T.C
CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BANACH CEBİRLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mustafa YILDIRIM

Haziran-1990

SİVAS

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne;

İşbu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan Yard. Doç. Dr. Yalçın Küçük

Üye Prof. Dr. Doğan Çoker ...... Doğan Çoker

Üye Yrd. Doç. Dr. Arif DANE

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

25/6/1990

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Prof.Dr. İbrahim GÜMÜŞSUYU

Bu çalışmayı yöneten ve çalışmam sırasında beni aydınlatan Yrd.Doç.Dr.Yalçın Küçük'e, çalışmam sırasında yardımlarını esirgemeyen Yrd.Doç.Dr. Mahide Küçük'e tezimin yazımında emeği geçen Tülay Yıldemir'e ve Matematik Bölümü elemanlarına en içten teşekkürlerimi sunarım.

M.Y

ÖZET

Beş bölümden oluşan bu çalışmada Spektral teori, Banach cebirleri ve Banach cebirlerinde sembolik hesaplamalar uzerinde çalışılmıştır.

Birinci bölümde, sonlu boyutlu H Hilbert uzayları üzerinde tanımlı bir T operatörünün spektral ayrışımı verilmiştir.

İkinci bölümde, Banach cebirleri tanımlanarak birkaç örnek verilmiştir. Banach cebirinin bir elemanını spektrumu ve spektral yarıçap tanımlanmıştır. Ayrıca, Banach cebirlerinin köklüleri tanımlanmış ve yarı-basit Banach cebirleri üzerinde durulmuştur.

Üçüncü bölümde, Gelfand dönüşümü tanımlanmış ve özellikleri üzerinde durulmuştur. Gelfand;Neumark teoremi kanıtlanmıştır.

Dördüncü bölümde, Banach-Stone teoremi kanıtlanmıştır. Değişmeli C^* cebirlerinin özellikleri üzerinde durulmuştur.

Son bölümün ilk kesiminde vektör degerli holomorfik fonksiyonların zayıf yakınsaklığı tanımlanmış, kompleks fonksiyonlar teorisinin iyi bilinen Cauchy, Liouville teoremleri verilmiş, ayrıca fonksiyonların Taylor ve Laurent serilerinin açılımları yapılmıştır.Katsayıları Banach cebirlerinde olan kuvvet serilerinin yakınsaklığı araştırılmıştır. İkinci kesimde, Banach cebiri içinde katsayıları kompleks olan kuvvet serilerinin yakınsaklığı araştırılmıştır. Son üç kesimde ise gerçel Banach cebirleri üzerinde m-spektrum $\mathbb{R}^2$ den gerçel Banach cebirleri üzerine tanımlanan fonksiyonların m-analitikliği tanımlanmış ve çalışılmıştır.

SUMMARY

In this work, vhich consists of five chapters, spectral Theory, Banach Algebra and sembolic calculus on Banach Algebra have been studied.

In the first chapter, the spectral resolution of a T operatör defined on finite dimensional Hilbert space has been given.

In the second chapter. Banach algebras have been defined and some examples have been given. Then the spectrum and spectral radius of one element of Banach Algebra have been defined. In addition, the radicals of Banach Algebras have been defined and semi-simple Banach Algebras have been considered.

In the third chapter, the Gelfand mapping has been defined and some properties discused. Also, Gelfand Neumark theorem has been proved.

In the fourth chapter, tne Banach-Stone theorem has been proved and related to the properties of comutative C*-Algebra.

In the first section of the last chapter, weak convercence of vector valued Holomorfic functions have been defined. The Cauchy, Liouville theorems have been proved for Banach Algebras The convergences of power series coefficients in Banaçh Algebras have been investigated.

In the second section, the convergence of power series with coefficients in complex Banach Algebras have been investigated.

In the last three section, the m-spectrum of an-element of a Real Banach Algebra has been defined. The m-Analiticity of functions from $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ to a real Banach Algebra has been defined and investigated.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR

ÖZET

SUMMARY

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

I.BÖLÜM/SONLU BOYUTLU SPEKTRAL TEORİ

1.1. Genel Bilgiler 1

1.2. Matrisler,Determinantlar ve Bir Operatörün Spektrumu 4

1.3. Spektral Teorem 12

II.BÖLÜM/BANACH CEBİRLERİ ÜZERİNE GENEL ÖN HAZIRLIKLAR

2.1. Tanım ve Bazı Özellikler 24

2.2. Tersinir ve Tersinir Olmayan Elemanlar 29

2.3. Sıfırın Topolojik Bölenleri 32

2.4. Spektrumlar 34

2.5. Spektral Yarıçap İçin Formül 41

2.6. Köklü ve Yarı-Basitlik 44

III.BÖLÜM/DEĞİŞMELİ BANACH CEBİRLERİNİN YAPISI

3.1. Gelfand Dönüşümü 50

3.2. $r(x)=\lim \|x^n\|^{1/n}$ Formülünün Uygulamaları 57

3.3. Banach Cebiri İçindeki İnvolutionlar 58

3.4. Gelfand-Neumark Teorem 61

IV.BÖLÜM/BAZI ÖZEL DEĞİŞMELİ BANACH CEBİRLERİ

4.1. C(X) deki İdealler ve Banach Stone Teoremi 64

4.2. Stone-Cech Tıkızlaması 69

4.3. Değişmeli C*-Cebirleri 71

V. BÖLÜM/ BANACH CEBİRLERİ ÜZERİNE SEMBOLİK HESAPLAMALAR

5.1. Vektör Değerli Holomorfik Fonksiyonlar, Zayıf Yakınsaklık 76

5.2. Banach Cebirlerinde Kuvvet Serileri 87

5.3. Bir Reel Banach Cebiri İçindeki Elemanların Bağlı Spektrumu 91

GİRİŞ

Hilbert uzayları içindeki operatörlerin spektral teorisi 1900-1930 yılları arasında Hilbert, Carleman ve Von Neumann tarafından geliştirilmiştir.

1941 yılında Gelfand ve öğrencileri tarafından Banach cebirleri tanımlanmış ve Banach cebirleri kullanılarak spektral teori genelleştirilmiştir. Son zamanlarda başlayan yerel kompakt grupların temsilleri teorisinde, Von Neumann cebirleri kullanılarak büyük ilerleme sağlanmıştır. Von Neumann, son makaleleriyle bu cebirlerin sınıflandırılmasına büyük katkıda bulunmuştur.

1972 yılında yapılan genel sınıflama teorisi, Tomido ve Connes'-in tanımlamış oldukları değişmezlere (invarians) dayandırılarak yapılmıştır.

Banach cebirleri üzerinde ki ilk çalışmalar 1950 yılında Lorch tarafından Oklahoma-Stilwoter colloquim da spektral teori sempozyumunda "Normed rings, the first decade" adlı makalede sunulmuştur.

Son çalışmalar, Banach cebirine ait elemanların spektrumlarının genelleştirilmesi, Banach cebirleri üzerinde tanımlı veya kompleks sayılar kümesi üzerinde tanımlı, değerlerini Banach cebiri üzerinde alan fonksiyonlarının sembolik hesaplamaları üzerinde yoğunlaşmıştır.

I.BÖLÜM

SONLU BOYUTLU SPEKTRAL TEORİ

1.1.GENEL BİLGİLER :

T bir H Hilbert uzayı üzerinde bir operatör olsun. T nin en basit hali, bir x vektörünü kendisinin sabit bir katına dönüştürmesi halidir. Bu durumda $\exists\lambda\epsilon\mathbb{K}$ için $Tx=\lambda x$ yazılır.

$$Tx = \lambda x \tag{1.1}$$

eşitliğini sağlayan bu $\lambda\epsilon\mathbb{K}$ sayısına T nin aygendeğeri, sıfırdan farklı x vetörüne de T nin aygenvektörü denir. T nin bir aygendeğerine karşılık bir ya da daha fazla aygenvektörü bulunabilir. Ancak bir vektörle ilgili bir tek aygendeğer vardır. $H=\{0\}$ durumu önemsiz olduğundan $H\neq\{0\}$ kabul edilecektir.

λ, T nin bir aygendeğeri olsun. "0" vektörü ve λ ya karşı gelen bütün vektörlerin kümesini M ile gösterelim. Böylece $M=\{x\epsilon H : T(x)=\lambda x\}=\{x\epsilon H : (T-\lambda I)(x)=0\}$ =Çek$(T-\lambda I)$ olur. $T_\lambda=T-\lambda I$, ve Çek$T_\lambda=N_{T_\lambda}$ ile gösterilirse $M=N_{T_\lambda}$ olur. $M=N_{T_\lambda}$, H nın kapalı bir altuzayıdır. Bu $M=N_{T_\lambda}$ uzayına T nin λ ya karşı gelen aygenuzayı denir. T nin M ye kısıtlaması M içindeki her vektörü kendisinin λ katına götürür. M altuzay olduğundan kendisine ait vektörlerin λ katını içerir. Dolayısıyla $T(M)\subseteq M$ olur. Yani M, T altında değişmez kalır.

X bir vektör uzayı $p:X\to X$, $PP=P^2=P$ koşulunu sağlayan bir lineer dönüşüm ise P ye bir izdüşüm denildiği biliniyor.

H bir Hilbert uzayı $P:H\to H$ bir izdüşüm dönüşümü ve $P^*=P$ oluyorsa P ye dik izdüşüm dönüşümü denir.

H nın $M_1, M_2, \ldots, M_m$ altuzayları verilsin. $i \neq j$ iken $M_i \perp M_j$ veya denk olarak $M_i \perp M_1 + M_2 + \ldots + \cancel{M_i} + \ldots + M_m$ oluyorsa bu altuzaylara <u>ikişer ikişer diktirler</u> denir.

Spektral Teorem diye bilinen teorem aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

H bir Hilbert uzayı ve T, H üzerinde tanımlı herhangi bir operatör olsun. T nin farklı aygendeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$; bunlara karşılık gelen aygenuzaylar $M_1, M_2, \ldots, M_m$ ve $P_1, P_2, \ldots, P_m$ ler de bu aygenuzaylar üzerindeki izdüşümler olsunlar. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

I) M_i ler ikişer ikişer diktirler ve H yı üretirler. Yani $H = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_m$ dir.

II) P_i ler ikişer ikişer diktirler, $I = \sum_{i=1}^{m} P_i$ ve $T = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i$ dir.

III) T normaldir.

I $\Longrightarrow$ II gerektirmesi şöyle görülebilir. M_i ler ikişer ikişer dik ve M_i, M_j H nın kapalı altuzayları olduklarından $P_i P_j = 0$ olur. Bu her $i \neq j$ için $P_i \perp P_j$ olması demektir. ([1], sh.275-276) M_i ler H yı ürettiklerinden $x \in H$ ise $x_i \in M_i$ olmak üzere

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$$

biçiminde tek bir yazıma sahiptir. Buna T uygulanırsa

$$\begin{aligned} T(x) &= T(x_1 + x_2 + \ldots + x_m) \\ &= T(x_1) + T(x_2) + \ldots + T(x_m) \\ &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m \end{aligned}$$

olur. Bu yazım T nin H üzerindeki hareketini geometrik açıdan açık ve mükemmel bir biçimde ortaya koyar. Şimdi bu sonucu M_i aygenuzayları üzerinde tanımlı olan P_i izdüşüm dönüşümleri cinsinden yazalım. $i \neq j$ için $P_i P_j = 0$ olduğundan $M_i \subseteq M_j^{\perp}$ ve $P_i x = x_i$ olur.

$\forall x \in H$ için

$$I(x) = x = x_1 + x_2 + \ldots, x_m$$
$$= P_1(x) + P_2(x) + \ldots + P_m(x)$$
$$= (P_1 + P_2 + \ldots + P_m)(x)$$

olduğundan $I = \sum_{i=1}^{m} P_i$ (1.2)

yazılır. $\forall x \in H$ için

$$Tx = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m$$
$$= \lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x) + \ldots + \lambda_m P_m(x)$$
$$= (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_m P_m(x)$$

olur. Buradan

$$T = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i \tag{1.3}$$

olarak yazılır. (1.3) yazımına T nin <u>spektral ayrışımı</u> denir.

II $\Longrightarrow$ III gerektirmesi şöyle görülebilir.

T spektral ayrışıma sahip olsun. T normal dönüşümdür. Yani T^*, T nin adjointi olmak üzere $T^*T = TT^*$ dır. Gerçekten;

$$T^* = \bar{\lambda}_1 P_1 + \bar{\lambda}_2 P_2 + \ldots + \bar{\lambda}_m P_m$$

olduğundan

$$TT^* = (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_m P_m)(\bar{\lambda}_1 P_1 + \bar{\lambda}_2 P_2 + \ldots + \bar{\lambda}_m P_m)$$
$$= |\lambda_1|^2 P_1 + |\lambda_2|^2 P_2 + \ldots + |\lambda_m|^2 P_m$$

dir. Benzer şekilde

$$T^*T = |\lambda_1|^2 P_1 + |\lambda_2|^2 P_2 + \ldots + |\lambda_m|^2 P_m$$

olup $T^*T = TT^*$ dır.

III $\Rightarrow$ I olduğu gösterilirse kanıt bitecektir. Ancak bunu kanıtlamak için geniş bir ön bilgiye gerek vardır. Bu ön bilgileri vermeye geçmeden şu soruya cevap arayalım: H üzerinde tanımlı her T operatörü bir aygendeğere sahip midir?. Bu sorunun cevabı olumsuzdur. Gerçekten $H=\ell_2$ üzerinde tanımlı $T[(x_1,x_2,\ldots)]=(0,x_1,x_2,\ldots)$ operatörünün hiç bir aygendeğeri yoktur. Çünkü $(T-\lambda I)(x)=Tx-\lambda Ix=Tx-\lambda x=(0,x_1,x_2,x_3,\ldots)-(-\lambda x_1,-\lambda x_2,-\lambda x_3,\ldots)=(-\lambda x_1,x_1-\lambda x_2,x_2-\lambda x_3,\ldots)=0$ dır. Buradan $-x_1=0$, $x_1-\lambda x_2=0,\ \ldots\ ,x_{n-1}-\lambda x_n=0,\ \ldots\ =0$ olur. bir aygendeğer olacağından $\lambda\neq 0$ dır. O halde $x_1=0$ olmak zorundadır. Bu ise $x_2=x_3=\ldots=x_n=\ldots=0$ oluşunu verir. $\theta=(0,0,\ldots)$ bir aygenvektör olmadığından T nin hiçbir aygendeğeri yoktur. Şimdi de şu soruyu cevaplayalım. Hangi şartlar altında H üzerindeki Bir T operatörü bir aygendeğere sahip olur. H bir kompleks Hilbert uzay ve sonlu boyutlu ise T operatörünün bir aygendeğere sahip olacağı ileride gösterilecektir. λ_i ler farklı aygendeğerler; P_i ler ikişer ikişer dik ve $I=\sum_{i=1}^{m}P_i$ olan sıfırdan farklı izdüşümler olmak üzere $T=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i P_i$ yazımına T nin spektral ayrışımı denilmişti. Teoremin III. şıkkı T normal operatörlerinin bir spektral ayrışıma sahip olduğunu söyler.

Şimdi (III)$\Longrightarrow$(I): kanıtlamak için gerekli ön bilgileri verelim.

1.2.MATRISLER, DETERMINANTLAR VE BIR OPERATÖRÜN SPEKTRUMU

Bu kesimdeki ilk amacımız H üzerindeki her operatörün bir aygendeğere sahip olduğunu kanıtlamaktır. Bunu elde etmede matris teoremlerinin bazılarını kullanacağız. Bu amaçla bu temel fikirlere kısaca değinip, bazı tanımlamalar yapacağız.

$B=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$, H içinde sıralanmış bir taban olsun. Böylece H içindeki her vektör e_i lerin bir lineer bileşimi olarak tek bir şekilde yazılır. Eğer T, H üzerinde bir operatör ise her e_j için

$$Te_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i \tag{1.4}$$

yazılır. Bu durumda sıralı B tabanına göre T den elde edilen n^2 tane α_{ij} skalerleri T nin

$$[T] = [T]_B = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \tag{1.5}$$

matrisini oluştururlar. $[T]$ kısaca $[T]= [\alpha_{ij}]$ formunda yazılabilir.

1.2.1. TEOREM : $A_n=\{[\alpha_{ij}]_{n\times n} : \alpha_{ij}\varepsilon K\ ,\ i,j= 1,2,\ldots,n\}$

$\beta(H)=\{T : T : H \to H$ lineer dönüşüm$\}$,

$B= \{e_1, e_2,\ldots,e_n\}$ $\qquad F : A_n \longmapsto \beta(H)$

$[\alpha_{ij}] \to F[[\alpha_{ij}]]$ dönüşümü

lineer izomorfizmadır.

1.2.2. TEOREM : $B= \{e_i\}$ H için bir taban, $T : H \to H$ bir operatör ve T nin B ye göre dönüşüm matrisi $[T]$ olsun. Bu durumda $\beta(H)$ H üzerindeki operatörler kümesinden nxn matrislerin A_n kümesi üzerine $T\to [T]$ biçiminde tanımlı dönüşüm bir izomorfizmadır.

Kanıt : ([9] ,Sh. 284)

T_1 ve T_2 H üzerinde iki operatör olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır;

$$[T_1] + [T_2] = [T_1 + T_2] \tag{1.6}$$

$$\alpha[T_1] = [\alpha T_1] \quad , \alpha \varepsilon \mathbb{K} \tag{1.7}$$

$$[T_1T_2] = [T_1][T_2] \tag{1.8}$$

$T\to [T]$ dönüşümünde "0" operatörünün görüntüsü sıfır matrisidir. Birim operatörünün görüntüsü ise

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , i\neq j \\ 1 & , i=j \end{cases} \tag{1.9}$$

olmak üzere $[\delta_{ij}]$ birim matrisidir.

A_n matrisler kümesi toplama, skalerle çarpım ve matris çarpımı işlemleriyle cebirsel bir sistem olarak düşünülürse A_n bir kompleks cebir olur. Buna <u>n. dereceden total matris cebiri</u> denir. A_n , H üzerindeki operatörler için bir gösterim sistemidir.

<u>1.2.3. TANIM</u> : $[\alpha_{ij}] \in A_n$ için

$$[\alpha_{ij}][\beta_{ij}] = [\beta_{ij}][\alpha_{ij}] = [\delta_{ij}]$$

eşitliğini sağlayan bir $[\beta_{ij}] \in A_n$ varsa $[\alpha_{ij}]$ ye <u>tekil olmayan matris</u> denir. Böyle bir matris varsa <u>tektir</u>. $[\beta_{ij}]$ ye $[\alpha_{ij}]$ nin <u>tersi</u> denir ve $[\alpha_{ij}]^{-1} = [\beta_{ij}]$ ile gösterilir.

<u>1.2.4. TEOREM</u> : B, H nın bir tabanı ve T, B ye göre matrisi $[\alpha_{ij}]$ olan bir operatör olsun. Bu durumda

(a) T tekil değil ancak ve ancak $[\alpha_{ij}]$ tekil değildir.

(b) $[\alpha_{ij}]^{-1} = [T^{-1}]$ dir.

<u>Kanıt</u> : ([9],sh. 285)

T, H üzerinde herhangi bir operatör olsun. B ye göre $[T]_B$ matrisi B nin seçimine bağlıdır. Şimdi şu soruları cevaplamaya çalışalım;

(a) B değiştiğinde $[T]_B$ nasıl değişir?.

(b) $B' = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ H nın başka bir tabanı ise $[T]_B$ ve $[T]_{B'}$ arasındaki ilişki nedir ?.

Öncelikle (b) nin cevabını verelim. B' nün öğelerini eski taban öğeleri cinsinden yazalım.

$$f_1 = \gamma_{11}e_1 + \gamma_{12}e_2 +\dots+ \gamma_{1n}e_n$$

$$f_2 = \gamma_{21}e_1 + \gamma_{22}e_2 +\dots+ \gamma_{2n}e_n$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$f_n = \gamma_{n1}e_1 + \gamma_{n2}e_2 +\dots+ \gamma_{nn}e_n$$

$$A = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{bmatrix}$$

dersek $A(e_i)=f_i$ dir.

A ya <u>B tabanından B' tabanına geçiş matrisi</u> denir. Buna göre $[\alpha_{ij}]$ ve $[\beta_{ij}]$, B ve B' ye göre T nin matrisi iseler (1.4) den

$$Te_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\, e_i \quad \text{ve} \quad Tf_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij}\, f_i \quad \text{olur.}$$

$Ae_j = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij}\, e_i$ dir. 1.2.4 teoremden $[\gamma_{ij}]$ tekil değildir. Şimdi Tf_j yi yeniden hesaplayalım.

$$Tf_j = \sum_{k=1}^{n} \beta_{kj}\, f_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_{kj}\, Ae_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_{kj}\, \Big(\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ik}\, e_i\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik}\, \beta_{kj}\Big) e_i \qquad \text{ve}$$

$$Tf_j = T\,A\,e_j = T\Big(\sum_{k=1}^{n} \gamma_{kj}\, e_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{kj}\, T(e_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \gamma_{kj}\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}\, e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\, \gamma_{kj}\Big) e_i$$

dir. Tf_j ler eşit olduğundan $\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik}\, \beta_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\, \gamma_{kj}$ olur. Buradan da

$[\gamma_{ij}][\beta_{ij}] = [\alpha_{ij}][\gamma_{ij}]$ ve $[\gamma_{ij}]$ tekil olmadığından

$$[\beta_{ij}] = [\gamma_{ij}]^{-1} \; [\alpha_{ij}] \; [\gamma_{ij}] \qquad (1.10)$$

elde edilir. Bu ise

$$[T]_{B'} = [A]_B^{-1} \; [T]_B \; [A]_B \qquad (1.11)$$

eşitliğini verir.

(1.10) eşitliğini sağlayan $[\alpha_{ij}]$ ve $[\beta_{ij}]$ matrislerine <u>benzer matrisler</u> denir. Matrislerin benzerliği bir denklik bağıntısıdır. Gerçekten, bu bağıntıyı $\cong$ ile göstererek ;

(i) $[\alpha_{ij}] \cong [\alpha_{ij}]$ olduğunu gösterelim. $[\delta_{ij}] = [\delta_{ij}]^{-1}$ olduğundan $[\alpha_{ij}] = [\delta_{ij}]^{-1}[\alpha_{ij}][\delta_{ij}]$ olur. $\cong$ bağıntısı yansımalıdır.

(ii) $[\alpha_{ij}] = [\beta_{ij}]$ olsun.

$$[\beta_{ij}] = [\gamma_{ij}]^{-1} \; [\alpha_{ij}][\gamma_{ij}] \qquad (1.12)$$

olan tekil olmayan bir $[\gamma_{ij}]$ matrisi vardır. Buradan (1.12) nin her iki yanını soldan $[\gamma_{ij}]$ matrisi ile çarparsak

$[\gamma_{ij}][\beta_{ij}] = [\alpha_{ij}][\gamma_{ij}]$ olur. Bu son eşitliğin her iki yanını sağdan $[\gamma_{ij}]^{-1}$ ile çarparsak $[\alpha_{ij}] = [\gamma_{ij}][\beta_{ij}][\gamma_{ij}]$ olur. Buradaki $[\gamma_{ij}]$ hipotezden tekil olmayan bir matris idi. Buradan da $[\beta_{ij}] \cong [\alpha_{ij}]$ olur.

(iii) $[\alpha_{ij}] \cong [\beta_{ij}]$ ve $[\beta_{ij}] \cong [\gamma_{ij}]$ ise $[\alpha_{ij}] \cong [\gamma_{ij}]$ midir ?. $[\beta_{ij}] = [a_{ij}]^{-1}[\alpha_{ij}] \; [a_{ij}]$ ve $[\gamma_{ij}] = [b_{ij}]^{-1} \; [\beta_{ij}][b_{ij}]$ olan $[a_{ij}]$ ve $[b_{ij}]$ gibi iki tekil olmayan matris vardır.

$$[\gamma_{ij}] = [b_{ij}]^{-1}[\beta_{ij}][b_{ij}] = [b_{ij}]^{-1}([a_{ij}]^{-1}[\alpha_{ij}][a_{ij}])[b_{ij}]$$

$$=([b_{ij}]^{-1} \; [a_{ij}]^{-1})[\alpha_{ij}] \; ([a_{ij}][b_{ij}])$$

$$=([a_{ij}] \; [b_{ij}])^{-1}[\alpha_{ij}] \; ([a_{ij}][b_{ij}])$$ dir.

Buradan $[\alpha_{ij}] \cong [\gamma_{ij}]$ olur. Böylece matrislerin denkliğinin bir denklik bağıntısı olduğunu göstermiş olduk.

Şimdi şu teoremi verelim;

1.2.5. TEOREM : A_n içindeki iki matrisin benzer olması için gerek ve yeterli koşul H nın farklı tabanlarına göre bu matrislerin aynı T operatörünün matrisleri olmasıdır.

H üzerinde verilen bir operatör farklı tabanlara göre birçok matris verebilir. 1.2.5 Teorem bu matrislerin birbirine nasıl bağlı olduğunu verir. Şimdi bir operatörün matrisinin basit bir formda yazılıp yazılamayacağı sorusu ortaya çıkar. Bu ise matrisler teorisinin Kanonik Form problemidir. Bu yöndeki en önemli teorem Spektral teoremdir. Bunu ileride matrislerle de ifade edeceğiz. Kanonik Form teoremlerini kanıtlarken genellikle matrisler kullanılmaz. Ancak matrisler bazı amaçlar için oldukça kullanışlıdırlar. Örneğin H üzerindeki bir operatörün aygendeğerlerinin bulunuşunda kullanılır.

Determinantlar lineer denklemlerin çözümünde sık sık kullanılsalar da bunların kuramsal alandaki kullanımları oldukça önemlidir. Matrislerin tersinir olup olmadıkları determinantlar kullanılarak kolayca belirlenebilir.

Şimdi determinantların bazı önemli özelliklerini verelim. $[\alpha_{ij}]$ nxn tipinde bir matris olsun. Bunun determinantı $\det([\alpha_{ij}])$ ile gösterilir. Determinant aşağıdaki özelliklere sahip skaler değerli bir fonksiyondur.

(1) $\det([\delta_{ij}]) = 1$

(2) $\det([\alpha_{ij}][\beta_{ij}]) = \det([\alpha_{ij}]) \det([\beta_{ij}])$

(3) $\det([\alpha_{ij}]) \neq 0 \iff [\alpha_{ij}]$ tersinirdir.

(4) $\det([\alpha_{ij}] - \lambda[\delta_{ij}])$ ifadesi n dereceden kompleks katsayı-

lı bir polinomdur.

Bir matrisin determinantı genellikle

$$\det([\alpha_{ij}]) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

şeklinde yazılır.

Şimdi H üzerinde bir T operatörü düşünelim. B ve B', H nın farklı iki tabanı olsun. T nin B ve B' ye göre dönüşüm matrislerinin tamamıyla farklı oldukları biliniyor. Ancak bunların determinantları aynıdır.

1.2.6. TEOREM : B ve B' , H nın farklı iki tabanı olsun. T nin bu tabanlara karşı gelen matrislerinin determinatları eşittir.

Kanıt : $[T]_B = [\alpha_{ij}]$ ve $[T]_{B'} = [\beta_{ij}]$ ise

$[\beta_{ij}] = [\alpha_{ij}]^{-1} [\alpha_{ij}] [\gamma_{ij}]$

olan tersinir bir $[\gamma_{ij}]$ matrisi var olduğu biliniyor. Buradan

$$\begin{aligned} \det([\beta_{ij}]) &= \det([\gamma_{ij}]^{-1} [\alpha_{ij}] [\gamma_{ij}]) \\ &= \det([\gamma_{ij}]^{-1}) \det([\alpha_{ij}]) \det([\alpha_{ij}]) \\ &= \det([\gamma_{ij}]^{-1}) \det([\gamma_{ij}]) \det([\alpha_{ij}]) \\ &= \det([\gamma_{ij}]^{-1} [\gamma_{ij}]) \det([\alpha_{ij}]) \\ &= \det([\delta_{ij}]) \det([\alpha_{ij}]) \\ &= \det([\alpha_{ij}]) \end{aligned}$$

olur.

O halde bir T dönüyümünün determinantı tekdir. Böylece determinant fonksiyonu $\beta(H)$ üzerinden $\mathbb{K}$ ya tanımlı bir skaler değerli bir fonksiyon gibi düşünülebilir. Sonuç olarak aşağıdaki özellikleri verebiliriz ;

(1') det (I) =1

(2') det (T_1T_2) = det (T_1) det (T_2)

(3') det (T) $\neq$ 0 $\Longleftrightarrow$ T tersinirdir.

(4') det (T - λI) ifadesi λ ya göre n. dereceden kompleks katsayılı bir polinomdur.

Şimdi aygendeğerlerin varlığı problemini determinantları kullanarak sonuçlandırmaya çalışalım.

1.2.7. TEOREM : T, H üzerinde bir operatör olsun. λ T nin bir aygendeğeri olması için gerekli ve yeterli koşul T- λI nın tekil olmasıdır. ($\Longleftrightarrow$ det (T- λI) =0 dır.)

Kanıt : ([9], sh. 289)

Teoreme göre T nin aygendeğerleri det (T-λI)=0 denkleminin farklı kökleridir. Bu denkleme T nin Karakteristik denklemi denir.

$[T]_B = [\alpha_{ij}]$ ise T nin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22}-\lambda & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

olur. Böylece T nin aygendeğerlerinin bulunması problemi det (T-λI)=0 denkleminin köklerinin bulunması problemine dönüsür. (4') özelliği bu denklemin kompleks λ değişkenli n. dereceden bir polinom olduğunu söyler. Cebirin esas teoremine göre bu denklemin n tane kökünün var olduğunu biliyoruz. Bu köklerin bazılarının çakışık olması doğaldır.

1.2.8. TEOREM : T, H üzerinde bir operatör ise T nin aygendeğerleri kümesi kompleks sayılar kümesinin bir alt kümesidir. Aygendeğerlerin sayısı H nın boyutunu geçemez.

1.2.9. TANIM : T nin aygendeğerleri kümesine onun Spektrum'u denir. Bu küme $\sigma(T)$ ile gösterilir.

$\mathbb{C}$ içinde sonlu kümeler kapalı ve sınırlı olacaklarından $\sigma(T)$ $\mathbb{C}$ nin kompakt bir alt kümesidir.

Şimdi skaler cismi kompleks sayılar olan H Hilbert uzayına neden ihtiyaç duyduğumuzu açıklığa kavuşturalım. Eğer H Hilbert uzayının skaler cismi $\mathbb{R}$ olsaydı, T dönüşümünün spektrumu boş olabilirdi. Örneğin ; $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, R^2 içindeki her vektörü 90^0 döndüren bir dönüşüm olsun. $v \in \mathbb{R}^2$ için $< Tv, v > =0$ dır. Bu dönüşümün bir aygendeğeri olsaydı $Tv = \lambda v$ olurdu. Buna göre de $<Tv, v> = <\lambda v,v> = \lambda<v,v> = \lambda \; ||v||^2 =0$ olurdu. Buradan $\lambda=0$ olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla T nin ne aygendeğeri ne de aygen - vektörü vardır.

