases} \tag{5.37}$$

(5.36) ve (5.37)'deki eşitliklerden ispat tamamlanır.

□

5.7 Uyarı $a \in \mathbb{N}$ ve $b,d \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $ayz - b(y+z) + d = 0$ olsun. Buradaki $\mathbb{Z}$ tamsayı halkasını belirtir. Başka bir ifadeyle,

$$(ay-b)(az-b) = -ad + b^2 \tag{5.38}$$

'dir.

(5.38)'deki eşitlikten dolayı, ifadenin en az bir (y,z) pozitif tam sayı çözümü varsa en az bir d_i pozitif tam sayısı vardır ki aşağıdaki şartları sağlar.

$$\begin{cases} d_i \,\big|\, -ad + b^2, \\ d_i + b \equiv 0(\bmod a), \\ \dfrac{-ad+b^2}{d_i} \equiv 0(\bmod a). \end{cases} \tag{5.39}$$

$\varphi(n) = \varphi(n+1) = U(n) = U(n+1)$ ile $\omega_0(n) = 1 \; (ya \; da \; \omega_0(n) = 6)$ ve $\omega_0(n+1) = 6 \; (ya \; da \; \omega_0(n+1) = 1)$ çözümü için,

5.9 Lemma $p, q_1, \ldots, q_6$ birbirinden farklı tek asal sayılar ve $q_1 < \ldots < q_6$ olmak üzere;

$$\begin{cases} Koşul\ 1) & n = p, & n+1 = 2q_1 \ldots q_6 & ya\ da \\ Koşul\ 2) & n = 2q_1 \ldots q_6, & n+1 = p & ya\ da \\ Koşul\ 3) & n = 2p, & n+1 = q_1 \ldots q_6 & ya\ da \\ Koşul\ 4) & n = q_1 \ldots q_6, & n+1 = 2p & 'dir. \end{cases} \tag{5.40}$$

Yukarıdaki koşulları ve $\varphi(n) = \varphi(n+1) = U(n) = U(n+1)$ eşitliğini sağlayan $p, q_1, \ldots, q_6$ birbirinden farklı tek asal sayılar için herhangi $(n, n+1)$ pozitif tamsayı ikilisi yoktur.

İspat: Diğer ispatlara benzer olarak *5.3 Lemma*'dan dolayı *Koşul 3)* ve *Koşul 4)*'ü incelemek yeterlidir. *Tablo 5.3*'e göre $q_1 = 3$ olarak alabiliriz.

İlk olarak *Koşul 3)*'ü düşünelim;

$$\begin{cases} n = 2p, \\ n+1 = 2p+1 = 3q_2 \ldots q_6. \end{cases} \tag{5.41}$$

Buradaki $q_1, \ldots, q_6$; $3 < q_2 < \ldots < q_6$ olacak biçimde birbirinden farklı tek asal sayılardır.

$\varphi(n) = \varphi(n+1) = U(n) = U(n+1)$ eşitliğinden dolayı,

$$3\left(\prod_{i=2}^{6} q_i - 1\right) = 4\prod_{i=2}^{6}(q_i - 1) \tag{5.42}$$

ve

$$1 = \frac{4}{3}\prod_{i=2}^{6}\left(1 - \frac{1}{q_i}\right) + \prod_{i=2}^{6}\frac{1}{(q_i - 1)} \tag{5.43}$$

’dir.

$f\left(p[i]\right) = \frac{4}{3}\prod_{j=i}^{i+4}\left(1 - \frac{1}{p[i]}\right) + \prod_{j=i}^{i+4}\frac{1}{p[i]} - 1$ fonksiyonunu düşünelim. Buradaki $p[i]$; i’ninci asal sayıdır. Sırasıyla, $p[1] = 2,\ p[2] = 3, \ldots$ ‘dir.

$f\left(p[5]\right) = -\frac{2858}{62491} < 0$ ve $f\left(p[6]\right) = \frac{37796}{2800733} > 0$ olacağından (5.42) eşitliğini sağlayan muhtemel asal sayılar kümesi $\{5, 7, 11\}$ ’dir.

Bu durumda (5.42) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$15\prod_{i=3}^{6} q_i - 3 = 16\prod_{i=3}^{6}(q_i - 1), \tag{5.44}$$

$$7\prod_{i=3}^{6} q_i - 1 = 8\prod_{i=3}^{6}(q_i - 1), \tag{5.45}$$

$$33\prod_{i=3}^{6} q_i - 3 = 40\prod_{i=3}^{6}(q_i - 1)'dir. \tag{5.46}$$

(5.44) eşitliğinde eğer $q_3 \equiv 1 \pmod 5$ ise denklemin sağ tarafı sol tarafına eşit olmayacaktır. Bu durumda, $q_3 \not\equiv 1 \pmod 5$ ’dir.

Ayrıca, q_3 için

q_3	$3 \cdot 5 \cdot q_3$	$16(q_3 - 1)$
13	195	192
17	255	256

olur.

$f_1\left(p[i]\right) = \frac{16}{15}\prod_{j=i}^{i+3}\left(1 - \frac{1}{p[i]}\right) + \prod_{j=i}^{i+3}\frac{1}{\left(p[i]\right)} - 1$ fonksiyonunu düşünelim. Bu durumda

$$\begin{cases} f_1\left(p[16]\right) = -\dfrac{202324}{6390045} < 0, \\ f_1\left(p[17]\right) = \dfrac{144986}{85602215} > 0. \end{cases} \tag{5.47}$$

olur ki, yukarıdaki ifadeyi sağlayan q_3 asal sayıları; $17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47$ ve 53'dür. Bu sayılar ayrı ayrı incelenecek olursa;

Koşul 3-a) $(q_1, q_2, q_3) = (3, 5, 17)$ olsun, bu durumda

$$3\times5\times17\times q_4q_5q_6 - 3 = 16^2(q_4-1)(q_5-1)(q_6-1) \tag{5.48}$$

olur.

$f_2\left(p[i]\right) = \dfrac{256}{255}\prod_{j=i}^{i+2}\left(1-\dfrac{1}{p[i]}\right) + \dfrac{1}{85}\prod_{j=i}^{i+2}\dfrac{1}{p[i]} - 1$ fonksiyonunu düşünelim. Buna göre

$$f_2\left(p[134]\right) < 0 \text{ ve } f_2\left(p[135]\right) > 0 \tag{5.49}$$

'dir.

$$255q_4 < 256(q_4-1) \text{ ve } q_4 > 256 \tag{5.50}$$

olduğu kolayca görülür.

Başka bir ifadeyle, $q_4 \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\, 5\right)$ ya da $q_4 \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\, 17\right)$'dir. Buna göre (5.48) eşitliğinin bir tamsayı çözümü yoktur. Bu durumda yukarıdaki ifadeyi sağlayan muhtemel q_4 asal sayılar kümesi;

$P_1 := \{257, 263, 269, 277, 283, 293, 313, 317, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 419, 433, 439, 449, 457, 463, 467, 479, 487, 499, 503, 509, 523, 547, 557, 563, 569, 577, 587, 593, 599, 607, 617, 619, 643, 653, 659, 673, 677, 683, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 757\}$'dir.

$f_3(x) := -255xyz + 3 + 256(x-1)(y-1)(z-1)$ fonksiyonunu düşünelim. $x \in P_1$ olacak biçimde x değerleri $f_3(x)$ fonksiyonunda yerlerine yazılırsa *Tablo 5.4*'teki Diophantine denklemler elde edilir.

Tablo 5.4: Diophantine denklemler (5.9 Lemma koşul 3-a).

x	$f_3(x)=0$	x	$f_3(x)=0$
257	65539-65536(y+z)+yz=0	499	127491-127488(y+z)+243yz=0
263	67075-67072(y+z)+7yz=0	503	128515-128512(y+z)+247yz=0
269	68611-68608(y+z)+13yz=0	509	130051-130048(y+z)+253yz=0
277	70659-70656(y+z)+21yz=0	523	133635-133632(y+z)+267yz=0
283	72195-72192(y+z)+27yz=0	547	139779-139776(y+z)+291yz=0
293	74755-74752(y+z)+37yz=0	557	142339-142336(y+z)+301yz=0
313	79875-79872(y+z)+57yz=0	563	143875-143872(y+z)+307yz=0
317	80899-80896(y+z)+61yz=0	569	145411-145408(y+z)+313yz=0
337	86019-86016(y+z)+81yz=0	577	147459-147456(y+z)+321yz=0
347	88579-88576(y+z)+91yz=0	587	150019-150016(y+z)+331yz=0
349	89091-89088(y+z)+93yz=0	593	151555-151552(y+z)+337yz=0
353	90115-90112(y+z)+97yz=0	599	153091-153088(y+z)+343yz=0
359	91651-91648(y+z)+103yz=0	607	155139-155136(y+z)+351yz=0
367	93699-93696(y+z)+111yz=0	617	157699-157696(y+z)+361yz=0
373	95235-95232(y+z)+117yz=0	619	158211-158208(y+z)+363yz=0
379	96771-96768(y+z)+123yz=0	643	164355-164352(y+z)+387yz=0
383	97795-97792(y+z)+127yz=0	653	166915-166912(y+z)+397yz=0
389	99331-99328(y+z)+133yz=0	659	168451-168448(y+z)+403yz=0
397	101379-101376(y+z)+141yz=0	673	172035-172032(y+z)+417yz=0
419	107011-107008(y+z)+163yz=0	677	173059-173056(y+z)+421yz=0
433	110595-110592(y+z)+177yz=0	683	174595-174592(y+z)+427yz=0
439	112131-112128(y+z)+183yz=0	709	181251-181248(y+z)+453yz=0
449	114691-114688(y+z)+193yz=0	719	183811-183808(y+z)+463yz=0
457	116739-116736(y+z)+201yz=0	727	185859-185856(y+z)+471yz=0
463	118275-118272(y+z)+207yz=0	733	187395-187392(y+z)+477yz=0
467	119299-119296(y+z)+211yz=0	739	188931-188928(y+z)+483yz=0
479	122371-122368(y+z)+223yz=0	743	189955-189952(y+z)+487yz=0
487	124419-124416(y+z)+231yz=0	757	193539-193536(y+z)+501yz=0

(5.39)’daki eşitlik kullanılarak, aşağıdaki sekiz Diophantine denklemin tam sayı çözümlere sahip olduğu anlaşılmaktadır. Fakat bu Diophantine denklemlerin (y,z) asal sayı çözümleri yoktur.

$65539-65536(y+z)+yz=0$,

$67075-67072(y+z)+7yz=0$,

$70659-70656y-70656z+21yz=0$,

$90115-90112(y+z)+97yz=0$,

$101379-101376y-101376z+141yz=0$,

$119299 - 119296(y+z) + 211yz = 0$,
$139779 - 139776y - 139776z + 291yz = 0$,
$183811 - 183808(y+z) + 463yz = 0$.

Sonuç olarak (5.48) eşitliğini sağlayan asal sayı çözümleri yoktur.

Koşul 3-b) $(q_1, q_2, q_3) = (3,5,19)$ olsun, bu durumda

$$3 \times 5 \times 19 q_4 q_5 q_6 - 3 = 16 \times 18(q_4 - 1)(q_5 - 1)(q_6 - 1) \qquad (5.51)$$

ve

$$95 q_4 q_5 q_6 - 1 = 96(q_4 - 1)(q_5 - 1)(q_6 - 1) \qquad (5.52)$$

olur.

$95q_4 < 96(q_4 - 1)$ eşitsizliği q_4'ün alt sınırını belirler, öyle ki,

$$q_4 > 96 \qquad (5.53)$$

'dir.

$f_4\left(p[i]\right) := \frac{96}{95}\prod_{j=i}^{i+2}\left(1 - \frac{1}{p[i]}\right) + \frac{1}{95}\prod_{j=i}^{i+2}\frac{1}{p[i]} - 1$ fonksiyonunu düşünelim. $f_4\left(p[60]\right) < 0$ ve $f_4\left(p[61]\right) > 0$ eşitsizlikleri q_4 için üst sınırı belirler, öyle ki,

$$q_4 \le p[60] = 281 \qquad (5.54)$$

'dir.

$q_4 \equiv 1 \pmod{5}$ ya da $q_4 \equiv 1 \pmod{19}$ ise (5.52) eşitliğinin çözümü yoktur.

Bu durumda yukarıdaki ifadeyi sağlayan muhtemel q_4 asal sayılar kümesi;

$P_2 := \{97,103,107,109,113,127,137,139,149,157,163,167,173,179,193,197,199,223,227,233,$
$239,257,263,269,277\}$'dir.

$f_5(x) := -95xyz + 3 + 96(x-1)(y-1)(z-1)$ fonksiyonunu düşünelim. $x \in P_2$ olacak biçimde $f_5(x)$ fonksiyonunda x'ler yerlerine yazılırsa *Tablo 5.5*'deki Diophantine denklemler elde edilir.

