

31/95

T. C.
CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI

NÖRON SİSTEMLERİNİN SPİN CAMI MODELİ İLE İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nihat YILDIZ

SİVAS
EKİM 1987

T. C.
Yükseköğretim Kurulu
Dokümantasyon Merkezi

Aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından
bu çalışma Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

BAŞKAN

Prof.Dr.Bünyamin ÜZBAY



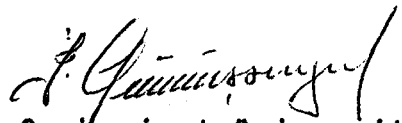
O Y E

Doç.Dr.Nevzat KAVCAR

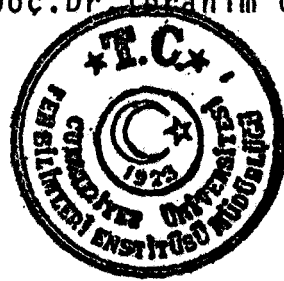


O Y E

Yrd.Doç.Dr.Ismail SÜKMEN



Cumhuriyet Üniversitesi
Fen Bil.Enstitüsü Müdürü
Doç.Dr. İbrahim GOMOŞŞUYU



İÇİNDEKİLER

SUMMARY	I
ÖZET	II
TEŞEKKÜR	III
1. GİRİŞ	1
(1.1) İNSAN BEYİNİ VE YAŞAMI ÜZERİNE KİMİ BİLGİLER ...	1
(1.2) NÖRAL AĞLARIN YAPISI	7
(1.2.1) Nöronlar (Sinir hücreleri) ve işlevleri	7
(1.2.2) İnsanda Sinir Fizyolojisi	8
(1.2.3) İmpulsun Oluşması ve İletilmesi	10
(1.2.4) Ya Hep-Ya Hiç İlkesi	11
(1.2.5) Sinapsis ve Sinaptik Etkileşme	12
(1.3) BİR NÖRAL AĞ BİR SPİN CAMI SİSTEMİYLE NASIL BENZEŞİR?.....	13
2. MAGNETİZMA VE İYİ TANIMLI BİR MAGNETİK FAZ OLARAK SPİN CAMLARI	16
(2.1) MADDELERİN MAGNETİK OLARAK SINIFLANDIRILMASI VE MAGNETİK FAZLAR	17
(2.1.1) Ferromagnetizma	18
(2.1.2) Paramagnetizma	19
(2.2) BİR SPİN SİSTEMİ ETKİLEŞMESİ OLARAK ISING MODELİ	20
(2.3) SPİN CAMLARI	21
(2.4) FERROMAGNETİK FAZDAN SPİN CAMI FAZINA GEÇİŞ ...	25
3. SPİN CAMLARI MODELLERİ	26
(3.1) EDWARDS-ANDERSON MODELİ	26
(3.2) SONSUZ ERİMLİ SPİN CAMLARI MODELİ OLARAK SHERRINGTON-KIRKPATRICK MODELİ	27
(3.2.1) Modelin Tanıtımı	27
(3.2.2) Kopya Kuramı	29
(3.2.3) m ve q nun $T \rightarrow 0$ Limitindeki Davranışları	37
4. NÖRAL AĞ MODELLERİ	43
(4.1) LITTLE MODELİ	43
(4.1.1) Modelin Tanıtımı	43

(4.1.2) Analitik Model	43
(4.1.3) Sonuçlar	48
(4.2) HOPFIELD MODELİ	49
(4.2.1) Fiziksel Sistemin Genel İçerik Adreslenebilir Belleği	49
(4.2.2) Model Sistem	50
(4.2.3) Bilgi Depolama Algoritması	51
(4.2.4) Modelin Biyolojik Yorumu	53
(4.2.5) Modelin Topluca (Kolektif) Davranışının Çalışmaları	55
5. NÖRAL AĞLARIN SPİN CAMI MODELLERİ	57
(5.1) GİRİŞ	57
(5.2) MODELLERİN DİNAMİĞİ (Genel Görünümler)	60
(5.3) GENELLEŞTİRİLMİŞ HOPFIELD MODELİ	62
(5.3.1) Ortalama Alan Kuramı	62
(5.3.2) Mattis Durumları	66
(5.3.3) Simetrik Çözümler	71
(5.4) GENELLEŞTİRİLMİŞ HOPFIELD MODELİNDE DEĞİŞMİŞ (META) KARARLILIK	76
(5.4.1) Simetrik Çözümlerin Kararlılık Matrisi	76
(5.4.2) T_c ve $T=0$ Yakınındaki Kararlılık	77
(5.4.3) Dinamik Kararlılık	79
(5.5) GENELLEŞTİRİLMİŞ HOPFIELD MODELİNİN ASİMETRİK ÇÖZÜMLERİ	79
(5.6) LITTLE MODELİNİN TERMODİNAMİĞİ	83
(5.7) BELLEKLERİN GENEL DAĞILIMI	86
(5.7.1) $\{\xi_i^{\mu}\}$ nin Genel Dağılımı	86
(5.7.2) Dönme Altında Değişmez Dağılımlar	89
SONUÇ	91
EKLER	92
KAYNAKLAR	105

ŞEKİL VE TABLOLARIN LİSTESİ

Şekil 1a. Tipik Bir Nöron Yapısı	9
Şekil 1b. Birkaç (altı) Nörondan Oluşan Tipik bir Nöral Ağ	9
Şekil 2. Saf Bir Metalik Matris İçine Katkılanmış Magnetik Safsızlıkların Şematik Diyagramı...	22
Şekil 3. Magnetik Momentten r Uzaklığının bir Fonksiyonu Olarak İletim Elektronlarının Net Spin Yoğunluğu	23
Şekil 4. Artan Dış Alanlı Bir Spin Camı İçin Tipik Düşük Alan Magnetik Alınganlığı	24
Şekil 5. $(Pd_{0.995} Fe_{0.0035})_{1-x} Mn_x$ Bileşiginde x in Üç Değişik Değeri İçin Magnetik Alınganlığın Mutlak Sıcaklığa Karşı Çizimi	25
Şekil 6. Spin Camı Ferromagnetinin Faz Diyagramı	41
Şekil 7. $q^{1/2}$ ve m nin T/T_f ye Karşı Çizimi	42
Şekil 8. Dış Alanın Varlığında ve Yokluğunda Diferansiyel Alınganlık	42
Şekil 9. Tipik Bir Nöron İçin Hücre Zarı Potansiyeline Karşı Aktiflik Oranı	56
Tablo 5.1) Nöral \neq Spinal Sistem Benzeşmesi	58

SUMMARY

The aim of this study is to investigate some abilities of the human brain such as storing of an information and correctly recalling it from memory. To do this, neural networks that are responsible storage and retrieving of the information have been firstly introduced and then magnetic systems which allow the neural networks to be treated like physical systems, have been mentioned paying a special attention spin glasses.

In the third step, studies of Sherrington and Kirkpatrick, who studied spin glasses as an interaction between classical spins using an expanded (infinite-ranged) Ising spin model, has been mentioned. And then Little and Hopfield's models that assume the human brain as a collective property of large interconnected neural networks using a Monte-Carlo flow in state space at $T=0$ or finite T , has been worked in details.

In fifth section, the statistical mechanics of infinite-range spin-glass Hamiltonians which governs the long-time behavior of these two models are discussed. And while doing this it has been shown that in thermodynamic limit, in the case $N \rightarrow \infty$, the long-time behavior of these two models is identical for all temperatures below a transition temperature T_c .

And finally, we have discussed the thermodynamic and dynamic properties of the system in the cases of more general distributions of random memories.

ÖZET

Bu çalışmanın ereği insan beynine ilişkin bilgi depolama ve bu bilgiyi doğru olarak yeniden elde etme gibi kimi yetenekleri araştırmaktır. Bunun için ilk önce bilginin depolanmasından ve yeniden elde edilmesinde sorumlu nöral ağlar tanıtılmış ve daha sonra bu ağların fiziksel olarak incelenmesine olanak tanıyacak magnetik sistemler (özellikle spin camları) anlatılmıştır.

Üçüncü adımda; spin camlarını klasik spinler arasındaki etkileşmeleri sonsuz erime genişleterek Ising spin modeliyle inceleyen Sherrington ve Kirkpatrick'in çalışmaları sunulmuştur. Buradan sonra insan beynini çok sayıda nöral ağların toplu bir özelliği olduğunu düşünerek inceleyen Little ve Hopfield'in çalışmaları (heriki model de $T=0$ ya da $T=$ sonlu sıcaklıkta durum uzayında bir Monte-Carlo süreci) ayrıntılı olarak anlatılmıştır.

Beşinci bölümde ise Hopfield ve Little modellerinin herikisi de uzun zaman davranışlarının sonsuz erimli Ising spin camı Hamiltonyen'iyle yönetildiği istatistiksel süreç tartışılmıştır. Bu yapılırken termodinamik limitte ($N \rightarrow \infty$) öğrenilmiş şekillenimlerden sonlu sayıda p tanesi göz önünde tutulmuş ve geçiş sıcaklığı T_c nin altında bu iki modelin herikisinin de uzun zaman davranışının özdeş olduğu gösterilmiştir.

Son olarak ise rasgele belleklerin daha genel dağılımının olduğu durumlarda bir sistemin termodinamik ve dinamik özellikleri tartışılmıştır.

TEŞEKKÜR

Herşeyden önce araştırma görevliliğimin yanısıra yüksek lisans öğrenimimi de yapabilmem için gerekli izni veren, gerek bazı kişisel ve gerekse akademik olarak içinde bulunduğum çoğu sorunlarımın çözümü için aydınlatıcı bilgi ve deneyimlerini hoşgörüyle sunan C.Ü.Fen-Ed. Fak.Dekanı Prof.Dr.Sayın Zeki ÖZER'e,

Bu çalışmanın konusunun seçiminden başlayarak, sonuçlanmasına değin çok yakından ilgi ve desteğini gördüğüm, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım danışmanım Yrd.Doç.Dr. Sayın İsmail SÖKMEN'e tüm içtenliğimle sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, büyük bir özenle şekillerin çizimini yapan Arş.Gör. Sayın Dursun SARAYDIN'a, el yazmalarını büyük bir özveriyle daktilo eden Sayın Nevzat CAN'a ve bilgi, deneyim ve yararlı eleştirilerini sunan tüm arkadaşlarıma teşekkür etmeyi bir görev bilirim.

Söyle bana, unutacağım. Göster
bana anımsayabilirim. Oysa işin
içine karıştır beni anlayacağım.
Çin Atasözü

1. GİRİŞ

(1.1) İNSAN BEYİNİ VE YAŞAMI ÜZERİNE KİMİ BİLGİLER

İnsanoğlu barutu, evrenin doğasını, buhar makinesini, aşığı, Antarktika anakarasını, demokrasiyi ve balonu beynin yapısını anlamadan çok önce buldu. Oysa beyin tüm bu buluşlar için gerekli akılsal yeteneği ve hamle gücünü sağlıyordu. Beynin yapısını anlamada gecikmemizin birkaç nedeni bulunmaktadır. Bunlar; eski bilgilerin öğretilmesine ısrarlı bağlılık, organların kesilip parçalanmasına din, devlet ve hemen hemen herkesten gelen karşı koymalar, benimsenmiş metinlerin üzerinde yeniden gözle yapılacak deneyimlere karşı duyulan isteksizlik ve kuşkusuz konunun doğal olarak karmaşıklığı gibi nedenlerdir. Böyleyken bile Eski Yunan uygarlığındaki ilk bilimsel aydınlanma, daha sonra Araplar, Rönesans, on yedinci yüzyılda tıbbın gelişmesi, mikroskobun bulunuşu ve çağdaş bilimin doğuşuna karşın, beyin hakkında doğru ve duyarlı bilgilerin toplanmasının 1800'li yıllara dek gecikmesi acıklıdır. Gerçekte frenoloji (kafatasının içine bakarak insanın karakterini ve düşüncesini inceleme yeteneği) ortaya çıkana dek sınırlı bilim tam anlamıyla bir gelişme gösterememiş; frenoloji denilen yanlış düşüncelere dayalı bilimsel araştırmalarda öteki alanlarda savaşın yaptığı gibi bir katalizör, bir uyarıcı rolünü oynamıştır.

Beyinle ilgili bilgilerin günümüze dek nasıl toplanmış olduğunu bilmek kuşkusuz çok önemlidir. Ancak bu önemine karşın konunun incelenmesi anatomi bilginlerine bırakılarak insan beyni üzerine kimi popüler bilgilerin aktarılması uygun olacaktır.

İnsan beyni on-onbeş milyar sinir hücresi içerir. Bu sayının üç katı sinir hücresi içeren yaşayan insan beyinleri var olmasına karşın bu türden sayılar insanı şaşırtır. Oysa sinapsların sayısı sinir hücrelerinin bin katı kadar olup onbeş trilyon dolayındadır. Sinir hücreleri ile bağlantılı olarak onları besleyen ve destekleyen gliyal hücrelerin (beyin bağ dokusu) sayısı doksan milyar dolayındadır. Küçük ve kurnaz bir bal arısında yaklaşık yedi bin sinir hücresi olduğu düşünülürse, insan beyniyle yapılacak bir kıyaslama normal insanın aklını karıştıracaktır.

İnsan beyninin tümünün kütlesi erkeklerde 1.400 gram, kadınlarda 1.250 gram dolayındadır. Bu oransızlık kadınlara yapılmış bir haksızlık olarak görülebilir. Oysa kadınların beyni tüm bedenlerinin % 2.5'u iken erkeklerin ki % 2'si kadar olduğundan kadınların beyni göreceli olarak daha büyüktür.

Göreceli olarak başı, dolayısıyla beyni büyük ve öteki organları küçük olan fetüs, tartışılabilir bir biçimde Homo sapiens'in oldukça duyarlı bir modelidir. Ancak çocuk büyüyüp akıllandıkça büyük olan kafası sabit kalarak bedenine oranla küçülmüş olur. Kuşkusuz en değerli varlığımız olan bu organımıza (beynimize) ilişkin kökleşmiş kanılara aykırı olarak düşünceler ileri sürülmektedir. Burada bu düşüncelerin neler olduğu birer birer sayılıp dökülmeksizin, beynin ilkel canlılardan günümüz insanına dek geçirdiği evrim süreci üzerine daha çok bilmek isteyen okuyucuya Ref.I önerilmekle yetinilecektir.

Buradan sonra, beynin yeteneklerinden bu çalışmanın konusunu oluşturan öğrenme ve bellek üzerine de söz etmek yararlı olacaktır.

Öğrenme ve Bellek

Ünlü oyun yazarı, ozan W.Shakespeare Hırçın Kız adlı oyununda kederle (ya da coşkuyla), "Oh! Bu öğrenme, ne biçim şeydir o" der. Dört yüzyıl sonra insanoğlu şimdi de bu konuda şaşkın ve umutsuz, oysa gene de heyecanlıdır. Cambridge'li hayvan bilimci Patrick Bateson şöyle yazmış-

tır. "Davranışları inceleyen kişiler arasında öğrenmeyi tanımlama hemen hemen kötü bir şaka gibidir." Prof. Marie Jahoda bu konudaki konuşmasına "Bir problem" diye başlayarak şöyle sürdürür. "Öğrenme gözlemlenemez. O her zaman davranış ve deneyimlerimizden bir sonuç olarak çıkarılabilir." Yeniden Shakespeare'ye dönülürse şu duyulur. "Öğrenme başka bir şey değil, kendi kendimize bir ek yapmaktır." Öğrenme aynı zamanda belleğe bir ektir. Bellekse bilincin bir parçasıdır. Herhangi bir sinir sistemi herhangi bir derecedeki karmaşıklıkla öğrenmeye neden olur. Bu yüzden öğrenme kısmen sinir sisteminin bir niteliğidir.

Öğrenmeye ilişkin olarak İngiliz anatomi uzmanı Sir Peter Medawar şöyle yazmıştır. "Bir kez üzerinde düşünme gereksinimi duyulmuş işlemler hakkında yeniden düşünmemek öğrenmedir." Gerçekte işlem iki katlıdır, bu yüzden Medawar tanımlamasını şöyle sürdürür. "Öğrenme düşünüp oluşturduğumuz düşünceleri içgüdüsel işlemler durumuna getirmeyi öğrenip; fikirlerimizi konulara göre ayırmakta otomatik içgüdüsel işlemlere başvurmamızdır." İngiliz matematikçisi ve filozofu Alfred Whitehead aşağı yukarı aynı görüşü şöylece yazıya dökmüştür. "Öğrenme için, büyük yanlışlıkla herkesin önceden bildiği, tüm kopya kitaplarının yinelediği ve ünlü kişilerin konuşmalarında söyledikleri şekilde yaptıklarımızı düşünme huyunu geliştirmemiz gerektiği vurgulanır. Oysa, öğrenme olayı tam bunun tersidir.

Beynin öğrenme yeteneğine ilişkin olarak değişik düşünceler bulunmaktadır. Pekçok veri akılsal yeteneklerin gerçekte yirmi yaş dolayında sona erdiğini kanıtlama çabası içinde görünür. Bazıları öğrenme için grafikte yirmibeş yaşa dek bir çıkış ve sonra iniş eğilimi bulunduğunu öne sürerler. Yaşamları incelendiğinde bireylerin ve halk kitlelerinin bu gerçeğe uygunluk gösterdiği saptanır. Oysa bu ifadelerden herbiri etkin biçimde yalanlanabilir. Öğrenme için önemli olan sinir sayısı (bu sayı yaşla azalır) değil, hücreler arasındaki bağlardır. Ancak bu konuda ke-

sin kanıt bulunamamıştır. Aynı zamanda Patrick Bateson'un dediği gibi "öğrenme kavramı için tek bir evrensel tanım arama çabası tümüyle umutsuzdur." Genç insanların gelişmesi ya da anormal gelişmeleri konusunda yazılmış kitapların dizinlerinde öğrenmeye ilişkin hiçbir referans bulunmaması ilginçtir.

Chris Evans'ın Fizyoloji Sözlüğü adlı yapıtından bir alıntı yaparak öğrenmenin tanımı şöylece verilebilir. "Bir hayvanın gelecekte davranışlarını değiştirmesine olanak tanınacak şekilde bilgi edinmesi ve depolamasıdır." Bu nedenle öğrenme bir belleği (bir depo) ve anımsamayı (bu depodan çıkarma işlemi) içermektedir. Çünkü bellek olmaksızın öğrenme ve öğrenme olmaksızın bellek düşünülemez. İnsan yavrusunun hangi aşamada öğrenmeye başladığı bilinmemektedir. Çocukta sekiz-oniki aylık olana dek hiçbir öğrenme olayı gelişmediğine ilişkin doğruluğu benimsenmiş bir varsayım bulunmaktadır. O ana dek herşeyi refleksleri ve canlının kendi türünü ya da kendisini barındırmanı tanımasını sağlayan doğal eylemlerden oluşmaktadır. Bu olay ilk kez Konrad Lorenz tarafından kaz palazlarında yavru kuşun görebildiği ilk büyük canlıyı izlemesiyle incelenmiştir. Kuşkusuz insan yavruları bazı kişi ile şeylere (anne, şişe, bebek karyolası gibi) ve bazı olaylara alışırlar. Ancak böyle çevreden haberli oluş, herkesin bildiği öğrenme olayı değildir. Son zamanlarda bebeklerin oniki-yirmibir günlükken öğrenmeye başladıkları varsayılmaktadır. Buna ilişkin deneyleri yapanlar bebeklerin önünde bazı jestler (dudaklarını ileri çıkarma ya da dudak büzme gibi) yapıp sonra bebeklerin kendilerini taklit etmelerini gözlerler. Bu çalışma kısmen bebeklerin çok sınırlı repertuvara sahip olmaları ve herhangi bir uyarı karşısında hemen bu hareketleri yinelemeleri nedeniyle eleştiriye uğramıştır. Bu yüzden olayın gerçek bir öğrenme başlangıcı olduğu kanıtlanamamıştır⁽¹⁾.

Öte yandan öğrenme süreci son bulgulara dayandırılarak biraz daha yakından incelenebilir. Yeni bilgiler,

daha önceki bilgiler sisteminin içine yerleştirilmek suretiyle bellendir. Örneğin "kanarya" yeni bilgisi, "kuş", "sarı", "ötmek" gibi eski bilgiler ağına yerleştirilir. Araştırmacılar, edinilen bilginin beyin kabuğunda depolandığını sanmaktadırlar. Ancak, Squire, Cohen ve psikolog Lynn Nadel'in görüşüne göre, varolan kavramlarla yeni bilgiler arasındaki ilk ilişki, olasılıkla hipokampus'ta kurulur. Bu, beynin dip kıvrımlarının içine sıkışmış parmak boyunda bir sinirsel doku ağıdır. yine bilim adamlarına göre, hipokampus'un bellenecek yeni bir bilgi çıktığında tıpkı bir telefon santrali gibi beyin kabuğunun çeşitli alanlarını birbiriyle ilişkilendirir. Ancak, bir süre sonra, bu alanlar birbiriyle otomatik olarak ilişki kurmayı öğrenirler ve hipokampus'un bu rolüne gereksinim kalmaz.

Görüldüğü gibi bu kurama göre anılar beyinde adım adım güçlenen bir süreçle yerleşirler. Bu da örneğin yaşlıların diyelim elli yıllık bir süre içinde iyice güçlenmiş anıları niçin kolaylıkla anımsadıklarını, buna karşılık yeni oluşmuş anıları niye akıllarında tutamadıklarını açıklayabilir.

Anılar beyinde hangi biçimde depolanırlar? Bu soruyu yanıtlayabilmek için, araştırmacılar, karmaşık sinir sistemli canlıları bir yana bırakıp daha basit yapıları yaratıkları incelemeyi yeğlerler. Örneğin, şu sıralarda New York'taki Columbia Üniversitesinde Eric Kandel ve arkadaşları tarafından 20.000 sinir hücreli Aplysia adlı bir su salyangozu üzerinde araştırmalar yapılmaktadır. Kandel'in bulgularına göre, söz konusu hayvanda öğrenme olayı, sinir hücreleri arasında bağlantı kurmakla görevli özel bir kimyasal maddenin belirmesiyle gerçekleşmeye başlar.

Yine örneğin Princeton'dan Joseph Farley ve Daniel Alkan, Hermissenda denilen bir salyangozun birer birer sinir hücrelerini minik elektrotlarla uyarıp koşullandırmaktadırlar. Bu şekilde koşullandırılmış salyangoz, elektrotlar çıkarıldıktan sonra da, doğal çevrede Pavlov yöntemleriyle koşullandırılmışcasına tepki gösterir. Bir başka de-

yişle, elektrik akımı ile sinirlerin uyarılması salyangoza birşeyler "öğretmiş" olur.

Alkan'a göre "Aplysia ve Hermissenda salyangozlarında olabilecek bütün davranış biçimleri, varolan sinir bağlantılarında öngörülmüş bulunur. Bu bağlantıların hangilerinin güçlenip hangilerinin zayıfladığı ise, hayvanın edimsel yaşamının yarattığı bir sonuçtur." Elbetteki, daha karmaşık organizmaları böylesine yalın iletişim ağlarıyla açıklamak olanaklı değildir. Ama; Kandel ve Alkan'a göre tıpkı basit transistörlerin birleştirilerek kurgulanan bilgisayarlar gibi, karmaşık sistemler de basit iletişim ağlarıyla kurulabilir.

Bu görüşü destekleyen kimi verilerde vardır. Örneğin, sinir hücrelerinin arasında bağlantı kuran kimyasal maddelerin, gelişmiş hayvanlarda bellek yitimini etkilediği anlaşılmıştır. Adrenalin, böylesi bir hormondur. Kendilerine adrenalin verilen fareler, daha çabuk öğrenirler ve daha uzun süre anımsayabilirler. Ayrıca bu bilgiler insanın neden heyecanlı ortamlarda yaşadığı olayları daha canlı tuttuğunu açıklamaya yarar. Çünkü, böylesi durumlarda adrenalin salgısı artar.

Buraya kadar sözü edilenlerden de anlaşılacağı üzere öğrenme ve bellek olaylarını anlamak için birçok deneylerin yapılması, birçok yeni kuramların ortaya atılması kaçınılmaz gibi gözüküyor. Buna neden olarak yeni geliştirilen bellek kuramlarının da birçok sorunun yanıtını açıkta bırakması gösterilebilir. Örneğin, insanın bellek yitimi, sonsuz mu yoksa sınırlı mıdır? Birşey unutulduğunda bilgi tümüyle yok mu olmaktadır yoksa yeniden gün ışığına çıkarılması olanaklı mıdır? Kimi psikologların öne sürdükleri gibi, bazı anıların yerleşmesi ile görme süreci arasında bir bağlantı var mıdır? Gördüklerini fotoğraf makinesi gibi belleklerine yerleştirebilen kişilerin beyinsel özellikleri nelerdir? "Daha önce görmüş olma" duyusunun biyolojik temeli nedir?

Bu gibi soruların yanıtları henüz ufukta gözükme-

ler de, araştırıcılar artık iyimserdirler. Stanford'daki bellek araştırıcısı Richard Thompson "Heyecan verici günler yaşıyoruz" demektedir. Bir anda, insanların seksen yıldır çözmeye çalışıp çözemedikleri sorunların aydınlanıverdiğini görüyoruz." (2)

(1.2) NÖRAL AĞLARIN YAPISI

Yukarıdaki satırlarda da vurgulanmaya çalışıldığı gibi nesne üzerine daha çok bilgi insan varlığının koşulu olmuştur. Ve yine iyi bilinir ki, insan bu bilgisini belleğinde depolayabilmesi, gerektiğinde bellekten bu bilgiyi geriye çağırıp yeni bir bilgiyle karşılaştırarak bilgilerini sistematize edebilmesi ve bu öğrendiklerini doğayı egemeliği altına almada ustaca kullanabilmesi sayesinde gelişimini olumlu yönde sürdürerek bugünkü uygarlık düzeyine erişebilmiştir. Bu nedenle, bilginin herhangi bir ortamdan alınıp beyne götürülmesinde, işlenmesinde, işlenmiş bilgi olarak yeniden gerekli ortamlara götürülmesinde görev alan nöral ağların yapısını burada ele almak uygun olacaktır.

(1.2.1) Nöronlar (Sinir hücreleri) ve işlevleri

Her çeşit hücre uyarılabilme ve uyarılınca bu uyarıya karşı tepki gösterme yeteneğine sahiptir. Canlı varlık tarafından uyarmaya karşı tepki göstermeyi sağlayan sistemlerin genellikle dört temel özelliği bulunur.

- (i) Uyarılabilme
- (ii) Uyarılma sonucu oluşan sinyalin iletilmesi
- (iii) Canlının kendisi ile uyaran arasında bir ilişki kurması
- (iv) Uyarmaya yanıt verilmesi

Canlıya bu özellikleri ya da yetenekleri sağlayan ayrı yapılar vardır. Tek hücreli canlılarda bu işleri hücrenin kendisi yapar. Çok hücrelilerde ise bu fonksiyonların herbirini yapacak ayrı yapılar gelişmiştir.

Çok hücreli gelişmiş bir canlıda uyarıyı yanıtlamada gerekli olan dört bileşenden herbiri için özelleşmiş bir

hücre ya da organ vardır. Uyarılabilme yeteneğine sahip, kısaca uyarmayı alabilen alıcılar (reseptör) bulunur.

Alıcıda oluşan sinyali merkezlere ileten duyu sinirleri iletim (konduktivite) işini yapan özel hücrelerdir. Sinir merkezleri, buraya getirilen sinyali değerlendirip canlının ne yapması gerektiğini saptarlar, yani korelasyon işini görürler. Canlının ne gibi tepki göstermesi gerektiği saptandıktan sonra, o etkinliğin yapılması için merkezlerce gerekli sinyaller motor sinirler yoluyla iş görece organa (efektör organ) götürülür. Bu da bir iletim işidir ve yine özel sinir hücreleri tarafından yapılır. Sinyal efektör organa gelince, özelleşmiş efektör hücreler tepki gösterirler. Efektör hücreler kas ve bez hücrelerdirler.

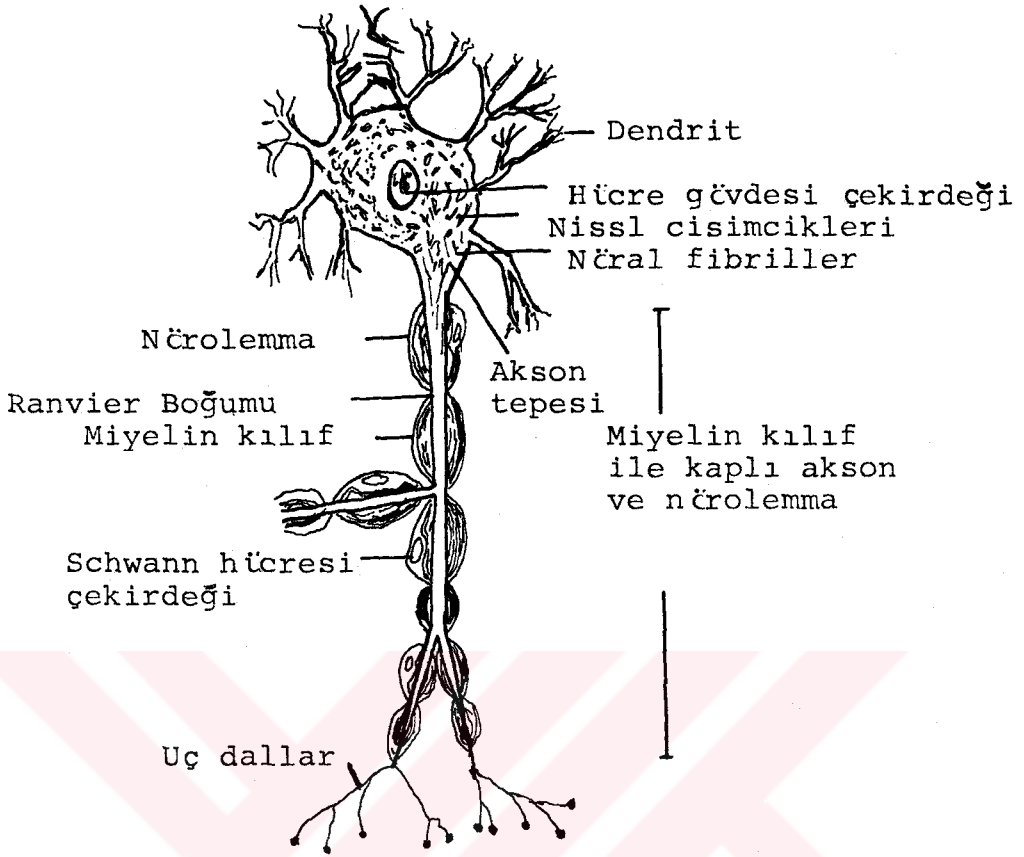
Sinir hücresine nöron adı verilir.

Evrimi biraz daha ilerlemiş bir sinir sisteminde uyarma ile oluşan sinyalin iletilmesinde iki ayrı iletilici hücre vardır. Birinci nöron alıcıdan sinyali alır, belirli bir yere kadar götürür, ikinci bir nöronla bağlantı kurar ve bu ikinci nöron sinyali efektör organa iletir. Burada birinci iletilici nörona sensorik nöron (duyuları ileten nöron), ikinci nöronaysa bir efektörü harekete geçirdiği için motorik nöron denir.

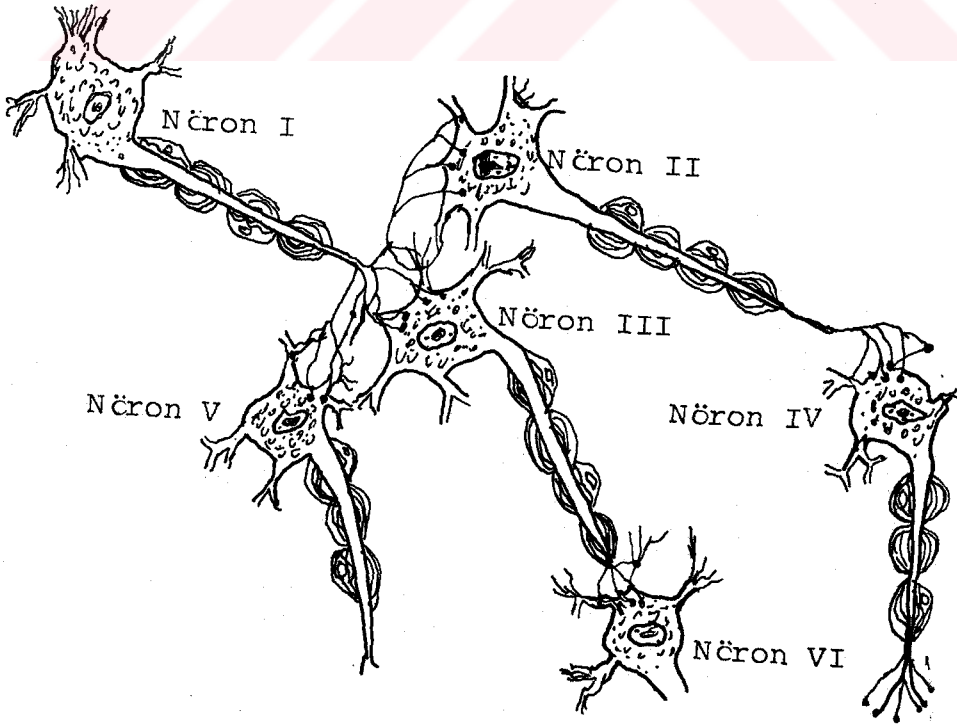
Evrimi bir derece daha ilerlemiş sinir sisteminde sensorik ve motorik nöronlar arasında ara nöronlar yer alır. Bu nöronlar sayesinde bir tek alıcıdan alınıp sensorik nöron ile iletilen sinyal, çeşitli motorik nöronlara ve dolayısıyla çeşitli efektör organlara doğru yöneltilir. Burada ara ve moto nöronlar birlikte bir nöronlar topluluğu (gangliyon) oluştururlar. Bu durum sinir sisteminin ilk taslağıdır. Tipik bir nöron ve bir nöral ağ Şekil 1'de çizimlenmiştir.