Örnekten görülüyorki aygendeğerlerin varlığı, kompleks sayıların özelliklerine temelden bağlıdır. Bu özelliklerin en başta geleni ise cebirin esas teoremidir. Bu nedenle gerçel sayılar tercih edilmez. Matris ve determinantlar aygendeğerlerin varlığının kanıtında bir araç olarak kullanılırlar. Bu ise 1.2.8. teoremin kanıtının H nın sonlu boyutlu olduğunda geçerli olduğunu gösterir.

1.3. SPEKTRAL TEOREM :

Öncelikle bu bölümün ana amacı olan spektral teoremi tekrar ifade edelim.

T, H üzerinde tanımlanan keyfi bir operatör olsun. T nin farklı aygendeğerlerinin kümesinin, kompleks sayıların boş olmayan sonlu bir alt kümesi olduğunu biliyoruz. $\lambda_1, \lambda_2,...,\lambda_m$ T nin farklı aygendeğerleri; M_1, M_2,...,M_m bunlara karşı gelen aygenuzaylar ve P_1, P_2,..., P_m bu aygenuzaylar üzerindeki izdüşümler olsun. Buna göre spektral teorem aşağıdaki ifadelerin birbirine denkliği olarak ifade edilir.

1.3.1. SPEKTRAL TEOREM :

Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir;

I. M_i ler ikişer ikişer diktirler ve H yı üretirler.

II. P_i ler ikişer ikişer diktirler,

$$I = \sum_{i=1}^{m} P_i \quad \text{ve} \quad T = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i \quad \text{dir.}$$

III. T normaldir.

Kanıt : I ⟹ II ⟹ III olduğu 1.1 kesimde kanıtlandı. III ⟹ I olduğunu gösterirsek kanıt biter. Önce kanıtta kullanacağımız birkaç teoremi verelim.

1.3.2.TEOREM : T normal olsun. x in T nin λ aygendeğerine karşı gelen vektör olması için gerekli ve yeterli koşul x in T* ın $\bar{\lambda}$ aygendeğerine karşı gelen vektör olmasıdır.

Kanıt : T normal ve λ T nin bir aygendeğeri olsun.

$$\begin{aligned}(T-\lambda I)(T-\lambda I)^* &= (T-\lambda I)(T^*-\bar{\lambda} I) = TT^* - T\bar{\lambda}I - \lambda I T^* + \lambda\bar{\lambda} I \\ &= T^*T - \bar{\lambda} I T - T^*(\lambda I) + (\bar{\lambda} I)(\lambda I) \\ &= T^*(T-\lambda I) - \bar{\lambda} I (T-\lambda I) = (T^*-\bar{\lambda} I)(T-\lambda I) = (T-\lambda I)^*(T-\lambda I)\end{aligned}$$

dir. O halde $T-\lambda I$ normal olur. Bu durumda $\forall x \in H$ için

$\|(T-\lambda I)(x)\| = \|(T^*-\bar{\lambda} I)(x)\|$ dir. Buna göre

x, T nin λ aygendeğerine karşı gelen bir vektördür. ⟺ $Tx = \lambda x$ ⟺ $(T-\lambda I)(x) = 0$ ⟺ $\|(T-\lambda I)(x)\| = 0$ ⟺ $\|(T^*-\bar{\lambda} I)(x)\| = 0$ ⟺ $(T^*-\bar{\lambda} I)(x) = 0$ ⟺ $T^*x = \bar{\lambda} x$ ⟺ x, T* ın $\bar{\lambda}$ aygendeğerine karşı gelen aygenvektördür.

1.3.3.TEOREM: T normal ise M_i ler ikişer ikişer diktirler.

Kanıt: $i \neq j$ için $x_i \varepsilon M_i$ ve $x_j \varepsilon M_j$ olsun.

$$\lambda_i<x_i,x_j> = <\lambda_i x_i,x_j> = <Tx_i,x_j> \quad ,(T \text{ normal olduğundan}),$$

$$= <x_i, T^*x_j> = <x_i,\bar{\lambda}x_j> = \lambda_j <x_i,x_j>$$

Buradan $\lambda_i<x_i,x_j> = \lambda_j<x_i,x_j>$ dir. Dolayısıyla $(\lambda_i-\lambda_j)<x_i,x_j> = 0$ olur. $\lambda_i \neq \lambda_j$ olduğundan $<x_i,x_j> = 0$ dır. Bu vektörler M_i ve M_j içindeki herhangi vektörler olduklarından M_i ler ikişer ikişer diktirler.

1.3.4.TANIM: M, H nın altuzayı, $T(M) \subseteq M$ ve $T(M^{\perp}) \subseteq M^{\perp}$ ise M ye T yi indirger denir.

1.3.5.TEOREM: T Normal ise M_i ler T yi indirger.

Kanıt: M_i lerin T altında değişmez olduğu açıktır. M_i ler T* altında da invarianttırlar. $x_i \varepsilon M_i \Longrightarrow Tx_i = \lambda_i x_i \Longrightarrow T^*x_i = \bar{\lambda}x_i \Rightarrow \bar{\lambda}_i x_i \varepsilon M_i$ dir. M_i hem T hem de T* altında değişmez olduğundan M_i T yi indirger.

Şimdi de aşağıdaki üç teoremi kanıtsız olarak verelim;

1.3.6.TEOREM: P,H uzayının kapalı bir altvektör uzayı üzerinde bir izdüşüm olsun. M uzayının bir T dönüşümünü indirgemesi için gerekli ve yeterli koşul TP = PT olmasıdır.

1.3.7.TEOREM: Eğer P ve Q H uzayının M ve N kapalı altvektör uzayları üzerindeki izdüşümler iken,

$M \perp N$ olması için gerekli ve yeterli koşul PQ = 0 olmasıdır.($\Leftrightarrow$ QP = 0 dır.)

1.3.8.TEOREM: $P_1,P_2,\ldots,P_n$ H nın $M_1,M_2,\ldots,M_n$ kapalı lineer altuzayları üzerinde izdüşümler ise $P = P_1+P_2+\ldots+P_n$ nin bir izdüşüm olması için gerekli ve yeterli koşul P_i lerin ikişer ikişer dik ($i \neq j$ için

$P_iP_j = 0$) ve dolayısıyla P nin $M = M_1+M_2+\ldots+M_n$ üzerinde bir izdüşüm olmasıdır.

Kanıt : ([9] , sh. 273- 277)

1.3.9.TEOREM: T Normal ise M_i ler H yı oluşturur.

Kanıt: 1.3.3.Teorem ile M_i ler ikişer ikişer diktirler. 1.3.7. ve 1.3.8.Teoremler ile $M = M_1+M_2+\ldots+M_m$ H nın kapalı lineer altuzayıdır. M_i ler T yi indirgediğinden her P_i için $TP_i = P_iT$ olur. Böylece TP = PT sonucu elde edilir. Böylece T nin $M^{\perp}$ e kısıtlanmışı aygenvektörleri olmayan bir operatördür. Bu ise H üzerindeki bütün operatörlerin aygen değerlerinin olması gerektiği ile çelişir. Buradan $M^{\perp} = \{0\}$ olur. Buradan ise H = M olur ve M_i ler H yı gererler. Bu spektral teoremin kanıtını tamamlar.

Şimdi T Normal operatörünün ayrışımının tekliğini göstermek ve T nin spektral ayrışımının H sonsuz boyutlu durumuna genelleştirmesi düşüncesini verebilmek için aşağıdakileri verelim. T Normal ise

$$T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_m P_m \qquad (1.13)$$

ayrışımına sahiptir.

P_i ler ikişer ikişer dik olduklarındın (1.13) ün her iki yanının karesini alırsık

$$T^2 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 P_i \qquad (1.14)$$

ifadesini elde ederiz. Daha genel olarak herhangi bir pozitif n tamsayısı için

$$T^n = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^n P_i \qquad (1.15)$$

elde edilir.

$$T^0 = \sum_{i=1}^{m} P_i \qquad (1.16)$$

olduğundan (1.15) ifadesi n=0 için de doğrudur.

p(z) komleks değişkenli ve kompleks katsayılı herhangi bir polinom olsun. (1.15) şu şekilde genişletilebilir:

$$p(T)=\sum_{i=1}^{m} p(\lambda_i)\,P_i \tag{1.17}$$

çıkar. Gerçekten bir $p(z)=3z^2+iz+3$ polinomu için

$$p(T)=3T^2+iT+3I=3\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^2P_i+i\sum_{i=1}^{m}P_i+3\sum_{i=1}^{m}P_i$$

$$=\sum_{i=1}^{m}(3\lambda_i^2+i\lambda_i+3)P_i=\sum_{i=1}^{m}p(\lambda_i)\,P_i \quad \text{olacaktır.}$$

$$p_j(z)=\frac{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\ldots(z-\lambda_{j-1})(z-\lambda_{j+1})\ldots(z-\lambda_m)}{(\lambda_j-\lambda_1)(\lambda_j-\lambda_2)\ldots(\lambda_j-\lambda_{j-1})(\lambda_j-\lambda_{j+1})\ldots(\lambda_j-\lambda_m)} \tag{1.18}$$

polinomunu tanımlayalım. $\forall i,j=1,2,\ldots,m$ için

$$p_j(\lambda_i)=\begin{cases}0 & , \ i=j\\ 1 & , \ i=j\end{cases}=\delta_{ij} \tag{1.19}$$

ve her j için $p_j(T)=P_j$ olur. (1.19) açıktır. Özel olarak $i=1,2,3,4$ ve $j=2$ için $p_2(T)=P_2$ olduğunu görelim. $i\neq j$ için $P_iP_j=0$ idi. Buna göre

$$p_2(T)=\frac{(T-\lambda_1I)(T-\lambda_3I)(T-\lambda_4I)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)}, \qquad (A=(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4) \ \text{dersek})$$

$$=\frac{1}{A}\Big(\sum_{i=1}^{4}\lambda_iP_i-\lambda_1\sum_{i=1}^{4}P_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{4}\lambda_iP_i-\lambda_3\sum_{i=1}^{4}P_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{4}\lambda_iP_i-\lambda_4\sum_{i=1}^{4}P_i\Big)$$

$$=\frac{1}{A}\cdot\Big(\sum_{i=1}^{4}(\lambda_i-\lambda_1)P_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{4}(\lambda_i-\lambda_3)P_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{4}(\lambda_i-\lambda_4)P_i\Big)$$

$$=\frac{1}{A}\,[(\lambda_1-\lambda_1)P_1+(\lambda_2-\lambda_1)P_2+(\lambda_3-\lambda_1)P_3+(\lambda_4-\lambda_1)P_4]\,\cdot$$

$$[(\lambda_1-\lambda_3)P_1+(\lambda_2-\lambda_3)P_2+(\lambda_3-\lambda_3)P_3+(\lambda_4-\lambda_3)P_4]\,\cdot$$

$$[(\lambda_1-\lambda_4)P_1+(\lambda_2-\lambda_4)P_2+(\lambda_3-\lambda_4)P_3+(\lambda_4-\lambda_4)P_4]\,\cdot$$

$$= \frac{1}{A}\Big[(\lambda_1-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)P_1+(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)P_2 +$$

$$(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_4)P_3+(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_4)P_4\Big]$$

$$= \frac{1}{A}\ (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)P_2 = P_2$$

olur. Genel durumda $\forall j = 1,2,\ldots,m$ için

$$P_j\ (T) = P_j \tag{1.20}$$

olduğu aynı yolla görülür.

Kabul edelim ki, T nin bir başka spektral ayrışımı

$$T = \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 + \ldots + \alpha_k Q_k \tag{1.21}$$

olsun. Bu durumda α_i ler farklı kompleks sayılar Q_i ler sıfırdan farklı ikişer ikişer dik izdüşümler ve $I = \sum_{i=1}^{k} Q_i$ oluyor demektir. $T = \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 + \ldots + \alpha_k Q_k$ ile $T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_m P_m$ yazımlarının terimlerin sırası hariç özdeş olduklarını göstereceğiz. Önce α_i lerin tamamen T nin aygendeğerleri olduğunu kullanalım. $Q_i \neq 0$ olduğundan Q_i lerin görüntü kümesinde sıfırdan farklı bir x vektörü vardır ve $i \neq j$ için $Q_i x = x$ ve $Q_j x = 0$ olduğundan

$$Tx = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i Q_i(x) = \alpha_i x$$

olur. Bu α_i nin T nin bir aygendeğeri olduğunu gösterir. λ T nin aygendeğeri ise $Tx = \lambda x = \lambda I(x) = \lambda \sum_{i=1}^{k} Q_i(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda Q_i(x)$ olur. Diğer taraftan $Tx = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i Q_i(x)$ olduğundan $\sum_{i=1}^{k} (\lambda-\alpha_i)\, Q_i(x) = 0$ dır. Q_i ler ikişer ikişer dik olduklarından ($x \neq 0$ olan en az bir vektör vardır) bunlar arasında sıfırdan farklı vektörler lineer bağımsız olur. Buradan her i için $\lambda = \alpha_i$ olur. Bu ise λ_i lerin kümesinin α_i lerin kümesine eşit olduğunu verir. Buradan

$$T = \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \ldots + \lambda_m Q_m$$

şeklinde yazılabilir. Daha önce tanımlanan p_j polinomu T ye uygulanırsa $Q_j=p_j(T)$ ve dolayısılya $Q_j=P_j$ olduğu görülür. Bu da notosyon ve terimlerin sırası hariç (1.13) ve (1.21) gösterimlerinin eşit olduğunu verir. Bu da T nin spektral ayrışımının tekliği demektir.

T nin $M_1, M_2, \ldots, M_m$ aygenuzayları ikişer ikişer dik olsunlar ve H yı üretsinler. Her bir M_i uzayı içinden birim vektörlerden oluşan ikişer ikişer dik bir taban seçilebilir. M_i lerin bu tabanlarının birleşimi H için bir birim dikey taban olur. Buna bağlı olarak T nin gösterim matrisi aşağıdaki köşegen matris olur.

$\forall i$ için d_i M_i nin boyutu, $\lambda_i I_i$ $d_i x d_i$ lik köşegen matris yani

$$\lambda_i I_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}$$ olmak üzere

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_1 & & & \\ & \lambda_2 I_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m I_m \end{bmatrix} \qquad (1.22)$$

dir.

Tersine H nın bir tabanının T nin köşegen matrisini oluşturduğunu kabul edelim. Taban vektörleri yeniden düzenlenirse T nin matrisi yeni tabana göre (1.22) formuna girer. Bu durumda T nin spektral ayrışımı

$T = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i$ formundadır. Buradaki λ_i ler farklı kompleks sayılar, P_i ler ikişer ikişer dik izdüşümler ve $I= \sum_{i=1}^{m} P_i$ dir.

T nin λ_i aygendeğerlerinin farklı ve P_i lerin bunlara karşı gelen aygenuzayları üzerindeki izdüşüm dönüşümü olmaları spektral ayrışımın tekliğini garanti eder.

Spektral Teorem;

I, II ve III ifadelerinin birbirine denk olduğunu ifade eder. Yukarıdaki açıklamalar yeni bir denk koşulu ortaya çıkarır.

IV. H nın T nin köşegen matrisi olarak yazılabilen bir birim dikey tabanı vardır.

Şimdiye kadar yapılanlar ve yapılacak olanları şöyle özetleyebiliriz.

Spektral teorem bir çok kaynakta şu şekilde verilir:

N bir **normal** operatör olsun. λ_i ler farklı kompleks sayılar P_i ler ikişer ikişer dik ve $I = \sum_{i=1}^{m} P_i$ olan izdüşümler olmak üzere

$$N = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i \tag{1.23}$$

biçiminde yazılır. Kısaca N normal operatörünün spektral ayrışımı vardır. Bunun böyle veriliş nedeni (1.23) yazımının sonsuz boyutlu duruma genişletilebilir olmasıdır.

Biz spektral teoremi verirken konunun cebirsel ve geometrik yönüne eşit biçimde önem verdik. Sonsuz boyutlu durumda (1.23) yazımının genelleştirilmesi iki değişik yaklaşımla yapılır.

<u>Analitik Yaklaşım</u> : A bir self-adjoint ($A^*=A$) operatör olsun. A yı

$$A = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i$$

formunda yazalım. A nın self-ajoint seçilmesinin nedeni λ_i aygendeğerlerinin gerçel olması, dolayısıyla sıralanabilir olmasıdır. Bunların $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m$ biçiminde sıralandığını kabul edelim.

P_i izdüşümlerini kullanarak

$$E_{\lambda_o} = 0$$
$$E_{\lambda_1} = P_1$$
$$E_{\lambda_2} = P_1+P_2$$
$$\vdots$$
$$E_{\lambda_m} = P_1+P_2+\ldots+P_m$$

izdüşüm dönüşümlerini tanımlayalım. Buradan

$$P_1 = E_{\lambda_1} - E_{\lambda_o}$$
$$P_2 = E_{\lambda_2} - E_{\lambda_1}$$
$$\vdots$$
$$P_m = E_{\lambda_m} - E_{\lambda_{m-1}}$$

olur. $A=\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2+\ldots+\lambda_m P_m$

$$=\lambda_1(E_{\lambda_1}-E_{\lambda_o})+\lambda_2(E_{\lambda_2}-E_{\lambda_1})+\ldots+\lambda_m(E_{\lambda_m}-E_{\lambda_{m-1}})=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(E_{\lambda_i}-E_{\lambda_{i-1}}).$$

$\Delta E_i = E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}$ denirse $A=\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Delta E_i$ yazılır. Sonsuz boyutlu bir H Hilbert uzayı üzerinde tanımlı bir A self-ajoint operatörünün spektral ayrışımının

$$A = \int \lambda dE_\lambda$$

olduğu [Lorch, E.R; 1962] da kanıtlanmıştır. Bu sonuç N bir normal operatör olduğunda da doğrudur.

Cebirsel ve Topolojik Yaklaşım : N normal operatörünün $N=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i P_i$ yazımının herhangi bir p polinomu için

$$p(N) = \sum_{i=1}^{m} p(\lambda_i)P_i$$

biçiminde yazılabildiğini görmüştük. N nin bütün polinomları kümesi $\beta(H)$ nın bir alt cebirini oluştururlar. Bu cebir $p_j(N)= P_j$ yapan

$p_j(N)$ polinomlarınıda içerir. N nin bütün aygendeğerlerinin kümesini X ile gösterelim. Şimdi X üzerinde tanımlı bütün polinom fonksiyonlarının cebirini gözönüne alalım. Bu cebir $p_j(\lambda_i)=\delta_{ij}$ biçimindeki p_j polinomlarını ve X üzerinde tanımlı kompleks değişkenli sürekli bütün fonksiyonları içerir. Yani bu cebir C(X) dir. $p(N)=\sum_{i=1}^{m} p(\lambda_i)P_i$ yazımından p(N) yi C(X) içindeki p polinomlarına karşılık getiren

$$p(N) \to p \tag{1.24}$$

dönüşümü bütün cebirsel işlemleri korur. p(N) nin aygendeğerleri $p(\lambda_i)$ lerdir. N normal operatör olduğunda normu,aygendeğerlerinin en büyüğünün normuna eşit olacaktır. Bu $p(N) \to p$ dönüşümünün bir izometrik izomorfizma olduğunu gösterir. $\forall\lambda_i \in X$ için $N(\lambda_i)=\lambda_i$ dir. H sonsuz boyutlu olduğu durumda N nin spektrumunu veren C nin bir X kompakt Hausdorff altuzayı bulunur. Yukarıdakiler gerçekleştirilirse bu N nin spektral ayrışımının aynen genişleyebileceğini verir. Bundan sonraki üç bölümde bunu gerçekleştireceğiz.

Bölümü. sonlu boyutlu durumda şimdiye kadar yaptıklarımızı açıklayan bir örnekle kapayacağız.

ÖRNEK : $[T]=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir operatör olsun. T nin spektral ayrışımını bulalım. İlk olarak T nin aygendeğelerini bulalım.

$(T-\lambda I)(x)=0$ eşitliği sıfırdan farklı bir çözüme sahiptir. $\iff$ $\begin{bmatrix} 4-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$

katsayılar matrisinin determinantı sıfırdır. $\Longleftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-5)^2=0 \iff \lambda_1=-1 \;,\; \lambda_2=5$$

ikinci olarak $\lambda_1=1$, $\lambda_2=5$ aygendeğerlerine karşı gelen aygenuzayları bulalım. $\lambda_1=-1$ için

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =0$$

sisteminin çözüm kümesi $M_{\lambda_1}=M_{-1}$ dir. Yani

$$\begin{cases} x_1 + 0.x_2 + x_3 = 0 \\ 0.x_1 + x_2+2x_3 =0 \end{cases}$$

sisteminin çözüm uzayı M_{-1} dir. Bu sistemin çözüm uzayı R^3 içinde bir doğrudur. Bu uzayın bir tabanı, $x_3=1$ alınırsa $x_1=-1$, $x_2=-2$ bulunduğundan $(-1,-2,1)$ dir. Yani $M_{-1} = \langle(-1,-2,1)\rangle$ yazılabilir.

Benzer düşünce ile $\lambda_2=5$ için

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =0$$

sisteminin çözüm uzayı $M_{\lambda_2}=M_5$ dir.

$$x_1+2x_2-x_3=0$$

sisteminin çözüm kümesi bir düzlemdir. Bu uzayın bir tabanı $x_1+2x_2-x_3=0$ da sırasıyla $(x_2=0,\ x_3=1)$ ve $(x_2=1,\ x_3=0)$ yazılırak $(1,0,1),(-2,1,0)$ $\{(1,0,1),(-2,1,0)\}$ bulunur. Böylece $M_5= \langle(1,0,1),(-2,1,0)\rangle$ olur. $(-1,-2,1)$ vektörü , $(1,0,1)$ ve $(-2,1,0)$ vektörlerine dik olduğundan M_{-1}, M_5 aygenuzayları diktirler ve $\mathbb{R}^3= M_{-1} \oplus M_5$ dir.

P_{-1} ve P_5 sırasıyla M_{-1} ve M_5 üzerinde $\mathbb{R}^3$ ün dik izdüşümleri ise $x \in \mathbb{R}^3$, $x_1 \in M_{-1}$, $x_2 \in M_5$ olmak üzere $x=x_1+x_2$ yazılır. Buradan $x= x_1+x_2= P_{-1}(x) +P_5(x)$ olur.

$$
\begin{aligned}
T(x) &= T(x_1)+T(x_2) \\
&= -1x_1+5x_2 \\
&= -1P_{-1}(x)+5P_5(x) \\
&= (-1P_{-1}+5P_5)(x)
\end{aligned}
$$

Böylece T nin spektral ayrışımı

$$T = -1P_{-1}+5P_5$$

olarak bulunur.

$B= \{f_1=(-1,-2,1),\ f_2= (1,0,1)\ ,\ f_3=(-2,1,0)\}$, $\mathbb{R}^3$ ün bir dikey tabanı olur. $\mathbb{R}^3$ ün bu tabana göre T nin matris gösterimi köşegen matris olur. Şimdi bunu bulalım.

$$T(f_1) = T\left(\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix}\right)= \begin{bmatrix}4 & -2 & 1\\-2 & 1 & 2\\1 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$$

$$= -f_1 = -1f_1+0f_2+0f_3$$

$$T(f_2) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right)= \begin{bmatrix}4 & -2 & 2\\-2 & 1 & 2\\1 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\0\\5\end{bmatrix} =5f_2$$

$$= 0f_1 + 5f_2+0f_3$$

$$T(f_3) = T\left(\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}\right)= \begin{bmatrix}4 & -2 & 1\\-2 & 1 & 2\\1 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-10\\5\\0\end{bmatrix}$$

$$= 0f_1+0f_2+5f_3$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 5 & 0\\0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$ olur.

II.BÖLÜM

BANACH CEBİRLERİ ÜZERİNDE GENEL ÖN HAZIRLIKLAR

Bir önceki bölümdeki spektral teoremin çalışılmasında topolojiden bağımsız bir yol izlenmiştir. Çünkü sonlu boyutlu bir durumda bütün operatörler süreklidir.

Bundan sonraki 3 bölüm içinde topolojik ve cebirsel düşünceler silsilesi birleştirilecek ve ortaya Banach cebirleri konusu çıkacaktır. Önceki bölümün son kısmındaki uyarılar, X kompakt Hausdorff uzay olmak üzere C(X) cebiri ile Hilbert uzayı üzerindeki operatörlerin cebiri arasında önemli ilişkiler olabileceğini ileri sürer. Banach cebiri bu ilişkileri kurabileceğimiz basamak sistemdir.

Bu bölümün amacı teoride yarar sağlayacak bir kaç şart koymaktır.

2.1. TANIM VE BAZI ÖZELLİKLER

2.1.1. TANIM : A bir kompleks Banach uzayı ve birimli bir cebir olsun.

(i) $\forall x,y \in A$ için $\|xy\| \leq \|x\| \; \|y\|$ (2.1)

(ii) $\|e\| = 1$ (2.2)

özellikleri sağlanıyor ise A ya bir Banach cebiri denir.

2.1.2. TEOREM : Herhangi bir Banach cebirinde çarpım jointly süreklidir.

Kanıt : $x_n \to x$, $y_n \to y$ iken $x_n y_n \to xy$ olduğunu gösterelim.

$$\|x_n y_n - xy\| = \|x_n(y_n-y)+(x_n-x)y\| \leq \|x_n\| \; \|y_n-y\| + \|x_n-x\| \; \|y\|$$

eşitliğinin sağ yanı $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ iken sıfıra gider. Buradan $x_n y_n \to xy$ dir.

Bir A Banach cebirinin bir Banach altcebiri e yi içeren

A nın kapalı bir altcebiridir. A nın Banach altcebirleri A ile aynı cebirsel işlemlere sahip olan aynı birimli ve aynı norma göre Banach uzayı olan A nın altkümeleridir.

Reel durumda ortaya çıkan ek koşullardan kaçınmak için kompleks cebirler ile çalışacağız. Banach cebirinin birimli olduğunu kabul edeceğiz. Birimsiz Banach cebirleri ile çalışmakda çok yaygındır. Bu durumda teorinin asıl amacı ayrık grup olmayan yerel kompakt cebirlerin grup cebirlerinin çalışılmasıdır.

Aşağıdaki Banach cebiri örneklerine bakalım.

Fonksiyonlar veya operatörlerin Banach cebirlerinin vektör uzayı işlemleri noktasal tanımlanırlar. Banach cebirleri; üzerindeki çarpımın tanımlanışına göre adlandırılırlar. Çarpma noktasal ise Banach cebirine <u>Fonksiyon cebiri</u>, çarpma bileşke ise <u>operatör cebiri</u> ve çarpma convolution ise <u>grup cebiri</u> denir.

<u>2.1.3. ÖRNEK</u> :

(a) En önemli Banach cebirlerinden biri bir X topolojik uzayı üzerinde tanımlanan bütün sınırlı, sürekli kompleks fonksiyonların C(X) kümesidir. X in kompakt Haudorff olduğu durumu özel bir öneme sahiptir. X in tek noktadan oluştuğu durum da ise C(X) Banach cebiri, en basit Banach cebiri ile bir tutulur.

(b) Kompleks düzlem içindeki

$$D = \{ z : |z| \leq 1 \}$$

kapalı birim yuvarını düşünelim. D^{o} (D nin içi), üzerinde analitik olan fonksiyonlardan oluşan küme C(D) nin birimini içeren bir altcebirdir. Kompleks analizdeki Morera teoreminin basit bir uygulamasıyla bu cebir kapalıdır. Bu yüzden C(D) nin bir Banach altcebiridir. Bu cebire disk cebiri denir.

2.1.4. ÖRNEK :

(a) B bir Banach uzayı olsun. B üzerindeki operatörlerin $\beta(B)$ kümesi bir Banach cebiridir. Birim operatörün cebirsel anlamda birim olmasını garanti etmek için B nin aşikâr olmayan bir Banach uzayı olduğunu kabul etmeliyiz.

(b) Aşikâr olmayan bir H Hilbert uzayı üzerinde tanımlı operatörlerin $\beta(H)$ kümesi bir Banach cebiridir. Bu $\beta(B)$ cebirinin özel bir durumudur ve $T \longrightarrow T^*$ eşlemesi yapılırsa toplamsal yapının hazır olduğunu görürüz.

(c) $\beta(H)$ nın bir altcebiri içindeki operatörlerin adjointleri yine bu altcebire ait iseler bu cebire self-adjoint cebir denir. $\beta(H)$ nın bir self-adjoint altcebirine C*-cebiri denir. Bu konu ileride tekrar ele alınacaktır.

(d) $\beta(H)$ nın zayıf operatör topolojisi $T \to \langle Tx,y\rangle$ formundaki bütün fonksiyonlarla üretilir. Yani bu topoloji bütün fonksiyonların herbirini sürekli kılan en kaba topolojidir.

$$|\langle Tx,y\rangle - \langle T_0 x,y\rangle| \leq \|T-T_0\| \; \|x\| \; \|y\|$$

eşitsizliğinden $\langle Tx,y\rangle$ dönüşümleri norm topolojiye göre de süreklidirler. Bunları sürekli yapan en kaba topoloji zayıf topoloji olacağından norm topoloji zayıf topolojiden daha kabadır. Böylece zayıf topolojiye göre kapalı kümeler norm topolojiye göre de kapalıdır.

C*-cebiri zayıf topolojiye göre kapalı ise bu cebire Neumann cebiri denir. Neumann cebirleri [4] de etraflıca incelenmiştir.

2.1.5. ÖRNEK :

(a) $G=\{g_1,g_2,\ldots,g_n\}$ bir grup ise onun $L_1(G)$ grup cebiri, G üzerinde tanımlanan bütün kompleks fonksiyonların kümesidir. Toplama ve skalerle çarpma noktasal olarak tanımlanmıştır ve norm

$$\| f \| = \sum_{i=1}^{n} \| f(g_i) \| \tag{2.3}$$

ile tanımlanır. Çarpma tanımı altında yatan gerçeği görmek için

$$f(g_i) = \alpha_i \quad \text{olmak üzere} \quad f=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$$

yazmak uygun olur. Bu yazımı ve G deki çarpımı kullanarak $L_1(G)$ içindeki çarpım

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j\right) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k g_k \tag{2.4}$$

biçiminde tanımlanır. Burada

$$\gamma_k = \sum_{g_i g_j = g_k} \alpha_i \beta_j \tag{2.5}$$

(2.4) ün sol yanı açılır çıkan ifadede G nin aynı elemanlarını içeren terimler toplanır.

Bu fikirler $L_1(G)$ nin elemanları fonksiyonlar olduğunda çarpım tanımının aşağıdaki biçiminde verilebileceğini önerirler. $f,g\varepsilon L_1(G)$ olsun. Bunların çarpımı $f*g$ biçiminde gösterilir ve bunun g_k daki değeri aşağıdaki biçimde verilir.

$$(f*g)(g_k)= \sum_{g_i g_j = g_k} f(g_i)g(g_j) = \sum_{j=1}^{n} f(g_k g_j^{-1})g(g_j) \tag{2.6}$$

bu çarpıma f ve g nin <u>convolüsyonu</u> denir. G nin herbir elemanı bu elemanda 1 diğer elemanlarda o olan fonksiyona karşı getirilirse G ye $L_1(G)$ nin bir alt kümesi gözüyle bakılabilir. Ayrıca G nin içindeki çarpım ile $L_1(G)$ içindeki çarpım yani convolüsyon uyuşurlar. G nin birimine $L_1(G)$ içinde karşı gelen eleman

$L_1(G)$ nin birim elemanıdır.