Tablo 5.5: Diophantine denklemler (5.9 Lemma koşul 3-b).

x	$f_5(x)=0$	x	$f_5(x)=0$
97	9217-9216 (y+z)+yz=0	179	17089=17088(y+z)+83yz=0
103	9793-9792(y+z)+7yz=0	193	18433=18432(y+z)+97yz=0
107	10177-10176(y+z)+11yz=0	197	18817=18816(y+z)+101yz=0
109	10369-10368(y+z)+13yz=0	199	19009=19008(y+z)+103yz=0
113	10753-10752(y+z)+17yz=0	223	21313=21312(y+z)+127yz=0
127	12097-12096(y+z)+31yz=0	227	21697=21696(y+z)+131yz=0
137	13057-13056(y+z)+41yz=0	233	22273=22272(y+z)+137yz=0
139	13249-13248(y+z)+43yz=0	239	22849=22848(y+z)+143yz=0
149	14209-14208(y+z)+53yz=0	257	24577=24576(y+z)+161yz=0
157	14977-14976(y+z)+61yz=0	263	25153=25152(y+z)+167yz=0
163	15553-15552(y+z)+67yz=0	269	25729=25728(y+z)+173yz=0
167	15937-15936(y+z)+71yz=0	277	26497=26496(y+z)+181yz=0
173	16513-16512(y+z)+77yz=0		

Tam sayı çözümü olan sadece dört Diophantine denklem vardır. Fakat bu Diophantine denklemlerin (y,z) asal sayı çözümleri yoktur.

$$99217-9216y-9216z+yz=0\,,$$
$$9793-9792y-9792z+7yz=0\,,$$
$$10369-10368y-10368z+13yz=0\,,$$
$$13249-13248y-13248z+43yz=0\,.$$

Sonuç olarak (5.51) eşitliğini sağlayan asal sayı çözümleri yoktur.

Koşul 3-c) $(q_1,q_2,q_3)=(3,5,23)$ olsun, bu durumda

$$3\times5\times23q_4q_5q_6-3=16\times22(q_4-1)(q_5-1)(q_6-1) \tag{5.55}$$

$345q_4<352(q_4-1)$ eşitsizliğinden dolayı q_4 alt sınırı 53'tür.

$f_6\left(p[i]\right):=\frac{352}{345}\prod_{j=i}^{i+2}\left(1-\frac{1}{p[i]}\right)+\frac{1}{115}\prod_{j=i}^{i+2}\frac{1}{p[i]}-1$ fonksiyonunu düşünelim. $f_6\left(p[34]\right)<0$ ve $f_6\left(p[35]\right)>0$ den dolayı q_4'ün üst sınırı 139'dur.

Önceki koşulun çözümü ile benzer biçimde $q_4\equiv1 \pmod 5$ ya da $q_4\equiv1 \pmod{23}$ ise çözüm yoktur.

Bu durumda yukarıdaki ifadeyi sağlayan olası q_4 asal sayılar kümesi; $P_3:=\{53,59,67,73,79,83,89,97,103,107,109,113,127,137\}$'dir.

$f_7(x) := -345xyz + 352(x-1)(y-1)(z-1)+3$ fonksiyonunu düşünelim. $x \in P_3$ olacak biçimde $f_7(x)$ fonksiyonunda x'leri yerlerine yazarsak *Tablo 5.6*'deki Diophantine denklemler elde edilir.

Tablo 5.6: Diophantine denklemler (5.9 Lemma koşul 3-c).

x	$f_7(x)=0$	x	$f_7(x)=0$
53	18307-18304(y+z)+19yz=0	89	30979-30976(y+z)+271yz=0
59	20419-20416(y+z)+61yz=0	97	33795-33792(y+z)+327yz=0
67	23235-23232(y+z)+117yz=0	109	38019-38016(y+z)+411yz=0
73	25347-25344(y+z)+159yz=0	113	39427-39424(y+z)+439yz=0
79	27459-27456(y+z)+201yz=0	127	44355-44352(y+z)+537yz=0
83	28867-28864(y+z)+229yz=0	137	47875-47872(y+z)+607yz=0

Sonuç olarak (5.55) eşitliğini sağlayan asal sayı çözümleri yoktur.

Koşul 3-d) $(q_1, q_2, q_3) = (3,5,29)$ olsun, bu durumda

$$435q_4q_5q_6 - 3 = 448(q_4-1)(q_5-1)(q_6-1) \tag{5.56}$$

$435q_4 < 448(q_4-1)$ eşitsizliğinden dolayı q_4 alt sınırı 37'dir.

$f_8\left(p[i]\right) := \dfrac{448}{435}\prod_{j=i}^{i+2}\left(1-\dfrac{1}{p[i]}\right)+\dfrac{1}{145}\prod_{j=i}^{i+2}\dfrac{1}{p[i]}-1$ fonksiyonunu düşünelim. $f_8\left(p[25]\right)<0$ ve $f_8\left(p[26]\right)>0$ den dolayı q_4'ün üst sınırı 97'dir.

Eğer $q_4 \equiv 1 \pmod 5$ ya da $q_4 \equiv 1 \pmod{29}$ ise çözüm yoktur.

Bu durumda $f_9(x) := -435xyz + 448(x-1)(y-1)(z-1)+3$ fonksiyonunu düşünelim. *Tablo 5.7*'teki Diophantine denklemler elde edilir.

Tablo 5.7: Diophantine denklemler (5.9 Lemma koşul 3-d).

x	$f_9(x)=0$	x	$f_9(x)=0$
37	16131-16128(y+z)+33yz=0	73	32259-32256(y+z)+501yz=0
43	18819-18816(y+z)+111yz=0	79	34947-34944(y+z)+579yz=0
47	20611-20608(y+z)+163yz=0	83	36739-36736(y+z)+631yz=0
53	23299-23296(y+z)+241yz=0	89	39427-39424(y+z)+709yz=0
67	29571-29568(y+z)+423yz=0	97	43011-43008(y+z)+813yz=0

Tablo 5.7'deki verilere göre olarak (5.56) eşitliğini sağlayan $(y,z) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ asal sayı çözümleri yoktur.

Koşul 3-e) $(q_1,q_2,q_3)=(3,5,37)$ olsun, bu durumda

$$185q_4q_5q_6-1=192(q_4-1)(q_5-1)(q_6-1) \tag{5.57}$$

'dir.

Buradaki

$$q_4>37,\ q_4\not\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,5)\ \text{ ve }\ q_4\not\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,37) \tag{5.58}$$

'dir.

$f_{10}\left(p[i]\right):=\frac{192}{1855}\prod_{j=i}^{i+2}\left(1-\frac{1}{p[i]}\right)+\frac{1}{185}\prod_{j=i}^{i+2}\frac{1}{p[i]}-1$ fonksiyonunu düşünelim,

$$f_{10}\left(p[21]\right)<0\ \text{ ve }\ f_{10}\left(p[22]\right)>0 \tag{5.59}$$

olur.

$f_{11}(x):=-185xyz+192(x-1)(y-1)(z-1)+1$ fonksiyonunu düşünelim. *Tablo 5.8*'deki Diophantine denklemler elde edilir.

Tablo 5.8: Diophantine denklemler (5.9 Lemma koşul 3-e).

x	$f_{11}(x)=0$	x	$f_{11}(x)=0$
43	8065-8064(y+z)+109yz=0	59	11137-11136(y+z)+221yz=0
47	8833-8832(y+z)+137yz=0	67	12673-12672(y+z)+277yz=0
53	9985-9984(y+z)+179yz=0	73	13825-13824(y+z)+319yz=0

Diğer çözümler ile benzer biçimde *Koşul 3-e)*'nin *Tablo 5.8*'deki verilere göre (5.57) eşitliğini sağlayan $(y,z)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ asal sayı çözümleri yoktur.

Koşul 3-f) $(q_1,q_2,q_3)=(3,5,43)$, $(3,5,47)$ ya da $(3,5,53)$ olsun, bu durumda (5.42) eşitliğinde $q_3=43$, 47 ya da 53 değerleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}215q_4q_5q_6-1&=224(q_4-1)(q_5-1)(q_6-1)\\705q_4q_5q_6-3&=736(q_4-1)(q_5-1)(q_6-1)\\795q_4q_5q_6-3&=832(q_4-1)(q_5-1)(q_6-1)\end{aligned} \tag{5.60}$$

'dir.

$f_{12}(x):=-215xyz+224(x-1)(y-1)(z-1)+1$,

$f_{13}(x):=-705xyz+736(x-1)(y-1)(z-1)+3$,

$f_{14}(x):=-795xyz+832(x-1)(y-1)(z-1)+3$

fonksiyonlarını düşünelim, *Koşul 3-d)*'deki çözüm yöntemine benzer şekilde *Tablo 5.9*'daki Diophantine denklemler elde edilir.

Tablo 5.9: Diophantine denklemler (5.9 Lemma koşul 3-f).

x	$f_{12}(x)=0$	x	$f_{12}(x)=0$
47	10305-10304(y+z)-199yz=0	59	12993-12992(y+z)-307yz=0
53	11649-11648(y+z)-253yz=0	67	14785-14784(y+z)-379yz=0
x	$f_{13}(x)=0$	x	$f_{13}(x)=0$
53	38275-38272(y+z)-907yz=0	59	42691-42688(y+z)-1093yz=0
x	$f_{14}(x)=0$		
59	48259-48256(y+z)-1351yz=0		

Tablo 5.9'dan anlaşılacağı üzere yedi Diophantine denkleminde tamsayı çözümleri yoktur.

(5.45) eşitliğinde $q_1=3$ ve $q_2=7$ değerleri yazılırsa ve $f_{15}\left(p[i]\right):=\frac{8}{7}\prod_{j=i}^{i+3}\left(1-\frac{1}{p[i]}\right)+\frac{1}{7}\prod_{j=i}^{i+3}\frac{1}{p[i]}-1$ fonksiyonu ile birlikte düşünülürse, $f_{15}(p[9])=-\frac{33102}{5355343}<0$ ve $f_{15}(p[10])=\frac{130320}{9546481}>0$ elde edilir.

Bu durumda yukarıdaki ifadeyi sağlayan muhtemel q_3 asal sayılar kümesi; $\{11,13,17,19,23\}$ 'dir.

Şimdi $q_1=3,\ q_2=7$ ve $q_3=11,13,17,19,23$ olacak biçimde adım adım (5.45) eşitliğini düşünelim.

Koşul 3-g) $(q_1,q_2,q_3)=(3,7,11)$ olsun, bu durumda

$$77q_4q_5q_6-1=80(q_4-1)(q_5-1)(q_6-1) \tag{5.61}$$

'dir.

Benzer biçimde q_4 muhtemel asal tam sayıların alt sınırı 29 ve üst sınırı 73'tür.

Eğer $q_4\equiv 1 \pmod 7$ ya da $q_4\equiv 1 \pmod{11}$ ise (5.61) eşitliğinin tam sayı çözümü yoktur.

Bu durumda muhtemel q_4 asal sayılar kümesi; $\{31,37,41,47,53,61,73\}$ 'dir.

$f_{16}(x):=-77xyz+80(x-1)(y-1)(z-1)+1$ fonksiyonunu düşünelim, *Koşul 3-d)*'deki çözüm yöntemine benzer şekilde *Tablo 5.10*'daki Diophantine denklemler elde edilir.

Tablo 5.10: Diophantine denklemler (5.9 Lemma koşul 3-g).

x	$f_{16}(x)=0$	x	$f_{16}(x)=0$
31	2401-2400(y+z)+13yz=0	53	4161-4160(y+z)+79yz=0
37	2881-2880(y+z)+31yz=0	59	4641-4640(y+z)+97yz=0
41	3201-3200(y+z)+43yz=0	61	4801-4800(y+z)+103yz=0
47	3681-3680(y+z)+61yz=0	73	5761-5760(y+z)+139yz=0

Tablo 5.10'a göre tamsayı çözümü olan iki Diophantine denklem vardır. Bu denklemler $2881-2880(y+z)+31yz=0$ ve $3201-3200(y+z)+43yz=0$'dir. Fakat $(y,z)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ asal sayı çözümleri yoktur.

Koşul 3-h) $(q_1,q_2,q_3)=(3,7,13)$ olsun, bu durumda

$$91q_4q_5q_6-1=96(q_4-1)(q_5-1)(q_6-1) \tag{5.62}$$

'dir.

$f_{17}(x):=-91xyz+96(x-1)(y-1)(z-1)+1$ fonksiyonunu düşünelim

Bu durumda *Tablo 5.11*'deki Diophantine denklemler elde edilir.

Tablo 5.11: Diophantine denklemler (5.9 Lemma koşul 3-h).

x	$f_{17}(x)=0$	x	$f_{17}(x)=0$
23	2113-2112(y+z)-19yz=0	41	3841-3840(y+z)-109yz=0
31	2881-2880(y+z)-59yz=0	47	4417-4416(y+z)-139yz=0
37	3457-3456(y+z)-89yz=0		

Tablo 5.11'e göre $(y,z)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ asal sayı çözümleri yoktur.

Koşul 3-i) $(q_1,q_2,q_3)=(3,7,17)$ ya da $(3,7,19)$ olsun, bu durumda

$$119q_4q_5q_6-1=128(q_4-1)(q_5-1)(q_6-1) \tag{5.63}$$

ve

$$133q_4q_5q_6-1=144(q_4-1)(q_5-1)(q_6-1) \tag{5.64}$$

'dir.