(1.2.2) İnsanda Sinir Fizyolojisi

Sinir dokusu nöron denilen sinir hücrelerinden kurulur. Nöronların arasını destek ödevi görmek üzere gliya ya da nöroglia denilen küçük sinir hücreleri doldurur.



Şekil 1a. Tipik bir nöron yapısı



Şekil 1b. Birkaç (altı) nöron dan oluşan tipik bir nöral ağ

Nöron, hücre gövdesi ve bunun uzantılarından kurulmuştur. Nöronun genellikle iki tür uzantısı vardır.

(i) Dendrit: Kısa olan uzantılardır. Bir ya da çok sayıda olabilirler, iç yapıları hücre gövdesinin aynısıdır. Nöronun başka nöronlardan ya da alıcıdan gelen sinyali alan bölgesidir.

(ii) Akson: Nöronun aldığı sinyali dendrit bölgesinden uzağa doğru ileten sinir telleridir.

Akson uzunluğu türlü nöronlarla, nöronun işlevine göre birkaç mikron (10^{-6} m.) olabileceği gibi bir metre ya da daha fazla uzunlukta olabilir. Aksonun beslenmesi, olağan yapısının korunması hücre gövdesiyle bağlantısının sürmesiyle olanaklıdır. Çünkü; akson yaşamının sürmesi için gerekli proteinler hücre gövdesinde sentezlenerek aksona taşınır.

Nöronun hücre gövdesi yalnızca merkezsiz sinir sistemi denilen beyin ve omuriliğinde ve merkez dışı gangliyonlarda bulunur.

(1.2.3) İmpulsun Oluşması ve İletilmesi

Sinir hücresi impuls (uyartı) deyimiyle belirtilen elektriksel (fiziko kimyasal) bir değişikliği iletmek için iyice özelleşmiş bir hücredir. Duyuları periferden (dış yüzey) alıp merkezlere doğru ileten nöronlara aferent nöron, tersi işlemi yapan nöronlaraysa eferent nöron denir. Deneysel olarak sinir lifi (akson) herhangi bir bölgesinden uyartılabilir, oluşan impuls (uyartı) uyarılan yerden hem merkeze hem de perifere doğru iletilir. Ama; olağan organizma içindeki bir nöron uyartıyı yalnızca tek yönde iletir. Eğer nöron duyuları ileten sensorik bir nöron, yani aferent nöronsa, alıcıdan aldığı uyartıyı yalnızca merkeze doğru iletir. Eğer nöron bir merkezden aldığı komutları ileten, yani eferent nöronsa, uyartıyı yalnızca merkezden perifere doğru iletir.

İmpulsun oluşması bir zar (membran) olayıdır. Sinir telinin hücre zarı, akson içindeki sıvıyla dıştaki sıvıyı birbirinden ayırır. Aksonun içindeki sıvıyla dışındaki sıvının iyonik yapısı oldukça farklıdır. Gerek iyonların türü, gerekse derişimindeki (konsantrasyon) ayrılık nedeniyle içte ve dışta elektriksel yük de farklıdır.

Dinlenme durumundaki bir sinir telinin zarından içeriye doğru bir mikroelektrot yerleştirilip dıştaki sıvıya bir başka elektrot konularak potansiyel farkı ölçülürse, içte negatif olmak üzere 70-90 mV. luk bir potansiyel fark görülür.

(1.2.4) Ya Hep-Ya Hiç İlkesi

Bir sinir uyarıldığında uyartı oluşur, yani sinirde bir elektriksel potansiyel değişikliği olur. Duygun aygıtlarla bu potansiyel değişikliği yazdırılabilir ve potansiyelin yüksekliği ölçülebilir.

Sinir, eşik değerden daha az şiddeteki gerilimle uyarılırsa uyariya yanıt vermez. Eşik değerde gerilimle uyarılırsa yanıtlar ve potansiyel değişikliği yazdırılabilir. Oluşan bu potansiyel farkına aksiyon potansiyeli denir. Tek bir akson eşik değerden daha yüksek gerilimle uyarılırsa aksiyon potansiyelinin artmadığı görülür. Yani eşik değerden daha düşük gerilimle uyarılırsa sinirin tepkisi yoktur, eşik değerdeyse bütün gücüyle yanıtlar. Bu ya tepkisiz ya da tam tepkili olaya "ya hep-ya hiç ilkesi" denir.

Birçok sinir aksonlarının biraraya gelmesiyle oluşan bir sinir kordonu ya da birçok kas tellerinden oluşan bir kas kitlesi bu ilkeye uymaz. Çünkü, her sinir telinin uyarılma eşiği aynı değildir. Belirli bir büyüklükteki gerilim, önce kolay uyarılabilen sinir tellerini ya da kas tellerini uyarır, eşik değeri daha yüksek olan telleri uyarmaz. Elektrik geriliminin büyüklüğü artırıldıkça uyarılabilen fibrillerin sayısı artar ve tepkime daha kuvvetli olur. Sonunda uyarma şiddeti bütün telleri uyaraabilecek düzeye ulaşınca

bütün sinir ya da kas telleri uyarılır ve maksimal tepkime elde edilir. Bundan sonra uyarmanın büyüklüğü artırılrsa da tepkime büyüklüğü aynı kalır (merdiven etkisi).

Bir sinirde impulsun genliği değişmez ama; uyarmaya göre impulsun frekansı değişir, merkezler frekans farkına göre bu uyardadaki farkları ayırt ederler.

(1.2.5) Sinapsis ve Sinaptik Etkileşme

Sinapsis bir nöronun öteki nörona ya da bir nöronun bir efektöre (kas veya bez hücresi) uyarımının geçtiği ya da geçmesinin önlenildiği yerdir.

Omurgalılarda sinapsis yeniden uyarımın bir nöronun ötekine geçişi ya da önlenişi genellikle kimyasal bir madde aracılığıyla olur. Ama; araştırmalar bazı omurgasız hayvanlarda (Furshpan ve Potter 1959) ve bir aşağı omurgalıda (Furshpan, 1964) sinaptik geçirgen kimyasal madde olmaksızın doğrudan doğruya aksiyon akımının bir nöronun ötekine geçmesi yoluyla olduğunu göstermektedir. Aktarımı (transmisyon) kimyasal madde aracılığıyla olanlara "kimyasal sinapsis), aksiyon akımıyla olanlara "elektriksel sinapsis) denir.

Sinapsis iki nöronun bağlantı kurduğu yer olduğuna göre, nöronlardan birincisi uyarımı sinapsis yerine getiren nöron (presinaptik nöron), öteki ise buradan alan ikinci nöron ya da hücredir (post sinaptik nöron).

Bir nöronun aksonu son ucuna doğru birçok kollara ayrılır ve bu kollar çeşitli nöronlarla sinaptik birleşme kurabilirler. Aksonun son kolları çok incedirler ama; sinapsis yapacak son uçlar bir yumru durumunu almıştır. Genellikle bir nöronun hücre gövdesine ve dendritlerine yüzlerce nöronun akson uçları gelir ve sinaptik birleşme kurar.

Yüzlerce ayrı yerden uyarım alan bir tek nöronun, sayısı yüzlerce varan başka nöronlarla bağlantı kurduğu düşünülürse, bir alıcıdan alınan uyarımın merkezsiz sinir sisteminin bütün merkezleriyle potansiyel bağlantı durumunda

olduğu anlaşılır. Ama; merkezsiz sinir sisteminde her gelen uyarıya her yol açık değildir. Ancak, gerekli yollar açılır, gereksiz yollar kapalı tutulur.

Özetle, her sinapsiste uyarı bir nörondan ötekine geçmez. Uyarıyı bir nörondan ötekine geçiren sinapsise "eksitör sinapsis", geçirmeyeneyse "inhibitor sinapsis" denir ⁽³⁾.

(1.3) BİR NÖRAL AĞ BİR SPİN CAMI SİSTEMİYLE NASIL BENZEŞİR?

Bu soruya yanıt arayabilmek için kesim (1.2) de anlatılmaya çalışılan nöral ağlardan sonra şimdi spin camı sistemi hakkında kısaca bilgi sunmak gerekli olacaktır. Bu yapıldıktan sonra benzerlik ilkelerinden söz edilecektir.

Bir spin camı iyi tanımlı bir T_f donma sıcaklıklı düzensiz bir magnetik fazdır. $T < T_f$ için magnetik momentler geleneksel uzun erimli bir düzen olmaksızın rasgele yönelimlere dondurulmuşlardır. $T = T_f$ de bir faz geçişi vardır.

Saf bir metalik matris içine katkılanmış magnetik safsızlıklardan (~% 1) herhangi ikisi Ruderman-Kittel-Kasuya-Yosida (R.K.K.Y.) denilen bir etkileşme mekanizmasıyla etkileşirler. Etkileşme aradaki uzaklığın bir fonksiyonudur ve uzaklık arttıkça azalır. Bu etkileşmenin bir özelliği de uzaklıkla işaret değiştirerek salınmasıdır ⁽⁴⁾.

Safsızlık atomlarının spinlerinin doğrultuları rasgele görünse bile, ortalama olarak ferromagnetik ve antiferromagnetik olmayacak ama; belirli doğrultularda dizildiği bir taban durumu, yani spinlerin potansiyel enerjiyi minimize edebilecek bazı yönelimleri olacaktır.

Yine spinler Ising spini ($S_i = \pm 1$) olarak kabul edilerek, magnetik safsızlıklar arasındaki etkileşme

$$U = \sum_{ij} J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \quad (1.1)$$

biçiminde bir etkileşme enerjisiyle sağlanır. Burada ij spin çiftlerini, J_{ij} ise çiftler arasındaki çiftlenim sabitini (değiş tokuş etkileşmesi), S_i ve S_j klasik spinleri simgelemektedir.

Şimdi, spin camları hakkında ayrıntılı bilginin 2. bölümünde verileceği belirtilerek nöral ağlarla benzerliğine kısaca değinilmekle yetinilecektir.

Bu çalışmanın özel ilgisi Hopfield'in⁽⁵⁾ asosiyatif bellek modeli üzerine olacaktır. Nöronlar arasındaki etkileşme sabiti T_{ij} (spin camı sistemindeki J_{ij} 'ye benzer olarak) ve i ve j . nöronun üzerindeki potansiyel sırasıyla V_i ve V_j olarak (S_i ve S_j spinlerinin benzeri) alınır. i ve j . nöronlar arasındaki etkileşme enerjisi

$$E = \sum_{i,j} T_{ij} V_i V_j \quad (1.2)$$

ile verilir. Kesim (1.2) de nöronlara ilişkin aksiyon potansiyelinden söz edilirken nöronların ancak uyarılma gerilimine bağlı olarak aktif ya da pasif kalacağı vurgulanmıştı. Bu durum Ising spin sistemindeki spinlerin bağımsız olarak $+1$ ya da -1 değerini alabilmesinin benzeridir. V_i 'nin seçenekli değişimi E 'nin monoton azalan bir fonksiyon olmasına neden olur. Durumlar, E yerel bir minimuma ulaşınca dek değişir. Bu durum da Ising modeliyle eş yapılidir. T_{ij} simetrik ($T_{ij} = T_{ji}$) ve rasgele karakterde olduğu zaman spin camı sistemine benzer. Çünkü, bu durumda birçok yerel kararlı durumlar oluşur.

Benzerlik ilkelerini de bu şekilde özetledikten sonra bu çalışmanın ereğini ve çalışmada nelerin yapıldığını kısaca belirtmek uygun olacaktır.

İnsan belleğini anlamaya yönelik birçok kuram ve modellerin ortaya atıldığı kuşkusuzdur. Bu modellerden ikisi bu çalışmaya temel olacaktır. Birincisi 1977 yılında W.A. Little⁽⁶⁾ tarafından geliştirilen "Bir nöral ağın depolama kapasitesinin analitik incelenmesi" ikincisi ise 1982 de J.J.Hopfield⁽⁵⁾ tarafından çalışılan "Toplu hesaplama yete-

nekleriyle ortaya çıkan fiziksel sistemler ve nöral ağlar" modelidir. Temel olarak bu iki modelin seçilmesinin nedeni, heriki modelin de insan belleğini çok sayıda içten bağlantılı nöral ağların toplu bir özelliği olarak ele alması ve iyi tanımlı bir magnetik faz olan spin camı modeliyle (ortalama alan kuramı kullanılarak) inceleme olanağı sağlamasıdır.

Bu çalışma öğrenme, şekillenim tanıma, şekillenim ayırma vb. gibi birçok belleksel yeteneklerin daha iyi anlaşılmasına kimi katkılar ekleyebilecektir.

Bu ereği gerçekleştirebilmek için 2. bölümde spin camları fazı ferromagnetik ve paramagnetik fazları içinde incelendi. Bölüm 3 spin camı modellerinden Ising spin sistemini sonsuz erimli etkileşmelere genişleterek inceleyen Sherrington-Kirkpatrick 1978⁽⁷⁾ (SK) modeline ayrıldı. Bu bölümde N adet Ising spininden oluşan bir sistemi ortalama alan kuramı kullanılarak kopya (replika) yöntemiyle incelendi. Sistem için Hamiltonyen yazılıp çözüldü. Buradan iç enerji, alınganlık, magnetizasyon vb. gibi çeşitli fonksiyonlar türetildi. $N \rightarrow \infty$ limitinde düzensizlik statik ve dinamik özellikleriyle, alışılmış ferromagnetik durumdan çok farklı olarak sonsuz sayıda taban durumu gösterdi. 4. bölümde yukarıda sözü edilen Little ve Hopfield tarafından çalışılan bellek modelleri ayrı ayrı incelendi. 5. bölümde ise nöral ağlar; nöral ağların bir asosiyatif (birleşik) bellek modeli sağlaması için gereksindiği koşullar spin camı sistemine birebir yüklenecek incelendi. Bu işlem yapılırken termodinamik limitte sonlu sayıda ezberlenmiş spin konfigürasyonu, p tane, ele alındı. Geçiş sıcaklığı T_c 'nin altındaki bütün sıcaklıklarda Hopfield ve Little modellerinin herikisinin uzun zaman davranışının özdeş olduğunu ve yine T_c 'nin altındaki sıcaklıklarda bu sistemlerin herbirinin $2p$ tane Mattis durumuna (herbiri depolanmış şekillenimlerden birisiyle tamamen bağlantılı olduğu durumlar) sahip olduğunu, $T \sim 0.46 T_c$ sıcaklığının altındaki sıcaklıklarda ek olarak ortaya çıkan kararlı durumların olduğunu gösteren D.J.Amit, H.Gutfreund ve H.Sompolinsky'nin⁽⁸⁾ elde ettikleri sonuçlar tartışıldı.

2. MAGNETİZMA VE İYİ TANIMLI BİR MAGNETİK FAZ OLARAK SPİN CAMLARI

Magnetizma; magnetik alanları ve bu alanların maddeler üzerine etkilerini gerektiren fiziksel olayları kapsar. Magnetik alanlar; makroskopik olarak elektrik akımları ya da mıknatıslar tarafından kurulabilir. Atomik ölçekteyse atomlar, elektronlarının açısal momentumlarının sonucu olarak net bir magnetik momentlere sahip olmaları nedeniyle magnetik alanlar üretirler. Yüklü bir parçacık açısal momentuma sahip olduğunda magnetik moment oluşur. Sürekli mıknatısın makroskopik olarak magnetik alana sahip olması atomik magnetik momentlerin topluca etkisinin sonucudur.

Burada daha öteye gitmeksizin maddenin magnetik özelliklerine ve dış bir magnetik alanla etkileşmesine ilişkin kimi temel kavramları yeniden gözden geçirmek yararlı olacaktır.

(i) Magnetik Moment: Bir magnetik alanla, bir mıknatıs ya da akım döngüsü ya da alanda devinen yüklü parçacığa etkileyen momentin (tork) ilişkinliğidir. Bir mıknatıs \vec{B} magnetik alanına konduğunda alanla θ açısı yapacak biçimde yönelir. B magnetik alanı bu dipol üzerine

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}_m \times \vec{B} \quad (2.1)$$

vektörel bağıntısıyla verilen bir tork etkitir. Burada $\vec{\tau}$, $\vec{\mu}_m$ ve \vec{B} vektörel nicelikleri sırasıyla alanın dipole etkilediği dönme momenti, magnetik dipol momenti ve uygulanan dış magnetik alandır.

Torkun etkisi dipolü döndürmek ve alanla sıraya getirmektir. Dipolün yönelim potansiyel enerjisi

$$V = -\vec{\mu}_m \cdot \vec{B} \quad (2.2)$$

ile verilir. Dipol, alan doğrultusunu aldığı anda enerji minimumdur. Atomlarda magnetik momentler dönen elektronların oluşturduğu döngü akımlarından kaynaklanır.

(ii) Magnetizasyon ve Magnetik Alınganlık

Bir magnetik alan iki vektörden birisiyle betimlenebilir. Magnetik indüksiyon \vec{B} ya da magnetik alan yoğunluğu \vec{H} .

Bunlar boşlukta birbirine

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (2.3)$$

bağıntısı ile bağlıdırlar. Burada $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Hz/m değerinde olup serbest uzayın geçirgenliğidir.

Bir madde ortamı magnetik alana yerleştirildiğinde ortam mıknatıslanır. Magnetizasyon; birim hacimdeki dipol momenti olan \vec{M} vektörüyle betimlenir. Ortamın içindeki magnetik indüksiyon

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \quad (2.4)$$

bağıntısıyla verilir. Burada $\mu_0 \vec{H}$ ve $\mu_0 \vec{M}$ kısımları sırasıyla dış kaynakların ve ortamın magnetizasyonunun katkılarıdır. Magnetizasyon alan tarafından üretildiğine göre \vec{M} nin \vec{H} ile orantılı olduğu varsayılabilir. Yani

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \quad (2.5)$$

olur. Orantı katsayısı χ 'ya ortamın magnetik alınganlığı denilir.

(2.1) MADDELERİN MAGNETİK OLARAK SINIFLANDIRILMASI VE MAGNETİK FAZLAR

Maddeler; alınganlıklarının büyüklüğüne ve işaretine bağlı olarak üç magnetik sınıf altında gruplanabilirler. Bu magnetik maddelerden χ si pozitifse, yani \vec{M} nin \vec{H} ya paralel olduğu durum, paramagnetik, χ negatifse diamagnetik olarak bilinirler.

Ferromagnetik maddelerin alınganlığı çok büyük olabilir (10^5 cm^{-3}). Bir ferromagnetik madde belirli bir sıcaklığın altında kendiliğinden magnetize olur. İyonik ve kova-

lent kristaller diamagnetikdirler. Bu maddelerin dolmuş kabuklara sahip atom ya da iyonları vardır. Paramagnetik maddelerin en iyi bilinen örnekleri geçiş iyonları ve ender toprak iyonlarıdır. Dolmamış atomik kabukları olan iyonlar maddenin paramagnetik olmasına neden olurlar.

(2.1.1) Ferromagnetizma

Belirli metallere, alaşımlar, geçiş bileşikleri, ender toprak elementleri ve radyoaktif elementler tarafından sergilenen, Curie sıcaklığı denilen belirli bir sıcaklığın altında bütün atomik magnetik momentlerin ortak bir doğrultuyu almaya yöneldikleri bir özelliktir.

Atomik magnetik momentler, atomların elektronları açısal momentumlarının sonucu olarak net bir magnetik momentlere sahip olduklarından ortaya çıkar. Atomik magnetik momentlerin etkisi, uygulanan bir alan için bağıl olarak magnetizasyona bir artma getirmesidir. Curie sıcaklığının üzerinde bir ferromagnetik madde, paramagnetik madde durumundaki gibi davranır. Alınanlığı Curie-Weiss yasası ile verilir. Curie sıcaklığı, atomik magnetik momentlerin düzenleniminin düzen (order) ve düzensizliği (disorder) arasında bir geçişi gösterir.

Bir ferromagnetin özelliği, Curie sıcaklığının altında, uygulanan dış magnetik alan olmaksızın kendiliğinden bir magnetizasyona sahip olabilmesidir. Zayıf bir magnetik alan uygulanınca, magnetizasyon, genellikle sıcaklığın fonksiyonu olarak doyum magnetizasyonu denilen yüksek bir değere hızla gider.

Weiss Kuramı: Bir ferromagnetin özelliklerini açıklamaya yönelik, ferromagnetizmanın moleküler alan kuramını ele alan ilk gerçekçi girişimdir (P.Weiss, 1907). Bu kuram iki hipoteze dayanır.

(i) Curie noktasının altında, bir ferromagnetik madde, kendiliğinden magnetizasyonlar içeren küçük bölgelerden (domen) oluşmuştur. Maddenin toplam magnetik momenti, bölünmez

bölgelerin magnetik momentlerinin vektör toplamıdır.

(ii) Güçlü moleküler (magnetik) alanın domen içindeki birbirinden ayırt edilemeyen atomik magnetik momentleri sıraya dizme eğilimde olması yüzünden herbir domen kendiliğinden magnetize olur.

Weiss kuramının ikinci hipotezi, herbir bölgenin Curie sıcaklığının altında kendiliğinden magnetize olmuşsa, atomik magnetik momentler arasında onları sıraya girmeye zorlayan bir çeşit etkileşme var olmalıdır der.

Curie sıcaklığının üstünde, momentler rasgele yönelirler ve sıfır net magnetizasyon verirler. Böylece madde paramagnetik olur ve alınganlığı

$$\chi = C / (T - T_0) \quad (2.6)$$

ile verilir. Bu Curie-Weiss yasası olup, C Curie sabiti, T_0 ise Curie sıcaklığıdır.

(2.1.2) Paramagnetizma

Maddelerin magnetik alana konulduklarında alanla paralel olacak biçimde yöneldikleri özelliiktir. Paramagnetik maddelerin alınganlıkları her zaman birden büyüktür.

Langevin Kuramı: Paramagnetizmanın Langevin kuramı paramagnetik maddeyi aralarında etkileşme olmayan sürekli magnetik dipollerin klasik bir kolleksiyonu olarak ele alır. Dipoller, maddedeki paramagnetik atom ya da iyonların magnetik momentleridir. Bir magnetik dipol magnetik alana koşut olacak biçimde konulduğunda dipolün potansiyel enerjisi denk. (2.2) 'ye uygun olarak minimumdur. Bu durumda momentler alanla sıraya girme eğilimi gösterirler. Sıcaklığın etkisi dipolün yönelimini gelişiğüzelleştirmeye yöneliktir. Birbiriyle yarışan bu iki etayın sonucu olarak bir miktar magnetizasyon üretilir. Problem analitik olarak çözümlür ve

$$\bar{\mu}_z = \mu L(\nu) \quad (2.7)$$

olduğu görölür. Burada $\bar{\mu}_z; \mu_z$ nin ortalaması (momentin z yö-

nündeki alan doğrultusundaki bileşeni) ve $L(v)$ ise Langevin fonksiyonudur. Magnetizasyon

$$M = N\bar{\mu}_z = N\mu^2 B / 3kT \quad (2.8)$$

ile verilir. Burada N atomik konsantrasyondur. Alınganlık ise

$$\chi = \frac{N\mu_0\mu^2}{3kT} \quad (2.9)$$

ile verilir. Bu alınganlık denk.(2.6) da verilen Curie-Weiss alınganlığıyla sıcaklık orijininin 0 dan T_e ye kaydırılması ile özdeş olur. (2.8) deki alınganlığın sıcaklıkla ters orantılı ve temel olarak sıcaklıktan bağımsız diamagnetik alınganlıkla zıtlık içinde olduğu dikkat çekici bir durumdur⁽⁹⁾.

(2.2) BİR SPİN SİSTEMİ ETKİLEŞMESİ OLARAK ISING MODELİ

iki karakteristik özelliği olan spin değişkenli örgüyü içeren bir modeldir.

(i) Her spin değişkeni +1 ya da -1 değerini bağımsız olarak alır.

(ii) Yalnızca birbirine en yakın komşu olan spin çiftleri etkileşir.

1925 de Ernst Ising tarafından iki boyutta çalışılan bu model, toplu olayların ve faz geçişlerinin modern kuramını biçimlendirir.

Faz geçişi gösteren öteki birçok modelden Ising modeli en iyi bilinenidir. Üç boyutta model çok karmaşıktır ve şimdiye dek tam hesaplama yapılamamıştır. Tek boyutta model faz geçişine gitmez. Bununla birlikte iki boyutta yalnızca ferromagnetik faz geçişinin değil öteki fiziksel özelliklerin tam olarak hesabında kullanılabilir.

Modelin Tanıtımı:

i ve j en yakın komşular olmak üzere σ_i ve σ_j spin çiftlerinin karşılıklı etkileşme enerjisi

$$-E(i, j) \sigma_i \sigma_j \quad (2.10)$$

biçiminde yazılabilir. bunun anlamı σ_i ve σ_j nin herikisinin de +1 ve -1 olduğu zaman etkileşme enerjisinin $-E(i, j)$ ve $\sigma_i=+1, \sigma_j=-1$ ya da $\sigma_i=-1, \sigma_j=+1$ olduğundaysa $+E(i, j)$ olduğudur.

Ek olarak bir spin $-H\sigma_i$ enerjisiyle dış bir H magnetik alanıyla etkileşebilir. Bu iki temel etkileşmeden, kare örgü için toplam etkileşme enerjisi (2.10) daki gibi yazılabilir.

$$E = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} [E_1(\alpha, \beta) \sigma_{\alpha, \beta} \sigma_{\alpha, \beta+1} + E_2(\alpha, \beta) \sigma_{\alpha, \beta} \sigma_{\alpha+1, \beta} + \mathcal{H} \sigma_{\alpha, \beta}] \quad (2.11)$$

Burada α , örgünün satırını β ise sütununu simgeler. Bu biçimde $E_1(\alpha, \beta)$ ve $E_2(\alpha, \beta)$ etkileşme enerjilerinin örgü boyunca keyfi olarak değişmesine izin verir.

Magnetik fazlar ve bu faz geçişlerinin incelenmesine olanak tanıyan Ising modeli bu şekilde özetlendikten sonra bu bilgilerin ışığı altında spin camı fazı incelenecektir⁽¹⁰⁾.

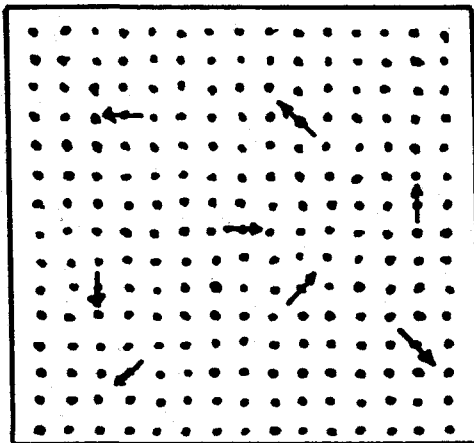
(2.3) SPİN CAMLARI

Birbiriyle etkileşen atomik magnetik momentler içeren ve donma sıcaklığı denilen T_f sıcaklığında magnetik alınganlığının eğiminde ani bir değişme gösteren maddeler bir çeşit düzensizliğe sahiptir. $T < T_f$ için artık "uzun erimli" bir düzen olmayıp, bunun yerine makroskopik uzaklıklar üzerinden rasgele değişen yarı statik ya da statik yönelimler vardır. Bu durum spin camı magnetik düzeni olarak değerlendirilir. Spin camları düzeni genellikle uzun erimli düzenin olmadığını gösterebilmek için ek veriler gerektirir, de,

magnetik alınganlık ölçüleriyle gözlenir.

Spin camları davranışı genellikle % 0.1-10 oranında magnetik safsızlıklar katkılanmış metalik matrislerde gözlenir. AuFe ve CuMn alaşımları bunun tipik birer örnekleridir.

Şekil 2'de, yüzde birkaç magnetik safsızlığın bir metalik matris içinde rasgele dağılmış bir şematik temsili görülmektedir (örneğin, altın içinde demir). Bu magnetik safsızlıktan herhangi ikisi (R.K.K.Y.) denilen bir etkileşme mekanizmasıyla etkileşirler. Şekil 3'de çizimlenen bu etkileşmenin iyi bilinen bir karakteristiği vardır. k_F Fermi dalga vektörü olmak üzere $\approx \cos 2k_F r / (k_F r)^3$ olan etkileşme salıngan yapıdadır ve büyük uzaklıklar üzerinden oldukça yavaş değişir. Bu salınımda etkileşme, safsızlık atomlarının (magnetik momentlerinin) rasgele dağılımı yüzünden spin camlarının anlaşılmasında oldukça önemlidir. İki spin arasındaki etkileşmeden bazıları ferromagnetik (yani paralel) bazılarıysa antiferromagnetik (yani antiparalel) olacaktır. Böyle olunca safsızlıklar arasındaki rasgele uzaklıklar magnetik etkileşmeler arasındaki dağılıma bir artma getirir. Bu durum, atomik yerleşimlerde düzenli yapının olmadığı gerçek camlara ya da amorf maddelere benzerdir.

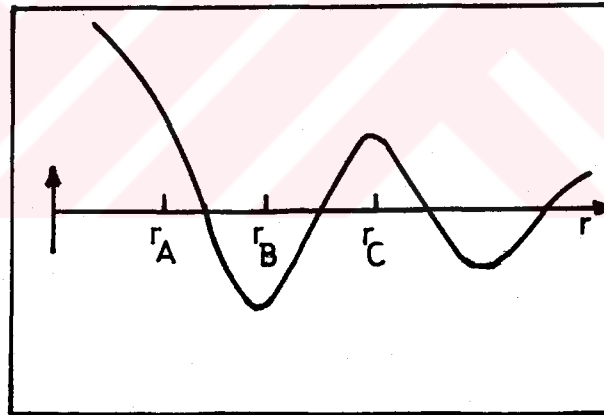


Şekil 2. Saf bir metalik matris içine katkılanmış magnetik safsızlıkların şematik diyagramı.

i . ve j . yerlerindeki (site) iki magnetik moment arasındaki etkileşme kesim (1.3) de de vurgulandığı gibi $U = \sum_{ij} J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$ ile verilir. Etkileşme sabiti (matrisi) J_{ij} ; \vec{S}_i ve \vec{S}_j spinleri arasındaki artan uzaklıkla işaretçe salınır. Şekil 4'deki keskin alınganlık piki (doruğu) T_f denilen sıcaklıkta oluşur. $k_B T_f$, tipik etkileşme sabitinin değerine sahiptir. Burada k_B Boltzmann sabitidir. Bu durumda, gerekli olan düzensizlik magnetik momentlerin rasgele dağılımından çıkar. Etkileşme çiftlenimlerinin bileşke konfigürasyonu, düşük sıcaklıklarda minimum enerjinin, momentlerin yerel olarak ilişkilendiği (korelasyon) ve makroskopik uzaklıklar üzerinden etkin olarak rasgele olduğu bir yerde ortaya çıkacak şekildedir.