$\|e\|=1$ ve $\|f*g\| = \sum_{k=1}^{n} |(f*g)(g_k)| = \sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} f(g_k g_j^{-1})\, g(g_j) \right|$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |f(g_k g_j^{-1})|\, |g(g_j)|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |f(g_k g_j^{-1})|\, |g(g_j)|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |g(g_j)| \sum_{k=1}^{n} |f(g_k g_j^{-1})| = \sum_{j=1}^{n} |g(g_j)|\, \|f\|$$

$$= \|f\| \sum_{j=1}^{n} |g(g_j)| = \|f\|\, \|g\|$$

olur.

(b) $G=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ tamsayıların toplamsal grubu olsun. Bunun $L_1(G)$ grup cebiri G üzerinde tanımlı ve

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|$$

serisini yakınsak yapan f kompleks fonksiyonlarının kümesidir. Lineer yapı işlemleri noktasal olarak tanımlanırlar. (a) şıkkından f ile g nin convolutionu

$$(f*g)(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n-m)\, g(m)$$

ile verilir. Norm ise

$$\|f\| = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |f(n)|$$

olarak tanımlanır. G doğal olarak $L_1(G)$ içinde kapsanır. $L_1(G)$ bir Banach cebiridir. Gerçek doğru gibi bir ayrık olmayan grubun grup cebiri integral teorisine dayandırıldığı için birimsiz kabul edilen Banach cebiri de kullanışlı olur. Bu fikirler modern analizde verimli ve güzel bir çalışma alanı oluştururlar. Bunu incelemek konumuz dışındadır.

Yukarıda tanımlanan Banach cebirleri çok ve farklıdırlar. Bunlardan başka Banach cebirleri de vardır. Bölümün kalan kısmında $C(X)$ ve C^*-cebirleri ile ilgileneceğiz.

Genel teori hepsine uygulanacaktır. Herhangi bir A Banach cebirine $\beta(A)$ nın bir altcebiri gözüyle bakılabileceği için $\beta(A)$ Banach cebiri bu anlamda bütün Banach cebirlerini kapsar. Bunu görmek için

$$M_a : A \longrightarrow \beta(A)$$
$$x \longrightarrow M_a(x) = ax$$

olmak üzere

$$A \longrightarrow \beta(A)$$
$$a \longrightarrow M_a$$

biçiminde tanımlanan dönüşüm bir izomorfizmadır. M_e, A daki birim operatördür. Böylece her $a \in A$ için $\|a\| = \|M_a\|$ olduğunu görebiliriz. Şöyleki $\|M_a(x)\| = \|ax\| \leq \|a\| \|x\|$ dir. Buradan $\|M_a\| \leq \|a\|$ olur ve $\|M_a\| = \sup\{|M_a(x)| : \|x\| \leq 1\} \geq \|M_a(e)\| = \|a\|$ buradan da $\|a\| \leq \|M_a\|$ olduğundan $\|a\| = \|M_a\|$ olur. Böylece $a \to M_a$ dönüşümü A dan $\beta(A)$ nın bir altcebiri üzerine bir izometrik izomorfizmadır. Bu karşılık getirme A üzerindeki operatörlerin Banach cebiri ile soyut Banach cebirlerini kurmamıza imkan verir. Bu bir yerde grup teorisindeki Cayleyin teoremine benzetilebilir.

<u>2.2.Tersinir ve Tersinir Olmayan Elemanlar</u> : A bir Banach cebiri, G de A içindeki tersinir elemanların kümesi ve S de A içindeki tersinir olmayan elemanların kümesi olsun. $e \in A$ ve $e^{-1} = e$ olduğundan G e yi içeren bir çarpımsal gruptur. 0 ın A içinde çarpmaya

göre tersi olmadığından $0 \in S$ dir.

2.2.1.TEOREM : $\|x-e\| <1$ i sağlayan her x elemanı tersinirdir ve

$$x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (e-x)^n \qquad (2.7)$$

dir. veya

$$(e-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (2.8)$$

Kanıt : $r= \|x-e\|$ alırsak $r<1$ dir. Buradan $\|(e-x)^n\| \leq \|(e-x)\|^n = r^n$ olur. Bu ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} (e-x)^n$$

serisinin kısmi toplamlar dizisinin Cauchy dizisi olduğunu söyler. A tam uzay olduğundan kısmi toplamlar dizisi $\sum_{n=1}^{\infty} (e-x)^n$ ile gösterdiğimiz A nın bir elemanına yakınsar. Şimdi $x^{-1}= e+ \sum_{n=1}^{\infty} (e-x)^n$ olduğunu gösterelim. $y= e + \sum_{n=1}^{\infty} (e-x)^n$ diyelim. A üzerindeki çarpım Jointly sürekli olduğundan

$$y-xy= (e-x)y = (e-x) \left[e+ \sum_{n=1}^{\infty} (e-x)^n\right]= (e-x) + \sum_{n=1}^{\infty} (e-x)^{n+1}$$

$$=(e-x) + \sum_{n=2}^{\infty} (e-x)^n= \sum_{n=1}^{\infty} (e-x)^n = e + \sum_{n=1}^{\infty} (e-x)^n - e = y - e$$

buradan ise $y-xy=y-e$ dir. Böylece $xy=e$ oldu. Benzer şekilde $yx=e$ olduğu görülür. Yani $y=x^{-1}$ dir.

2.2.TEOREM : S kapalı bir kümedir.

Kanıt : $S= A \setminus G$ olduğundan G nin açık olduğunu göstermek kanıt için yeterlidir.

$x_0 \in G$ ve $\varepsilon= \dfrac{1}{\|x_0^{-1}\|}$ seçilirse $B(x_0,\varepsilon)$ G dir. Gerçekten

$x \in B(x_0,\varepsilon) \implies \|x-x_0\| < \dfrac{1}{\|x_0^{-1}\|}$ olur. $x_0 \in G$ olduğundan x_0 tersinirdir. $\|x_0^{-1}x-e\| = \|x_0^{-1}x-x_0^{-1}x_0\| = \|x_0^{-1}(x-x_0)\| \leq \|x_0^{-1}\| \; \|x-x_0\| <1$

olduğu açıktır. 2.2.1 teoremden $x_0^{-1}x$ tersinirdir. Bu da $x_0^{-1}x$ in G içinde olduğunu söyler. x_0 ve $x_0^{-1}x$ G içinde ve $x=x_0(x_0^{-1}x)$ yazılabildiğinden $x\epsilon G$ olur. Buradan

$$B(x_0, \frac{1}{\|x_0^{-1}\|}) \subseteq G$$

olur. G açıktır, Sonuç olarak S kapalıdır.

G açık A yerel bağlantılı olduğundan G nin bileşenleri hepsi açık kümedir.

2.2.3. TEOREM : $G \longrightarrow G$

$x \longrightarrow x^{-1}$ dönüşümü bir homomorfizmadır.

Kanıt : $x \rightarrow x^{-1}$, 1:1, örtendir. Sürekli olduğunu gösterelim. $x_0 \epsilon G$ ve x, G nin $\|x-x_0\| < \frac{1}{2\|x_0^{-1}\|}$ koşuluna uyan bir öğesi olsun.

$$\|x-x_0\| < \frac{1}{2\|x_0^{-1}\|} \iff \|x_0^{-1}x-e\| = \|x_0^{-1}(x-x_0)\| = \|x_0^{-1}\| \;\; \|x-x_0\| < \tfrac{1}{2} < 1$$

yani $\|x_0^{-1}x-e\| < \frac{1}{2}$ (2.9)

olduğundan $x_0^{-1}x\epsilon G$ dir ve 2.2.1 Teoremden

$$x^{-1}x_0 = (x_0^{-1}x)^{-1} = e + \sum_{n=1}^{\infty} (e-x_0^{-1}x)^n \qquad (2.10)$$

olacaktır. Şimdi (2.10) u kullanarak

$$\|x^{-1}-x_0^{-1}\| = \|(x^{-1}x_0-e)x_0^{-1}\| \leq \|x_0^{-1}\| \quad \|x^{-1}x_0-e\|$$

$$= \|x_0^{-1}\| \quad \|e+\sum_{n=1}^{\infty} (e-x_0^{-1}x)^n - e\|$$

$$= \|x_0^{-1}\| \quad \|\sum_{n=1}^{\infty} (e-x_0^{-1}x)^n\|$$

$$\leq \|x_0^{-1}\| \sum_{n=1}^{\infty} \|e-x_0^{-1}x\|^n = \|x_0^{-1}\| \; \|e-x_0^{-1}x\| \sum_{n=0}^{\infty} \|e-x_0^{-1}x\|^n$$

$$= \|x_0^{-1}\| \; \|e-x_0^{-1}x\| \frac{1}{1-\|e-x_0^{-1}x\|}$$ buradan

$$\|x^{-1}-x_0^{-1}\| \leq \frac{\|x_0^{-1}\| \ \|x_0^{-1}\| \ \|x_0-x\|}{1-\|x_0^{-1}\| \ \|x_0-x\|} \qquad (2.11)$$

(2.9) dan $\dfrac{1}{1-\|x_0^{-1}x-e\|} \leq 2$ olacaktır. Buradan ise

$$\|x^{-1}-x_0^{-1}\| \leq \frac{\|x_0^{-1}\|^2 \ \|x-x_0\|}{1-\|x_0^{-1}x-e\|} \leq 2\|x_0^{-1}\| \ \|x-x_0\|$$

elde edilir. Bu ise $x \longrightarrow x^{-1}$ dönüşümünün sürekli olduğunu gösterir. Aynı şekilde $x^{-1} \longrightarrow x$ dönüşümüde süreklidir. O halde $x \longrightarrow x^{-1}$ dönüşümü bir homomorfizmadır.

x, A nın bir elemanı olsun. x in tersinir olup olmadığı x in kendine bağlı olduğu kadar A ya da bağlıdır. Gerçekten x A nın bir tersinir elemanı olsun. x i içeren A nın bir A' Banacah altcebiri gözönüne alındığında x tersinir olmayabilir. A" , A yı Banach altcebiri kabul eden bir Banach cebiri ise x A" de de tersinir olacaktır.

Bir sonraki kısımda A nın tersinir olmayan elemanlarının A nın bütün genişlemelerinde de tersinir olamayacağını göreceğiz.

2.3.SIFIRIN TOPOLOJİK BÖLENLERİ :

2.3.1.TANIM : a) A bir Banach cebiri, $z \in A$ olsun. Eğer $\|z_n\|=1$ ve $zz_n \longrightarrow 0$ veya $z_nz \longrightarrow 0$ olan bir $(z_n)_{n\in N} \subseteq A$ dizisi varsa z ye sıfırın bir topolojik böleni denir.

b) A içinde sıfırın bütün topolojik bölenlerinin kümesi Z ile gösterilir.

UYARI : Cebirsel olarak sıfırın bölenleri topolojik olarakta sıfırın böleni olacağı açıktır.

2.3.2.TEOREM : Z , S nin bir alt kümesidir.

Kanıt : $z \in Z$ olsun. $(z_n)_{n\in N} \subseteq A$ $\forall n \in N$ için $\|z_n\|=1$ ve

$zz_n \longrightarrow 0$ olur. $z \in G$ olsaydı $\forall n \in \mathbb{N}$ için $z_n = z^{-1}(zz_n) \longrightarrow 0$ olurdu. Bu ise $\|z_n\| = 1$ oluşu ile çelişir. Bu $z \notin G$ oluşunu verir. Buradan $z \in S$ dir. Böylece $Z \subseteq S$ elde edilir.

2.3.3. TEOREM : S nin sınırı, Z nin bir altkümesidir.

Kanıt : S kapalı küme olduğundan G içindeki dizilerin limitleri S içinde ise S nin sınırındadır. $(r_n) \subseteq G$, $r_n \to z$ ve $z \in S$ olsun. $z \in Z$ olduğunu göstereceğiz.

$$r_n^{-1}z - e = r_n^{-1}(z - r_n)$$

olduğundan (r_n^{-1}) dizisi sınırsızdır. Gerçekten aksi olsaydı $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|r_n^{-1}z - e\| < 1$ olacaktı ve buradan $r_n^{-1}z$ tersinir olacağından $z = r_n(r_n^{-1}z)$ tersinir olur. $z \in G$ olur ki bu z nin seçilişi ile çelişirdi. Buradan $\{r_n^{-1}\}$ sınırsızdır, $\|r_n^{-1}\| \to \infty$ kabul edebiliriz. $z_n = \dfrac{r_n^{-1}}{\|r_n^{-1}\|}$ dersek $\|z_n\| = 1$ ve

$$zz_n = \frac{z\, r_n^{-1}}{\|r_n^{-1}\|} = \frac{1 + (z - r_n)r_n^{-1}}{\|r_n^{-1}\|} = \frac{1}{\|r_n^{-1}\|} + (z - r_n)z_n \to 0$$

olur. Buradan da $z \in Z$ olur. Z , S nin sınırını bulundurur.

Bu teorem oldukça önemlidir. A bir A' Banach cebirinin Banach altcebiri içine gömülsün. A daki tersinir olmayan elemanlar A' de tersinir olabilirdi. Ancak A nın bu tersinir olmayan elemanı sıfırın topolojik böleni ise bu öğe A' de de sıfırın bir topolojik böleni olur. Dolayısıyla A' de de tersinir olmaz. Bir anlamda A nın sıfırın topolojik böleni olan tersinir olmayan öğeleri devamlı tersinir olmayıp A nın mümkün olan bütün genişlemeleri içinde de terse sahip olmazlar. 2.3.3 Teorem, S nin sınırının bu anlamda kalıcı olduğunu söyler.

2.4. SPEKTRUMLAR :

T, aşikâr olmayan bir Hilbert uzayı üzerinde bir operatör olsun. T nin spektrumu

$$\sigma(T) = \{\lambda \mid T - \lambda I \ \text{ singülerdir}\}$$

biçiminde tanımlanır. Tanımın böyle yapılışına neden olan geometrik fikirleri vermiştik. Sonlu boyutlu durumda $\sigma(T)$ nin içindeki bir sayı T ile elde edilen öyle bir sayıydı ki; sıfırdan farklı bir vektörün T altındaki görüntüsü; bu sayı ile bu vektörün çarpımıymış gibi, elde ediliyordu. Spektrumun bu formu çok önemlidir.

2.4.1. TANIM : A bir Banach cebiri ve $x \in A$ olsun.

$$\sigma(x) = \{\lambda \mid x-\lambda e, \text{ tersinir değildir}\} \subseteq \mathbb{C} \tag{2.12}$$

kümesine x in spektrumu denir. $\rho(x) = \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ kümesine de x in resolvent kümesi denir. x in spektrumu x e bağlı olduğu kadar A ya da bağlıdır. Bu nedenle gerekirse $\sigma(x)$ yerine $\sigma_A(x)$ notasyonu kullanılacaktır.

2.4.2. TANIM : A bir Banach cebiri ve $x \in A$ olsun.

$$\begin{aligned} x(\lambda) : \rho(x) &\longrightarrow A \\ \lambda &\longrightarrow x(\lambda) = (x-\lambda e)^{-1} \end{aligned} \tag{2.13}$$

dönüşümüne x in resolventi denir.

2.4.3. TEOREM : A bir Banach cebiri ve $x \in A$ olsun.

a) $\rho(x)$, $\mathbb{C}$ nin $\{z : |z| \geq \|x\|\}$ altkümesini kapsayan bir açık kümedir. $x \longrightarrow x(\lambda)$ ya dönüşümü süreklidir.

b) $|\lambda| > \|x\|$ için $\lambda \in \rho(x)$ ve

$$x(\lambda) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}} \tag{2.14}$$

dir. Bu sebepten $|\lambda| > \|x\|$ için

$$\|x(\lambda)\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\left(1-\frac{\|x\|}{|\lambda|}\right)^{-1} \tag{2.15}$$

ve $|\lambda| \to \infty$ için $x(\lambda) \longrightarrow 0$ dır.

c) $\sigma(x)$ kapalı ve sınırlıdır. Bu yüzden kompaktır.

d) Eğer λ , μ ϵ $\sigma(x)$ ise

$$x(\lambda) - x(\mu) = (\lambda-\mu)\ x(\lambda)\ x(\mu) \tag{2.16}$$

bağıntısı sağlanır. Bu bağıntıya Resolvent denklemi denir. Ayrıca

$x(\lambda)\ x(\mu) = x(\mu)\ x(\lambda)$ dır.

Kanıt : a) $\lambda_0 \epsilon \rho(x)$ için $B(\lambda_0,\varepsilon) \subseteq \rho(x)$ olduğunu göstermeliyiz.

$\varepsilon = \dfrac{1}{\|(x-\lambda_0 e)^{-1}\|}$ ve $\lambda \epsilon\ B(\lambda_0,\varepsilon)$ alalım. $\lambda \epsilon \rho(x)$ olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır.

$$\begin{aligned}(x-\lambda e) &= (x-\lambda_0 e)-[(x-\lambda_0 e)-(x-\lambda e)] \\ &= (x-\lambda_0 e)\{e-(x-\lambda_0 e)^{-1}[(x-\lambda_0 e)-(x-\lambda e)]\}\end{aligned} \tag{2.17}$$

$(x-\lambda e)$ bir terse sahiptir. Çünkü

$$\|(x-\lambda_0 e)^{-1}[(x-\lambda_0 e)-(x-\lambda e)]\| = \|(x-\lambda_0 e)^{-1}(\lambda-\lambda_0)\| \leq \|(x-\lambda_0 e)^{-1}\|\,|\lambda-\lambda_0|$$

elde edilir. $\lambda \epsilon\ B(\lambda_0,\varepsilon) \Longrightarrow |\lambda-\lambda_0| < \varepsilon = \dfrac{1}{\|(x-\lambda_0 e)^{-1}\|}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\|(x-\lambda_0 e)^{-1}[(x-\lambda_0 e)-(x-\lambda e)]\| &\leq \|(x-\lambda_0 e)^{-1}\|\ |\lambda-\lambda_0| \\ &\leq \|(x-\lambda_0 e)^{-1}\|\ \varepsilon = 1\end{aligned} \tag{2.18}$$

elde edilir. 2.2.1 teoremden, (2.17) ve (2.18) bağıntılarından $(x-\lambda e)$ bir terse sahiptir. Buradan $\lambda \epsilon \rho(x)$ buradan da $B(\lambda_0,\varepsilon) \subseteq \rho(x)$ bir yani $\rho(x)$ açık dolayısı ile $\sigma(x)$ kapalıdır.

Buna göre $(x-\lambda e)$ tersi

$x(\lambda) = (x-\lambda e)^{-1} = \{e-(x-\lambda_0 e)^{-1}[(x-\lambda e)-(x-\lambda_0)]\}^{-1}(x-\lambda_0 e)^{-1}$, (2.9) dan

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(x-\lambda_0 e)^{-1}(\lambda_0-\lambda)\right]^n (x-\lambda_0 e)^{-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[x(\lambda_0)\right]^n (-1)^n (\lambda-\lambda_0)\left[x(\lambda_0)\right]$$

$$x(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda-\lambda_0)^n \left[x(\lambda_0)\right]^{n+1} \tag{2.19}$$

elde edilecektir. 2.2.3 Teoremin kanıtında

$$\|x-x_0\| < \frac{1}{2\|x_0^{-1}\|} < \frac{1}{\|x_0^{-1}\|}$$

ifadesinde x yerine $(x-\lambda e)$ ve x_0 yerine $(x-\lambda_0 e)$ alındığında ifade $\|(x-\lambda e)-(x-\lambda_0 e)\| = |\lambda-\lambda_0| < \dfrac{1}{\|(x-\ _0 e)^{-1}\|}$ sağlanacağından

(2.11) ifadesinden de

$$\|(x-\lambda e)^{-1}-(x-\lambda_0 e)^{-1}\| \leq \frac{\|(x\ -\lambda e)^{-1}\|^2 \ \|(x-\lambda_0 e)-(x-\lambda e)\|}{1-\|(x-\lambda_0 e)^{-1}\| \ \|(x-\lambda_0 e)-(x-\lambda e)\|}$$

olarak elde edilir. Bu ise

$$\|x(\lambda) - x(\lambda_0)\| \leq \frac{\|x(\lambda_0)\|^2 \ |\lambda-\lambda_0|}{1-\|x(\lambda_0)\| \, |\lambda-\lambda_0|} \tag{2.20}$$

dir. Böylece $x \to x(\lambda)$ ya dönüşümü süreklidir.

b) $|\lambda| > \|x\|$ ise $\lambda \varepsilon \rho(x)$ olacağı açıktır.

$x(\lambda) = (x-\lambda e)^{-1} = -\dfrac{1}{\lambda}\left(e-\dfrac{x}{\lambda}\right)^{-1}$, (2.8) den

$$= -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$$

olur. Bu sebepten $|\lambda| > \|x\|$ için $\dfrac{\|x\|}{|\lambda|} < 1$ olduğundan $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\lambda^n}$ serisi yakınsaktır. Buna göre

$$\left\| -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\lambda^n}\right\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{x^n}{\lambda^n}\right\| = \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{x}{\lambda}\right\|^n$$

$= \dfrac{1}{|\lambda|} \ \dfrac{1}{1-\left\|\dfrac{x}{\lambda}\right\|} = \dfrac{1}{|\lambda|}\left(1-\left\|\dfrac{x}{\lambda}\right\|\right)^{-1}$ olacaktır. $|\lambda| \to \infty$ için $x(\lambda) \to 0$

olacağı açıktır.

c) $\rho(x)$ açık olduğundan $\sigma(x)=\complement\rho(x)$ kapalıdır. $\sigma(x)$ in sınırlılığını gösterelim.

$$\sigma(x) \subseteq \{z : |z| \leq \|x\|\} \qquad (2.21)$$

olduğunu iddia edersek bu doğru olacaktır. Gerçekten $\lambda\epsilon\sigma(x)$ $\lambda\notin\{z: |z|\leq \|x\|\}$ olsun. Bu ise $|\lambda| > \|x\| \Rightarrow \frac{\|x\|}{|\lambda|} < 1$ buradan ise $(e-\frac{x}{\lambda})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^n}$ serisi yakınsaktır. Buradan $e-\frac{x}{\lambda}$ tersinirdir.

$\Rightarrow$ $x-\lambda e$ tersinirdir. Bu ise $\lambda\epsilon\sigma(x)$ olması ile çelişir. Böylece (2.21) sağlanır. Buna göre $\sigma(x)$ sınırlıdır. $\sigma(x)$ kapalı ve sınırlı olduğundan kompakttır.

d) $\lambda,\mu\epsilon\sigma(x)$ ise

$$\begin{aligned} x(\lambda) &= x(\lambda)(x-\mu e)(x-\mu e)^{-1} \\ &= x(\lambda)\ (x-\mu e)\ x(\mu) \\ &= x(\lambda)\left[x-\lambda e+(\lambda-\mu)e\right]\ x(\mu) \\ &= \left[x(\lambda)(x-\lambda e)+(\lambda-\mu)\ x(\lambda)\right]x(\mu) \\ &= x(\mu)+(\lambda-\mu)\ x(\mu) \end{aligned}$$

Buradan

$$x(\lambda) - x(\mu) = (\lambda-\mu)\ x(\lambda)\ x(\mu)$$

resolvent denklemi elde edilir. Benzer şekilde

$$x(\mu)- x(\lambda) = (\mu-\lambda)\ x(\mu)\ x(\lambda) \qquad (2.22)$$

olacağından (2.16) ve (2.22) denklemlerinden x in resolventinin kommutatif olduğu görülür.

<u>2.4. 4TEOREM</u> : $\sigma(x)$ boş değildir.

<u>Kanıt</u> : U, A üzerinde (A^* dual uzayının bir elemanı) bir fonksiyonel olsun. U fonksiyonunu

$$U(\lambda) = U\ (x(\lambda))$$

olarak tanımlayalım. $U(\lambda)$, $\rho(x)$ resolvent kümesi üzerinde tanımlı ve sürekli fonksiyon olur. Resolvent denkleminden

"$x(\lambda) - x(\mu) = (\lambda-\mu)\ x(\lambda)\ x(\mu)$"

$u(x(\lambda)) - u(x(\mu)) = (\lambda-\mu)\ u(x(\lambda))\ u(x(\mu))$ elde edilir.

Buradan $\dfrac{u(x(\lambda))-u(x(\mu))}{\lambda-\mu} = u(x(\lambda))\ u(x(\mu))$ dir. O halde

$$\lim_{\lambda \to \mu} \frac{u(\lambda)-u(\mu)}{\lambda-\mu} = u([x(\mu)]^2)$$

olur. Buradan da $u(\lambda)$, $\rho(x)$ in herbir noktasında türevlenebilirdir ve u sürekli olduğundan

$$|u(\lambda)| \leq \|u\| \quad \|x(\lambda)\|$$

olacağından $\lambda \to \infty \implies x(\lambda) \to 0 \implies u(\lambda) \to 0$ olur.

Şimdi $\sigma(x)$ in boş olduğunu kabul edelim. $\rho(x)=\mathbb{C}\setminus\sigma(x) = \mathbb{C}\setminus\emptyset \implies \rho(x) = \mathbb{C}$ olacağından kompleks analizin liouville teoremi gereği her $\lambda\in\mathbb{C}$ için $u(\lambda)=0$ olur. u, A üzerinde herhangi bir fonksiyonel olduğundan her $\lambda\in\mathbb{C}$ için $x(\lambda)=0$ olur. Hiçbir elemanın tersi "0" olamayacağından bu imkansızdır. Buradan $\sigma(x) \neq \emptyset$ olacaktır.

UYARI : Böyle bir çalışmada liouville teoreminin kullanılışı bizi şaşırtmamalıdır. Bu çalışmaların özel durumu olan sonlu boyutlu durumda cebirin esas teoremi kullanılmıştı. Cebirin esas teoremi liouville teoreminin bir sonucu olarak ifade edilebileceği için liouville teoremi bu teoremin kanıtında kullanılabilir.

Sonuç olarak $\sigma(x)$, $\mathbb{C}$ nin boş olmayan kompakt bir altuzayıdır.

2.4.5. TANIM : A bir Banach cebiri ve $x\in A$ olsun.

$$r(x) = \sup_{\lambda\in\sigma(x)} \{|\lambda|\} \tag{2.23}$$

ile tanımlanan $r(x)$ sayısına x in spektral yarıçapı denir.

UYARI : $\sigma(x) = \{z : |z| \leq \|x\|\}$ olduğundan $0 \leq r(x) \leq \|x\|$ dur.

Sıfırdan farklı her öğesi tersinir olan birimli bir cebire bölüm cebiri denildiğini biliyoruz.

2.4.4 Teoremin en önemli sonucu 2.4.6 teoremdir.

2.4.6.TEOREM : Bir A bölüm cebirinin bütün öğeleri A nın biriminin skaler katlarından oluşur.

Kanıt : x, A nın bir elemanı olsun. $\exists\lambda\in\mathbb{C}$ için $x=\lambda e$ olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki $\forall\lambda\in\mathbb{C}$ için $x\neq\lambda e$ olsun. Buradan $\forall\lambda\in\mathbb{C}$ için $x-\lambda e\neq 0$ dır. Böylece A bir bölüm cebiri olduğundan $\forall\lambda\in\mathbb{C}$ için $x-\lambda e$ tersinirdir. Buradan ise $\sigma(x)=\emptyset$ olur. Bu ise $\sigma(x)\neq\emptyset$ oluşu ile çelişir. O halde $\exists\lambda\in\mathbb{C}$ için $x=\lambda e$ olur. A nın her elemanı e nin bir skaler katı olarak yazılabilir.

A bir bölüm cebiri olsun.

$$\phi : A \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$x = \lambda e \to \phi(x) = \phi(\lambda e) = \lambda$$

biçiminde tanımlı ϕ bir izometrik izomorfizmdir. 2.4.7 teorem, bölüm cebiri olan bir Banach cebirinin $\mathbb{C}$ ye özdeş olduğunu söyler. Bu ise gelecek bölümde verilecek olan yapı teoremlerinin temelini oluşturur.

$\mathbb{C}$ nin kendisinin bir bölüm cebiri olduğu açıktır. $\mathbb{C}$ bölüm cebiri olan Banach cebirlerinin en basitidir. 2.2.7 teoremden $\mathbb{C}$ nin bölüm cebirlerinin hepsini karakterize eden tek bir Banach cebiri olduğu görülür.

"0", sıfırın bir böleni olduğu için "0" bütün Banach cebirleri içinde sıfırın topolojik bölenidir. Tersine

2.4.7. TEOREM : A bir bölüm cebiri olsun. A içinde sıfırın topolojik bölenlerinin kümesi sadece $\{0\}$ dan oluşuyorsa $A=\mathbb{C}$ dir.

Kanıt : $x\epsilon A$ olsun. $\sigma(x) \neq \emptyset$ olduğundan $\sigma(x)$ bir λ sınır noktasına sahiptir. $x-\lambda e$ noktası da S tersinir olmayan elemanlar kümesinin sınırına aittir. Dolayısıyla 2.3.3 teoremden $x-\lambda e$ sıfırın bir topolojik bölenidir. Hipotez gereği A içinde sıfırın topolojik bölenleri kümesi $\{0\}$ olduğundan $x-\lambda e=0$ veya $x=\lambda e$ dir. x, A nın herhangi bir öğesi olduğu için $A=\mathbb{C}$ dir.

A içindeki çarpım ile norm arasındaki temel bağıntı

$$\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$$

ile verilmiştik. $A=\mathbb{C}$ olduğu zaman ters eşitsizlik sağlanabilir.

2.4.8. TEOREM : A üzerindeki norma göre

$$\|xy\| \geq K \|x\| \, \|y\|$$

olan en az bir $K>0$ sabiti varsa $A=\mathbb{C}$ dir.

Kanıt : $\|xy\| \geq K \|x\| . \|y\|$ eşitsizliğini sağlayan en az bir $K>0$ sayısı bulunsun. Bu durumda sıfırın topolojik bölenleri kümesi sadece $\{0\}$ dan oluşur. 2.4.7 teoremden $A=\mathbb{C}$ olur.

Şimdi A genişletildiği zaman bir $x\epsilon A$ nın spektrumunun durumunu inceleyelim.

2.4.9. TEOREM : A bir A' Banach cebirinin altcebiri ve $x\epsilon A$ olsun. x in A ve A' ye göre spektrumu arasında şu ilişkiler vardır:

1) $\sigma_{A'}(x) \subseteq \sigma_A(x)$

2) $\sigma_A(x)$ in her sınır noktası $\sigma_{A'}(x)$ in de sınır noktasıdır.

Kanıt : 1) $\lambda\epsilon\sigma_{A'}(x)$ ise $x-\lambda e$ A' içinde tersinir değildir. $A\subseteq A'$ olduğundan $x-\lambda e$, A içinde de tersinir değildir. Buradan $\lambda\epsilon\sigma_A(x)$ olur. Bu ise $\sigma_{A'}(x) \subseteq \sigma_A(x)$ demektir.

