T.C
CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

SERBEST TÜREV VE DÜĞÜM POLİNOMLARI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

A.CEYLAN ÇÖKEN

SİVAS
Haziran- 1990

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

İşbu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan ....Yrd. Doç. Dr. Arif DANE

Üye Doç. Dr. Mehmet Emin Bozkuyulu

Üye ....Doç. Dr. Kâzım Kaya

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

25 / 10 / 1990

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Prof.Dr. İbrahim GÜMÜŞSUYU

Bu çalışmayı yöneten Yrd.Doç.Dr.Arif DANE' ye, bu konu ile ilgili çalışmalarımda beni aydınlatan Doç.Dr.Mehmet Emin BOZHOYOK'e ve tezimi titizlikle yazan Tülay YILDEMİR'e içten teşekkürlerimi sunarım.

A.Ç

ÖZET

Serbest türev ve düğüm polinomları hakkındaki bu çalışmada izlenen plân aşağıdaki gibi özetlenebilir;

I. Bölümde, serbest grup ile ilgili ön bilgiler sergilendi.

II. Bölümde, düğüm ve düğüm problemiyle ilgili tanım ve teoremler sergilendi.

III.Bölümde, grup halkasında Fox'un tanımladığı serbest türev ve yüksek mertebeden serbest türev kavramları verildi. Bu kavramlarla uyuşacak şekilde bazı teknikler ve bazı özellikler sergilendi.

IV. Bölümde, K_n-Kelebek düğümü ve Pretzel düğümünün serbest türev ile Alexander matrisleri ve düğüm polinomları hesaplandı.

SUMMARY

In this study, the summary of the free derivations and the knot polynomials has been given in this flowing plane.

In chapter I, the background knowledge concerning the free group has been given.

In chapter II, the definations and theorems concerning the knot and knot problems have been given.

In chapter III, ın the group ring, the free derivation and heigh order derivation concept defined by Fox have been given. Some techniques and characteristics that are appropriate with those concept have been exhibited.

In chapter IV, knot polynomials and Alexander matrixs of K_n-Butterfly knot end pretzel knot have been calculated by free derivation.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Her G çarpımsal grubuna iliştirilen grup halkası için Z tamsayılar halkasına göre ZG grup halkası teşkil edilebilir. ZG nin bir elemanı, G nin elemanlarını tararken $\sum_{g \varepsilon G} a_g g$ toplamı ile verilir. Burada a_g tamsayısı, sonlu sayıda g hariç sıfıra eşitdir. ZG içinde toplam ve çarpım sırasıyla şöyle tanımlanır.

$$\Sigma a_g g + \Sigma b_g g = \Sigma (a_g + b_g) g$$

$$(\Sigma a_g g)(\Sigma b_g g) = \Sigma (\Sigma_h a_{gh^{-1}} b_h) g \quad \text{dir.}$$

Z nin a elemanı ZG nin a.1 elemanı ile özdeşlenir ve G nin g elemanı ZG nin 1.g elemanı ile özdeşlenir. Böylece Z ve G ZG nin alt kümeleri olarak göz önüne alınır.

H grubu içine G grubunun bir homomorfizmi ZG nin ZH içine halka homomorfizmini oluşturur. Bu halka homomorfizmi grup homomorfizminin lineer genişlemesi olur. ve Ψ ile gösterilir. $\Psi(\Sigma a_g g) = \Sigma a_g g^{\Psi}$ dır.

G herhangi bir grup ve $\forall g \varepsilon G$ için $o(g)=1$ ile tanımlanan $o: G \to Z$ dönüşümünü göz önüne alalım. $o: ZG \to Z$ halka homomorfizmi olmak üzere o' nun tek genişlemesine aşikārlayıcı denir, yani $o(\Sigma n_i g_i) = \Sigma n_i$ olur.

[1953, 1954, 1956] da R.H. Fox serbest diferansiyel hesaplamada cebirsel bir temel ve teorinin genellemesini vermiş ve onu düğüm teoriye uygulamış. [1962] de Ziesheng aynı türevi serbest grup halkasında kullanmış. [1973] de J. Birman, $\langle s_1', \ldots, s_m' \rangle$, $F = \langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle$ nin bir tabanı olması için gerek ve yeter koşul

$(\frac{\partial s_i}{\partial s_j})$ Jakobieni ZF üzerinde tersinir olmasıdır, teoremini ispatlamış. Daha sonra [1985] de Burde, G-Zierhang,H. analizdeki bileşke fonksiyonun türevine benzer şekilde serbest türevi uygulamış.

R.H. Fox tarafından serbest türev şöyle tanımlanmıştır. Bir ZG grup halkasında türev, aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $\Delta: ZG \to ZG$ dönüşümü olarak adlandırılır.

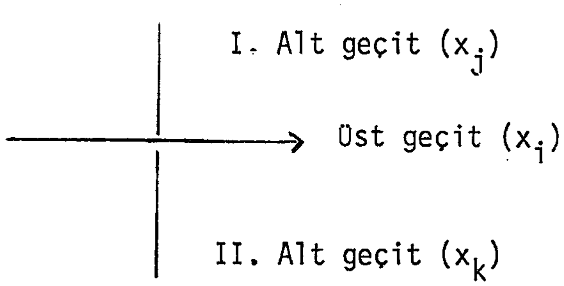
1) $\Delta(\xi+\eta) = \Delta(\xi)\Delta + \Delta(\eta)$

2) $\Delta(\xi\,\eta) = \Delta(\xi)\eta^{o} + \xi\Delta(\eta)$, $\xi,\eta \varepsilon$ ZG

Buradaki o dönüşümü augmentation idealdir. G nin elemanları için 2 daha basit şekle indirgenir. $g,h \varepsilon G$ için

3) $\Delta(g.h) = \Delta(g) + g\,\Delta(h)$

K uzayda düzgün pozisyonda bir düğüm ve $a \varepsilon P(K)$ üzerinde bir çift nokta olsun. a'ya ait olan üst geçit noktasını taşıyan doğru parçasına a'ya ait üst geçit denir. Yine a'ya ait olan alt geçit noktasından $\xi \varepsilon R^{+}$ uzaklığında bulunan iki doğru parçasına a'ya ait alt geçitler denir. O halde p(K)'ya ait her çift nokta üzerinde K'nın üç doğru parçası üst ve alt geçitler olarak adlandırılır. Buradaki alt geçitlerde I. ve II. alt geçitler olarak şu şekilde isimlendirilir. Diyagramda görüldüğü gibi düğümün yönü soldan sağa doğru ise üst geçitin üstünde kalan alt geçite I. alt geçit, altında kalan alt geçite de II. alt geçit adı verilir.



Herhangi bir düğümün i. geçit noktasına takılan bu üç doğuray x_i, x_j, x_k ise düğüm grubunun i. bağıntısı $r_i = x_i x_j \bar{x}_i \bar{x}_k$ şeklinde yazılır. Bu bağıntının değişkenlerine göre serbest türevleri

$$\frac{\partial r_i}{\partial x_i} = 1 - x_i x_j \bar{x}_i$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial x_j} = x_i$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial x_k} = -x_i x_j \bar{x}_i \bar{x}_k$$

Bu ifadeleri şu şekilde özetleyelim.

$$\alpha\gamma\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_u}\right) = \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_u}\right)^{\alpha\gamma} = \begin{cases} 1-t & u \text{ indisli doğuray üst geçit ise} \\ t & u \text{ indisli doğuray I.alt geçit ise} \\ -1 & u \text{ indisli doğuray II.alt geçit ise} \end{cases}$$

K düzgün pozisyonda n geçit noktasına sahip bir düğüm olsun.

$G = \{x_1, x_2, \dots, x_n : r_1, r_2, \dots, r_n\}$ düğüm grubu için Alexander matrisi;

$$A = (a_{ij}) = \left(\frac{\partial(r_1, r_2, \dots, r_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}\right)^{\alpha\gamma} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_1}\right)^{\alpha\gamma} & \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_2}\right)^{\alpha\gamma} & \dots & \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_n}\right)^{\alpha\gamma} \\ \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_1}\right)^{\alpha\gamma} & \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_1}\right)^{\alpha\gamma} & \dots & \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_n}\right)^{\alpha\gamma} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial r_n}{\partial x_1}\right)^{\alpha\gamma} & \left(\frac{\partial r_n}{\partial x_2}\right)^{\alpha\gamma} & \dots & \left(\frac{\partial r_n}{\partial x_n}\right)^{\alpha\gamma} \end{bmatrix}$$

Alexander matrisinin her elemanının kofaktörlerinin mutlak dağerine Alexander polinomu denir. Yani $\Delta(t) = |A_{ij}|$ dir.

Fox' un serbest türev kavramına göre n tek ve çift indisli K_n-Kelebek düğümünün ve pretzel düğümünün Alexander polinomları sırasıyla

$$\Delta_{2n}(t) = (n+1)t^4-(3n+1)t^3+(4n+1)t^2-(3n+1)t+(n+1)$$

$$\Delta_{2n+1}(t) = (n+1)t^4-(3n+1)t^3+(4n+3)t^2-(3n+3)t+(n+1)$$

$$\Delta(t) = 6t^2-11t+6$$

şeklinde bulundu.

I. BÖLÜM

GENEL BİLGİLER

1.1. SERBEST GRUPLAR

Serbest gruplar, gruplar teorisinde koordinat sisteminin analitik geometride oynadığı role benzer bir rol oynar. Analitik geometride incelenen geometrik şekil bir veya daha çok denklem ile ifade edilir. Bu denklemler seçilen koordinat sisteminin eksenlerini temsil eden değişik harflerle yazılır.

Grup temsilleri için serbest grupların tanımını yapmaya çalışalım.

1.1.1. TANIM : X, bir (G,.) grubunun bir alt kümesi olsun. Eğer G grubunun her elemanı, X kümesinin elemanlarının pozitif ve negatif kuvvetlerinin bir çarpımı olarak yazılabiliyorsa, yani,

$$G= G_p(X)= \{x:x = g_1^{\alpha_1}.g_2^{\alpha_2}\dots g_n^{\alpha_n},\ g_i\varepsilon X,\alpha_i\varepsilon Z\}$$

ise X kümesine G grubunun bir doğuraylar kümesi denir.

1.1.2. TANIM : Bir serbest doğuraylar kümesine sahip olan bir gruba serbest grup (free group) denir.

1.1.3. TANIM : Kuvvet sayısı α olarak ($\alpha\neq 0$) verilen herhangi bir kümeye alfabe denir ve A ile gösterilir.

1.1.4. TANIM : Alfabenin elemanlarına harf denir.

1.1.5. TANIM : a, alfabenin bir elemanı olmak üzere $a.a\dots a=a^n$ ifadesine bir hece denir. Burada $n\varepsilon Z$ olup, $a^0=1$ ve $a^{-n}=(a^{-1})^n$ demektir.

1.1.6. TANIM : Hecelerin yan yana sıralanmış sonlu bir ifadesine bir kelime denir.

$$K=aba^{-2}a^{2}cd^{3}a^{-2}c^{-1}$$

bir kelimedir. Her harf bir hece, her hece bir kelimedir. Bir kelimenin içinde aynı hece ardarda tekrarlanabilir. Hiç bir hecesi olmayan bir kelime vardır. Ona boş kelime denir ve 1 ile gösterilir.

1.1.7. TANIM : K(A), A alfabesiyle yazılabilen bütün kelimelerin kümesine kelime hazinesi denir. $k, m\varepsilon K(A)$ olsun.

$$km = k.m$$

kelimeleri ardarda yazma, K(A) üzerinde bir çarpma işlemidir.

1.1.8. TEOREM: Bu çarpma ile K(A) bir yarı gruptur.

İSPAT: G.1. Kapalılık aksiyomu: $k,m\varepsilon K(A)$ iken, $km\varepsilon K(A)$ dır. Yani km de bir kelimedir.

G.2. Birleşme aksiyomu: $k,m,n\varepsilon K(A)$ olmak üzere, $k(mn)=(km)n=kmn$ olup birleşme aksiyomu aşikâr olarak sağlanır.

G.3. Özdeşlik elemanın varlığı: $1\varepsilon K(A)$ olup $1.k=k.1=k$ olduğu aşikârdır. Böylece (K(A),.) bir yarıgruptur.

kelime.kelime=boş kelime olmadığından, G.4., 4. grup aksiyomu sağlanmaz. Sadece, boş kelime. boş kelime= boş kelimedir. Yani, $1.1=1$ olup 1 boş kelimesinin tersi vardır. Diğer kelimelerin tersi yoktur. Kelime hazinesi bir grup değildir.

1.2. SERBEST GRUBUN İNŞASI

Bu kısımda K(A) kelime hazinesinden F(A) ile göstereceğimiz serbest grubu inşa edeceğiz.

1.2.1. TANIM : I.TİP: $u=w_1a^{o}w_2$ ve $v=w_1w_2$ olsun. Buna göre v kelimesi, u kelimesinden I. tip bir büzülme ile elde edilmiştir, tersine u kelimesi v kelimesinden I. tip bir genişleme ile elde edilmiştir. denir.

II.TİP: $u=w_1a^xa^yw_2$, $v=w_1a^{x+y}w_2$ olsun. Buna göre, v kelimesi, u kelimesinden II. tip bir büzülme ile elde edilmiştir, tersine u kelimeside, v kelimesinden II. tip bir genişleme ile elde edilmiştir denir.