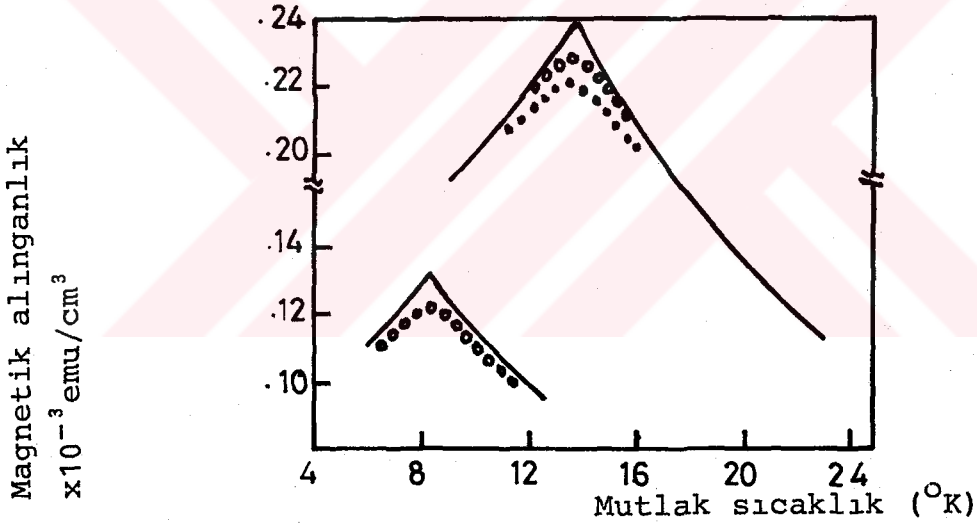
Net spin yoğunluğu $n \uparrow - n \downarrow$
Etkileşme sabiti

$J_{ij}(r)$



Şekil 3. Magnetik momentten r uzaklığının bir fonksiyonu olarak iletim elektronlarının net spin yoğunluğu (birim hacimde yukarı \uparrow ve aşağı \downarrow yönelen spin farklarının sayısı). Grafik ayrıca i ve j . magnetik momentler arasındaki, aralarındaki r uzaklığının bir fonksiyonu olarak $J_{ij}(r)$ etkileşmesini de gösterir. Orjindeki magnetik moment r_A ve r_C de yerleşmiş olan magnetik momentlerle ferromagnetik, r_B dekiyle ise antiferromagnetik olarak etkileşir.

Burada magnetik alınganlık ile ilgili deneysel gözlemlere dönülürse, ilk bakışta böylesi rasgele katkılı magnetik alaşımların herhangi bir özel çarpıcı davranış göstermemesi gerektiği umulabilir. 1950 ve 1960'lı yıllarda yapılan ölçümler, alınganlıkta geniş bir pik ve ayrıca magnetik özgül ısıda geniş bir maksimumla izlenen çizgisel (lineer) bir terim göstermiştir. Bu sonuçlar Marshall⁽¹¹⁾ ve Klein ve Brout⁽¹²⁾ adlı kişiler tarafından geliştirilen moleküler alan kuramıyla açıklandı. Bununla birlikte bu sistemlere olan ilgi, Canella ve Mydosh⁽¹³⁾ un bu alaşımların a.c. alınganlığındaki pik benzeri keskin değişimleri (cusp) deneysel olarak ortaya çıkarmasından sonra yoğunlaşmıştır. Bu durum Şekil 4'de çizimlenmiştir.



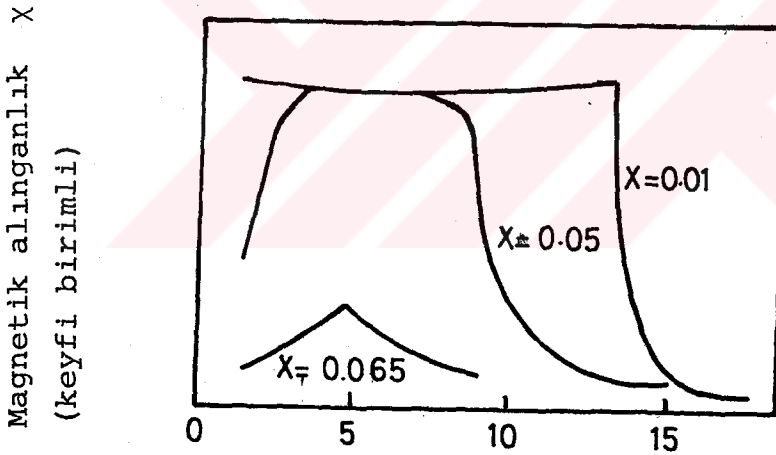
Şekil 4. Artan dış alanlı bir spin camı için tipik düşük alan magnetik alınganlığı. Kalın çizgiler sıfır alan limiti alınganlığını simgeler

Yukarıdaki satırlarda da sözü edildiği gibi keskin pik sık sık donma sıcaklığı olarak adlandırılan T_f karakteristik sıcaklığında oldukça duyarlı olarak tanımlandı. Bu sıcaklık spin camlarının çok önemli bir parametresidir. Yaklaşık % 1 lik safsızlık konsantrasyonunun üzerinde, T_f yaklaşık $c^{2/3}$ konsantrasyon bağımlılığı % 1 lik konsantrasyonun altında ise c ye çizgisel bağımlılık söz konusudur.

Burada c safsızlık konsantrasyonudur. T_f nin altında spinler artık zaman içinde özgürce dalgalanmayıp, bunun yerine rasgele yönelimlere dondurulmuşlardır. $T > T_f$ için Curie-Weiss tipi gözlenir.

(2.4) FERROMAGNETİK FAZDAN SPİN CAMI FAZINA GEÇİŞ

Çok sayıda bileşik, Curie sıcaklığı denilen T_c sıcaklığında ferromagnetik olarak biçimlenir ve sonra $T < T_c$ için bu düzenin çökmesi gözlenir. Böylesi bir sistemin düşük sıcaklık fazı, uzun erimli olmayan bir düzende olduğu için spin camı fazı olarak adlandırılır. Şekil 5'de bu durum çizimlenmiştir. Burada magnezyumun $(Pd_{0.995}Fe_{0.0035})_{1-x}Mn_x$ bileşiğindeki üç değişik konsantrasyonu için, magnetik alınganlık mutlak sıcaklığa karşı grafiğe geçirilmiştir.



Şekil 5. $(Pd_{0.995}Fe_{0.0035})_{1-x}Mn_x$ bileşiğinde x in üç değişik değeri için magnetik alınganlığın mutlak sıcaklığa karşı çizimi

$x=0.01$ için, χ $13^{\circ}K$ nin altındaki sıcaklıklarda doyunda olacak biçimde bileşik ferromagnetiktir. $x=0.05$ için bileşik $T \approx 9^{\circ}K$ de ferromagnetik olur, ama; $T < 3^{\circ}K$ için ferromagnetizma spin camına dönüşür. Bu (girintili) spin camı durumudur. Daha yüksek konsantrasyonlar için (örneğin, $x=0.065$) ferromagnetizma kaybolur ve Şekil 4'deki gibi spin camı fazına geçilir^(4,10).

3. SPİN CAMLARI MODELLERİ

Spin camlarının davranışını açıklamaya yönelik ilk çalışmaların çoğu a.c. alinganlıktaki keskin pikle ilgili olmuştur. Daha sonraki çalışmalarda, bir çeşit faz geçişini önererek T_f de keskin özellikler göstermek gibi kimi özelliklerle, T_f de dereceli donma süreci öneren bazı yapışkan özellikler arasındaki paradoksu anlamaya yönelik olacaktır. Bununla birlikte, sıfır alan limitinde pik benzeri keskin geçiş anlamaya çalışılan ilk kuram Edwards-Anderson⁽¹⁴⁾ tarafından geliştirilmiş ve spin camlarının kuramsal çalışmalarına hatırı sayılır ölçüde artış getirmiştir. Bu modelden burada kısaca söz edilecektir.

(3.1) EDWARDS-ANDERSON MODELİ

Edwards-Anderson modeli (buradan sonra kısaca EA olarak anılacaktır) spinlerin rasgele yönelimlerine karşın, potansiyel enerjilerini minimize edecek biçimde bir yönelim konfigürasyonları olduğu gerçeğine dayanır. Bu durum sistemin taban durumu olarak anılır. Ve matematiksel olarak $\langle \vec{S}_i \rangle = 0$ biçiminde formülüle edilir. Burada $\langle \dots \rangle, \vec{S}_i$ spininin termal ortalamasını simgeler. Belirli bir sıcaklığın altında bu taban durumuna ani bir geçiş vardır. Ve bu durum alinganlıktaki pik benzeri geçişe bir artma verir. Sistemdeki düzenin derecesi, belirli bir anda özel bir doğrultuyu imleyen bir spinin uzunca bir zaman sonra aynı doğrultuda yeniden gözlenmesinin olasılığını simgeleyen q gibi bir parametreye belirlenir. (Order parametresine ilişkin özet bilgi için bakınız Ek A). Bu durum matematiksel olarak

$$q = \langle \vec{S}_i^{(1)} \cdot \vec{S}_i^{(2)} \rangle \neq 0 \quad (3.1)$$

denklemlerle anlatılır. Burada $\vec{S}_i^{(1)}$ ve $\vec{S}_i^{(2)}$ i. spinin t_1 ve t_2 zamanlarındaki durumunu simgeler $T=0$ da $q=1$ ve $T \geq T_f$ için $q=0$ olacaktır. q ; EA parametresi olup, temeli şöylece açıklanabilir. Eğer \vec{S}_i spini $t=0$ ve $t=\infty$ zamanları arasında rasgele bir pozisyonda dondurulursa bu donma etkisini ölçen

doğal parametre \vec{S}_i nin otokorelasyon fonksiyonu olmalıdır. Yani

$$q_i = \lim_{t \rightarrow \infty} q_i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle S_i(0) S_i(t) \rangle \quad (3.2)$$

dir. Homojen bir parametreyle çalışmak için i yerinden bağımsız olarak, ortalama $P(J_{ij})$ dağılımı üzerinden yürütülür. Bu durum ergodik hipotez varsayılarak

$$q_{EA} = \langle\langle q_i \rangle\rangle = \langle\langle S_i^2 \rangle\rangle \quad (3.3)$$

parametresinin tanımlanmasına olanak verir. $\langle\langle \dots \rangle\rangle$; $P(J_{ij})$ dağılımı üzerinden ortalamayı anlatır.

q 'ya ilişkin kimi özellikler şunlardır.

(i) q ; alışılmış uzamsal order parametresinin yerine konulan geçici bir order (düzen) parametresidir.

(ii) $q_i(t)$ i . spinin belleğinin bir ölçüsüdür.

(iii) $q_i(t) > 0$ ve pozitif değerle denge durumuna doğru yönelir.

Lineer tepki kuramı çerçevesinde χ statik alinganlığının ölçümü q 'nun saptanmasına izin verir.

$$\chi = \frac{N}{T} (1-q) + \frac{1}{T} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \langle S_i(t_1) S_j(t_2) \rangle \quad (3.4)$$

Bu denklemdeki ikinci terim düzenli ve küçük ise

$$\chi = \frac{N}{T} (1-q) \quad (3.5)$$

elde edilir. Böylelikle q ; yüksek sıcaklık paramagnetik fazından q 'nun farklı sıfır olduğu düşük sıcaklık spin camı fazını ayırmak için iyi bir aday olur^(4,14).

(3.2) SONSUZ ERİMLİ SPİN CAMLARI MODELİ OLARAK SHERRINGTON-KIRKPATRICK MODELİ

(3.2.1) Modelin tanıtımı

EA modelinde sistem yeni bir ortalama alan kuramı kullanılarak incelenmişti. EA modeli bir periyodik örgü

üzerinde

$$\mathcal{H} = - \sum_{ij} J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \quad (3.6)$$

değiş tokuş etkileşmesiyle etkileşen klasik \vec{S}_i spinlerinin kümesiydi. Burada toplama, en yakın komşu çiftler üzerinden alınır ve J_{ij} ise

$$P(J_{ij}) = \left[(2\pi)^{1/2} J \right]^{-1} \exp(-J_{ij}^2 / 2J^2) \quad (3.7)$$

Gaussiyan olasılık yoğunluğu ile verilir.

EA, genelleştirilmiş ortalama alan çözümünde spin camı order parametresinin rolünü oynayan Gibbs benzeri kop-yalar (replika) arasındaki spin korelasyonlu yeni bir kop-yalama işlemi uyguladı. Bu çalışmalarda daha sonra, yakın komşu etkileşmesinin ötesine genişletildi. Bu durum spin camı ve ferro (ya da antiferro) magnetizma arasındaki yarışın dengeye gelmesine izin verdi.

Etkileşmenin uygun olarak sistemdeki spin sayısıyla ölçeklendirildiği sabit sonsuz erimli değiş tokuş etkileşmesi için termodinamik limitte moleküler alan kuramının "tam" duruma geldiği iyi bilinen bir gerçektir. Spin camı ve ferromagnetik davranış gösteren sistemler için buna benzer bir durum Sherrington ve Kirkpatrick (buradan sonra kısaca SK olarak alınacaktır) tarafından çalışıldı^(7,15).

SK'nın çeşitli termodinamik fonksiyonları elde etmek için uyguladıkları Hamiltonyen, (3.6) dakine benzerdir. Biri-cik fark, buradaki toplamın sistemdeki bütün (ij) yerleri üzerinden alınmasıdır. J_{ij} nin kümülatif momenti ($\langle J_{ij}^n \rangle_c$) spin sayılarının tersi bir sayıyla ölçeklenir. Böylece ola-naklı ferromagnetizma için

$$\langle J_{ij} \rangle_c = \tilde{J}_0 N^{-1} + O(N^{-r}) \quad (r > 1) \quad (3.8a)$$

ve potansiyel spin camı davranışı için

$$\langle J_{ij}^2 \rangle_c = \tilde{J}^2 N^{-1} \quad (r > 1) \quad (3.8b)$$

gereklerini taşır. Burada N , toplam spin sayısını anlatırken, \tilde{J}_0 , \tilde{J} sırasıyla, $P(J_{ij})$ dağılımı üzerinden ortalamayı, standart sapmayı anlatır. $\langle \dots \rangle_c$ ortalamasındaki c indisi koordinatlar üzerinden ortalamayı anlatmak için konulmuştur. \tilde{J}_0 ve \tilde{J} nin bağıl büyüklükleri, alçak sıcaklıklarda ferromagnetizma ya da spin camı düzenini saptar.

(3.2.2) Kopya (replika) Kuramı

Hesaplama ereklere için, bir fiziksel sistemde ilk etapta herhangi bir rasgelelik üzerinden ortalama almak uygundur. Rasgelelik sönümlü olduğunda, bu ortalama, fiziksel bir gözlenebilirliğe taşınmalıdır. Bu nedenle, SK modelinde de ilk olarak bölüşüm fonksiyonu Z yerine, serbest enerji ortalaması alınır. Serbest enerjiyi uygun bir yoldan hesaplayabilmek için kopya hilesi denilen bir yöntem uygulanır. Bu işlem

$$\ln x = \lim_{n \rightarrow 0} (x^n - 1)/n \quad (3.9)$$

özdeşliğine dayanır. x ; bölüşüm fonksiyonu Z olarak alınırsa tamsayı n değeri için Z^n ,

$$Z^n = \prod_{\alpha=1}^n Z_{\alpha} \quad (3.10)$$

biçiminde yazılabilir. Burada α gölge indis olup, $\alpha=1, \dots, n$ kümesi gerçek sistemin özdeş kopyaları gibi yorumlanabilir. Düzensiz bir sistemde, Z_{α} düzensizliğin bir fonksiyonu olup bütün α lar hiçbiri bir ötekiyle herhangi bir yolla etkileşmeyecek biçimde aynı düzensizliğe sahiptir. Tamsayı n için Z^n ortalaması α lar arasındaki etkin etkileşmeyi gösterir ve böylece gerçek (saf olmayan) sistemden daha yüksek düzende bir etkileşmeyle etkin bir saf sistem ortaya koyar. Bu etkin sistem analitik olarak, (3.9)'u kullanarak ortalama serbest enerjiyi verecek biçimde küçük n lere dek sürdürülür.

SK modelinde sonsuz erimli değiş tokuş etkileşmeleri olan ve Gaussiyen olasılığıyla dağılmış N tane Ising spini ele alınır. Sistem için Hamiltonyen

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} J_{ij} S_i S_j ; S_i = \pm 1 \quad (3.11)$$

ve J_{ij} dağılımı ise

$$P(J_{ij}) = \left[(2\pi)^{1/2} J \right]^{-1} \exp \left[-\frac{(J_{ij} - J_0)^2}{2J^2} \right] \quad (3.12)$$

olarak alınır. Çözüm bir dış alan, H_d , olmadığı varsayılarak yapılır. Serbest enerji $F; Z$ fonksiyonuna, (3.9) yardımıyla

$$-\frac{F}{kT} = \ln Z, \quad \ln Z = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{(Z^n - 1)}{n} \quad (3.13)$$

bağıntısıyla bağlanır. Burada k Boltzmann sabiti, T ise mutlak sıcaklıktır. $P(J_{ij})$ dağılımı üzerinden ortalama enerji

$$\langle F \rangle_j = F \quad (3.14)$$

olmak üzere

$$F = -kT \lim_{n \rightarrow 0} n^{-1} \left\{ \int \prod_{i \neq j} dJ_{ij} P(J_{ij}) Z^n - 1 \right\} \quad (3.15)$$

ile verilir.

$$Z^n = \text{Tr}_{\{S_i, \alpha\}} e^{-\beta \mathcal{H}(n)} \quad (3.16)$$

kullanılarak

$$Z^n = \text{Tr}_{\{S_i, \alpha\}} \exp \sum_{i \neq j} \frac{J_{ij}}{2kT} \sum_{\alpha} S_i^{\alpha} S_j^{\alpha} \quad (3.17)$$

ve

$$\langle Z^n \rangle_j = \text{Tr}_{\{S_i, \alpha\}} \int \prod_{i \neq j} dJ_{ij} P(J_{ij}) e^{\sum_{i \neq j} \frac{J_{ij}}{2kT} \sum_{\alpha} S_i^{\alpha} S_j^{\alpha}} \quad (3.18)$$

denklemleriyle verilir. $i \neq j$ için $N(N-1)/2$ tane integral

vardır. İntegrallerden bir tanesini alabilmek için

$$I_{i\bar{j}} = \int dJ_{i\bar{j}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{\alpha}}} e^{-1/2J^2(\bar{J}_{i\bar{j}} - J_0) + \frac{J_{i\bar{j}}}{2kT} \sum_{\alpha} S_i^{\alpha} S_{\bar{j}}^{\alpha}} \quad (3.19)$$

yazılır. İntegrantın üstel ifadesi

$$A = -\frac{1}{2J^2} (\bar{J}_{i\bar{j}}^2 - 2J_{i\bar{j}} J_0 + J_0^2) + \frac{J_{i\bar{j}}}{2kT} \sum_{\alpha} S_i^{\alpha} S_{\bar{j}}^{\alpha} \quad (3.20)$$

biçiminde tanımlanarak

$$A = -\frac{1}{2J^2} \left(J_{i\bar{j}} - J_0 - \frac{J^2}{2kT} \sum_{\alpha} S_i^{\alpha} S_{\bar{j}}^{\alpha} \right)^2 + \frac{1}{2J^2} \left(J_0 + \frac{J^2}{2kT} \sum_{\alpha} S_i^{\alpha} S_{\bar{j}}^{\alpha} \right)^2 - \frac{J_0^2}{2J^2} \quad (3.21)$$

biçimine dönüştürülür. A için elde edilen ifade (3.19) da yerine konularak

$$I_{i\bar{j}} = \exp \left[\frac{J_0}{2kT} \sum_{\alpha} S_i^{\alpha} S_{\bar{j}}^{\alpha} + \frac{1}{2} \left(\frac{J}{2kT} \right)^2 \left(\sum_{\alpha} S_i^{\alpha} S_{\bar{j}}^{\alpha} \right)^2 \right] \quad (3.22)$$

elde edilir. Şimdi

$$\langle Z^n \rangle = \text{Tr}_{\{S_i^{\alpha}\}} \prod_{i\bar{j}} I_{i\bar{j}} \quad (3.23)$$

olduğuna göre $\langle Z^n \rangle_j$ için (3.22) kullanılarak

$$\langle Z^n \rangle = \text{Tr}_{\{S_i^{\alpha}\}} \left\{ e^{i\sum_{i\bar{j}} j} \left[\frac{J_0}{2kT} \sum_{\alpha} S_i^{\alpha} S_{\bar{j}}^{\alpha} + \frac{1}{2} \left(\frac{J}{2kT} \right)^2 \left(\sum_{\alpha} S_i^{\alpha} S_{\bar{j}}^{\alpha} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.24)$$

ifadesine ulaşılır. Bu son denklemdeki $i \sum_{j} \sum_{\alpha} S_i^{\alpha} S_j^{\alpha}$ terimi için açık bir ifade elde edilebilmesi için

$$\left(\sum_i S_i^{\alpha} \right)^2 = \sum_i (S_i^{\alpha})^2 + \sum_{i \neq j} S_i^{\alpha} S_j^{\alpha} \quad (3.25a)$$

yazılır. α üzerinden toplam alınarak

$$\sum_{i \neq j}^N \sum_{\alpha} S_i^{\alpha} S_j^{\alpha} = \sum_{\alpha} \left\{ - \sum_i^N (S_i^{\alpha})^2 + \left(\sum_i^N S_i^{\alpha} \right)^2 \right\} \quad (3.25b)$$

bulunur. $S_i = \pm 1$ olduğu göz önüne alınarak

$$\sum_{i \neq j} \sum_{\alpha} S_i^{\alpha} S_j^{\alpha} = \sum_{\alpha} \left(\sum_i S_i^{\alpha} \right)^2 - Nn \quad (3.25c)$$

elde edilir.

Benzeri işlem $\sum_{i \neq j} (\sum_{\alpha} S_i^{\alpha} S_j^{\alpha})^2$ terimi için

$$\left(\sum_i S_i^{\alpha} S_i^{\beta}\right)^2 = \sum_i (S_i^{\alpha} S_i^{\beta})^2 + \sum_{i \neq j} (S_i^{\alpha} S_j^{\alpha})(S_i^{\beta} S_j^{\beta}) \quad (3.26a)$$

yazılarak yapılır. $i \neq j$ toplamı uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} \left(\sum_{\alpha} S_i^{\alpha} S_j^{\alpha}\right)^2 &= \sum_{i \neq j} \sum_{\alpha} (S_i^{\alpha} S_j^{\alpha})^2 + \sum_{i \neq j} \sum_{\alpha \neq \beta} (S_i^{\alpha} S_i^{\beta})(S_j^{\alpha} S_j^{\beta}) \\ &= (N^2 - N)n + \sum_{\alpha \neq \beta} \left\{ \left(\sum_i S_i^{\alpha} S_i^{\beta}\right)^2 - \sum_i (S_i^{\alpha} S_i^{\beta})^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.26b)$$

bulunur. Buradan (3.26b) için, $i \neq j$ için $(N^2 - N)$ ve $\alpha \neq \beta$ için $n^2 - n$ durum olduğu anımsanarak

$$\begin{aligned} (N^2 - N)n + \sum_{\alpha \neq \beta} \left(\sum_i S_i^{\alpha} S_i^{\beta}\right)^2 - (n^2 - n)N \\ = nN^2 - Nn^2 + \sum_{\alpha \neq \beta} \left(\sum_i S_i^{\alpha} S_i^{\beta}\right)^2 \end{aligned} \quad (3.26c)$$

elde edilir. (3.25c) ve (3.26c) sonuçları (3.24) deki yerlerine taşınırlarsa

$$\begin{aligned} \langle Z^n \rangle &= \exp \left\{ -Nn \frac{J_0}{2kT} + \frac{1}{2} \left(\frac{J}{2kT}\right)^2 (nN^2 - Nn^2) \right\} \\ \otimes \text{Tr}_{\{S_i, \alpha\}} \exp \left\{ \frac{J_0}{2kT} \sum_{\alpha} \left(\sum_i S_i^{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{J}{2kT}\right)^2 \sum_{\alpha \neq \beta} \left(\sum_i S_i^{\alpha} S_i^{\beta}\right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.27)$$

gibi daha kullanışlı bir ifadeye ulaşılır. (3.27) deki birinci üstelin tümü A olarak tanımlansın.

$$e^{\lambda a^2} = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2 + \sqrt{2\lambda} ax} \quad (3.28)$$

özdeşliği kullanılarak

$$e^{\frac{J_0}{2kT} \sum_{\alpha} \left(\sum_i S_i^{\alpha}\right)^2} = \int \prod_{\alpha} dx^{\alpha} \left(\frac{N}{2\pi}\right)^{1/2} e^{-N \sum_{\alpha} \frac{x^{\alpha 2}}{2} + \left(\frac{J_0}{kT}\right)^{1/2} \sum_{\alpha} x^{\alpha} \sum_i S_i^{\alpha}} \quad (3.29)$$

ve

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2} \left(\frac{J}{2kT}\right)^2 \sum_{\alpha \neq \beta} \left(\sum_i S_i^{\alpha} S_i^{\beta}\right)^2} \\ = \int \prod_{\alpha \neq \beta} dy^{\alpha \beta} \left(\frac{N}{2\pi}\right)^{1/2} e^{-N \sum_{\alpha \neq \beta} \frac{y^{\alpha \beta 2}}{2} + \left(\frac{J}{2kT}\right) \sum_{\alpha \neq \beta} y^{\alpha \beta} \sum_i S_i^{\alpha} S_i^{\beta}} \end{aligned} \quad (3.30)$$

sonuçları elde edilir. Burada $\alpha\beta$; $\alpha \neq \beta$ kombinezonunu anlatır ve $\tilde{J}_0 = J_0 N$ ve $\tilde{J} = J\sqrt{N}$ olarak alınmıştır. (3.29) ve (3.30) sonuçları birlikte kullanılarak

$$\langle Z^n \rangle = e^A \text{Tr}_{\{S_i, \alpha\}} \left\{ \int \prod_{\alpha} dx^{\alpha} \left(\frac{N}{2\pi} \right)^{1/2} \prod_{\alpha\beta} dy^{\alpha\beta} \left(\frac{N}{2\pi} \right)^{1/2} \right. \\ \left. \exp \left[-N \sum_{\alpha} \frac{x^{\alpha 2}}{2} - N \sum_{\alpha\beta} \frac{y^{\alpha\beta 2}}{2} + \left(\frac{\tilde{J}_0}{kT} \right)^{1/2} \sum_{\alpha} x^{\alpha} \sum_i S_i^{\alpha} + \left(\frac{\tilde{J}}{2kT} \right) \sum_{\alpha\beta} y^{\alpha\beta} \sum_i S_i^{\alpha} S_i^{\beta} \right] \right\}$$

ya da

$$\langle Z^n \rangle_{\tilde{J}} = e^A \int \prod_{\alpha} dx^{\alpha} \left(\frac{N}{2\pi} \right)^{1/2} \prod_{\alpha\beta} \left(\frac{N}{2\pi} \right)^{1/2}$$

$$\exp \left[-N \sum_{\alpha} \frac{x^{\alpha 2}}{2} + N \sum_{\alpha\beta} \frac{y^{\alpha\beta 2}}{2} + \ln \text{Tr}_{\{S_i, \alpha\}} \exp \left\{ \left(\frac{\tilde{J}_0}{kT} \right)^{1/2} \sum_{\alpha} x^{\alpha} \sum_i S_i^{\alpha} + \left(\frac{\tilde{J}}{2kT} \right) \sum_{\alpha\beta} y^{\alpha\beta} \sum_i S_i^{\alpha} S_i^{\beta} \right\} \right] \quad (3.31)$$

elde edilir. (3.31) denkleminin Tr işlemcisinin olduğu kısmı biraz daha düzenleyerek

$$\langle Z^n \rangle_{\tilde{J}} = e^A \int \left[\prod_{\alpha} dx^{\alpha} \left(\frac{N}{2\pi} \right)^{1/2} \right] \left[\prod_{\alpha\beta} dy^{\alpha\beta} \left(\frac{N}{2\pi} \right)^{1/2} \right]$$

$$\otimes \exp \left[-N \sum_{\alpha} \frac{x^{\alpha 2}}{2} - N \sum_{\alpha\beta} \frac{y^{\alpha\beta 2}}{2} + N \ln \text{Tr} \exp \left\{ \left(\frac{\tilde{J}_0}{kT} \right)^{1/2} \sum_{\alpha} x^{\alpha} S^{\alpha} + \left(\frac{\tilde{J}}{2kT} \right) \sum_{\alpha\beta} y^{\alpha\beta} S^{\alpha} S^{\beta} \right\} \right] \quad (3.32)$$

ifadesini elde etmek olanaklıdır. Burada trace herbir spinin yerindeki n tane kopya üzerinden alınmıştır. $n \rightarrow 0$ limiti ve $N \rightarrow \infty$ termodinamik limitinin yer değiştirebileceği varsayılmıştır. n'in tamsayıları değerleri ve $n \geq 2$ için (3.32) deki integraller "steepest descent" yöntemiyle alınabilir. Yani (3.32) denklemindeki ikinci üstelin içi

$$\left(\frac{\tilde{J}_0}{kT} \right)^{1/2} \sum_{\alpha} x^{\alpha} S^{\alpha} + \left(\frac{\tilde{J}}{2kT} \right) \sum_{\alpha\beta} y^{\alpha\beta} S^{\alpha} S^{\beta} = \theta \quad (3.33a)$$

olarak tanımlanarak ve (3.32) denklemi x^{α} ve $y^{\alpha\beta}$ ya göre ayrı ayrı türetilip sıfıra eşit kılınır. Böylece

$$0 = -N x^{\alpha} + N \left(\frac{\tilde{J}_0}{kT} \right)^{1/2} \frac{\text{Tr} \{ S^{\alpha} \exp(\theta) \}}{\text{Tr} \{ \exp(\theta) \}} \quad (3.33b)$$

ve

$$O = -Ny^{\alpha\beta} + N \left(\frac{\tilde{J}}{2kT} \right) \text{Tr} \left\{ S^{\alpha} S^{\beta} \exp(\theta) \right\} / \text{Tr} \left\{ \exp(\theta) \right\} \quad (3.33c)$$

elde edilir.