2) λ, $\sigma_A(x)$ in bir sınır noktası olsun. Bu durumda $x-\lambda e$ A içindeki tersinir olmayan elemanlar kümesi olan S nin bir sınır

noktasıdır. Buradan $x-\lambda e$ sıfırın bir topolojik bölenidir. Böylece $x-\lambda e$ A' içinde de sıfırın bir topolojik böleni olur. Buradan da $x-\lambda e$ A' de tersinir değildir ve $\lambda\epsilon\sigma_{A'}(x)$ dir. Buradan λ , $\sigma_{A'}(x)$ in sınır noktasıdır.

Bu sonuç genel olarak bir Banach cebirinin genişlediği zaman her elemanının spektrumunun daraldığını gösterir. Bundan başka sınır noktaları kaybolmadığı için $\sigma(x)$ "içi boş" olacak biçimde büzülür.

2.4.10. ÖRNEK : $D=\{z : |z| \leq 1\}$ üzerinde tanımlı ve iç bölgesinde analitik olan bütün kompleks fonksiyonların A disk cebirini gözönüne alalım. $f\epsilon A$ ise f D üzerinde ve iç bölgesinde analitiktir. Dolayısıyla f kompleks analizdeki maksimum modül teoremi uyarınca maksimum değerini sınırda alır. Yani

$$\|f\| = \sup_{|z|\leq 1} \{|f(z)|\} = \sup_{|z|=1} \{|f(z)|\}$$

olur. Bu A, $A'=C(\{z: |z| =1\})$ Banach cebirinin bir altcebiridir. $f\epsilon A$, $f(z)=z$ alalım. $\sigma_A(f)=D$ ve $\sigma_{A'}(f)=\partial D$ dir. Buradan $\sigma_{A'}(f)\subseteq\sigma_A(f)$ olur.

2.5. SPEKTRAL YARIÇAP İÇİN FORMÜL

A genel bir Banach cebiri ve $x\epsilon A$ olsun. x in spektral yarıapını $r(x)=\sup\{ |\lambda| : \lambda\epsilon\sigma_A(x)\}$ şeklinde tanımlanmıştı. A nın x ile üretilen altcebirini A' ile gösterelim. A', x in bütün polinomları kümesinin kapanışıdır ve

$$\begin{aligned} r(x) &= \sup\{ |\lambda| : \lambda\epsilon\sigma_A(x)\} \\ &= \sup\{ |\lambda| : \lambda\epsilon\sigma_{A'}(x)\} \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlik $r(x)$ in x in kuvvet serisine eşit olabileceği fikrini ortaya çıkarır.

2.5.1 ÖN TEOREM : $\sigma(x^n) = [\sigma(x)]^n$ (2.24)

dir.

Kanıt : λ , sıfır olmayan bir kompleks sayı ve λ nın farklı n. kökleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ olsun. Böylece $x^n - \lambda e = (x-\lambda_1 e)(x-\lambda_2 e)\ldots(x-\lambda_n e)$ olarak yazılır. Bu eşitsizlikten $x^n - \lambda e$ tersinir değildir $\Longleftrightarrow \exists\, i$ için $x-\lambda_i e$ tersinir değildir. Buradan $\lambda_i \in \sigma(x) \Longleftrightarrow \lambda \in [\sigma(x)]^n$ olacaktır.

2.5.2. TEOREM : $r(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \|x^n\|^{1/n}$ dir. (2.25)

Kanıt : 2.5.1 ön teoremden

$$r(x^n) = [r(x)]^n \tag{2.26}$$

dir ve (2.21) den $r(x^n) \le \|x^n\|$ idi. Buna göre $r(x^n) = [r(x)]^n \le \|x^n\|$ dir. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için $r(x) \le \|x^n\|^{1/n}$ olur. $r(x) < a$ olan bir a için sonlu sayıda n ler hariç bütün n ler için $\|x^n\|^{1/n} < a$ olduğunu göstermek kanıt için yeterlidir. $|\lambda| > \|x\|$ ise (2.13) den

$$x(\lambda) = -\lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^n}$$

olduğu biliniyor. Eğer u herhangi bir fonksiyonel ise bütün $|\lambda| > \|x\|$ için $u(x(\lambda)) = -\lambda^{-1} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{u(x^n)}{\lambda^n} = -\lambda^{-1} \left[f(e) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} u(x^n)\, \lambda^{-n}\right]$

2.4.5 teoremin kanıtında $u(x(\lambda))$, $|\lambda| > r(x)$ bölgesinde analitik fonksiyon ve $|\lambda| > \|x\|$ bölgesinde Laurent açılımına sahiptir. Kompleks analizden $|\lambda| > r(x)$ için de bu açılım geçerlidir. α, $r(x) < \alpha < a$ olacak biçimde bir gerçel sayı ise $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u\left(\dfrac{x^n}{\alpha^n}\right)$ serisi yakınsaktır.

Bunu terimleri sınırlı bir dizi oluşturur. Bu her fonksiyonel için doğru olduğundan $\left(\dfrac{x^n}{\alpha^n}\right)$, A içinde sınırlı bir dizi olur. O halde $\exists K > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\left\|\dfrac{x^n}{\alpha^n}\right\| \le K$ olur. Buradan $\|x^n\|^{1/n} \le K^{1/n} \alpha$ dır. Yeterince büyük n ler için n lerin sonlu sayıdakileri hariç

$$r(x)-\varepsilon<r(x)\leq \|x^n\|^{1/n}< r(x)+\varepsilon \implies r(x)=\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$$

Bu da kanıtı tamamlar.

<u>2.5.3.TANIM:</u> $\{\lambda\in\mathbb{C} : |\lambda|\leq r(x)\}$ kapalı diskine x in <u>spektral diski</u> denir.

$r(x)=0$ olsa bile $\sigma(x)$ kapalı ve boş olmadığından spektral diskinin sınır üzerinde en azından bir spektral nokta vardır.

<u>2.5.4.TEOREM:</u> Bir kompleks A Banach cebirinin komutatif iki x, y elemanı için

$$r(x+y)\leq r(x)+r(y) \quad \text{ve } r(xy)\leq r(x)\, r(y) \tag{2.27}$$

dır.

<u>Kanıt:</u> $r(xy)=\lim\limits_{n\to\infty} \|(xy)^n\|^{1/n}=\lim\limits_{n\to\infty} \|x^ny^n\|^{1/n} \leq\lim\limits_{n\to\infty} (\|x^n\|^{1/n}\|y^n\|^{1/n})$

$\leq r(x)r(y)$ olacaktır. (2.27) daki ilk eşitliğin kanıtı için $\alpha>r(x)$ ve $\beta>r(y)$ verilen sabitler ve $m\in\mathbb{N}$ olsun. öyle ki $n \geq m$ için $\|x^n\|\leq\alpha^n$ ve $\|y^n\|\leq\beta^n$ olsun. $\xi=\|x\|$, $\eta=\|y\|$ koyarsak

$k=0,1,2,\ldots$ için $\|x^k\|\leq\xi^k$, $\|y^k\|\leq\eta^k$ elde edilir. $n\geq 2m$ için

$$\gamma=\max_{0\leq v\leq m-1} \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^v + 1 + \max_{0\leq v\leq m-1} \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^v$$

olmak üzere

$$\|(x+y)^n\|=\left\|\sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v}x^vy^{n-v}\right\| \leq \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v} \|x^v\|\, \|y^{n-v}\|$$

$$\leq \sum_{v=0}^{m-1} \binom{n}{v} \xi^v\beta^{n-v}+\sum_{v=m}^{n-m} \binom{n}{v}\alpha^v\beta^{n-v}+\sum_{v=n-m+1}^{n} \binom{n}{v}\alpha^v\beta^{n-v}$$

$$= \sum_{v=0}^{m-1} \binom{n}{v}\alpha^v\beta^{n-v}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^v + \sum_{v=m}^{n-m} \binom{n}{v}\alpha^v\beta^{n-v}+\sum_{v=n-m+1}^{n} \binom{n}{v}\alpha^v\beta^{n-v}\left(\frac{\eta}{\beta}\right)^{n-v}$$

$$\leq\gamma \sum_{v=0}^{n} \binom{n}{v}\alpha^v\beta^{n-v} = \gamma(\alpha+\beta)^n$$

elde edilir. Buradan $r(x+y)\leq(\alpha+\beta)\sqrt[n]{\gamma}$ dır. Buradan $r(x+y)\leq r(x)+r(y)$ elde edilir.

2.6. KÖKLÜ VE YARI-BASİTLİK

Bir A Banach cebirinin yarı-basitliği tanımı son paragrafta verilecektir. Bunun için köklü tanımı gerekmektedir.

2.6.1. TANIM : A nın bir I altkümesi aşağıdaki özellikleri sağlarsa buna bir ideal (veya iki yönlü ideal) denir.

(1) I, A nın bir altvektör uzayı

(2) $i \in I \Rightarrow \forall x \in A$ için $xi \in I$

(3) $i \in I \Rightarrow \forall x \in A$ için $ix \in I$

Eğer bu koşullardan sadece (1) ve (2) (veya (1) ve (3)) sağlanıyorsa I ya sol ideal (veya sağ ideal) denir

A komutatif bir cebir olduğu zaman, sağ, sol ve iki yönlü ideal kavramları uyuşacaktır.

A daki ideallerin özellikleri, A nın tersinir ve tersinir olmayan elemanlarının özellikleri ile yakından ilgilidir. Şimdiye kadar şu ifadeleri kullandık;

A nın bir x elemanı tersinirdir denince $xy=yx=e$ olacak şekilde bir y elemanın var olduğunu anlıyoruz. Buradaki amacımız için $xy=yx=e$ ifadesini $xy=e$ ve $yx=e$ şeklinde ayırmak yararlı olacaktır.

2.6.2.TANIM : $x \in A$ için $yx=e$ olacak şekilde bir y elemanı varsa x e sol tersinirdir denir.

Eğer x sol tersinir değilse sol tersinir değildir denir.

Benzer şekilde sağ tersinirlik ve sağ tersinir olmama tanımlanabilir.

Eğer x hem sağ hem de sol tersinir ise yani $yx=e$ ve $xz=e$ olan y ve z elemanları varsa

$y=y.e=y(xz)=(yx)z=e.z=z$

dir. Bu x in tersinirliği ile aynıdır. Buna göre $x^{-1}=y=z$ olur.

2.6.3. TANIM : A daki bir maksimal iki yanlı ideal diğer hiç bir has ideal tarafından kapsanmayan bir has iki yanlı ideal olarak tanımlanır. Buna benzer olarak A daki bir maksimal sol ideal diğer hiçbir has ideal tarafından kapsanmayan bir has sol ideal olarak tanımlanır.

Zorn Lemma direkt uygulanırsa her has sol ideal bir maksimal sol ideal içine gömülür. $\{0\}$ bir has sol ideal olduğundan maksimal sol idealler kesinlikle vardır.

2.6.4.TANIM : A nın bütün maksimal sol ideallerin arakesitine A nın radikali denir. Bu radikali R ile gösterilir. Kısalık olsun diye $R = \cap MLI$ ile gösterilir. Maksimal sol ideallerin arakesiti olan R, bir has sol idealdir.

Aynı fikirler sol idealler için yapıldığı şekilde sağ idealler içinde yapılır ve formüle edilir. Maksimal sağ ideallerin arakesitini de $\cap MRI$ ile gösterelim.

2.6.5.TEOREM : $R = \cap M\,LI = \cap MRI$ dır. Yani A nın maksimal sol ideallerinin arakesit kümesi, maksimal sağ ideallerin arakesit kümesine eşittir. Bu sebepten A nın radikali iki yanlı has idealdir.

Şimdi bu teoremi kanıtlamak için aşağıdaki Lemmaları verelim.

$R = \cap M\,LI$ olsun. Buna göre;

2.6.6.LEMMA : Eğer $r \in R$ ise $e - r$ sol tersinirdir.

Kanıt : $e-r$ nin sol tersinir olmadığını kabul edelim. Böylece

$$L = A(e-r) = \{x(e-r) : x \in A\} = \{x - xr : x \in A\}$$

$e-r$ yi içeren bir has sol idealdir. Daha sonra L yi $e-r$ yi içeren bir M maksimal sol ideal içine gömebiliriz. $r \in R$ olduğundan,

$$e = (e - r) + r$$

M içindedir. Bu ise $M=A$ olması demektir. Bu ise çelişkidir. O halde $e-r$ sol tersinirdir.

LEMMA : Eğer $r \in R$ ise $e-r$ tersinirdir.

Kanıt : $r \in R$ ise $e-r$ önceki lemmadan sol tersinirdir. Buradan $s(e-r)=e$ olacak şekilde A içinde bir s elemanı vardır. Buna göre s sağ tersinirdir ve $s=e-(-s)r$ dir. $r \in R$ ve R nin bir sol ideal olmasından $(-sr) \in R$ dir. Önceki lemma tekrar uygulanırsa $s=e-(-sr)$ sol tersinirdir. s hem sağ hem de sol tersinir olduğundan tersi $(e-r)$ olan bir tersinir elemandır. Böylece $e-r$ de tersi s olan bir tersinir elemandır.

2.6.7.LEMMA : Eğer $r \in R$ ise $\forall x$ için $e-xr$ tersinirdir.

Kanıt : R bir sol ideal idi. Buradan $xr \in R$ dir. Böylece $e-xr$ geçen lemmadan tersinirdir.

2.6.8.LEMMA : Eğer r, $\forall x$ için $e-xr$ tersinir olması özelliğini sağlayan A nın bir elemanı ise $r \in R$ dir.

Kanıt : $r \notin R$ olsun. Ohalde r herhangi bir M maksimal sol ideal içinde değildir.

$$M + Ar = \{m + xr : m \in M, \ x \in A\}$$

kümesi r ve M yi içeren bir idealdir. Böylece $M+Ar=A$ ve en az bir x ve bir m için

$$m + xr = e$$

olur. Buradan $m=e-xr$ M içinde olur ki, hiçbir has ideal tersinir elemanları içermediği için bu mümkün değildir. Bu lemmanın sonucu olarak

$$\cap MLI = \{r : e-xr, \text{ her } x \text{ için tersinir}\} \tag{2.28}$$

$$\cap MRI = \{r : e-rx, \text{ her } x \text{ için tersinir}\} \tag{2.29}$$

Şimdi (2.29) ve (2.28) nin birbirine eşit olduğunu kanıtlayalım. Bunun için simetrikliği kullanmak yeterlidir.

2.6.9. LEMMA : $e-xr$ tersinir ise $e-rx$ de tersinirdir.

Kanıt : $e-xr$ tersi $s=(e-xr)^{-1}$ olan tersinir bir eleman olsun. Buradan $(e-xr)s=s(e-xr)=e$ böylece $s=(e-xr)^{-1}=e+xr+(xr)^2+\ldots$ ve

$$
\begin{aligned}
(e-rx)^{-1} &= e+(rx)+(rx)^2+(rx)^3+\ldots = e+rx+rxrx+rxrxrx+\ldots \\
&= e+r(x+xrx+xrxr+\ldots) = e+r(e+xr+xrxr+xrxrxr+\ldots)x \\
&= e+r(e-xr)^{-1}x = e+rsx
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$(e-rx)(e+rsx)=(e+rsx)(e-rx)=e$$ dir. Buda $e-rx$ in $e+rsx$ tersi ile tersinir olduğunu gösterir.

Böylece 2.6.5. teorem detaylı olarak kanıtlanmış olur.

2.6.10.TANIM : A nın radıkali $\{0\}$ idealine eşit ise A ya yarı-basit denir. Yani A nın sıfır olmayan herbir elemanı bir maksimal sol idealin dışında ise A ya yarı-basit denir.

Yukarıda bahsedilen fikirler doğal olarak sadece cebirseldir. Bu fikirler sadece A Banach cebirine uygulanmakla kalmaz. Yani birimli her cebir veya halkada da uygulanabilir. Bununla beraber biz A Banach cebiriyle ilgileneceğiz.

Şimdi bu fikirleri kısım 65 in sonucları üzerine taşıyalım. A içindeki bütün singüler elemanların S kümesinin kapalılığı biliniyor. I, A içinde herhangi (sol, sağ veya iki yanlı) ideal ise cebirsel operatörlerin Jointly sürekliliğinden $\bar{I}$ aynı cinsten bir idealdir. Herhangi bir has ideal, has kapalı S kümesi içinde bulunduğundan herhangi bir P has idealinin kapanışı aynı cinsten bir has idealdir. Bu şu demektir.

2.6.11.TEOREM : A içindeki her maksimal ideal kapalıdır.

Kanıt : Eğer bir L maksimal sol ideali kapalı değilse L, $\bar{L}$ has sol idealinin bir has altkümesidir ve bu L nin maksimalliği ile çelişir.

2.6.5. Teorem ve 2.6.11.Teoremi birlikte ele alarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

2.6.12.TEOREM : A nın R radikali bir has kapalı iki yanlı idealdir.

2.6.13.TEOREM : Eğer I, A içinde bir has iki yanlı ideal ise A/I bölüm cebiri bir Banach cebiridir.

Kanıt : A / I

$$\{\|x+I\| = \inf \|x+i\| : i\in I\}$$

ile tanımlanan norma göre aşikâr olmayan bir kompleks Banach uzayıdır.

Ek olarak A/I açıkça birimi $e+I$ olan bir cebirdir ve

$\|e+I\| = \inf \{\|e+i\| : i\in I\} \leq \|e\| = 1$ dir. Şimdi de norm için çarpımın sağladığı eşitlik şu şekilde gösterilir.

$$\begin{aligned}
\|(x+I)(y+I)\| = \|xy+I\| &= \inf \{\|xy+i\| : i\in I\} \\
&\leq \inf \{\|(x+i_1)(y+i_2)\| : i_1\in I,\ i_2\in I\} \\
&\leq \inf \{\|x+i_1\|\,\|y+i_2\| : i_1\in I,\ i_2\in I\} \\
&\quad \inf \{\|x+i_1\| : i_1\in I\}\ ,\ \inf\{\|x+i_2\| : i_2\in I\} \\
&= \|x+I\|\,\|y+I\|
\end{aligned}$$

olur. Daima $\|e+I\| \leq 1$ olduğundan

$$\|e+I\| = \|(e+I)^2\| \leq \|e+I\|^2$$

olur. Buradan ise

$$1 \leq \|e+I\|$$

olacaktır. Bu da $\|e+I\| = 1$ olması demektir.

Şimdi bu bölümün bir sonucu olan teoremi verelim.

2.6.14.TEOREM : A/R yarı-basit Banach cebiridir.

Kanıt : $A \longrightarrow A/R$ doğal homomorfizmi A daki maksimal
$x \longrightarrow x+R$

sol idealler ile A/R içinde bunlara karşı gelen maksimal sol ideller arasında bire-bir bir eşleme olduğundan kanıt tamamdır.

Aşağıdaki bölümlerde hemen hemen yalnızca değişmeli Banach cebirleri ile ilgilenilecektir. Bu tip cebirin tüm idealleri iki yanlı ve radikalleri onun maksimal ideallerinin kesişimi olduğu için değişmeli olmayan cebirlerden daha kolay çalışılabilir.

III.BÖLÜM

DEĞİŞMELİ BANACH CEBİRLERİNİN YAPISI

Bir X topolojik uzayı üzerinde tanımlanan bütün sınırlı ve sürekli kompleks değerli fonksiyonların C(X) kümesi bir Banach cebiridir. Bu bölümdeki amacımız Gelfand Naimark teoremi olarak bilinen teoremi kanıtlamaktır. Bu teorem her komutatif A Banach cebirinin uygun bir X kompakt Hausdorff uzayı için C(X) ile özdeş olacağını ifade eder. Buradaki X uzayı A nın iç yapısından elde edilecektir.

3.1. GELFAND DÖNÜŞÜMÜ

A herhangi bir komutatif Banach cebiri olsun. İlk teoremimiz A nın yapı teorisinin temelini oluşturmaktadır.

3.1.1.TEOREM : A bir Bahach cebiri ve M,A içinde bir maksimal ideal olsun. A/M bölüm cebiridir ve $\mathbb{C}$ ye eşittir.

$$A \longrightarrow A/M = \mathbb{C}$$
$$x \longrightarrow x(M)=x+M$$

biçiminde tanımlanan doğal dönüşüm, A içindeki bir x elemanına $\mathbb{C}$ içinde bir $x(M)$ kompleks sayısını karşılık getirir. Bu dönüşüm aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(1) $(x+y)(M) = x(M) + y(M)$

(2) $(\alpha x)(M) = \alpha x(M)$

(3) $(xy)(M) = x(M)\, y(M)$

(4) $x(M)=0$ olması için gerekli ve yeterli koşul $x \in M$ olmasıdır.

(5) $e(M) = 1$

(6) $|x(M)| \leq \|x\|$

Kanıt : M, A içinde kapalı ve iki yanlı ideal olduğundan A/M Banach cebiridir. A birimli olduğundan M bir halka ideali olarakta maksimaldir. Bu nedenle A/M bir bölüm cebiridir. Bu durumda A/M nin öğeleri birimin skaler katlarından oluşur. Bu ise A/M=C oluşunu verir. (1)-(5) özellikleri dönüşümün homomorfizma olmasından elde edilir. $|x(M)| = |x+M| = \| x+M \| = \inf_{m\in M}\{ \| x+m \| \leq \| x \|$

dir. Böylece (6) özelliğini de gösterdiğimizden kanıt biter.

Bu kanıt, bir önceki bölümdeki teoremlerin kanıtlarına bağlıdır.

A birimli ve komutatif bir halka olsun. A nın cisim olması için gerekli ve yeterli koşul A nın bütün ideallerinin sıfırdan farklı olmasıdır" teoremini kullanabilmek için A yı komutatif alalım.

3.1.1 Teoreminin ifadesi içindeki

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow A/M = \mathbb{C} \\ x &\longrightarrow x(M) = x+M \end{aligned}$$

dönüşümünde x(M) gösterimi ile (M nin değil) x in bir fonksiyonu gösteriliyordu. Ancak notasyona ilk bakıldığında bu bize x in sabit M nin değişken olduğu izlenimini verir. Bu notasyona uygun bir dönüşümü şöyle verebiliriz. A nın bütün maksimal ideallerinin kümesini $\mathfrak{M}$ ile gösterelim.

$$\begin{aligned} \hat{x} : \mathfrak{M} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ M &\longrightarrow \hat{x}(M) = x(M) = x+M \end{aligned}$$

şeklinde $\hat{x}$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda bu notasyon esas kimliğine kavuş muş olur.

$$\hat{A} = \{\hat{x} : x \in A\}$$

diyelim. $\mathfrak{M}$ üzerinde $\hat{A}$ nın öğeleri ile üretilen zayıf topolojiyi oluşturalım. Bu topoloji $\hat{A}$ nın tüm öğelerini sürekli kılan en kaba topolojidir ve bir alt taban öğesi

$$S(\hat{x}, M_0, \varepsilon)=\{M \in \mathfrak{M} : |\hat{x}(M)-\hat{x}(M_0)|<\varepsilon\}$$

biçimindedir. Bu topoloji ile $\mathfrak{M}$ uzayına A nın <u>maksimal idealler uzayı</u> denir.

<u>3.1.2. TANIM</u> : Yukarıdaki gösterimlerle $A \longrightarrow \hat{A}$

$x \longrightarrow \hat{x}$

dönüşümüne <u>Gelfand dönüşümü</u> denir.

<u>3.1.3. TEOREM</u> : $A \longrightarrow \hat{A} \subseteq C(\mathfrak{M})$ dönüşümü norm küçükten bir homo-
$x \longrightarrow \hat{x}$

morfizmadır. Aşağıdaki özellikler vardır.

(1) A nın $\hat{A}$ formu $C(\mathfrak{M})$ nün birimini içeren ve $\mathfrak{M}$ nün noktalarını ayıran $C(\mathfrak{M})$ nün bir altcebiridir.

(2) A nın R radikali $\hat{x}=0$ olan bütün x elemanlarının kümesine eşittir. Böylece $x \rightarrow \hat{x}$ dönüşümünün izomorfizma olması için gerekli ve yeterli koşul A nın yarı-basit olmasıdır.

(3) A içindeki bir x elemanı tersinirdir $\Longleftrightarrow$ x hiçbir maksimal ideale ait değildir $\Longleftrightarrow$ $\forall M \in \mathfrak{M}$ için $\hat{x}(M) \neq 0$ dır

(4) A nın herbir x elemanının spektrumu $\hat{x}$ fonksiyonunun değer bölgesine eşittir. x in spektral yarıçapı, $\hat{x}$ in normuna eşittir.Yani $\sigma(x) = \hat{x}(\mathfrak{M})$ ve $r(x)=\sup|\hat{x}(M)| = \|\hat{x}\|$ dir.

<u>Kanıt</u> : $\mathfrak{M}$ üzerindeki topolojinin tanımlanışı $\hat{x}$ fonksiyonlarının sürekliliğini garanti eder. 3.1.1 Teoreminin (6) şıkkından $\hat{x}$lar sınırlıdırlar ve $\|\hat{x}\| = \sup_{M \in \mathfrak{M}} |\hat{x}(M)| \leq \|x\|$ olur, bu ise $x \rightarrow \hat{x}$ dönüşümünün A dan $C(\mathfrak{M})$ içine norm küçülttüğünü verir. Bu dönüşümün homomorfizm olduğu ise 3.1.1 teoreminin (1),(2) ve (3) şıklarından görülür.

(1) $x \rightarrow \hat{x}$ nın bir homomorfizma oluşundan $\hat{A}$ nın $C(\mathfrak{M})$ nün bir altcebiri olduğu açıktır. $\hat{A}$, $\mathfrak{M}$ nün noktalarını ayırır. Gerçekten; $M_1 \neq M_2$ alalım. $\Longrightarrow$ $\exists x \in A$ için $x \in M_1$ fakat $x \notin M_2$ dir. Bu x için

$\hat{x}(M_1)=0$ fakat $\hat{x}(M_2)\neq 0$ olmasıdır. Her $M\varepsilon\mathfrak{M}$ için $\hat{e}(M)=1$ dir.

(2) A nın R radikali bütün M lerin arakesiti idi. 3.1.1.Teoremin (4). şıkkından ise $\hat{x}(M)=0 \iff x\varepsilon M$ idi. Bu ise (2) nin ifadesidir.

(3) 3.1.1. Teoreminin (4). şıkkının değili "x tersinirdir $\Rightarrow$ x hiçbir M ye ait değildir" idi. Buradan bir tersinir elemanının hiç bir has ideal içinde olamayacağı çıkar. x tersinir değilse $Ax=\{yx: y\varepsilon A\}$, A nın x i içeren bir has idealidir ve bir M maksimal ideali içindedir.

(4) x in spektrumu $\sigma(x)$ olsun.

$\lambda\varepsilon\sigma(x) \iff x-\lambda e$ tersinir değildir.

$\iff \exists M\varepsilon\mathfrak{M}$ için $(x-\lambda e)(M)=0$ dır.

$\iff \exists M\varepsilon\mathfrak{M}$ için $(\hat{x}-\lambda e)(M)=0$ dır.

$\iff \exists M\varepsilon\mathfrak{M}$ için $\hat{x}(M)=\lambda$ dır.

$\Rightarrow \sigma(x)=\hat{x}(\mathfrak{M})$ olur. $r(x)=\sup\{|\lambda|:\lambda\varepsilon\sigma(x)\}=\{|\hat{x}(M)| : M\varepsilon\mathfrak{M}\}=\|\hat{x}\|$ olarak elde edilir. Bu ise kanıtı bitirir.

Son olarak $\mathfrak{M}$ 'nün kompakt Hausdorff uzay olduğunu gösterelim. A^*, A nın eşlenik uzayı olmak üzere A^* ın, $S^*=\{f:f\varepsilon A^*, \|f\|\leq 1\}$ kapalı birim yuvarı zayıf* topolojiye göre kompakt Hausdorfftur. Bunu görmek için $\mathfrak{M}$ nün S^* ın kapalı bir altuzayı (küme ve topolojik olarak) olduğunu göstermek yeterlidir.

<u>3.1.4.TANIM</u> : $\forall x,y\varepsilon A$ ve f bir fonksiyonel olsun.

$f(xy)=f(x).f(y)$ ve $f\neq 0$ ise f ye <u>çarpımsal fonksiyonel</u> denir.

<u>3.1.5.LEMMA</u> : f_1, f_2 A üzerinde iki çarpımsal fonksiyonel ve $\text{çek}f_1=\text{çek}f_2=M$ olsun. Bu durumda $f_1=f_2$ dir.

<u>Kanıt</u> : İlk olarak bir α skaleri için $f_1=\alpha f_2$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için $f_1\neq 0$ olduğunu kabul edelim. $f_1=0$ ise $f_2\neq 0$

olamaz. Gerçekten $f_2 \neq 0$ olsaydı $çekf_1=M=A$ ve $f_2:A \to \mathbb{C}$ olduğundan $çekf_2 \neq A$ olur. Bu ise $çekf_1=çekf_2$ oluşu ile çelişir. Böylece $f_1=0$ ise $f_2=0$ dır. Kabul edelimki $f_1 \neq 0$ olsun. $\exists x' \in A$ için $f_1(x') \neq 0$ olur. $V=\dfrac{x'}{f_1(x')}$ diyelim. $f_1(V)=\dfrac{f_1(x')}{f_1(x')}=1$ dir. Böylece $f_1 \neq 0$ olduğunda $f_1(v)=1$ olan $\exists v \in A$ vardır. $\forall\, x \in A$ için $y=x-f_1(x).v$ vektörünü tanımlıyalım.

$f_1(y)=f_1(x-f_1(x)v)=f_1(x)-f_1(x)f_1(v)=f_1(x)-f_1(x)=0 \Rightarrow y\ çekf_1=çekf_2$

$\Rightarrow f_2(y)=f_2(x)-f_1(x)f_2(v)=0 \Rightarrow f_2(x)=f_1(x)f_2(v)$ olur. Buradan

$\alpha=f_2(v)$ seçilirse $f_2(x)=\alpha f_1(x) \Rightarrow f_2=\alpha f_1$ olur. Şimdi α nın 1 e eşit olduğunu gösterelim.

$$\alpha.(f_1(x))^2=\alpha f_1(x^2)=f_2(x^2)=(f_2(x))^2=(\alpha f_2(x))^2=\alpha^2(f_1(x))^2$$

dir. $v \in çekf_1=çekf_2$ olduğundan da $\alpha \neq 0$ dır ve $\alpha^2=\alpha$ olduğundan $\alpha=1$ olmak zorundadır $\Rightarrow f_1=f_2$ dir.

<u>3.1.6.LEMMA</u> : A bir Banach cebiri ve f A üzerinde tanımlı, sürekli çarpımsal bir fonksiyonel olsun. f nin çekirdeği A nın kapalı maksimal bir idealidir.