İki denklemi düşünecek olursak diğer çözümlere benzer biçimde,

$$f_{18}(x):=-119xyz+128(x-1)(y-1)(z-1)+1,$$
$$f_{19}(x):=-133xyz+144(x-1)(y-1)(z-1)+1$$

fonksiyonları elde edilir.

Tablo 5.12'deki Diophantine denklemler elde edilir.

Tablo 5.12: Diophantine denklemler (5.9 Lemma koşul 3-i).

x	$f_{18}(x)=0$	x	$f_{18}(x)=0$
19	2305-2304(y+z)-43yz=0	31	3841-3840(y+z)-151yz=0
23	2817-2816(y+z)-79yz=0	37	4609-4608(y+z)-205yz=0
x	$f_{19}(x)=0$	x	$f_{19}(x)=0$
23	3169-3168(y+z)-109yz=0	31	4321-4320(y+z)-197yz=0

Tablo 5.12'ye göre $(y,z)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ asal sayı çözümleri yoktur.

Koşul 3-j) $(q_1,q_2,q_3)=(3,7,23)$ olsun, bu durumda

$$161q_4q_5q_6-1=176(q_4-1)(q_5-1)(q_6-1) \tag{5.65}$$

'dir. Muhtemel asal sayı q_4'ün alt sınırı ve üst sınırı 29'dur. Fakat $29\equiv 1\left(\operatorname{mod} 7\right)$'dir.

Bu yüzden (5.65) eşitliğini sağlayan asal sayılar yoktur.

(5.46) eşitliliğini $q_1=3$ ve $q_2=11$ değerlerini yerlerine yazılırsa;

$$33q_3q_4q_5q_6-3=40(q_3-1)(q_4-1)(q_5-1)(q_6-1) \tag{5.66}$$

elde edilir.

$f_{20}\left(p[i]\right):=\dfrac{40}{33}\prod_{j=i}^{i+3}\left(1-\dfrac{1}{p[i]}\right)+\dfrac{1}{11}\prod_{j=i}^{i+3}\dfrac{1}{p[i]}-1$ fonksiyonunu düşünelim, $f_{20}(p[7])<0$ ve $f_{20}(p[8])>0$ olacağından dolayı q_3'ün muhtemel asal sayı değerleri kümesi $\{13,17\}$'dir.

Bu değerler ayrı ayrı incelenecek olursa;

Koşul 3-k) $(q_1,q_2,q_3)=(3,11,13)$ ve $(3,11,17)$ olsun bu durumda,

$$f_{21}(x):=-143xyz+160(x-1)(y-1)(z-1)+1,$$
$$f_{22}(x):=-561xyz+640(x-1)(y-1)(z-1)+3$$

fonksiyonlarını düşünelim.

Tablo 5.13'deki Diophantine denklemler elde edilir.

Tablo 5.13: Diophantine denklemler (5.9 Lemma koşul 3-k).

x	$f_{21}(x)=0$	x	$f_{22}(x)=0$
13	1921-1920(y+z)-61yz=0	19	11523-11520(y+z)-861yz=0
17	2561-2560(y+z)-129yz=0		

Tablo 5.13'e göre $(y,z)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ asal sayı çözümleri yoktur.

Sonuç olarak *Koşul 3-a) ~ Koşul 3-k)*'dan dolayı *Koşul 3)* şartlarını sağlayan $\left(p,q_1\ldots q_6\right)$ asal sayı değerleri yoktur.

Koşul 4)'ü sağlayan değerler araştırılacak olursa,

$$n=3q_2\cdots q_6 \ \ ve \ \ n+1=2p \tag{5.67}$$

$\varphi(n)=\varphi(n+1)=U(n)=U(n+1)$ eşitliğinden yola çıkarak,

$$3\prod_{i=2}^{6}q_i-1=4\prod_{i=2}^{6}(q_i-1) \tag{5.68}$$

eşitliği elde edilir. Kolayca görüleceği üzere,

$$3\prod_{i=2}^{6}q_i-1\not\equiv 4\prod_{i=2}^{6}(q_i-1) \quad \left(\bmod 3\right) \quad , q_2\equiv 1 \quad \left(\bmod 3\right) \tag{5.69}$$

'dir.

$f_{23}\left(p[i]\right):=\dfrac{4}{3}\prod_{j=i}^{i+4}\left(1-\dfrac{1}{p[j]}\right)+\dfrac{1}{3}\prod_{j=i}^{i+4}\dfrac{1}{p[j]}-1$ fonksiyonunu düşünelim, $f_{23}\left(p[5]\right)=-\dfrac{145760}{3187041}$ ve $f_{23}\left(p[6]\right)=\dfrac{8722}{646323}$ olacağından q_2 muhtemel asal sayı kümesi $\{5,11\}$'dir.

$q_1=3$ ve $q_2=5$ için (5.68) eşitliği,

$$15\prod_{i=3}^{6}q_i-1=16\prod_{i=3}^{6}(q_i-1) \tag{5.70}$$

olur.

(5.47) ifadesine benzer şekilde, q_3 asal tamsayılarının alt sınırı 17 ve üst sınırı 53'tür.

(5.70) eşitliğinden $q_3\not\equiv 1 \quad \left(\bmod 3\right)$ ve $q_3\not\equiv 1 \quad \left(\bmod 5\right)$ olur.

Sonuç olarak olası q_3 asal sayılar kümesi; $\{17,23,29,47,53\}$'dür.

Koşul 4-a) $(q_1,q_2,q_3)=(3,5,17)$ olsun bu durumda (5.68) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$255q_4q_5q_6-1=256(q_4-1)(q_5-1)(q_6-1) \tag{5.71}$$

eşitliği elde edilir.

Koşul 3-a)'daki ile aynı yöntemi kullanarak muhtemel q_4 asal sayının alt ve üst sınırını *Koşul 3-a)* ile aynı olduğu kolayca bulunabilir.

Ayrıca $q_4 \not\equiv 1 \pmod 3$, $q_4 \not\equiv 1 \pmod 5$ ve $q_4 \not\equiv 1 \pmod{17}$'dir.

$f_{24}(x)=f_3(x)-2=-255q_4q_5q_6+1+256(q_4-1)(q_5-1)(q_6-1)$ fonksiyonunu düşünelim.

Tablo 5.14'deki Diophantine denklemler elde edilir.

Tablo 5.14: Diophantine denklemler (5.9 Lemma koşul 4-a).

x	$f_{24}(x)=0$	x	$f_{24}(x)=0$
257	65537-65536(y+z)+yz=0	509	130049-130048(y+z)+253yz=0
263	67073-67072(y+z)+7yz=0	557	142337-142336(y+z)+301yz=0
269	68609-68608(y+z)+13yz=0	563	143873-143872(y+z)+307yz=0
293	74753-74752(y+z)+37yz=0	569	145409-145408(y+z)+313yz=0
317	80897-80896(y+z)+61yz=0	587	150017-150016(y+z)+331yz=0
347	88577-88576(y+z)+91yz=0	593	151553-151552(y+z)+337yz=0
353	90113-90112(y+z)+97yz=0	599	153089-153088(y+z)+343yz=0
359	91649-91648(y+z)+103yz=0	617	157697-157696(y+z)+361yz=0
383	97793-97792(y+z)+127yz=0	653	166913-166912(y+z)+397yz=0
389	99329-99328(y+z)+133yz=0	659	168449-168448(y+z)+403yz=0
419	107009-107008(y+z)+163yz=0	677	173057-173056(y+z)+421yz=0
449	114689-114688(y+z)+193yz=0	683	174593-174592(y+z)+427yz=0
467	119297-119296(y+z)+211yz=0	719	183809-183808(y+z)+463yz=0
479	122369-122368(y+z)+223yz=0	743	189953-189952(y+z)+487yz=0
503	128513-128512(y+z)+247yz=0		

Tablo 5.14'e göre tamsayı çözümü olan iki Diophantine denklem vardır.

Bu denklemler $65537-65536(y+z)+yz=0$ ve $90113-90112(y+z)+97yz=0$'dir. Fakat $(y,z)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ asal sayı çözümleri yoktur.

Koşul 4-b) $(q_1,q_2,q_3)=(3,5,23)$ olsun bu durumda (5.68) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$345q_4q_5q_6-1=352(q_4-1)(q_5-1)(q_6-1) \tag{5.72}$$

eşitliği elde edilir.

Koşul 3-c)' deki ile aynı yöntemi kullanarak muhtemel q_4 asal sayısının alt ve üst sınırlarının *Koşul 3-c)* ile aynı olduğu kolayca anlaşılabilir.

Ayrıca $q_4 \not\equiv 1 \pmod{3}$, $q_4 \not\equiv 1 \pmod{5}$ ve $q_4 \not\equiv 1 \pmod{23}$'dir.

Sonuç olarak olası q_4 asal sayılar kümesi; $\{53, 59, 83, 89, 107, 113, 137\}$'dir.

$f_{25}(x) = f_7(x) - 2 := -345xyz + 352(x-1)(y-1)(z-1) + 1$ fonksiyonunu düşünelim.

Tablo 5.15'deki Diophantine denklemler elde edilir.

Tablo 5.15: Diophantine denklemler (5.9 Lemma koşul 4-b).

x	$f_{25}(x)=0$	x	$f_{25}(x)=0$
53	18305-18304(y+z)+19yz=0	107	37313-37312(y+z)+397yz=0
59	20417-20416(y+z)+61yz=0	113	39425-39424(y+z)+439yz=0
83	28865-28864(y+z)+229yz=0	137	47873-47872(y+z)+607yz=0
89	30977-30976(y+z)+271yz=0		

Tablo 5.15'e göre $(y,z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ asal sayı çözümleri yoktur.

Koşul 4-c) $(q_1, q_2, q_3) = (3, 5, 29)$ olsun bu durumda (5.68) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$435q_4q_5q_6 - 1 = 448(q_4-1)(q_5-1)(q_6-1) \tag{5.73}$$

Koşul 3-d)'deki ile aynı yöntemi kullanarak muhtemel q_4 asal sayısının alt ve üst sınırlarının *Koşul 3-d)* ile aynı olduğu kolayca anlaşılabilir.

Bu durumda, $q_4 \not\equiv 1 \pmod{3}$, $q_4 \not\equiv 1 \pmod{5}$ ve $q_4 \not\equiv 1 \pmod{29}$'dir.

$f_{26}(x) = f_9(x) - 2 := -435xyz + 448(x-1)(y-1)(z-1) + 1$ fonksiyonunu düşünelim.

Tablo 5.16'daki Diophantine denklemler elde edilir.

Tablo 5.16: Diophantine denklemler (5.9 Lemma koşul 4-c).

x	$f_{26}(x)=0$	x	$f_{26}(x)=0$
47	20609-20608(y+z)+163yz=0	83	36737-36736(y+z)+631yz=0
53	23297-23296(y+z)+241yz=0	89	39425-39424(y+z)+709yz=0

Tablo 5.16'ya göre $(y,z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ asal sayı çözümleri yoktur.

Koşul 4-d) $(q_1, q_2, q_3) = (3, 5, 47)$ ve $(3, 5, 53)$ olsun bu durumda (5.68) eşitliği için

$f_{27}(x) := -705xyz + 736(x-1)(y-1)(z-1) + 1$,

$f_{28}(x) := -795xyz + 832(x-1)(y-1)(z-1)+1$

fonksiyonları düşünelim. *Tablo 5.17*'deki Diophantine denklemler elde edilir.

Tablo 5.17: Diophantine denklemler (5.9 Lemma koşul 4-d).

x	$f_{27}(x)=0$	x	$f_{28}(x)=0$
53	38273-38272(y+z)-907yz=0	59	48257-48256(y+z)-1351yz=0
59	42689-42688(y+z)-1093yz=0		

Tablo 5.17'ye göre $(y,z)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ asal sayı çözümleri yoktur.

(5.46) eşitliğinde $q_1=3$ ve $q_2=11$ değerleri yerlerine yazılırsa, kolayca anlaşılacağı üzere, $q_3 \not\equiv 1 \pmod{3}$ ve $q_3 \not\equiv 1 \pmod{11}$'dir.

Bu durumda sadece $q_3=17$ asal sayısı için incelemek yeterli olacaktır.

Koşul 4-e) $(q_1,q_2,q_3)=(3,11,17)$ olsun bu durumda

$$561q_4q_5q_6 - 1 = 640(q_4-1)(q_5-1)(q_6-1) \qquad (5.74)$$

elde edilir.

Diğer çözümlere benzer biçimde olası q_4 asal sayısı 19 olarak bulunur.

$f_{29}(x) := -561q_4q_5q_6 + 640(q_4-1)(q_5-1)(q_6-1)+1$ fonksiyonunu düşünelim,

$f_{29}(19) = 11523 - 11520y - 11520z + 861yz = 0$ olcak biçimde $(y,z)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ asal sayı çözümleri yoktur.

5.9 Lemma'nın ispatlanmış olur.

□

İspat 5.1. Teorem: *5.1 Lemma, 5.4 Lemma, 5.5 Lemma, 5.6 Lemma, 5.7 Lemma* ve *5.9 Lemma* 'dan ispat tamamlanır.