Kopyalar birbirinden ayırt edilemediğine göre üstelin yalnızca $y^{\alpha\beta}$ ların ve x^{α} ların eşit olduğu durumda ekstremum olduğu düşünülür. Bu durum $x^{\alpha} = x; y^{\alpha\beta} = y$ yazmaya ve

$$\sum_{\alpha\beta} y^{\alpha\beta} S^{\alpha} S^{\beta} \rightarrow y \left[\left(\sum_{\alpha} S^{\alpha} \right)^2 - \sum_{\alpha} S^{\alpha^2} \right]$$

ya da

$$\sum_{\alpha\beta} y^{\alpha\beta} S^{\alpha} S^{\beta} \rightarrow y \left[\left(\sum_{\alpha} S^{\alpha} \right)^2 - n \right] \quad (3.34)$$

yerdeğiştirmesine izin verir.

$$x \rightarrow m \left(\frac{\tilde{J}_0}{kT} \right)^{1/2} ; y \rightarrow q \left(\frac{\tilde{J}}{kT} \right) \quad (3.35)$$

dönüşümleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \langle Z^n \rangle_{\tilde{J}} &= e^A \exp \left\{ -\frac{Nn}{2} \left(\frac{\tilde{J}_0}{kT} \right)^2 m^2 - \frac{Nn(n-1)}{2} \left(\frac{\tilde{J}}{2kT} \right)^2 q^2 \right. \\ &\quad \left. - nN \left(\frac{\tilde{J}}{2kT} \right)^2 q \right\} \left\{ \text{Tr}_{\{S_{\alpha}\}} \exp \left[\left(\frac{\tilde{J}_0}{kT} \right) m \sum_{\alpha} S^{\alpha} + \left(\frac{\tilde{J}}{2kT} \right)^2 q \left(\sum_{\alpha} S^{\alpha} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.36) \end{aligned}$$

denkleme ulaşılır. (3.27) deki denkliğin A olarak tanımlanan kısmı (3.36) da yerine konulursa

$$\begin{aligned} \langle Z^n \rangle_{\tilde{J}} &= \exp \left\{ -n \frac{\tilde{J}_0}{2kT} - \frac{n^2}{2} \left(\frac{\tilde{J}}{2kT} \right)^2 q^2 - \frac{Nn}{2} \left(\frac{\tilde{J}_0}{kT} \right)^2 m^2 + \frac{Nn}{2} \left(\frac{\tilde{J}}{2kT} \right)^2 (1-q)^2 \right\} \\ &\quad \otimes \left\{ \text{Tr}_{\{S_{\alpha}\}} \exp \left[\left(\frac{\tilde{J}_0}{kT} \right) m \sum_{\alpha} S^{\alpha} + \left(\frac{\tilde{J}}{2kT} \right)^2 q \left(\sum_{\alpha} S^{\alpha} \right)^2 \right] \right\}^N \quad (3.37) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son denklemde trace'li kısım I^N olarak tanımlansın (bunun hesabı Ek B'de verilmiştir).

$$\langle Z^n \rangle_J = \exp \left\{ +Nn \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{J}}{2kT} \right)^2 (1-q)^2 - \frac{\tilde{J}_0}{2kT} m^2 - \frac{\tilde{J}_0}{2kT} - \frac{n}{2N} \left(\frac{\tilde{J}}{2kT} \right)^2 q^2 \right] \right\} \cdot I^N \quad (3.38)$$

yazılır. I^N için Ek B'de bulunan sonuç ve $n \rightarrow 0$ limiti kullanılarak (3.38) denklemi

$$\langle Z^n \rangle_J = \left\{ 1 + Nn \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{J}}{2kT} \right)^2 (1-q)^2 - \frac{\tilde{J}_0}{2kT} m^2 - \frac{\tilde{J}_0}{2kT} - \frac{n}{2N} \left(\frac{\tilde{J}}{2kT} \right)^2 q^2 \right] + \dots \right\} \left\{ 1 + Nn \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \ln 2 \operatorname{Ch} K \right\} \quad (3.39)$$

biçimine dönüşür. Ya da daha yalınca (3.39) için

$$\langle Z^n \rangle_J = \left\{ 1 + Nn \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{J}}{2kT} \right)^2 (1-q)^2 - \frac{\tilde{J}_0}{2kT} m^2 + \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \ln \operatorname{Ch} K \right] + \dots \right\} \quad (3.40)$$

yazılır. Buradan sonra

$$\langle \ln Z \rangle_J = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\langle Z^n \rangle_J - 1}{n} = - \frac{F}{kT} \quad (3.41)$$

olduğu anımsanarak ve K tanımı açıkça alınarak serbest enerji F için

$$F = NkT \left\{ - \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{J}}{2kT} \right)^2 (1-q)^2 + \frac{\tilde{J}_0}{2kT} m^2 - \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \ln \left[2 \operatorname{Ch} \left(\frac{\tilde{J}_0 m}{kT} + \frac{\tilde{J}}{\sqrt{2kT}} \sqrt{q} z \right) \right] \right\} \quad (3.42)$$

sonucu elde edilir. Buradan sonra F fonksiyonu, q ve m'ye göre türetilip herbiri için sıfıra eşit kılınır.

$$\frac{\partial F}{\partial q} = 0 \Rightarrow 0 = + \left(\frac{\tilde{J}}{2kT} \right)^2 (1-q) - \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \frac{1}{2} q^{-1/2} z + \operatorname{th} \left(\frac{\tilde{J}_0 m}{kT} + \frac{\tilde{J} \sqrt{q} z}{\sqrt{2kT}} \right) \quad (3.43)$$

ve bu denklemden integral, K tanımı kullanılarak

$$I = -\frac{z^2/2}{\sqrt{2\pi}} \left. \ln hK \right|_{-\infty}^{+\infty} + \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \frac{\tilde{J}}{\sqrt{2kT}} \sqrt{q} \operatorname{Sec}^2 hK \quad (3.44)$$

olarak bulunur. (3.44)'ün sağ yanındaki ilk terimin sıfır olduğu göz önünde tutularak (3.43) den

$$1-q = \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \frac{1}{c h^2 K} \quad (3.45)$$

elde edilir. Buradan K tanımını açıkça alarak

$$q = \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \ln^2 \left(\frac{\tilde{J}_0}{kT} m + \frac{\tilde{J}}{\sqrt{2kT}} \sqrt{q} z \right) \quad (3.46)$$

bulunur. Benzer biçimde

$$\frac{\partial F}{\partial m} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\tilde{J}_0 m}{kT} - \frac{\tilde{J}_0}{kT} \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \ln hK$$

ya da yine K açıkça alınarak

$$m = \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \ln \left(\frac{\tilde{J}_0}{kT} m + \frac{\tilde{J} \sqrt{q} z}{\sqrt{2kT}} \right) \quad (3.47)$$

sonucu üretilir.

m ve q'nun fiziksel önemini vurgulamak için, i.yer-deki spinin termal ortalaması ve bu ortalamanın karesi göz önüne alınır.

$$\langle S_i \rangle = \left(\frac{\partial}{\partial h} \right) \ln \operatorname{Tr} \exp \left(\sum_{i \neq j} J_{ij} S_i^\alpha S_j^\alpha / 2kT + h S_i^\alpha \right)_{h=0} \quad (3.48a)$$

$$\langle S_i^2 \rangle = \left(\frac{\partial}{\partial h} \right) \ln \operatorname{Tr} \exp \left[\sum_{i \neq j} J_{ij} (S_i^\alpha S_j^\alpha + S_i^\beta S_j^\beta) / 2kT + h S_i^\alpha S_i^\beta \right]_{h=0} \quad (3.48b)$$

yazılır. Burada $\alpha \neq \beta$ lar gölge indislerdir. $\langle \dots \rangle$ ile simgelenen J_{ij} üzerinden ortalama alınarak, n tane toplu bölüşüm fonksiyonuyla karakterize edilen, hesaplanan sistem için $\langle \langle S_i^\alpha \rangle \rangle_j$ ve $\langle \langle S_i^2 \rangle \rangle_j$, $n \rightarrow 0$ limitinde sırasıyla $\langle S_i \rangle^\alpha$ ve $\langle S_i^\alpha \cdot S_i^\beta \rangle_{\alpha \neq \beta}$ ile verilir. Böylece i den bağımsız olarak

$$m \equiv \langle \langle S_i \rangle \rangle_j \quad (3.49a)$$

$$q \equiv \langle \langle S_i^2 \rangle \rangle_j \quad (3.49b)$$

sonuçları elde edilir. Burada $q \neq 0$ bir magnetik düzen olduğunu belirtir. $m \neq 0$ q 'ya ek olarak ferromagnetik bir düzeni anlatırken; $m=0$, $q \neq 0$ durumu spin camı düzenine işaret eder.

(3.2.3) m ve q'nun $T \rightarrow 0$ limitindeki davranışları

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \tanh(ax+b) \quad (3.50a)$$

ve

$$1-q = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} / \cosh^2(ax+b) \quad (3.50b)$$

yazılabilir. Burada

$$a = \tilde{J} \sqrt{q} / \sqrt{2} kT \quad ; \quad b = \tilde{J}_0 n_1 / kT \quad (3.51)$$

olarak alınmıştır. Ve sonuç olarak $T \rightarrow 0$ limitindeki davranışlar için ayrıntılı hesaplama Ek C'de verilmiştir.

(3.46) ve (3.47) denklemlerinin çözümü (dış magnetik alan $H_d=0$ için) Şekil 6 da çizimlenen diyagramdaki faz geçişlerini gösterir. Bütün faz geçişleri ikinci derecedendir. Paramagnetik fazdan düzenli bir magnetik faza geçiş \tilde{J}_0 , ya da \tilde{J} nin değerlerinden büyük olanının altındaki sıcaklıklarda oluşur. $\tilde{J}_0 > \tilde{J}$ için bu faz ferromagnetik tersi durumda ise spin camıdır. $kT < \tilde{J}$ için $m=0$ olarak kalır.

$(\tilde{J}_0 > \tilde{J}) \gg 1$ için değiş tokuş dalgalanmalarının etkileri zayıftır. Ve denk. (3.46), (3.47) den $q \sim m^2$ olduğu kolayca gösterilebilir. Bu orantılılık (3.49b) de verilen, bütün noktalarda (site) dondurulmuş magnetik momentlerin genliğinin

karesi olarak tanımlanan q 'nun fiziksel yorumu ile uyum içindedir. $q(T=0)=1$ olmasına karşın, sıfır sıcaklık magnetizasyonu zayıf sapmalarla

$$m(0) \approx 1 - (2/\pi)^{1/2} (\tilde{J}/\tilde{J}_0) \exp(-\tilde{J}_0^2/2\tilde{J}^2) \quad (3.52a)$$

olacak biçimde azalır ve spin camı faz sınırına

$$m \approx (18\pi)^{1/4} (\tilde{J}_0/\tilde{J})^2 [(2/\pi)^{1/2} - \tilde{J}/\tilde{J}_0]^{1/2} \quad (3.52b)$$

gibi bir biçimde sürekli azalarak yaklaşır, sınırın ötesinde sıfır değerini alır.

Dondurulmuş magnetik moment, $q^{1/2}(T)$, (Şekil 7' de gösterildiği gibi) (3.50a) ve (3.50b) denklemlerinden türetilebilir. T_f nin hemen altında $(T_f - T)^{1/2}$ ile orantılıdır. Ve yine (C.15) den kolayca görülebileceği gibi $T \rightarrow 0$ için $q \rightarrow 1$ dir. Ayrıca q ; aynı sıcaklıkların tümünde ($\tilde{J} \neq 0$ için) m den büyüktür. q ve $q^{1/2}$ nin çizgisel düşük sıcaklık bağımlılığı

$$1 - q(T) \approx (2/\pi)^{1/2} (kT/\tilde{J}) \exp(-\tilde{J}_0^2 m^2/2\tilde{J}^2) \quad (3.53)$$

biçimindedir. Bu sonuç; bir ferromagnetik taban durumundan başlayan uyarmalar sonlu bir enerji gerektirdiği için, bütün sıcaklık türevlerinin $T=0$ da sıfır olduğu düzgün bir Ising magnetindeki $m(T)$ nin davranışıyla zıtlık içindedir.

Standart termodinamik fonksiyonlar aşağıdaki gibi elde edilebilirler.

Denk. (3.42) den spin başına ortalama serbest enerji

$$\frac{\beta F}{N} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{J}}{2kT} \right)^2 (1-q)^2 + \frac{\tilde{J}_0 m^2}{2kT} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2} \ln \left[2 \operatorname{ch} \left(\frac{\tilde{J} \sqrt{q} x + \tilde{J}_0 m}{\sqrt{2kT}} \right) \right] \quad (3.54)$$

biçiminde bulunur.

$$-\beta F = \ln Z \quad \text{ve} \quad U = -\frac{\partial}{\partial \beta} (\ln Z) \quad (3.55a)$$

olduğu anımsanarak

$$U = \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta F) = -kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{kT} \right) \quad (3.55b)$$

ya da $f = \beta F/N$ den

$$U/N = -kT^2 \frac{\partial}{\partial T} (f) \quad (3.55c)$$

bulunur. Yani

$$\tilde{f} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{J}}{2kT} \right)^2 (1-q)^2 + \frac{\tilde{J}_0 m^2}{kT} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2} \ln \left[2 \cosh \left(\frac{\tilde{J} \sqrt{q} x}{\sqrt{2kT}} + \frac{\tilde{J}_0 m}{kT} \right) \right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial T} = \left(\frac{\tilde{J}}{2k} \right)^2 \frac{(1-q)^2}{T^3} + \left(\frac{\tilde{J}}{2k} \right)^2 \frac{(1-q)}{T^2} \frac{\partial q}{\partial T}$$

$$- \frac{\tilde{J}_0}{2kT^2} m^2 + \frac{\tilde{J}_0}{kT} m \frac{\partial m}{\partial T}$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \ln \left(\frac{\tilde{J}}{\sqrt{2kT}} \sqrt{q} x + \frac{\tilde{J}_0 m}{kT} \right) \left(-\frac{\tilde{J}_0}{kT^2} m + \frac{\tilde{J}_0}{kT} \frac{\partial m}{\partial T} \right)$$

$$+ \left(-\frac{\tilde{J}}{\sqrt{2kT}} \sqrt{q} + \frac{\tilde{J}}{2\sqrt{2kT}} q^{1/2} \frac{\partial q}{\partial T} \right) x$$

$$+ m^2 \frac{\tilde{J}_0}{kT^2} - \frac{\tilde{J}_0}{kT} m \frac{\partial m}{\partial T}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial T} = \left(\frac{\tilde{J}}{2k} \right)^2 \frac{(1-q)^2}{T^3} + \frac{\tilde{J}_0}{2kT^2} m^2 \quad (3.56)$$

ya da (3.55c) ile (3.56) birlikte düşünülerek spin başına iç enerji için

$$U/N = - \left\{ \frac{\tilde{J}_0}{2} m^2 + \frac{\tilde{J}^2}{4k} \frac{(1-q^2)}{T} \right\} \quad (3.57)$$

elde edilir. Isı kapasitesini bulabilmek için

$$C = \delta U / \delta T \quad (3.58)$$

bağıntısı anımsanır. Ve ardından (3.57) denkliği T'ye göre türetilir. Buradan

$$\frac{C}{N} = -\tilde{J}_0 m \frac{\delta m}{\delta T} + \frac{\tilde{J}^2}{4k} \frac{(1-q^2)}{T^2} + \frac{\tilde{J}^2}{2k} q \frac{\delta q}{\delta T} \quad (3.59)$$

elde edilir. Bu son denklem spin camı fazında ($m=0$) ısı kapasitesinin

$$C \approx Nk(kT/\tilde{J})(2/\pi)^{1/2} \left[\left(\pi^2/12 - 1/2\pi \right) \right] \quad (3.60)$$

biçiminde bulunabileceğini söyler. Spin camının oluşma sıcaklığında (T_f), C keskin bir pik'e sahiptir. Bütün \tilde{J}_0 lar için, $T > T_f$ bölgesinde

$$\frac{C}{N} = \tilde{J}^2 / 2kT^2 \quad (3.61)$$

formunu alır. Bu durum; geçiş sıcaklığının üstündeki sıcaklıklarda C/N oranının sıfır olduğu katkısız (saf) sistemlerle karşıtlık içindedir.

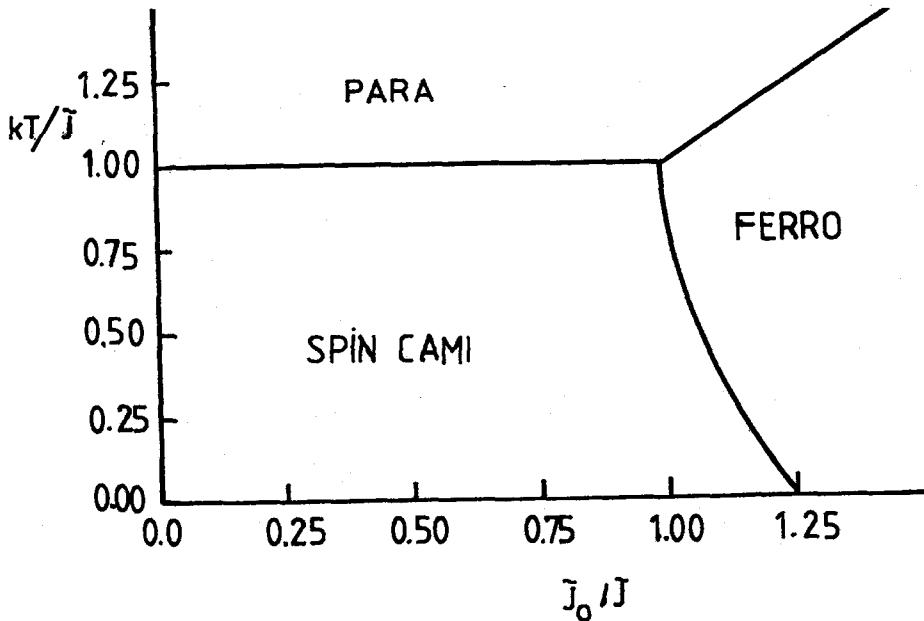
Diferansiyel alınganlık; denk.(3.6) daki Hamiltonyen'e $\Sigma_i H_d S_i$ dış alan terimini ekleyerek ve (3.42), (3.46) ve (3.47) denklemlerine ulaşılırken atılan adımları yineleyerek elde edilebilir. Bu durum; (3.46) ve (3.47) deki sech ve tanh fonksiyonlarının argümanlarına " H_d/kT " terimini eklemekten başka bir şey değildir. Denk.(3.47) H_d 'ya göre türetilerek ve $h \rightarrow 0$ limiti alınarak alınganlık için

$$\begin{aligned} \chi(T) &= [1 - q(\tau)] / \{ kT - \tilde{J}_0 [1 - q(\tau)] \} \\ &= \chi^{(0)} / (1 - \tilde{J}_0 \chi^{(0)}) \end{aligned} \quad (3.62)$$

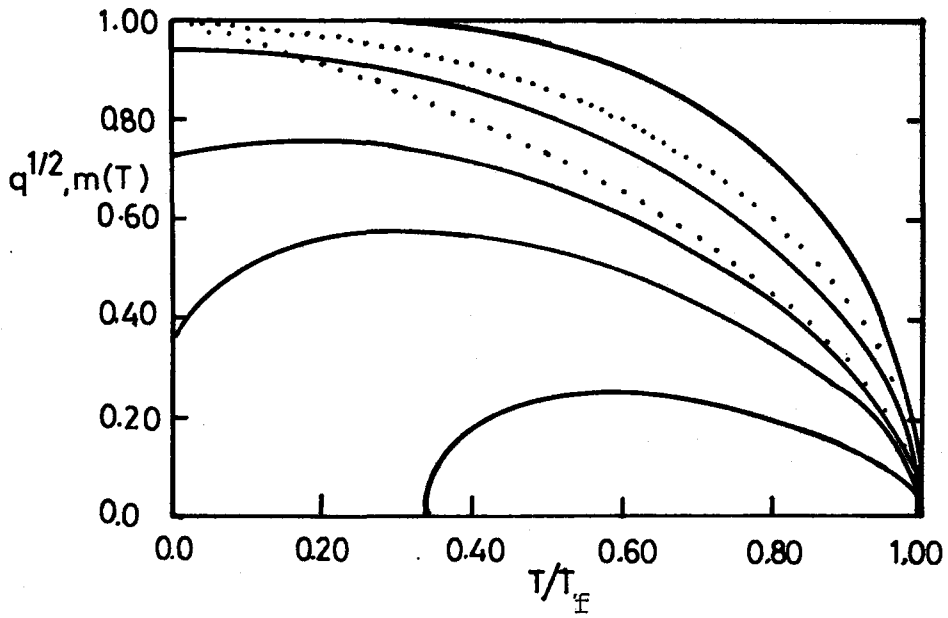
elde edilir. Burada $\chi^{(0)}$; $\tilde{J}_0=0$ için elde edilen sonuçtur. $q=0$ olduğu yerde, yani geçiş sıcaklığının üzerinde, bu durum Curie-Weiss yasasıdır. Spin camı fazında, dalgalanmalar keskin alınganlık pik'ine bir artma vererek $\chi^{(0)}$ ve χ i azaltırlar. Pozitif \tilde{J}_0 , bütün sıcaklıklarda χ i artırır. χ in sıcaklık bağımlılığı; dış alanın varlığında ve yokluğunda iki örnek için Şekil 8' de çizilmiştir.

Entropi, S , spin camı geçiş sıcaklığının üstündeki sıcaklıklarda $Nk \left[\ln 2 - \tilde{J}^2 / (2kT)^2 \right]$ biçimindedir. Bununla birlikte $T=0$ da $-Nk/2\pi$ gibi negatif bir limite gider. Bu durumun $N \rightarrow \infty$ ve $n \rightarrow 0$ limitlerinin değişik tokuş edilmesinden kaynaklandığı düşünülür.

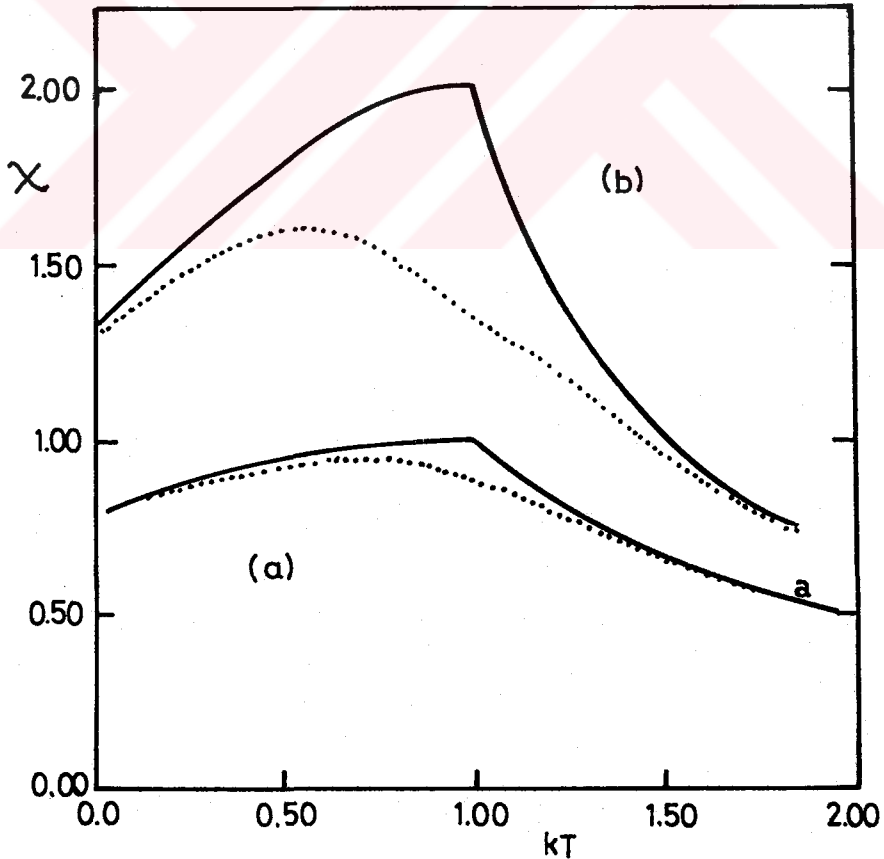
En yakın komşu etkileşmeli ve (3.6),(3.7) denklemleriyle betimlenen Ising sistemi EA tipi bir ortalama alan yaklaşıklığıyla ele alındığında (3.46) ve (3.47) denklemleri; \tilde{J}_0 ve \tilde{J} yerine zJ_0 ve $z^{1/2}J$ alınarak elde edilebilir. Ortalama olarak antiferromagnetik olan ya da ikinci komşulara ilişkin terimler içeren etkileşimler için, m dekine benzer denklemler uygun bir altörçü magnetizasyonuyla yer değiştirebilirler.



Şekil 6. Spin camı ferromagnetinin faz diyagramı



Şekil 7. (Yukarıdan aşağıya) Kalın çizgiler $m(T)$ yi $\tilde{J}/J=$, 2.0, 1.5, 1.3 ve 1.1 için singeler. Noktalı çizgiler $\tilde{J}/J=2.0$ (üstteki çizgi) ve 0.0 (alttaki çizgi) için $q^{1/2}(T)$ yi singelerler.



Şekil 8. (Kalın çizgiler) Dış alanın yokluğunda diferansiyel alınganlık. (Noktalı çizgiler) $H_0=0.1\tilde{J}$ için diferansiyel alınganlık. Burada a eğrileri için $\tilde{J}/J=0$ ve b eğrileri için $\tilde{J}/J=0.5$ dir.

4. NÖRAL AĞ MODELLERİ

(4.1) LITTLE MODELİ (6)

(4.1.1) Modelin Tanıtımı

Model tamı tamına lineer versiyonda ele alınır ve bellek kapasitesinin nöron sayısından çok sinaps sayılarıyla ilişkili olduğu açıkça gösterilir. Bu gösterimde Hebb⁽¹⁶⁾ tipinde, modifiye edilmiş sinapsları olan N adet nöron ağının modeli kurulur.

Ising spin sistemine benzeyen beyin modeli geliştirilir. Bu model bir nöral ağdaki uzun ve kısa dönem belleğinin doğasını açıklar. Bellek; pre ve post sinaptik nöral ateşlemenin korelasyonuna bağımlı olan sinaptik modifikasyonun sonucudur. Böylesi bir ağın, gürültünün varlığına karşın uygun bir yolda davranabileceği gösterilir. Bu gürültü, sinapslarda serbest bırakılan nörokimyasal aktarıcı (transmitter) moleküllerindeki dalgalanma sayılarının ve post sinaptik potansiyellerdeki bileşke dalgalanmalarının bir sonucudur.

Böylesi bir modelde, belleğin kapasitesini ve farklı bellek izlerinin bağımsızlığını ya da ortogonalitesini tanımlayan faktörler denenir.

Ve yine böylesine geniş kapasiteyi yararlı kılmak için, ağ, zamanla gelişen şekillenimleri üretmek için bilginin büyük bir kısmını kapasitesinde depo eder.

(4.1.2) Analitik Model

N tane nöronun oldukça güçlü"içten bağlantılı" ağı göz önüne alınır. Sistem, verilen bir zamanda aktif olan ya da olmayan nöronların şekillenimi terimleri cinsinden tanımlanır. Birkaç milisaniye mertebesindeki kesikli τ zaman adımlarındaki böylesi şekillenimlerin gelişimine bakılır. Ayrıca eşik post sinaptik potansiyelin altındaki bozunma zamanı göz önüne alınır.

Sabit herbir t zamanında, N tane nöronun 2^N tane

aktiflik şekillenimi vardır. Bu şekillenimler α larla anlatılırlar.

$$\alpha = (S_{1\alpha}, S_{2\alpha}, \dots, S_{N\alpha}) \quad (4.1)$$

Burada $S_{i\alpha} = \pm 1$ 'dir. Bu i.nöronun α şekillenimi için aktif olup olmamasına bağlıdır. Verilen bir aktivasyon şekillenimi α nın $l\tau$ zamanında $\beta = (S_{1\beta}, S_{2\beta}, \dots, S_{N\beta})$ aktivasyon şekillenimine $t=(l+1)\tau$ zamanında gitmesini veren $P_{\beta\alpha}$ olasılığının hesaplanması gerekir. i. nöronun geçiren (eksitatori) ya da tutan (inhibitori) olmak üzere j.nöronun aksununun sonunda bir sinaptik eklemi olduğu varsayılırsa, j.nöron aktif olduğunda i.nöronun tepesinde indüklenen V_{ij} kutuplanmasında ortalama bir değişim vardır. Bu post sinaptik potansiyellerin toplamından gelen bir zaman adımındaki net depolarizasyon V_i^T eşiğinin üstüne çıkarsa, i.nöron aktif olur. Bu duruma V_{ij} nin istatistiksel dalgalanmasının iki kaynağı da dahildir.

(i) Aksiyon potansiyeli sinapsa ulaştığında serbest bırakılan kimyasal aktarıcının (transmitter) kuanta sayısı Poisson süreciyle verilir.

(ii) Kuanta aktarıcı moleküllerin Gaussiyen dağılımına sahiptir. Olasılık,

$$P_{\beta\alpha} = e^{\epsilon M_{\beta\alpha}} / \sum_{\gamma} e^{\epsilon M_{\gamma\alpha}} \quad (4.2)$$

ile verilir. Burada

$$M_{\beta\alpha} = \sum_{i=1}^N S_{i\beta} \left\{ \sum_{j=1}^N \left[\frac{(N_{ij} S_{j\alpha} + 1)}{2} \right] - V_i^T \right\} \quad (4.3)$$

dır. ϵ ise (i) ve (ii) nin ayrıntılarıyla tanımlanan ilinti faktörüdür.

Gerçek bir ağda, şekillenimler ayrı ayrı zaman adımlarıyla değil, daha çok sürekli bir tarzda gelişirler. Bununla birlikte, bu modelde ağdaki şekillenimlerin kararlılığına bağlı olan anahtar özellikler kesikli ve sürekli sistemler için ortak olarak tartışılır. Kesikli modelin

analitik olarak ele alınması çok daha kolaydır.

Daha önce de sözü edildiği gibi, model Hebb tipinde modifiye edilebilir sinapsları olan ağıın sonuçlarını göz önüne almakla ilgilidir. Birçok araştırmacı böylesi varsayımın "öğrenme" ağıına kılavuzluk edeceğini göstermiştir. Modelde ağıın depolama kapasitesinin incelenmesi Hebb'in (16) nörofizyolojik postülatı üzerine kurulur.

"A hücresinin aksonu B hücrelerini uyarmak için yeterli kadar yakınsa, sürekli olarak aktiflikte yer alıyorsa A'nın verimi B'yi aktifleyen hücrelerden biri olarak artırılacak biçimde, bazı gelişme süreçleri ya da metabolik değişme bir ya da heriki hücrede yer alır."

Özgün olarak V_{ij} 'nin

$$V_{ij} = \left(\sum_{\eta, \nu} C_{\eta\nu} S_{i\eta} S_{j\nu} \right) v_i v_j, C_{\eta\nu} \geq 0, v_i \geq 0 \quad (4.4)$$

çarpın formuna sahip i.ve j. nöronların geçmişle bağlantılı aktivasyon tarihinin $CS_i S_j$ zaman ortalamasıyla verileceği varsayılır. Burada $C_{\eta\nu}$ uzun dönem geçmişinin karmaşık (komplike) fonksiyonlarıdır. Ayrıca V_{ij} de kolaylaştırıcı değişimler yapan olanaklı kısa dönemler vardır. Bunlar kısa dönem belleğini anlamak için can alıcı noktalardır. Uyanıklık, dikkat vb. faktörlerin V_{ij} yi etkileyeceği beklenir.

Tamı tamına çözülebilecek $P_{\beta\alpha}$ nin lineer versiyonu denenir. Küçük ϵ na karşı gelen, istatistiksel dalgalanmaların büyük olduğu limitte

$$P_{\beta\alpha} \approx \frac{1 + \epsilon M_{\beta\alpha}}{\sum_{\gamma} (1 + \epsilon M_{\gamma\alpha})} \quad (4.5)$$

elde edilir. (4.3) den $\sum_{\gamma} S_{i\gamma} = 0$ sonucu $\sum_{\gamma} M_{\gamma\alpha} = 0$ 'ı gerektirdiğinden (4.5) denklemi

$$P_{\beta\alpha} = 1 + \varepsilon M_{\beta\alpha} / 2^N \quad (4.6)$$

biçimine gelir. Çok büyük gürültü limitinde, $\varepsilon \approx 0$, her aktivasyon şekillenimi olasılıkla birbirine eşittir. Böylece herbir nöron i 'nin ortalama olarak $\bar{S}_i = 0$ aktivasyonu vardır. Özel korunumlu kısıtlama

$$\sum_j V_{ij} = 2V_i^T \quad (4.7)$$

varsayımdır. Bununla birlikte daha sonra bu koşulun gevşetilmesinin etkileri gösterilecektir. (4.4) ve (4.7), (4.3) deki yerlerine konulurlarsa

$$M_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\eta\nu} C_{\eta\nu} \left(\sum_i V_i (S_{i\beta} S_{i\eta}) \right) \left(\sum_j V_j (S_{j\alpha} S_{j\nu}) \right) \quad (4.8)$$

elde edilir. (4.8) de ilk kez oluşan $2^N \times 2^N$ lik

$$T_{\gamma\eta} = \sum_i S_{i\gamma} S_{i\eta} V_i \quad (4.9)$$

matrisi tanımlanır. Bu matris simetriktir ve λ_u özdeğerleri, ψ^u ($\sum_{\eta} T_{\gamma\eta} \psi_{\eta}^u = \lambda_u \psi_{\gamma}^u$) özvektörleri bulunarak çapraz forma konulabilir. Özdeğer spektrumunun oldukça basit olduğu gösterilmiştir (bakınız Ek D). Yalnızca ψ^u (ψ^a) nin N tanesi $\lambda_u \neq 0$ özdeğere sahiptir ve geriye kalan $2^N - N$ tanesi $(\chi^k) \lambda_u = 0$ dir.

$$\sum_{\eta} T_{\gamma\eta} \psi_{\eta}^a = V_a 2^N \psi_{\gamma}^a, \quad a=1,2,\dots,N \quad (4.10)$$

$$\sum_{\eta=1}^{2^N} T_{\gamma\eta} \chi_{\eta}^k = 0, \quad k=1,2,\dots,2^N-N \quad (4.11)$$

dir. Burada ψ^u ortonormal tabandan türer.

$$\sum_{\alpha} \psi_{\alpha}^u \psi_{\alpha}^v = \delta_{uv} \quad (4.12)$$

ψ lar için genel form

$$\psi_{\alpha}^a = 2^{-N/2} \sum_{\ell} R_{a\ell} S_{\ell\alpha}, \quad (4.13)$$

biçimindedir. Burada 1 kümesi aynı $v_a 2^N$ özdeğerlerine sahiptir ve R ortogonal bir matristir.

V_{ij} nin (4.4) deki η şekillenimlerinin terimleri cinsinden açılımı yerine, şekillenim terimleri ψ^u ağırlıklı olarak açılır.

$$V_{ij} = \sum_{u,r} C_{u,r} \sum_{\gamma,\eta} S_{i\gamma} \psi_{\gamma}^u S_{j\eta} \psi_{\eta}^r v_i v_j \quad (4.14)$$

bulunur. (4.14); (4.10) ve (4.11) ile birlikte kullanılarak (4.3) için

$$\begin{aligned} M_{\beta\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{u,r} C_{u,r} \sum_{\gamma,\eta} \left[\sum_{\beta} S_{i\beta} S_{j\eta} v_i \psi_{\eta}^u \right] \sum_{\gamma} \left[\sum_{\alpha} S_{\beta\alpha} S_{j\gamma} v_j \psi_{\gamma}^r \right] \\ &= \frac{(2^N)^2}{2} \sum_{a,b} C_{ab} \psi_{\beta}^a \psi_{\alpha}^b v_a v_b \end{aligned} \quad (4.15)$$

elde edilir. $\lambda_k = 0$ olan χ^k (4.15)'e ve χ ve ψ nin ortogonalesinden dolayı χ lar (4.14)'e katkıda bulunmazlar.

$$\begin{aligned} V_{ij} &= \sum_{a,b} C_{ab} \sum_{\gamma,\eta} v_i (S_{i\gamma} \psi_{\gamma}^a) v_j (S_{j\eta} \psi_{\eta}^b), C_{ab} > 0 \\ &= 2^N v_i v_j \sum_{a,b} R_{ai} R_{bj} C_{ab} \end{aligned} \quad (4.16)$$

χ lar için Ek D'deki özgül form kullanılarak ψ nin tabanında $\sum_{\beta\alpha} \psi_{\beta}^r \psi_{\alpha}^u = P(\psi^r, \psi^u)$ elde edilir. (4.6) daki $1/2^N$ teriminin yalnızca χ^1 öz fonksiyonu (herbir α daki bileşenlere eşit olan) bir katkısı vardır; çünkü, bütün öteki $2^N - 1$ tane ψ lar için $\sum_{\alpha} \psi_{\alpha} = 0$ dır. Böylece

$$P(\psi^e, \psi^d) = 2^{N-1} \sum_{a,b} v_a v_b C_{ab} \delta_{ae} \delta_{bd} \quad (4.17)$$

ve $P(\chi^1, \chi^1) = 1$ olur. Öteki bütün elemanlar sıfırdır (burada C_{ab} ler v_a lar pozitif olmalıysalarda, sinaptik potansiyel şiddetinin heriki işareti de olabileceğine dikkat edilmelidir). Lineer modelde, böylece $P(\chi^1, \chi^1)$ den sıfır olmayan matris elemanları ψ^a ve ψ^b durumları arasındadır. Burada a ve b, sıfır olmayan özdeğerli N durumun kümesinde bulunurlar.