<u>Kanıt</u> : M= çek(f) diyelim. $M \subseteq A$ ve M nin bir ideal olduğu açıktır. $f^{-1}(\{0\})=M=\{x:f(x)=0\}$, f sürekli ve $\{0\} \subseteq C$ kapalı olduğundan M kompakttır. Şimdi M nin has ideal olduğunu gösterelim. $M \neq A$ dır. Gerçekten; $M=A$ olsaydı $f=0$ olurdu. Bu ise S nin çarpımsal fonksiyonel oluşu ile çelişirdi. $M \neq \{0\}$ dır. Gerçekten; $M=\{0\}$ olsaydı sıfırdan farklı her $z \in A$ için $f(z) \neq 0$ olurdu. Bir $z_0 \in A$, $z_0 \neq 0$ için $v=\dfrac{z_0}{f(z_0)} \in A$ dır. ve $f(v)=1$ dir. $y=x-f(x)v \neq 0$ diyelim.
$f(y)=f(x)-f(x).f(v)=f(x)-f(x)=0 \Rightarrow y \in M=\{0\}$ olur ki bu $y \neq 0$ oluşuyla çelişir. M, A nın bir has idealidir. Şimdi de M nin maksimal olduğunu gösterelim. Kabul edelimki M maksimal olmasın. Bu durumda A nın $M \subsetneq N \subsetneq A$ olan bir N ideali vardır. Bu durumda $z \in N$ fakat

$z \notin M$ olan $\exists z \varepsilon A$ vardır. Buradan $f(z) \neq 0$ dır. $v = \frac{z}{f(z)}$ dersek $f(v)=1$ dir. $\forall x \varepsilon A$ için $y = x - f(x)v \varepsilon A$ yı tanımlayalım. $f(y)=0 \Rightarrow y \varepsilon M \Rightarrow M \subseteq N \Rightarrow y \varepsilon N \Rightarrow x = y + f(x)v \varepsilon N$ olur. $\Rightarrow \forall x \varepsilon A$ için $x \varepsilon N$ dir. $\Rightarrow A \subseteq N$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde M maksimaldir.

A üzerinde tanımlı bütün çarpımsal fonksiyonellerin kümesini $\c{C}\mathfrak{F}$ ile gösterelim. Yani

$\c{C}\mathfrak{F} = \{f : f : A \to C,\ f \neq 0,\ f$ sürekli, $\forall x\ y \varepsilon A$ için $f(xy) = f(x)f(y)\}$ olsun. Bir $M \varepsilon \mathfrak{M}$ için $f_M : A \to C$, $f_M(x) = x(M)$ ile tanımlı f_M dönüşümünün çarpımsal fonksiyonel olduğu açıktır.

3.1.7. TEOREM : $\mathfrak{M}$ maksimal idealler uzayından, çarpımsal fonksiyoneller kümesi üzerinde tanımlı $M \to f_M$ fonksiyonu 1:1 ve örtendir.

Kanıt : $M_1, M_2 \varepsilon \mathfrak{M}$ ve $M_1 \neq M_2$ olsun. $\exists x \varepsilon A$ için $x \varepsilon M_1$ ve $x \notin M_2$ olur. Bu durumda $f_{M_1}(x) = x(M_1) = 0$ ve $f_{M_2}(x) = x(M_2) \neq 0$ dır. Böylece $f_{M_1} \neq f_{M_2}$ olup $M \to f_M$ fonksiyonu 1:1 dir. Şimdi fonksiyonun örtenliğini gösterelim. $f \varepsilon \c{C}\mathfrak{F}$ herhangi öge olsun. çek$f = M \varepsilon \mathfrak{M}$ diyelim. f_M ile f nin çekirdek uzayları aynı olduğundan $f = f_M$ olur. Böylece $M \to f_M$ fonksiyonu örtendir.

Bu teorem, A içindeki maksimal ideallerin belirlenmesi cebirsel problemini; A üzerindeki çarpımsal fonksiyonellerin bulunması analitik problemine dönüşebileceğini verir. 3.1.1 Teoremin (5) ve (6) şıklarından f_M fonksiyonelinin normu 1 olacağından $\mathfrak{M}$, S^* ın bir altkümesi olarak görülebilir. S^*

$$F_x : S^* \to C$$
$$f \to F_x(f) = f(x)$$

olarak tanımlı F_x fonksiyonelleri S^* üzerinde zayıf topolojiyi göre kompakt Hausdorff idi. F_x leri $\mathfrak{M}'$ye kısıtlarsak $F_x = \hat{x}$ olur.

Gerçekten,

$$F_x(f_M) = f_M(x) = x(M) = \hat{x}(M)$$

dir. Bu nedenle S^* ın $\mathfrak{M}$'ye indirgendiği topoloji ile $\mathfrak{M}$'nün kendi topolojisi aynı olur. Bu yaptıklarımız $\mathfrak{M}$'yü S^* ın bir altuzayı olarak görmemizi sağlar.

3.1.8. TEOREM : $\mathfrak{M}$ maksimal idealler uzayı kompakt Hausdorfftur.

Kanıt : $\mathfrak{M}$, S^* ın bir altuzayı olarak düşünülebiliyordu. $\mathfrak{M}$'nün kapalı olduğunu göstermek kanıt için yeterlidir.

$$X = \bigcap_{x,y\in A} \{f : f\in S^* \text{ ve } f(xy) = f(x)f(y)\}$$

X, $\mathfrak{M}$ ile sıfır fonksiyonelinin bileşimine eşittir ve

$$X = \bigcap_{x,y\in A} \{f : f\in S^* \text{ ve } f(xy) - f(x)f(y) = 0\}$$

$$= \bigcap_{x,y\in A} \{f : f\in S^* \text{ ve } F_{xy}(f) - F_x(f)F_y(f) = 0\}$$

$$= \bigcap_{x,y\in A} \{f : f\in S^* \text{ ve } (F_{xy} - F_xF_y)(f) = 0\}$$

$$= \bigcap_{x,y\in A} (F_{xy} - F_xF_y)^{-1}(\{0\})$$

yazılır. X, S^* ın kapalı bir altkümesidir.

$$F_1 : X \to C \quad , \quad F_1(f) = \begin{cases} 1 \ , & f\in \mathfrak{M} \\ 0 \ , & f=0 \end{cases}$$

düşünülürse $\mathfrak{M}$, X içinde kapalı olur. Dolayısıyla S^* içinde de kapalı olur. Böylece $\mathfrak{M}$ kompakt ve Hausdorfftur.

$\mathfrak{M}$ kompakt Hausdorfftur. $\hat{x}$ ları sürekli kılan ve kompakt Hausdorff olan bütün topolojiler $\mathfrak{M}$'nün topolojisine eşit olurlar. Gerçekten, bir kompakt uzaydan bir Hausdorff uzaya tanımlı 1:1 ve sürekli fonksiyonlar homemorfizma olacağından $\mathfrak{M}$ üzerindeki bu topoloji tektir.

Sonuç olarak yukarıdaki ifadelerden yarı-basit Banach cebirinin; A dan elde edilen $\mathfrak{M}$ kompakt Hausdorff uzayı için; $\mathfrak{M}$ üzerinde sürekli kompleks değerli fonksiyonların $C(\mathfrak{M})$ cebiri içine izomorf olduğu sonucu çıkar. Buna <u>Gelfand Temsil Teoremi</u> denir. Genelde norm bu izomorfizma ile korunmaktadır. Bu nedenle temsil edilen cebir $\mathfrak{M}$ üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonları bitiremez. Bu ise bir eksikliktir. Bu eksikliği bir sonraki bölümde gidereceğiz.

3.2. $r(x)=\lim \|x^n\|^{1/n}$ FORMULONUN UYGULAMALARI

Değişmeli bir A Banach cebiri ve A nın A dan $C(\mathfrak{M})$ nün $\hat{A}$ altcebirine tanımlı olan Gelfand dönüşümünü çalışmaya devam edeceğiz. İlk olarak bu dönüşümün norm koruyan olmasını garantileyen bir teorem verelim.

<u>3.2.1. TEOREM</u> : Aşağıdaki koşullar denktir.

(1) Her $x \in A$ için $\|x^2\| = \|x\|^2$

(2) Her $x \in A$ için $r(x)=\|x\|$

(3) Her $x \in A$ için $\|\hat{x}\| = \|x\|$

<u>Kanıt</u> : (1) $\Longrightarrow$ (2): Her $x \in A$ için $\|x^2\| = \|x\|^2$ olsun. $\|x^4\| = \|(x^2)^2\| = \|x^2\|^2 = \|x\|^4$ olur. Böyle devam edilerek $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\|x^{2k}\| = \|x\|^{2k}$ olduğu elde edilir. Spektral yarıçapın daha önceki ifadesinden $r(x)=\lim \|x^n\|^{1/n}=\lim \|x\|=\|x\|$ olduğu elde edilir.

(2) $\Longrightarrow$ (1): $\|x^2\| = r(x^2)=(r(x))^2=\|x\|^2$ olur.

(2) $\Longrightarrow$ (3): 3.1.3 Teoremden sağlanır.

$\hat{A}$ nın $C(\mathfrak{M})$ ye ne kadar yakın olduğunu görebilmek için aşağıdaki tanımı verelim.

3.2.2.TANIM : A bir Banach cebiri olsun. $\forall x \in A$ için $M \in \mathfrak{M}$ olduğunda $\hat{y}(M) = \overline{\hat{x}(M)}$ olacak şekilde yine A içinde bir y elamanı varsa A ya, self-adjointtir denir.

3.2.3. TEOREM : Eğer A self-adjoint ise $\bar{\hat{A}}$, $C(\mathfrak{M})$ içinde yoğundur.

Kanıt : 3.1.3 Teoremin (1) inden $\hat{A}$ birim fonksiyonu içeren ve $\mathfrak{M}$ nün noktalarını ayıran $C(\mathfrak{M})$ nün bir altcebiri olduğunu biliyoruz. $\hat{A}$ bir altcebir olduğunda $\bar{\hat{A}}$ de $C(\mathfrak{M})$ nün bir altcebiridir. Hipotezden $\bar{\hat{A}}$ da $\mathfrak{M}$ nün noktalarını ayıran birim fonksiyonu, öğelerinin eşleniklerini içeren $C(\mathfrak{M})$ nün bir altcebiridir. Kompleks Stone-Weierstrass teoreminden $\bar{\hat{A}} = C(\mathfrak{M})$ olur. Böylece $\hat{A}$, $C(\mathfrak{M})$ içinde yoğundur.

Yukarıdaki iki teoremden şu teorem verilebilir.

3.2.4. TEOREM : Eğer A self-adjoint ve $\forall x \in A$ için $\|x^2\| = \|x\|^2$ ise $x \to \hat{x}$ Gelfand dönüşümü A dan $C(\mathfrak{M})$ üzerine bir izometrik izomorfizmadır.

Kanıt : $\|x^2\| = \|x\|^2$ olduğundan 3.2.1 teoreme göre $x \to \hat{x}$ dönüşümü normu korur. Bu nedenle bu dönüşüm A dan $\hat{A}$ üzerine izometrik izomorfizmadır. $\hat{A}$, $C(\mathfrak{M})$ içinde kapalı ve 3.2.3 teoremden $\hat{A}$,$C(\mathfrak{M})$ içinde yoğun olduğundan $\hat{A}=C(\mathfrak{M})$ olur ve kanıt biter.

3.3. BANACH CEBİRİ İÇİNDEKİ İNVOLUTİONLAR

Bir önceki kesimde verilen A nın self-adjointlik şartı, A nın kendi yapısından oldukça uzak ek bir şart olduğu için bu şartın gerçekleşmesi oldukça zordur. Bu kesimde bu eksikliği gidermeye çalışacağız. 3.2.4 Teoremi uygulayacağımız operatör cebiri ile daha yakın bağıntılar geliştireceğiz.

3.3.1. TANIM : a) A bir Banach cebiri ve $\alpha \in \mathbb{K}$, $x,y \in A$ olsun.

$A \to A$ ya $x \to x^*$ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahipse bu dönüşümün A üzerinde bir involution denir. $\alpha \in \mathbb{K}$, $x,y \in A$

1) $(x+y)^* = x^*+y^*$

2) $(\alpha x)^* = \bar{\alpha} x^*$

3) $(xy)^* = y^*x^*$

4) $x^{**} = x$

b) A Banach cebiri bir involusyona sahipse A ya bir Banach*-cebiri denir.

c) x^* elemanına x in adjointi denir.

d) A nın bir altcebiri elemanlarının herbirinin adjointlerini içeriyorsa bu cebire self-adjointtir denir.

e) A, A' iki Banach*-cebiri, $f:A \to A'$ bir izomorfizma ve $\forall x \in A$ için $f(x^*)=(f(x))^*$ oluyorsa f ye *-izomorfizması denir.

3.3.2. TEOREM : A bir Banach*-cebiri olsun.

(i) $A \to A$, $x \to x^*$ dönüşümü 1:1 ve örtendir.

(ii) $e^* = e$ dir.

(iii) $0^* = 0$ dır.

Kanıt : (i) $x^*=y^* \Rightarrow (x^*)^* = (y^*)^* \Rightarrow x=y$ olur. Yani dönüşüm 1:1 dir.

(ii) $e^*=e.e^*=e^{**}.e^* = (e.e^*)^* = e^{**} = e$ dir.

(iii) $0+x^* = x^* = (0+x)^* = 0^*+x^* \Rightarrow 0=0^*$ dır.

3.3.3. TANIM : A bir Banach * cebiri olsun. $\forall x \in A$ için $\|x\|^2 = \|xx^*\|$ oluyorsa A ya B*-cebiri denir.

3.3.4. TEOREM : Bir A B*-cebirinde

a) $\forall x \in A$ için $\|x\| = \|x^*\|$ dır.

b) $\forall x \in A$ için $\|xx^*\| = \|x\|\|x^*\|$ dır.

c) $A \to A$, $x \to x^*$ dönüşümü süreklidir.

Kanıt : a) $\|x\|^2 = \|x^*x\| \leq \|x\| \|x^*\|$ olduğundan $\|x\| \leq \|x^*\|$ dır. Buradan da $\|x^*\| \leq \|x^{**}\| = \|x\|$ olur. Bu nedenle $\|x^*\| = \|x\|$ dır.

b) $\|x\|^2 = \|x\| \leq \|x\| = \|x\| \|x^*\|$ diğer taraftan $\|x\|^2 = \|xx^*\|$ olduğundan $\|xx^*\| = \|x\|^2 = \|x\| \|x^*\|$ olur.

c) İnvolution süreklidir. Gerçekten $\|x_n^* - x^*\| = \|(x_n - x)^*\| = \|x_n - x\|$ dir. Böylece de $x_n \to x$ iken $x_n^* \to x^*$ olur.Bu involution un sürekliliğini verir.

Daha önce verilen Banach cebiri örneklerinden bazıları doğal involutiona göre Banach*-cebiridirler.

1) X herhangi bir topolojik uzay olmak üzere $C(X)$ Banach cebirinden kendi üzerine $f^*(x) = \overline{f(x)}$ ile tanımlı involution dönüşümüne göre bir B*-cebiridir.

2) H Herhangi bir Hilbert uzay olmak üzere $\beta(H)$ dan $\beta(H)$ ya her operatörü adjointine taşıyan $T \to T^*$ dönüşümü involutiondur. Buna göre $\beta(H)$ B*-cebiridir. Ayrıca C*-cebirleri $\beta(H)$ nın self-adjoint Banach altcebirleri olduklarından onlarda B*-cebirleridirler.

3) G bir sonlu grup olmak üzere, $L(G)$ grup cebirinden kendi üzerine $f^*(g_i) = \overline{f(g_i^{-1})}$ biçiminde tanımlı involutiona göre Banach*-cebiridir ve $\|f\| = \|f^*\|$ dır.

Fakat Disk cebiri B*-cebiri değildir. Gerçekten, $f(z)=z$ analitiktir. Ancak $f^*(z)=\bar{z}$ analitik değildir.

3.3.5. TANIM : A bir B*-cebiri olsun. $x \in A$ nın adjointi x^* olsun.

(i) $x=x^*$ ise x e self-adjointtir.

(ii) $xx^*=x^*x$ ise x e normaldir.

(iii) $x=x^*$ ve $x^2=x$ ise x e izdüşüm denir.

3.3.6. TEOREM : x, bir B*- cebiri içinde normal bir eleman ise

$\|x^2\| = \|x\|^2$ dir.

Kanıt : $\|x^2\| = \|xx\| \leq \|x\|^2$ dir. Diğer taraftan $\|x^*\|^2 \|x\|^2 = (\|x^*\| \|x\|)^2$

$= \|x^*x\|^2 = \|(x^*x)^*x^*x\| = \|x^*xx^*x\| = \|x^*x^*xx\| = \|(x^*)^2 x^2\|$

$= \|(x^2)^* x^2\| \leq \|x^*\|^2 \|x^2\| \implies \|x^2\| \leq \|x^2\|$ olduğundan $\|x^2\| = \|x\|^2$

dir.

Bu sonuç B*-cebirleri ile Hilbert uzaylar üzerindeki operatörler arasında yakın bir ilişkinin olduğu savını güçlendirir. Bu ilişkinin varlığı ileride görülecektir.

3.4. GELFAND-NEUMARK TEOREM

Şimdi 3.2.4 Teoreminin son durumunu ifade edelim.

3.4.1. TEOREM : A değişmeli B*-cebiri olsun. $x \to \hat{x}$ Gelgand dönüşümü A dan $C(\mathfrak{M})$ değişmeli B*-cebiri üzerine bir izometrik* izomorfizmasıdır.

Kanıt : A değişmeli olduğundan A nın her elemanı normaldir. Bu nedenle $\forall x \in A$ için $\|x^2\| = \|x\|^2$ dir. Ayrıca A nın self-adjoint olduğunu gösterirsek kanıt biter. İddiamız $\hat{x}^* = \overline{x\ (M)}$ dır. Bunun için ilk olarak x self-adjoint ise $\forall M \in \mathfrak{M}$ için $\hat{x}(M)$ nün gerçel olacağını kanıtlayalım.

Kabul edelimki bu doğru olmasın bu durumda $\exists M \in \mathfrak{M}$ için $\hat{x}(M) = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$ olurdu. x self-adjoint olduğundan $y = \frac{x-\alpha e}{\beta}$ da self-adjointtir. Ayrıca

$$\hat{y}(M) = \frac{\widehat{x-\alpha e}}{\beta}(M) = \frac{1}{\beta}(x-\alpha e)+M$$

$$= \frac{1}{\beta}(\hat{x}(M) - \alpha e(M)) = \frac{1}{\beta}(\alpha+i\beta)+M - \frac{\alpha}{\beta}+M$$

$$= \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\beta} i - \frac{\alpha}{\beta} = i$$

den $\hat{y}(M)=i$ dir. Buradan $(y-ei)(M)=0 \Rightarrow y-ei\in M$ olur. Bu $M\in\mathfrak{M}$ için $M^* =\{m^* : m\in M\}$ nin bir maksimal ideal olduğu A içindeki involution dan açıktır. M^*, $(y-ei)^* = y+ei$ öğesini bulundurduğundan $\hat{y}(M^*) = -i$ olur. $K>0$ bir sayı ise $\widehat{(y-iKe)}(M^*)=-i(1+K)$ olur. Buradan

$$1+K\leq \| y-iKe \| \leq \| \widehat{y-iKe} \|$$

olduğu görülür. Benzer biçimde

$$1+K\leq \| y+iKe \| \leq \| \widehat{y+iKe} \|$$

olur. Bu iki eşitsizliği taraf tarafa çarparak

$$\begin{aligned}(1+K)^2 &\leq \| y-iKe \| \, \| y+iKe \| = \| (y+iKe)^* \| \, \| y+iKe \| \\ &= \| (y+iKe)^*(y+iKe) \| = \| (y-iKe)(y+iKe) \| \\ &= \| y^2+K^2e \| \leq \| y^2 \| + K^2\end{aligned}$$

olur. Böylece $1+2K \leq y^2$ dır. K keyfi sabit olduğundan bu imkansızdır. Bu çelişkiden x self-adjoint ise $\hat{x}$ gerçeldir.

x, A nın herhangi bir elemanı ise $\hat{x}^*(M)=\overline{\hat{x}(M)}$ olduğunun gösterilmesi kanıt için yeterlidir.

$y=\frac{x+x^*}{2}$ ve $z=\frac{x-x^*}{2i}$ self-adjoint ve $x=y+iz$ olduğu açıktır. Bu nedenle

$$\hat{x}^*(M)=(y-iz)(M) =\hat{y}(M)-i\hat{z} = \overline{\hat{y}(M)}-i\overline{\hat{z}(M)} = \overline{\hat{y}(M)+i\hat{z}(M)} = \overline{\hat{x}(M)}$$

oldugunu $\hat{y}(M)$ ve $\hat{z}(M)$ nin gerçel olmalarından elde ederiz. Böylece kanıt bitmiş olur.

X kompakt Housdorff olduğunda C(X) in değişmeli B*-cebiri olduğunu bildiğimizden kanıtladığımız teorem her değişmeli B*-cebirinin uygun bir X kompakt Hausdorff uzayı için C(X) e özdeş olduğu nu ifade eder. Yani degişmeli B*-cebirleri soyut C(X) lerdir.

Şimdiye kadar değişmeli B*-cebirleriyle ilgilendik. Değişmeli olmayan B*-cebirlerine uygulanan bir başka Gelfand Neumark teoremi vardır.

Her C^*-cebirinin bir B^*-cebiri olduğunu daha önce gördük. Bunun tersi de doğrudur. A bir B^*-cebiri ise A nın verilen yapısından oluşturulan bir Hilbert uzayı için A, $\beta(H)$ ya izometrik*-izomorfizm olur. Bu nedenle B^*-cebirleri soyut C^*-cebirleridir.

IV.BÖLÜM

BAZI ÖZEL DEĞİŞMELİ BANACH CEBİRLERİ

Bu bölümdeki amacımız daha önce sonlu durum için sunduğumuz spektral teoremin genel bir formunu ifade etmek ve kanıtlamaktır.

4.1. C(X) DEKİ İDEALLER VE BANACH STONE TEOREMİ

Bu kesime sürekli fonksiyonların Bahach cebirleri ile ilgili ek bilgiler vererek başlayalım. İlk olarak X kompakt Hausdorff iken X in noktalarıyla C(X) in maksimal idealleri doğal bir yolla bire-bir eşlendiğini kanıtlayalım.

4.1.1.TEOREM : X bir kompakt Hausdorff uzay, $\mathfrak{M}$ de C(X) değişmeli B*-cebirinin maksimal idealler uzayı olsun. Herhangi bir $x\in X$ için

$$M_x = \{ f\in C(X) : f(x)=0 \} \subseteq c(X)$$

ile tanımlı M_x, C(X) in bir maksimal idealidir. X den $\mathfrak{M}$ ye $x \to M_x$ ile tanımlı dönüşüm 1:1 ve örtendir. Bu dönüşüm yardımıyla X $\mathfrak{M}$yü belirlediğinden $\mathfrak{M}$ ile X topolojik olarak eşittirler. Dolayısıyla $C(\mathfrak{M})$, C(X) e eşit olur.

Bu durumda Gelfand dönüşümü C(X) den kendi üzerine özdeşlik dönüşümüdür.

Kanıt : x, X içinde herhangi bir eleman olmak üzere $M_x = \{ f\in C(X) : f(x)=0 \}$ kümesi C(X) in maksimal has idealidir. Gerçekten $f_{M_x} : C(X) \longrightarrow \mathbb{K}$, $f_{M_x}(f) = f(x)$ çarpımsal fonksiyonelini tanımlayalım.

$$\text{Çek}F_{M_x} = \{ f\in C(X) : F_{M_x}(f) = f(x) = 0\} = M_x \quad \text{olur.}$$

Herbir $x\in X$ için M_x maksimal ideal ve $M_x\in \mathfrak{M}$ dür.

Şimdi X den $\mathfrak{M}$ ye tanımlı $x \to M_x$ dönüşümünün 1:1 ve örtenliğini görelim. $x,y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. X kompakt Hausdorff olduğundan normaldir. Urysohn teoremden $f(x)=0$, $f(y) \neq 0$ olan en az bir $f \in C(X)$ vardır. $f(x)=0$ olduğundan $f \in M_x$ fakat $f(y) \neq 0$ olduğundan $f \notin M_y$ dir. Buradan $M_x \neq M_y$ olur. Böylece $x \to M_x$ dönüşümü 1:1 dir.

M, C(X) in bir maksimal ideali olsun. $\forall f \in M$ için $f(x)=0$ olan bir $x \in X$ bulacağız. Kabul edelim ki böyle bir x bulunmasın. Bu durumda $\forall x \in X$ için $f(x) \neq 0$ olan en az bir $f \in M$ vardır. $f(x) \neq 0$ ve f sürekli olduğundan x in öyle bir u_x komşuluğu vardır ki $\forall z \in U_x$ için $f(z) \neq 0$ olur. Herbir $x \in X$ için bu işi tekrarlarsak $\mathcal{U} = \{U_x : x \in X\}$, X uzayının bir açık örtüsü olur. X kompakt olduğundan $\exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ öyleki $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ olur. M nin bu $x_i \in X$ $(i=1,2,\ldots,n)$ lere karşı gelen f_i leri kullanarak

$g = \sum_{i=1}^{n} f_i \overline{f_i} = \sum_{i=1}^{n} |f_i|^2$ fonksiyonunu tanımlayalım. M ideal olduğu için $g \in M$ dir. g nin tanımlanışından $\forall x \in X$ için $g(x) > 0$ dır. Böylece g, C(X) içinde tersinir bir öğe olur. Buradan $M = C(X)$ olurki bu M nin C(X) in bir has ideali oluşu ile çelişir. Bu çelişkiden X in öyle bir x elemanı vardır ki M içindeki her öğe bu x için sıfır değerine sahip olur. $M \in$ için $\exists x \in X$, öyleki $x \to M_x = M$ olur.

Bu incelemelerin ışığında $\mathfrak{M}$'yü X 'i kullanarak elde edebiliriz. X ile $\mathfrak{M}$ kompakt Hausdorff olduklarından bu iki uzayı elemanları aynı olan bir küme üzerine oturtulmuş farklı iki kompakt Hausdorff uzayıymış gibi düşünebiliriz. Önceki bölümden $f \to \hat{f}$ Gelfand dönüşümünü C(X) den $C(\mathfrak{M})$ üzerine 1:1 bir dönüşümdür.

Oradaki notasyonlarla $\hat{f}(M_x) = f(M_x) = f_{M_x}(f) = f(x)$ olduğundan $\hat{f}=f$ ve dolayısıyla $C(\mathfrak{M})=C(X)$ olur. $\mathfrak{M}$ ve X kompakt Hausdorff olduklarından tamamen regülerdirler. $C(\mathfrak{M},\mathbb{C})$ ve $C(X,\mathbb{C})$ sırasıyla $\mathfrak{M}$'nün ve X in noktalarını ayırırlar. Bu nedenle de $C(\mathfrak{M},\mathbb{C})$ nin üzerinde ürettiği zayıf topoloji ile $\mathfrak{M}$'nün kendi topolojisi çakışır. Aynı şekilde $C(X,\mathbb{C})$ nin X üzerinde ürettiği zayıf topoloji ile X in orjinal topolojisi aynı olur. $C(\mathfrak{M})=C(X)$ olduğundan $\mathfrak{M}$ ve X in topolojileri aynı olurlar.

Böylece X kompakt Hausdorff iken X in noktalarıyla $C(X)$ in maksimal ideallerinin doğal olarak bire-bir eşlendiği gösterilmiş oldu.

Şimdi de X kompakt Hausdorff uzay iken X in kompakt altkümeleriyle $C(X)$ içindeki has ideallerin bire-bir eşlenebileceğini gösterelim.

4.1.2.TEOREM : X bir kompakt Hausdorff uzay olsun. Bu durumda X içindeki boş olmayan her F kapalı altkümesine $C(X)$ içinde

$$I(F) = \{ f\in C(X) : f(F)=0 \}$$

biçiminde tanımlı bir kapalı, has $I(F)$ ideali karşılık gelir. X in boş olmayan kapalı altkümeler ailesinden, $C(X)$ içindeki kapalı has idealler ailesi üzerine tanımlı $F \to I(F)$ dönüşümü 1:1 ve örtendir.

Kanıt : X kompakt Hausdorff ve $F\subseteq X$ kapalı bir altküme olsun. $I(F) = \{ f\in C(X) : f(F)=0 \}$ kümesi $C(X)$ in bir kapalı has idealdir. X in boş olmayan kompakt alt kümeler ailesinden $C(X)$ in kapalı has idealleri üzerine tanımlı $F \to I(F)$ dönüşümü 1:1 dir. Gerçekten; $F_1, F_2\subseteq X$ kapalı altkümeler ve $F_1\neq F_2$ olsun. Bu durumda $\exists x_0\in X$ öyleki $x_0\in F_1$ fakat $x_0\notin F_2$ dir. X tamamen regüler olduğundan en az bir sürekli f fonksiyonu için $f(x_0)\neq 0$ ve $f(F_x)=0$ olur. $f\in I(F_2)$ fakat $f\notin I(F_1)$ olur $\Rightarrow$ $I(F_1)\neq I(F_2)$ olur.

Şimdi örtenliği görelim. I, C(X) içinde bir kapalı has ideal olsun. I nın sıfır olmayan bir ideal olduğunu kabul edelim. $I(F) = I$ olan bir $F\subseteq X$ kapalı altkümesi bulmalıyız. $F=\{x\in X : \forall f\in I$ için $f(x) = 0\}$ kümesini tanımlayalım. F nin içinde boş olmayan kapalı bir has altküme olduğu açıktır. Gerçekten; I kapalı, has bir ideal olduğundan I bir maksimal ideal içindedir. X in noktalarıyla maksimal idealler bire-bir eşlenebildiği için $F\neq\emptyset$ dir.

Şimdi $I(F)=I$ olduğunu gösterelim. $I\subseteq I(F)$ olduğu açıktır. Böylece geriye $I(F)\subseteq I$ olduğunu göstermek kalıyor. $f\in I(F)$ olsun. $f\neq 0$, $f(F)=0$ dır. Kabul edelim ki $F\subseteq G$, G açık ve $f(G)=0$ olsun. $G' =X\setminus G$ boş olmayan kapalı bir kümedir. Dolayısıyla kompakttır. Bir $x\in G'$ için $\exists g\in I$ öyleki $g(x)\neq 0$ dır. Aksi halde X in I altuzayının tamamen regülerliği ile çelişki ortaya çıkar. Gerçekten $x\in G'$ ise $x\notin F$ olur. F kapalı olduğundan $\exists g\in I \ni g(F)=0$ ve $g(x)\neq 0$ olmalıdır. g sürekli olduğundan g, x in bir u_x komşuluğunda sıfırdan farklıdır. Bunu her bir $x\in G'$ için tetrarlarsak

$\mathcal{U} = \{u_x : x\in G'\}$ G nün bir açık örtüsü olur. G' kompakt olduğundan $\exists u_{x_1}, u_{x_2},\dots, u_{x_n}\in\mathcal{U}$ $\exists G'=\bigcup_{i=1}^{n} u_{x_i}$ olur. Bu

u_{x_i} $(i=1,2,\dots,n)$ lere karşı gelen g_i leri kullanarak

$g_0=\sum_{i=1}^{n} g_i\overline{g_i} = \sum_{i=1}^{n} |g_i|^2$ diye bir g_0 fonksiyonunu tanımlayalım.