1.2.2. TANIM : K kelimesindeki hece sayısına da K kelimesinin uzunluğu denir ve L(K) ile gösterilir.

1.2.3. TANIM : Eğer bir u kelimesi bir v kelimesinden I. tip ve II. tip büzülme ve genişlemelerin sonlu bir dizisi ile elde edilirse, u kelimesi, v kelimesine denktir denir ve $u\sim v$ yazılır.

1.2.4. ÖRNEK : $u=b^{-2}a^0ac^2c^{-1}da^0 \sim b^{-2}ac^2c^{-1}da^0 \sim b^{-2}acda^0 \sim b^{-2}acdc=v$ olur. Yani u ve v kelimeleri denktir.

1.2.5. TEOREM : Kelimelerin denkliği, K(A) kelime hazinesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

İSPAT: D.1. Her $u\in K(A)$ için, $u\sim u$ olup yansıma sağlanıyor. Burada sıfır sayıda büzülme veya genişleme vardır.

D.2. $u\sim v$ ise, $v\sim u$ olup simetri özelliği vardır.

D.3. $u\sim v$, $v\sim t$ ise, $u\sim t$ geçişme özelliği vardır.

1.2.6. TANIM : $[u]=\{x\in K(A): u\sim x\}$ kümesine u kelimesinin denklik sınıfı denir.

1.2.7. SERBEST GRUPLARIN BAZI ÖZELLİKLERİ :

1. $x,y\in F(A)$ gibi verilen iki kelimenin eşlenik elemanları temsil edip etmediğini tayin etmek için bir sonlu algoritma geliş-

tirilebilir.

2. Rankı n olan bir serbest grup n den daha az sayıda eleman tarafından meydana getirilemez.

3. y, xyx^{-1}, x^2yx^{-2}, ..., x^nyx^{-n}, ... elemanları $F(x,y)=F_2$ nin bir alt grubunun serbest doğuraylar kümesidir. Buradan, rankı n olan herhangi bir serbest grup $m>2$ olmak üzere Fm içine izomorf olarak resmedilebilir. Yani $Fn \to Fm$ dir.

4.a. Bir serbest grubun her alt grubuda serbesttir.

b. Bir serbest grubun (1 hariç) mertebesi sonlu olan elemanı yoktur.

c. Bir serbest grubun iki elemanı yer değiştirme özelliğine sahip ise, onlar üçüncü bir elemanın kuvvetleridir.

d. Eğer $u.v \in F(A)$ için $u^{ma}=v^{na}$ ve $(m,n)=1$ ise, bir $w \in F(A)$ elemanı için, $u=w^n$, $v=w^m$ olur.

e. Şayet $u.v.u=v$ ise $u=1$ olur.

5. $u, u', v, v' \in F(A)$ olmak üzere $u\,v\,u^{-1}v^{-1}=u'v'u'^{-1}v'^{-1} \neq 1$ ise u ve u' elemanlarının yer değiştirme özelliğini göstermesi gerekmez. Yani, genellikle $uu'=u'u$ değildir.

1.2.8. TANIM : G bir grup ve $a,b \in G$ olsun. Eğer, bir $c \in G$ için, $b=c^{-1}a\,c$ ise, b ye a nın eşleneği denir.

1.2.9. TANIM : B herhangi bir G grubunun doğuraylar kümesi olsun. H, herhangi bir grup ve

$$\psi: B \to H$$

herhangi bir dönüşüm olsun. Bu ψ bir

$$h : G \to H$$

homomorfizmine genişletilebilirse, B kümesine G grubunun serbest doğuraylar kümesi (free basis) denir.

1.2.10. TANIM : A kümesinin eleman sayısına $F(A)$ serbest grubunun rankı denir. Yani, Rank $(F(A)) = |A|$ dır.

1.2.1.1. TEOREM : Herhangi bir grup bir serbest grubun bir homomorf resmidir.

İSPAT : G herhangi bir grup olsun ve B, G grubunun bir doğuraylar kümesi olsun.

$|A| \geq |B|$ olan bir A alfabesi ve $F(A)$ serbest grubunu gözönüne alalım.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "J"] \arrow[d, "\Psi"] & F(A) \arrow[d, "h"] \\ B \arrow[r, "i"] & G \end{tikzcd}$$

1. Diyagram

Daima, $\Psi : |A| \longrightarrow B$ (üstüne) fonksiyonu vardır.

$$i \circ \Psi : [A] \longrightarrow G$$

epimorfizmine genişletilebilir. Bu ise teoremin ispatını verir.

1.3. GRUP TEMSİLLERİ

1882 yılında Dyck tarafından ortaya konan grup temsili kavramı kısaca şöyle tarif edilir. G, bir grup olsun. G nin bir $X = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ alt kümesi onun doğuraylar kümesidir ve doğuraylar kümesinin elemanları arasında

$$r_1(g_1, g_2, \ldots) = 1 \;;\; r_2(g_1, g_2, \ldots) = 1$$

denklemleri vardır. Bunlara tanımlama bağıntıları denir. G nin elemanları arasında diğer her doğru bağıntı bu bağıntılardan çıkarılabilir.

1.3.1. TANIM : X, bir G grubunun doğuraylar kümesi R, $F(X)$ serbest grubunun bir alt kümesi ve N, $F(X)$ in R ile doğrulan normal kapanışı (consequence) olmak üzere, $G= F(X)/N$ ise, $(X:R)$ çiftine G nin bir grup temsili denir.

Eğer, $(X:R)$, G grubunun bir temsili ise, $G=|X:R|$ yazarız. Yani, f bir izomorfizm, d ve h doğal homomorfizmler olmak üzere aşağıdaki 2. diyagram tutarlıdır.

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "d"] & \\ |X:R| \arrow[r, "f"'] & G \end{tikzcd}$$

2. Diyagram $f.h=d$ dir.

<u>1.3.2. TANIM</u> : Eğer X ve R kümelerinin ikiside sonlu ise, $(X:R)$ grup temsiline sonludur ve eğer bir G gurubu en az bir sonlu temsile sahip ise, G ye sonlu olarak temsil edilmiştir denir.

<u>1.3.3. ÖRNEKLER</u> :

$$(a.b:a,b);\ (a,b:[a,b]);\ (a,b:a^2b^2,a^3b^3,\ldots)$$

temsillerinin ilk ikisi sonlu, diğeri sonlu değildir. Bu temsillerin grupları sırasıyla aşikâr grup, iki doğuraylı Abel grubu ve sonsuz devirli gruptur. Ayrıca n. mertebeden sonlu devirli grup

$$Z_n=|t:t^n=1|=|x:nx=o|$$

ve üçüncü dereceden simetrik grup

$$S_3=|x,y:x^2=y^3=1,\ xy^2=yx| \quad \text{olur.}$$

olur. Aşikâr grup

$$E = F_o = |:|$$

ile temsil edilir.

<u>1.4. TEMSİL TİPLERİ:</u>

Değişik temsillerin aynı grubu verip vermediği problemi aşağıdaki Tietze denklikleri ve Tietze teoremi ile çözülür.

1.4.1. TANIM : N,G grubunun bir alt grubu olsun. Eğer

$$aN = Na$$

ise, N grubuna, G grubunun normal alt grubu denir. Burada, aN, sol-yan kümesi, $a\varepsilon G$ sabit, $x\varepsilon N$ değişken olmak üzere, bütün ax elemanlarının kümesidir, Yani,

$$aN = \{ax : x\varepsilon N\}$$

dır.

1.4.2. TANIM : S, bir G grubunun herhangi bir alt kümesi olsun. G nin S kümesini ihtiva eden bütün normal alt gruplarının arakesitine S nin normal kapanışı denir.

1.4.3. TANIM : (X:R), (Y:S) iki grubun temsili ve F(X), F(Y) sırasıyla X ve Y kümelerinin doğurduğu iki serbest grup olsun. Eğer,

$$f : (X:R) \to F(Y)$$

homomorfizmi R yi S nin normal kapanışı içine dönüştürüyorsa, F ye bir temsil fonksiyonu denir ve

$$f : (X:R) \to (Y:S)$$

yazılır.

1.5. TEMSİL FONKSİYONLARININ ÖZELLİKLERİ

1.5.1. TANIM : $f,g: (X:R) \to (Y:S)$ iki temsil fonksiyonu olsun. Eğer, her $a\varepsilon X$ için $f(a,g(\bar{a}))$, S nin normal kapanışına ait ise, f temsil fonksiyonu g temsil fonksiyonuna benzerdir denir ve $f \simeq g$ yazılır. Burada ve bundan sonra $\bar{a}$, a^{-1} demektir.

1.5.2. TANIM : (X:R) ve (Y:S) temsilleri verilsin Eğer;

gf=1 ve fg=1 olacak şekilde

$$(X:R) \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} (Y:S)$$

temsil fonksiyonları varsa, (X:R) ve (Y:S) temsilleri aynı tiptendir. Ayrıca f ve g temsil fonksiyonlarının her birine bir temsil denkliği denir.

1.6. TİETZE DENKLİKLERİ :

1.6.1. (X:R) herhangi bir temsil olsun. Ayrıca S, R den elde edilen bir kelime olsun. X=Y ve S=RU{S} olmak üzere (Y:S) temsili düşünülürse, R nin normal kapanışı S nin normal kapanışına eşit olur. Böylece;

$$I_1 : F(X) \to F(Y)$$

özdeşlik dönüşümü bir

$$T_1 : (X:R) \to (Y:S)$$

temsil fonksiyonu tanımlar.

1.6.2. Benzer şekilde,

$$T_1' : (Y:S) \to (X:R)$$

temsil fonksiyonu,

$$I_1' : F(Y) \to F(X)$$

yardımı ile tanımlanır.

T_1 ve T_1' fonksiyonları aşikâr olarak birer temsil denkliğidir.

1.6.3. Bir (X:R) temsili alalım. $y \varepsilon X$ ve $k \varepsilon F(X)$ herhangi bir kelime olsun. $Y=XU\{y\}$ ve $S=RU\{yk^{-1}\}$ olmak üzere (Y:S) temsilini düşünelim ayrıca,

$$T_2 : F(X) \to F(Y)$$

yi her $x \varepsilon X$ için $I_2(x)=x$ ile tanımlayalım. I_2, R yi S nin normal kapanışı içine dönüştürür. Böylece,

$$I_2 : F(X) \to F(Y); \quad T_2 : (X:R) \to (Y:S)$$

bir temsil fonksiyonu tanımlar.

1.6.4. $I_2 : F(Y) \to F(X)$ fonksiyonunu her $x \in X$ için $I_2'(x)=x$ ve $I_2(y)=k$ ile tanımlayalım. I_2', S yi $R_1 = R \cup \{1\}$ üzerine dönüştürür. O halde

$$I_2' : F(Y) \to F(X) \quad \text{bir } T_2' : (Y:S) \to (X:R)$$

temsil fonksiyonu tanımlar. $T_2'.T_2$ ve $T_2.T_2'$ temsil fonksiyonları sırasıyla (X:R) ve (Y:S) temsillerinin özdeşlik dönüşümleridir. Yani, T_2 ve T_2' temsil denklikleridir.

1.6.5. TANIM : Yukarıda bahsedilen T_1, T_1', T_2 ve T_2' temsil denkliklerine Tietze denklikleri veya Tietze işlemleri denir.

1.7. SERBEST ÇARPIM :

1.7.1. TANIM : $(a_1, a_2, \ldots : r_1, \ldots)$ ve $(b_1, b_2, \ldots : s_1, \ldots)$ temsilleri ile birlikte A ve B grupları verilsin. Burada $(a_1, \ldots)$ ve $(b_1, \ldots)$ kümeleri sırasıyla A ve B gruplarının doğurayları kümesidir ve $(a_1, \ldots)$ ile $(b_1, \ldots)$ ayrıktır. A ve B gruplarının AxB ile gösterilen serbest çarpımı

$$AxB = (a_1, \ldots, b_1, \ldots : r_1, \ldots, s_1, \ldots)$$

temsilinin grubu olarak tanımlanır.

1.7.2. TANIM : A ve B gruplarına AxB serbest çarpım grubunun çarpanları adı verilir.

1.7.3. ÖRNEK : $F_n = |x : x^n = 1|$ ve $F_m = |y : y^m = 1|$ devirli gruplarının serbest çarpımı

$$F_n x F_m = |x, y : x^n = 1,\ y^m = 1|$$

dir. Bu grup sonlu değildir.

II. BÖLÜM

DÜĞÜM VE DÜĞÜM PROBLEMİ

2.1. DÜĞÜM KAVRAMI

2.1.1. TANIM : $f: S \to R^3$ fonksiyonu bir S çemberinin, R^3 uzayının bir alt uzayı olan $k=f(S)$ üstüne bir yerleştirme fonksiyonu (enbedding) olsun. Yani, $f:S \to K$ ve $f^{-1}: K \to S$ fonksiyonları birebir üstüne ve sürekli ise, K kümesine uzayın basit kapalı bir eğrisi veya düğüm denir.

Burada R^3 ile $(x,y.z)$ sıralı gerçek sayı üçlülerinin oluşturduğu üç boyutlu Euclid uzayı ve S ile de,

$$S= \{(x,y.z)\varepsilon R^3 : x^2+y^2=r^2, \quad z=0\}$$

alt uzayı, yani, bir çember gösterilmiştir.