□

Sonuç olarak *5.1 Teorem*'i ve $\varphi(n)=\varphi(n+1)=U(n)=U(n+1)$ ifadesini sağlayan sadece iki adet sıralı ikili vardır. Bu değerler $(n,n+1)=(194,195)$ ve $(n,n+1)=(5186,5187)$'dir.

6. $U(n)$ FONKSİYONUNUN KUVVET SERİLERİ

Bu bölümde katsayıları mutlak Möbius Bölen Fonksiyonu yardımıyla oluşturulmuş $G_n(x)$ kuvvet serileri ve özellikleri araştırılmıştır.

6.1 Tanım $n \geq 1$ bir pozitif tam sayı, $U_i(n)$ Mutlak Möbius Bölen Fonksiyonu'nun adımları ve $Ord(n) = m$ olmak üzere $U_0(n) = n$ ve $U_m(n) = U_{m+1}(U(n)) = U_{m+2}(U(n)) = \ldots = 1$ olsun bu durumda **kuvvet serisi**;

$$G_n(x) := \sum_{i=0}^{\infty} U_i(n) x^i \tag{6.1}$$

olarak tanımlanır.

6.1 Örnek $n \geq 1$, $|x| < 1$ için bazı kuvvet serileri;

$$G_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{-1}{x-1},$$

$$G_2(x) = 2 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{x-2}{x-1},$$

$$G_3(x) = 3 + 2x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{x^2 + x - 3}{x-1},$$

$$G_4(x) = 4 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{3x-4}{x-1},$$

$$G_5(x) = 5 + 4x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{3x^2 + x - 5}{x-1},$$

$$G_6(x) = 6 + 2x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{4x - 6 + x^2}{x-1}$$

'dir.

Kolayca anlaşılacağı üzere derecesi artan terimler için $U_m(n) = 1$ katsayısına ait ilk terimden sonraki bütün terimlerin katsayısı 1'dir.

Bütün $n \in \mathbb{N} - \{1\}$'ler için $Ord(n) = m$ olacak biçimde $m \in \mathbb{N}$ vardır ve *4.2 Sonuç*'tan dolayı $\{U_k(n)\}$ serisi azalandır.

6.1 Lemma $|x| < 1$, $g(x)$ ve $f(x)$ farklı polinomlar olmak üzere, $G_n(x)$ aşağıdaki gibi rasyonel formda yazılabilir.

$$G_n(x)=\sum_{i=0}^{\infty}U_i(n)x^i=\frac{g(x)}{f(x)} \tag{6.2}$$

İspat: n bir pozitif tamsayı ve $Ord(n)=m$ olsun, bu durumda

$$G_n(x)=\sum_{i=0}^{\infty}U_i(n)x^i=U_0(n)+U_1(n)x+\ldots+U_m(n)x^m+U_{m+1}(n)x^{m+1}+\ldots \tag{6.3}$$

'dir.

Kolayca anlaşılacağı üzere $U_m(n)=U_{m+1}(n)=\ldots=1$ olacağından,

$$\begin{aligned}G_n(x)&=\sum_{i=0}^{\infty}U_i(n)x^i=U_0(n)+\ldots+U_{m-1}(n)x^{m-1}+U_m(n)x^m+U_{m+1}(n)x^{m+1}+\ldots\\&=\underbrace{U_0(n)+U_1(n)x+\ldots+U_{m-1}(n)x^{m-1}}_{K(x):\, sonlu\ kısım}+\underbrace{x^m+x^{m+1}+\ldots}_{L(x):\, sonsuz\ kısım}\end{aligned} \tag{6.4}$$

$L(x)$ serisi için,

$$\begin{aligned}L(x)&=x^m+x^{m+1}+\ldots\\&=x^m(1+x+x^2+\ldots)\\&=x^m\left(\frac{1}{1-x}\right)\\&=\left(\frac{x^m}{1-x}\right)\end{aligned} \tag{6.5}$$

'dir.

Bu durumda,

$$\begin{aligned}G_n(x)&=\sum_{i=0}^{\infty}S_i(n)x^i\\&=K(x)+L(x)\\&=K(x)+\left(\frac{x^m}{1-x}\right)\\&=\frac{(1-x)K(x)+x^m}{1-x}\end{aligned} \tag{6.6}$$

olur.

Sonuç olarak $(1-x)K(x)+x^m$ ve $1-x$ ifadeleri birer polinomdur. Bu durumda $(1-x)K(x)+x^m = g(x)$ ve $1-x = f(x)$ olacak biçimde $g(x)$ ve $f(x)$ polinomları vardır. $G_n(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ 'dir.

□

6.1 Sonuç n bir pozitif tamsayı ve $Ord(n) = m$ olmak üzere, *6.1 Lemma*'daki sonlu kısım olan $K(x)$ için $der(K(x)) = m-1$'dir.

İspat: *6.1 Lemma*'dan ispat aşikârdır.

□

6.1 Teorem $|x|<1$, n bir pozitif tamsayı ve $G_n(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ olmak üzere,

$$Ord(n) = der(g(x)) - der(f(x)) + 1 \tag{6.7}$$

'dir.

İspat: n bir pozitif tamsayı ve $Ord(n) = m$ olsun, *6.1 Lemma*'dan ve *6.1 Sonuç*'tan

$$G_n(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{(1-x)K(x)+x^m}{1-x} \tag{6.8}$$

elde edilir. Ayrıca $der(g(x)) = der((1-x)K(x)+x^m)$ ve $der(f(x)) = der(1-x)$'dir.

Buna göre,

$$\begin{aligned} der(g(x)) &= der((1-x)K(x)+x^m) \\ &= Sup\left[der((1-x)K(x)),\ der(x^m)\right] \\ &= Sup\left[(der((1-x)) + der(K(x))),\ der(x^m)\right] \\ &= Sup\left[(1+(m-1)), m\right] \\ &= Sup\left[m,\ m\right] \\ &= m \end{aligned} \tag{6.9}$$

ve

$$der(f(x)) = der(1-x) = 1 \tag{6.10}$$

'dir.

Sonuç olarak (6.9) ve (6.10) eşitliklerinden, $Ord(n) = m$ olduğu durumda $deg(g(x)) - deg(f(x)) + 1 = m - 1 + 1 = m$ 'dir.

6.1 Teorem'in ispatı tamamlanmış olur.

□

7. MÖBIUS - STIRLING SAYILARI

Bu bölümde birinci tip Stirling sayılarına benzer olarak Möbius-Stirling sayıları tanımlanmış ve bazı özellikleri verilmiştir.

7.1 Tanım $n,k,m>0$ pozitif tamsayılar ve $2\le m\le (Ord(n)+2)$ olmak üzere birinci tip Stirling sayılarının üreteç fonksiyonuna benzer biçimde Möbius-Stirling sayılarının üreteç fonksiyonu,

$$P_{n,m}(x):=x\left(x+U_0(n)\right)\left(x+U_1(n)\right)\ldots\left(x+U_{m-3}(n)\right)\left(x+U_{m-2}(n)\right) \tag{7.1}$$

şeklinde tanımlanır. Başka bir ifadeyle

$$P_{n,m}(x):=\sum_{i=1}^{m}\begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}_n x^i \tag{7.2}$$

’dir.

7.2 Tanım eşitliğindeki x^i ’lerin katsayıları olan $\begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}_n$ ’lere **Möbius-Stirling sayıları** denir.

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_n=0$ olarak kabul edilir.

7.1 Teorem $k,n,m\in\mathbb{Z}^+$ ve $k\le m$ olsun. Bu durumda $\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_n$ Möbius-Stirling sayısı için

$$\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_n=\begin{bmatrix} m-1 \\ k \end{bmatrix}_n\times U_{(m-2)}(n)+\begin{bmatrix} m-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_n \tag{7.3}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (7.1) eşitliğindeki üreteç fonksiyonu $P_{n,m}(x)$ için,

$$P_{n,m}(x)=x\left(x+U_0(n)\right)\left(x+U_1(n)\right)\ldots\left(x+U_{m-3}(n)\right)\left(x+U_{m-2}(n)\right) \tag{7.4}$$

’dir. Bu eşitliği,

$$P_{n,m}(x)=(\sum_{i=1}^{m-1}\begin{bmatrix} m-1 \\ i \end{bmatrix}_n x^i)\left(x+U_{m-2}(n)\right) \tag{7.5}$$

şeklinde gösterebiliriz.

Bu durumda, (7.2) ve (7.5) ifadelerinin birbirine eşitliğinden,

$$\sum_{i=1}^{m}\begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}_n x^i = (\sum_{i=1}^{m-1}\begin{bmatrix} m-1 \\ i \end{bmatrix}_n x^i)\left(x+U_{m-2}(n)\right) \tag{7.6}$$

eşitliği elde edilir.

Eşitliğin her iki tarafı da polinom formunda açılırsa,

$$\begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix}_n x+\begin{bmatrix} m \\ 2 \end{bmatrix}_n x^2+\ldots+\begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix}_n x^m=\left(\begin{bmatrix} m-1 \\ 1 \end{bmatrix}_n x+\begin{bmatrix} m-1 \\ 2 \end{bmatrix}_n x^2+\ldots+\begin{bmatrix} m-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_n x^{m-1}\right)\left(x+U_{m-2}(n)\right) \tag{7.7}$$

eşitliği elde edilir.

Polinom eşitliğinden dereceleri aynı olan x^i ’li terimler birbirine eşitlenirse;

$$\begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix}_n x=\begin{bmatrix} m-1 \\ 1 \end{bmatrix}_n U_{m-2}(n)x,$$

$$\begin{bmatrix} m \\ 2 \end{bmatrix}_n x^2=\left(\begin{bmatrix} m-1 \\ 2 \end{bmatrix}_n U_{m-2}(n)+\begin{bmatrix} m-1 \\ 1 \end{bmatrix}_n\right)x^2,$$

$$\begin{bmatrix} m \\ 3 \end{bmatrix}_n x^3=\left(\begin{bmatrix} m-1 \\ 3 \end{bmatrix}_n U_{m-2}(n)+\begin{bmatrix} m-1 \\ 2 \end{bmatrix}_n\right)x^3,$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_n x^k=\left(\begin{bmatrix} m-1 \\ k \end{bmatrix}_n U_{m-2}(n)+\begin{bmatrix} m-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_n\right)x^k, \tag{7.8}$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} m \\ m-1 \end{bmatrix}_n x^{(m-1)}=\left(\begin{bmatrix} m-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_n U_{m-2}(n)+\begin{bmatrix} m-1 \\ m-2 \end{bmatrix}_n\right)x^{(m-1)},$$

$$\begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix}_n x^m=\begin{bmatrix} m-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_n x^m.$$

eşitlikleri elde edilir.

Sonuç olarak eşitliklerinden, $\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_n=\begin{bmatrix} m-1 \\ k \end{bmatrix}_n U_{m-2}(n)+\begin{bmatrix} m-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_n$ ’dir.

7.1 Teorem’in ispatı tamamlanmış olur.

□

7.1 Sonuç $n,m>0$ pozitif tamsayılar olmak üzere, aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i) $$\begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} m-1 \\ 1 \end{bmatrix}_n U_{m-2}(n) \tag{7.9}$$

ii) $$\begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} m-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_n = 1 \tag{7.10}$$

İspat: *7.1 Teorem*'den ispat aşikârdır.

□

7.2 Sonuç $n,m>0$ pozitif tamsayılar olmak üzere, aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i) $$\begin{bmatrix} m \\ m-1 \end{bmatrix}_n = U_0(n)+U_1(n)+\ldots+U_{m-2}(n) \tag{7.11}$$

ii) $$\begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix}_n = U_0(n)U_1(n)\ldots U_{m-2}(n) \tag{7.12}$$

iii) $$\sum_{i=1}^{m}\begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}_n = \left(\sum_{i=1}^{m-1}\begin{bmatrix} m-1 \\ i \end{bmatrix}_n\right)\left(U_{m-2}(n)+1\right) \tag{7.13}$$

İspat: **i**) *7.1 Teorem*'den ve *7.2 Sonuç*'tan aşağıdaki adımlar elde edilir.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} m \\ m-1 \end{bmatrix}_n &= \begin{bmatrix} m-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_n U_{m-2}(n) + \begin{bmatrix} m-1 \\ m-2 \end{bmatrix}_n, \\
\begin{bmatrix} m-1 \\ m-2 \end{bmatrix}_n &= \begin{bmatrix} m-2 \\ m-2 \end{bmatrix}_n U_{m-3}(n) + \begin{bmatrix} m-2 \\ m-3 \end{bmatrix}_n, \\
&\vdots \\
\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_n &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_n U_0(n) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_n.
\end{aligned} \tag{7.14}$$

Eğer (7.14)'deki eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{bmatrix} m \\ m-1 \end{bmatrix}_n = U_0(n)+U_1(n)+\ldots+U_{m-2}(n) \tag{7.15}$$

elde edilir.

i) 'in ispatı tamamlanmış olur.

ii) *7.1 Teorem*'den ve *7.2 Sonuç*'tan aşağıdaki adımlar elde edilir.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix}_n &= \begin{bmatrix} m-1 \\ 1 \end{bmatrix}_n U_{m-2}(n), \\
\begin{bmatrix} m-1 \\ 1 \end{bmatrix}_n &= \begin{bmatrix} m-2 \\ 1 \end{bmatrix}_n U_{m-3}(n), \\
&\vdots \\
\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_n &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_n U_0(n).
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Eğer (7.16)'daki eşitlikler taraf tarafa çarpılırsa,

$$\begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix}_n = U_0(n)U_1(n)\ldots U_{m-2}(n) \tag{7.17}$$

elde edilir.

ii)'in ispatı tamamlanmış olur.

iii) *7.1 Teorem*'den ve *7.2 Sonuç*'tan aşağıdaki adımlar elde edilir.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix}_n &= \begin{bmatrix} m-1 \\ 1 \end{bmatrix}_n U_{m-2}(n), \\
\begin{bmatrix} m \\ 2 \end{bmatrix}_n &= \begin{bmatrix} m-1 \\ 2 \end{bmatrix}_n U_{m-2}(n) + \begin{bmatrix} m-1 \\ 1 \end{bmatrix}_n, \\
&\vdots \\
\begin{bmatrix} m \\ m-1 \end{bmatrix}_n &= \begin{bmatrix} m-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_n U_{m-2}(n) + \begin{bmatrix} m-1 \\ m-2 \end{bmatrix}_n, \\
\begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix}_n &= \begin{bmatrix} m-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_n.
\end{aligned} \tag{7.18}$$

Eğer (7.18)'deki eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$\sum_{i=1}^{m} \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}_n = \left(\sum_{i=1}^{m-1} \begin{bmatrix} m-1 \\ i \end{bmatrix}_n \right) \left(U_{m-2}(n) + 1 \right) \tag{7.19}$$

elde edilir.

iii)'in ispatı tamamlanmış olur.