$g_0\in I$ dır ve $\forall x\in G'$ için $g_0(x)>0$ dır. Tietze genişleme teoreminden G' üzerinde $\frac{1}{g_0}$ fonksiyonunun C(X) içinde bir h fonksiyonuna genişletilebilir. $g_0 h \in I$ dır ve $\forall x \in G'$ için $g_0 h(x)=1$ dir. $f= f \circ g_0 \circ h$ denirse $f \in I$ olduğunu gösterirsek; buradan $I(F) \subseteq I$ ve $I= I(F)$ olur. Dolayısıyla $F \to I(F)$ dönüşümü X in kapalı kümelerinden C(X) in kapalı has idealleri kümesi üzerine örten bir dönüşüm olur.

Şimdi $f \in I$ olduğunu gösterelim. Her $\varepsilon>0$ için $K= \{x : |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\}$ ve $L= \{x : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ kapalı kümelerini tanıyalım. $f \neq 0$ olduğundan ε yeterince küçük seçilirse $L \neq \emptyset$ olur. X normal uzay $K \cap L= \emptyset$ olduğundan böyle bir $\varepsilon > 0$ için Urysohn Lemma kullanılırsa $g(K)=0$, $g(L)=1$ olan bir $g:X \to [0, 1]$ sürekli fonksiyonu ($g \in C(X)$) vardır. $h=fg$ diyelim. $h \in C(X)$ dir. Bu h fonksiyonu için

$\| f-h\| =\| f-fg\| = \| f(1-g)\| \leq \varepsilon$ olur, h, $G= \{x: f(x) < \frac{\varepsilon}{2}\}$

kümesi üzerinde sıfır olur. $F \subsetneq G$ ve G açık olduğundan $h \in I$ dır. Buna göre f, I nın bir yığılma noktasıdır. I kapalı olduğundan bütün yığılma noktalarını bulundurur. $f \in I$ dır ve kanıt biter.

Şimdi bu teoremin bir sonucunu verelim.

<u>4.1.3. TEOREM</u> : X bir kompakt Hausdorff uzay ise C(X) içindeki her kapalı ideal, onu içeren maksimal ideallerin arakesitine eşittir.

<u>Kanıt</u> : Maksimal ideallerin boş ailesinin arakesiti C(X) i vereceğinden kanıtı C(X) in I kapalı has idealleri için yapmak yeterlidir. 4.1.2 Teoremden boş olmayan kapalı her F kümesi için $I(F)=I$ dır. I yı içeren maksimal idealler kesin olarak F nin noktalarına karşı gelen maksimal ideallerden oluşur. Bu nedenle $f \in I(F) \iff f(F) = 0 \iff$ her bir $x \in F$ için $f(x)=0 \iff M_x = \{f \in C(X) : f(x)=0\}$ olmak üzere herbir $x \in F$ için $f \in M_x$ dir $\iff f \in \bigcap_{x \in F} M_x$.

$I(F) = I = \bigcap_{x \in F} M_x$ olur ve kanıt biter.

Şimdiye kadar bir kompakt Hausdorff uzayın topolojisinin ve noktalarının C(X) deki maksimal ideallerden elde edilebileceğini 4.1.1 Teoremde gördük. Maksimal idealler tamamen cebirsel nesneler olduklarından, X uzayı hem kümesel ve hem de topolojik olarak C(X) in yapısından kesin olarak belirlenir. Bu nedenle aşağıdaki teorem açıktır.

<u>4.1.4. TEOREM (Banach-Stone Teorem)</u>: X ve Y kompakt Hausdorff uzaylarının homeomorfik olmaları için gerekli ve yeterli koşul bunlara karşı gelen C(X) ve C(Y) fonksiyon cebirleri izomorfiktirler.

<u>4.2.STONE-CECH TIKIZLAMASI</u> :

Kompakt Hausdorff uzay olmayan bir X topolojik uzay için bir önceki kısımdaki 4.1.1 Teoremin ifadesinin nasıl değişeceğini merak ederiz. X topolojik uzayı ne olursa olsun C(X) in bir değişmeli B*-cebiri, onun $\mathfrak{M}$ maksimal idealler uzayı kompakt Hausdorff uzay ve $x \to M_x$ dönüşümü de X den $\mathfrak{M}$ ye bir dönüşüm olur. Buradaki problemimiz X den $\mathfrak{M}$ ye tanımlı $x \to M_x$ dönüşümünün 1:1 liği, örtenliği homomorfizma veya izomorfizma olup olmadığı hakkında hiçbir şey söylememektir.

X uzayının tamamen regüler olmadığını kabul edersek $x \to M_x$ dönüşümü X den $\mathfrak{M}$ nün bir altuzayına 1:1 homomorfizma olacağından bu kabulle birkaç ilginç sonuç elde edilebilir.

<u>4.2.1. TEOREM</u> : X tamamen regüler ve $\mathfrak{M}$, değişmeli C(X) B*-cebiri içinde maksimal idealler uzayı olsun. X den $\mathfrak{M}$ nün bir altuzayına tanımlı $x \to M_x$ dönüşümü bir homeomorfizmadır. X ile X in bu dönü-

şüm altındaki görüntüsü eşleştirilirse

(1) X, $\mathfrak{M}$ nün yoğun bir altuzayıdır.

(2) C(X) içindeki her fonksiyon $C(\mathfrak{M})$ içindeki bir fonksiyona genişler ve bu genişleme tektir.

(3) Y, $\mathfrak{M}$ nün (1) ve (2) deki koşulları sağlayan bir kompakt Hausdorff uzay ise bu durumda $\mathfrak{M}$ den Y ye X in noktalarını sabit bırakan örten bir homomorfizma vardır.

<u>Kanıt</u> : X i tamamen regüler almakla $x \to M_x$ dönüşümünün 1:1 liğini garanti ettik. X in $\mathfrak{M}$ içindeki görüntüsü ile X i özdeşleyelim. $\mathfrak{M}$ nün X altkümesi iki topolojiye sahiptir. Bu topolojiler X in kendi orjinal topolojisi ve $\mathfrak{M}$ nün X uzayına indirgediği topolojidir. Şimdi bu topolojilerin eşit olduklarını görelim. C(X) den $C(\mathfrak{M})$ üzerine tanımlı $f \to \hat{f}$ Gelfand dönüşümünün bir izomorfizma olduğunu ve $\forall x \in X$, $\forall f \in C(X)$ için de $\hat{f}(x)=f(x)$ olduğunu biliyoruz. Bu gözlem bizi C(X) içindeki fonksiyonların tam olarak, $C(\mathfrak{M})$ deki fonksiyonların X e kısıtlamalarından oluştuğunu söyler. X tamamen regüler olduğundan C(X) ile üretilen zayıf topoloji ile bu topoloji eşit olurlar. Böylece X, $\mathfrak{M}$ nün bir altuzayı olarak kabul edilebilir. Bu yorum aynı zamanda X in $\mathfrak{M}$ içinde yoğun olduğunu gösterir. C(X) deki her fonksiyonunda $C(\mathfrak{M})$ içinde bir tek genişlemesi vardır. Şimdi (3) ün kanıtını verelim. $\hat{f} \to f$ dönüşümü $C(\mathfrak{M})$ den C(X) e bir izomorfizmadır. f', f nin C(Y) deki genişlemesi olmak üzere $f \to f'$, C(X) ten C(Y) ye bir izomorfizmadır. Bu izomorfizma bir $x \in X$ için $C(\mathfrak{M})$ içinde x e karşı gelen maksimal idealleri, C(Y) içinde x e karşı gelen maksimal ideallere taşır. Banach-Stone teoremine göre bu dönüşüm $\mathfrak{M}$ den Y üzerine X in noktalarını sabit bırakan bir homeomorfizmadır. Buradan X in

Stone-Čech tıkızlaması olan $C(X)$ in $\mathfrak{M}$ ye eşit olduğu görülür. Bu anlamda $\mathfrak{M}$ ve $C(X)$ in yoğun bir altuzay kabul eden bir kompakt Hausdorff uzaya eşit olduğu söylenebilir. Sonuç olarak bir X tamamen regüler uzayın Stone-Čech tıkızlamasının tek olduğunu ve C(X) in maksimal idealler uzayına eşit olarak kabul edilebileceğini gördük.

4.3. DEĞİŞMELİ C*-CEBİRLERİ

Bu bölümde bir $H \neq \{0\}$ Hilbert uzayı üzerindeki operatör teoriye önceki bölümde kanıtlanan sonuçları uygulayacağız. $\beta(H)$ ve bunun bütün self-adjoint Banach altcebirlerinin (yani H üzerindeki operatörlerin C*-cebirleri) B*-cebiridirler. Bu durumda Gelfand-Neumark teoremi özel olarak şöyle ifade edilebilir.

4.3.1. TEOREM : A, H üzerindeki operatörlerin bir değişmeli C*-cebiri olsun. $\mathfrak{M}$, A nın maksimal uzayı olsun. Bu durumda A dan $C(\mathfrak{M})$ ye $T \to \hat{T}$ biçiminde tanımlanan Gelfand dönüşümü bir izometrik *-izomorfizmadır.

4.3.2.TANIM : H bir Hilbert uzayı $\{T_i\} \subseteq \beta(H)$ operatörler ailesi verilsin. $\beta(H)$ nın $\{T_i\}$ kümesini kapsayan en dar Banach altcebirine $\beta(H)$ ın $\{T_i\}$ ile üretilen altcebiri denir.

Tanımlanan altcebir T_i lerin polinomlarının kümesinin kapanışıdır. Özel olarak N, H üzerinde tanımlanan normal operatör ise {N, N*} kümesinin ürettiği altcebir self-adjoint Banach altcebir olacağından bir değişmeli C*-cebiridir. Buna N ile üretilen C*-cebiri denir. Bu durumda 4.3.1 Teoremi şöyle ifade edilebilir.

4.3.3. TEOREM : N, H üzerinde normal bir operatör olsun. A, N ile üretilen değişmeli C^*- cebiri olsun. $\mathfrak{M}$, A nın maksimal idealler uzayı olmak üzere A dan $C(\mathfrak{M})$ ye tanımlı $T \to \hat{T}$ Gelfand dönüşümü bir izometrik *-izomorfizmasıdır.

Bu bilgileri kullanabilmek için ilk olarak A içindeki bir operatörün spektrumunun A nın bir elemanı olarak spektruma eşit olduğunu göstermektir.

Bunu gösterebilmek için aşağıdaki bilgilere ihtiyacımız vardır.

4.3.4. LEMMA : X bir kompakt Hausdorff uzay ve A, C(X) in bir Banach altcebiri olsun. f, C(X) içinde tersinir olan bir gerçel fonksiyon ise f A içindede tersinirdir.

Kanıt : F nin değer bölgesinin $\mathbb{R}$ nin sıfırı içermeyen kompakt bir altkümesi olduğu açıktır. $Z \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ise polinomlar ailesi $C(Z, \mathbb{R})$ içinde yoğundur. Stone- Weirstrass yaklaşım teoreminden $Z = f(X) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt kümesi için $\forall t \in Z$ ve $\varepsilon > 0$ için $|p(t) - \frac{1}{t}| < \varepsilon$ olan bir p polinomu vardır. Buradan $\forall x \in X$ için

$$|p(f(x)) - \frac{1}{f(x)}| < \varepsilon \quad \text{ve böylece} \quad \| p(f) - \frac{1}{f} \| < \varepsilon$$

olan bir $p(f) \in A$ vardır. A kapalı ve $\frac{1}{f}$ A nın bir yığılma noktası olduğundan $\frac{1}{f}$ A dadır. f, A içinde tersinirdir.

4.3.5. TEOREM : A, H üzerindeki operatörlerin bir C^*-cebiri olsun. A içindeki bir T operatörü $\beta(H)$ da tersinir ise A da da tersinirdir.

Kanıt: (1. Durum) : T self-adjoint olsun. B, T ve T^{-1} ile üretilen $\beta(H)$ nın altcebiri olsun. T ve T^{-1} self-adjoint ve değişmeli olduklarından B nin değişmeli C^*-cebiri olduğu açıktır. $\mathfrak{M}$, B nin maksimal idealler uzayı ise B $C(\mathfrak{M})$ ye izometrik *izomorftur.

Bu nedenle T, $C(\mathfrak{M})$ içinde gerçel bir fonksiyon ile temsil edilebilir. $C= A\cap B$, B nin bir Banach altcebiridir. Bu nedenle $C(\mathfrak{M})$ nün bir Banach altcebirine izomorfiktir. T, C ve B de tersinir olduğundan Lemma gereği T^{-1}, C ye aittir. Dolayısıyla T^{-1}, A ya aittir. T, A da tersinirdir.

(2. Durum): T self -adjoint olmasın. $U=TT^*$ dersek U, A da self-adjoint operatördür. U, $\beta(H)$ da $U^{-1}=(TT^*)^{-1}=(T^*)^{-1}T^{-1}=(T^{-1})^*T^{-1}$ tersine sahiptir. Böylece 1. durumdan U^{-1}, A ya aittir. A değişmeli olduğundan $UU^{-1}=T(T^*U^{-1})=(T^*U^{-1})T=I$ dır. Buradan $T^{-1}=T^*U^{-1}$ olduğu ortaya çıkar. T^{-1}, A ya aittir. Bu da kanıtı tamamlar.

Bu teorem H üzerindeki bir T operatörünün spektrumunun, A içindeki bir eleman olarak spektrumuna eşit olduğunu göstermek bakımından önemlidir.

N, H üzerinde bir normal operatör olsun. N ile üretilen cebirin C^*-cebiri olduğunu biliyoruz. Şimdi bu cebirin maksimal idealler uzayının N nin $\sigma(N)$ spektrumuna izomorf olduğunu kanıtlayacağız. Böylece de N ile üretilen C^*-cebirinin maksimal idealler uzayının somut bir temsilini bulmuş olacağız.

4.3.6. TEOREM : N, H üzerinde bir normal operatör, A N ile üretilen değişmeli C^*-cebiri ve $\mathfrak{M}$ A nın maksimal idealler uzayı olsun. Bu durumda N ye Gelfand dönüşümü altında karşı gelen $\bar{N}\varepsilon C(\mathfrak{M})$ fonksiyonu $\mathfrak{M}$ den $\sigma(N)$ ye homeomorfizmadır.

Kanıt : $\mathfrak{M}$ nün $\bar{N}$ altındaki görüntüsünün $\sigma(N)$ ye eşit olduğu (3.1.3 teoremden) görülür. $\mathfrak{M}$ ve $\sigma(N)$ kompakt Hausdorf olduklarından $\bar{N}$ nın 1:1 olduğunu göstermek, $\mathfrak{M}$ ile $\sigma(N)$ nin homeomorfizma olduklarını göstermek için yeterlidir. $M_1, M_2 \varepsilon \mathfrak{M}$ için

$$\hat{N}(M_1) = \hat{N}(M_2)$$

olsun. Buradan $\hat{N}^*(M_1) = \overline{\hat{N}(M_1)} = \overline{\hat{N}(M_2)} = \hat{N}^*(M_2)$

olur. $\hat{N}$ ile $\hat{N}^*$, M_1 ve M_2 de aynı değerlere sahiptirler. A, N ve N* ın ürettiği cebir olduğundan N ile N* ın bütün polinomlarının kapanışıdır. $C(\mathfrak{M})$ içindeki bütün fonksiyonlar N ve N* ın polinomlarının düzgün limitleridirler. Dolayısıyla $C(\mathfrak{M})$ içindeki bütün fonksiyonlar M_1 ve M_2 üzerinde aynı değere sahiptirler. $C(\mathfrak{M})$, nün noktalarını ayırdığından $M_1=M_2$ olmak zorundadır. (Gerçekten, $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}$ ve $M_1 \neq M_2$ için $\exists f \in C(\mathfrak{M})$ $f(M_1) \neq f(M_2)$ dir. Böylece $\hat{N}$ dönüşümü $\mathfrak{M}$ den $\sigma(N)$ ye 1:1 dir. Dolayısıyla homeomorfizmadır.

Bu eşlemeye $\mathfrak{M}$ ye $\mathbb{C}$ nin $\sigma(N)$ kompakt altuzayı gözüyle bakabiliriz. $\forall z \in \mathfrak{M}$ için $\hat{N}(z)=z$ olur.

<u>4.3.7. TEOREM</u> : N, H üzerinde spektrumu $\sigma(N)$ olan bir normal operatör ve A N ile üretilen değişmeli C*- cebiri olsun.

(i) A nın $\mathfrak{M}$ maksimal idealler uzayı $\sigma(N)$ ye eşittir.

(ii) A dan $C(\mathfrak{M})$ ye $T \to \hat{T}$ olarak tanımlanan Gelfand dönüşümü izometrik *-izomorfizmadır.

(iii) N ye Gelfand dönüşümü altında karşı gelen $\hat{N}$ dönüşümü nün öğelerini sabit bırakır. Yani $\forall z \in \mathfrak{M}$ için $\hat{N}(z)=z$ dir.

H nın sonlu boyutlu olduğu durum için bu teorem şu şekilde yorumlanır. H sonlu boyutlu iken $\sigma(N)$ farklı $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ kompleks sayılarından oluşur. $\hat{P}_i$ lar $C(\mathfrak{M})$ içinde $\hat{P}_i(\alpha_j)=\delta_{ij}$ biçiminde tanımlı fonksiyonlar olmak üzere

$$\hat{N} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \hat{P}_i$$

biçiminde yazılırsa $\forall \lambda_i \in \mathfrak{M} \equiv \sigma(N)$ için $\hat{N}(\lambda_i)=\lambda_i$ olur. Buradan

$\hat{P}_i$ lara A içinde karşı gelen P_i dönüşümleri $\sum_{i=1}^{m} P_i=I$ olan ikişer ikişer dik sıfırdan farklı izdüşüm dönüşümleri olmak üzere

$$N= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i$$

yazılabilir. Bu da 1.1 kısımdaki ele alınan N nin spektral ayrışımından başka bir şey değildir.

Böylece son teorem spektral teoremin genelleştirilmiş şeklidir. Bu teoremin önemli bir kaç sonucu vardır.

1) $N= 0 \iff \sigma(N)=\{0\}$

2) N tersinir değildir $\iff$ $\sigma(N)$ 0 ı içerir.

3) $\sigma(N^*)=\overline{\sigma(N)}$

4) N self-adjointtir $\iff$ $\sigma(N)$ gerçel sayılardan oluşur.

5) N birimseldir $\iff$ $\sigma(N)$ $\{z : |z|= 1\}$

6) N bir izdüşümdür $\iff$ $\sigma(N)$ $\{0,1\}$ dir.

V.BÖLÜM

BANACH CEBİRLERİ ÜZERİNE SEMBOLİK HESAPLAMALAR

5.1. VEKTÖR DEĞERLİ HOLOMORFİK FONKSİYONLAR, ZAYIF YAKINSAKLIK :Bu

Bu kısımda $\mathbb{C} \to A$ fonksiyonlar için kompleks fonksiyonlar teorisinin temel kavramları (türev, integral) ve temel konularını (Cauchy teoremi ve integral formülü, Taylor ve Laurent açılımları, Liouville teoremi) Banach cebirlerine genelleştirilecektir.

5.1.1. TANIM : A, $\mathbb{K}$ üzerinde bir normlu uzay Δ, $\mathbb{K}$ nın boş olmayan bir altkümesi olsun. $f: \Delta \to A$ vektör değerli fonksiyonunu düşünelim.

$$\lambda \to \lambda_0 \quad \text{iken} \quad \left\| \frac{f(\lambda)-f(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} - f'(\lambda_0) \right\| \to 0 \tag{5.1}$$

olacak şekilde $f'(\lambda_0)$ varsa f ye $\lambda_0 \epsilon \Delta$ noktasında diferensiyellenebilirdir deriz. $f'(\lambda_0)$ a λ_0 noktasında f nin 1. türevi denir. Buna göre daha yüksek türevin nasıl tanımlanacağı açıktır.

Her $U \epsilon A'$ için

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} U \left[\frac{f(\lambda)-f(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} \right] = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{U[f(\lambda)]-U[f(\lambda_0)]}{\lambda-\lambda_0}, \tag{5.2}$$

sağlayan f ye zayıf diferensiyellenebilirdir denir. Bu ifade (5.1) den elde edildiğinde dikkat edelim. Tersine olarak A kompleks ve tam ise zayıf diferensiyellenebilirlik diferensiyellenebilirliğini gerektirdiğini göstereceğiz. Şimdi zayıf yakınsaklık terimini tanımlayıp açıklayalım. Bunun için de bilineer ve dual sistemleri gözden geçirelim. Burada kanıtını atladığımız birkaç teorem verelim. ([5], sh.78)

A ve A^+ iki vektör uzayı olsun. AxA^+ üzerinde $x\in A$, $x^+\in A^+$ olmak üzere $(x,x^+) \to \langle x,x^+\rangle$ fonksiyoneli A ve A^+ ya göre lineer ise (A,A^+) ikilisine <u>bilineer sistem</u> denir.

(A,A^+) bir bilineer sistem ise herbir x^+ vektörü için

$$u_{x^+}(x) = \langle x,x^+\rangle \tag{5.3}$$

biçiminde tanımlı u_{x^+}, A üzerinde bir fonksiyoneldir.
$T : A^+ \to A^* ; \ T(x^+) = u_{x^+}$ biçiminde tanımlanan T dönüşümüde lineer dönüşümdür.

A^+ nın farklı elemanlarının A üzerinde farklı lineer fonksiyoneller üretmesi için gerekli ve yeterli koşul $T(x^+)=0$ olmasıdır. Yani $\forall x\in A$ için $\langle x,x^+\rangle =0 \implies x^+=0$ olmasıdır.

Bu durumda A, A^* ın $T(A^+)$ altuzayına izometrik olup bu uzay ile belirlenebilir. Benzer şekilde A daki herbir x elemanı A^+ üzerinde

$$v_x(x^+) = \langle x,x^+\rangle \tag{5.4}$$

biçiminde tanımlı bir fonksiyonel üretir. A dan $(A^+)^*$ içine $x \to v_x$ biçiminde tanımlı doğrusal dönüşümü bir izometrik dönüşüm olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall x^+\in A^+$ için $\langle x,x^+\rangle=0 \implies x=0$ gerektirmesini sağlamasıdır.

<u>5.1.2. TANIM</u> : (A, A^+) bir bilineer sistem olsun. $\forall x\in A$ için $\langle x,x^+\rangle=0 \implies x^+=0$ oluyorsa (A,A^+) sistemine bir <u>sol dual sistem</u> denir.

$\forall x^+ \in A^+$ için $\langle x,x^+\rangle =0 \implies x=0$ oluyorsa (A,A^+) sistemine bir <u>sağ dual sistem</u> denir.

(A,A^+) sistemi hem sağ hem de sol dual sistem ise sadece <u>dual sistem</u> denir.

(A,A^+) sol dual sistem olmak üzere her bir $x^+\in A^+$ öğesi için

$$x^+(x) = \langle x, x^+ \rangle \tag{5.5}$$

ile tanımlı dönüşüm A üzerinde bir fonksiyoneldir.

(A,A^+) sağ dual sistem olmak üzere herbir $x \varepsilon A$ öğesi için

$$x(x^+) = \langle x^+, x \rangle \tag{5.6}$$

ile tanımlanan dönüşüm A^+ üzerinde bir fonksiyoneldir.

5.1.3. LEMMA : $u_1, u_2, \ldots, u_n$ A üzerinde lineer fonksiyoneller ise A üzerinde bir u fonksiyoneli için

$$\bigcap_{v=1}^{n} N(u_v) \subseteq N(u)$$

yazılabiliyorsa, yani

$$u_1(x) = u_2(x) = \ldots\ldots = u_n(x) = 0$$

oluşu $u(x)=0$ oluşunu gerektiriyorsa u lineer fonksiyoneli

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ lineer fonksiyonellerinin doğrusal bileşimi olarak yazılır.

5.1.4. TEOREM : (A,A^*) bilineer sisteminin bir sol dual sistem olması için gerekli ve yeterli koşul sonlu çokluktaki lineer bağımsız $x_1^+, x_2^+, \ldots, x_n^+ \varepsilon A^+$ vektörlerine karşılık $i,j = 1,2,\ldots,n$ için

$$\langle x_i, x_j^+ \rangle = \delta_{ij} \tag{5.7}$$

olacak şekilde $x_1, x_2, \ldots, x_n \varepsilon A$ vektörlerinin var olmasıdır. Bu yolla belirlenen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ve $x_1^+, x_2^+, \ldots, x_n^+$ vektörleri lineer bağımsızdır.

5.1.5. TEOREM : (A,A^*) bir dual sistemdir.

5.1.6. TANIM : (A,A^+) bir bilineer sistem ve $(x_n) \subseteq A$ bir dizi olsun. her $x^+ \varepsilon A^+$ için

$$\langle x_n, x^+ \rangle \to \langle x, x^+ \rangle \tag{5.8}$$

oluyorsa (x_n) dizisine $x \varepsilon A$ ya A^+ -zayıf yakınsar denir. (Sembol olarak $x_n \rightharpoonup x$ olarak gösterilir).

5.1.7. TEOREM : (A,A^+) bir sağ dual sistemse A^+ zayıf limiti tektir.

Kanıt : $\langle x_n, x^+\rangle \to \langle x, x^+\rangle$ ise $(\langle x_n, x^+\rangle - \langle x, x^+\rangle) \to 0$ dır. Yani $\langle x_n - x, x^+\rangle \to 0$ dır. (A,A^+) nın bir sağ dual sistem olduğundan $x_n - x \to 0$ dır. Yani $x_n \to x$ olan bir tek x noktası vardır.

Yukarıdaki teoreme göre A^+-zayıf yakınsaklığı (x_n) lineer formlarının dizisinin x lineer formuna noktasal yaklaşmasından başka bir şey değildir.

5.1.8. TANIM : $|\langle x_n, x^+\rangle|$ her x^+ için bir Cauchy dizisi veya denk olarak $\lim (\langle x_n, x^+\rangle)$ her x^+ için varsa (x_n) ye A^+-zayıf Cauchy dizisi denir. A^+ zayıf Cacuhy dizisi A^+-zayıf limitine sahip olmak zorunda değildir. A^+ dan bir (x_n^+) dizisinin $x^+ \varepsilon A^+$ ya A-zayıf yakınsaklığı benzer şekilde tanımlanır ve benzer ifadeler elde edilir.

A bir normlu uzay ve (A,A') temel dual sistemimiz olarak sabitleştirirsek A'-zayıf yakınsak dizisine kısaca zayıf yakınsaktır deriz. Bu durumda $x_n \rightharpoonup x$ in anlamı A' üzerindeki sürekli lineer (x_n) formlarının dizisinin x lineer formuna noktasal yaklaşmasıdır. (Bundan böyle sürekli lineer formları u ile göstereceğiz).

Şu teoremi kanıtsız olarak vereceğiz.

5.1.9. TEOREM : A normlu uzayında bir (x_n) zayıf Cauchy dizisi sınırlıdır. $x_n \rightharpoonup x$ den $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$ olduğu elde edilir.

Bir $u_n \varepsilon A'$ sürekli lineer formlarının A zayı yakınsak dizileri hakkındaki teoremleri Kanıtlamak istersek A nın tamlığına ihtiyacımız vardır.

Norm anlamındaki yakınsaklık zayıf yakınsaklığı gerektirir. Bununla beraber tersi genel olarak doğru değildir. Bu sebeple Banach uzayında zayıf yakınsak kuvvet serilerinin norm anlamında yakınsak olmaları gerçekten önemlidir. Bu iddiayi 5.1.10 a hazırlık için yaptık. ($x \epsilon A$, $\alpha \epsilon K$ için $x\alpha = \alpha x$ olduğuna dikkat edelim).

<u>5.1.10. TEOREM</u> : A bir Banach uzayı olsun ve $a_k \epsilon A$ katsayılarıyla

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (\lambda-\lambda_0)^k \tag{5.9}$$

kuvvet serisi $\lambda_1 \neq \lambda_0$ için zayıf Cauchy serisi olduğunu kabul edelim. Yani bütün $u \epsilon A'$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} u(a_k)(\lambda-\lambda_0)^k \tag{5.10}$$

var olsun. Bu durumda $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda-\lambda_0)^k$, serisi $|\lambda-\lambda_0|<|\lambda_1-\lambda_0|$ için norm anlamında yakınsaktır.

<u>Kanıt</u> : (5.10) dan bütün $u \epsilon A'$ için

$\lim_{k\to\infty} [u\ a_k(\lambda_1-\lambda_0)^k]=0$ dır. 5.1.5 teorem ile $k=1,2,\ldots$ için $\|a_k(\lambda_1-\lambda_0)^k\| \leq \gamma$ olan bir $\gamma > 0$ vardır. Eğer $q: =|\lambda-\lambda_0|/|\lambda_1-\lambda_0| <1$ ise $\sum_{v=0}^{\infty} \|a_v\|$ serisi yakınsak ise $\sum_{v=0}^{\infty} a_v$ serisi Cauchy serisi olur. Uzay Banach uzayı olduğundan yakınsaktır. Bu durumda genelleştirilmiş üçgen eşetsizliği olarak bilinen

$$\left\| \sum_{v=0}^{\infty} a_v \right\| \leq \sum_{v=0}^{\infty} \| a_v \| \tag{5.11}$$

eşitsizliği gerçeklenir. ([5], 8.1.Teorem). Bu ifade yardımıyla bütün k lar için

$$\| a_k(\lambda-\lambda_0)^k \| = \| a_k(\lambda_1-\lambda_0)^k \| q^k \leq \gamma q^k \tag{5.12}$$

olduğu elde edilir. O halde $\sum \|a_k(\lambda-\lambda_0)^k\|$ yakınsar ve $\sum a_k(\lambda-\lambda_0)^k$ zayıf Cauchy serisi olduğundan yakınsaktır.

5.1.11. TEOREM : Katsayıları A Banach uzayının elemanları olan bir $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda-\lambda_0)^k$ kuvvet serisi λ_0 nın açık

$$\mathcal{U} := B(\lambda_0,\varepsilon) = \{\lambda\varepsilon K;\ |\lambda-\lambda_0|<\varepsilon\}$$

ε komşuluğunda zayıf Cacuhy serisi ise 0 norm anlamında yakınsaktır, ayrıca $\lambda\varepsilon\mathcal{U}$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| a_k\| \ |\lambda-\lambda_0|^k$$

aynı şekilde yakınsaktır (mutlak yakınsaktır) Bu seri $\mathcal{U}$ üzerinde

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda-\lambda_0)^k \tag{5.13}$$

vektör değerli fonksiyonunu tanımlar. f fonksiyonu $\mathcal{U}$ üzerinde her mertebeden türeve sahiptir. f nin türevleri seriden terim terim türev alınarak elde edilir. Yani

$$f^n(\lambda) = \sum_{k=n}^{\infty} (k-n+1)\ldots ka_k(\lambda-\lambda_0)^{k-n} \tag{5.14}$$

özel olarak

$f^n(\lambda_0)= n!\ a_n$ dir. Buradan $a_n= \dfrac{f^n(\lambda_0)}{n!}$ dir. Böylece

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(\lambda_0)}{k!} (\lambda-\lambda_0)^k \tag{5.15}$$

yazılır.