(4.16) ve (4.17) de şekillenimlerin zamanla nasıl geliştiğini anlatan C_{ab} nin N^2 tane bağımsız çarpanı vardır. Her nöronun öteki nöronlarla bağlantılı olduğu bu modelde, bu N^2 sinapsların sayısıdır. Bu, "ağın bellek depolama kapasitesi sinapsların sayısıyla tanımlanır" tümcesinin temelidir.

Ağda saniyeler mertebesinde uyarılıp yayılabilen aktivasyon şekillenimlerinin tiplerini tanımlayan bağımsız parametrelerin sayısı "kapasite" için kullanılır. Farklı sıfır özdeğerleri olan N tane ψ^a özvektörleri kümesi bu şekillenimleri betimlemek için temel oluşturur.

Eğer (4.7) korunumlu sınırlama, bir hücrenin sinaptik şiddetin bütün toplamı üzerine gevşetilirse, (4.10) daki farklı sıfır N tane λ_i den birisi öteki farklı sıfır $N-1$ lerden çok büyük olur. Şekillenimi etkileyen bu durum ağın aktifliğinde başat olur.

(4.1.3) Sonuçlar

Hebb tipinde modifiye edilebilir sinapsları olan N tane nöronun oluşturduğu ağın modeli lineer versiyonda çözüldü. Her nöronun verilen bir zaman adımındaki aktifliğini betimleyen 2^N tane "mikroskopik" şekillenimlerinde odaklanıldı. Analizin önemli bir sonucu; bu 2^N , α aktivasyon şekillenimlerinin yalnızca N özgül (ortogonal) kombinezonlarının, ψ^a , ağın davranışını tanımlamasıdır. Bu N tane ψ^a dan $\psi^a \rightarrow \psi^b$ biçiminde N^2 tane geçiş üretilir. Bu kapasitenin tümünü kullanmak için, uyarıcıya tepki olarak, ağ, bu geniş elemanları kullanmalıdır. Böylece ψ ların zaman dizisini ($\psi^a \rightarrow \psi^b \rightarrow \dots$) üretmelidir. Bundan başka, içinde lineer ψ kombinezonlarının bağıntılı pre-post nöral aktiflik davranışının bir sonucu olarak oluşan sinaptik değişmelerin olduğu (4.16), Hebb hipotezinin modifiye formunu gösterdi.

Yanıtlanması gereken iki önemli soru vardır. Birincisi çizgisel model hangi genişlikteki çizgisel olmayan problem için uygundur? Ötekisi ise şudur: ψ ların fizyolojik anlamı nedir?

Az sayıda nöron için bilgisayar benzerlikleri, çizgisel modelin sonuçlarıyla bütün modelin davranışı yolundan bağımlıdır.

İkinci soru ise, matematiksel çözümün istatistiksel doğasını tanımlayan aktivasyon şekillenimleri ψ^a ların lineer kombinasyonlarının fizyolojik anlatımıdır.

(4,2) HOPFIELD MODELİ (5)

Nöronların ve iç bağlantılarının (sinapsların) dinamik elektrokimyasal özellikleri verilirse, birkaç nöronun elemanter olarak yararlı biyolojik davranışlarını elde etmek için kullanılan şemalar anlaşılır. Elektronikteki böylesi basit devrelerin anlaşılması, bilgisayarlar için temel olan daha büyük ve daha komplike devrelerin planlanmasına olanak tanır.

Çok sayıda basit elemanlardan oluşmuş fiziksel sistemlerde, çok sayıda elemanter bileşenleri arasındaki etkileşmeler, kararlı magnetik yönelimler gibi toplu olay ve magnetik sistemde bölgeler ya da akışkanın akışında girdaplar üretir. Basit etkileşen nöronlar sistemindeki benzer toplu olay, yararlı hesapsal bağıntılara sahip midir? Model bu tür soruları test eder, kendiliğinden ortaya çıkan önemli hesapsal özellikler gösterir.

(4.2.1) Fiziksel Sistemin "Genel-İçerik Adreslenebilir" Belleği

Belleğe yüklenmiş "H.A.Kramers and H.Wannier Phys. Rev., 60 252(1941)" bilgisi ele alınsın. Genel bir içerik adreslenebilir bellek, yeterli kısmi bir bilgiye dayanarak bu bilginin geri çağrılmasında yeterli olacaktır. İdeal bir bellek hatalarla uğraşabilmelidir ve Vannier (1941) gibi bir girişten bile bu referansı yeniden elde edebilmelidir. Bilgisayarlarda, içerik adreslenebilir belleğin yalnızca bağlı basit biçimleri donanımda yapılır. Bilgiye erişme, yanlış düzeltme vb. gibi sofistik düşünceler ise yazılım olarak bilinir.

Kendiliğinden davranışları genel içerik adreslenebilir bellek ve yanlış düzeltme biçimi olarak kullanılabilen fiziksel sistemler sınıfı vardır. Genel koordinatların bir kümesiyle temsil edilebilen bir fiziksel sistemin zaman içinde gelişimi ele alınsın. Böyle olunca, durum uzayındaki bir nokta sistemin anlık koşulunu simgeler. Bu durum uzayı, N tane Ising spinli durumda olduğu gibi sürekli ya da kesikli olabilir.

Durum vektörü χ in bileşenleri olan $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_N$ gibi birçok koordinatla betimlenen bir fiziksel sistem ele alınır. Sistemin χ_a, χ_b, \dots gibi yerel kararlı noktaları bulunsun. Bu durumda eğer sistem χ_a ya yeterince yakın başlatılırsa ($\chi = \chi_a + \Delta$), $\chi \approx \chi_a$ oluncaya dek ilerler. Sistemde depolanan bilgiye χ_a, χ_b , vektörleri gözüyle bakılabilir. Başlama noktası ($\chi = \chi_a + \Delta$); χ_a nın kısmi bilgisini simgeler ve sistem χ_a bilgisini üretir.

Faz uzayındaki dinamiği, yerel kararlı durumların dayanıklı sayısıyla yönetilen bir fiziksel sistem, genel içerik adreslenebilir bellek olarak alınabilir.

(4.2.2) Model Sistem

Modeldeki işlemci aygıtlar nöronlardır. Her nöron i , iki tane Mc Culloch ve Pitts⁽¹⁷⁾ tipi duruma sahiptir.

$V_i = 0$ ise nöron pasiftir. $V_i = 1$ ise maksimum oranda aktiflik vardır. Nöron i ve nöron j arasındaki bağlantı T_{ij} ile verilir. Bağlantısız nöronlar için $T_{ij} \equiv 0$ olarak alınır.

Sistemin anlık durumu V_i nin N tane değeri listelenerek özgülleştirilir. Bu durumda N tane bitlik ikili (binari) sözcükle sistem temsil edilir.

Durumun zamanla değişimi aşağıdaki algoritmaya göre yürür. Her nöron i için sabit bir U_i eşiği vardır. Yine her nöron i , W ortalama girişim hızıyla kendisini yeniden ayarlar.

Bu durum

$$\begin{aligned} V_i &\rightarrow 1 \text{ eğer } \sum_{j \neq i} T_{ij} V_j > U_i \text{ ise} \\ V_i &\rightarrow 0 \text{ eğer } \sum_{j \neq i} T_{ij} V_j < U_i \text{ ise} \end{aligned} \quad (4.18)$$

biçiminde anlatılabilir. Bu koşullar altında her nöron, eşiğin altında ya da üstünde olma durumuna göre rasgele ve a-senkronize olarak gelişir ve kendini yeniden ayarlar. Tersini belirtilmedikçe $U_i = 0$ seçilir.

(4.2.3) Bilgi Depolama Algoritması

$V^s, s=1, 2, \dots, n$ durum kümesi depolanmak istensin. Bunu yapabilmek için

$$T_{ij} = \sum_s (2V_i^s - 1)(2V_j^s - 1) \quad (4.19)$$

depolama formu kullanılır. Bu tanımdan

$$\sum_{\substack{j \\ a}} T_{ij} V_j^{s'} = \sum_s (2V_i^s - 1) \left[\sum_j V_j^{s'} (2V_j^s - 1) \right] \equiv H_j^{s'} \quad (4.20)$$

elde edilir. Bu son denklemdaki köşeli parantezin içindeki terimin ortalama değeri $s \neq s'$ için sıfır, $s = s'$ için $N/2$ dir. Bu psedöortogonalite

$$\sum_j T_{ij} V_j^{s'} \equiv \langle H_i^{s'} \rangle \approx (2V_i^{s'} - 1) N/2 \quad (4.21)$$

sonucunu üretir. (4.21) pozitif ise $V_i^{s'} = 1$, $V_i^{s'} = 0$ ise negatiftir. $s \neq s'$ terimlerinden gelen gürültünün dışında, depolanmış durum, işleyiş algoritması altında kararlı olacaktır. Burada konuya birazcık ara verilip (4.21) 'in doğrulanması üzerinde durulursa şu adımları izlemek gerekir.

$$\begin{aligned} \sum_j V_j^{s'} &= \frac{N}{2} \delta_{ss'} \\ \Rightarrow \sum_j V_j^s &= N/2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

olacaktır. Buradan

$$\sum_j V_j^{s'} (2V_j^s - 1) = \frac{N}{2} \delta_{ss'} \quad (4.23)$$

ya da $s=s'$ için

$$\sum_j V_j^s (2V_j^s - 1) = 2 \sum_j V_j^s V_j^s - \sum_j V_j^s \quad (4.24)$$

olur. $V_j^s V_j^s = V_j^s$ olduğu için $V_j^s = 0, 1$ değerlerinden birisini alır.

$$2 \sum_j V_j^s - \sum_j V_j^s = \sum_j V_j^s = N/2 \quad (4.25a)$$

ya da $s \neq s'$ için

$$2 \sum_j V_j^{s'} V_j^s - \sum_j V_j^{s'} = 2 \sum_j V_j^{s'} V_j^s - \frac{N}{2} \delta_{ss'} = \frac{N}{2} \delta_{ss'} \quad (4.25b)$$

$$2 \sum_j V_j^{s'} V_j^s = N \delta_{ss'} \Rightarrow \sum_j V_j^{s'} V_j^s = \frac{N}{2} \delta_{ss'} \quad (4.25c)$$

sonuçları elde edilir. Burada

$$V_j^{s'} V_j^s = V_j^s \delta_{ss'} \quad (4.26)$$

psedöortogonolite koşuludur. Bu koşul kullanılarak

$$\begin{aligned} \sum_j V_j^{s'} (2V_j^s - 1) &= 2 \sum_j V_j^{s'} V_j^s - \sum_j V_j^{s'} \\ &= 2 \sum_j V_j^s \delta_{ss'} - \sum_j V_j^{s'} \delta_{ss'} = \sum_j V_j^s \delta_{ss'} = \delta_{ss'} N/2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

elde edilir. $s \neq s'$ için (4.27) sıfırdır".

T_{ij} matrisleri, lineer asosiyatif ağların kuramında çiftlenmiş giriş situmulusu, $S_1 \rightarrow 0_1$ den bir çıkış şekillenimi üretmek için kullanılmıştır. İkinci asosiyasyon (birlik),

$S_2 \rightarrow O_2$, aynı devrede aynı anda depolanabilir. $0.6S_1 + 0.4S_2$ biçiminde karışık bir situmulus genellikle anlamsız bir çıkış üretir ($0.6O_1 + 0.4O_2$ gibi). Model güçlü çizgisel olmayışlığını seçenekler yapmak, yeniden bilgi ve kategoriler üretmek için kullanır.

Bir çizgisel asosiyatif ağ, çizgisel olmayan bir dış mantık işleyicisiyle, doğru bir hesap yapabilmek için karmaşık bir yolla bağlantılı olmalıdır. Kompleks bir devreyi tasarımların kolay olmasına karşın; onu evrimsel terimler cinsinden tartışmak zordur. Buna karşın bu model, kendisinin ortaya çıkan hesapsal özelliklerini devreden çok birçok hücrenin basit özelliklerinden elde eder.

(4.2.4) Modelin Biyolojik Yorumu

Birçok nöron, hücre zarı boyunca ortalama potansiyel durgun değerinin üstünde tutulduğunda, bir aksiyon potansiyeli sinyaller dizisi üretmeye yeteneklidir. Aksiyon potansiyellerinin üretildiği ortalama oran Şekil 9 daki genel biçimini alır. Bu durum, zardaki ortalama potansiyelin yumuşak bir fonksiyonu olarak gözükür.

Öteki nöronlara gönderilen biyolojik bilgi genellikle aktivasyon oranının kısa zaman ortalamasında yer alır. Bu durumda, birbirinden ayırt edilemeyen aksiyon potansiyellerinin ayrıntıları önemsenmeyebilir ve Şekil 9 'a yumuşak bir giriş-çıkış bağıntılılığı gözle bakılabilir. Aynı bilgiyi taşıyan paralel yollar, sistemin kısa zaman ortalama aktivasyon oranında çıkması yeteneğini artırır.

Kendiliğinden hesap yapabilmenin ve ortaya çıkan toplu etkilerin çalışılması, giriş-çıkış bağıntılılığının çizgisel olmayışlığı üzerinde odaklanmalıdır. Hesaplamanın özü çizgisel olmayan mantıksal işlemlerde yatar. Parçacık dinamiğinde gerçek toplu etkiler üreten parçacık etkileşimleri, parçacıkların konumlarındaki kuvvetlerin çizgisel olmayan bağımlılığından kaynaklanır. Oysa, çizgisel asosiyatif ağlar Şekil 9 ' un lineer merkezi bölgesinde vurgulanmışlardır.

Bu modelde giriş-çıkış ilişkiliği noktalı-çizgili adımla değiştirilir. İşleyişi basat olarak çizgisel olan bu nöronlar yalnızca çizgisel olmayan nöronlar arasında iletişim yolu sağlar. Böylece "aktif" ya da "pasif" nöronlu ağlar ele alınabilir. Sinaptik iletilerin ve aksonlar, dendritler boyuncaki impulsların iletimlerindeki gecikmeler, nöronun giriş ve etkin çıkışın arasında bir gecikme oluşturur. Böylesi bütün gecikmeler basit bir parametreyle modellenir. İşleme zamanı $1/W$ dır.

Özel bir nörona giriş, bu nörona uzanan sinapsların akım sızıntılarından gelir. Bu, hücre ortalama potansiyelini etkiler. Sinapslar aksiyon potansiyellerine ulaşarak aktive edilirler. i hücrelerine giriş sinyali

$$\sum_j T_{ij} V_j \quad (4.28)$$

olarak alınabilir. Burada T_{ij} sinaptik etkinliktir. Bu durumda, Şekil 9 bir nöron için giriş-çıkış bağıntısı biçimine gelir. Little, Shaw ve Roney^(18,19,20), "aktif/pasif" nöronlar ve senkronize işlem üzerine kurulu nöral ağların topluca (kollektif) fonksiyonlanması düşüncelerini geliştirdiler. Böyle olmakla birlikte, modellerinde kullandıkları aksiyon potansiyelinin başaklarının bağıl zamanlaması merkezseldi ve geriye yansıyan aksiyon potansiyeli sinyal dizilerinin sonucu olarak ortaya çıkıyordu. Bu nedenle bu modelle Little, Shaw ve Roney'in modeli yalnızca biçimsel benzerlikle sınırlıdır.

Nöral öğrenme ağlarının modellenmesi en çok Hebb⁽¹⁶⁾ ve Eccles⁽²¹⁾ tarafından betimlenen genel tipte sinapslar üzerine kurulur. Temel bileşen T_{ij} nin

$$\Delta T_{ij} = [V_i(t) V_j(t)]_{ort} \quad (4.29)$$

benzeri korelasyonlarla modifikasyonudur. Buradaki ortalama, uygun geçmiş zaman üzerindeki hesaplamadır. Zamanda oluşabilecek bozunmalara ve $[V_i(t)]_{ort}$. ya da $[V_j(t)]_{ort}$. nin

etkilerine izin verilir. Böylesi sinapslı nöral ağlar; (4.19) ' un assosiyatif T_{ij} lerini kurabilirler. Bu durumda T_{ij} nin önceki deneylerle üretildiği varsayılır.

Hebbiyen özelliğinin tek sinapslarda bulunmaya gereksinimi yoktur, böylesine net etkiler üreten küçük hücre grupları yeterli olacaktır.

(4.2.5) Modelin Topluca (kollektif) Davranışının Çalışmaları

Modelin kararlı limit noktaları vardır. $T_{ij} = T_{ji}$ özel durumu ele alınır ve

$$E = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} T_{ij} V_i V_j \quad (4.30)$$

tanımlanır. ΔV_i den ileri gelen ΔE ise

$$\Delta E = -\Delta V_i \sum_{j \neq i} T_{ij} V_j \quad (4.31)$$

ile verilir.

Değişen V_i için algoritma E nin monoton azalan fonksiyon olmasına neden olurken; durum değişimleri yerel E ye ulaşıncaya dek sürer. Bu durum Ising modeliyle eşyapılıdır. T_{ij} , değiş tokuş çiftleniminin rolünü sağlar ve her bir sitede (yerde) dış bir yerel alan vardır. T_{ij} simetrik ama; rasgele karakterde olduğu zaman (spin camı), birçok yerel kararlı durumların bulunduğu bilinir.

Bu modelde Monte-Carlo hesapları $T_{ij} = T_{ji}$ kısıtlamasının kaldırılmasının etkisini test etmek için çeşitli sayıda nöronlar, N , için yapılmıştır. Burada bu hesaplamaların ayrıntılarına girilmeksizin bazı sonuçlar verilmekle yetinilecektir.

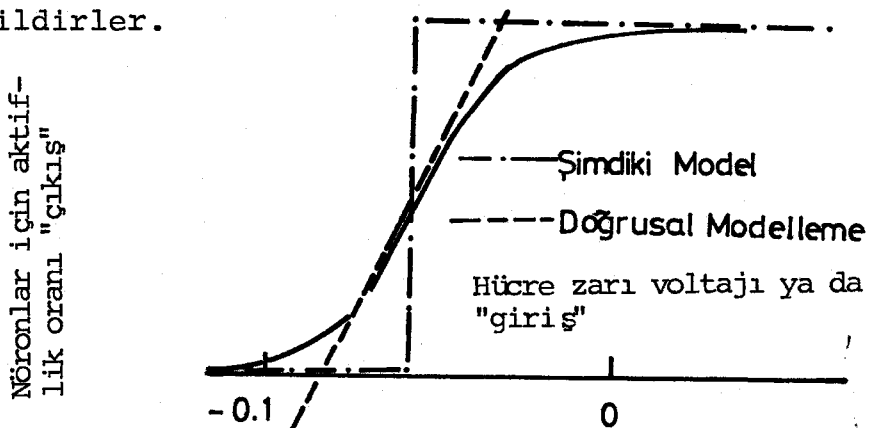
Niçin $T_{ij} \neq T_{ji}$ olduğunda kararlı limit noktaları ya da bölgeleri kalıcı olmalıdır? Eger belirli bir zaman süresince algoritma, V_i yi 0 dan 1'e ya da tersi duruma değiş-

tirirse, denk. (4.30) ile tanımlanan enerjideki değişme biri daima negatif olan iki terime ayrılır. $T_{ij} \neq T_{ji}$ için, algoritma E yi simetrik T_{ij} dekine benzer bir yolla; ama sonlu bir sıcaklığa karşılık gelen algoritmayla değiştirir.

Yaklaşık olarak 0.15 tane durum, geri çağırmadaki hata yüzde birkaç olmadan aynı anda anımsanabilir. Denk. (4.19) 'a göre bellek depolamasının bilgisayar modellemesi $N=30$ ve $N=100$ için yapıldı. n tane rasgele bellek durumu seçilerek, karşı gelen T_{ij} üretildi. Eger bir sinir sistemi etkin bir depolama için sinyalleri önceden işlerse, önceden işlenen bilgi rasgele gözükür. Bu durumda rasgele bellek vektörleri kodlanmış gerçek bilgiyi etkin olarak taklit ederler.

T_{ij} 'ye sürekli olarak yeni bellekler eklenebilir. Kapasitenin üzerinde yeni bellekler eklenmesi sistemi aşırı yükler ve eski bellekleri unutmak için bir önlem alınmadıkça, bütün bellek durumlarını yeniden elde edilemez duruma getirir.

T_{ij} nin olanaklı büyüklüğünün doyum noktasına ulaşması unutmaya neden olur. T_{ij} nin olanaklı değerleri $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ olsun ve T_{ij} bu bölgede serbestçe artsın. Eger $T_{ij}=3$ ise $+1$ lik bir artım önemsenmez, bundan sonraki -1 lik artım ise T_{ij} yi 2 ye düşürür. T_{ij} bu şekilde kurgulandığında hafifce artan gürültü düzeyiyle yalnızca en son bellekler alıkonulur. Uzak geçmişte kalan bellekler ise artık kararlı değildirler.



Sekil 9. Tipik bir nöron için hücre zarı potansiyeline karşı aktiflik oranı (kalın çizgi). Kırık çizgiler (yaklaşıklıklar)

5. NÖRAL AĞLARIN SPİN CAMI MODELLERİ

(5.1) GİRİŞ

Hopfield-Little modeli, nöron ağlarının temel özelliklerinin gerçekleşmesi için McCulloch-Pitts⁽¹⁷⁾ programının termodinamik açılımıdır. İlk adım, birbirinden ayırt edilemeyen nöronların kesikli iki durumlu birimler olarak şematize edilmesiydi. Herbir nöronun durumu zaman içinde o nöronla daha önceki zamanlarda bağlantılı olan nöronların durumuna göre değişir. Sorun; böylesine basit elemanların içten bağlantılı ağının hesaplama işlemini geliştirip geliştiremeyeceği ve yine asosiyatif (birleşik) bellek olarak işleyip işlemeyeceğidir.

Little ve Hopfield'in çalışmalarından beri, konunun odağı böylesi ağların asosiyatif ya da "içerik adreslenebilir" bellek, depolama ve geri çağırma aygıtları olarak işleyebilmesine kaydırıldı. Bu kavramların anlamı şöylece verilebilir.

Öğrenilmiş bilgilerin yerlerinin olduğu kadar, ağdaki bilginin temsilinin biçimi de tanımlanmak zorundadır. Böylece ağın, herbiri ezberlenmiş (öğrenilmiş) bir bilgiyle özdeşleştirilebilen temsil edilebilen bilgilerin toplam kümesini sınıflara ayırarak sınıflandırması beklenir.

Bir başka deyişle, olanaklı her giriş şekillenimi için, giriş şekilleniminin ilişkin olduğu sınıfı temsil eden öğrenilmiş şekillenimin yeniden elde edilebileceği umulur. Böyle olunca öğrenilmiş şekillenimler asosiyasyon (birlik) yoluyla kimi giriş şekillenimleriyle (stimulus) elde edilenler olacaklardır.

Böylesi bir modelin temel evrensel gereklerinden bazıları şunlardır.

(a) Sistem şematize edilmiş nörofizyolojik elemanlardan (nöronlar ve sinapslar) oluşur.

(b) Sistem çok sayıda girişi sınıflandırabilmeli ve

bunun yanı sıra çok daha az sayıda çıkış üretmelidir.

(c) Yeniden elde etme, zamanın kabul edilebilir bir diliminde yer almalıdır. Temel nöronal işlemler birkaç milisaniyede olacak biçimde karakterize edilirler. Yeniden elde etme dinamik sürecin birkaç onluk adımında gerçekleşmelidir.

(d) Öğrenme işlemi (tanınabilir şekillenim sayısının artması), tanıma işleminde gerek duyulan dinamik süreçle bağlantılı olmalıdır.

(e) Nöronlar ölebilirler ve sinaptik yollar birbirine karışabilirler. Bu nedenle sistemin özellikleri, öğelerin rasgele değişmelerine karşı dayanıklı olmalıdır.

(d)'nin dışında bütün bu özellikleri sağlayan bir model fizikçilerce iyi bilinen bir sistem olan ferromagnetik Ising modelidir. (a) koşulunu sağlamak için ise nöral ve spinal sistem birbirine Tablo 5.1 deki gibi benzeştirilir.

Nöron i	Spin S_i
Aktif, Pasif	$S_i = +1, -1$ (Yukarı, Aşağı)
Sinaptik Etkinlik	Çiftlenim Sabiti J_{ij}
Toplam Elektriksel Giriş, V_i	Moleküler Alan, $h_i = \sum_j J_{ij} S_j$
Giriş Şekillenimi	Başlangıç Spin Konfigürasyonu
Ayırt Edilen Şekillenim	Kalıcı Spin Konfigürasyonu
Dinamik Süreç	Paralel Monte-Carlo

Tablo 5.1 Nöral \leftrightarrow Spinal Sistem Benzeşmesi

Açıkça görüldüğü üzere, kritik sıcaklığın yeterince altında bulunuluyorsa, herhangi bir giriş şekillenimi için (2^N olanaklı durumdan birtanesi), sistem bütün spinlerin +1 ya da -1 olduğu iki şekillenimden birine gevşeyecektir.

Bu (c) koşulunu geniş ölçüde sağlar. Sistem yeni spinlerin katkılanmasına ya da çiftlenimlerin elenmesine karşı dayanıklıdır. Bu durum (b)'yi sağlar. (e) gereği ise, herbir spin dalgalanmalarının (flip) birkaç onunun sistemin iki taban durumundan birine gevşemesine izin vermesi nedeniyle yerine getirilir.

Bununla birlikte sistem yalnızca (d) koşulunu sağlamamakla kalmayıp, bilginin depolanması açısından da oldukça yoksuldur. Çünkü, ikiden fazla ya da etkin olarak bir sınıfı tanıyabilen bir belleğin ele alınması arzulanabilir. Aksi durumda sistem oldukça atraktif (çekici) olacaktır.

Bu durumda iki sorunla karşı karşıya gelinir.

(i) Keyfi sayıda dinamik olarak kararlı durumlara sahip olan ergodik* olmayan termodinamik bir sistem bulmak.

(ii) Bu kararlı durumların kolleksiyonu (topluluğu) nörolojik olarak tanımlanabilir parametrelerle bağlantılı olmalıdır.

Spin camlarının kuramındaki son gelişmeler (i)'nin çözümüne büyük bir kolaylık getirmiştir. Önlemeli (frustrasyonlu) sistemler çok sayıda düşük düzeyli, yerel olarak kararlı durumlara sahiptir. Klasik spin camı bu durumlara aşırı sayıda sahip olduğu için, sonuçta kullanışlı bir bellek için aşırı gürültülü olacaktır. Little-Hopfield programı bazı güçlükler çıkaran ferromagnetizma ile aşırı derecede gürültülü spin camları arasında başarılı bir bölüm olarak betimlenebilir. Bu program (i) ve (ii) sorunlarıyla uğraşabilecek kadar ayrıntılara sahiptir. Bunun için temel olan öge önlemedir (frustrasyon). Bunun anlamı, içinde bu bağların dondurulduğu spin konfigürasyonlarına izin vermeyen pozitif ve negatif çiftlenimlerin varlığıdır. Nörolojik olarak söylenmesi gerekirse, geçirgen (pozitif J_{ij}), ve engelleyici (negatif J_{ij}) sinapsis olmak üzere iki tip sinapsis vardır.

* Sözcüğün Türkçe karşılığı tam olarak bulunamadığı için orijinal adı kullanılmıştır.

(5.2) MODELLERİN DİNAMIĞI (Genel Görünümler)

Hopfield ve Little modellerinin herikisi de aynı dinamiğe sahiptirler. Heriki modelde de her nöronun durumunun değişmesinin, ağdaki bütün öteki nöronların aktivasyon şekilleniminden etkilendiği varsayılır. Modellerdeki fark, Hopfield dinamiğinin seri, Little dinamiğinin ise paralel olmasıdır. Heriki süreç de, $T=0$ ya da $T=$ sonlu, sıcaklığında durum uzayında bir Monte-Carlo akışıdır. Fark, verilen bir spini güncelleştirmek için kullanılan spinlerin (nöral durumlar) konfigürasyonu ile ifade edilir. Paralel dinamikte bütün spinler güncelleştirilinceye dek bu konfigürasyon aynı kalır. Seri dinamikte ise, spinin her güncelleştirilmesinden sonra, gelecek bir spini güncelleştirmekte kullanılan yeni bir konfigürasyon ortaya çıkar.

Bu dinamikleri daha spesifik olarak ele alabilmek için her nöron iki olanaklı durumlu Ising spini olarak düşünülür.

Daha önce de vurgulandığı gibi N tane nöronun yukarı ya da aşağı durumu, (milisaniyeler ölçeğinde) elektrokimyasal aktiflik gösterip göstermediklerine bağlıdır.

N tane nöronun t zamanındaki durumu, spin değişkenlerinin t zamanındaki anlık konfigürasyonu olarak tanımlanır.

$$|\alpha, t\rangle = |S_1^\alpha, S_2^\alpha, S_3^\alpha, \dots, S_N^\alpha; t\rangle \quad (5.1)$$

Böylesi durumların, 2^N durumlu faz uzayında, dinamik gelişmesi nöronların arasındaki etkileşmelerle tanımlanır. Nöronlar J_{ij} sinaptik etkileşmelerle birbirlerine bağlıdır. J_{ij} ; i . nöron üzerine etkiyen post-sinaptik potansiyel katkıda bulunan j . nöronun aktiflik sinyali katkısını saptar. Bu katkı pozitif ya da negatif olabilir. Her nöron üzerindeki potansiyel V_i , ona zamanın toplama periyodunda gönderilen psp'lerin (post-sinaptik potansiyel) toplamıdır. Yani,

$$V_i = \sum_j J_{ij} (S_j + 1) \quad (5.2)$$

olacaktır. Bu son denklemde S_j spin değişkeninin boyutsuz olduğu düşünülürse J_{ij} 'nin potansiyel boyutunda olduğu anlaşılır.

Dış pertürbasyon ya da gürültünün yokluğunda her nöronun V_i , U_i eşik potansiyelini aştığında aktif olacağı açıktır. Böyle olunca sistemin kararlı durumları; içinde her spin değişkeni $\{S_i\}$ 'nin $h_i = V_i - U_i$ moleküler alanıyla sıraya dizildiği konfigürasyonlar olacaktır.

$$S_i h_i = S_i (V_i - U_i) > 0 \quad (5.3)$$

Tanımlanan analitik sonuçlar simetrik J_{ij} (yani $J_{ij} = J_{ji}$) için elde edilmişlerdir. Böylesi bir durumda denk. (5.3) $\{S_i\}$ konfigürasyonlarının H Hamiltonyeninin yerel minimumu olması gereğine eşdeğerdir.

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_i h_i S_i = -\frac{1}{2} \sum_i S_i \sum_j J_{ij} S_j = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} S_i S_j \quad (5.4)$$

Burada eşik potansiyellerinin genel olarak $U_i = \sum_j J_{ij}$ 'yi sağladığı varsayılır. $U_i = [(\sum_j J_{ij} S_j) - h_i] + \sum_j J_{ij}$ olduğundan köseli parantez içindeki terim yaklaşık olarak sıfırdır. Çünkü, i . nörona etkiyen moleküler alan

$$h_i = \sum_j J_{ij} S_j \quad (5.5)$$

ile verilir. H'da dış alan terimi yoktur. Gürültünün varlığında konfigürasyonların (5.3) ile verilen ayrı bir durumu almasının sonlu bir olasılığı vardır. Bu, $1/\beta$ etkin sıcaklığını göz önüne alarak yapılabilir. Bu, sistemdeki gürültü düzeyini karakterize eder.