2.1.2. TANIM : K uzay içinde bir düğüm olsun. Eğer, K sonlu sayıda doğru parçalarından oluşmuş ise, K ya poligonal bir düğüm denir.

2.1.3. TANIM : $K= f(S)$ ve $L=g(S)$ uzayda iki düğüm olsun. Eğer $h(k)=L$ olacak şekilde bir $h:R^3 \to R^3$ homeomorfizmi varsa, K düğümü L düğümüne denktir denir.

2.1.4. TANIM : Tanım 2.1.3. deki denklik bağıntısı düğümler kümesini ayrık denklik sınıflarına ayırır. Herbir denklik sınıfına bir düğüm tipi denir.

2.1.5. TANIM : Bir çemberin veya onunla aynı denklik sınıfında olan bir üçgenin düğüm tipine aşikâr veya düğümlenmemiş tip denir.

2.1.6. TANIM : $p:R^3 \to R^3$, $p(x,y,z)=(x,y,0)$ ile tanımlanan fonksiyona paralel (dik) izdüşüm fonksiyonu denir.

2.1.7. TANIM : K uzay içinde poligonal bir düğüm, $p:R^3 \to R^3$ de paralel izdüşüm fonksiyonu olsun. p(K) üzerinde alınan herhangi bir a noktası için eğer, a noktasının p altındaki görüntüleri ile K nın ortak olduğu noktaların sayısı 1 den fazla ise, yani, $|p^{-1}(a) \cap K| > 1$ ise, a noktasına p(K) izdüşümünün katlı bir noktası ve $n = |p^{-1}(a) \cap K|$ sayısınada a noktasının katlılık mertebesi denir. n=2 ise, a ya geçit noktası denir.

2.2. REGÜLER İZDÜŞÜM VE REGÜLER POZİSYON

2.2.1. TANIM : K uzay içinde bir düğüm ve $p:R^3 \to R^3$ paralel izdüşüm fonksiyonu olsun. Eğer.

1. p(K) izdüşümünün katlı noktaları yalnız sonlu sayıda iki katlı noktalar ise,

2. Hiçbir iki katlı nokta K düğümüne ait bir doğru parçasının köşe noktasının p altındaki resmi değilse, p(K) izdüşümüne K düğümünün regüler izdüşümü denir. Eğer, p(K) izdüşümü regüler ise, K düğümü uzayda regüler pozisyondadır denir.

2.2.2. TANIM : K uzayda regüler pozisyonda bir düğüm ve a noktası p(K) izdüşümü üzerinde bir katlı nokta olsun. Bu durumda a noktası K düğümüne ait iki noktanın resmidir. Bu noktalardan z-koordinatı büyük olana üst geçit noktası, z-koordinatı küçük olanada alt geçit noktası denir.

2.2.3. TANIM : Regüler pozisyonda bulunan bir K düğümü ile küçük bir pozitif sayısı gözönüne alınsın. A ile K düğümüne ait ve K düğümünün her alt geçit noktasından uzaklığı ε den küçük olan noktaların oluşturduğu doğru parçalarını gösterelim. O zaman $p(K-A_{\varepsilon})$ kümesine K düğümünün normal izdüşümü denir.

2.2.4. TANIM : K uzayda regüler pozisyonda bir düğüm ve x, p(K) üzerinde bir iki katlı nokta olsun. x noktasına ait olan üst geçit noktasını taşıyan doğruya x'e ait üst geçit denir. Yine x'e ait alt geçit noktasından ε uzaklığında bulunan iki doğru parçasınada x noktasına ait alt geçitler denir.

Herhangi iki katlı nokta için üst geçit olan doğru parçası diğer bir iki katlı nokta için alt geçit denir.

2.2.5. TANIM : K uzayda regüler pozisyonda bulunan bir düğüm olsun. Eğer, K düğümüne ait olan alt ve üst geçit noktaları K düğümü üzerinde almaşık olarak yer alıyorsa, K düğümüne almaşık düğüm denir.

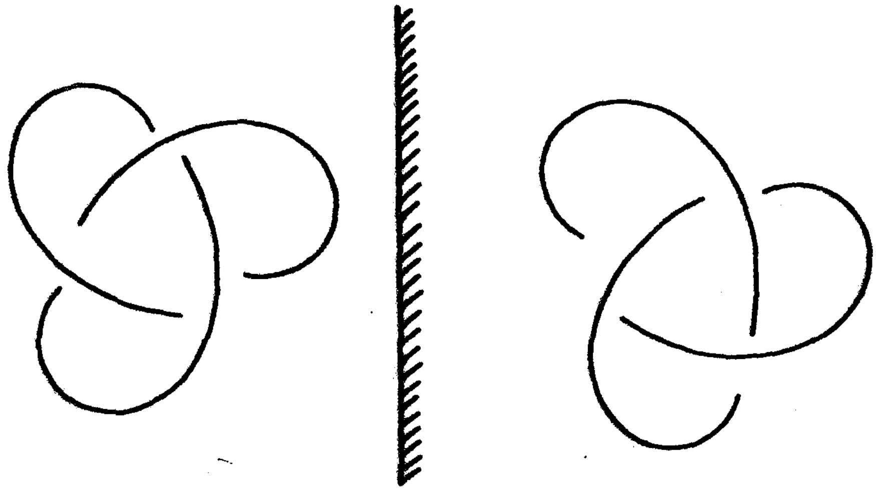
2.3. DÜĞÜMÜN YÖNLENDİRİLMESİ

2.3.1. TANIM : Bir düğüm üzerinde ok konulmak suretiyle yön tayin edilmiş ise, düğüm yönlendirilmiştir denir.

2.3.2. TANIM : K uzayda bir düğüm olsun. Eğer uzayın yönlendirmeyi tersine çeviren bir eşyapı dönüşümü $h:R^3 \to R^3$ altında h(K)=K ise, K düğümüne iki yanlı denir.

2.3.3. TANIM : $r:R^3 \to R^3$, $r(x,y,z)=(x,y,-z)$ ile tanımlanan yansıma fonksiyonu altında bir düğümün resmine o düğümün ayna resmi denir.

Şekil.1 de yonca yaprağı düğümünün ayna resmi görülmektedir.

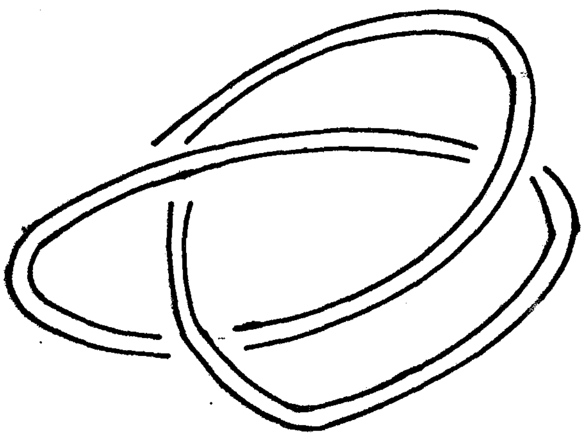


Şekil 1

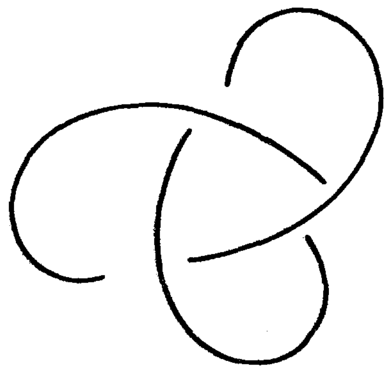
2.3.4. TEOREM : Herhangi bir K düğümünün iki yanlı olabilmesi için gerek ve yeter şart, uzayda yönlendirmeyi koruyan bir eş yapı dönüşümü altında K nın kendi ayna resmi üzerine resmedilebilmesidir.

2.3.5. TANIM : K uzayda bir düğüm olsun. Eğer uzayın yönlendirmeyi koruyan $h:R^3 \to R^3$ gibi bir eşyapı dönüşümü varsa ve onun K ya kısıtlanması K nın yönlendirmesini tersine çeviriyorsa K düğümüne tersine denktir denir

2.3.6. TANIM : Üç boyutlu uzayda düğümlerin nasıl yapılabileceğini düşünerek başlayalım. Şekil. 2. yonca yaprağı düğümünün iki canlandırılmasını gösterir. Şekil. 2.a. yonca yaprağı düğümünün üç boyutlu uzayda gerçeğe uygun olarak kalınlık, yoğunluk gibi fiziksel özellikleri taşıyacak şekilde bir halat gibi resmedildi. Şekil.2.b de ise geçit noktalarında çakışan, üç sürekli düzlemsel parça ihtiva eden şematik bir temsil vardır. Bu temsil bir teorinin inşasına izin verir



a



b

Şekil 2

2.3.7. TANIM : K uzayda regüler pozisyonda bir düğüm olsun. K nın paralel izdüşüm fonksiyonu altında düzlemdeki izdüşümüne K nın evreni adı verilir.

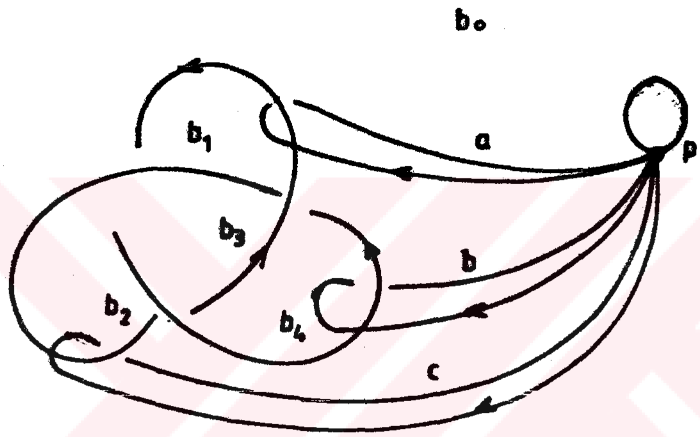
2.4. DÜĞÜM GRUBU

2.4.1. TANIM : K, S^3 içinde regüler pozisyonda bir düğüm olsun. $p\varepsilon S^3-K$ olmak üzere p noktasında başlayıp p noktasında biten tüm kapalı eğrileri gözönüne alalım. Bu eğrilerin homotopi sınıfları, herhangi iki eğriyi birbiri arkasına eklemeye dayanan bir ikili işlem altında bir grup teşkil eder. Bu gruba birinci homotopi grubu veya esas grup denir ve $G=\pi_1(S^3-K,p)$ ile gösterilir. p taban noktasına büzülen kapalı eğrilerin homotopi sınıfı grubun özdeşlik elemanıdır. Bir elemanı temsil eden zıt yönde yönlendirilmiş kapalı eğrilerin homotopi sınıfı o elemanın ters elemanını verir. Düğüm grubunu bulmak için iki esas yöntem vardır.

1) Dehn Yöntemi

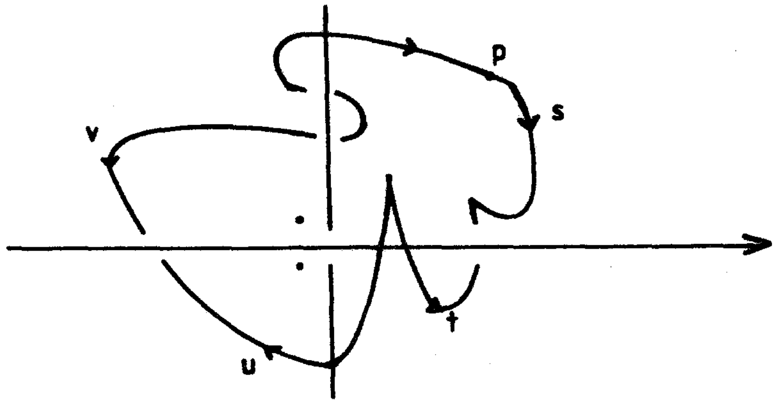
2) Writinger Yöntemi

2.4.2. TANIM : Bir K düğümünün regüler diyagramının bölgeleri, b_0, b_1,..., b_n olsun. İzdüşüm düzleminin yukarısındaki bir $p\varepsilon R^3-K$ taban noktasında başlayan, b_i bölgesinden izdüşüm düzleminin arka tarafına geçip b_0 yoluyla, tekrar p ye dönen eğrilerin homotopi sınıfları düğüm grubunun doğurayları olarak alınır. Şekil.3 de görüldüğü gibi.



Şekil 3

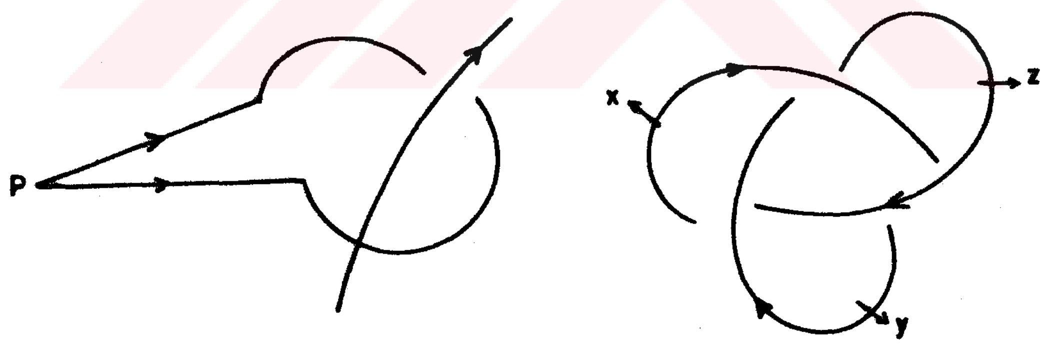
Benekli iki bölgeye ait doğuraylar (s.t) olmak üzere bir geçit noktasındaki 4 bölgeye karşılık gelen doğuraylar (s,t,u,v) olsun. Aşağıdaki Şekil.4 de görüldüğü gibi $s\bar{t}u\bar{v}=1$ dır. Bu bağıntı grubun bir bağıntısıdır.