Kanıt : $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda-\lambda_0)^k$ λ_0 ın ε- komşuluğunda zayıf Cacuhy serisi ise bir önceki önerme gereğince seri norm anlamında yakınsaktır. Sadece $\lambda_0=0$ ve $n=1$ için diferensiyellenebilirlik iddiası kanıtlanacaktır. Keyfi bir $U\epsilon E'$ için

$$F(\lambda) = U\ [f(\lambda)]= \sum_{k=0}^{\infty} U(a_k)\lambda^k$$

ile $F:\mathcal{U} \to \mathbb{K}$ fonksiyonelini tanımlayalım. $\lambda\varepsilon\mathcal{U}$ için

$$F'(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} U(ka_k)\lambda^{k-1}$$

ve

$$F''(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} U(k(k-1)a_k)\lambda^{k-2}$$

olduğu açıktır. Böylece (8.17) teoreminden

$$\sum_{k=1}^{\infty} ka_k\lambda^{k-1} \quad \text{ve} \quad \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)ka_k\lambda^{k-2}$$

serileri bütün $\lambda\varepsilon\mathcal{U}$ için yakınsaktır. Ayrıca

$$|\lambda|<\varepsilon \text{ için } \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)k\| a_k\| |\lambda^2|^{k-2} < \infty \qquad (5.16)$$

olur. Bu sebepten $\lambda,\lambda_1\varepsilon\mathcal{U}$ farklı noktaları için

$$\frac{f(\lambda)-f(\lambda_1)}{\lambda-\lambda_1} - \sum_{k=1}^{\infty} ka_k\lambda_1^{k-1} = \frac{1}{\lambda-\lambda_1}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k\lambda^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\lambda_1^k\right] -$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} ka_k\lambda_1^{k-1} = \frac{1}{(\lambda-\lambda_1)}\left| a_0-a_0+\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha^k-\alpha_1^k)a_k\right| - \sum_{k=1}^{\infty} ka_k\lambda_1^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k-\lambda_1^k}{\lambda-\lambda_1} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} k\lambda_1^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda^k-\lambda_1^k}{\lambda-\lambda_1} - k\lambda_1^{k-1}\right]a_k \qquad (5.17)$$

olur. $|\lambda_1|<\mu<\varepsilon$ alalım. $|\lambda-\lambda_1|<\mu - |\lambda_1|$ ise $|\lambda|<\mu$ elde edilir ve

$$\frac{\lambda^m-\lambda_1^m}{\lambda-\lambda_1} = \lambda^{m-1}+\lambda^{m-2}\lambda_1+\ldots+ \lambda_1^{m-2}+\lambda_1^{m-1} \qquad (m=1,2,\ldots.)$$

ifadesinden bütün λ lar için

$$|\lambda^m-\lambda_1^m| = \left|\frac{\lambda^m-\lambda_1^m}{\lambda-\lambda_1} (\lambda-\lambda_1)\right| = |(\lambda^{m-1}+\lambda^{m-2}\lambda_1+\ldots+ \lambda_1^{m-2}+\lambda_1^{m-1})(\lambda-\lambda_1)|$$

$$\leq |\lambda-\lambda_1|(|\lambda|^{m-1}+|\lambda|^{m-2}|\lambda_1|+\ldots+|\lambda||\lambda_1|^{m-2}+|\lambda_1|^{m-1})$$

$\leq |\lambda-\lambda_1|(\mu^{m-1}+\mu^{m-1}+\ldots+\mu^{m-1}+\mu^{m-1})$

$= |\lambda-\lambda_1|\, m\mu^{m-1}$ olur. Böylece (5.18)

$$\left|\frac{\lambda^k-\lambda_1^k}{\lambda-\lambda_1} - k\lambda_1^k\right| = |\lambda^{k-1}+\lambda^{k-2}\lambda_1+\ldots+\lambda\lambda_1^{k-2}+\lambda_1^{k-1}-k\lambda_1^{k-1}|$$

$$= |\lambda^{k-1}+\lambda^{k-2}\lambda_1+\ldots+\lambda\lambda_1^{k-2}+\lambda_1^{k-1}-(\lambda_1^{k-1}+\lambda_1^{k-1}+\ldots+\lambda_1^{k-1})|$$

$$= |(\lambda^{k-1}-\lambda_1^{k-1})+\lambda_1(\lambda^{k-2}-\lambda_1^{k-2})+\ldots+\lambda_1^{k-2}(\lambda-\lambda_1)| \quad \text{(5.18) den}$$

$$= |\lambda-\lambda_1|\,(k-1)\mu^{k-2}+\lambda_1||\lambda-\lambda_1|\,(k-2)\mu^{k-3}+\ldots+|\lambda_1|^{k-2}|\lambda-\lambda_1|$$

$$\leq |\lambda-\lambda_1|\,((k-1)\mu^{k-2}+|\lambda_1|\,(k-2)\mu^{k-3}+\ldots+|\lambda_1|^{k-2})$$

$$\leq |\lambda-\lambda_1|\,((k-1)\mu^{k-2}+\mu(k-2)\mu^{k-3}+\ldots+\mu^{k-2})$$

$$= |\lambda-\lambda_1|\mu^{k-2}((k-1)+(k-2)+\ldots+1)$$

$$= |\lambda-\lambda_1|\mu^{k-2}\frac{k(k-1)}{2} \quad \text{olur.}$$

Buradan $0<|\lambda-\lambda_1|<\mu-|\lambda_1|$ için (5.17) eşitliğinin sağ yanındaki seri kesinlikle yakınsar ve

$$\left\|\frac{f(\lambda)-f(\lambda_1)}{\lambda-\lambda_1} - \sum_{k=1}^{\infty} ka_k\lambda_1^{k-1}\right\| \leq \frac{1}{2}|\lambda-\lambda_1| \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)k\,\|a_k\|\,\mu^{k-2}$$

olduğu (5.16) dan görülür. Bu f nin 1. türevinin varlığını gösterir. Sonraki ifadeler açıktır.

Γ, C içinde bir yönlendirilmiş, kapalı, düzgünleştirilebilir eğri (bundan böyle, böyle bir eğriye integrasyon yolu diyeceğiz.) ve A bir kompleks Banach uzayı ise

$f:\Gamma \to A$

sürekli fonksiyonu için genel durumdaki gibi

$$\int_\Gamma f(\lambda)\, d\lambda$$

yol integralini tanımlayalım. (İntegralin varlığı kompleks fonksiyonlar teorisindeki gibi tanımlanır.) Bu tanım için aşağıdaki özellikler vardır.

$$\int_\Gamma \alpha f(\lambda)d\lambda = \alpha \int_\Gamma f(\lambda)d\lambda \tag{5.19}$$

$$\int_\Gamma |f(\lambda)+ g(\lambda)|\, d\lambda = \int_\Gamma f(\lambda)d\lambda + \int_\Gamma g(\lambda)d\lambda$$

$$\left\|\int_\Gamma f(\lambda)d\lambda\right\| \leq \max_{\lambda\varepsilon\Gamma}\| f(\lambda)\| . \text{ (}\Gamma\text{ nın uzunluğu)} \tag{5.20}$$

Her $u \,\varepsilon A'$ için $u\left[\int_\Gamma f(\lambda)d\lambda\right]= \int_\Gamma u\left[f(\lambda)\right]d\lambda$ (5.21)

ve E bir kompleks Banach uzayı olmak üzere $T\varepsilon L(A,A)$ için

$$T \int_\Gamma f(\lambda)d\lambda = \int_\Gamma T\, f(\lambda)d\lambda \tag{5.22}$$

dir. (5.21) eşitliği bizim içinde oldukça önemlidir. Diğer tanımlar şunlardır:

Δ, C nin (boş olmayan) bir açık altkümesi, A bir kompleks Banach uzayı olsun. $f : \Delta \to A$ fonksiyonu Δ nın her noktasında diferensiyellenebilir ise f fonksiyonuna lokal holomorfiktir deriz. Üstelik Δ bağlantılı yani bölge ise f Δ içinde holomorfiktir deriz. Zayıf lokal holomorfiklik zayıf diferensiyellenebilirlik yoluyla tanımlanır. 5.1.8 Teoremi ile

$$\Sigma a_k\, (\lambda-\lambda_0)^k$$

kuvvet serisi, tanım bölgesinin iç kısmında holomorfik fonksiyon yaklaşımı ile tanımlanır.

<u>5.1.12.TEOREM (Cauchy integral teoremi)</u>: Eğer $f: \Delta \to A$, Δ bölgesinde holomorfik ve Γ_1,Γ_2 Δ içinde aynı başlangıç ve aynı bitim noktasına sahip iki integrasyon yolu olsun. Γ_1 ve Γ_2 homotop iseler

$$\int_{\Gamma_1} f(\lambda)d\lambda = \int_{\Gamma_2} f(\lambda)d\lambda$$

olur. Özel olarak eğer Γ, Δ nın yeğüne iç noktalarını içeren bir kapalı eğri ise

$$\int_{\Gamma} f(\lambda)d\lambda=0 \tag{5.23}$$

dır.

<u>Kanıt</u> : A üzerindeki her bir u sürekli fonksiyoneli için

$$u\left[\int_{\Gamma_1} f(\lambda)d\lambda\right]=\int_{\Gamma_1} u[f(\lambda)]d\lambda=\int_{\Gamma_2} u[f(\lambda)]\,d\lambda= u\left[\int_{\Gamma_2} f(\lambda)d\lambda\right]$$

olduğundan önermenin ilk kısmı elde edilir. Buradaki eşitliğin ortadaki eşitlik bir kompleks integral olduğuna dikkat edelim. Aynı şekilde

$u\left[\int_{\Gamma} f(\lambda)d\lambda\right]= \int_{\Gamma} u[f(\lambda)]\,d\lambda= 0 = u(0)$ olacağından

$$\int_{\Gamma} f(\lambda)d\lambda =0$$

dir.

<u>5.1.13. TEOREM</u> : Δ bölgesi basit bağlantılı, $f: \Delta \to A$ holomorfik (veya zayıf holomorfik) olsun. Bu durumda f her mertebeden diferensiyellenebilirdir ve bu türevler için $n=0,1,2,\ldots.$ olmak üzere

$$f^{n}(\lambda) = \frac{n!}{2\Pi!}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-\lambda)^{n+1}}\,d\xi \tag{5.24}$$

Cauchy integral formülü geçirlidir. Burada Γ, Δ içinde yı içinde bulunduran basit kapalı, positif yönlendirilmiş basit kapalı, pozitif yönlendirilmiş integrasyon yolu olarak verilmiştin. Ayrıca f Δ nın her λ_0 noktasında $a_k \epsilon A$ için

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\lambda-\lambda_0)^k \tag{5.25}$$

şeklinde kuvvet serisine açılabilir. Bu seri Δ nın iç noktalarını içeren λ_0 merkezi en geniş açık disk içinde yakınsaktır.

<u>Kanıt</u> : Keyfi bir $u \epsilon A'$ için

$$F(\lambda)= u\,[f(\lambda)]$$

alırsak hipotezden F, Δ nın içinde holomorfiktir. Buna göre kompleks analizdeki Cauchy integral formüllerinin

$$n=0,1,2,\ldots \text{ için } F^n(\lambda) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F(\xi)}{(\xi-\lambda_0)^{n+1}} d\xi .. \qquad (5.26)$$

şeklinde olduğunu biliyoruz. Ayrıca $F(\lambda)= u[F(\lambda)]$, λ_0 civarında

$$n=0,1,\ldots \quad \text{için } u[f(\lambda)]= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{u\, f|(\xi)|}{(\xi-\lambda_0)^{n+1}} d\xi\right] (\lambda-\lambda_0)^k \quad (5.27)$$

kuvvet serisine açılabilir. Burada C tamamen Δ içinde kalan λ_0 etrafındaki herhangi bir diskin pozitif yönlendirilmiş sınırıdır. (5.27) serisi bu şekildeki $\mathcal{U}$ diski üzerinde yakınsaktır. Eğer u yu integral başına etki ettirirsek zayıf olarak

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-\lambda_0)^{k+1}} d\xi\right] (\lambda-\lambda_0)^k$$

kuvvet serisi $\mathcal{U}$ da yakınsaktır. Yine f fonksiyonu 5.1.8 Teoreme göre $\mathcal{U}$ da her mertebeden diferensiyellenebilirdir.

<u>5.1.14. TEOREM (Liouville Teorem)</u> : C üzerinde holomorfik ve sınırlı fonksiyonlar sabittir.

<u>Kanıt</u> : f, C üzerinde holomorfik ve sınırlı bir fonksiyon olsun. $u\varepsilon A'$ için

$$F(\lambda) = u[f(\lambda)]$$

olan bir fonksiyon ise F de C de holomorfik ve sınırlıdır. Böylece klasik Liouville teoremine dönmüş oluruz.

Bütün λ lar için $u[f(\lambda)]= u[f(0)]$ dır. Bu keyfi bir $u\varepsilon A'$ için elde edilebildiğinden bütün λ lar için $f(\lambda)=f(0)$ dır.

5.1.15. TEOREM (Laurent Açılımı) : $0<|\lambda-\lambda_0|<r$ olan λ ların f holomorfik fonksiyonu $a_k, b_k \varepsilon A$ olmak üzere

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda-\lambda_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(\lambda-\lambda_0)^k} \tag{5.28}$$

formunda ifade edilir. Buradaki katsayılar

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\lambda)\, d\lambda}{(\lambda-\lambda_0)^{k+1}}$$

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\lambda)(\lambda-\lambda_0)^{k-1} d\lambda \tag{5.29}$$

dir. Burada C, $0<\rho<r$ ile ($|\lambda-\lambda_0| = \rho$) pozitif yönlendirilmiş bir eğridir.

Kanıt için $u \varepsilon A'$ sürekli lineer fonksiyonellerinin alınması yeterlidir. Bu durumda kompleks analizdeki Laurent açılımına bakılabilir.

5.1.16. TANIM : 5.1.15 Teoreminin hipotezleri altında;

(i) Bütün b_k lar sıfır oluyorsa λ_0 a kaldırılabilir aykırı nokta denir.

(ii) $n>p$ için $b_n=0$ ve $b_p \neq 0$ ise λ_0 a p. dereceden bir kutup noktası denir.

(iii) Sonsuz çoklukta $b_n \neq 0$ ise λ_0 a esas aykırı nokta denir.

1. mertebeden bir kutup noktasına basit kutup denir.

5.2. BANACH CEBİRLERİNDE KUVVET SERİLERİ

Bir A Banach cebirinde kuvvet serilerinin iki tipini düşünelim. Bunlardan biri

$$a_n \varepsilon A \quad \text{ve} \quad \lambda, \lambda_0 \varepsilon \mathbb{K} \text{ ile} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\lambda-\lambda_0)^n$$

diğeri ise $\alpha_n \in \mathbb{K}$ ve $x, x_0 \in A$ ile $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-x_0)^n$

dir. İlk tipi 5.1 de çalıştık. Şimdi de ikinciyi düşünelim. Çalışmalarımızın daha basit olması için $x_0=0$ alacağız. Buradan genel duruma x yerine $x-x_0$ almak yeterli olacaktır.

λ, bir kompleks değişken olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n \tag{5.29}$$

nümerik kuvvet serisinden

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n \tag{5.30}$$

kuvvet serisini düşünebiliriz. (5.29) serisinin analitik özelliklerini kullanmak istediğimizden (5.29) serisi sadece $\lambda=0$ için yakınsak değil yani $\limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|}<\infty$ olduğunu kabul edeceğiz. Ek olarak hiçbir yerde yakınsak olmayan kuvvet serilerine karşılık $\Sigma\alpha_n x^n$ serileri var olabilir. x in nilpotent olması bu duruma örnektir.

Aşağıdaki teoremi kanıtsız olarak verelim.

<u>5.2.1. TEOREM</u> : $$r=\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|}} \tag{5.31}$$

yakınsaklık yarıçapı sıfır olmayan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n \tag{5.32}$$

kompleks kuvvet serisini ve x, r(x) spektral yarıçapı A içinde bir eleman olarak alalım. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n \qquad 5.33)$$

$r(x)<r$ iken yakınsak ve $r(x)>r$ için ıraksaktır,; yani $\sigma(x)$ spektrumu, (5.32) kuvvet serisinin yakınsaklık diski içinde kalırsa yakınsar veya $\sigma(x)$ spektrumu (5.32) kuvvet serisinin dışına taşarsa ıraksaktır.

$\limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|} = 0$ için $r = \infty$ olduğuna dukkat edelim. (Kuvvet serilerinin yakınsak olduğu yerlerde). Bu durumda $\forall x \in A$ için (5.33) yakınsaktır.

$A=C$ alınırsa, 5.2.1 Teorem $r(x)=|x|$ olduğundan kompleks serileri için bilinen yakınsaklık teoremi elde edilir. Böyle seriler için onların yakınsaklıkları ile ilgili hiçbir iddia $|x|=r$ olan $x \in C$ için yapılamadığından $r(x)=r$ durumunda (5.33) ün yakınsayıp yakınsamadığı hakkında bir şey söyleyemeyiz.

Eğer kompleks değerli f fonksiyonu $|\lambda|<r$ için holomorfik yani,

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n \tag{5.34}$$

olan λ lar için, ayrıca x, $r(x)<r$ olan bir kompleks A Banach cebirinin bir elemanı ise bu durumda $f(x)$ i

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n \tag{5.35}$$

ile tanımlarız. Serilerin yakınsaklığı 5.2.1 teoremle ifade edilmiştir.

$f(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \ldots + \alpha_n \lambda^n$ polinomu ve bir vektör uzayının A endemorfizmi için $f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_n A^n$ alabiliriz. Bir Banach uzayının tüm sürekli endomorfizmlerinin Banach cebirinden bir A için bu tanım aynen geçirlidir. Çünkü bir polinom sonsuz yakınsaklık yarıçaplı bir kuvvet serisidir.

Şimdi (5.34) eşitliği $|\lambda|< r$ de holomorfik olan f fonksiyonu aynı zamanda yarıçapı$<r$ olan 0 merkezli pozitif yönlendirilmiş Γ çemberi içindeki bütün λ lar için

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\xi)(\xi-\lambda)^{-1}d\xi \tag{5.37}$$

Cauchy İntegral Formülü ile temsil edilebilir.(5.37) de λ yerine x alarak

$$f(x)=\frac{1}{2\Pi i}\int_{\Gamma} f(\xi)(\xi e-x)^{-1}d\xi=\frac{1}{2\Pi i}\int_{\Gamma} f(\xi)r_{\xi}d\xi$$

eşitliğinin geçerli olup olmadığını bulmak istiyoruz.Burada $r(x)<r$ ve $r(x)<(\ \Gamma$ nın çapı) r olduğunu kabul ediyoruz.Γ,f nin holomorfik diski içinde kalır ve onun iç kısmındaki x in spektrumlarını içerir.

$$\int_{\Gamma}\frac{1}{\xi^{k}}d\xi=\begin{cases}2\Pi i & ,\ k=1\\ 0 & ,\ k\neq 1,k\varepsilon Z\end{cases} \tag{5.38}$$

düşüncesi altında n=0,1,2,... ve her $u\varepsilon A'$ için

$$u\left(\frac{1}{2\Pi i}\int_{\Gamma}(\xi^{n}r_{\xi})d\xi\right)=u\left(\frac{1}{2\Pi i}\int_{\Gamma}\xi^{n}(\xi e-x)^{-1}d\xi\right)=u\left(\frac{1}{2\Pi i}\int_{\Gamma}\xi^{n}\frac{1}{\xi}(e-\frac{x}{\xi})^{-1}d\xi\right)$$

$$=u\left(\frac{1}{2\Pi i}\int_{\Gamma}\xi^{n}\frac{1}{\xi}\left(\left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{n}\right|d\xi\right)=u\left(\frac{1}{2\Pi i}\int_{\Gamma}\xi^{n}\left(\frac{e}{\xi}+\frac{x}{\xi^{2}}+\frac{x^{2}}{\xi^{3}}+\ldots\right)d\xi\right)\right.$$

$$=\frac{1}{2\Pi i}\int_{\Gamma}u(\xi^{n-1}e+x\xi^{n-2}+x^{2}\xi^{n-3}+\ldots+x\xi^{-1}+x\xi^{-2}+\ldots)d\xi$$

$$=\frac{1}{2\Pi i}\left(\int_{\Gamma}\xi^{n-1}u(e)d\xi+\int_{\Gamma}u(x)\xi^{n-2}d\xi+\ldots+\int_{\Gamma}u(x^{n})\xi^{-1}d\xi\right.$$

$$\left.+\int_{\Gamma}u(x^{n+1})\xi^{-2}d\xi+\ldots\right)$$

$$=\frac{1}{2\Pi i}u(x^{n})\int_{\Gamma}\xi^{-1}d\xi\ =u\left(\frac{1}{2\Pi i}x^{n}.2\Pi i\right)=u(x^{n})$$

elde edilir.Buna göre

$$\frac{1}{2\Pi i}\int_{\Gamma}\xi^{n}r_{\xi}d\xi=x^{n}$$ dir.Böylece

$$\frac{1}{2\Pi i}\int_{\Gamma}f(\xi)r_{\xi}d\xi=\frac{1}{2\Pi i}\int_{\Gamma}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{n}\xi^{n}r_{\xi}\right)d\xi=\frac{1}{2\Pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{n}\int_{\Gamma}\xi^{n}r_{\xi}d\xi$$

$$=\frac{1}{2\Pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{n}.2\Pi ix^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{n}x^{n}=f(x)$$

elde edilecektir.

5.2.2 TEOREM: Kompleks değerli f fonksiyonu $|\lambda|<r$ için holomorfik ve x, $r(x)<r$ olan bir A kompleks Banach cebirinin bir elemanı ise

$$f(x)=\frac{1}{2\Pi i}\int_{\Gamma} f(\lambda)r_{\lambda}d\lambda$$

denklemi geçerlidir. Burada Γ, $r(x)$ (Γ nın çapı)$<r$ ile verilen sıfır etrafında pozitif yönlendirilmiş bir çemberdir.

5.3. BIR REEL BANACH CEBIRINDEKI ELEMANLARIN BAĞLI SPEKTRUM

Reel Banach cebirlerinde bir elemanın spektrumundan bahsetmek için Banach cebirlerini karmaşık yapmak gereklidir. Bu işlem önce fedakârlık olarak görünmez. Fakat orjinal cebirin içindeki idempotentleri üretmek için cebirdeki bir elemanın ve sol resolventini kullandığımız zaman bazı zorluklar ortaya çıkacaktır. Aşağıda bu problemle ilgileneceğiz. Spektrum kavramının faydalı bir genellemesini vereceğiz.

Bundan böyle A, bir e birimli reel Banach cebirini gösterecektir.

5.3.1. TANIM : $e,b,m\epsilon A$ olsun.

$$\sigma_m(b) = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 \ : b-(xe+ym) \text{ A da tersinir değil}\}\subseteq\mathbb{R}^2 \quad (5.39)$$

ile tanımlanan $\sigma_m(b)$ kümesine b'nin m-spektrumu (veya m ye bağlı b nin spektrumu) denir.

b nin m-resolvent kümesi olan

$$\rho_m(b) =\{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 \quad [b-(xe+ym)]^{-1}\epsilon A\}\subseteq\mathbb{R}^2 \qquad (5.40)$$

$\sigma_m(b)$ nin $\mathbb{R}^2$ içinde tümleyenini tanımlar.

Eğer A bir kompleks Banach cebiri (ve dolayısıyla gerçel cebir) ve m=i ise bu durumda b nin i-spektrumu ve i-resolventi sırasıyla bilinen b nin spektrumu ve b nin resolventidir. Bundan böyle $\sigma(b)$ den bahsedildiğinde bunun kompleks spektrum olduğunu anlayacağız. Eğer A bir gerçel cebir fakat kompleks cebir değilse b nin spektrumu dediğimizde $A_{\mathbb{C}}$ cebiri içinde b nin kompleks spektrumunu anlayacağız. Gerçel ya da kompleks Banach cebirlerinde bir b elemanının gerçel spektrumu dediğimiz zaman $b-xe$ tersinir olmayacak biçimdeki x gerçel sayılarının ailesini anlayacağız. Gelfand teorisinden iyi bilindiği gibi komutatif Banach cebirleri için

$\sigma(b) = \{u(b) : U,$ A dan $\mathbb{C}$ içine sıfır olmayan homomorfizm $\}$ ve gerçel spektrum $(b)= \mathbb{R}\cap\sigma(b)$ dir.

Öncelikle $\sigma_m(b)$ nin ne zaman boş kümeden farklı olduğunu görelim. Burada m üzerine ne tür kısıtlamalar konulacağı sorusu akla gelebilir. Şimdi aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

5.3.2.ÖRNEK : A, 2x2 tipindeki kompleks matrislerin $\mathbb{C}^{2x2}$ kümesi olsun.

$$b=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad m=\begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix} \quad \text{olsun.}$$

$$b-(xe+ym) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \left(x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 2-x-iy & 2-y \\ -1 & -x+iy \end{bmatrix}$$

tersinir olmayacak şekilde $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ vardır $\Longleftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} 2-x-iy & 2-y \\ -1 & -x+iy \end{vmatrix} = 0 \text{ dır.} \Longleftrightarrow -2x+2iy+x^2-ixy+ixy+y^2+2-y=0 \text{ dır} \Longleftrightarrow$$

$(2-y-2x+x^2+y^2)=+2iy=0 \Longleftrightarrow 2-y-2x+x^2+y^2=0$ ve $y=0 \Longleftrightarrow x^2-2x+2=0$ dır. Buradan $x^2-2x+2=0$ denkleminin $\mathbb{R}$ de çözümü olmadığından $\sigma_m(b)=\emptyset$ dir.

$$m^2 = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I \quad \text{ve}$$

$$mb = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i-1 & 2i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$bm = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i & 2-2i \\ -i & -1 \end{bmatrix}$$

olduğundan $mb \neq bm$ dir.

5.3.3. ÖRNEK : $A = \mathbb{C}^{2x2}$, b=ie, m=e

$$\sigma_m(b) \; ; \; i\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} i-x-y & 0 \\ 0 & i-x-y \end{bmatrix}$$

matrisinin tersinir olmamasından elde edilen $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ dir.

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} i-x-y & 0 \\ 0 & i-x-y \end{bmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (i-x-y)^2 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$-1-ix-iy-ix+x^2+xy-iy+yx+y^2=0 \Longleftrightarrow (-1+x^2+y^2+2xy)+i(-2x-2y)=0 \Longleftrightarrow$$

$-1+x^2+y^2+2xy=0$ ve $x=-y$ dir. $\Longleftrightarrow -1+x^2+x^2-2x^2 = 0 \Longleftrightarrow 1=0$ olur.

Bu mümükün olamayacağından $\sigma_m(b)=\emptyset$ tur.

$$m-xe = \left| \begin{bmatrix} 1-x & 0 \\ 0 & 1-x \end{bmatrix} \right| = (1-x)^2 = 0 \Longleftrightarrow x=1 \Longleftrightarrow m-xe \quad \text{tersinir değil}$$

$\Longleftrightarrow \sigma(m)=\{1\}$ dir. Ayrıca $mb=bm$ elde edilecektir.

5.3.4. TEOREM : A birimli bir Banach cebiri $b,m\in A$ olsun. Eğer $mb=bm$ ve $\sigma(m)$ nin en az bir noktası gerçel değilse $\sigma_m(b)$ boş değildir.

Kanıt : $A\neq\emptyset$ olmak üzere $\lambda=\alpha+i\beta$, m nin orjinal spektrumunda gerçel olmayan bir nokta ve A', A nın maksimal kapalı Banach altcebiri olmak üzere $m,b\in A'$ olsun. O zaman A' nün her bir elemanının orjinal spektrumu A ve A' de aynıdır. Gelfand teoriyle

$$u(m) = \lambda=\alpha+ i\beta$$

olan A' den C içine bir u homomorfizmi vardır. $u(b)=\gamma+i\delta$ olsun.

Bu durumda $u(b-xe-ym)=u(b-xu(e)-yu(m) = \gamma+i\delta-x-y(\alpha+i\beta)$

$$=(\gamma-x-y\alpha)+i(\delta-y\beta)$$

elde edilir. $y=\frac{\delta}{\beta}$ ve $x=\gamma-\frac{\delta}{\beta}\alpha$ koyalım. Buradan $u(b-xe-ym)=0$ dır. Dolayısıyla $(x,y)\in\sigma_m(b)$ bulunur. Bu da kanıtı bitirir.

Eğer b ile değişmeli olan A daki idempotentleri üreten bilinen spektrumundakine benzer integrasyon teorisini geliştireceğiz.

5.3.5. ÖRNEK : $A=\mathbb{C}^{2x2}$, $b=e$, $m=\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ alınırsa daha önceki örneklerdeki benzer işlemlerle $\sigma_m(b)=\{(x,y) : x+y=1\}$ sınırsız ve bağlantılıdır. Burada $mb=bm$ ve $\sigma(m)=\{1,i\}$ dir.

Sonlu boyutlu durumda $\sigma_m(b)$ nin de sonlu olup olmadığı sorusu ortaya çıkar.

5.3.6. ÖRNEK : $A=\mathbb{R}^{2x2}$, $b=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $m=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda $\sigma_m(b) = \{\frac{1}{2}$ yarıçaplı, $(\frac{3}{2},0)$ merkezli çember$\}$

$$= \{(x-\tfrac{3}{2})^2+y^2=(\tfrac{1}{2})^2\},\ \sigma(m)=\{i,-i\} \text{ ve } m^2=-e \text{ dir.}$$

Fakat $mb\neq bm$ dir.

5.3.5 Örneğe göre $\sigma(m)\cap\mathbb{R}=\emptyset$ olduğu durumda m yi incelememiz gerekir. A nın bu tip elemanları için aşağıdaki terim kullanılabilir.

Burada, A daki bazı elemanlar ve $\mathbb{R}^2$ nin elemanları arasında bir özdeşlik kuracağız. Yani her $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ için

$$(x,y)\equiv z\equiv xe+ym$$

$$(x,-y)\equiv\bar{z}\equiv xe-ym \tag{5.41}$$

dir. $\sigma(m)\cap\mathbb{R}=\emptyset$ olan m için; $(x,y)\neq0 \iff xe+ym$ A içinde tersinirdir. Bunu daha sonra kullanacağız.

(5.41)den z nin , $\mathbb{R}^2$ içinde $|z|=(x^2+y^2)^{1/2}$ ve A içinde $\|z\|$ olmak üzere iki normu oluşur.

$$\gamma_1=\sup_{|z|=1}\|z\| \quad , \quad \gamma_2=\sup_{|z|=1}\|z^{-1}\|$$
$$\gamma_3=\inf_{|z|=1}\|z\| \quad , \quad \gamma_4=\inf_{|z|=1}\|z^{-1}\| \qquad (5.42)$$

pozitif sabitlerini tanımlayalım.