Bir ağın, öğrenme ve bellek için bir kapasiteye

sahip olabilmesi için kararlı durumların , öğrenme işlemiyle saptanan belirli bir konfigürasyonlarla bağlantılı olması gerekir. Bu J_{ij} 'yi

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^P \sum_i^M \sum_j^M \xi_i^\mu \xi_j^\mu, i \neq j \quad (5.6)$$

seçerek başarılr. $\{\xi_i^\mu\}$ nin p tane elemanı , öğrenme işlemiyle sabitleştirilmiş ağıın belirli konfigürasyonları olup , dinamik olarak kararlıdırlar.

"Sinapslar o şekilde dizayn edilirler ki , sistemin durumlarının verilen bir kümesi , onun dinamik gelişiminin sabitleşmiş atraktörleri haline gelirler. Bu durumlar, ağıın ezberlemiş olduğu şekillenimlerdir. Bu durumda sistem asosiyatif (içerik adreslenebilir) bir bellek olarak işler. Ve şekillenimleri kısmi olarak temsil eden bir başlangıç durumundan başlayarak bu şekillenme hızla gelişir".

ξ_i^μ , +1 , -1 değerlerini eşit olasılıkla alabilen sönümlü rasgele değışkendir. (5.3) ve (5.6) modeli , eğer gerçekte ortaya çıkan konfigürasyonlar , $\{S_i\}$, öğrenilmiş belleklerle yani $\{\xi_i^\mu\}$ lerle bağlantılıysa depolama kapasitesine ve belleğin geri çağrılmasına sahip olacaktır. Sistemin kararlı durumları $N \rightarrow \infty$ limitinde tamamen analiz edilebilir. Yukarıdaki satırlarda da vurgulandığı gibi , birkaç bin hatta birkaç yüz nöron bile yeterince büyük bir sistemdir. Bu nedenlerden dolayı , (5.6) etkileşmesi; sonsuz erimli doğası yüzünden problemin kolayca ele alınmasına ve ortalama alan kuramının tamı tamına uygulanmasına olanak tanır.

(5.3) GENELLEŞTİRİLMİŞ HOPFIELD MODELİ

(5.3.1) Ortalama Alan Kuramı

Sistemin Hamiltonyen 'i

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \left[\frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^P \sum_i^M \sum_j^M \xi_i^\mu \xi_j^\mu \right] S_i S_j \quad (5.7)$$

ile verilir. ξ_i^μ lerin ortalaması sıfırdır.

Sistem $N \rightarrow \infty$ limitinde çalışılırsa, toplam ortalama serbest enerji yoğunluğu

$$-\beta f(\beta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[N^{-1} \langle \ln \text{Tr}_S \exp(-\beta \mathcal{H}) \rangle \right] \quad (5.8)$$

ile verilir. Burada $\beta = T^{-1} (k_B = 1)$, $\langle \dots \rangle$ notasyonu $\{\xi_i^\mu\}$ dağılımı üzerinden alınan ortalamayı simgeler.

Eş bölüşüm fonksiyonu, ξ ların verilen bir realizasyonu için yeniden yazılır.

$$Z = \text{Tr}_S \exp(-\beta \mathcal{H}) = \exp(-\beta P/2) \text{Tr}_S \left\{ \beta/2N \sum_{\mu} \left[\sum_i S_i \xi_i^\mu \right]^2 \right\} \quad (5.9)$$

Bu sonucun açıkça bulunması gerekirse önce

$$\sum_{\mu} \left[\sum_i S_i \xi_i^\mu \right]^2 = \sum_{\mu} \left\{ \sum_i (S_i \xi_i^\mu)^2 + \sum_{i \neq j} S_i S_j \xi_i^\mu \xi_j^\mu \right\}$$

olduğu anımsanır. Son denkleğin sağ yanındaki ilk terim denklemin soluna aktarılır, $\beta N^{-1}/2$ ile çarpılarak üs alınır-
sa

$$\exp \left\{ \frac{\beta N^{-1}}{2} \sum_{\mu} \left[\sum_i S_i \xi_i^\mu \right]^2 - \frac{\beta}{2} \sum_{\mu} \sum_i (S_i \xi_i^\mu)^2 \right\} = \exp \frac{\beta}{2} \sum_{i \neq j} \sum_{\mu} \xi_i^\mu \xi_j^\mu S_i S_j$$

elde edilir. Ya da daha açık olarak

$$\exp(-\beta P/2) \sum_{\mu} \left[\sum_i S_i \xi_i^\mu \right]^2 \exp \frac{\beta}{2N} N P = \exp(-\beta \mathcal{H})$$

bulunur. Şimdi (5.9) denklemini işlemek için

$$e^{\lambda \sum_{\mu} \left(\sum_i S_i \xi_i^\mu \right)^2} = \prod_{\mu} e^{\lambda \left(\sum_i S_i \xi_i^\mu \right)^2} \quad (5.10)$$

özdeşliği

$$e^{\lambda a^2} = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2 + \sqrt{2\lambda} a x} \quad (5.11)$$

bağıntısını yazabilmek için anımsanır. (5.11) 'in kullanılmasıyla (5.9) denklemi

$$\text{Tr} \left\{ \prod_{\mu} e^{\lambda (\sum_i S_i \xi_i^{\mu})^2} \right\} = \text{Tr} \left\{ \int \prod_{\mu} \frac{d\mathbf{m}^{\mu}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mathbf{m}^{\mu} \cdot \mathbf{n}^{\mu}}{2} + \left(\frac{\beta}{N}\right)^{1/2} (\sum_i S_i \xi_i^{\mu})^2 \mathbf{m}^{\mu}} \right\}$$

biçimine dönüşür. Burada $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{m}^{\mu}$, $\mathbf{a} \rightarrow (\sum_i S_i \xi_i^{\mu})^2$ olarak tanımlanmıştır.

$$A = \int \prod_{\mu} \frac{d\mathbf{m}^{\mu}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mathbf{m}^{\mu} \cdot \mathbf{n}^{\mu}}{2}} \cdot \text{Tr} \left\{ e^{\sqrt{\beta/N} \mathbf{m}^{\mu} \cdot (\sum_i S_i \xi_i^{\mu})} \right\}$$

tanımı $\mathbf{m}^{\mu} \rightarrow \mathbf{m}^{\mu} (N\beta)^{1/2}$ dönüşümü altında

$$A = (N\beta)^{1/2} \int \prod_{\mu} \frac{d\mathbf{m}^{\mu}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{N\beta \mathbf{m}^{\mu} \cdot \mathbf{n}^{\mu}}{2}} \text{Tr} \left(e^{\beta \mathbf{m}^{\mu} \cdot \sum_i S_i \xi_i^{\mu}} \right) \quad (5.12a)$$

biçimini alır.

$$\text{Tr}_{\{S_i\}} \left\{ e^{\beta \sum_i S_i \vec{m} \cdot \vec{\xi}_i} \right\} = \left(e^{\beta S_1 \vec{m} \cdot \vec{\xi}_1} - \beta S_1 \vec{m} \cdot \vec{\xi}_1 \right) \cdot \left(e^{\beta S_2 \vec{m} \cdot \vec{\xi}_2} - \beta S_2 \vec{m} \cdot \vec{\xi}_2 \right) \cdots \left(e^{\beta S_N \vec{m} \cdot \vec{\xi}_N} - \beta S_N \vec{m} \cdot \vec{\xi}_N \right)$$

yazılarak

$$\prod_{i=1}^N \left[2 \text{Ch}(\beta \vec{m} \cdot \vec{\xi}_i) \right] \quad (5.12b)$$

elde edilir. Bu sonucu $\exp \sum_i \ln [2 \text{Ch}(\beta \vec{m} \cdot \vec{\xi}_i)]$ biçiminde de yazmak olanaklıdır. β sonlu kaldığı sürece, \vec{m} üzerinden alınan integral yani A , onun saddle (eyer) noktasının değeri göz önünde tutularak alınır. A 'nın \vec{m} ye göre birinci türevini sıfıra eşit kılarak

$$-N\beta \mathbf{m}^{\mu} + \sum_i \frac{2\beta \xi_i^{\mu} \text{Sh}(\beta \vec{m} \cdot \vec{\xi}_i)}{2 \text{Ch}(\beta \vec{m} \cdot \vec{\xi}_i)} = 0$$

ve

$$\mathbf{m}^{\mu} = N^{-1} \sum_i \xi_i^{\mu} (\beta \vec{m} \cdot \vec{\xi}_i)$$

ya da

$$\vec{m} = N^{-1} \sum_i \vec{\xi}_i \text{th}(\beta \vec{m} \cdot \vec{\xi}_i) \quad (5.13)$$

elde edilir. (5.12a) ve (5.12b); (5.9) 'daki yerlerine konulurlarsa

$$f(\beta) = -\frac{1}{N\beta} \ln Z = \frac{1}{2} (\vec{m})^2 - \frac{1}{N\beta} \sum_i \ln [2 \text{Ch}(\beta \vec{m} \cdot \vec{\xi}_i)] \quad (5.14)$$

elde edilir. Sonlu bir N de, (5.14) ve (5.13) denklemlerinin sağ tarafları, $\{\xi_i^\mu\}$ nin özel realizasyonuna bağlıdır. Bununla birlikte $N \rightarrow \infty$ limitinde rasgele dalgalanmalar bastırılır ve $\ln Z$ ve m nin herikisi de kendi kendine (self) ortalama haline gelir. $1/N \sum_i$ ler ortalama alan denklemlerini gösterecek biçimde $\{\xi_i\}$ ler üzerinden alınacak ortalama ile yer değiştirir.

$$\vec{m} = \left\langle \left\langle \sum_i \text{th}(\beta \vec{m} \cdot \vec{\xi}_i) \right\rangle \right\rangle \quad (5.15)$$

m order parametresini yorumlamak için, $\xi_i^\mu S_i$ ye dış kaynak konjigesi eklenir. Yani m yi bulmak demek, ξ larla ideal magnetizasyon arasında ortalama almaktır. Yani açıkça

$$m^\mu = \left\langle \left\langle \sum_i S_i^\mu \langle S_i \rangle \right\rangle \right\rangle \quad (5.16)$$

elde edilir. Burada $\langle S_i \rangle = \tanh(\beta \vec{m} \cdot \vec{\xi}_i)$ ise i . yerdeki spinin termal ortalamasıdır. (5.15) denkleminin çözümlerinin ayrıntılı yapısı $\langle S_i \rangle$ spin durumları ile her bir $\{\xi_i^\mu\}$ p tane sönümlü belleklerin tanımı için çok gereklidir. Burada $\langle S_i \rangle$ yi tanımlamak uygun olacaktır.

$\langle S_i \rangle$; spin değişkenleri üzerinden alınan termodinamik olarak beklenen değerdir. Yani matematiksel olarak

$\langle S_i \rangle = \text{Tr} S_i \exp(-\beta H) / \text{Tr} \exp(-\beta H)$
biçiminde tanımlanır.

(5.3.2) Mattis Durumları

Şimdiki durumda sistem

$$P\{\sum_i^M\} = \prod_{\mu,i} P(\sum_i^{\mu}) \quad (5.17)$$

$$P(\sum_i^{\mu}) = \frac{1}{2} \delta(\sum_i^{\mu} - 1) + \frac{1}{2} \delta(\sum_i^{\mu} + 1)$$

ile sınırlanır. (5.14) ve (5.15) denklemleri \vec{m} cinsinden seriye açılırsa $\vec{m}=0$ için $f = -T \ln 2$ olacak biçimde

$$\left. \frac{\partial f}{\partial m^{\mu}} \right|_{m^{\mu}=0} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial m^{\mu} \partial m^{\nu}} = \frac{1}{2} \delta^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \langle \langle \sum_i^{\mu} \sum_j^{\nu} [1 - t h^2 (\beta \vec{m} \cdot \vec{\xi})] \rangle \rangle_{m^{\mu} m^{\nu}}$$

$$= \frac{1}{2} (\delta^{\mu\nu} - \beta^2) \langle \langle \sum_i^{\mu} \sum_j^{\nu} \rangle \rangle_{m^{\mu} m^{\nu}}$$

elde edilir. $\mu=\nu$ için $\delta^{\mu\nu}=1$ ve $\langle \langle \xi^{\mu} \xi^{\nu} \rangle \rangle = 1$ olduğu göz önüne alınarak

$$f = -T \ln 2 + \frac{1}{2} (1 - \beta^2) \vec{m}^2 + O(\vec{m}^4) \quad (5.18)$$

elde edilir. Denk.(5.15) için

$$f = \sum_i^M t h (\beta \vec{m} \cdot \vec{\xi}_i) \quad (5.19a)$$

$$\alpha = \beta \vec{m} \cdot \vec{\xi} \quad (5.19b)$$

tanımları yapılarak ve (5.19a), m^{μ} ye göre üç kez türettilerek seriye açılır. Yani,

$$\frac{\partial f}{\partial m^{\nu}} = \sum_i^M \beta (1 - t h^2 \alpha) \xi_i^{\nu}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial m^{\nu} \partial m^{\sigma}} = \sum_i^M \sum_j^{\nu} \sum_k^{\sigma} \beta^2 [-2 t h \alpha (1 - t h^2 \alpha) \dots]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial m^{\nu} \partial m^{\sigma} \partial m^{\lambda}} = \sum_i^M \sum_j^{\nu} \sum_k^{\sigma} \sum_l^{\lambda} \beta^3 [2(1 - t h^2 \alpha) + 4 t h^2 \alpha (1 - t h^2 \alpha) \dots]$$

$$f_{\mu} = f_{\mu}(0) + \sum_{\nu} \frac{\partial f_{\mu}}{\partial m^{\nu}} m^{\nu} + \frac{1}{2!} \sum_{\nu, \rho} \frac{\partial^2 f_{\mu}}{\partial m^{\nu} \partial m^{\rho}} m^{\nu} m^{\rho} + \frac{1}{3!} \sum_{\nu, \rho, \lambda} \frac{\partial^3 f_{\mu}}{\partial m^{\nu} \partial m^{\rho} \partial m^{\lambda}} m^{\nu} m^{\rho} m^{\lambda} + \dots$$

ya da

$$f_{\mu} = \sum_{\nu} m^{\nu} \beta \sum_{\nu} m^{\nu} - \frac{2}{6} \sum_{\nu} \sum_{\nu} m^{\nu} \beta^3$$

$$f_{\mu} = \sum_{\nu} m^{\nu} \beta \left(\vec{m} \cdot \frac{\vec{\nu}}{\nu} \right) - \frac{1}{3} \sum_{\nu} m^{\nu} \left(\vec{m} \cdot \frac{\vec{\nu}}{\nu} \right)^3 \beta^3$$

$$f_{\mu} = \beta m^{\mu} - \frac{1}{3} \left\langle \sum_{\nu} m^{\nu} \left(\vec{m} \cdot \frac{\vec{\nu}}{\nu} \right)^3 \right\rangle$$

(5.20)

bulunur. (5.20) denkleminde

$$A = \left\langle \sum_{\nu} m^{\nu} \left(\vec{m} \cdot \frac{\vec{\nu}}{\nu} \right)^3 \right\rangle$$

tanımı alınarak

$$A = \sum_{\nu, \rho, \lambda} m^{\nu} m^{\rho} m^{\lambda} \left\langle \sum_{\nu} m^{\nu} \sum_{\rho} m^{\rho} \sum_{\lambda} m^{\lambda} \right\rangle$$

yazılır.

$$\langle A' \rangle = \left\langle \sum_{\nu} m^{\nu} \left(\vec{m} \cdot \frac{\vec{\nu}}{\nu} \right)^3 \right\rangle = A$$

$$A' = \sum_{\nu} m^{\nu} \left\{ \sum_{\nu} (m^{\nu})^3 \left(\frac{\nu^{\nu}}{\nu} \right)^3 + 3 \sum_{\substack{\nu, \rho \\ \nu \neq \rho}} (m^{\nu})^2 m^{\rho} \left(\frac{\nu^{\nu}}{\nu} \right)^2 \frac{\rho^{\rho}}{\rho} \right\}$$

$$\langle A' \rangle = (m^{\mu})^3 + 3 \left(\sum_{\nu \neq \mu} (m^{\nu})^2 \right) m^{\mu} + 3(m^{\mu})^2 - 3(m^{\mu})^2$$

$$A = -2(m^{\mu})^3 + 3 \left(\sum_{\nu} (m^{\nu})^2 \right) m^{\mu}$$

$$A = -2(m^{\mu})^3 + 3 m^{\mu} (\vec{m} \cdot \vec{m})$$

Bu sonuç denk. (5.20) deki yerine taşınarak

$$m^{\mu} = \beta m^{\mu} + \frac{2}{3} \beta^3 (m^{\mu})^3 - \beta^2 m^{\mu} \vec{m}^2 \quad (5.21)$$

elde edilir. Buradan $T > 1$ için çözüm yalnızca $\vec{m} = 0$, ($f = -T \ln 2$ ile) paramagnetik durumdur. Bu çözüm farklı sıfır m^{μ} 'li çözümlerin ortaya çıktığı $T_c = 1$ in altında kararsız hale gelir. \vec{m} nin n boyutu olsun. Yani T_c nin altında özel bir çözüm içindeki m nin farklı sıfır bileşenlerinin sayısı n dir. ($m^{\mu}, \mu = 1, 2, \dots, n$) bileşenleri pozitif, geriye kalanlar ise sıfırdır. $n=1$ li çözüm ($m^{\mu} = 0, \mu > 1$) tartışılırsa

$$f = \frac{1}{2} (m^1)^2 - \frac{1}{\beta} \ln [2 \cosh(\beta m^1)] \quad (5.22)$$

$$m^1 = \tanh(\beta m^1) \quad (5.23)$$

bulunur. $n=1$ li çözümler Mattis tipi çözümler olarak bilinirler. Verilen bir \vec{m} için i yerindeki spinin beklenen değeri daha önce de açıklandığı gibi

$$\langle S_i \rangle = \tanh(\beta \vec{m} \cdot \vec{S}_i) \quad (5.24)$$

ile verilir. $n=1$ li bir atraktör* için (yeniden elde edilebilir durum) $m^{\mu} = m \delta^{\mu 1}$ dir. Bu durumda (5.24) denklemini

$$\langle S_i \rangle = \sum_{\mu=1}^n \tanh \beta m^{\mu} \quad (5.25)$$

biçimine gelir. Bu durum termodinamik olarak bir ferromag-

*Herbir anda ağ, temsil edebileceği 2^N bitten birisine gider. Bu durumda, yeniden elde etmeyi, dinamik altında şekillenimin kararlılığıyla anlatmak olanaklıdır. Yani yeniden elde edilen (öğrenilmiş) şekillenim bir atraktördür.

netik duruma eşdeğerdir. Farklı μ 'ye ve farklı işaretli m 'ye karşılık gelen, bu biçiminin $2p$ tane eşdeğer durumu vardır (Mattis durumları).

Mattis durumları, serbest enerjinin $T=1$, $T=0$ da ve büyük bir olasılıkla bütün $T < 1$ de global minimumudur. $T=0$ da (5.22) ve (5.23) denklemleri

$$m(T=0) = (1, 0, 0, \dots, 0) \quad (5.26)$$

$$E(T=0) = -1/2 \quad (5.27)$$

biçimine gelirler. Bu durumu sağlamak için (5.23) de $\text{th}(\infty) \rightarrow 1$ olduğundan $m^2=1$ alınır. $-1/2$ nin $T=0$ da taban durumu enerjisi olduğunu göstermek için (5.14) ve (5.15) genel ortalama alan denklemlerine $T \rightarrow 0$ limitinde bakılır.

$$E = -\frac{1}{2} (\bar{m})^2 \quad (5.28)$$

$$\bar{m} = \left\langle \sum_{\xi} \text{sgn}(\vec{m} \cdot \vec{\xi}) \right\rangle \quad (5.29)$$

bulunur. Burada

$$\text{th}(\beta \vec{m} \cdot \vec{\xi}) \rightarrow \text{sgn}(\vec{m} \cdot \vec{\xi})$$

$$T \ln[2 \cosh(\beta \vec{m} \cdot \vec{\xi})] \rightarrow |\vec{m} \cdot \vec{\xi}|$$

(5.30)

limitleri kullanılmıştır. Bu limitlerin geçerliği şöylece gösterilebilir.

$$\lim_{T \rightarrow 0} \text{th}(\beta \vec{m} \cdot \vec{\xi}) \Rightarrow \lim_{T \rightarrow 0} \frac{e^{1/T(\vec{m} \cdot \vec{\xi})} - e^{-1/T(\vec{m} \cdot \vec{\xi})}}{e^{1/T(\vec{m} \cdot \vec{\xi})} + e^{-1/T(\vec{m} \cdot \vec{\xi})}}$$

ya da

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-2/T(\vec{m} \cdot \vec{\xi})}}{1 + e^{-2/T(\vec{m} \cdot \vec{\xi})}}$$

$$(\vec{m} \cdot \vec{\xi}) > 0 \quad \text{ise} \quad 1 - e^{-\infty} / 1 + e^{-\infty} \rightarrow 1$$

$$(\vec{m} \cdot \vec{\xi}) = 0 \quad \text{ise} \quad 1 - e^0 / 1 + e^0 \rightarrow 0$$

$$(\vec{m} \cdot \vec{\xi}) < 0 \quad \text{ise} \quad \frac{1 - e^{\infty}}{1 + e^{\infty}}$$

L' Hospital kuralından limit -1 olarak elde edilir. Bu sonuç $\text{sgn}(\vec{m} \cdot \vec{\xi})$ fonksiyonuna eşdeğerdir.

$$\lim_{T \rightarrow 0} T \ln [2 \text{Ch}(\beta \vec{m} \cdot \vec{\xi})] = \lim_{T \rightarrow 0} \ln \left[e^{\frac{1}{T}(\vec{m} \cdot \vec{\xi})} + e^{-\frac{1}{T}(\vec{m} \cdot \vec{\xi})} \right]^T$$

$$= \ln \left\{ e^{(\vec{m} \cdot \vec{\xi})} \left[1 + e^{-\frac{2}{T}(\vec{m} \cdot \vec{\xi})} \right]^T \right\}$$

$$\vec{m} \cdot \vec{\xi} > 0 \Rightarrow \vec{m} \cdot \vec{\xi} + \ln \left[1 + e^{-2/T \vec{m} \cdot \vec{\xi}} \right]^T = \vec{m} \cdot \vec{\xi}$$

$$\begin{aligned} \vec{m} \cdot \vec{\xi} < 0 &\Rightarrow \ln \left\{ e^{\vec{m} \cdot \vec{\xi}} \left[1 + e^{-2/T \vec{m} \cdot \vec{\xi}} \right]^T \right\} \\ &= \vec{m} \cdot \vec{\xi} + \ln \left[e^{-2\vec{m} \cdot \vec{\xi}} \right] = -\vec{m} \cdot \vec{\xi} \end{aligned}$$

Bu sonuç

$$\lim_{T \rightarrow 0} T \ln [2 \text{Ch}(\beta \vec{m} \cdot \vec{\xi})]^T \rightarrow |\vec{m} \cdot \vec{\xi}|$$

olmasına eşdeğerdir.

m^u üstten 1'le sınırlanmıştır. Yani

$$m^2 \leq 1 \quad (5.31)$$

dir. Burada eşitlik durumu yalnızca m nin bir tane bileşeni

için sağlanır. (5.31) sınırlaması (5.29) ve Schwartz eşitsizliği kullanılarak türetilebilir.

$$\begin{aligned} \vec{m}^2 &= \ll |\sum_{\xi} \vec{m}| \gg \leq \left[\ll (\sum_{\xi} \vec{m})^2 \gg \right]^{1/2} \\ &= \left[\sum_{\mu, \nu=1}^n m^{\mu} m^{\nu} \ll \sum_{\xi} \xi^{\mu} \xi^{\nu} \gg \right]^{1/2} = (\vec{m}^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Bu sonuç \vec{m}^2 nin $n > 1$ için 1'den küçük $n=1$ için ise 1'e eşit olduğunu gösterir. Her sönümlü bellek birbiriyle tamamen bağlantılı olduğuna göre belleğin yeniden elde edilmesi ve depolanması noktasında bu durumlar idealdir. Bununla birlikte Mattis durumları herne kadar sistemin termodinamiğine katkıda bulunan biricik durumlarsada, $n > 1$ li çözümler, serbest enerjinin minimumu olurlarsa dinamik için önemli olabilirler.

(5.3.3) Simetrik Çözümler

(5.15) denkleminin çözümlerinin özel basit bir sınıfı; n tane bileşenin farklı sıfır, $p-n$ tanesinin ise sıfır olduğu bir bileşeni içerir. Farklı sıfır bileşenlerin genlikleri birbirine eşittir. Yani,

$$\vec{m} = m_n (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0) \quad (5.32)$$

biçiminde bir bileşen söz konusudur. Verilen bir n için (5.32) denklemini sağlayan $\binom{p}{n} 2^n$ tane çözüm bulunur. Bu simetrik çözümler; $T < 1$ olduğu bütün sıcaklık bölgesi boyunca varolan biricik çözümler oldukları için önemlidirler. Bu durum (5.21) denkleminin heriki yanını m^{μ} ile bölünerek ilk n tane denklem için μ den bağımsız olan $2/3 (m^{\mu})^2 \approx T - 1 + m^2$ sonucu elde edilerek görülebilir. Bu durumda $(m^{\mu})^2$ ler arasındaki simetrinin bozulması (pertürbasyon), 1 den küçük olan bir kritik sıcaklığın altında oluşur. Daha sonraki kısımlarda da (kesim (5.5)) gösterileceği gibi gerçekte asimetric çözümlerin ortaya çıktığı sıcaklıkların hepsi $T \approx 0.57$ den daha düşüktür.

(5.32) simetrik durumları için ortalama alan denklemleri

$$f_n = \frac{n}{2} m_n^2 - \frac{1}{\beta} \ll \ln [2 \cosh(\beta m_n z_n)] \gg \quad (5.33)$$

$$m_n = (1/n) \ll z_n \tanh(\beta m_n z_n) \gg \quad (5.34)$$

biçimindedir. Burada $z_n^i = \sum_{\mu=1}^n \xi_i^\mu$ olarak tanımlanmıştır. (5.34) denklemini şöylece gerçeklenir.

$$\vec{m} \cdot \vec{z}_i = \sum_{\mu=1}^n m^\mu \xi_i^\mu = m_n \sum_{\mu=1}^n \xi_i^\mu = m_n z_n$$

$$\sum_{\mu=1}^n m^\mu = \sum_{\mu=1}^n \ll \xi_i^\mu \tanh(\beta \vec{m} \cdot \vec{z}_i) \gg$$

$$n m_n = \ll z_n \tanh(\beta m_n z_n) \gg$$

ya da

$$m_n = (1/n) \ll z_n \tanh(\beta m_n z_n) \gg$$

elde edilir.

z_n^i nin dağılımı (5.17) ye göre

$$p(z_n) = 2^{-n} \binom{n}{k} \quad (5.35)$$

ile verilir. Burada $k = (z_n + n)/2$ olarak tanımlanan nicelik; z_n^i ye katkıda bulunan pozitif ξ_i^μ lerin sayısıdır. (5.35) denklemini; tek boyutlu örgüdeki rasgele yürümenin katkısıdır. Bu çözümler; içinde yerel magnetizasyonun $h_i = m_n z_n^i$ moleküler alanıyla indüklendiği durumlara karşılık gelirler. Yani,

$$\langle S_i \rangle = \tanh(\beta m_n z_n^i) \quad (5.36)$$

dır. Bir başka deyişle $n > 1$ li simetrik çözümler; birkaç bel-
leğin eşit karışımları olan durumları temsil ederler. T_c ya-

kıvındaki çözümleri hesaplayabilmek için, (5.33) ve (5.34) denklemleri \vec{m} nin kuvvetleri cinsinden seriye açılır.

$$\bar{f}_n \equiv \beta f_n - \ln 2$$

$$f_n = \frac{n}{2} m_n^2 - \frac{1}{\beta} \ll \ln[2\text{Ch}(\beta m_n z_n)] \gg$$

$g = \ln[2\text{Ch}(\beta m_n z_n)]$ ve $\beta m_n z_n = \theta$ olarak alınıp, g fonksiyonu m_n ye göre dört kez türetilir.

$$g' = \beta z_n \text{th}(\beta m_n z_n) \Big|_{m_n=0} \rightarrow 0$$

$$g'' = \beta^2 z_n^2 (1 - \text{th}^2 \theta) \neq 0$$

$$g''' = \beta^3 z_n^2 [-2 \text{th} \theta (1 - \text{th}^2 \theta)] \rightarrow 0$$

$$g^{iv} = \beta^4 z_n^4 [-2(1 - \text{th}^2 \theta)^2 + 4 \text{th}^2 \theta (1 - \text{th}^2 \theta)] \neq 0$$

ve $z_n^2 = n$ olduğu anımsanarak, θ değeri açıkça yazılarak

$$\bar{f}_n = \frac{n\beta}{2} m_n^2 - \frac{\beta^2}{2} \ll z_n^2 \gg m_n^2 + \frac{2}{24} \beta^4 \ll z_n^4 \gg m_n^4$$

$$\approx \frac{n}{2} (\pi-1) \beta m_n^2 + \frac{1}{12} \ll z_n^4 \gg (\beta m_n)^4 \quad (5.37)$$

elde edilir. Şimdi $\theta = \beta m_n z_n$, $z_n g = (\tanh \theta) z_n$ tanımları, (5.34) denklemini işlemek için yapılır.

$$z_n g' = (1 - \text{th}^2 \theta) \beta z_n^2 \rightarrow \beta z_n^2$$

$$z_n g'' = -2 \text{th} \theta (1 - \text{th}^2 \theta) \beta^3 z_n^3 \rightarrow 0$$

$$z_n g^{iv} = -2(1 - \text{th}^2 \theta) \beta^3 z_n^4 + 4 \text{th}^2 \theta (1 - \text{th}^2 \theta) \beta^3 \rightarrow -2 \beta^3 z_n^4$$

Bulunur. Bu sonuçlar m_n nin seri açılımındaki yerlerine taşınırlarsa,

$$m_n = (1/n) \ll \beta m_n z_n^2 - \frac{2}{6} \beta^3 z_n^4 m_n^3 \gg$$

$$m_n = \beta m_n - \frac{1}{3n} \beta^3 m_n^3 \ll z_n^4 \gg \quad (5.38)$$

bulunur. $\langle z_n^4 \rangle = n(3n-2)$ özdeşliğini kullanarak (bakınız Ek E), (5.37) ve (5.38) denklemleri için

$$\bar{f}_n \approx - \frac{3nt^2}{4(3n-2)} \quad (5.39)$$

$$m_n^2 = 3t / (3n-2) \quad (5.40)$$

elde edilir. Burada $t=1-T$ dir. Bu durumda $T=1$; bütün simetrik çözümlerin ortaya çıkması için gereken kritik sıcaklık olur. Çünkü, bu durumda $\bar{f}_n=0$ ve $m_n=0$ dir. (5.39) denklemi; $T=1$ yakınında serbest enerjinin n ile monoton arttığını vurgular. En düşük serbest enerji düzeyi, $n=1$ olduğu yani $m_1^2 \approx 3t$ ve $\bar{f}_1 \approx -3t^2/4$ olan Mattis durumlarıdır. $T=0$ yakınındaki simetrik çözümlerin çalışılabilmesi için (5.28) ve (5.29) denklemleri

$$m_n(T=0) = \frac{1}{n} \ll |z_n| \gg \quad (5.41)$$

$$\bar{f}_n(T=0) = - \frac{1}{2} n m_n^2 \quad (5.42)$$

denklemlerini elde etmek için kullanılır. (5.35) kullanılarak çift n için

$$m_{2k} = \frac{1}{2^{2k}} \left[\frac{2k}{k} \right]$$

$$\bar{f}_{2k} = - \frac{2k}{2^{4k+1}} \left[\frac{2k}{k} \right]^2, k=1,2,3,\dots \quad (5.43)$$

ve tek n için

$$m_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k}} \left[\begin{matrix} 2k \\ k \end{matrix} \right]$$

$$f_{2k+1} = - \frac{2k+1}{2^{4k+1}} \left[\begin{matrix} 2k \\ k \end{matrix} \right]^2, \quad k=0,1,2,\dots \quad (5.44)$$

bulunur. (5.43) ve (5.44) denklemleri (5.41) in $\langle\langle |z_n| \rangle\rangle = |z_n| P(|z_n|)$ tanımı altında aldığı biçime göre $n=2k$ ya da $n=2k+1$ konularak elde edilirler. Bu f_n dizisi ((5.43) ve (5.44) deki) alttan $f_1 = -0.5$ taban durumu enerjisi ve üstten ise $f_2 = -0.25$ ile sınırlıdır. Bunu görmek için

$$n=1 \text{ (tek) } . k=0 \quad f_1 = - \frac{0+1}{2^{0+1}} \left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right]^2 = -0.5$$

$$\text{ve } n=2 \text{ (çift) } , k=1 \quad f_{2,1} = f_2 = - \frac{2 \cdot 1}{2^{4 \cdot 1 + 1}} \left[\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right]^2 = -0.25$$

işlemlerini yapmak yeterli olacaktır. Ayrıca (5.43); k ile monoton azalırken, (5.44) monoton artar. Buna karşın her ikisi de $k \rightarrow \infty$ iken $-1/\pi$ gibi bir ortak limite sahiptir. (Ayrıntılar Ek F'de verilmiştir). Sonuçta saddle (eyer) noktası enerjilerini

$$f_1 < f_3 < f_5 \dots f_7 \dots < f_6 < f_4 < f_2 \quad (5.45)$$

biçiminde sıralamak olanaklıdır. Burada çift çözümler için $z_n = 0$ in sonlu bir olasılığı bulunduğu dikkat edilmelidir. Yani, spinlerin sonlu bir sayıdaki kesri bütün sıcaklıklarda düzensiz olarak kalacaktır. Tek ve çift çözümler arasındaki fark düşük sıcaklıklarda EA parametresiyle ortaya çıkar.

$$q_n = \langle\langle \langle S_i \rangle^2 \rangle\rangle = \langle\langle t h^2 (\beta m_n z_n) \rangle\rangle \quad (5.46)$$

Tek n durumunda $|z|$ nin minimum değeri 1 dir. Bu durumda

$$q_n \underset{T \rightarrow 0}{\approx} 1 - 2p(z_n=1) \exp(-2\beta m_n) \rightarrow 1 \quad (5.47)$$

ve n çift için

$$q_n(T=0) = 1 - p(z_n=0) \quad (5.48)$$

elde edilir.