Şekil 4

Her geçit noktası için, $(s\bar{t}u\bar{v}=1)$ şeklinde eşitlikler yazılırsa düğüm grubunun bütün bağıntıları elde edilmiş olur. b_0 bölgesine komşu geçit noktalarındaki bağıntılar sadece üç elemandan oluşur. Çünkü b_0 bölgesine gidip yine b_0 bölgesinden p ye büzülebilen kapalı bir eğri birim elemanı temsil eder.

<u>2.4.3. TANIM</u> : Yönlendirilmiş n geçit noktalı normal diyagramı ile bir K düğümünü gözönüne alalım. Bu diyagramda üst geçitlere karşılık gelen n tane eğri parçası vardır. $p \varepsilon R^3-K$ noktasında başlayıp p de biten ve üst geçitleri basitçe halkalıyan kapalı eğrilerin homotopi sınıfları K grubunun doğuraylardır. Bu doğuraylar normal diyagramdaki eğri parçaları üzerine konulan küçük oklarla belirtilir.



Şekil 5

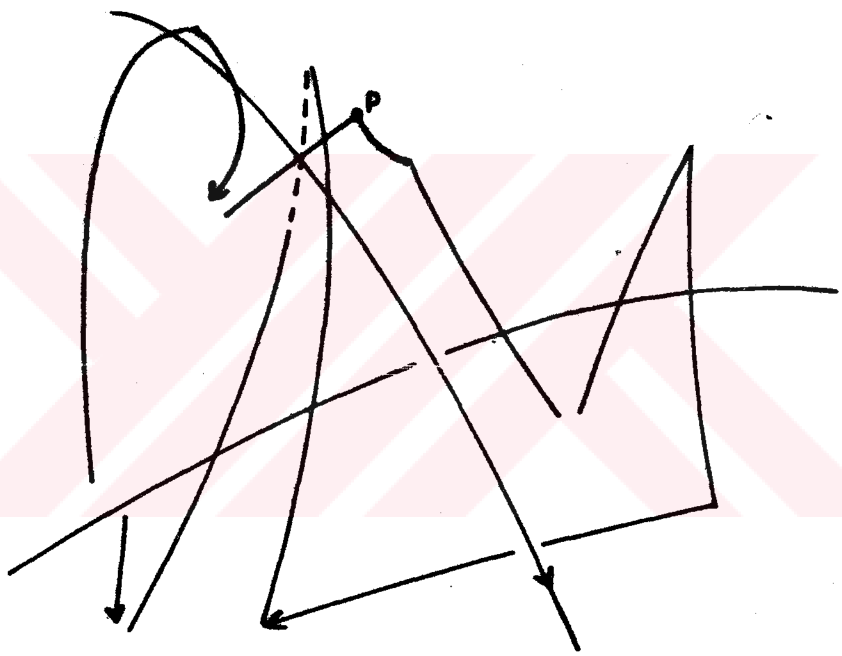
Her $C_i(i=1,2,3,\ldots,n)$ geçit noktasında bir bağıntı şu şekilde tayin edilir. C_i deki üst geçite ait olan x,y,z doğuraylarının temsilci eğrileri düğümün yönü ile sol el sistemi teşkil edecek şekilde yönlendirilir.

c_i etrafında bir okuma yönü seçilir. x,y,z doğuraylarının birinden başlanıp her bir doğurayın yönü seçilen yön ile aynı ise doğuray aynen zıt ise doğurayın tersi alınır. Bu çarpımın 1 e yani özdeşlik elemanına eşit olduğu görülür. Yani;

$$\bar{z}\bar{x}yx=1 \Rightarrow \bar{x}\bar{y}xz=1$$

$$\Rightarrow xz\bar{x}=y$$

olur.



Şekil 6

Bu bağıntı $xz\bar{x}\bar{y}=1 \Rightarrow y=xz\bar{x}$ şeklinde yazılabilir. y doğurayı z nin x e göre eşleniğidir. Yani, her doğuray bir diğer doğurayın eşleniğidir. Her geçit noktası için yazılan $xz\bar{x}\bar{y}=1$ şeklindeki eşitliklerin, hepsi bu grubun Writinger temsilinin bağıntılarını verir.

III. BÖLÜM

SERBEST TÜREV VE DOĞUM POLİNOMLARI

3.1. GRUP HALKASI

3.1.1. TANIM : Her G çarpımsal grubuna iliştirilen grup halkası için Z tamsayılar halkasına göre ZG grup halkası teşkil edilebilir. ZG nin bir elemanı, G nin elemanlarını tararken $\Sigma_{g\varepsilon G}\, a_g g$ toplamı ile verilir. Burada a_g tamsayısı, sonlu sayıda g hariç sıfıra eşittir. ZG içinde toplam ve çarpım sırasıyla şöyle tanımlanır.

$$\Sigma a_g g + \Sigma b_g g = \Sigma(a_g + b_g)g;$$

$$(\Sigma a_g g)(\Sigma b_g g) = \Sigma(\Sigma_h a_{gh^{-1}} b_h)g \text{ dır.}$$

Z nın a elemanı ZG nın a.1 elemanı ile özdeşlenir ve G nin g elemanı ZG nın 1.g elemanı ile özdeşlenir. Böylece Z ve G, ZG nin alt kümeleri olarak gözönüne alınır.

H grubu içine G grubunun bir Ψ homomorfizmi ZG nın ZH içine halka homomorfizmini oluşturur. Bu halka homomorfizmi, grup homomorfizminin lineer genişlemesi olur ve Ψ ile gösterilir. $\Psi(\Sigma a_g g) = \Sigma a_g g^{\Psi}$ Z nin her bir elemanı Ψ altında sabit kalır.

Ψ grup homomorfizminin çekirdeği Ψ ile H nın 1 birim elemanına dönüşen G nin elemanlarından meydana gelen N normal alt grubudur. Ψ halka homomorfizminin çekirdeği de Ψ ile ZH nın sıfır elemanına dönüşen JG nın elemanlarının meydana getirdiği iki yanlı η idealidir. Bu yolla η iki yanlı ideali N normal alt grubuna karşılık getirilir. (N ile η nın ortak elemanı yoktur). Tersine G deki iki

η ideali G nin bir normal alt grubunu tayin eder. Bu alt grub G nin elemanlarından meydana gelen alt gruptur. $ZG \to ZG/\eta$ halka homomorfizmi ile 1 e dönüşen N normal alt grubuna karşılık gelen η ideali N yi tekrar tayin eder. Buradan η N yi tayin eden ZG nin en küçük idealidir.

Eğer n_1, n_2 G deki N yi doğurursa, n_1^{-1}, n_2^{-1} de ZG deki N yi doğurur. Varsayalım ki $\Sigma a_g g \varepsilon N$ olsun. Böylece $a_g g^{\Psi}=0$ dır. Böylece H nın herhangi bir h elemanı için $\Sigma a_g=0$ dır. Burada Σ', $g\overset{\Psi}{=}h$ yı sağlayan g elemanları üzerinede genişletilir. g_o, $g_o=h$ olan herhangi bir eleman olsun. Böylece;

$$\Sigma' a_g g=\Sigma' a_g(gg_o^{-1}-1)g_o+\Sigma' a_g g_o=\Sigma' a_g(gg_o^{-1}-1)g_o \quad \text{dır.}$$

Böylece $\Sigma a_g g$ $n\varepsilon N$ için $n-1$ elemanlarının lineer birleşimidir ki $\Sigma' a_g g$ n_1-1, n_2-1, ... v.s nın lineer birleşimidir. Buradan şu özellikler çıkar.

$$n^{-1}-1 = -n^{-1}(n-1)$$

$$nn'-1 = (n-1)+n(n'-1)$$

$$gng^{-1} = g(n-1)g^{-1}$$

<u>3.1.2. TEOREM</u> : ZG Komutatif halka olması için gerek ve yeter koşul G komutatif grup olmasıdır [7]

<u>3.1.2. TEOREM</u> : A toplam sal abelyan grubundaki G nin keyfi $\emptyset$ dönüşümü $\emptyset: ZG \to A$ toplam homomorfizminin tek genişlemesine sahiptir. Ayrıca, A halka ve $\emptyset$ G üzerinde çarpımı korursa, genişleme halka homomorfizmidir.

<u>İSPAT</u> : $\emptyset 0=0$ dır. ZG nin, her sıfırdan farklı elemanı $n_1g_1+n_2g_2+\ldots+n_kg_k$; $n_i\neq o$, $i=1,2,\ldots,k$ ve $g_1,g_2,\ldots,g_k$ lar ayrık olmak üzere tek ifadeye sahiptir. Genişlemeyi elde etmek için $\emptyset$

şöyle tanımlanır.

$$\emptyset\,(n_1g_1+n_2g_2+\ldots+n_kg_k)=n_1\emptyset g_1+n_2\emptyset g_2+\ldots+n_k\emptyset g_k$$

Bu daima $n_1, n_2,\ldots,n_k$ tamsayıları ve $g_1,g_2,\ldots,g_k$ grup elemanları için korunur. Çünkü $\emptyset$ nin herhangi bir genişlemesi olan $ZG\to A$ bir toplam homomorfizmidir. Eğer A halka ve $\emptyset$ G de çarpımı koruyan dönüşüm ise $\emptyset$ ZG de çarpımı korur.

$$\emptyset\,(\sum_i n_ig_i\sum_j n_jg_j)=\emptyset(\sum_{i,j} n_in_jg_ig_j)$$
$$=\sum_{i,j} n_in_j\emptyset g_i\emptyset g_j=\sum_i n_i\emptyset g_i\sum_j n_j\emptyset g_j$$
$$=(\emptyset\sum_i n_ig_i)(\emptyset\sum_j n_jg_j)$$

dır.

3.1.3. TANIM : G herhangi bir grup ve $\forall g\in G$ için $o(g)=1$ ile tanımlanan $o:G\to Z$ dönüşümünü gözönüne alalım. $o:ZG\to Z$ halka homomorfizmi olmak üzere o'nın tek genişlemesine aşikârlayıcı denir. Yani $o(\sum n_ig_i)=\sum n_i$ dir.

Aynı zamanda o dönüşümüne augmentation homomorfizm de denir. ve çekirdeği $IG=o^{-1}(0)$ augmentation idealdir

3.2. SERBEST TÖREV

3.2.1. TANIM : Bir ZG grup halkasında türev, aşağıdaki koşulları sağlarsa $\Delta:ZG\to ZG$ dönüşümü olarak adlandırılır.

(2.1) $\Delta(\xi+\eta)=\Delta(\xi)+\Delta(\eta)$

(2.2) $\Delta(\xi.\eta)=\Delta(\xi)\eta^{o}+\xi\Delta(\eta);\xi,\eta\in ZG$

Buradaki o dönüşümü 3.1.3 Tanımındaki augmentation homomorfizmdir. G nin elemanları için (2.2) daha basit şekle indirgenir. $g,h\in G$ için

(2.3) $\Delta(g.h)=\Delta g+g\Delta h$

(2.1) ve (2.2) nin sonucu olarak aşağıdakiler yazılabilir.

(2.4) $\Delta n=0, \; n\varepsilon Z$

(2.5) $\Delta(\Sigma a_g g)=\Sigma \; a_g \Delta_g$

(2.6) $\Delta(\xi_1 \; \xi_2 \; \ldots \; \xi_n)=\sum_{i=1}^{n} \xi_1 \; \xi_2 \ldots \xi_{i-1} \Delta\xi_i \xi_{i+i}^{o} \ldots \xi_i^{o},$

(2.7) $\Delta(g^{-1})=-g^{-1}\Delta g, \; g\varepsilon G$

(2.8) $\Delta(g^n)= (1+g+\ldots+g^{n-1})\Delta g$

(2.9) $\Delta(g^{-n})=-(g^{-1}+g^{-2}+\ldots+g^{-n})\Delta g, \quad n\geqq 1$

Burada;

$$\frac{g^n-1}{g-1} = \begin{cases} 0 & \text{Eğer } \; n=0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} g^i & n>0 \\ -\sum_{i=n}^{-1} g^i & \text{Eğer } \; n<0 \end{cases}$$

ifadesinden yararlanarak (2.7) ve (2.8) ifadesi şöylede yazılabilir.

(2.10) $\Delta(g^n)= \dfrac{g^n-1}{g-1} \; \Delta g \; , \; n>0$

(2.11) $\Delta(g^{-n})= \dfrac{g^n-1}{g-1} \; \Delta g \; , \; n<0$

3.2.2. ÖRNEK :

a) Δ_o: $ZG \to ZG, \zeta \to \zeta-\zeta^o$ türevdir.

b) Eğer $a,b\varepsilon G$; $ab=ba$ ise $(a-1)\Delta b=(b-1)\Delta a$ dır.