Eğer z, $\mathbb{R}^2$ içinde sıfır olmayan herhangi bir nokta ise kutupsal koordinatlarda $z=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ ve

$\|z\|=\|(r\cos\theta)e+(r\sin\theta)m\|=r\|\cos\theta.e+\sin\theta.m\|$ ve

$\|\cos\theta.e+\sin\theta.m\|=1$ ve $r=|z|$ olduğundan

$$\gamma_3|z|\leq\|z\|\leq\gamma_1|z| \qquad (5.43)$$
$$\gamma_4|z|^{-1}\leq\|z^{-1}\|\leq\gamma_2|z|^{-1}$$

olur. 5.3.5 ve 5.3.6 Örneklerin doğrultusunda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

5.3.7. TEOREM : A birimli bir gerçel Banach cebiri olsun. Eğer $m,b\varepsilon A$ ve $\sigma(m)\cap\mathbb{R}=\emptyset$ ise her $(x,y)\varepsilon\sigma_m(b)$ için $|(x,y)|\leq\gamma_2\|b\|$dir.

Kanıt : $(x,y)\varepsilon\mathbb{R}^2$ ve $(x,y)\equiv xe+ym\equiv z$ alalım. Eğer $|z|>\gamma_2\|b\|$ ise z^{-1} A içindedir. Çünkü $\sigma(m)\cap\mathbb{R}=\emptyset$ ve $(x,y)\neq 0$ olduğundan $z=xe+ym$ A içinde tersinirdir. Üstelik

$$\|bz^{-1}\|\leq\|b\|\,\|z^{-1}\|\leq\frac{z}{\gamma_2}\|z^{-1}\|\leq\frac{|z|}{2}\gamma_2|z|^{-1}=1$$ dir. Bu yüzden $bz^{-1}-e$ A içinde tersinirdir. Buradan ise $(bz^{-1}-e)z=b-z$ de A içinde tersinirdir. Dolayısyla $z\notin\sigma_m(b)$ dir. O halde $z=(x,y)\varepsilon\sigma_m(b)$ olursa $|(x,y)|\leq\gamma_2\|b\|$ olmalıdır.

5.3.8. TANIM : $b,m,\varepsilon A$ için $r_m(b)=\sup\{|(x,y)|:(x,y)\varepsilon\sigma_m(b)\}$ (5.44) sayısına b nin m- spektral yarıçapı denir.

5.3.7 Teoremden $r_m(b) \leq \gamma_2 \| b \|$ (5.45)

eşitsizliği elde edilir.

Bilinen spektral yarıçaptaki eşitsizliğe benzer olarak $r_m(b) \leq \| b \|$ olmasını bekleriz. Ancak aşağıdaki örnek böyle olmadığını verir.

5.3.9. ÖRNEK : $A=\mathbb{C}$ ve ε gerçel sayısını $0<\varepsilon<1$ olarak seçelim. Buna göre $m=\varepsilon i$ alınırsa $\gamma_2 = \frac{1}{\varepsilon}$ ve $b=i$ alınırsa

$\sigma_m(b) = \{(0, \frac{1}{\varepsilon})\}$ ve $r_m(b) = \frac{1}{\varepsilon} = \gamma_2 . \| b \|$ dir. Gerçekten;

$$\gamma_2 = \sup_{|z|=1} \|z^{-1}\| = \sup_{|z|=1} \| (xe+ym)^{-1} \| = \sup_{|z|=1} \| (x+i\varepsilon y)^{-1} \|$$

$$= \sup_{|z|=1} \left\| \frac{1}{x+i\varepsilon y} \right\| = \sup_{|z|=1} \left\| \frac{x-i\varepsilon y}{x^2+\varepsilon^2 y^2} \right\|$$

$$= \sup_{|z|=1} \frac{(x^2+\varepsilon^2 y^2)^{1/2}}{x^2+\varepsilon^2 y^2} = \sup_{|z|=1} \frac{1}{(x^2+\varepsilon^2 y^2)^{1/2}}$$

$|z|=1$ olduğundan $x^2+y^2=1$ i sağlayan x ler için bu ifade en büyük olmalıdır. Bunun içinde $x=0$ ve $y=1$ almak doğru olacaktır. Buradan ise $\gamma_2 = \frac{1}{\varepsilon}$ elde edilir. $\sigma_m(b)$ nin elemanları $b-xe-ym$ C içinde tersinir olmayacak şekildeki (x,y) ler olduğundan $b-xe-ym= i-x-y\varepsilon i$ $=0$ olmalıdır. Bu $x=0$, $y=\frac{1}{\varepsilon}$ olmasını gerektirir. Buradan ise $\sigma_m(b) = \{(0, \frac{1}{\varepsilon})\}$ elde edilir. Aynı şekilde $r_m(b) = \frac{1}{\varepsilon} = \gamma_2 \| b \|$ olarak elde edilir.

5.3.10.TEOREM: A birimli bir gerçel Banach cebiri olsun. Eğer $m,b \in A$ ise $\sigma_m(b)$, $\mathbb{R}^2$ içinde kapalıdır.

Kanıt: $\rho_m(b)$ nin açık olduğunu göstermemiz yeterlidir. $(x_0, y_0) \in \rho_m(b)$ olsun. Bu durumda $b-z_0 = b-(x_0e-y_0m)$ A içinde tersinirdir. A içinde tersinir elemanların kümesi açık olduğundan; $b-z_0$ ın bir ε-komşuluğunda A nın tersinir elemanları mevcuttur. $(\varepsilon>0)$

Her $z=xe+ym$ için

$$\|(b-z)-(b-z_0)\| = \|z_0-z\| = \|(x_0-x)e+(y_0-y)m\| \leq |x_0-x|\,\|e\| + |y_0-y|\,\|m\|$$

elde edilir. Eğer (x_0,y_0), (x,y) ye yeteri kadar yakın ise b-z, A içindeki $b-z_0$ etrafındaki ε- yarıçaplı kürenin içindedir. Buradan $(x,y)\in\rho_m(b)$ dir. Dolayısıyla $\rho_m(b)$ açıktır.

<u>5.3.11. SONUÇ</u> : A birimli bir gerçel Banach cebiri olsun. Eğer $b,m\in A$, $mb=bm$ ve $\sigma(m)\cap\mathbb{R}=\emptyset$ ise $\sigma_m(b)$, $\mathbb{R}^2$ nin boş olmayan kompakt bir alt kümesidir.

<u>Kanıt</u> : Hipotezden ve 5.3.4 teoremden $\sigma_m(b)$ boş değildir.5.4.5 den $\sigma_m(b)$ sınırlıdır ve 5.3.10 teoremden $\sigma_m(b)$ kapalı olduğundan $\sigma_m(b)$ $\mathbb{R}^2$ nin kompakt bir altkümesidir.

Aşağıdaki teoremde $\sigma(m)\cap\mathbb{R}=\emptyset$ koşuluna bir ek koşul verilerek $\sigma(m)$ nin çok büyük olmaması engellenmiştir.

<u>5.3.12. TEOREM</u> : b ve m, $mb=bm$ $\sigma(m)\cap\mathbb{R}=\emptyset$ özellikleriyle bir gerçel Banach cebirinin elemanları olsunlar. Bu durumda

(a) Eğer $\sigma(m)$ ve $\sigma(b)$ nin her ikiside sonlu ise $\sigma_m(b)$ sonludur.

(b) Eğer $\sigma(m)$ ve $\sigma(b)$ nin her ikiside sayılabilir ise $\sigma_m(b)$ de sayılabilirdir.

<u>Kanıt</u> : b, $m\in A'$ ve A', A nın maksimal komutatif alt cebiri olsun. Eğer $(x,y)\in\sigma_m(b)$ ise A' den C içine bir u homomorfizmi için

$$u(b-xe-ym)=0$$

dır. $\sigma(m)=\alpha+i\beta$, $\beta\neq 0$, $\sigma(b)=\gamma+i\delta$ olsun. 5.3.4 teoremin altındaki gibi $y=\frac{\delta}{\beta}$ ve $x=\gamma-\alpha(\frac{\delta}{\beta})$ veya $(x,y)=(\gamma-\alpha(\frac{\delta}{\beta}),\frac{\delta}{\beta})$ alalım. $k=1,2,3,\ldots$ için $\{\alpha_k+i\beta_k\}$ ile $\sigma(m)$ nin elemanlarını ve $\ell=1,2,3\ldots$ için $\{\gamma_\ell+i\delta_\ell\}$ ile $\sigma(b)$ nin elemanlarını gösterelim. Dolayısıyla;

$k=1,2,3,\ldots$ için

$$\sigma_m(b)\subseteq\{\gamma_\ell-\frac{\alpha_k\delta_\ell}{\beta_k},\ \frac{\delta_\ell}{\beta_k}\} \tag{5.46}$$

$\ell=1,2,3,\ldots$ için

olur. Bu ise (b) ve (b) nin durumlarına bağlı olarak (a) ve (b) yi verir.

Eğer B ve M komutatif nxn tipindeki matrisler ve $\sigma(M)$ gerçel olmayan sayıları içeriyor ise $\sigma_m(B)$ düzlemde sonlu bir kümedir.

m-ANALİTİK FONKSİYONLARIN TAEORİSİ

Bu kesim Banach uzayında analitik fonksiyonlar için işlenen teoriye paralel olarak m-spektrum için bir teori geliştireceğiz.

Bundan böyle m, spektrumu gerçel noktaya sahip olmayan bir gerçel Banach cebirindeki bir eleman olacaktır. $\mathbb{R}^2$ deki noktalar için (5.41) in notasyonları kullanılacaktır.

f, $\mathbb{R}^2$ içindeki bir Ω bölgesinden A Banach cebiri içine bir fonksiyonu gösterecektir.

Eğer $$f_x(x,y) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,\Delta y+y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

kuvvetli limitlerinin herbiri Ω da sulunuyorsa ve sonuçtaki f_x ve f_y fonksiyonları Ω dan A içine sürekli ise f fonksiyonuna $C'(\Omega)$ dadır diyeceğiz. Bu durumda aşağıdaki fonksiyonları tanımlayabiliriz.

5.3.13. TANIM : f $C'(\Omega)$ ve Ω da $f_x-m^{-1}f_y=0$ ise f ye Ω da m-analitiktir denir. Burada $f_x\equiv\frac{\partial}{\partial x}f$ ve $f_y\equiv\frac{\partial}{\partial y}f$ dir.

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x} + m^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right]$$

ve (5.47)

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x} - m^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right]$$

diferensiyel operatörlerini tanımlayalım. (Bu formüller (5.41) den formal olarak çıkar.

5.3.13 Tanımdaki kısaltılmış rotasyonlar ile $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$, $fx-m^{-1}fy=0$ şeklinde yazılır.

<u>5.3.14.TANIM</u> : $\frac{\partial f}{\partial z}$ $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}(\Delta z)^{-1}[f(z+\Delta z)-f(z)]$ limiti A içinde varsa f ye $\mathbb{R}^2$ içinde bir z noktasında <u>m-diferensiyellenebilirdir</u> denir.

<u>Not</u> : Burada $\Delta z=(\Delta x)e+(\Delta y)m$ bir skaler olmadığından bu tanım bilinen diferensiyellenebilirlik tanımından farklıdır.

<u>5.3.15. TEOREM</u> : $f\in C'(\Omega)$ olsun. Bu durumda f nin Ω içinde bir z noktasında m-diferensiyellenebilir olması için gereki ve yeterli koşul z de $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$ dır.

Bu durumda $f'(z)=\frac{\partial f}{\partial z}(z)$ dir.

<u>Kanıt</u> : f' var olsun. $\Delta z=(\Delta x)e$ alındığında $f'(z)=f_x(z)$ ve $z=(\Delta y)m$ alındığında ise $f'(z)=m^{-1}f_y(z)$ elde edilir. Böylece z değerinde $f'(z)=f_x(z)=m^{-1}f_y(z) \Longrightarrow f_x(z)-m^{-1}f_y(z)=0$ sağlandığında $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$ elde edilir.

Tersine , $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=f_x(z)-m^{-1}f_y(z)=0$ olsun. İlk olarak $\Delta z=(\Delta x,\Delta y)$ ise

$$[f(z+\Delta z)-f(z)]-\Delta x f_x(z)-\Delta y fy(z)=0x(|\Delta z|) \tag{5.48}$$

yani $|\Delta z|\to 0$ iken $\frac{[f(z+\Delta z)-f(z)]-\Delta x f_x(z)-\Delta y f_y(z)}{|\Delta z|}\to 0$ olduğunu göstermeyi amaçlıyoruz.

u, $\|u\|=1$ olan A üzerinde bir gerçel sürekli fonksiyonel ve $z=(x,y)$ ve $\Delta z=(h,k)$ olsun.

$$u\left[f(z+\Delta z)-f(z)-\Delta x f_x(z)-\Delta y f_y(z)\right]$$

$$= u\, f(x+h,y+k)-uf(x,y)-uf_x(x,y)h-uf_y(x,y)k$$

$$= u\, f(x+h,y+k)-uf(x,y+k)$$

$$+\, uf(x,y+k)-uf(x,y)-uf_x(x,y)h-uf_y(x,y)k \qquad (5.49)$$

dir.

Şimdi gerçel değerli fonksiyonların diferensiyeli için O.D.T. ni uygulayalım.

Bir $0\leq \theta_1\leq 1$ için

$$uf(x+h,y+k)-uf(x,y+k)=uf_x(x+\theta_1 h,y+k)h \quad \text{ve}$$

$$0\leq \theta_2\leq 1 \quad \text{için} \qquad (5.50)$$

$$uf(x+h,y+k)-uf(x+h,y)=uf_y(x+h,y+\theta_2 k)k$$

elde ederiz. (5.49) ve (5.50) nin kombinasyonlarından

$$\| u|f(z+\Delta z)-f(z)-\Delta x f_x(z)-\Delta y f_y(z)| \|$$

$$=\|uf_x(x+\theta_1 h,y+k)h-uf_x(x,y)h+uf_y(x,y+\theta_2 k)-uf_y(x,y)k\|$$

$$\leq\|u\|\left[\|f_x(x+\theta_1 h,y+k)-f_x(x,y)\|\, h+\| f_y(x,y+\theta_2 k)-f_y(x,y)\|\, k\right]$$

$$=\|f_x(x+\theta_1 h,y+k)-f_x(x,y)\|\, h+\| f_y(x,y+\theta_2 k)-f_y(x,y)\|\, k$$

$$= T(\theta_1,\theta_2) \quad \text{olur.}$$

θ_1 ve θ_2 u ya bağlıdır. Fakat f_x ve f_y her ikiside sürekli olduğundan yeteri kadar küçük h ve k seçebiliriz.

$T(\theta_1,\theta_2)\leq\varepsilon_1 h+\varepsilon_2 k$ $\quad 0\leq\theta_1\leq h<1,$ $\quad 0\leq\theta_2\leq k<1$ ve $|\Delta z|\to 0$ iken

$\lim \varepsilon_1=\lim \varepsilon_2=0$ dır.

Bu sebepten ilk olarak h ve k seçersek bu son eşitliğin u dan bağımsız olduğunu garanti edebiliriz.

Hahn-Banach teoremi ile her bir h ve k için $\|u\|=1$ ve

$$\|u[f(z+\Delta z)-f(z)-\Delta x f_x(z)-\Delta y f_y(z)]\|$$

$$=\| f(z+\Delta z)-f(z)-\Delta x f_x(z)-\Delta y f_y(z)\|$$

olan bir gerçel sürekli lineer fonksiyoneli vardır.

$\Delta z \to 0$ iken $\lim \varepsilon_1 = \lim \varepsilon_2 = 0$ ile

$\|f(z+\Delta z)-f(z)-\Delta x f_x(z)-\Delta y f_y(z)\| \leq \varepsilon_1 h+\varepsilon_2 k$ olduğu yukarıdakilerden görülür. Bu da A için (5.48) in sağlandığını kanıtlar.

Şimdi (5.48) kullanarak

$$(\Delta z)^{-1}[f(z+\Delta z)-f(z)]=(\Delta z)^{-1}[\Delta x f_x(z)+\Delta y f_y(z)]+0.|\Delta z|$$

$$= (\Delta z)^{-1}[\Delta x f_x(z)+\Delta y m f_x(z)+0(|\Delta z|)]$$

$$= (\Delta z)^{-1}(\Delta z)[f_x(z)+(\Delta z)^{-1}.0(|\Delta z|)] \quad \text{olur.}$$

(5.47) den $f'(z)= f_x(z) = \frac{1}{2}f_x(z)+ \frac{1}{2} m^{-1}f_y(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$ olduğu elde edilir. $f(z)=z$ ise

$\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial z}{\partial x} - m^{-1}\frac{\partial z}{\partial y}\right]= \frac{1}{2}[e-m^{-1}m]=0$ olduğundan f m-analitik ve

$\frac{d}{dz}(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial z}{\partial x} + m^{-1}\frac{\partial z}{\partial y}\right]= \frac{1}{2}[e+m^{-1}m] = \frac{1}{2}[2e] =e$ dir. Eğer

$f,g \in C'(\Omega)$ ve her $z\in\Omega$ için $f(z)m=m\,f(z)$ (5.51)

$$\frac{\partial}{\partial z}(f.g) = \frac{\partial f}{\partial z}.g+f\frac{\partial g}{\partial z} \quad \text{ve} \qquad (5.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f.g)= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}.g+f.\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$$ dir . Gerçekten

$$\frac{\partial}{\partial z}(f.g)= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\partial(f.g)}{\partial x}+m^{-1}\frac{\partial(fg)}{\partial y}\right]\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}.g+f.\frac{\partial g}{\partial x} +\right.$$

$$\left.m^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial y}.g+f.\frac{\partial g}{\partial y}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + m^{-1}\frac{\partial f}{\partial y}\right].g+f.\frac{1}{2}\left[\frac{\partial g}{\partial x} +m^{-1}\frac{\partial g}{\partial y}\right]$$

$= \frac{\partial f}{\partial z}.g+f.\frac{\partial g}{\partial z}$ olduğu görülür. Aynı yolla ikinci eşitlik elde edilir.

Bu şartlar altında f ve g m- analitik ise

$\frac{\partial f.g}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.g + f\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0.g+f.0=0$ olacağından f.g de m-analitiktir.

(5.51) eşitliğinin her iki tarafının diferensiyelini alırsak

$$f_x m = m f_x,\ f_y m = m f_y,\ \frac{\partial f}{\partial z} m = m \frac{\partial f}{\partial z} \text{ ve } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} m = m \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \qquad (5.53)$$

elde edilir. f tersinir ise f^{-1} in de m ile değişmeli olduğu açıktır.

$$\frac{f^{-1}(x_0 y)-f^{-1}(x,y)}{x_0-x} = -f^{-1}(x_0,y)\ \frac{f(x_0,y)-f(x,y)}{x_0-x}\ f^{-1}(x,y)$$

ve

$$\frac{f^{-1}(x,y_0)-f^{-1}(x,y)}{y_0-y} = -f^{-1}(x,y_0)\ \frac{f(x,y_0)-f(x,y)}{y_0-y} = f^{-1}(x,y)$$

olduğundan $f \in C'(\Omega)$ ise $f^{-1} \in C'(\Omega)$ dır.

$$\frac{\partial}{\partial z}(f^{-1}) = -f^{-1}\frac{\partial f}{\partial z}f^{-1} \text{ ve } \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f^{-1}) = -f^{-1}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}f^{-1}$$

olacaktır. Böylece f m-analitiktir ve f m ile değişmeli ise f^{-1} var olduğu durumda m-analitiktir.

CAUCHY FORMOLO

$\mathbb{R}^2$ de bir Ω bölgesi n bağlantılı (n sonlu) bir küme ise bu kümeye düzgündür denir (Burada Ω bir Γ sınırına sahiptir)

$$dz = dx + m dy$$

notasyonunu kullanalım.

Eğer $g:\Omega \to A$ (Ω düzgün bir bölge) $C'(\Omega)$ da ise

$$\int_\Gamma g(z)dz = \int_\Gamma g(z)(dx+mg(z)dy = \int_\Gamma g(z)dx+mg(z)dy \qquad \text{dir.}$$

Basit sürekli düşünceler ile bu integral vardır. Bu A daki değerler ile fonksiyonlar için yol integralinin tanımının genişletilmesidir. [4] .

$$q=\int_{|z|=1} z^{-1}dz \tag{5.54}$$

ile $q\in A$ sabitini tanımlayalım. Kompleks değişkenli analitik fonksiyonların alışılmış teorisinde $q=2\pi i$ dir. m- analitik fonksiyonlar için Banach cebirimizde kompleks değişkenli fonksiyonların teorisine benzer olarak q nun spekturumuna bağlı bir sonuç elde edelim.

5.3.16.LEMMA: $m\in A$, $\sigma(m)\cap\mathbb{R}=\emptyset$ için q ile ilgili elemanlar tersinirdir. Özellikle $\sigma(p)\subseteq\{-2\pi i,2\pi i\}$ ve $\sigma(m)$ tamamen üst yarı düzlemde kalırsa $\sigma(q)=\{2\pi i\}$ dir.

Kanıt: A', m yi içeren A nın bir maksimal değişmeli altcebiri olsun. u: $A'\to\mathbb{C}$ içine bir homomorfizma olsun. $\sigma(q)=\mp 2\pi i$ olduğunu göstermek yeterlidir. u çarpımsal ve lineer olduğundan

$$u(q)=\int_{|z|=1}u((xe+ym)^{-1}dz)=\int_{|z|=1}u((xe+ym)^{-1}(dx+mdy))$$

$$=\int_{|z|=1}u((xe+ym)^{-1})(dx+u(m)dy)=\int_{|z|=1}(u(xe+ym))^{-1}(dx+u(m)dy)$$

$$=\int_{|z|=1}\frac{1}{x+yu(m)}(dx+u(m)dy)$$

elde edilir. $\sigma(m)\cap\mathbb{R}=\emptyset$ olduğundan $u(m)=\lambda=\alpha+i\beta$ $(\beta\neq 0)$ olsun. Bu durumda $u(q)=\int_{|z|=1}\frac{1}{x+y\lambda}(dx+\lambda dy)$ dir.

$\zeta=x+y\lambda\equiv\xi+i\eta$ $(\xi=x+y\alpha,\ \eta=y\beta)$ $,x=\xi-\frac{\alpha\eta}{\beta}$ $,y=\frac{\eta}{\beta}$

$d\zeta=dx+\lambda dy$ olsun. Bu durumda C, ζ-düzleminde $|z|=1$ in görüntüsü olmak üzere $u(q)=\int_C\frac{1}{\zeta}d\zeta$dir. $|z|=1$ ise $x^2+y^2=1$

$$(\xi-\frac{\alpha\eta}{\beta})^2+(\frac{\eta}{\beta})^2=1,$$
$$\beta^2\xi^2-2\alpha\beta\xi\eta+(1+\alpha^2)\eta^2=\beta^2$$

dir. LHS. ξve η da tanımlı bir quadratik formdur. Böylece C orijin etrafında bir elipstir.

$$\xi=x+y\alpha\ ,\quad \eta=y\beta$$

denklerinden z ler $|z|=1$ üzerinde pozitif yönde hareket ederken, C elipsi civarında $\beta>0$ iken pozitif yönde

$\beta<0$ iken negatif yönde

hareket ettiği görülür. Bu sebepten $u(q)=2\pi i(\mathrm{sig}\beta)$ dır. Bu durumda

$\sigma(q)$ $\{-2\pi i, 2\pi i\}$ ve $\sigma(m)$ üst yarı düzlem ise $\sigma(q)=2\pi i$ dir.

5.3.17.SONUÇ: 5.3.16. Lemmanın hipotezleri altında eğer $\sigma(m)\subseteq UHP$ (üst yarı düzlem) ise n quasinilpotent olduğu zaman $q=2\pi ie+n$ dir.

Kanıt: Eğer u, A dan $\mathbb{C}$ ye bir homomorfizm ise

$u(q-2\pi ie)=u(q)-2\pi i\, u(e)=2\pi i-2\pi i=0$ dır. $\sigma(q-2\pi ie)=\{0\}$ ve $q-2\pi ie=n$ olur.(quasinilpotentlikten)

53.18.TEOREM (Cauchy teoremi): f, Ω dam-analitik ve Γ, $\bar{\Gamma}$ Ω olan bir düzgün alt bölgenin sınırı olsun. Bu durumda

$$\int_\Gamma f(z)dz=0 \qquad (5.55)$$

dir.

Kanıt: u, A üzerinde bir lineer sürekli fonksiyonel ise

$$u\left(\int_\Gamma fdx\right)=\int_\Gamma u(f)dx=\int_\Gamma \underbrace{(u\circ f)}_{P}dx+\underbrace{0}_{Q}.dy \qquad \text{(Green teoreminden)}$$

$$=\iint_\Omega (Q_x-P_y)dxdy=\iint_\Omega -(u\circ f)_y dxdy=-\iint_\Omega u(f_y)dxdy$$

dir Benzer şekilde

$$u\left(\int_\Gamma mfdy\right)=\int_\Gamma \underbrace{u(mf)}_{Q}dy+\underbrace{0}_{P}.dx \qquad \text{(Green teoreminden)}$$

$$=\iint_\Omega (Q_x-P_y)dxdy=\iint_\Omega m(u\circ f)_x dxdy=\iint_\Omega u(mf_x)dxdy$$

elde edilir. Böylece $f_x=m^{-1}f_y$ veya $mf_x-f_y=0$ ı kullanarak

$$u\left(\int_\Gamma fdz\right)=\int_\Gamma u(f)dz=\int_\Gamma u(f)(dx+mdy)=\int_\Gamma \underbrace{u(f)}_{P}dx+\underbrace{u(mf)}_{Q}dy$$

$$=\iint_\Omega (Q_x-P_y)dxdy=\iint_\Omega (u(mf_x)-u(f_y))dxdy$$

$$=\iint_\Omega u(mf_x-f_y)dxdy=0$$

bu her u için doğru olduğundan

$$\int_{\Gamma} \hat{f}(z)dz=0$$

dır.

$s=(\xi,\eta)\equiv\xi e+\eta m$ ile $ds=ed\xi+md\eta$ notasyonu aşağıda kulanılacaktır.

<u>5.3.19.TEOREM(Cauchy integral Formülü):</u> f, Ω da m-analitik ve $f\varepsilon C(\overline{\Omega})$ olsun (Γ Ω nun sınırı). Bu durumda daki sabit z için

$$f(z)=q^{-1}\int_{\Gamma}(s-z)^{-1}f(s)ds \tag{5.56}$$

<u>Kanıt:</u> Bu düşüncelerden dolayı f nin m-analitikliğinin kabulü yeterlidir. Ω da sabit z ve Ω_{ε} çıkarılmış z noktası etrafında ε yarıçaplı bir küçük diski ile Ω da bölge olsun. (5.55) i Ω_{ε} bölgesine uygulayarak Cauchy teoreminde z ile s yi ve f ile $(s-z)^{-1}f(s)$ yi yerdeğiştirirsek

$$\int_{\Gamma}(s-z)^{-1}f(s)ds=\int_{|s-z|=\varepsilon}(s-z)^{-1}f(s)ds \tag{5.57}$$

olur.

$$\int_{|s-z|=\varepsilon}(s-z)^{-1}ds=\int_{|s|=\varepsilon}s^{-1}ds=q \quad \text{olduğundan}$$

$$\left\|\int_{|s-z|=\varepsilon}(s-z)^{-1}f(s)ds-qf(z)\right\|=\left\|\int_{|s-z|=\varepsilon}(s-z)^{-1}(f(s)-f(z))ds\right\|$$

$$\leq\int_{|s-z|=\varepsilon}\|(s-z)^{-1}\|\,\|f(s)-f(z)\|\,\|ds\|$$

$$\leq\gamma_2\gamma_1\int_{|s-z|=\varepsilon}|s-z|^{-1}\,\|f(s)-f(z)\|\,\|ds\|\leq\gamma_1\gamma_2(2\Pi)\sup_{|s-z|=}\|f(s)-f(z)\|$$

f, $C'(\Omega)$ da olduğundan bu son ifade de $\varepsilon\to 0$ iken ifade sıfıra yaklaşır ve (5.57) den (5.56) elde edilir.

<u>5.3.20. TEOREM (liouville Teoremi)</u> : f, $\mathbb{R}^2$ nin her noktasında m-analitik ve sınırlı ise f fonksiyonu sabit bir fonksiyondur.

Kanıt: Γ Ω, $R>\max(|z_0|,|z_1|)$ yarıçaplı merkezi sıfırda olan pozitif yönlendirilmiş bir çember olsun. Cauchy integral formülünden

$$f(z_1)=q^{-1}\int_\Gamma (s-z)^{-1}f(s)ds\ ,\quad f(z_0)=q^{-1}\int_\Gamma (s-z_0)^{-1}f(s)ds \quad \text{dir.}$$

$$\| f(z_1)-f(z_0)\| = \| q^{-1}(\int_\Gamma |(s-z_1)^{-1}-(s-z_0)^{-1}|f(s)ds)\|$$

$$\leq \| q^{-1}\| (\|\int_\Gamma ((s-z_0)-(s-z_1))(s-z_1)^{-1}(s-z)^{-1}f(s)ds\|)$$

$$\leq \| q^{-1}\| \int_\Gamma \| (z_1-z_0)(s-z_1)^{-1}(s-z_0)^{-1}f(s)ds\|$$

$$\leq \| q^{-1}\| \int_\Gamma \gamma_1 |z_1-z_0|\gamma_2\ |s-z_1|^{-1}\gamma_2\ |s-z_0|^{-1}\ \| f(s)\| \||ds\|\gamma_1$$

$$\leq \| q^{-1}\|\ \gamma_1^2\ \gamma_2^2\ |z_1-z_0|\ M \int_\Gamma \frac{|ds|}{|s-z_1||s-z_0|}$$

$$\leq \| q^{-1}\|\ \gamma_1^2\ \gamma_2^2 \| z_1-z_0\| \int_\Gamma \frac{|ds|}{(|s|-|z_1|)(|s|-|z_0|)}$$

$$\leq \frac{\| q^{-1}\|\ \gamma_1^2\gamma_2^2|z_1-z_0|}{(R-|z_1|)(R-|z_0|)}\ \pi R$$

$R\to\infty$ iken $\| f(z_1)-f(z_0)\| \leq 0$ olacağından $f(z_1)=f(z_0)$ dır. Buna göre f fonksiyonu sabittir.

KAYNAKLAR

1. Dixmier, J. 1957 — Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertion (algebres de von neumann) Gauthier-Villars, Paris.

2. Harra, G. Heuser 1982 — Functional Analysis, A Wiley-Interscience Publication.

3. Hile, G.N. and Pfaffenberger,W.E. 1980 — The relative spectrum of Elements in a Real Banach Algebra, Math. Ann. 250,113-133

4. Lorh, E.R. 1962 — Spektral theory, New York :Oxford University Prees

5. Lynn, H. Loomis 1953 — An Introduction to Abstract Harmonic Analysis, D.Van Nostrand Company.

6. Martin, A.D. 1966 — Introduction to Linear Algebra, McGraw-Hill book Company.

7. Rudin, Walter 1973 — Functional Analysis , McGraw-Hill Company.

8. Rickart, C.E. 1960 — General theory of Banach algebras, in : the University Series in Higher Math. Princeton, NJ: Van Nostrand

9. Simmons, G.F. 1963 — Introduction to topology and Modern Analysis, McGraw-Hill International book Company.