(5.4) GENELLEŞTİRİLMİŞ HOPFIELD MODELİNDE DEĞİŞMİŞ (META) KARARLILIK

(5.4.1) Simetrik Çözümlerin Kararlılık Matrisi

Denk.(5.14) de f nin saddle (eyer) noktalarının yerel kararlılığı A matrisinin özdeğerleriyle saptanır.

$$A^{MV} = \frac{\partial^2 f}{\partial m^\mu \partial m^\nu} = \delta^{MV} - \beta (\delta^{MV} - Q^{MV}) \quad (5.49)$$

Burada

$$Q^{MV} = \left\langle \sum_\mu \sum_\nu t h^2 (\beta m^\mu \cdot \sum_\nu) \right\rangle \quad (5.50)$$

biçiminde tanımlanır. (5.49) denklemini açıkça göstermek gerekirse aşağıdaki adımlar atılır.

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} m^\sigma m^\sigma - \frac{1}{\beta} \left\langle \ln [2 \text{Ch}(\beta m^\nu \sum_\sigma)] \right\rangle \\ \frac{\partial f}{\partial m^\mu} &= m^\sigma \delta^{\sigma\mu} - \frac{1}{\beta} \left\langle \frac{\text{Sh}(\beta m^\nu \sum_\sigma)}{\text{Ch}(\beta m^\nu \sum_\sigma)} \delta^{\sigma\mu} \sum_\sigma \right\rangle \\ \frac{\partial^2 f}{\partial m^\mu \partial m^\nu} &= \delta^{MV} - \left\langle \sum_\mu [1 - t h^2 (\beta m^\nu \sum_\nu)] \beta \delta^{MV} \sum_\nu \right\rangle \end{aligned}$$

Bu sonuç ise (5.50) nin kullanılmasıyla (5.49) 'a özdeş olur. A nın simetrik çözümler durumundaki formu oldukça yalındır. A nın diyagonal elemanlarının tümü $A^{\mu\mu} = 1 - \beta(1-q)$ ile verilir. Burada $q = Q^{\mu\mu}$ (5.46) ile verilir. Diyagonalin dışında kalan elemanlar ($\mu, \nu \leq n, \mu \neq \nu$)

$$\beta Q = \beta \left\langle \sum_\mu \sum_\nu t h^2 (\beta m_\mu z_\nu) \right\rangle \quad (5.51)$$

ile verilir. Burada (5.32) ye uygun bir seçim yapılmıştır.

A matrisinin özdeğerleri üç grupta toplanabilir.

(i) Dejenere olmayan özdeğerler

$$\lambda_1 = 1 - \beta(1-q) + \beta(n-1)Q \quad (5.52)$$

Bunlar m_n genliğindeki boyuna dalgalanmalara karşılık gelirler.

(ii) p-n dejeneresine karşılık gelen özdeğerler

$$\lambda_2 = 1 - \beta(1-q) \quad (5.53)$$

Bu özdeğer daha çok sayıda belleğin birbirine karıştığı yönlerdeki dalgalanmalara karşılık gelir.

(iii) (n-1) dejeneresine karşılık gelen özdeğerler.

$$\lambda_3 = 1 - \beta(1-q) - \beta Q \quad (5.54)$$

Bütün $T < 1$ için $Q > 0$ olduğunda A nın en küçük değeri λ_3 tür (bakınız Ek G). Bu; çözümlerin kararlılığını saptayan özdeğer olup $n=1$ dışındaki bütün n ler için Q nun varolmadığı durumdur.

(5.4.2) T_c ve $T=0$ Yakınındaki Kararlılık

(5.46) ve (5.51) , $t=1-T$ nin kuvvetleri cinsinden seriye açılırsa $q_n \approx 3nt/(3n-2)$, $Q \approx 2q/n$ elde edilir. Bu sonucu kullanarak

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\approx -t + q + (n-1)Q \\ &= [1-t - 1 - (q - (n-1)Q)] / 1-t \end{aligned}$$

bulunur. Buradan , $1-t \approx 1$; $q \approx 3nt/(3n-2)$; $Q \approx 2q/n$ konularak

$$\lambda_1 \approx 2t > 0 \quad (5.55)$$

elde edilir. Benzer şekilde ,

$$\lambda_2 \approx \frac{2t}{3n-2} > 0 \quad (5.56)$$

$$\lambda_3 \approx -\frac{4t}{3n-2} < 0 \quad (5.57)$$

özdeğerleri elde edilir. $T=0$ yakınında tek n li simetrik çözümler küçük üstel sapmalarla doludurlar. Bu durumda $T \rightarrow 0$ için üstel olarak küçük düzeltmelere kadar $q=1$ ve $Q=0$, bütün özdeğerler 1 dir (bakınız denk.(5.47)).

$$\lambda_1 = 1 - \beta(1-q) + \beta(n-1)Q = 1, (q=1, Q=0)$$

Bu çözümlerin hepsi yerel olarak kararlıdır. Öte yandan çift n çözümleri için sistem tamamen dolu bir düzene direnir. Sonuçta $\lambda_1 \sim 1$ olmasına karşın λ_2 ve λ_3 ün her ikisi de $-\beta$ ile orantılı olur.

Bu sonuçlar şunu getirir: Çift n çözümleri bütün T ler için kararsızken, tek n çözümleri λ_3 ün sıfıra yaklaşan değeriyle birlikte $0 < T_n < 1$ arasındaki belirli bir sıcaklığın altında yerel olarak kararlı duruma gelirler. Yani

$$\begin{aligned} -T_n &= (q - Q) \\ &= \ll 1 - \frac{2}{3} \frac{1}{3}^2 (4\beta^2 m_n^2 z_n) \gg \\ \lambda_3 = 1 - \beta(1-q) - \beta Q = 0 &\Rightarrow -1 + q - Q \approx -1/\beta_n = T_n \end{aligned} \quad (5.58)$$

bu denklemin sayısal çözümlerinden $T_3=0.461$, $T_5=0.385$ ve $T_7=0.345$ elde edilir. Düşük T de, sonlu T düzeltmelerinin $T \ll m_n$ koşulu altında üstel olarak küçüleceği (5.47) den görülebilir. Yani

$$q_n \approx 1 - 2p \exp(-2\beta m_n); \beta m_n = 1/T m_n \gg 1, e^{-\infty} \rightarrow 1$$

dir. $n \rightarrow \infty$ iken, $m_n \sim 1/\sqrt{n}$ dir (Ek H). Böyle olunca büyük n ler için T_n nin $1/\sqrt{n}$ ile ölçeklenmesi beklenir. Bu durum ise $n < T^{-2}$ li tek n çözümlerinin kararlı olduğunu vurgular.

(5.4.3) Dinamik Kararlılık

Yukarıdaki incelemelerde , $T=1$ yakınında kararlı ortalama alan çözümlerini sağlayan durumların yalnızca Mattis durumları olduğu görüldü. $T < 0.461$ de , tek n simetrik çözümlerinden bazıları yerel (lokal) minimum olur. Oysa çift n ler bütün T lerde kararsız kalırlar. Yerel olarak kararlı çözümlerin sistemin dinamik gelişimi için önemi; bu durumların herbirinin faz uzayındaki atraksiyonunun havzasına ve onları birbirinden ya da taban düzeylerinden ayrı düşüren enerji engellerine bağlıdır. Serbest enerjideki daha yüksek durumların bu taban durumlarından daha küçük atraksiyon havzaları olduğu umulursa da , bu havzaları incelemek zordur. Bu nedenle engeller incelenir. Çünkü , bunları incelemek daha kolaydır. Bu durumlar; etrafındaki spin başına serbest enerjideki dalgalanmalar sonlu olduğu için onları birbirinden ayıran enerji engelleri N ile orantılıdır. Bu durumda , ortalama alan serbest enerjisinin bütün yerel minimumları gerçek değişmiş (meta) kararlı durumlardır. Böylesi bir durumun yaşam süresi $\exp(N\Delta f)$ ile orantılıdır. Burada Δf meta kararlı durumun spin başına serbest enerjisi ile , bu durumun üzerinde bulunan en düşük saddle (eyer) noktası arasındaki farktır. Örneğin $n=3$ durumu , $(1/2, 1/2, 1/2, 0, \dots, 0)$, $(1, 0, \dots, 0)$ li $n=1$ durumuna $n=2$ olduğu $(1/2, 1/2, 0, \dots, 0)$ saddle (eyer) noktasından geçerek gider. Ve spin başına $\Delta f = f_2(T=0) - f_3(T=0) = 0.175$ lik enerji engeli üretir (bakınız denk. (5.33) ve (5.34)).

(5.5) GENELLEŞTİRİLMİŞ HOPFIELD MODELİNİN ASİMETRİK ÇÖZÜMLERİ

\vec{m} nin $T=1$ deki farklı sıfır ($\neq 0$) çözümleri eşit genliklidirler. Bununla birlikte düşük sıcaklıklarda , asimetric olan saddle (eyer) noktaları ortaya çıkar. Özel bir eyer noktası belirli bir yönde kararlılığını değiştirdiğinde , genellikle aynı yönde varolan bir başka simetrik saddle noktasıyla kararlılığını değiş tokuş etmez. Bunun yerine bu varolan

iki saddle noktasının arasında yeni bir asimetric saddle noktası ortaya çıkar. Kararlılıkta böylesi bir değişimin olduğu en yüksek sıcaklık $n=2$ li simetrik çözümün yani

$$\vec{m} = (m, m, 0, 0, \dots, 0) \quad (5.59)$$

nın, daha çok sayıda belleğin karışımına karşı kararsız olduğu durumda oluşur. Bu kararlılığı denetleyen özdeğer kesim (5.4) den de görüleceği gibi

$$\lambda_2 = 1 - \beta(1 - q) \quad (5.60)$$

dır. Bu özdeğer, $T=1$ yakınında pozitif, $T=0$ da negatif olup, $T_2 \approx 0.575$ de işaret değiştirir (bakınız denk.(5.56)).

Öteki simetrik çözümler, bu sıcaklıkta herhangi bir yöndeki kararlılığı değiştirmezler. Bu durumda

$$\vec{m} = (m, m, \varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon, 0, 0, \dots, 0) \quad (5.61)$$

biçiminde verilen yeni bir saddle noktalar kümesi ortaya çıkar. Burada k tane ε genlikli bileşen, $p-k-2$ tane sıfır genlikli bileşen vardır. Bu yeni bileşenlerin genlikleri, yani ε , T sıcaklığı T_2 ye alttan yaklaşırken sürekli bir biçimde azalarak yok olurlar.

Daha düşük sıcaklıklarda, öteki saddle noktaları kararlılığı değiştirdiklerinde, asimetric çözümlerin ek kümeleri ortaya çıkar. Örneğin, T_{2k} sıcaklığında, $n=2k$ nın λ_2 sinin simetrik çözümünün negatif olduğu yerde (5.61) e benzer saddle noktalarının kümesi ortaya çıkar. Yani

$$\vec{m} = (m, m, \dots, m, \varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon, 0, 0, \dots, 0) \quad (5.62)$$

dır. (5.62) de ilk $2k$ tane bileşen m , sonraki l tane bileşen ε genlikli, geriye kalan $p-2k-1$ tane bileşen ise sıfır genliklidir. $T_4 \approx 0.465$ ve $T_6 \approx 0.408$ ve T_{2k} sıcaklıkları $k \rightarrow \infty$

olduğunda $1/\sqrt{k}$ olacak biçimde azalır. Öte yandan $T \rightarrow 0$ iken bu asimetric saddle noktaları simetrik noktalara karşılık giderler. Örneğin, T nin altında ortaya çıkan $(m, m, 0, 0, \dots, 0)$ küme büyük bir hızla $n=3$ lü simetrik duruma yani $(m, m, m, 0, \dots, 0)$ 'a yaklaşır. Öte yanda bunların birçoğu $T=0$ da bile, -0.375 simetrik değerli $n=3$ den daha yüksek enerjilerle birbirlerinden ayrık kalırlar. $n=5$ ve $n=6$ için iki örnek

$$\vec{m} = (1/2, 1/2, 1/4, 1/4, 1/4, 0, 0, \dots, 0), \quad (5.63)$$

$$E = -0.344$$

$$\vec{m} = (3/8, 3/8, 3/8, 3/8, 3/16, 0, 0, \dots, 0), \quad (5.64)$$

$$E = -0.334$$

olarak verilebilir. Bunlar (5.28) ve (5.29) denklemlerini sağlarlar. Uygulama olsun diye $n=5$ li durum için E enerjisi hesaplanırsa

$$E \Big|_{n=5} = -\frac{1}{2} \vec{m}^2 = -\frac{1}{2} \sum_j (m^j)^2$$

$$= -\frac{1}{2} [2(1/2)^2 + 3(1/4)^2] \approx -0.3438 \text{ bulunur.}$$

Çözümün simetrisi azaldıkça, sonlu bir T sıcaklığında çeşitli çözümlerin kararlılık analizi artan oranlarda zorlaşır. Genellikle bu çözümler ilk ortaya çıktıklarında kararsızdırlar. Daha düşük sıcaklıklarda bu çözümlerin bazıları, tek n 'li simetrik çözümlerde olduğu gibi metakararlılık gösterirler. Metakararlı asimetric çözümün bulunduğu en yüksek sıcaklık; $n=3$ simetrik çözüm durumlarının metakararlı duruma geldiği $T=0.461$ sıcaklığının hemen altında olacak biçimde $T \approx 0.452$ dir. $T=0$ da ise, keyfi bir çözümün kararlılık kriteri oldukça yalındır. Simetrik çözümler durumundaki nedenlere benzer olarak, buradaki çözümlerin de (asimetric çözümler); bu çözümlere ilişkin moleküler alan-

ların sonlu yani $\vec{\xi}$ 'nin bütün realizasyonları için

$$|\vec{m} \cdot \vec{\xi}| > 0 \quad (5.65)$$

koşulu gerçekleştiğinde kararlı çözümler oldukları görülmür. Bu durumda (5.51) ile verilen kararlılık matrisinin çapraz dışı elemanları $T \rightarrow 0$ için üstel olarak çok küçük değerlere giderken çapraz elemanları ise 1'e yaklaşır. Böylesi durumlar N'le orantılı olan enerji engelleriyle çevrilidirler. $\vec{m} \cdot \vec{\xi} = 0$ için sonlu bir olasılığın bulunduğu saddle (eyer) noktaları; $T=0$ da bile tamamen dolmayan durumları temsil ederler. Bu durumların $-\beta$ ile orantılı olacak biçimde bazı özdeğerleri bulunur. Bir örnek olması açısından, (5.63) durumu göz önüne alınırsa, bu durumun $T=0$ da metakararlı olduğu görülür. Çünkü, bu durumun moleküler alanı alttan $1/4$ ile sınırlıdır ve $T \approx 0.18$ de kararlı duruma gelir.

Sorulabilecek bir soru şu olabilir. Bir sistem, taklit durumlara (N mertebesindeki enerji engelleriyle birbirinden ayırılmamış, ama buna karşın düşük T sıcaklıklarında uzunca bir süre varolan durumlar) sahip olabilir mi? Yanıt: $N \rightarrow \infty$ ve sonlu p limitinde tek tek spin dalgalanmalarına karşı kararlılığını koruyan durumlar, (5.65) ortalama alan denklemlerini sağlayan çözümlere sahip gerçek metakararlı durumlardır. Bu süreç şöyle yürür. $\{S_i\}$ durumunun tek tek bütün spin dalgalanmalarına karşı kararlılığını koruyabilmesi için koşul; her bir S_i spininin kendi moleküler alanıyla düzene sokulmasıdır. Yani daha açıkçası

$$\begin{aligned} S_i &= \text{sgn} \left[\left(\frac{1}{N} \right) \sum_{i \neq j} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \mu_{\nu} \xi_{\nu} \right] \\ &= \text{sgn} \left[\vec{m} \cdot \vec{\xi}_i - \frac{p}{N} S_i \right] \end{aligned} \quad (5.66)$$

olmasıdır. Burada

$$\begin{aligned}\vec{m} &= (1/N) \sum_j \xi_j S_j \\ &= 1/N \sum_j \xi_j \operatorname{sgn} \left[\vec{m} \cdot \vec{\xi}_j - \frac{p}{N} S_j \right]\end{aligned}\quad (5.67)$$

ile verilir. $\vec{m} \cdot \vec{\xi}_j$ alttan sıfırdan farklı bir değerle sınırlandırıldığı sürece $(p/N)S_j$ terimi önemsenmeyebilir. Bu durumda (5.66) ve (5.67) denklemleri; $\langle S_i \rangle = \tanh(\beta \vec{m} \cdot \vec{\xi}_i)$ ve (5.15) ile verilen ortalama alan denklemlerinin duyarlı saddle (eyer) noktası denklemleri durumuna gelirler.

(5.6) LITTLE MODELİNİN TERMODİNAMIĞI

Little'nin tanıttığı senkronize dinamikli süreç, Peretto⁽²²⁾ tarafından sunulan

$$\bar{\mathcal{H}} = -\frac{1}{\beta} \sum_i \ln \left[2 \cosh \left[\beta \sum_j J_{ij} S_j \right] \right] \quad (5.68)$$

biçiminde etkin (efektif) Hamiltonyen'li durumların durağan Gibbs dağılımıyla verilir. $T=0$ limitinde (5.68) denklemi

$$\bar{\mathcal{H}} = -\sum_i \left| \sum_j J_{ij} S_j \right| \quad (5.69)$$

biçimine gelir. Bu limitin böyle olduğu (5.30) denklemindeki limite benzer bir tarzda gösterilebilir. (5.68) deki modelin termodinamik özellikleri Hopfield modelindeki aynı J_{ij} ve $\{\xi_i\}$ nin aynı dağılımıyla çalışılır. (5.68) Hamiltonyen'inin bölüşüm fonksiyonu

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} &= \mathcal{T}_S \exp(-\beta \bar{\mathcal{H}}) \\ &= \mathcal{T}_S \int \left[\prod_{\mu} d\mathbf{m}^{\mu} \right] \exp \left\{ \sum_i \ln \left[2 \cosh \left(\beta \sum_j \xi_j \mathbf{m}^j \right) \right] \right\} \delta \left[\vec{m} - \frac{1}{N} \sum_i \xi_i S_i \right] \\ &= \left[\frac{\beta N}{2\pi} \right]^p \int \left[\prod_{\mu} d\mathbf{m}^{\mu} d\mathbf{t}^{\mu} \right] \exp \left\{ -N\beta \vec{t} \cdot \vec{m} + \sum_i \ln \left[2 \cosh \left(\beta \sum_j \xi_j \mathbf{m}^j \right) \right] + \sum_i \ln \left[2 \cosh \left(\beta \sum_j \xi_j \mathbf{t}^j \right) \right] \right\}\end{aligned}\quad (5.70)$$

biçiminde verilir (bakınız Ek K). Serbest enerjinin kendi kendine (self) ortalama özelliği kullanılarak yani $(1/N)\sum_i$ toplamları $\{\xi_i\}$ lar üzerinden ortalamalarla yer değiştirilerek eyer noktası denklemlerinden \vec{m} ve \vec{t} elde edilir. Yani

$$f(\vec{t}, \vec{m}) = [-N\beta \vec{t} \cdot \vec{m}] + \sum_i \ln[2\cosh(\beta \xi_i \cdot \vec{m})] + \sum_i \ln[2\cosh(\beta \xi_i \cdot \vec{t})] \quad (5.71)$$

yazılır. Buradan f , \vec{m} ye göre türetilerek ve sifıra eşit kılınarak

$$\frac{\partial f}{\partial m^\mu} = -N\beta t^\sigma \delta^{\mu\sigma} + \sum_i \frac{2\beta \xi_i^\sigma \delta^{\mu\sigma} \text{sh}(\alpha)}{2\text{Ch}(\alpha)} \quad (5.72)$$

elde edilir. (5.72) denklemini elde edilirken $\alpha = \beta \xi_i^\sigma m^\sigma$, (5.71) in sağ yanındaki üçüncü terimin \vec{m} den bağımsız olduğu göz önünde tutularak türevi sıfır olarak alınmıştır. Ve yine (5.72) den $\mu = \sigma$ durumu ve kendi kendine ortalama dikkate alınarak

$$\vec{t} = \left\langle \sum_i \xi_i \text{th}(\beta \xi_i \cdot \vec{m}) \right\rangle \quad (5.73)$$

ve benzeri düşünceyle

$$\vec{m} = \left\langle \sum_i \xi_i \text{th}(\beta \xi_i \cdot \vec{t}) \right\rangle \quad (5.74)$$

olarak bulunur. Bu eyer noktasındaki serbest enerji yoğunluğu,

$$f(\beta) = \vec{t} \cdot \vec{m} - \frac{1}{\beta} \left\langle \ln[2\cosh(\beta \xi_i \cdot \vec{m})] \right\rangle - \frac{1}{\beta} \left\langle \ln[2\cosh(\beta \xi_i \cdot \vec{t})] \right\rangle \quad (5.75)$$

olarak elde edilir. Bu sonuç \vec{m} ve \vec{t} gibi iki order parametresi içeriyor gibi gözüksede, bütün ortalama alan çözümleri

$$\vec{T} = \vec{m} \quad (5.76)$$

denkleme uyarlar. Bunu tanıtlamak için (5.73) denklemini (5.74) den çıkarılır, yani

$$\vec{m} - \vec{T} = \left\langle \sum_{\xi} [\text{th}(\beta \vec{\xi} \cdot \vec{T}) - \text{th}(\beta \vec{\xi} \cdot \vec{m})] \right\rangle$$

yazılır. Buradan

$$\sum_{\mu} (m^{\mu} - T^{\mu})^2 = \left\langle \left(\sum_{\xi} \vec{m} - \sum_{\xi} \vec{T} \right) \left[\text{th}(\beta \vec{\xi} \cdot \vec{T}) - \text{th}(\beta \vec{\xi} \cdot \vec{m}) \right] \right\rangle \quad (5.77)$$

elde edilir. Bu denklemin sağ yanı pozitif olmadığına göre ancak sıfır olabilir. Bu sonuç $\xi \cdot (\vec{m} - \vec{T}) = 0$ ($\xi \neq 0$ için); $\vec{m} = \vec{T}$ koşulunu gerektirir. Bu koşul kullanılarak (5.75) ve (5.74) denklemleri

$$f(\beta) = \vec{m}^2 - \frac{2}{\beta} \left\langle \ln [2 \text{ch}(\beta \vec{\xi} \cdot \vec{m})] \right\rangle \quad (5.78)$$

$$\vec{m} = \left\langle \sum_{\xi} \text{th}(\beta \vec{\xi} \cdot \vec{m}) \right\rangle \quad (5.79)$$

biçimine getirilir. (5.78) ve (5.79) sonuçları Hopfield modeldeki sonuçlarla ((5.14) ve (5.15) denklemleri) karşılaştırılırsa bütün sıcaklıklarda Little serbest enerjisinin Hopfield serbest enerjisinin iki katı olduğu görülür. Yine her ikisi de \vec{m} için aynı ortalama alan denklemlerine sahiptirler. Bu durum da, ($T=1$ in altında Little modeli), genelleştirilmiş Hopfield modelinde elde edilen aynı taban durumlarına (Matris durumları) ve aynı eyer noktalarına sahiptir. Yine aşağıda, kararlılık analizinin göstereceği gibi, bu saddle (eyer) noktalarının metakararlılığı da her iki modelde aynıdır. (5.70) eyer noktalarının kararlılık analizinin yapılabilmesi için integrasyonun döndürülmüş konturlarına uygun değişkenler seçilir. Bu değişkenler

$$\delta t_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_\mu + iy_\mu), \quad \delta m_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_\mu - iy_\mu) \quad (5.80)$$

biçimindedirler. Buradaki δt_μ ve δm_μ lar, t_μ ve m_μ nün konturları boyunca kendi saddle noktası değerlerinden sapmalarını göstermektedir. Bu değişkenler cinsinden $2p \times 2p$ kararlılık matrisi aşağıda verilen iki tane $p \times p$ matrislerini içerir. Bunlar

$$(A_x)^{\mu\nu} = \frac{\delta^2 f}{\delta x_\mu \delta x_\nu} = \delta^{\mu\nu} (1-\beta) + \beta \langle \langle \sum_{\vec{z}} M_{\vec{z}}^\nu \pm h^2 (\beta \vec{z} \cdot \vec{m}) \rangle \rangle \quad (5.81)$$

$$(A_y)^{\mu\nu} = \frac{\delta^2 f}{\delta y_\mu \delta y_\nu} = \delta^{\mu\nu} (1+\beta) - \beta \langle \langle \sum_{\vec{z}} M_{\vec{z}}^\nu \pm h^2 (\beta \vec{z} \cdot \vec{m}) \rangle \rangle \quad (5.82)$$

olarak bulunurlar. (5.81) ve (5.82) denklemlerinin Hopfield modelindeki (5.49) la tanımlanan \underline{A} matrisiyle karşılaştırılmasından \underline{A}_x in \underline{A} ya özdeş ve \underline{A}_y nin ise $2I - \underline{A}$ olduğu görülür. \underline{A} matrisinin özdeğerleri üstten 1'le sınırlı olduğuna göre, \underline{A}_y pozitiftir ve saddle noktalarının kararlılığı Hopfield modeldeki aynı kararlılık matrisiyle saptanabilir. Bu durumda kesim (5.4) ve (5.5) deki analiz burada aynen uygulanabilir. Ve geçiş sıcaklığının altındaki bütün sıcaklıklarda bu iki modelin herikisinin de uzun zaman davranışının özdeş olduğu gösterilebilir.

(5.7) BELLEKLERİN GENEL DAĞILIMI

(5.7.1) $\{\xi_i^\mu\}$ nin Genel Dağılımı

Burada; her μ için $\xi_i^\mu \rightarrow -\xi_i^\mu$ dönüşümü altında değişmez kalan $P(\xi_i^\mu)$ nin genel bir dağılımı ve ξ_i^μ bileşenlerinin permütasyonu göz önüne alınır. Uygun olması için $\langle \langle (\xi_i^\mu)^2 \rangle \rangle = 1$ biçiminde normalize edilmiş bir varyans kullanılır. (5.14) ve (5.15) ortalama alan denklemleri herhangi bir keyfi dağılıma uygulanabilirler, $T=1$ de kırılmış bir simetriyle bir faz geçişini vurgularlar. Mattis çözümleri, (5.32) formunda bir

simetrik çözümler oldukları gibi , ayrıca $T < 1$ durumu için her zaman varolurlar. (5.15) denklemini derece derece bir pertürbasyonla $T=1$ yakınında seri açılırsa

$$P(\vec{\xi}) = \prod_{\mu} P(\xi_{\mu}) \quad (5.83)$$

biçimindeki bütün dağılımlar için asimetric çözümlerin $T=1$ yakınında varolmadığı görülebilir.

Burada ilk olarak Mattis durumlarının $T=1$ yakınında kararsız duruma geldikleri koşullar ve yine aynı Mattis durumlarının sıfır olduğu (5.83) le verilen bir dağılım göz önüne alınır.

$m^{\mu}=0$ ($\mu > 1$ için) olduğu bir Mattis durumu için ortalama alan denklemleri

$$m^1 \equiv m = \langle\langle \sum_{\mu}^1 \tanh(\beta m \xi^{\mu}) \rangle\rangle \quad (5.84)$$

biçimindedir. Kesim (5.4) deki kararlılık analizi genelleştirilerek genel dağılımlı simetrik çözümler için

$$\lambda_1 = 1 - \beta(1 - \bar{q}) + (n-1)\beta Q, \quad (5.85)$$

$$\lambda_2 = 1 - \beta(1 - q), \quad (5.86)$$

$$\lambda_3 = 1 - \beta(1 - \bar{q}) - \beta Q, \quad (5.87)$$

özdeğerleri elde edilir. Burada $q = \langle\langle \tanh^2(\beta z_n) \rangle\rangle$, $Q = \langle\langle \xi^1 \xi^2 \tanh^2(\beta z_n) \rangle\rangle$ ve $\bar{q} = \langle\langle (\xi^1)^2 \tanh^2(\beta z_n) \rangle\rangle$ dir. z_n değişkeni $\sum_{\mu=1}^n \xi^{\mu}$ biçimindedir. Mattis durumunda ($n=1$) ,yalnızca , $\lambda_1 = 1 - \beta(1 - \bar{q})$ ve $\lambda_2 = 1 - \beta(1 - q)$ varolur. Negatif λ_2 ; $p > 1$ olduğunda bir Mattis durumunun daha çok sayıda belleklerin karışımına karşı kararsız olduğunu vurgular. (5.83) denklemini $t=1-T_c$ nin kuvvetleri cinsinden seriye açılırsa $q \approx 3t / \langle\langle (\xi^{\mu})^4 \rangle\rangle$, $1 - \beta(1 - q) \approx t [-1 + 3 / \langle\langle (\xi^{\mu})^4 \rangle\rangle]$ sonuçları bulunur.

$$\langle\langle (\xi^{\mu})^4 \rangle\rangle > 3 \quad (5.88)$$

koşulu altında T_c yakınında Mattis durumlarının kararsızlığını vurgularlar.

Düşük sıcaklıklardaki kararlılık $p(\xi)$ nin orijin yakınlarındaki davranışına bağlıdır. $p(0) \neq 0$ oldukça $1 - \beta(1 - q)$ dır. Bu durum bu koşul altında Mattis durumlarının kararlı olduğunu gösterir. $P(0) \neq 0$ koşulu için

$$\begin{aligned} 1 - q &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi p(\xi) \operatorname{sech}^2(\beta m \xi) \\ &= \frac{T}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi p(T\xi/m) \operatorname{sech}^2 \xi \approx \frac{2TP(0)}{m} \end{aligned} \quad (5.89)$$

elde edilir. Burada

$$m = m(T=0) = \int d\xi p(\xi) |\xi| \quad (5.90)$$

biçiminde verilmiştir. Bu durumlar

$$2p(0) \gg \left| \int \xi \right| \gg \quad (5.91)$$

koşulu altında düşük sıcaklıklarda daha çok sayıdaki belleklerin karışımına karşı Mattis durumlarının kararsız olduğunu gösterirler. $\{\xi_i^H\}$ nin sürekli bir dağılımı kullanılarak artan sıcaklıkla birlikte yukarıdaki durumlara benzer sonuçlar elde edilir. Bu dağılım serbest enerji yüzeylerini yumuşatabilir ve metakararlı durumların zengin yapılarını ve düşük sıcaklıkta varolan ± 1 saddle noktalarını eleyebilir. Bu etki; ortalama alan denklemlerini

$$p(\xi_i^H) = \frac{1}{l}, \quad -\frac{l}{2} \leq \xi_i^H \leq \frac{l}{2} \quad (5.92)$$

biçiminde dikdörtgensel bir dağılım için çözerek gösterilebilir. $n \leq 3$ için simetrik çözümler aranırsa bütün T lerdeki kararlı simetrik çözümlerin yalnızca $n=1$ durumu için gerçekleştiği görülür. Daha da fazlası olarak $n=2$ ve $n=3$ çözümlerinin herhangi bir yöndeki kararlılığı değiştirmedikleri

(bütün $T < 1$ için) görülür. Bu son özellikler, daha düşük sıcaklıklardaki ek asimetric saddle noktalarının üretilmesini zorlayacak topolojik sınırlamaların olmadığını vurgularlar. Böyle olunca, bu durum ya da önceki sürekli dağılımlar için, bütün $T < 1$ ve bütün p ler için dinamik olarak kararlı olan durumların yalnızca Mattis durumları olduğu söylenebilir.