3.2.3. TANIM : Sağ ZG modülden, ZG deki türev şöyle tanımlanır.

a) $(\Delta_1+\Delta_2)u=\Delta_1 u+\Delta_2 u$

b) $(\Delta v)u= \Delta uv$

3.3. SERBEST GRUP HALKASI

3.3.1. TANIM : Bir x serbest grubu $(x)=(x_1,x_2,\ldots)$ doğurayların kümesine sahiptir. x'in herhangi bir elemanı kelimelerin u denklik sınıfı olarak tanımlanır ve $\Pi_{k=1}^{l} x_{ji}^{\varepsilon i}$, $\varepsilon_k=\pm 1$, $\varepsilon_k+\varepsilon_{k+1}\neq 0$ dır. $j_k=j_{k+1}$ kelimeleri tek olarak kısaltılmış kelimelerin l uzunluğu ile temsil edilirse, u nun uzunluğu kısaltılmış kelimelerin l uzunluğu ile temsil edilir. Bir birim elemanı boş kelime ile temsil edilir ve uzunluğu sıfırdır. u nun u^{-1} tersi $\Pi_{k=1}^{l} x_{ji}^{-\varepsilon i}$ kısaltılmış kelimeleri ile temsil edilir.

ZK serbest grup halkasının herhangi bir elemanı $f(x)=\Sigma a_u u$; $u\varepsilon X$, $a_u \varepsilon j$ serbest polinomudur. Hemen hemen her a_u sıfıra eşittir.

x in bir $\emptyset$ homomorfizmi x den G grubu içine (x)'i $(x^{\emptyset})=(x_1^{\emptyset},x_2^{\emptyset},\ldots)$ ye dönüştürür. Oluşturulan halka homomorfizmi $\emptyset:ZX\to ZG$ ise f(x)'i $f(x^{\emptyset})=\Sigma a_u u^{\emptyset}$ içine dönüştürür. Özellikle $o:ZX\to Z$ homomorfizmi f(x)'i $f(1)=\Sigma a_u x^{o}$' a dönüştüren f(x)'in katsayıları toplamı Σa_u'dur. ZX'in esas ideali, f(x)'in f(1)=0 olan polinomlarından meydana gelir. ZX'deki türevlerin kümesi bir özel yapıya sahiptir.

3.3.2. TEOREM : X' in her x_j doğurayına

$$(3.1)\qquad \frac{\partial x_k}{\partial x_j}=\delta_{j,k}\text{(Kronecker delta)}$$

özelliğine sahip x_j'ye göre türev olarak adlandırılır. $f(x)\to D_j f(x)=fx_j(x)=\partial f(x)/\partial x$ türevi karşılık gelir. Ayrıca

$$(3.2)\qquad f'(x)=\Sigma\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}h_j(x)$$

formülü ile verilen, x_1, $x_2,\ldots$ ZX' in $h_1(x)$, $h_2(x),\ldots$ elemanları içine dönüştüren bir ve yalnız bir $f(x) \to f'(x)$ türevi vardır.

İSPAT : Her bir j indexsi ve x'in u elemanı için kısaltılmış x_j, u ile temsil edilen kelimenin ön parçası ise $\langle j,u\rangle=1$, değilse $\langle j,u\rangle=0$ dır. Bu tanım ZX'e genişletilebilir.

$$\langle j,\ f(x)\rangle=\langle j,\ \Sigma a_u u\rangle=\Sigma a_u \langle j,u\rangle$$

Her bir j indexsi için x'in w elemanı ve f(x) serbest polinomu

$$\langle j,w,f(x)\rangle=\langle j,w^{-1}f(x)\rangle-\langle j,w^{-1}\rangle f(1)$$

olarak tanımlanır. Böylece her ne zaman w, u nun ön parçası değilse $\langle j,w,u\rangle=\langle j,w^{-1}u\rangle-\langle j,w^{-1}\rangle$ dır. Böylece bir durum için x_j $w^{-1}u$ nun ön parçası olması için gerek ve yeter koşul w^{-1}' in ön parçası olmasıdır. Verilen j ve f(x) için

$$\langle j,w,f(x)\rangle=\langle j,w,\Sigma a_u u\rangle= \Sigma a_u \langle j,w,u\rangle$$

x'in sonlu sayıdaki w elemanları hariç tümü için sıfıra eşitdir. f(x)'in x_j'ye göre türevi,

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = \Sigma_{w\varepsilon X} \langle j,w,f(x)\rangle w$$

sonlu toplamı olarak tanımlanır.

Onun (2.1)'i sağladığı açıktır. (2.2) nin (2.3) özel durumunun ispatlanması yeterlidir. u,vεX olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\frac{\partial(u.v)}{\partial x_j} &= \Sigma_w(\langle j,w^{-1}uv\rangle-\langle j,w^{-1}\rangle)w\\ &= \Sigma_w(\langle j,w^{-1}u\rangle-\langle j,w^{-1}\rangle)w\\ &= \Sigma_w(\langle j,w^{-1}u\rangle-\langle j,w^{-1}\rangle)w+u\Sigma_t(\langle j,t^{-1}v\rangle-\langle j,t^{-1}\rangle)t\\ &= \frac{\partial u}{\partial x_j} + u\,\frac{\partial v}{\partial x_j}\end{aligned}$$

(3.1)'i ispatlamak için x_k' nın ön parçasının 1 ve x_k olduğu kabul edilirse;

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_j} = <j,1,\ x_k> + <j,x_k,x_k>x_k$$
$$= (<j,x_k>-<j,1>+(<j,1>-<j,x_k^{-1}>)x_k$$
$$= (\partial_{jk}-0)+(0-0)x_k \quad \text{dır.}$$

son olarak (3.2)'yi ispatlayalım. $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ türevi j indexsinin tüm sonlu sayıları hariç sıfıra eşittir. Dolayısıyla;

$$\Sigma_j \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} h_j(x)$$

toplamı sonludur. ZX, deki türevler bir sağ ZX-modülü oluşturduklarından $f(x) \to \Sigma_j(\frac{\partial f(x)}{\partial x_j})h_j(x)$ bir türevdir. Her bir k indexsi için $x_k \to h_k(x)$ dir. Eğer $f(x) \to f'(x)$; x_1, x_2, x_3,... $h_1(x)$, $h_2(x)$,... içine götüren türev dönüşümü ise

$f(x) \to f'(x)-\Sigma_j(\partial f(x)/\partial x_j)h_j(x)$ her bir x_j için 0 içine türev dönüşümüdür. Ayni işlem her bir x_j^{-1}, $-x_j^{-1}.0=0$ içinde geçerlidir. (2.1) ve (2.2) den ZX' in her elemanının 0 içine dönüştüğü görülür; böylece

$$f'(x) = \Sigma_j(\partial f(x)/\partial x_j)h_j(x)$$

dir.

$f(x) \to f(x)-f(1)$ dönüşümünün x_1^{-1}, x_2^{-1},... içine x_1, x_2,... türev dönüşümü olduğu kolaylıkla görülebilir. Böylece (3.2) ile esas formül elde edilir.

$$(3.3) \qquad f(x)= f(1)+ \Sigma_j \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}(x_j-1)$$

Bu formül ZX'in herhangi bir f(x) elemanının f(1) den elde edildiğini açıkca gösterir ve $D_jf(x)$, j=1,2.... türevleri özellikle X serbest grubunun herhangi bir u elemanı $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u}{\partial x_2}$, ...

türevlerini verir.

3.3.3. ÖRNEK : Eğer m,n>0 ise

$$D_1(x_1^m x_2^n x_1^{-m} x_2^{-n}) = (1+x_1+\ldots+x_1^{m-1}) + x_1 x_2^n(-x_1^{-m}-x_1^{-m+1}-\ldots-x_1^{-1})$$

$$= (1-x_1^m x_2^n x_1^{-m})(1+x_1+\ldots+x_1^{m-1})$$

dır.

3.4. YÜKSEK MERTEBEDEN SERBEST TÜREVLER

3.4.1. TANIM : ZX' deki yüksek mertebeden serbest türevler tümevarımla tanımlanır.

$$\frac{\partial^n f(x)}{\partial x_{j_n} \partial x_{j_{n-1}} \ldots \partial x_{j_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{j_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} f(x)}{\partial x_{j_{n-1}} \ldots \partial x_{j_1}} \right)$$

($\partial^n f(x)/\partial x_{j_n} \ldots \partial x_{j_1}$) için diğer notasyonlar

$f_{x_{j_n} \ldots x_{j_1}}$ ve $D_{j_n \ldots j_1} f(x)$ dır.

(4.1) $D_{j_n \ldots j_1}(f(x)+g(x)) = D_{j_n \ldots j_1} f(x) + D_{j_n \ldots j_1} g(x)$,

(4.2) $D_{j_n \ldots j_1}(f(x).g(x)) = \sum_{p=1}^{n} D_{j_n \ldots j_p} f(x) D_{j_{p-1} \ldots j_1} g(1) +$

$$f(x) D_{j_n \ldots j_1} g(x)$$

$f_{x_{j_1}}$ 'e (3.3) esas formülü uygulanırsa,

$$D_{j_1} f(x) = D_{j_1} f(1) + \Sigma_j (D_{j j_1} f(x))(x_j - 1)$$

$$D_{j_2 j_1} f(x) = D_{j_2 j_1} f(1) + \Sigma_j (D_{j j_2 j_1} f(x))(x_j - 1),$$

elde edilir ve herbir n pozitif tamsayısı için,

$$(4.3)\quad f(x)= f(1)+\Sigma_{j_1}(D_{j_1}f(1))(x_{j_1}-1)$$

$$+\Sigma_{j_2,j_1}(D_{j_2j_1}f(1))(x_{j_2}-1)(x_{j_2}-1)+\ldots$$

$$+\Sigma_{j_{n-1},\ldots,j_1}(D_{j_{n-1},\ldots,j_1}f(1))(x_{j_{n-1}}-1)\ldots(x_{j_1}-1)$$

$$+\Sigma_{j_n,\ldots j_1}(D_{j_n\ldots j_1}f(x)(x_{j_n}-1)\ldots(x_{j_1}-1)$$

olur. Bu "Kalanlı Taylor serisinden" bir formel Taylor serisi

$$(4.4)\quad f(x)=f(1)+\Sigma_j(D_jf(1))(x_j-1)+\Sigma_{j,k}(D_{j,k}f(1))(x_j-1)(x_k-1)+\ldots$$

şeklinde elde edilir. O kolaylıkla görülürkü, $\partial^n x_j/\partial x_j^n=0$, n 1 için ve $\partial^n x_j^{-1}/\partial x_j^n=(-1)^n x_j^{-1}$. böylece $f(x)=x_j$ ve $f(x)=x_j^{-1}$ fonksiyonlarının açılımı

$$x_j=1+(x_j-1)$$
$$x_j^{-1}=1-(x_j-1)+(x_j-1)^2+(x_j-1)^3+\ldots$$

dır. Bu açılımlar Magnus nın açılımlarıyla aynıdır. Yalnız $x_j=a$ ve $x_j-1=s$ yazılmalıdır.

$$f(x)=f(1)+\Sigma_j(D_jf(1))(x_j-1)+\ldots$$
$$g(x)=g(1)+\Sigma_j(D_jg(1))(x_j-1)+\ldots$$

verilsin. Yan yana çarpılırsa (4.2) formülüne göre

$$h(x)=f(x)g(x)=f(1)g(1)+\Sigma_j((D_jf(1)))g(1)+$$
$$f(1)(D_jg(1)))(x_j-1)+\ldots$$
$$=h(1)+\Sigma_j(D_jh(1))(x_j-1)+\Sigma_{j,k}(D_{jk}h(1))(x_j-1)(x_k-1)+\ldots$$

olur. Böylece (4.4) açılımı X'in elemanlarına uygulandığında,

$s_j=x_j-1$ alınmasıyla "serbest halka" elemanlarından oluşan serbest grup Magnus[12] temsili ile özdeş görülür. (Magnus yalnızca X temsilini düşündü fakat onu ZX'e genişletmek aşikârdır.) $f(1)$, $f_{x_j}(1)$, $f_{x_j x_k}(1)$, ve başka katsayıları ve (4.1) ve (4.2) kurallarını kullanarak işlem yapmak ve açılımlarının formel çarpımlarını kullanmaktan daha kolay olduğu görülür.