□

7.1 Örnek *7.1 Teorem*'e ait bazı örnekler aşağıda verilmiştir.

$$\underbrace{\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}_3}_{5}=\underbrace{\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}_3}_{1}\times\underbrace{U_1(3)}_{2}+\underbrace{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}_3}_{3},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}_3}_{6}=\underbrace{\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}_3}_{1}\times\underbrace{U_2(3)}_{1}+\underbrace{\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}_3}_{5},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_3}_{11}=\underbrace{\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}_3}_{5}\times\underbrace{U_2(3)}_{1}+\underbrace{\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}_3}_{6},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}_7}_{83}=\underbrace{\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}_7}_{15}\times\underbrace{U_3(7)}_{1}+\underbrace{\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_7}_{68},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}_7}_{16}=\underbrace{\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}_7}_{1}\times\underbrace{U_3(7)}_{1}+\underbrace{\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}_7}_{15},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_{200}}_{1004}=\underbrace{\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}_{200}}_{204}\times\underbrace{U_2(200)}_{1}+\underbrace{\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}_{200}}_{800}.$$

7.3 Sonuç $k\geq 0$ pozitif bir tam sayı olmak üzere her k sayısı için,

$$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}_k=k \tag{7.20}$$

'dir.

7.4 Sonuç Eğer p Fermat asal sayısı ise,

i) $$\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}_p=p\times(p-1) \tag{7.21}$$

ii) $$\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_p=p^2+p-1 \tag{7.22}$$

iii) $$\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}_p=2\times p \tag{7.23}$$

eşitlikler sağlanır.

7.2 Örnek *7.4 Sonuç*'a ait bazı örnekler aşağıda verilmiştir.

$$\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}_3=6,\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_3=11,\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}_3=6 \quad ve \quad \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}_5=20,\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_5=29,\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}_5=10.$$

7.5 Sonuç $a\geq 0,\ b>0$ ve p Fermat asal sayısı olacak biçimde $n_k=2^a p^b$ pozitif tam sayılar ve $n_1=p<n_2<n_3<\ldots<n_k<n_{k+1}<\ldots$ olsun, bu durumda *7.2 Sonuç*'tan aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i)
$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}_{n_1}&=p\times(p-1)\\ \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}_{n_2}&=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}_{n_1}+(n_2-n_1)\times(p-1)\\ &\vdots\\ \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}_{n_{k+1}}&=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}_{n_k}+(n_{k+1}-n_k)\times(p-1)\end{aligned} \tag{7.24}$$

ii)
$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_{n_1}&=p^2+p-1\\ \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_{n_2}&=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_{n_1}+(n_2-n_1)\times p^2\\ &\vdots\\ \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_{n_{k+1}}&=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_{n_k}+(n_{k+1}-n_k)\times p^2\end{aligned} \tag{7.25}$$

iii)
$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}_{n_1}&=2\times p\\ \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}_{n_2}&=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}_{n_1}+(n_2-n_1)\\ &\vdots\\ \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}_{n_{k+1}}&=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}_{n_k}+(n_{k+1}-n_k)\end{aligned} \tag{7.26}$$

7.3 Örnek 7.3 Sonuç'a ait bazı örnekler aşağıda verilmiştir.

$$\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}_3=6,\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}_6=12,\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}_9=18,\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}_{12}=24,\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}_{18}=36,\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}_{24}=48,\ldots$$

$$\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_3=11,\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_6=20,\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_9=29,\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_{12}=38,\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_{18}=56,\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_{24}=74,\ldots$$

$$\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}_3=6,\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}_6=9,\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}_9=12,\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}_{12}=15,\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}_{18}=21,\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}_{24}=27,\ldots$$

8. MUTLAK MÖBIUS BÖLEN FONKSİYONU TOPLAMI

Bu bölümde, Mutlak Möbius Bölen Fonksiyonu $U(n)$ ve mertebe fonksiyonu $Ord(n)$ yardımıyla toplam fonksiyonu $V(n)$, *Möbius mükemmel sayıları* ve *yakın-Möbius mükemmel sayıları* tanımlanmış ve bazı özellikleri verilmiştir.

8.1 Tanım $U_k(n)$ mutlak Möbius bölen fonksiyonunun adımları ve $Ord(n)$ mertebesi olmak üzere, **mutlak Möbius Bölen Fonksiyonu'nun toplam fonksiyonu**;

$$V(n) := \sum_{k=1}^{Ord(n)} U_k(n) \tag{8.1}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca, $V(1)=0$ olarak kabul edilir.

$V(n)$ fonksiyonunun ilk iki yüz değeri *Ek E*'de gösterilmiştir.

Kendisi hariç pozitif tam bölenlerinin toplamı kendisine eşit olan sayılara *mükemmel sayı (perfect number)* denir. Bu durumda bir mükemmel sayı, bütün pozitif tam bölenlerinin toplamının yarısına eşittir; $\sigma(n)=2n$ [13].

Öklid ve Euler'e göre bütün çift mükemmel sayılar $2^{p-1}(2^p-1)$ şeklindedir. Burada yer alan (2^p-1)'ler Mersenne asal sayılarıdır.

Pollack ve Shevelev, 2012 yılından *yakın mükemmel sayı (near-perfect number)* tanımını; d sayısı, n pozitif tam sayısının bir böleni olmak üzere $\sigma(n)=2n+d$ eşitliğini sağlayan n'lere *yakın mükemmel sayı (near-perfect number)* denir, şeklinde vermiştir [13].

8.2 Tanım $n \geq 1$ pozitif tam sayı olsun, bu durumda

$$V(n) = n \tag{8.2}$$

eşitliğini sağlayan n sayısına **Möbius mükemmel sayısı** denir.

Maple 13 programı kullanılarak bazı Möbius mükemmel sayıların oluşturduğu küme;

$\mathcal{V} = \{3,5,17,257,413,611,1391,1589,1903,2327,5599,27959,29623,36647,36983,38863,$
$42851,43919,46463,49513,65537,76759,82969,86567,88759,96839,\ldots\}$'dir.

8.1 Teorem $V(n)=n$ eşitliğini sağlayan herhangi bir n pozitif çift tam sayısı yoktur.

İspat: n pozitif bir tam sayı olsun buna göre $n=2^e$ ya da $n=2^e q_1^{f_1}\ldots q_r^{f_r}$'dir.

Eğer $n=2^e$ ise $U_1(n)=1$ olacağından $V(n)=1$'dir.

Eğer $n=2^e q_1^{f_1}\dots q_r^{f_r}$ ise $U_1(n)=(2-1)(q_1-1)\dots(q_r-1)$ olacaktır. $q_1\dots q_r$ birbirinden farklı tek asal sayılar olduğundan $U_1(n)=2^{t_0}u_1^{e_1}\dots u_r^{e_r}$ şeklinde asallar kullanılarak yazılabilir. Buna göre 2 sayısının pozitif tamsayı kuvvetleri ve 1 dışındaki sayılar için $U_i(n)$ fonksiyonu daima çift sonuçlara sahip olacaktır. $U_1(n),U_2(n),\dots,U_{Ord(n)-1}(n)$'ler çift ve son terim $U_{Ord(n)}(n)$ tek sayı olacağından,

$$V(n)=\underbrace{U_1(n)+U_2(n)+\dots+U_{Ord(n)-1}(n)}_{\text{çift}}+\underbrace{U_{Ord(n)}(n)}_{1}$$
$$V(n)=1 \pmod 2 \tag{8.3}$$

'dir.

8.1 Teorem'in ispatı tamamlanmış olur.

□

8.2 Teorem Bilinen bütün Fermat asal sayıları aynı zamanda Möbius mükemmel sayıdır.

İspat: p bir Fermat asal sayısı olsun. Bu durumda $Ord(p)=2$'dir. Buna göre $V(n)$'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} V(p) &= \sum_{k=1}^{Ord(p)} U_k(p) \\ &= U_1(p)+U_2(p) \\ &= (p-1)+1 \\ &= p \end{aligned} \tag{8.4}$$

olur.

8.1 Teorem'in ispatı tamamlanmış olur.

□

8.1 $V(n)$ Fonksiyonunun Özellikleri

8.3 Teorem $n>1$ pozitif bir tam sayı olmak üzere $V(n)=1$ olması için gerek ve yeter şart $t\in\mathbb{N}$ olmak üzere $n=2^t$ olmasıdır.

İspat: $(\Leftarrow)$ $n=2^t$ olsun. Bu durumda *4.1 Sonuç*'tan, $Ord(2^t)=1$ ve $\mathrm{U}_1(2^t)=1$'dır. $V(n)$ fonksiyonunda yerine yazılırsa,

$$V(2^t)=\sum_{m=1}^{1}U_m(2^t)=U_1(2^t)=1 \tag{8.5}$$

elde edilir.

$(\Rightarrow)$ $n \neq 2^t$ olsun bu durumda $V(n)=1$ ise $p| \, n$ sağlayan bir p tek asal sayısı olmalıdır. Öte yandan $V(n) \geq U_1(n) \geq U_1(p) \geq 2$ olacağından $V(n)=1$ olması ile bir çelişkidir. $V(n)=1$ olduğunda $n=2^t$ olmalıdır.

8.3 Teorem'in ispatı tamamlanmış olur.

□

8.4 Teorem $a \geq 0,\ b>0$ olacak biçimde $n=2^a p^b$ pozitif tamsayı ve p Fermat asal sayısı olmak üzere;

$$V(n)=p \tag{8.6}$$

'dir.

İspat: $n=2^a p^b$ pozitif bir tam sayı ve p Fermat asal sayısı olsun bu durumda,

$$\begin{aligned} U_1(2^a p^b) &= U_1(2^a)U_1(p^b) \\ &= 2^t \\ &= p-1 \end{aligned} \tag{8.7}$$

$$U_2(2^a p^b)=1 \tag{8.8}$$

$$Ord(2^a p^b)=2 \tag{8.9}$$

olur.

Buna göre

$$\begin{aligned} V(2^a p^b) &= \sum_{k=1}^{Ord\left(2^a p^b\right)} U_k\left(2^a p^b\right) \\ &= U_1\left(2^a p^b\right)+U_2\left(2^a p^b\right) \\ &= \left(p-1\right)+1 \\ &= p \end{aligned} \tag{8.10}$$

elde edilir.

8.4 Teorem'in ispatı tamamlanmış olur.

□

8.1 Sonuç p bir asal sayı ve $k \in \mathbb{Z}^+$ ise,

$$V\left(p^k\right)=V\left(p\right) \tag{8.11}$$

İspat: *8.2 Teorem*'den tanımından aşikârdır.

□

8.2 Sonuç p Fermat asal sayısı olmak üzere,

$$p^k;\begin{cases} \text{Möbiüs mükemmel sayısıdır.} & \text{eğer } k=1, \\ \text{Möbiüs mükemmel sayısı değildir.} & \text{aksi halde} \end{cases} \tag{8.12}$$

İspat: *8.2 Teorem*'den ve *8.1 Sonuç*'dan aşikârdır.

□

8.5 Teorem $a \geq 0,\ b > 0$ için $p = 1 + 2^a 3^b$ olacak biçimde pozitif bir asal sayı olsun bu durumda $V(p) = p + 2$'dir.