(5.7.2) Dönme Altında Değişmez Dağılımlar

Bellek modelleri söz konusu olduğunda, dönme değişmezliği

$$P(\vec{\xi}_i) = \prod_{\mu} P(\xi_i^{\mu})$$

$$P(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\xi^2/2) \quad (5.93)$$

biçiminde verilen bir Gaussiyen dağılımda ortaya çıkar. ξ_i^{μ} nin Gaussiyen bir dağılıma sahip olabilmesi için, ξ_i^{μ} lerden herbirinin çok sayıda bağımsız rasgele değişkenlerinin toplamı olmalıdır. Dönme altında değişmez dağılımlar nitel olarak; denk.(5.17) ile verilen dağılımdan çok farklı bir termodinamik davranışa sahiptirler. (5.14) ile verilen serbest enerji bu durumda yalnızca (5.15) ile tanımlanan $m^2 = (1/p) \sum_{\mu=1}^p (m_{\mu})^2$ genliğine bağlı olmasına karşın \vec{m} nin yönü keyfi olarak bırakılmıştır. Böylece, $N \rightarrow \infty$ limitinde taban düzeylerinin manifoldu tekdüze $0(p)^*$ modellerine benzer olarak sürekli bir dejenereye sahiptir.

Bir örnek olması açısından (5.93) ile verilen dağılımın incelenmesi için, \vec{m} nin yönü eksenlerden birisiyle çakışacak şekilde μ eksenlerinin döndürülmesi (5.14) ve (5.15) denklemlerini

* Rasgele $\vec{\xi}_i$ vektörlerinin uygun bir dağılımı ξ_i lerin $0(p)$ gibi keyfi dönmeleri altında değişmez kalır.

$$f = (p/2) m^2 - \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2} \ln[2\text{ch}(\beta m \sqrt{p} \xi)] \quad (5.94)$$

$$m = \frac{1}{\sqrt{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2} \xi \tanh(\beta m \sqrt{p} \xi) \quad (5.95)$$

biçimine getirir. (5.95) denklemini kısmi integrasyonla alınırsa

$$1 = \beta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2} \text{sech}^2(\beta m \sqrt{p} \xi) = \beta(1-q) \quad (5.96)$$

elde edilir. Bu durum m için kapalı bir denklemdir. Ve yine bu durumda yerel alinganlığın, $[\beta(1-q)]$, tıpkı SK modelde olduğu gibi T_c nin altında sabit olduğunu görmek ilginçtir. $T=0$ da $m = \sqrt{2/\pi p}$ ve $f(T=0) = -1/\pi$ dir. $\lambda_1 = 1 - \beta(1-q)$ özdeğeri genlik dalgalanmalarına karşılık gelir ve $T < 1$ için pozitifdir. Öte yandan (5.6) denklemine göre, düzenli bir fazda sıfır olan $1 - \beta(1-q)$ için $p-1$ tane dejenere mod vardır. Bu modlar enine dalgalanmalarına karşılık gelirler ve kullanışlı değildirler.

SONUÇ

Bu çalışmanın ana sonuçlarından birisi şudur: Little ve Hopfield'in modellerinin dinamiklerinin mekanizmaları farklı olmasına karşın, belleklerin yeniden elde edilmesini olanaklı kılacak uzun zaman davranışları heriki modelde de özdeştir.

Bu modellere ilişkin daha önceki sayısal çalışmalar taklit (sahte) durumların (orijinal şekillenimlerinden önemli ölçülerde sapma gösteren, ağıncı kararlı durumları) varlığına işaret etmiştir. Bu çalışmada ise oldukça geniş bir ağıncı limitinde ($N \rightarrow \infty$), bu taklit durumların hepsinin; birkaç tane şekillenimin iyi tanımlanmış karışımına karşılık geldiği gösterilmiştir.

Yine bu çalışmada, $0.46 < T < 1$ bölgesinde yalnızca tek bir belleğe karşı gelen durumların kararlı olmasına karşın değişmiş (meta) kararlı durumların yalnızca düşük sıcaklıklarda ortaya çıktığı gösterilmiştir. Bu sonuç termal gürültünün bu gibi sistemlerin verimini artırmada önemli bir rol oynadığını göstermiştir. Bu verim ayrıca, öğrenilmiş bilginin dağılımına da oldukça güçlü bir biçimde bağlıdır. Kesikli bir durumdan çok sürekli bir dağılım kullanmak, gömülü şekillenimlerin kararlılığını bu dağılımın ayrıntılarına bağlı olarak artırabilir ya da yokedebilir.

Son olarak bu model ağların depolama kapasitesi üzerine birşeylerden söz etmek uygun olacaktır. Bu çalışma boyunca sonlu sayıda p ile birlikte (depolanmış şekillenimler) N için sonsuz limiti alınmıştır. Bu limitte düşük düzeyli durumlar p deki artıştan etkilenmezler. Bununla birlikte bu limit oldukça tutarlı bir depolama kapasitesini temsil eder.

EK A

Order Parametresi

Bir faz geçişine giden sistemdeki düzenin derecesi order parametresi terimleri cinsinden nicel olarak anlatılabilir. Geçiş sıcaklığının üstündeki sıcaklıklarda order parametresi sıfırdır. Bu sıcaklığın altında sıfırdan farklı bir değeri vardır. Örneğin, ferromagnetik bir cisim için, uygulanan dış alanın yokluğunda, order parametresi birim hacimdeki magnetik momenttir. (magnetizasyon). Bu paramagnetik maddede bütün bağımsız momentler rasgele doğrultulara yönelindikleri için sıfırdır. Geçiş sıcaklığının altında, düzenin yeğlenmiş bir doğrultusu varolur ve sıcaklık T_c nin (geçiş sıcaklığı) çok çok altına düşürüldükçe daha çok sayıda moment düzenin yeğlenmiş doğrultusuyla sıraya girmeye başlar. Birinci derece faz geçişinde order parametresi süreksiz olarak değişir⁽¹⁰⁾.

EK B

$$I = \text{Tr} \exp \left[\left(\frac{\tilde{J}_0}{kT} \right) m \sum_{\alpha} S^{\alpha} + \left(\frac{\tilde{J}}{2kT} \right)^2 q \left(\sum_{\alpha} S^{\alpha} \right)^2 \right] \quad (\text{B.1})$$

olarak tanımlanır.

$$e^{\left(\frac{\tilde{J}}{2kT} \right)^2 q \left(\sum_{\alpha} S^{\alpha} \right)^2} = \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2 + \frac{\tilde{J}}{\sqrt{2kT}} q^{1/2} z \sum_{\alpha} S^{\alpha}} \quad (\text{B.2})$$

olduğuna göre

$$I = \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \ln \text{Tr}_{\{S_{\alpha}\}} \exp \left[\left(\frac{\tilde{J}_0}{kT} \right) m \sum_{\alpha} S^{\alpha} + \frac{\tilde{J}}{\sqrt{2kT}} q^{1/2} z \sum_{\alpha} S^{\alpha} \right] \quad (\text{B.3})$$

olarak elde edilir.

$$\text{Tr}_{\{S_{\alpha}\}} \exp \left[\left(\frac{\tilde{J}_0}{kT} m + \frac{\tilde{J}}{\sqrt{2kT}} q^{1/2} z \right) \sum_{\alpha} S^{\alpha} \right] = B \quad (\text{B.4a})$$

$$\frac{\tilde{J}_0}{kT} m + \frac{\tilde{J}}{\sqrt{2kT}} q^{1/2} z = K \quad (\text{B.4b})$$

$$B = \text{Tr}_{\{S_\alpha\}} \exp(K \sum_\alpha S^\alpha) = \left(\sum_{S_1=\pm 1} e^{KS_1} \right) \left(\sum_{S_2=\pm 1} e^{KS_2} \right) \dots \left(\sum_{S_n=\pm 1} e^{KS_n} \right) \quad (\text{B.4c})$$

sonuçları göz önüne alınarak

$$B = (2\text{Ch}K)^n = \left\{ 2\text{Ch} \left(\frac{\tilde{J}_0}{kT} m + \frac{\tilde{J}}{\sqrt{2kT}} q^{1/2} z \right) \right\}^n \quad (\text{B.5})$$

bulunur. (B.4) ve (B.5) birarada düşünülerek

$$I = \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2 + n \ln[2\text{Ch}K]} \quad (\text{B.6})$$

yazılabilir. $n \rightarrow 0$ limitinde $e^x \approx 1+x+\dots$ seri yaklaşımı kullanılarak

$$I = \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} (1 + n \ln 2\text{Ch}K) \quad (\text{B.7})$$

ya da

$$I = 1 + n \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \ln 2\text{Ch}K \quad (\text{B.8})$$

bulunur.

$$I^N = \left[1 + n \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \ln 2\text{Ch}K \right]^N \quad (\text{B.9})$$

ya da yaklaşıkça

$$I^N \approx \left[1 + Nn \int \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \ln[2\text{Ch}K] \right] \quad (\text{B.10})$$

elde edilir.

EK C

Denk.(3.51) deki tanımlar kullanılarak bir u parametresine bağlı olarak

$$P(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \text{th}(ax+b+u) \quad (\text{C.1})$$

fonksiyonu tanımlanır. Bu fonksiyonun Fourier dönüşümü ve ters Fourier dönüşümü

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(u) e^{iuv} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} = Q(v) \quad (\text{C.2a})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(v) e^{iuv} \frac{dv}{\sqrt{2\pi}} = P(u) \quad (\text{C.2b})$$

biçiminde yazılır. (C.1) ve (C.2a) birlikte kullanılarak Q(v) için

$$Q(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} du e^{-iuv} \text{th}(ax+b+u) \quad (\text{C.3})$$

elde edilir. (C.3) deki integrallerden sağda olanı $\alpha=ax+b$ dönüşümüyle

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ixu} \text{th}(\alpha+x) \quad (\text{C.4})$$

biçimine gelir. Yine (C.4) den $\text{th}(\alpha+x)$ için $k=-\alpha+i\pi/2$ nin bir singüler nokta olduğu görülür. Bu singüler nokta etrafında hesap yapılırsa f(z) fonksiyonu

$$f = i(z+\alpha - i\pi/2) + i(z+\alpha - i\pi/2)^3/3! + \dots \quad (\text{C.5})$$

biçiminde Taylor serisine açılabilir.

Bu singüler noktayı içine alan $x=-R, x=+R; y=i\pi$ fonksiyonlarının sınırladığı kapalı eğri üzerinden integral alınırsa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ixu} \operatorname{th}(\alpha+x) - \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ixu+\pi i} \operatorname{th}(\alpha+i) = 2\pi i \left\{ e^{i\alpha u + \frac{\pi}{2}u} \right\} \quad (C.6)$$

ya da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ixu} \operatorname{th}(\alpha+i) = 2\pi i e^{i\alpha u + \frac{\pi}{2}u} / 1 - e^{\pi u} \quad (C.7)$$

elde edilir. (C.7) sonucu (C.3) integralini hesaplamak için kullanırsa

$$Q(u) = - \frac{e^{ib u}}{2 \operatorname{Sh}(\frac{\pi}{2}u)} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2/2 + i\alpha x u} \quad (C.8)$$

bulunur. (C.8) deki karmaşık integralde $\sin(axv)$ terimini içeren ikinci integral $\exp(-x^2/2 \sin(axv))$ fonksiyonunun tek olması nedeniyle sıfırdır. Oysa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(px) dx = \sqrt{\pi} e^{-p^2/4}, \quad (p>0) \quad (C.9)$$

dur. Bu sonuç kullanılarak (C.9) için

$$Q(u) = - \frac{i e^{ib u}}{2 \operatorname{Sh}(\frac{\pi}{2}u)} e^{-\frac{a^2 u^2}{2}} \sqrt{2\pi} \quad (C.10)$$

elde edilir. (C.2b) den $u=0$ için

$$P(0) = - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\operatorname{Sh}(\frac{\pi}{2}u)} e^{ib u - \frac{a^2}{2} u^2} \quad (C.11)$$

elde edilir. $av=x$ dönüşümüyle

$$m \neq P(0) = - \frac{i}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{Sh}(\pi x/2a)} e^{-x^2/2 + i \frac{b}{a} x} \quad (C.12)$$

$$1-q = \frac{\partial P(0)}{\partial b} = \frac{i}{2a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{Sh}(\frac{\pi x}{2a})} e^{-x^2/2 + i \frac{b}{a} x} \quad (C.13)$$

sonuçları elde edilir.

$x \rightarrow 0$ için $x/\text{sh}(\pi x/2a)$ fonksiyonu $2a/\pi x$ biçiminde seriye açılabilir. Bu sonuç kullanılarak

$$1-q \approx \frac{1}{\pi a} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2/2 + i \frac{b}{a} x} = \sqrt{\frac{2}{\pi a}} e^{-b^2/2a^2} \quad (\text{C.14})$$

bulunur. a ve b için (3.51) deki tanımlar (C.14) de yerine konulurlarsa

$$1-q \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{kT}{J} e^{-\frac{J_0^2}{J^2} m^2} \quad (\text{C.15})$$

sonucuna ulaşılır. Buradan $T \rightarrow 0$ için $q=1$ olduğu görülür. Öte yandan yine $x=0$ yakınında $\text{sh}(\pi x/2a) = \pi x/2a$ sonucu kullanılarak

$$\lim_{T \rightarrow 0} m = -i/2a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(\pi x/2a)} e^{-x^2/2 + i \frac{b}{a} x}$$

ya da

$$\lim_{T \rightarrow 0} m = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x} e^{-x^2/2 + i \frac{b}{a} x} \quad (\text{C.16})$$

ve integral alınırsa

$$\lim_{T \rightarrow 0} m = 1 \quad (\text{C.17})$$

sonucu bulunur.

EK D

Önce, $2^N \times 2^N$ lik simetrik T matrisinin ψ^u özvektörleri ve λ_u özdeğerleri çalışılır. Denk.(4.9), yeniden yazılırsa

$$T_{\alpha\beta} = \sum_{i=1} S_{i\alpha} S_{i\beta} v_i,$$

bulunur. Burada $S_{i\alpha} = \pm 1$ ve $v_i \geq 0$.

$$\sum_{\eta=1}^{2^N} T_{\alpha\eta} \psi_{\eta}^u = \lambda_u \psi_{\alpha}^u \quad (\text{D.1})$$

$$\sum_n \psi_n^u \psi_n^r = \delta_{ur} \quad (D.2)$$

denklemlerinin bir çözümü olarak $\psi^a = S_{an}$ alınır. Böylece

$$\sum_n \sum_i S_{is} S_{in} v_i S_{an} =$$

bulunur. Çünkü

$$\sum_n S_{in} S_{an} = \delta_{ai} 2^N$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} \psi_n^a &= 2^{-N/2} S_{an}, \quad a=1, \dots, N \\ \lambda_a &= 2^N v_a \end{aligned} \quad (D.3)$$

elde edilir. Bunlar, (D.1) ve (D.2) nin çözümleridir. Daha genel biçim ψ ları dejenere küme arasında döndürerek elde edilebilir.

$$\psi_n^a = 2^{-N/2} \sum_b R_{ab} S_{bn} \quad (D.4)$$

Buradaki toplam (b üzerinden), aynı $v_b = v_a$ alır, bunlar R ortogonal matrislidirler. 2^N tane λ 'lar ≥ 0 dır. Çünkü

$$\begin{aligned} \lambda_a &= \lambda_a \sum_\gamma \psi_\gamma^u \psi_\gamma^u = \sum_{\gamma, n} \psi_\gamma^u T_{\gamma n} \psi_n^u \\ &= \sum_{i=1}^N v_i \left(\sum_{\gamma=1}^{2^N} \psi_\gamma^u S_{i\gamma} \right) \left(\sum_{n=1}^{2^N} \psi_n^u S_{in} \right) \\ &= \sum_i v_i C_i^2 \geq 0 \end{aligned}$$

burada $C_i = \sum_n \psi_n^u S_{in}$ dır. T nin izi (trace)

$$\text{tr} T = \sum_\gamma T_{\gamma\gamma} = \sum_\gamma \sum_i S_{i\gamma} S_{i\gamma} v_i = 2^N \sum_i v_i$$

(D.3) ün N tane özdeğerinin toplamına eşittir. Kalan $2^N - N$ özfonksiyonları (χ^k) için $\lambda_k = 0$ dır.

χ ; herbir α şekilleniminde eşit bileşenlere sahiptir.

$$\chi^1 = 2^{-N/2} \begin{Bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.5})$$

Oysa ötekilerin hepsi

$$\sum_{\alpha=1}^{2^N} \chi_{\alpha}^k = 0, \quad k=2, \dots, 2^N - N.$$

koşulunu sağlar. 2^N tane ψ , çarpım biçiminde yazılabilir.

$$2^{-N/2} \theta_1 \times \theta_2 \times \dots \times \theta_N,$$

$$\theta = AB, \quad A = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.6})$$

N tane ψ (denk.(D.3)) bir B_i ye sahip olacak biçimde karşılık gelir ve χ^1 , B_i ye karşılık gelmez.

Son olarak denk.(4,8) le verilen korunum kısıtlamalarının gevşetilmesinin sonucu incelenir.

$$\sum_{j=1}^N V_{ij} = 2V_i^T$$

(4.3) ; $b \sum_i S_{i\beta} \sum_j V_{ij}$ terimini ekleyerek, çıkararak

$$\begin{aligned} 2M_{\beta\alpha} &= \sum_i S_{i\beta} \sum_j V_{ij} (S_{j\alpha} + b) - b \sum_i S_{i\beta} \left(\sum_j V_{ij} \right) \\ &+ \sum_i S_{i\beta} \left[\left(\sum_j V_{ij} \right) - 2V_i^T \right] \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

biçiminde yeniden elde edilir. (D.7) nin sağ yanındaki ikinci ve üçüncü terimler sıfır olacak biçimde b değeri seçilir. $b = 1 - 2V_i^T / \sum_j V_{ij}$ nin değeri i den bağımsız olsun. Böylece

$$M_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} \sum_i S_{i\beta} \sum_{\tilde{j}} V_{i\tilde{j}} (S_{\tilde{j}\alpha} + b) \quad (D.8)$$

dır. Bu durum için Hebb öğrenme hipotezinin modifiye edilmiş biçimi varsayılır. Yani,

$$V_{i\tilde{j}} = v_i v_{\tilde{j}} \sum_{\eta, \nu} S_{i\eta} \sin(S_{\tilde{j}\nu} + b) C_{\eta\nu} \quad (D.9)$$

(D.9), (D.8) de yerine konularak

$$M_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\eta, \nu} C_{\eta\nu} \left[\sum_i v_i (S_{i\beta} S_{i\eta}) \right] \left[\sum_{\tilde{j}} v_{\tilde{j}} (S_{\tilde{j}\alpha} + b) (S_{\tilde{j}\nu} + b) \right] \quad (D.10)$$

elde edilir. i üzerinden toplamı gerektiren birinci çarpan; yukarıda ele alınan T matrisidir. İkinci çarpan ise bütün v_j ler için aynı alınır.

$$T'_{\alpha\nu} = \sum_{\tilde{j}} (S_{\tilde{j}\alpha} + b) (S_{\tilde{j}\nu} + b), \quad (D.11)$$

biçiminde bir nicelik tanımlanır. T' çok sayıda özdeğere, $(b^2 N + 1) 2^N$ sahiptir. $N-1$ tane özdeğer (2^N) , $2^N - N$ tane kalan özdeğer ise sıfırdır.

E K E

$$Z_n^2 = \sum_{\mu} \left(\sum_{\nu} \xi^{\mu\nu} \right)^2 + \sum_{\mu \neq \nu} \sum_{\xi} \xi^{\mu\nu} \xi^{\nu\mu} \quad (E.1)$$

biçiminde tanımlanır. Buradan (E.1) kullanılarak $\langle\langle Z_n^4 \rangle\rangle$;

$$\begin{aligned} \langle\langle Z_n^4 \rangle\rangle &= \langle\langle n^2 + 2n \sum_{\mu \neq \nu} \sum_{\xi} \xi^{\mu\nu} \xi^{\nu\mu} + \left(\sum_{\mu \neq \nu} \sum_{\xi} \xi^{\mu\nu} \xi^{\nu\mu} \right)^2 \rangle\rangle \\ &= n^2 + 2n \langle\langle \sum_{\mu \neq \nu} \sum_{\xi} \xi^{\mu\nu} \xi^{\nu\mu} \rangle\rangle + \langle\langle \sum_{\mu \neq \nu} \sum_{\xi} \xi^{\mu\nu} \xi^{\nu\mu} \sum_{\alpha \neq \beta} \sum_{\xi} \xi^{\alpha\beta} \xi^{\beta\alpha} \rangle\rangle \quad (E.2) \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. $\langle\langle \xi^{\mu} \xi^{\nu} \rangle\rangle = \delta^{\mu\nu}$ gerçeği göz önünde tutularak (E.2) denklemi

$$n^2 + 4 \ll \sum_{\mu > \lambda} \sum_{\nu} \sum_{\sigma > \lambda} \sum_{\rho} \gg \quad (\text{E.3})$$

biçimine kısaltılır.

$$\sum_{\sigma > \lambda} \sum_{\mu > \nu} \delta^{\mu\sigma} \delta^{\nu\lambda}$$

$$\sum_{\mu > \lambda} \delta^{\nu\lambda} = \sum_{\mu > \nu} (1) = 1+2+3+\dots+(n-1) = (n-1)n/2 \text{ olduğu}$$

anımsanarak (E.3) denklemi

$$n^2 + 4 \frac{(n-1)n}{2} = n(3n-2) \quad (\text{E.4})$$

biçiminde elde edilir. Bu; aranılan sonuçtur.

EK F

(5.41) denklemiyle verilen m_n nin $T=0$ daki değerini hesaplamak için aşağıdaki yol izlenir.

$$\ll |z| \gg = \ll z \left[1 + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\theta}{\theta} e^{i\theta z} \right] \gg \quad (\text{F.1})$$

$$= \frac{2^{-n}}{n} \int \frac{d\theta}{\theta} \left[-\frac{d\theta}{\theta} \right] \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i\theta(2k-n)} = -\frac{2^{-n}}{\pi} \int \frac{d\theta}{\theta} \frac{d}{d\theta} e^{-i\theta n} (1+e^{2i\theta})^n$$

$$= \frac{n}{\pi} \int \frac{d\theta}{\theta} \sin\theta \cos^{n-1}\theta = \frac{n}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \quad (\text{F.2})$$

biçimindedir. Burada n çift için $k=n/2$; n tek için $k=(n-1)/2$ dir (bakınız kaynak (23)). Buradan sonra denk.(5.43) ile verilen f_{2k} nin k ile monoton azaldığı ve denk.(5.44) ile verilen f_{2k+1} nin k ile monoton arttığı gösterilir. Bunun için

$$\left[\begin{matrix} 2k+2 \\ k+1 \end{matrix} \right] = \frac{2(2k+1)}{k+1} \left[\begin{matrix} 2k \\ k \end{matrix} \right] \quad (\text{F.3})$$

özdeşliği kullanılır. Buradan

$$f_{2k+3} - f_{2k+1} = \frac{2k+1}{2^{4k+1}} \binom{2k}{k} \left[1 - \frac{(2k+3)(2k+1)}{4(k+1)^2} \right] > 0, \quad (\text{F.4})$$

$$f_{2k+2} - f_{2k} = \frac{2k}{2^{4k+1}} \binom{2k}{k} \left[1 - \frac{(2k+1)^2}{4k(k+1)} \right] < 0 \quad (\text{F.5})$$

sonuçları yazılır. (5.43) ve (5.44) denklemleriyle verilen iki dizinin $k \rightarrow \infty$ limitinde ortak bir limite sahip olduklarını gösterebilmek için

$$n! \approx \sqrt{2\pi} (n+1)^{n+1/2} e^{-(n+1)} \quad (\text{F.6})$$

ile verilen Stirling formülü kullanılır. Buradan çift n li durumlar için m_n nin asimptotik biçimi

$$m_n = 2^{-n} \binom{n}{n/2} = \left(\frac{2}{n\pi} \right)^{1/2} \quad (\text{F.7})$$

elde edilir. m_n nin bu biçimi denk. (5.42) de yerine konulursa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} n m_n^2 = -\frac{1}{2} n \frac{2}{n\pi} = -\frac{1}{\pi} \quad (\text{F.8})$$

biçiminde elde edilir. Burada çift ve tek n için $k \rightarrow \infty$ limitinde $n \rightarrow \infty$ olacağı açıktır.

EK G

Burada; (5.32) ile verilen bütün saddle (eyer) noktaları için, bütün T lerde (5.49) ve (5.50) denklemleriyle verilen A kararlılık matrisinin diyagonal dışında kalan elemanlarının negatif olmadıkları gösterilecektir. Bunu yapmak için spesifik bir örnek olarak

$$B = \left\langle \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \tanh^2(x z_n) \right\rangle \right\rangle \quad (\text{G.1})$$

biçiminde tanımlanan bir niceliğin negatif olmadığı gösterilir. $x > 0$ alınır. ξ^{μ} ; ± 1 değerlerini aldığı ve z_n ise $P(z_n) = 2^{-n} \binom{n}{k}$, $k = (z_n + n)/2$ biçiminde dağıldığına göre

$$B = 2^{-(n-1)} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} [\tanh^2(2k-n+4)x - \tanh^2(2k-n+2)x] \quad (G.2)$$

biçiminde yazılabilir. $\tanh^2 y$; $y > 0$ için y nin artan bir fonksiyonu iken $y < 0$ için azalan fonksiyondur. Genel olarak, (G.2) nin sağ yanındaki terimlerden bazıları negatifken, bu terimler pozitif terimlerin çokluğu yüzünden gölgelenirler. Bunu görmek için aşağıdaki yollar izlenebilir.

(i) $k=n-2$ li terim kaldırılırsa (G.2) pozitif olur.

(ii) $k=(n-3)/2$ li tek n terimleri yok olur.

(iii) Toplamın geriye kalanı (bütün n ler için)

herbiri $[(n-2)/2]$ terim içeren

$$D_1 = \sum_{k=0}^{[(n-2)/2]-1} \binom{n-2}{k} \{ \tanh^2[(2k-n+4)x] - \tanh^2[(2k-n+2)x] \}$$

$$D_2 = \sum_{k=[(n-1)/2]}^{n-3} \binom{n-2}{k} \{ \tanh^2[(2k-n+4)x] - \tanh^2[(2k-n+2)x] \}$$

biçiminde iki terime ayrılır. İkinci toplamda k yerine $n-3-k$ konularak

$$\sum_{k=0}^{[(n-2)/2]-1} \binom{n-2}{k+1} \{ \tanh^2[(2k-n+2)x] - \tanh^2[(2k-n+4)x] \}$$

biçimi elde edilir. Buradan sonra

$$n-3 - [(n-2)/2] = [(n-2)/2] - 1$$

$$\binom{n-2}{n-3-k} = \binom{n-2}{k+1}$$

özdeşlikleri kullanılarak ve hiperbolik bir fonksiyonunun karesinin çift fonksiyon olduğu gerçeği göz önüne alınarak B niceliği

$$B = 2^{-(n-1)} \left\{ \sum_{k=0}^{[(n-2)/2]-1} \left[\binom{n-2}{k+1} - \binom{n-2}{k} \right] \{ \tanh^2[(2k-n+2)x] - \tanh^2[(2k-n+4)x] \} \right.$$

$$\left. - \tanh^2[(2k-n+4)x] \} + \{ \tanh^2(na) - \tanh^2[(n-2)x] \} \right\}$$

(G.3)

biçiminde yazılabilir. k nin değişim bölgesinde kıvrımlı

küçük parantezlerin herikisi de pozitif olduğu için (G.3) deki her terim pozitifdir. Bu durumda bütün x ler için $B \geq 0$ olur. Şimdi \underline{A} nın özdeğerlerinin üstten 1 ile sınırlı olduğunu gösterebilmek için Q nun değerinin daima pozitif olduğunun (G.3) de tanıtlandığı anımsanır. \underline{A} nın en büyük özdeğeri

$$\lambda_2 = 1 - \beta + \beta [q + (n-1)Q] \quad (G.4)$$

biçimindedir.

$$\langle\langle z_n^2 \tanh^2(m_n z_n) \rangle\rangle / n = q + (n-1)Q$$

olduğuna göre

$$q + (n-1)Q < \langle\langle z_n^2 \rangle\rangle / n = 1$$

bulunur. Buradan

$$\beta [q + (n-1)Q] < \beta$$

ve sonuç olarak

$$\lambda_i \quad (i=1, 2) \leq \lambda_3 \leq 1$$

olduğu bulunur.

EK H

(F.7) de m_n nin asimptotik biçimi için

$m_n = 2^{-n} \left[\frac{n}{2} \right] = (2/n\pi)^{1/2}$ elde edilmişti. Bu sonuç

$m_n \sim 1/\sqrt{n}$ olduğunu tanıtlar.
 $n \rightarrow \infty$

E K K

(5.70) denkleminin gerçekleşmesi için burada Dirac delta fonksiyonunun temel özellikleri kullanılacaktır.

$$\vec{m} = \frac{1}{N} \sum_j \vec{s}_j ; Z = \text{Tr} \{ e^{-\beta \bar{H}} \},$$

$$\bar{H} = -\frac{1}{\beta} \sum_i \ln [2 \cosh(\beta \vec{s}_i \cdot \vec{m})]$$

$$e^{-\beta \bar{H}} \Rightarrow \int \prod d\vec{m} \delta(\vec{m} - \frac{1}{N} \sum_i \vec{s}_i) e^{-\beta \bar{H}}$$

Dirac delta fonksiyonu

$$\delta(x-y) = \frac{1}{2\pi} \int dt e^{it(x-y)}$$

$$\Rightarrow \delta[\vec{m}-\vec{a}] = \frac{1}{(2\pi)^P} \int dt^P e^{i(\vec{m}-\vec{a}) \cdot \vec{t}}$$

sonucunu üretir.

$$t^M \rightarrow \beta N t^M \quad \text{dönüşümle}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^P} \int \prod_{M=1}^P dt^M e^{it^M \sum m^M - it^M \cdot a^M}$$

ya da

$$\delta(\vec{m} - \frac{1}{N} \sum_i \vec{s}_i) = \left(\frac{\beta N}{2\pi}\right)^P \int \prod_{M=1}^P dt^M e^{i\beta N \vec{t} \cdot \vec{m} - i \text{Tr} e^{\beta \vec{t} \cdot \sum_j \vec{s}_j}} \{S_j\}$$

elde edilir. Aranılan sonuç budur.

KAYNAKLAR

1. Anthony Smith, İnsan Beyni ve Yaşamı, Çev.Nejat Ebcioğlu, İstanbul, İnkilâp Kitabevi, 1986.
2. Bilim Dergisi, Gelişim Yayınları, Ankara, Sayı 12, 1985.
3. Ahmet Noyan, Fizyoloji, 2.B., Ankara, Meteksan Ltd. Şti., 1980.
4. R.Rammal, J.Souletie, Spin Glasses, Centre de Recherches Sur les Tres Basses Temperatures, C.N.R.S., (Labaratoire associe a l' U.S.M.G.), B.F 166X, 38042 Grenoble, France, 1981.
5. J.J.Hopfield, Proc.Natl.Acad.Sci.USA 79, 2554 (1982).
6. W.A.Little, G.L.Shaw, Behav.Biol. 14, 115 (1975).
7. S.Kirkpatrick, D.Sherrington, Phys. Rev.B 17, 4384 (1978).
8. Daniel J. Amit, Hanoach Gutfreund, H.Sompolinsky, Phys. Rev. A 32, 1007 (1985).
9. M.Ali Omar, Elemantary Solid State Physics, 1st.ed., Addison Wesley Pub. Company, 1975.
10. Sybil P.Parler (Editor in Chief), Mc Graw-Hill Encyclopedia of Physics, Mc Graw-Hill Book Company, 1982.
11. W. Marshall, Phys. Rev. 118 1519 (1960).
12. M.W. Klein, R.Brout, Phys.Rev. 132 2412 (1963).
13. V.Canella, J.A.Mydosh, Phys.Rev. B6 4220 (1972).
14. S.F.Edwards, P.W.Anderson, J.Phys. F5 965 (1975).
15. D.Sherrington, S.Kirkpatrick, Phys.Rev.Lett. 35, 1972 (1975).
16. D.O.Hebb, The Organization of Behavior, Wiley, New York, 1949.

17. Mc Culloch , W.S. , Pitts , W. (1943) Bull. Math. Biophys. , 5 , 115-133.
18. W.A. Little (1974) Math. Biosci. 19 , 101-120.
19. W.A. Little , G.L.Shaw (1978) , Math. Biosci , 39 , 281-289.
20. G.L.Shaw , K.J. Roney (1979) , Phys.Rev. Lett. , 74 , 146-156.
21. J.G. Eccles (1953) , The Neurophysiological Basis of Mind (Clarendon , Oxford) .
22. P.Peretto , Biol. Cybern , 50 , 51 (1984) .
23. I.S.Gradshteyn , I. M. Ryzhik , Tables of Integrals , Series and Products (Academic , New York , 1965) .

T. C.
Yükseköğretim Kurulu
Dokümantasyon Merkezi