(4.2) den şu ifade elde edilir.

$$\frac{\partial^n x_j}{\partial x_j^n} = \frac{\partial^n x_j^{p-1}}{\partial x_j^n} + \frac{\partial^{n-1} x_j^{p-1}}{\partial x_j^{n-1}}, \quad n\geq 1 \text{ için}$$

$$\frac{\partial^n x_j^p}{\partial x_j^n} = \begin{cases} 1 & n=0 \text{ ise} \\ 0 & n>0 \text{ ve } p=0 \text{ ise} \end{cases}$$

yine görülebilirki

$$(4.5) \qquad \left(\frac{\partial^n x_j^p}{\partial x_j^n}\right)^o = \binom{p}{n}, \quad n<0 \text{ için}$$

burada

$$\binom{p}{n} = (-1)^n \binom{n-p-1}{n}, \quad p<0 \text{ dır.}$$

(4.3) ve (4.5) den görülürkü

$$(4.6) \qquad \frac{\partial^n x_j^p}{\partial x_j^n} = (x_j-1)^{-n}\left(x_j^p - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{p}{k}(x_j-1)^k\right), \quad n\geq 0 \text{ için}$$

o daima, n üzerinden indüksiyon ile hesaplanabilir.

$$(4.7) \qquad \frac{\partial^n x_j^p}{\partial x_j^n} = \sum_{i=0}^{p-n} \binom{p-i-1}{n-1} x_j^i, \text{ eğer } p\geq 0,\ n\geq 1,$$

$$= (-1)^n \sum_{i=0}^{-p-1} \binom{n+i-1}{n-1} x_j^{i+p}, \text{ eğer } p<0,\ n\geq 1$$

$\lambda: x_j \to x_j,\ x_k \to 1,\ k \neq j$ için x_j ile üretilen sonsuz devirli gruplar içine X'in homomorfizmi uygulanınca şu forma getirilir.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^o = \left(\frac{\partial f^{\lambda}}{\partial x_j}\right)^o$$

herhangi bir $f(x) \varepsilon ZX$ için, sonuç olarak

$$\left(\frac{\partial^n f}{\partial x_j^n}\right)^o = \left(\frac{\partial^n f^{\lambda}}{\partial x_j^n}\right)^o \text{ dır.}$$

Böylece X'in herhangi bir u elemanı için

$$(4.8)\quad \left(\frac{\partial^n u}{\partial x_j^n}\right) = \left(\begin{matrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^o \\ n \end{matrix}\right) \quad \text{olur.}$$

Bu X'in elemanlarının Magnus açılımlarının katsayılarıyla ilgili bir çok özdeşliklerden biridir.

$$(4.9)\quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j x_k}\right)^o + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}\right)^o = \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^o \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^o$$

3.5. BAZI KOMUTATÖR FORMÜLLERİ

Bu kısımda ZG de komutatörlerin türevleri ile ilgili bazı formülleri sergileyeceğiz.

3.5.1. TANIM : G herhangi bir grup, $x_i,\ x_j \varepsilon G$ olmak üzere $[x_i, x_j] = x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1}$ ifadesine komutatör denir ve $[x_i, x_j] = x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1}$ komutatörleriyle doğurulan gruba komutatör alt grup denir.

$$(5.1)\quad \frac{\partial}{\partial x_i}[x_i, x_j] = 1 - [x_i, x_j] x_j$$

$$(5.2)\quad \frac{\partial}{\partial x_j}[x_i, x_j] = x_i - [x_i, x_j]$$

(5.3) $\frac{\partial}{\partial x_i}[x_i,x_j]^n = \left\{1+[x_i,x_j]+[x_i,x_j]^2+\ldots[x_i,x_j]^{n-1}\right\}\frac{\partial}{\partial x_i}[x_i,x_j]$

(5.4) $\frac{\partial}{\partial x_j}[x_i,x_j]^n = \left\{1+[x_i,x_j]+[x_i,x_j]^2+\ldots[x_i,x_j]^{n-1}\right\}\frac{\partial}{\partial x_j}[x_i,x_j]$

(5.5) $\frac{\partial^n}{\partial x_i{}^n}[x_i,x_j] = (-1)^{n+1}\frac{\partial}{\partial x_i}[x_i,x_j]$

(5.6) $\frac{\partial^n}{\partial x_j{}^n}[x_i,x_j] = (-1)^{n+1}\frac{\partial}{\partial x_j}[x_i,x_j]$

(5.7) $[u,vw]=[u,v][u,w]^v$ burada $[u,w]^v = v[u,w]\bar{v}$ dır. Bu ifadenin değişkenlerine göre serbest türevleri aşağıdaki gibidir.

a) $\frac{\partial[u,vw]}{\partial u} = 1-[u,v][u,w]^v vw$

b) $\frac{\partial[u,vw]}{\partial v} = u-[u,v][u,w]^v$

c) $\frac{\partial[u,vw]}{\partial w} = 1-[u,w]^{uv}\,uv$

(5.8) $[u,v] = [x_i,x_j]^{\partial(u,v)/\partial(x_i,x_j)}$

Burada $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x_i,x_j)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_i} & \frac{\partial u}{\partial x_j} \\ \frac{\partial v}{\partial x_i} & \frac{\partial u}{\partial x_j} \end{vmatrix}$ jakobiendir.

(5.9) $\left(\frac{\partial[x_i,x_j]}{\partial x_i}\right)^o = 0$, $\left(\frac{\partial[x_i,x_j]}{\partial x_j}\right)^o = 0$

Buradaki o işlemi augmentation homomorfizmidir.

3,6. ALEXANDER MATRİSİ

3.6.1. TANIM : (x:r) grup temsilini düşünelim. $x=(x_1,x_2,\ldots)$ kümesi F serbest grubunun serbest tabanı ve temsil edilen çarpım grubu $|x:r|= F/_R \overset{\gamma}{\leftarrow} F$ ile gösterilir.

γ ve α abelleyicilerinin her ikisi de onların grup halkalarının homomorfizmlerine tek genişlemeleridir. H ile $|x:r|$ nin abellenmiş grubunu gösterelim. Buradan şöyle yazılabilir.

$$ZF \xrightarrow{\partial/\partial x_j} ZF \xrightarrow{\gamma} Z|x:r| \xrightarrow{\alpha} ZH$$

dır. (x:r) nin $||a_{ij}||$ Alexander matrisi

$$a_{ij}=\alpha\gamma\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)^{\alpha\gamma}$$

formülü ile tanımlanır. $Z|x:r|$ içine ZF in elemanları γ homomorfizmi ile taşınır ki herbir r nin sonucu 1'e eşittir.

3.6.2. TANIM : R çarpmaya göre sıfır olmayan ve özdeşlik elemanı 1 olan keyfi bir abel halkası olsun. Elemanları R den alınan mxn mertebeli bir A matrisi verilsin negatif olmayan bir k tamsayısı $(k\in Z^+)$ için A' nın k'ncı basit ideali $E_k(A)$ ile gösterilir. Bu $o<n-k\leq m$ olmak üzere A nın bütün (n-k)x(n-k) mertebeli alt matrislerinin determinantlarıyla doğurulan elementer idealdir.

Eğer $n-k>m$ ise $E_k(A)=0$, eğer $n-k\leq 0$ ise $E_k(A)=R$ A nın basit idealler zinciri $E_o(A)\subset E_1(A)\subset E_2(A)\subset\ldots\subset E_n(A)=E_{n+1}(A)=R$

Eğer A ve A' elemanları R den alınan iki matris ise A nın A' ne denkliği $A\sim A'$ şeklinde tanımlanır. Eğer $A=A_1=\ldots=A_n=A'$ sonlu bir matris zinciri varsa o zaman A_{i+1} A_i' den elde edilir. Bu işlem aşağıdaki elementer işlemle yapılır.

i) Satırlar veya sütunlar kendi aralarında yer değiştirebilir.

) Bir A'ya bir sıfır satırı eklenebilir.

$$A \to \begin{vmatrix} A \\ o \end{vmatrix}$$

) Bir satırı diğer satırlara eklenebilir.

iv) Bir sütunu diğer sütunlara eklenebilir.

v) Yeni bir satır veya sütun eklenebilir.

$$A \to \begin{vmatrix} A & o \\ o & 1 \end{vmatrix} \quad \text{veya} \quad A \to \begin{vmatrix} A & o \\ a & 1 \end{vmatrix}$$

vı) $\begin{vmatrix} A \\ o \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} A \\ a \\ o \end{vmatrix} \xrightarrow{iii} \begin{vmatrix} A \\ a \\ ea \end{vmatrix} \xrightarrow{i} \begin{vmatrix} A \\ ea \\ a \end{vmatrix}$

$\xrightarrow{iii} \begin{vmatrix} A \\ ea \\ a-e^{-1}ea \end{vmatrix} \xrightarrow{ii} \begin{vmatrix} A \\ ea \\ a \end{vmatrix} \xleftarrow{ii} \begin{vmatrix} A \\ ea \end{vmatrix}$

vıı) $\begin{vmatrix} A & a \end{vmatrix} \xrightarrow{(v')} \begin{vmatrix} A & a & o \\ o & -e^{-1} & o \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} A & ea & o \\ o & -e^{-1} & 0 \end{vmatrix}$

$\xrightarrow{i} \begin{vmatrix} A & ea & o \\ o & o & -e^{-1} \end{vmatrix} \xrightarrow{(iv)} \begin{vmatrix} A & ea & o \\ o & o & -e^{-1} \end{vmatrix}$

$\xleftarrow{v} \begin{vmatrix} A & ea \end{vmatrix}$

3.6.3. TEOREM : Denk matrislerin elementer ideal zincirleri aynıdır [7]

3.6.4. TEOREM : Eğer $\emptyset$ üzerine ise $\emptyset_k(A)=E_k(\emptyset A)$ dır. [7]

3.6.5. TEOREM : Eğer f,g çifti temsil denkliği ise f_{**} ve g_{**}'ın herbiri üzerine izomorfizm ve diğerlerinin inversidir. [7]

3.6.6 TEOREM : (Elementer ideallerin invaryantlığı)

Eğer (x:r) ve (y:s) sonlu grup temsilleri ve $f:(x:r) \to (y:s)$ temsil denkliği, böylece (x:r) nin k' ıncı elementer ideali (y:s) nin k' ıncı elementer ideali üzerine f_{**} dönüşümü ile gider.(Burada f_{**} abellenmiş gruplar üzerinde f_*' ın oluşturduğu homomorfizm).

İSPAT : Tietze denkliklerinin kontrolüne indirgenir. Şu da gözlenebilir 3.6.5 ve 3.6.6 teoremleri açısından biri için geçerli ise diğer temsillerin denklikler çiftinin kontrolü yeterlidir. Sadece Tietze I ve II kontrolü gereklidir.

Tietze I : Bu temsilin dönüşümü

$$(x:r) \xrightarrow{I} (x:rus)$$

ki $x=(x_1, x_2,\ldots,x_n)$, $r=(r_1, r_2,\ldots,r_m)$ s elemanı r' nin sonucudur ve I: F(x) F(x) birim dönüşümüdür. I_* ve I_{**} daima özdeşliktir. Basitçe Alexander matrislerinin denkliğinden gösterilerek tamamlanır. s, r' nin sonucu olduğundan,

$$s=\prod_{k=1}^{p} u_k r_{i_k}^{\alpha_k} u_k^{-1}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}(u_1 r_{i_1}^{\alpha_1} u_1^{-1})+u_1 r_{i_1}^{\alpha_1} u_1^{-1}\frac{\partial}{\partial x_j}(u_2 r_{i_2}^{\alpha_2} u_2^{-1})+\ldots$$

$$+\prod_{k=1}^{p-1}(u_k r_{i_k}^{\alpha_k} u_k^{-1}).\frac{\partial}{\partial x_j}(u_p r_{i_p}^{\alpha_p} u_p^{-1}) \quad \text{dır.}$$

fakat $\gamma(r_i)=1$ olduğundan

$$\gamma(\frac{\partial s}{\partial x_j})=\sum_{k=1}^{p}\gamma(\frac{\partial}{\partial x_j}(u_k r_{i_k}^{\alpha_k} u_k^{-1}) \text{ dir.}$$

bununla beraber $\frac{\partial}{\partial x_j}(u_k r_{i_k}^{\alpha_k} u_k^{-1}) = \frac{\partial u_k}{\partial x_j}+u_k\frac{r_{i_k}^{\alpha_k}-1}{r_{i_k}-1}.\frac{\partial r_{i_k}}{\partial x_j}$

$$-u_k r_i^{\alpha_k} u_k^{-1}\frac{\partial u_k}{\partial x_j},$$

$$\text{ve} \quad \gamma(\frac{r_{i_k}^{\alpha_k}-1}{r_{i_k}-1})=\alpha_k$$

burada $\gamma(\frac{\partial}{\partial x_j}(u_k r_{i_k}^{\alpha_k} u_k^{-1}))=\alpha_k\gamma(u_k)\gamma(\frac{\partial r_{i_k}}{\partial x_j})$ olursa

$\alpha_k \alpha\gamma(u_k)=c_k$ dır. Biz son olarak şunu elde ederiz.

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^{p} \gamma \, c_k \alpha\gamma\left(\frac{\partial r_{ik}}{\partial x_j}\right)$$

böylece $(x:r\ s)$ nın Alexander matrisi $(x:r)$ ninki gibidir. Bir ilave satırı hariç bu da diğer satırlarının lineer birleşimidir. Böylece iki matris denktir ve ispatın bir kısmı tamamlanır.

Tietze II. Bu temsil dönüşümü

$$(x:r) \to (x\ y : r \cup y\zeta^{-1})$$

ki $x=(x_1, x_2,\dots,x_n)$, $r=(r_1, r_2,\dots,r_m)$ $F(x)$, $\zeta \in F(x)$, y X içinde ihtiva edilmeyen doğuraylar kümesinin bir elemanıdır. ve

$II: F(x) \to F(x,y)$ içerme dönüşümüdür.