İspat: $p = 1 + 2^a 3^b$ asal sayı olsun bu durumda,

$$\begin{aligned} U_1(n) &= (1 + 2^a 3^b - 1) = 2^a 3^b \\ U_2(n) &= (2-1)(3-1) = 2 \\ U_3(n) &= 1 \end{aligned} \tag{8.13}$$

olur ki,

$$\begin{aligned} V(n) &= 2^a 3^b + 2 + 1 \\ &= p + 2 \end{aligned} \tag{8.14}$$

8.5 Teorem'in ispatı tamamlanmış olur.

□

8.1 Örnek $V(p) = p + 2$'nin ilk on yedi değeri *Tablo 8.1*'de gösterilmiştir.

Tablo 8.1: $V(p) = p + 2$ değerleri ($p = 1 + 2^a 3^b$; asal sayı).

p	7	13	19	37	73	97	109	163	193	433	487	577	769	1153	1297	1403	1459
$V(p)$	9	15	21	39	75	99	111	165	195	435	489	579	771	1155	1299	1405	1461

8.3 Sonuç Eğer $n = 1 + 2^a 3^b$ asal sayı ise n; 1-*yakın-Möbius mükemmel sayıdır (Möbius 1-near-perfect number).*

8.6 Teorem p_i ’ler Fermat asal sayısı olsun, eğer $n=1+2^a p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$ bir asal sayı ise n;
$\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{r}(p_i-1)$- **yakın-Möbius mükemmel sayı**’dır.

İspat: $n=1+2^a p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$ bir asal sayı olsun bu durumda,

$$U_1(n)=2^a p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}=n-1$$
$$U_2(n)=(2-1)(p_1-1)\ldots(p_r-1)=2\times\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{r}(p_i-1) \tag{8.15}$$
$$U_3(n)=1$$

olur ki *8.6 Teorem*’in ispatı tamamlanmış olur.

□

8.2 Örnek Bazı $\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{r}(p_i-1)$ -yakın-Möbius mükemmel sayıları *Tablo 8.2*’de gösterilmiştir.

Tablo 8.2: Bazı $\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{r}(p_i-1)$-yakın-Möbius mükemmel sayıları.

n	$V(n)$	$\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{r}(p_i-1)-$ *yakın – Möbius mükemmel sayı*
$11=1+2\times5$	15	$2-$ *yakın – Möbius mükemmel sayı*
$19=1+2\times3^2$	21	$1-$ *yakın – Möbius mükemmel sayı*
$103=1+2\times3\times17$	135	$16-$ *yakın – Möbius mükemmel sayı*
$307=1+2\times3^2\times17$	339	$16-$ *yakın – Möbius mükemmel sayı*
$541=1+2^2\times3^3\times5$	549	$4-$ *yakın – Möbius mükemmel sayı*
$2551=1+2\times3\times5^2\times17$	2679	$64-$ *yakın – Möbius mükemmel sayı*
$43691=1+2\times5\times17\times257$	60075	$8192-$ *yakın – Möbius mükemmel sayı*
$655351=1+2\times3\times5^2\times17\times257$	688119	$16384-$ *yakın – Möbius mükemmel sayı*
$1310741=1+2^2\times5\times65537$	1572885	$131072-$ *yakın – Möbius mükemmel sayı*
$6623041684999=1+2\times3\times257\times65537^2$	6623075239431	$16777216-$ *yakın – Möbius mükemmel sayı*

9. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada ilk olarak Mutlak Möbius Bölen Fonksiyonu tanıtılmış ve sayılar teorisinde önemli bir çalışma alanı olan diğer aritmetik fonksiyonlar ile benzer ve farklı yönleri incelenmiştir. Ayrıca Mutlak Möbius Bölen Fonksiyonu yardımıyla elde edilmiş çokgen şekiller tanıtılmıştır. Oluşturulan çokgen şekiller, gerçek hayat problemlerinden yola çıkılarak oluşturulabilecek matematiksel modellemeleri açıklamaya yardımcı olabilecek şekillerdir. Örneğin; bir bitkinin yaprak dizilimi, çiçeklerinin şekil ve dallarının sayısı gibi.

Çalışmanın devam eden bölümlerinde, Mutlak Möbius Bölen Fonksiyonu yardımıyla elde edilen sonuçlar, Fermat asal sayıları, Mersenne sayıları, Stirling sayıları gibi çeşitli sayı kümeleri ile bağdaştırılarak matematiğin diğer çalışma alanlarına da geçişler yapılmıştır.

Matematik, teknoloji, bilgisayar, kriptografi ve kriptoanaliz gibi kavramlarının birleşmesi ile oluşmuş Kriptoloji Bilimi; bilgi güvenliğin sağlanmasında önemli bir rol oynayan şifreleme bilimidir. Sayılar teorisi ve aritmetik fonksiyonlar kriptoloji için büyük bir öneme sahiptir. Bu çalışmada mutlak Möbius Bölen Fonksiyonu yardımıyla, *RSA (Rivest–Shamir-Adleman)* kripto sisteminde önemli olarak değerlendirilen $\varphi(n)=\varphi(n+1)$ ifadesinden yola çıkarak $\varphi(n)=\varphi(n+1)=U(n)=U(n+1)$ eşitlikleri incelenmiş ve çeşitli sonuçlara ulaşılmıştır.

Son bölümlerde, Mutlak Möbius Bölen Fonksiyonu yardımıyla $G_n(x)$ kuvvet serileri, Möbius-Stirling sayıları $\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_n$ ve $V(n)$ toplam fonksiyonu tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir.

Bu tezden hareketle, Mutlak Möbius Bölen Fonksiyonu $U(n)=|\sum_{d|n} d\mu(d)|$ 'e benzer olarak $r\geq 1$ pozitif bir tam sayı olmak üzere; genelleştirilmiş Mutlak Möbius Bölen Fonksiyonu $U_{(r)}(n):=|\sum_{d|n} d^r\mu(d)|$ tanımlanabilir.

Örneğin; $r=1$ için $U_{(1)}(n)=U(n)$ olacaktır. Diğer bir örnek; $r=2$ için $U_{(2)}(n)=|\sum_{d|n} d^2\mu(d)|$ olacaktır.

Bazı adımları; $U_{(2)}(1)=1$, $U_{(2)}(2)=3$, $U_{(2)}(3)=8$, $U_{(2)}(4)=3$, $U_{(2)}(5)=24$, $U_{(2)}(6)=24$, $U_{(2)}(7)=48$, $U_{(2)}(8)=3$, $U_{(2)}(9)=8$, $U_{(2)}(10)=72$'dır. Mutlak Möbius Bölen Fonksiyonu'nun özelliklerine benzer biçimde, p_i'ler n pozitif tam sayısının birbirinden farklı asal bölenleri olmak üzere; $|\sum_{d|n} d^r \mu(d)| = \prod_{i=1} \left(p_i^r - 1\right)$ eşitliği gibi ifadeler de ispatlanabilir. Sonuçta çalışmanın genelinde verilmiş tanımlar ve eşitlikler genişletilebilir.

$\left(P_n\right)_{n\geq 0}$ Pell sayı dizisi ve $\left(L_n\right)_{n\geq 0}$ Lucas sayı dizisi ve $a,b,m,n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere; Luca ve Stanica [41] makalelerinde $\varphi\left(L_n\right)=2^a 3^b$ Diophantine denkleminin ve [42] makalelerinde $\varphi\left(P_n\right)=2^a$ Diophantine denkleminin çözümlerini araştırmışlardır. Genel olarak φ ve U fonksiyonlarının benzer özellikte olduğu düşünülürse $U(L_n)=2^a 3^b$, $U(P_n)=2^a 3^b$, $U(L_n)=m!$ ve $U(P_n)=m!$ gibi Diophantine denklemlerin çözümleri de araştırılabilir.

10. KAYNAKLAR

[1] L. E. Dickson, History of the Theory of Numbers. Vol. I: Divisibility and Primality, New York: Chelsea Publishing Co., 1966.

[2] R. K. Guy, Unsolved Problems in Number Theory, New York: Springer, 2004.

[3] K. Ireland and M. Rosen, A Classical Introduction to Modern Number Theory, New York: Springer-Verlag, 1990.

[4] L. Moser, "Some Equations Involving Eulers Totient Function", *Amer. Math. Monthly,* vol. 56, pp. 22-23, 1949.

[5] H. E. Rose, A course in Number Theory, Oxford: Clarendon press, 1994.

[6] W. Sierpinski, Elementary Theory of Numbers, Polska Akademia Nauk, 1964.

[7] P. Erdös, "Some Remarks on Euler's φ Function and Some Related Problems", *Bull. Amer. Math. Soc.,* vol. 51, pp. 540-544, 1945.

[8] T. M. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory, New York: Springer-Verlag, 1998.

[9] H. Shapiro, "An Analytic Function Arising From the φ Function", *Amer. Math. Monthly,* no. 50, pp. 18-30, 1943.

[10] D. Kim and A. Bayad, "Polygon Numbers Associated with the Sum of Odd Divisors Function", *Experimental Math.,* vol. 23, no. 3, pp. 287-297, 2017.

[11] W. Narkiewicz, The Development of Prime Number Theory: From Euclid to Hardy and Littlewood, Springer Monographs in Mathematics, 2000.

[12] A. Bayad and M. Goubi, "Proof of the Möbius Conjecture Revisited", *Proc. Jangjeon Math. Soc.,* vol. 2, no. 16, pp. 237-243, 2013.

[13] P. Pollack and V. Shevelev, "On Perfect and Near-Perfect Numbers", *Journal of Number Theory,* vol. 12, no. 132, pp. 3037-3046, 2012.

[14] E. W. Weisstein, "Stirling Number of the First Kind", http://mathworld.wolfram.com/StirlingNumberoftheFirstKind.html [Available: 12 2018].

[15] C. Tsang, "Fermat Numbers", http://wstein.org/edu/2010/414/projects/tsang.pdf [Available: 10 2018].

[16] P. D. Fermat , "A letter; Fermat to Frenicle (18 October 1640) Translated by Amanda Bergeron and David Zhao", http://eulerarchive.maa.org/docs/other/fermat2.pdf. [Available: 3 2019].

[17] L. P. Euler, "A Proof of Certain Theorems Regarding Prime Numbers Translated by David Zhao", http://eulerarchive.maa.org/docs/translations/E054tr.pdf. [Available: 3 2019].

[18] The Great Internet Mersenne Prime Search, https://www.mersenne.org [Available: 3 2019].

[19] R. Ratat, "L'intermediaire Des Math", no. 24, pp. 101-102, 1917.

[20] R. Goormaghtigh, "L'interediaire Des Math", no. 25, pp. 42-44, 1918.

[21] V. . L. Klee, "Some Remarks on Eulers Totient", *Amer. Math. Monthly*, no. 54 and 55, pp. 332 and 360, 1947 and 1948.

[22] M. Lal and P. Gillard, "On the Equation $\varphi(n)=\varphi(n+k)$", *Math. Comp.*, no. 26, pp. 579-583, 1972.

[23] D. Ballew, J. Case and R. N. Higgins, "Table of $\varphi(n)=\varphi(n+1)$", *Math. Comp.*, no. 29, pp. 32-330, 1975.

[24] R. Baillie, "Solutions of $\varphi(n)=\varphi(n+1)$ for Euler's function", *Math. Comp.*, no. 32, p. 1326, 1978.

[25] R. Baillie, «Table of $\varphi(n)=\varphi(n+1)$", *Math. Comp.*, no. 30, pp. 189-190, 1976.

[26] P. Erdös, C. Pomerance and A. Sarközy, "On Locally Repeated Values of Certain Arithmetic Functions II", *Acta Math. Hungarica*, no. 49, pp. 251-259, 1987.

[27] P. Erdös, A. Granville, C. Pomerance and C. Spiro, On the Normal Behavior of the Iterates of Some Arithmetic Functions. Analytic Number Theory, Boston: Progr. Math., 85, Birkhauser, 1990.

[28] P. G. Brown, "Some Comments on Inverse Arithmetic Functions", *The Mathematical Gazette* , vol. 89, no. 516, pp. 403-408, 2005.

[29] E. W. Weisstein, "Mersenne Prime", http://mathworld.wolfram.com/MersennePrime.html [Available: 3 2019].

[30] A. Nesin, Matematiğe Giriş 3: Sayma/Kombinasyon Hesapları, Nesin Yayınevi, 2015.

[31] D. Kim, U. Sarp and S. Ikikardeş, "Iterating the Sum of Möbius Divisor Function and Euler Totient Function", *Mathematics,* vol. 7, pp. 1083, 2019.

[32] D. Kim, U. Sarp and S. Ikikardes, "Certain Combinatoric Convolution Sums Arising From Bernoulli and Euler Polynomials", *Miskolc Mathematical Notes,* vol. I, no. 20, pp. 311-330, 2019.

[33] H. Iwaniec and E. Kowalski, Analytic Number Theory, vol. 53, Amer. Math. Soc. Colloq., Providence, RI, 2004.

[34] D. Shanks, Solved and Unsolved Problems in Number Theory, AMS, 2001.

[35] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, New York: United States Department of Commerce, 1972.

[36] N. Koblitz, Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms, New York: Springer-Verlag, 1984.

[37] J. Kaczorowski, "On a Generalization of the Euler Totient Function", *Monatshefte für Mathematik,* vol. 1, no. 170, pp. 27-48, 2012.