$G=|x:r|$ ve $G'=|x\ y:r\cup y\zeta^{-1}|$ diyelim ve H ve H' sırasıyla G ve G' nün abellenmiş grupları eşittir. Aşağıdaki homomorfizmler diyagramı düzenlenir.

$$\begin{tikzcd}
ZF(x) \arrow[r, "II"] \arrow[d, "\gamma"'] & ZF(x\ y) \arrow[d, "\gamma'"] \\
ZG \arrow[r, "II_*"] \arrow[d, "\alpha"'] & ZG' \arrow[d, "\alpha'"] \\
ZH \arrow[r, "II_{**}"] & ZH'
\end{tikzcd}$$

$$\gamma II = II_* \gamma \ , \quad \gamma' II_* = II_{**}\alpha$$

$(x:r)$ ve $(x\ y:r\cup y\zeta^{-1})$ nın Alexander matrislerinin $A=|a_{ij}|$ ve $A'=|a_{ij}'|$ ile gösteririz. Böylece;

$$a_{ij}= \alpha\gamma\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right) \qquad \begin{matrix} i=1,2,\dots,1 \\ j=1,2,\dots,n \end{matrix}$$

ve $II_{**}\, a_{ij} = II_{**}\alpha\gamma = \alpha'\gamma'\ II\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right) = \alpha'\gamma'\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right) = \alpha_{ij}'$

Açıkça $\frac{\partial r_i}{\partial y}=0$ ve $\frac{\partial}{\partial y}(y\zeta^{-1})=1$ böylece elemanların satırını gösterirsek $\alpha'\gamma(\frac{\partial}{\partial x_j}y\zeta^{-1})$, $j=1,2,\ldots n$ α' ile elde ederiz.

$$A'=\begin{Vmatrix} II_{**}A & 0 \\ a' & 1 \end{Vmatrix}$$

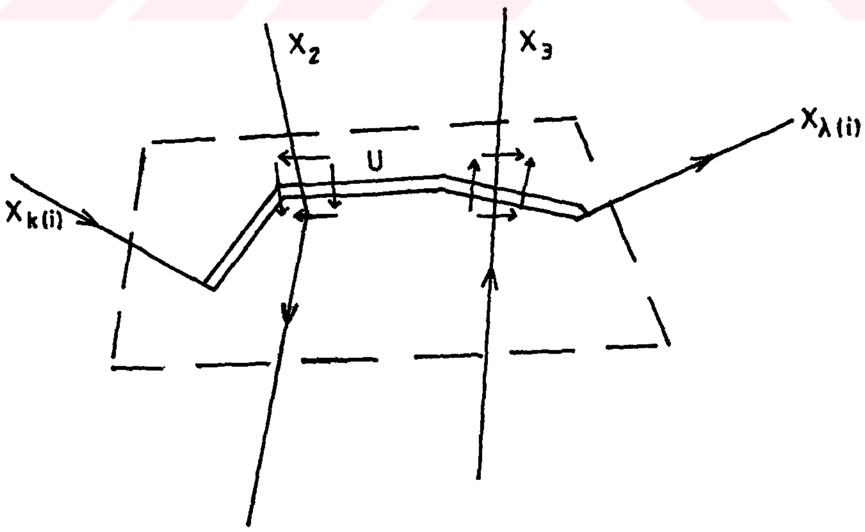
böylece (v') matris işlemiyle A' $II_{**}A$ dır.

$$E_k(A')=E_k(II_{**}A)=II_{**}E_k(A) \quad \text{olur.}$$

3.7. ABELLEŞTİRİLEN DÜĞÜM GRUBU

3.7.1. TANIM : Bizim maksadımız her düğüm grubunun abelleştirilen grubunun sonsuz devirli olduğunu göstermektir. İspat düğüm gruplarının Writinger temsilinin gözönüne alınmasına dayanır.

G bir düğüm grubu ve $(x_1,x_2,\ldots,x_n:r_1,r_2,\ldots,r_n)\emptyset$ de Writinger temsili olsun. r_i bağıntılarının tipik bir örneği şekil 8 deki gibi çıkarılır



Şekil 7

1) $x_2 x_{k(i)} \bar{x}_2 \bar{u}=1$

2) $x_3 u x_3 x_{\lambda(i)}=1 = u x_3 x_{\lambda(i)} x_3=1 = u=x_3 x_{\lambda(i)} x_3$

bunu 1) numaralı denklemde yerine yazalım.

$x_2 x_{k(i)} \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_{\lambda(i)} \bar{x}_3 = 1$, x_2' yi sağ tarafı alırsak

$x_{k(i)} \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_{\lambda(i)} \bar{x}_3 x_2 = 1$

$r_i = x_{k(i)} \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_{\lambda(i)} \bar{x}_3 x_2$

elde edilir. $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ X tarafından üretilen F serbest grubundaki herhangi bir u elemanı için u' nun j^{th} üsleri toplamı u içinde tüm x_j elemanlarının üslerinin toplamı olarak tanımlanır. u' nun j^{th} üsler toplamı $o:JF \to J$ aşikârlayıcı dönüşümü altında $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ nin görüntüsüdür. $x_{k(i)}$ ve $x_{\lambda(i)}$ alt geçiti ile bitişik iki üst geçite karşılık gelen r_i ile ilgili doğuraylar olarak tanımlansın. Özel olarak biz varsayalımki Düğümün yönlendimesine göre $x_{k(i)}$ üst geçitine karşılık $x_{\lambda(i)}$ üst geçiti $x_{k(i)}$ den önce gelir. Şekil 8 deki örnekte gösterilen r_i nin k(i)th ve λ(i)th üst toplamı +1 ve -1 dir. Halbuki r_i nin diğer doğuraylarına göre toplamı 0 dır.

Eğer θ G nin abel grubu içine herhangi bir homomorfizm ise şöyle bir eşitlik elde edilir.

$$1 = \theta\phi r_i = (\theta\phi x_{k(i)})(\theta\phi x_{\lambda(i)})^{-1} = \theta(\phi x_{k(i)} x_{\lambda(i)}^{-1}) = \theta\phi r_i$$

Düğümün izdüşümü bağlantılı olduğundan x_i ve x_j doğurayların her çifti için $\theta\phi x_i = \theta\phi x_j$ sonucuna varırız. Böylece θG grubunun görüntüsündeki herhangi bir eleman tek $t = \theta\phi x_j$, $j = 1, 2, \ldots n$ elemanının kuvvetidir. Böylece şunu ispatladık.

<u>3.7.2. TEOREM</u> : Düğüm grubunun her abelian homomorfik görüntüsü devirlidir. Ayrıca herhangi Writinger temsilinin doğurayları bir tek doğuraya resmedilir.

Özellikle herhangi düğüm grubunun abelleştirilen grubu devirlidir. O sonlu değildir. Bunu ispatlamak için G nin Writinger temsilini tekrar düşünelim. ve t tarafından doğurulan sonsuz devirli grubu (t) ile gösterelim. Çünkü F serbest grup, $\xi x_j = t$, $j=1,2,\ldots,n$ verilirse bu (t) üzerine F nin homomorfizmi genişletilebilir. Bu halde aşağıdaki diyagramla G den (t) üstüne homomorfizminin varlığı kolaylıkla gösterilir. Öyleki diyagram tutarlıdır.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\emptyset"'] & (t) \arrow[dl, "\theta"] \\ G & \end{tikzcd}$$

Diyagram

açık olarak $\zeta_{r_i} = t^{s_i}$, $i=1,2,\ldots,n$ buradan s_i, r_i' nin bu x_j' ye göre j^{th} üs toplamıdır. Böylece;

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} t \frac{\partial r_i}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} (\delta_{j,k(i)} - \delta_{j,\lambda(i)}) = 0 \quad \text{dır.}$$

Böylece $\xi_{r_i} = 1$, $i=1,2,\ldots,n$ ve $r_i,\ldots,r_k,\ldots,r_n$ ki θ nın çekirdeğidir. Bu ξ' nin çekirdeğini kapsar. Aşağıda θ nın iyi tanımlı olduğunu gösterir.

$$\theta\emptyset u = \zeta u, \quad u \varepsilon F$$

üzerine olduğundan θ üzerinedir. Bundan sonra $\alpha : G \to G/|G,G|$ abelleştirici dönüşümünün düşünebiliriz. Bir gruptan bir abel grubuna herhangi bir grup homomorfizminin komutatör bölüm grupları ile ayrıştırılacağı gerçeğini hatırlatırız. Sonuç olarak bir θ' homomorfizmi vardır öyle ki diyagram tutarlıdır.

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\alpha"'] & (t) \arrow[dl, "\theta"] \\
G/[G,G] &
\end{tikzcd}
$$

Çünkü θ üzerine olduğundan θ' de üzerinedir. Görüntüsü sonlu olan bir fonksiyonunun tanım kümesi sonlu olamaz. Böylece $G/|G,G|$ sonsuz olduğu sonucuna varırız. Bu sonuç 3.7.2 Teoremi ile birleştirilirse aşağıdaki teoremi elde etmiş oluruz.

3.7.3. TEOREM : Herhangi düğüm grubunun abelleştirilmiş grubu sonsuz devirlidir [7]

3.8. SONSUZ DEVİRLİ GRUPLARIN GRUP HALKASI

H sonsuz devirli grubunun grup halkasının temel bazı cebirsel özelliklerinin bilinmesi, düğüm polinomlarının temelini teşkil eden bazı özellikler için gereklidir. Burada tamlık bölgesinde ve halkalarda bölünebilirliği bazı elementer kavramlarını inceleyeceğiz ve JH grup halkasında onların uygulamasının nasıl olduğunu göreceğiz.

3.8.1. TANIM : R çarpımsal birime sahip olan keyfi bir halka olsun. R nin bir u elemanı sağ ve sol inverse sahipse tersinirdir. Yani $u,w \in R$ için $uw=wu=1$ dir.

Burada iki tersinir elemanın çarpımı yine tersinirse R nin tersinir elemanlarının çarpımının grup olduğu görülür. Örneğin tamsayılar halkasının tersinirleri sadece +1, -1 dir. Grup halkasında tüm grup elemanlarının ve onların negatiflerinin tersinir olduğu açıktır. Yani +1, -1 grup halkasında aşikār tersinirler olarak adlandırılır.

3.8.2. TANIM : R kommutatif halkasındaki a ve b elemanları $a|b$ ve $b|a$ ise a ve b elemanları ilgilidir denir.

3.8.3. TEOREM : Özdeşlik elemanı 1 olan bir tamlık bölgesinde iki elemanın ilgili olması için gerek ve yeter koşul biri diğerinin tersinir çarpımı olmalıdır [7]

3.8.4. TEOREM : Eğer Q tamlık bölgesi ise R de tamlık bölgesidir [7]

3.8.5. TEOREM : Eğer R kommutatif halkası en büyük ortak bölen bölgesi olan Q alt halkası ile ilgili ise R de en büyük ortak bölen bölgesidir [7]

3.8.6. TEOREM : Her tek çarpanlama bölgesi bir en büyük ortak bölen bölgesidir [7]

3.8.7. TEOREM : Eğer R tek çarpanlama bölgesi ise R [t] de tek çarpanlama bölgesidir.

İSPAT : Sonsuz devirli grupların grup halkasından faydalanırsak, H' nın bir t üreteci için JH' ın bir a keyfi elemanı bir tek şekilde temsil edilir.

$$a= \sum_{-\infty}^{\infty} a_n t^n$$

dır. a_n tamsayısının sonlu sayıları tamamen sıfıra eşittir. J|t| polinomlar halkası JH' ın alt halkasıdır. JH daki her sıfırdan farklı eleman için $\mu(a)$ tanımlanır. n en küçük tamsayı, $a_n \neq o$ dır. Örneğin $\mu(t^3+2t-7t^{-5})=-5$, $\mu(1)=0$ dır. $a=0$ ise $\mu(a)=\infty$ olur. Genellikle $\infty+\infty=\infty$ kabul edilir ve $\infty+n=n+\infty=\infty$ dur. Böylece şu teoremi veririz.

3.8.8. TEOREM : $a,b\varepsilon JH$ için $\mu(ab)=\mu(a)+\mu(b)$ dır [7]

3.8.9. TEOREM : rankı $m \geq o$ olan serbest abelian grupların grup halkası en büyük ortak bölen bölgesidir. Onun tek tersinirleri sadece grup elemanları ve onun negatifleridir

3.8.10.TEOREM : Sonsuz devirli grupların grup halkası sadece aşikâr tersinirlere sahiptir. Bunlar bir t doğurayının kuvvetleri ve onların negatifleridir [7]

İSPAT : a, JH' ın bir tersinir elemanı ve b onun inversi olsun. Böylece ab=1 ve $(\rho(a)\rho(b))=\rho(ab)=\rho(1)=1$ dir. J|t| polinomlar halkasının tersinirleri sadece 1 ve -1 dir. Burada $\rho a=at^{-\mu(a)}=\pm 1$ olur. a' da $a=\pm t^{\mu(a)}$ dır.

Grup halkasında aşikâr olmayan tersinirlere örnek olarak t tarafından üretilen 5 mertebeli sonsuz devirli grubun grup halkasını verebiliriz. Yani;

$$(1-t^2+t^4)(1-t+t^2)t^2=(1-t+t^3-t^5+t^6)t^2=(1-t+t^3-1+t)t^2=t^5=1$$

dır.