[38] M. T. Rassias, "From a Cotangent Sum to a Generalized Totient Function", *Applicable Analysis and Discrete Mathematics,* no. 11, pp. 369-385, 2017.

[39] G. J. Simmons and M. J. Norris, "Preliminary Comments on the MIT Public-Key Cryptosystem", *Cryptologia 1,* pp. 406-414, 1977.

[40] T. Yerlikaya and C. Aslanyürek, "RSA Algoritmasının Şifreleme Hızını Arttıran Algoritmalar ve Performansları", *Dicle Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Mühendislik Dergisi,* vol. 10, no. pp. 853-862, 2019.

[41] F. Luca and P. Stanica, "Pantelimon the Euler Function of Fibonacci and Lucas Numbers and Factorials", *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.,* no. 41 , pp. 119-124, 2013.

[42] F. Luca and P. Stanica, "Equations with Arithmetic Functions of Pell Numbers", *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie,* vol. 4, no. 57 (105), pp. 409-413, 2014.

EKLER

EKLER

Ek A: $U(n)$ fonksiyonunun değerleri $\left(1 \le n \le 100\right)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$U(n)$	1	1	2	1	4	2	6	1	2	4	10	2	12	6	8	1	16	2	18	4
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$U(n)$	12	10	22	2	4	12	2	6	28	8	30	1	20	16	24	2	36	18	24	4
n	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
$U(n)$	40	12	42	10	8	22	46	2	6	4	32	12	52	2	40	6	36	28	58	8
n	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
$U(n)$	60	30	12	1	48	20	66	16	44	24	70	2	72	36	8	18	60	24	78	4
n	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
$U(n)$	2	40	82	12	64	42	56	10	88	8	72	22	60	46	72	2	96	6	20	4

Ek B: $n = 2^k p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_r^{e_r}$ için $U(n)$ ve $\varphi(n)$ değerleri (p_r ; Fermat asal sayıları)

n	$U(n)$	$\varphi(n)$	n	$U(n)$	$\varphi(n)$
3	2	2	$40 = 2^3 \times 5$	$4 = 2^2$	$16 = 2^4$
5	$4 = 2^2$	$4 = 2^2$	$45 = 3^2 \times 5$	$8 = 2^3$	$24 = 2^3 \times 3$
$6 = 2 \times 3$	2	2	$48 = 2^4 \times 3$	2	$16 = 2^4$
$9 = 3^2$	2	$6 = 2 \times 3$	$50 = 2 \times 5^2$	$4 = 2^2$	$20 = 2^4 \times 5$
$10 = 2 \times 5$	$4 = 2^2$	$4 = 2^2$	$51 = 3 \times 17$	$32 = 2^5$	$32 = 2^5$
$12 = 2^2 \times 3$	2	$4 = 2^2$	$54 = 2 \times 3^3$	2	$18 = 2 \times 3^2$
$15 = 3 \times 5$	$8 = 2^3$	$8 = 2^3$	$60 = 2^2 \times 3 \times 5$	$8 = 2^3$	$16 = 2^4$
17	$16 = 2^4$	$16 = 2^4$	$68 = 2^2 \times 17$	$16 = 2^4$	$32 = 2^5$
$18 = 2 \times 3^2$	2	$6 = 2 \times 3$	$72 = 2^3 \times 3^2$	2	$24 = 2^3 \times 3$
$20 = 2^2 \times 5$	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$	$75 = 3 \times 5^2$	$8 = 2^3$	$40 = 2^3 \times 5$
$24 = 2^3 \times 3$	2	$8 = 2^3$	$80 = 2^4 \times 5$	$4 = 2^2$	$32 = 2^5$
$25 = 5^2$	$4 = 2^2$	$20 = 2^2 \times 5$	$81 = 3^4$	2	$54 = 2 \times 3^3$
$27 = 3^3$	2	$18 = 2 \times 3^2$	$85 = 5 \times 17$	$64 = 2^6$	$64 = 2^6$
$30 = 2 \times 3 \times 5$	$8 = 2^3$	$8 = 2^3$	$90 = 2 \times 3^2 \times 5$	$8 = 2^3$	$24 = 2^3 \times 3$
$34 = 2 \times 17$	$16 = 2^4$	$16 = 2^4$	$96 = 2^5 \times 3$	2	$32 = 2^5$
$36 = 2^2 \times 3^2$	2	$12 = 2^2 \times 3$	$100 = 2^2 \times 5^2$	$4 = 2^2$	$40 = 2^3 \times 5$

Ek C: $U(n)=U(n+1)$ değerleri ($1\le n\le 10^5$), $n\ne 1$ için $12 | U(n)=U(n+1)$

n	$n+1$	n'in çarpanları	$n+1$'in çarpanları	$U(n)=U(n+1)$
168	169	$2^3\times3\times7$	13^2	12
194	195	2×97	$3\times5\times13$	96
350	351	$2\times5^2\times7$	$3^3\times13$	24
1368	1369	$2^3\times3^2\times19$	37^2	36
1628	1629	$2^2\times11\times37$	$3^2\times181$	360
3705	3706	$3\times5\times13\times19$	$2\times17\times109$	1728
5186	5187	2×2593	$3\times7\times13\times19$	2592
6929	6930	$13^2\times41$	$2\times3^2\times5\times7\times11$	480
7475	7476	$5^2\times13\times23$	$2^2\times3\times7\times89$	1056
25545	25546	$3\times5\times13\times131$	$2\times53\times241$	12480
26047	26048	7×61^2	$2^6\times11\times37$	360
26864	26865	$2^4\times23\times73$	$3^3\times5\times199$	1584
28251	28252	$3^2\times43\times73$	$2^2\times7\times1009$	6048
34936	34937	$2^3\times11\times397$	$7^2\times23\times31$	3960
37248	37249	$2^7\times3\times97$	193^2	192
56574	56575	$2^2\times3\times29\times163$	$5^2\times2269$	9072
65575	65576	$5^2\times37\times71$	$2^2\times3\times13\times421$	10080
81732	81733	$2^2\times3\times7^2\times139$	37×47^2	1656
82368	82969	$2^6\times3^2\times11\times13$	$7^2\times41^2$	240
87308	87309	$2^2\times13\times23\times73$	$3^2\times89\times109$	19008
87367	87368	$7^2\times1783$	$2^3\times67\times163$	10692
88450	88451	$2\times5^2\times29\times61$	$11^2\times17\times43$	6720
91539	91539	$3^2\times7\times1453$	$2^2\times5\times23\times199$	17424

Ek D: $\boldsymbol{\varphi(n)=\varphi(n+1)=U(n)=U(n+1)}$ **değerleri** $\boldsymbol{\left(1\leq n\leq 10^{6}\right)}$

n	$n+1$	n'*in çarpanları*	$n+1'$*in çarpanları*	$U(n)$	$U(n)'$*in çarpanları*
1	2	•	•	1	•
194	195	2×97	$3\times 5\times 13$	96	$2^{5}\times 3$
3705	3706	$3\times 5\times 13\times 19$	$2\times 17\times 109$	1728	$2^{6}\times 3^{3}$
5186	5187	2×2593	$3\times 7\times 13\times 19$	2592	$2^{5}\times 3^{4}$
25545	25546	$3\times 5\times 13\times 131$	$2\times 53\times 141$	12480	$2^{6}\times 3\times 5\times 13$
388245	388246	$3\times 5\times 11\times 13\times 181$	$2\times 17\times 19\times 601$	172800	$2^{8}\times 3^{3}\times 5^{2}$

Ek E: $V(n)$ fonksiyonunun değerleri $(1 \leq n \leq 200)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$V(n)$	0	1	3	1	5	3	9	1	3	5	15	3	15	9	9	1	17	3	21	5
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$V(n)$	15	15	37	3	5	15	3	9	37	9	39	1	25	17	27	3	39	21	27	5
n	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
$V(n)$	5	15	57	15	9	37	83	3	9	5	33	15	67	3	45	9	39	37	95	9
n	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
$V(n)$	69	39	15	1	51	25	91	17	59	27	97	3	75	39	9	21	69	27	105	5
n	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
$V(n)$	3	45	127	15	65	57	65	15	103	9	75	37	69	83	75	3	99	9	25	5
n	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
$V(n)$	105	33	135	15	51	67	173	3	111	45	75	9	121	39	103	37	27	95	99	9
n	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
$V(n)$	15	69	85	39	5	15	141	1	99	51	181	25	111	91	9	17	153	59	197	27
n	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
$V(n)$	129	97	129	3	121	75	15	39	187	9	159	21	33	69	129	27	183	105	119	5
n	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
$V(n)$	157	3	165	45	85	127	293	15	15	65	39	57	229	65	27	15	153	103	281	9
n	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
$V(n)$	189	75	129	37	147	69	165	83	15	75	265	3	195	99	99	9	205	25	223	5

Ek F: $U(n)$ fonksiyonunun Maple 13 kodları

MAPLE codes

```
[> with(numtheory):
[> U := proc (a::integer)
     local Div, List, k;
     global U;
     Div := divisors(a);
     List := convert(Div, 'list');
     for k to tau(a) do List[k]
     end do;
     abs(add(mobius(List[k])*List[k], k = 1 .. tau(a)))
     end proc;
[> for n from 0 to 5 do # TEST
    print(('U')(n) = U(n))
    end do;
```

Ek G: $Ord(n)$ fonksiyonunun Maple 13 kodları, $\left(0 \le Ord(n) \le 10\right)$

MAPLE codes

```
[>  Ord := proc (n::integer)
    if n = 1 then 0 else
    if U(n) = 1 then 1 else
    if U(U(n)) = 1 then 2 else
    if U(U(U(n))) = 1 then 3 else
    if U(U(U(U(n)))) = 1 then 4 else
    if U(U(U(U(U(n))))) = 1 then 5 else
    if U(U(U(U(U(U(n)))))) = 1 then 6 else
    if U(U(U(U(U(U(U(n))))))) = 1 then 7 else
    if U(U(U(U(U(U(U(U(n)))))))) = 1 then 8 else
    if U(U(U(U(U(U(U(U(U(n))))))))) = 1 then 9 else
    if U(U(U(U(U(U(U(U(U(U(n)))))))))) = 1 then 10 else ERROR
    end if
    end if
    end if
    end if
    end if
    end if
    end if
    end if
    end if
    end if
    end if
    end proc;
[>  for n from 1 to 5 do # TEST
    print(('Ord')(n) = Ord(n))
    end do;
```

Ek H: $V(n)$ fonksiyonunun Maple 13 kodları, $\left(0 \leq Ord(n) \leq 10\right)$

MAPLE codes

```
[>  S:= proc(n::integer, b::integer)
     if b=0 then n else
     if b=1 then U(n) else
     if b=2 then U(U(n)) else
     if b=3 then U(U(U(n))) else
     if b=4 then U(U(U(U(n))))else
     if b=5 then U(U(U(U(U(n))))) else
     if b=6 then U(U(U(U(U(U(n)))))) else
     if b=7 then U(U(U(U(U(U(U(n)))))))else
     if b=8 then U(U(U(U(U(U(U(U(n)))))))) else
     if b=9 then U(U(U(U(U(U(U(U(U(n))))))))) else
     if b=10 then U(U(U(U(U(U(U(U(U(U(n))))))))))  else ERROR
     end if   end if    end if
     end if
     end if
     end if
     end if
     end if
     end if
     end if
     end if
     end proc:
[>  V := proc (n::integer)
     add(S(n, k), k = 1 .. Ord(n))
     end proc:
[>  for n from 1 to 5 do # TEST
     print(('V')(n) = V(n))
     end do;
```

Ek I: $G_n(x)$ kuvvet serisinin Maple 13 kodları

MAPLE codes

```
[> TSprintf := proc ()
   Typesetting:-mrow(seq(`if`(e::string, Typesetting:-mn(e),
   Typesetting:-Typeset(Typesetting:-EV(e))), e = [args]))
   end proc:
[> Gone := proc (n::integer)
   add(S(n, k)*x^k, k = 0 .. Ord(n)-1)
   end proc:
[> G := proc (n::integer)
   Gone(n)+sum(x^k, k = Ord(n) .. infinity)
   end proc:
[> GK := proc (n::integer)
   local tot, k;
   tot := 0;
   for k from 0 to Ord(n)+2 do
   tot := tot+S(n, k)*x^k
   end do;
   tot;
   end proc:
[> for n to 150 do # TEST
   print(TSprintf(('G')(n) = GK(n), "+&middot;&middot;&middot; = ", G(n) = factor(G(n))))
   end do;
```

Ek J: Möbius-Stirling sayıları ve üreteç fonksiyonlarının Maple 13 kodları

MAPLE codes

```
[> Pol := proc (n::integer)
     local k, d, G, H, HH, SET, ST, ST1, l, SOLU, SOLU1, J;
     H := x*mul(x+S(n, k), k = 0 .. Ord(n));
     HH := [seq(coeff(H, x, a), a = 1 .. Ord(n)+2)];
     ST1 := seq(Vector(2, {(1) = Ord(n)+2, (2) = l}), l = 1 .. Ord(n)+2);
     SOLU1 := seq(ST1[l] = HH[l], l = 1 .. Ord(n)+2)[respect[n]];
     for k from 0 to Ord(n) do
     S(n, k); print(('S')(n)[k] = S(n, k)) end do;
     print(H*'`&clubs;`'*expand(H)*'`&hearts;`'*SOLU1);
     for d from 0 to Ord(n)-1 do
     G := x*mul(x+S(n, k), k = 0 .. Ord(n))/mul(x+S(n, k), k = Ord(n)-d .. Ord(n));
     SET := [seq(coeff(G, x, a), a = 1 .. Ord(n)-d+1)];
     ST := [seq(Vector(2, {(1) = Ord(n)-d+1, (2) = l}), l = 1 .. Ord(n)-d+1)];
     SOLU := seq(ST[l] = SET[l], l = 1 .. Ord(n)-d+1)[respect[n]];
     print(G*'`&clubs;`'*expand(G)*'`&hearts;`'*SOLU)
     end do
     end proc:
[> for n to 5 do # TEST
    print(Pol(n))
    end do;
```

Ek K: Çokgen şekiller Maple 13 kodları

MAPLE codes

```
[> restart:
[> with(numtheory): with(plots): # 3-10 çokgen şekil için
[> for n from 1 to 10 do
   m;
   Div := divisors(n);
   List := convert(Div, 'list');
   Piece := tau(n);
   for k to Piece do List[k] end do;
   U[n] := abs(add(mobius(List[k])*List[k], k = 1 .. Piece));
   poly := [[0, 1], [0, n], [1, U[n]], [2, U[U[n]]], [3, U[U[U[n]]]], [4, U[U[U[U[n]]]]],
   [5, U[U[U[U[U[n]]]]]], [6, U[U[U[U[U[U[n]]]]]]], [7, U[U[U[U[U[U[U[n]]]]]]]],
   [8, U[U[U[U[U[U[U[U[n]]]]]]]]], [9, U[U[U[U[U[U[U[U[U[n]]]]]]]]]]];
   G := polygonplot(poly, axes = boxed, color = "DarkBlue", transparency =0.5);
   `and`(print(display({G})),
   print('n' = n, ('U')(n) = U[n]))
   end do:
```

Ek L: $U_{(r)}(n)$ Maple 13 kodları

MAPLE codes

```
[> restart:
[> with(numtheory): with(plots):
[> UR := proc (a::integer, r::integer)
   local Div, List, k;
   Div := divisors(a);
   List := convert(Div, 'list');
   for k to tau(a) do
   List[k]
   end do;
   abs(add(mobius(List[k])*List[k]^r, k = 1 .. tau(a)))
   end proc:
[> for r to 5 do # TEST
   for n to 5 do
   print('U'[r](n) = UR(n, r))
   end do;
   end do;
```

Not: Maple 13 kodlarının hatasız çalışabilmesi için Ek F – Ek J sırasıyla işlenmelidir. Ek K ve Ek L diğerlerinden bağımsız çalıştırılmalıdır.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı: Ümit SARP

Doğum tarihi / yeri: 05 Ağustos 1988 / Kepsut, Balıkesir, TÜRKİYE

Email: umitsarp@ymail.com

Web Sayfası: http://www.umitsarp.com

Öğrenim Bilgileri

Derece	**Okul / Program**	**Yıl**
Lisans	Selçuk Üniversitesi / Matematik	2007-2011
Özel Öğrenci	Selçuk Üniversitesi / Matematik	2011-2012
P. Formasyon	Afyon Kocatepe Üniversitesi / Eğitim Bilimleri	2011-2012
Yüksek Lisans	Balıkesir Üniversitesi / Matematik	2012-2014
Doktora	Balıkesir Üniversitesi / Matematik	2014-2019
Lisans	Balıkesir Üniversitesi / Elektrik Elektronik Mühendisliği	2019 - …

A. Uluslararası (SCI, SCI-Expanded) Hakemli Dergilerde Yayımlanan Makaleler:

A1. Kim D., Sarp U. and Ikikardes S., "*Iterating the Sum of Möbius Divisor Function and Euler Totient Function*", Mathematics, 7, 1083, (2019), DOI:10.3390/math7111083 **[Tezden türetilmiştir.]**

A2. Kim D., Sarp U. and Ikikardes S., "*Certain combinatoric convolution sums arising from Bernoulli and Euler Polynomials*", Miskolc Mathematical Notes, 20, (2019), No. 1, pp. 311-33, DOI: 10.18514/MMN.2019.2470 **[Tezden türetilmiştir.]**

A3. Kim D., Sarp U. and Ikikardes S., Möbius-Stirling Numbers, (preparing).

B. TÜBİTAK-ULAKBİM Tarafından Taranan Dergilerde Yayımlanan Makaleler:

B1. Sarp U, Evirgen F. and Ikikardes S., "*Applications of differential transformation method to solve systems of ordinary and partial differential equations*", J. BAUN Inst. Sci. Technol., 20(2), 135-156, (2018). DOI:10.25092/baunfbed.423145 (With Maple Codes)

C. Ulusal Organizasyon Görevleri:

C1. Sarp U., Balıkesir Büyükşehir Belediyesi ve Karesi İlçe Belediyesi, Matematik Cepte; Mobil Cihaz Uygulaması ”, 2015-… Balıkesir, TÜRKİYE.

D. Uluslararası Organizasyon Görevleri:

D1. Sarp U., The 24th International Conference of Jangjeon Mathematical Society, Temmuz 20-23 2011, Konya, TÜRKİYE. (Websitesi ve Basılı Görseller Sorumlusu)

D2. Sarp U., International Congress in Honour of Professor Hari M. Srivastava, Ağustos 23-26, 2012 Bursa, TÜRKİYE. (Komite Üyesi)

D3. Sarp U., International Conference on Algebra in Honour of Patrick Smith and John Clark's 70th Birthdays, Ağustos 12-15 2013, Balıkesir, TÜRKİYE (Komite Üyesi)

D4. Sarp U., International Congress in Honour of Professor Ravi P. Agarwal at The Auditorium at the Campus of Uludag University, Haziran 23-26 2014, Bursa, TÜRKİYE. (Komite Üyesi)

D5. Sarp U., Introductory Workshop on Modular Methods in Diophantine Equations, Eylül 08-11, 2014, Bilecik, TÜRKİYE. (Komite Üyesi)

D6. Sarp U., 2nd International Conference on Algebra in Honour of Leonid BOKUT and Surender K. JAIN, Ağustos 26-29 2016 (İleri bir tarihe ertelendi), Balıkesir, TÜRKİYE (Komite Üyesi)

D7. Sarp U., International Autumn School on Computational Number Theory Ekim 30 2017 - Kasım 03 2017 Izmir Institute of Technology, İzmir, TÜRKİYE (Poster Tasarımı)

D8. Sarp U., International Workshop on Elliptic Curves, Modular Forms and Langlands Functoriality, 10-11 Mayıs, 2018, Bilecik, TÜRKİYE (Poster Tasarımı)

D9. Sarp U., Summer School, Explicit and Computational Approaches to Galois Representations, Temmuz 3-7 2018, University of Luxembourg, LÜKSEMBURG (Poster Tasarımı)

D10. Sarp U., Friendly Workshop on Diophantine Equations and Related problems (FWDERP-2019), Temmuz 6-8 2019, Bursa Uludağ University, Bursa, TÜRKİYE (Komite Üyesi)

E. Ulusal Konferanslar; Bildiriler ve Sunumlar:

E1. Sarp U., 3. Ulusal Konya Ereğli Kemal Akman Meslek Yüksek Okulu Tebliğ Günleri, Nisan 2011, Konya, TÜRKİYE.

F. Uluslararası Konferanslar; Bildiriler ve Sunumlar:

F1. Sarp U., (Kurtuldu Y.) *"Using of GAP (Groups, Algorithms and Programming) in some semigroups",* The 24th International Conference of Jangjeon Mathematical Society, Temmuz 20-23, 2011, Konya, TÜRKİYE.

F2. Sarp U., Recent Trends in Nonlinear Partial Differential Equations and Applications, Mayıs 28-30 2014 Trieste, İTALYA.

F3. Sarp U., (Ikikardes S.) *"On Solving Some Partial Differential Equations"* ,International Congress in Honour of Professor Ravi P. Agarwal at The Auditorium at the Campus of Uludag University, Haziran 23-26 2014, Bursa, TÜRKİYE.

F4. Sarp U., (Kim D., Ikikardes S.) *"A Study of Properties of the Absolute Möbiüs Divisor Function and Their for Leaf Veins"* ,International Workshop on Mathematical Methods İn Engineering, Çankaya University, Nisan 27-29 2017 Ankara, TÜRKİYE.

F5. Sarp U., (Kim D., Ikikardes S.) *"The Shifted Absolute Möbiüs Divisor Function and Euler phi-function",* 4th International Conference on Recent Advances in Pure and Applied, Istanbul Commerce University, Mayıs 11-15 2017 Kuşadası, Aydın, TÜRKİYE.

F6. Sarp U., (Kim D., Ikikardes S.) "Some Application About Möbiüs Function", International Conference on Pure And Applied Mathematics ICPAM 2018, Eylül 11-13 2018, Van, TÜRKİYE.

G. Görev Alınan Projeler:

G1. Sarp U., (Ikikardes S.) Destekleyen Balıkesir Üniversitesi Projeler Birimi, Proje Numarası 2014/155, *"Solving of some partial differential equations by Differential Transform Method and Comparison with other methods (Yüksek Lisans Tez Projesi)",* 26 Mart 2014 Balıkesir- TÜRKİYE.

G2. Sarp U., (Ikikardes S.) Destekleyen Balıkesir Üniversitesi Projeler Birimi, Proje Numarası 2017/20, *"Möbiüs Fonksiyon Toplamı ve Poligon Sayıların İlişkisi (Doktora Tez Projesi)",* devam ediyor, Balıkesir- TÜRKİYE.

H. Sertifikalar:

H1. Google Genç Ajanslar Akademisi, *"Eğitim Semineri*", 26 Mart 2011 Konya, TÜRKİYE.

H2. Serper Bilgisayar Kursu-Balıkesir, *"Web Tasarım (Dreamweaver, Photoshop, CorelDraw, Fireworks)",* 02 Mart 2013 Balıkesir, TÜRKİYE.

H3. Serper Bilgisayar Kursu-Balıkesir, "Delphi Programı", 29 Nisan 2013 Balıkesir, TÜRKİYE.

H4. Serper Bilgisayar Kursu-Balıkesir, *“Visual C# 2010 Programı”,* 06 Ağustos 2013 Balıkesir, TÜRKİYE.

H5. Serper Bilgisayar Kursu-Balıkesir, *“MS SQL SERVER”*, 10 Eylül 2013 Balıkesir, TÜRKİYE.

H6. Serper Bilgisayar Kursu-Balıkesir,*”.NET”,* 10 Eylül 2013 Balıkesir, TÜRKİYE.

H7. Serper Bilgisayar Kursu-Balıkesir, *“Bilgisayar Programcılığı (MEB onaylı)”,* 07 Ekim 2013 Balıkesir, TÜRKİYE.

H8. Sakarya Üniversitesi Sürekli Eğitim Merkezi, *“İş ve Meslek Danışmanlığı Mesleki Yeterlilik Belgesi”*, 07 Ocak 2014 Sakarya, TÜRKİYE.

H9. UniCertificate (Universal Certificate), *“SolidWorks Programı”*, 04 Şubat 2014 TÜRKİYE.

H10. Sakarya Üniversitesi Sürekli Eğitim Merkezi, *“Bilgi İşlem Destek Elemanı Mesleki Yeterlilik Belgesi”*, 10 Eylül 2014 Sakarya, TÜRKİYE.

H11. Balıkesir Büyükşehir Belediyesi ve Karesi ilçe Belediyesi, *Matematik Cepte Mobil Cihaz Uygulaması Desteği Teşekkür Belgesi”*, 22 Ekim 2016 Balıkesir, TÜRKİYE.

H12. Serper Bilgisayar Kursu-Balıkesir, Mikro Ticaret ve Muhasebe Uygulamaları Standart Eğitim Belgesi, 2013 Balıkesir, TÜRKİYE.

Programlar ve Yazılım Dilleri:

- **Office;** İyi
- **Maple;** İyi
- **Latex;** İyi
- **Matematica;** Orta
- **Matlab;** Orta
- **Gap;** Orta
- **Geogebra;** İyi
- **Visual C# 2010;** İyi
- **Dreamweaver;** İyi
- **Photoshop;** İyi
- **CorelDraw;** Orta
- **Fireworks;** Orta
- **Delphi;** Orta
- **Php;** Orta
- **Ms Sql Server;** Orta
- **.Net;** Orta
- …

Çalışma Alanları:

- Sayılar Teorisi
- Cebir
- Cebirsel Sayılar Teorisi
- Aritmetik Fonksiyonlar
- Kombinatorik
- Sayılar
- Polinomlar
- Mühendislik, Uygulamalı ve Hesaplamalı Matematik
- Sayısal Analiz
- Modelleme ve Simülasyon
- Optimizasyon
- Fiziksel Matematik
- Biyolojik Matematik
- Sayısal Yöntemler