3.8.1. TEOREM : Eğer R özdeşlik elemanlı kommutatif halka ve $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ ise d, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in en büyük ortak bölen bölgesi olması için gerek ve yeter koşul $a_1, a_2, \ldots, a_n$, i kapsayan R'nin tüm esas ideallerinin keşişimi d tarafından doğurulan esas idealin kendisidir [7]

3.8.12. TEOREM : Özdeşlik elemanlı en büyük ortak bölen belgesinde elemanların sonlu kümesinin herhangi en büyük ortak böleni onlarla kapsanan bir e_n küçük esas ideal üretir [7]

3.9. DOĞÜM POLİNOMLARI

3.9.1. TANIM : Herhangi $k \geq o$ tamsayısı için, düğüm grubunun $(x:r)=(x_1,\ldots,x_n:r_1,\ldots,r_m)$ sonlu temsilinin k.ıncı Δk düğüm polinomu (x:r) nin Alexander matrisinin tüm (n-k)x(n-k) alt matrislerinin determinantlarının en büyük ortak bölen bölgesidir.

3.9.2. TEOREM : Düğüm polinomları vardır ve $\pm t^n$ sız tekdir, n herhangi bir tamsayı ve t düğüm grubunun (x:r) temsilinin sonsuz devirli abelleştirici grubunun doğurayıdır[7]

3.9.3. TEOREM : Her bir Δ_k düğüm polinomu E_k elementer idealini kapsayan en küçük esas ideal üretir.

3.9.4. TEOREM : Δ_{k+1}/Δ_k dır.

İSPAT : Δ_k ve Δ_{k+1}, (Δ_k) ve (Δ_{k+1}) ile üretilen esas ideal olarak gösterilir. Çünkü (Δ_k), E_k elementer idealini kapsayan en küçük esas idealdir. $(\Delta_{k+1})\supset(\Delta_k)$ dır. Böylece

$$\Delta_k=\alpha\Delta_{k+1} \quad \text{veya} \quad \Delta_{k+1}/\Delta_k \quad \text{dır.}$$

3.9.10. TEOREM :(Düğüm Polinomlarının İnvaryantlığı)

Eğer (x:r) ve (y:s) düğüm gruplarının sonlu temsilleri ise $f:(x:r)\to(y:s)$ bir temsil denkliğidir. O zaman tersinirleriyle birlikte f_{**} ile (x:r)' nin Δ_k'ncı düğüm polinomu (y:s) nin Δ_k' düğüm polinomu üzerine dönüşür.[7]

3.9.11. TEOREM : Bir düğüm grubunun polinomu ve sıfırıncı elementer ideali aşikârdır.[7]

3.9.12. TEOREM : $\alpha\gamma x_i=\alpha\gamma x_j$ dir. i,j=1,2,...,n

İSPAT : (x:r) nin $A=||a_{ij}||$ Alexander matrisi $a_{ij}=\alpha\gamma(\frac{\partial r_i}{\partial x_j})$, i=1,2,...,m ve j=1,2,...,n ile tanımlanır. Esas formül ise

$$r_i-1=\sum_{j=1}^{n}\alpha\gamma(\frac{\partial r_i}{\partial x_j})(x_j-1) \text{ dir.} \quad \partial r_i=1 \text{ için}$$

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha\gamma\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)(\alpha\gamma x_j - 1)$$

$\alpha\gamma x_1 = \alpha\gamma x_j$, $j=1,2,\ldots,n$ olmak üzere şunu yazabiliriz.

$$0 = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)(\alpha\gamma x_1 - 1)$$

$\alpha\gamma x_1$ elemanı $|x:r|$ nin sonsuz devirli abelleştirilen grubunun doğurayı; böylece $(\alpha\gamma x_1 - 1) \neq 0$ çünkü sonsuz devirli grupların grup halkası tamlık bölgesidir.

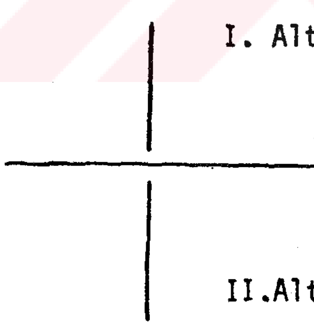
$$0 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

yani Alexander matrisinin sütün vektörlerinin toplamı sıfır vektörüdür.

IV. BÖLÜM

JAKOBİEN MATRİSLERİ VE ALEXANDER MATRİSLERİ

4.1.1. TANIM : K uzayda düzgün pozisyonda bir düğüm ve $a\varepsilon p(K)$ üzerinde bir çift nokta olsun. a' ya ait olan üst geçit noktasını taşıyan doğru parçasına a' ya ait üst geçit denir. Yine a' ya ait olan alt geçit noktasından $\varepsilon \varepsilon R^{+}$ uzaklığında bulunan iki doğru parçasına a' ya ait alt geçitler denir. O halde p(K)' ya ait her çift nokta üzerinde K' nın üç doğru parçası üst ve alt geçitler olarak adlandırılır. Buradaki alt geçitlerde I. ve II. alt geçitler olarak şu şekilde isimlendirilir. Diyagramda görüldüğü gibi düğümün yönü soldan sağa doğru ise üst geçitin üstünde kalan alt geçite I. alt geçit altında kalan alt geçite de II. alt geçit adı verilir.



Herhangi bir düğümün i. geçit noktasına takılan bu üç doğuray x_i, x_j, x_k ise düğüm grubunun i. bağıntısı

$r_i = x_i x_j \bar{x}_i \bar{x}_k$ şeklinde yazılır.

Bu bağıntının değişkenlerine göre serbest türevleri

$$\frac{\partial r_i}{\partial x_i} = 1 - x_i x_j \bar{x}_i$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial x_j} = x_i$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial x_k} = -x_i x_j \bar{x}_i \bar{x}_k \quad \text{olur.}$$

Bu ifadeleri şu şekilde özetleyelim.

$$\alpha\gamma\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_u}\right) = \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_u}\right)^{\alpha\gamma} = \begin{cases} 1-t & u \text{ indisli doğuray üst geçit ise} \\ t & u \text{ indisli doğuray I. alt geçit ise} \\ -1 & u \text{ indisli doğuray II. alt geçit ise} \end{cases}$$

dır.

4.1.2. TANIM : K düzgün pozisyonda n geçit noktasına sahip bir düğüm ve düğüm grubunun bağıntıları $r_i=1$ $(i=1,2,\ldots,n)$ olsun.

$$\frac{\partial(r_1,r_2,\ldots,r_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x_1} & \frac{\partial r_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial r_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial r_2}{\partial x_1} & \frac{\partial r_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial r_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial r_n}{\partial x_1} & \frac{\partial r_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial r_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

matrisine Jakobien matrisi denir.

$$A = (a_{ij}) = \alpha\gamma\left(\frac{\partial(r_1,r_2\ldots,r_n)}{\partial(x_1,x_2\ldots,x_n)}\right) = \left(\frac{\partial(r_1,r_2\ldots,r_n)^{\alpha\gamma}}{\partial(x_1,x_2\ldots,x_n)}\right)$$

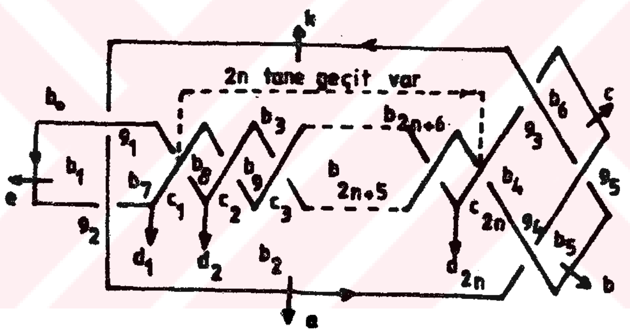
$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_1}\right)^{\alpha\gamma} & \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_2}\right)^{\alpha\gamma} & \cdots & \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_n}\right)^{\alpha\gamma} \\ \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_1}\right)^{\alpha\gamma} & \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_2}\right)^{\alpha\gamma} & \cdots & \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_n}\right)^{\alpha\gamma} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial r_n}{\partial x_1}\right)^{\alpha\gamma} & \left(\frac{\partial r_n}{\partial x_2}\right)^{\alpha\gamma} & \cdots & \left(\frac{\partial r_n}{\partial x_n}\right)^{\alpha\gamma} \end{bmatrix}$$

Matrisinede Alexander matrisi denir. Alexander polinomuda Alexander matrisinin her elemanının kofaktörlerinin mutlak değeridir.

$$\Delta(t) = |A_{ij}| \text{ olur.}$$

4.1.3. ÖRNEK : K_n-Kelebek düğümlerinin Alexander matrisi ve polinomunu bulalım.

Diyagramı aşağıdaki gibi verilen düğüm K_n olsun. n tek ve çift indisli K_n kelebek düğümleri için ayrı ayrı Alexander polinomunu bulalım.



Şekil 8

$G=\Pi_1(S^3-K_{2n},p)=\{a,b,c,d,e,f,d_1,d_2,\ldots,d_n;\ ac\bar{a}\bar{b}=1,\ ba\bar{b}\bar{d}_1=1,\ d_1d_2\bar{d}_1\bar{a}=1,$
$d_2d_1\bar{d}_2\bar{d}_3=1,\ d_3d_4\bar{d}_3\bar{d}_2=1,\ d_4d_3\bar{d}_4\bar{d}_5=1,\ d_5d_6\bar{d}_5\bar{d}_4=1,\ d_6d_5\bar{d}_6\bar{d}_7=1,\ldots,$
$d_{2n-3}d_{2n-2}\bar{d}_{2n-3}\bar{d}_{2n-4}=1,\ d_{2n-2}d_{2n-3}\bar{d}_{2n-2}\bar{d}_{2n-1}=1,\ d_{2n-1}d_{2n}\bar{d}_{2n-1}\bar{d}_{2n-2}=1$
$d_{2n}d_{2n-1}\bar{d}_{2n}\bar{e}=1,\ cf\bar{c}\bar{d}_{2n}=1,\ fe\bar{f}\bar{c}=1,\ eb\bar{e}\bar{f}=1\}$

$$\alpha\gamma\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)= \begin{bmatrix} 1-x_ix_j\bar{x}_i & -x_ix_j\bar{x}_i\bar{x}_k & x_i & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_i & 1-x_ix_j\bar{x}_i & 0 & -x_ix_j\bar{x}_i\bar{x}_k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_ix_j\bar{x}_i\bar{x}_k & 0 & 0 & 1-x_ix_j\bar{x}_i & x_k & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_i & 1-x_ix_j\bar{x}_i & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1-x_ix_j\bar{x}_i & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x_ix_j\bar{x}_i\bar{x}_k & x_i & 0 \\ 0 & 0 & -x_ix_j\bar{x}_i\bar{x}_k & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1-x_ix_j\bar{x}_i & x_i \\ 0 & x_i & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -x_ix_j\bar{x}_i\bar{x}_k & 1-x_ix_j\bar{x}_i \end{bmatrix}_{2n+5\times 2n+5}$$

$i=1,2,\ldots,n$
$j=1,2,\ldots,n$

$$\frac{\partial(r_i)}{\partial x_j}= \begin{bmatrix} 1-x_ix_j\bar{x}_i & -x_ix_j\bar{x}_i\bar{x}_k & x_i & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_i & 1-x_ix_j\bar{x}_i & 0 & -x_ix_j\bar{x}_i\bar{x}_k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_ix_j\bar{x}_i\bar{x}_k & 0 & 0 & 1-x_ix_j\bar{x}_i & x_k & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_i & 1-x_ix_j\bar{x}_i & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1-x_ix_j\bar{x}_i & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x_ix_j\bar{x}_i\bar{x}_k & x_i & 0 \\ 0 & 0 & -x_ix_j\bar{x}_i\bar{x}_k & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1-x_ix_j\bar{x}_i & x_i \\ 0 & x_i & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -x_ix_j\bar{x}_i\bar{x}_k & 1-x_ix_j\bar{x}_i \end{bmatrix}_{2n+5\times 2n+5}$$

$i=1,2,\ldots,n$
$j=1,2,\ldots,n$

$$\alpha\gamma\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)= \begin{bmatrix} (1-x_ix_j\bar{x}_i)^{\alpha\gamma} & (-x_ix_j\bar{x}_i\bar{x}_k)^{\alpha\gamma} & (x_i)^{\alpha\gamma} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (x_i)^{\alpha\gamma} & (1-x_ix_j\bar{x}_i)^{\alpha\gamma} & 0 & (-x_ix_j\bar{x}_i\bar{x}_k)^{\alpha\gamma} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-x_ix_j\bar{x}_i\bar{x}_k)^{\alpha\gamma} & 0 & 0 & (1-x_ix_j\bar{x}_i)^{\alpha\gamma} & (x_k)^{\alpha\gamma} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x_i)^{\alpha\gamma} & (1-x_ix_j\bar{x}_i)^{\alpha\gamma} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & (1-x_ix_j\bar{x}_i)^{\alpha\gamma} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (-x_ix_j\bar{x}_i\bar{x}_k)^{\alpha\gamma} & (x_i)^{\alpha\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & (-x_ix_j\bar{x}_i\bar{x}_k)^{\alpha\gamma} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (1-x_ix_j\bar{x}_i)^{\alpha\gamma} & (x_i)^{\alpha\gamma} \\ 0 & (x_i)^{\alpha\gamma} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-x_ix_j\bar{x}_i\bar{x}_k)^{\alpha\gamma} & (1-x_ix_j\bar{x}_i)^{\alpha\gamma} \end{bmatrix}_{2n+5\times 2n+5}$$

$i=1,2,\ldots,n$
$j=1,2,\ldots,n$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} a & b & c & d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_{2n-1} & d_{2n} & f & e \end{matrix} \\
A(t)= & \begin{bmatrix}
1-t & -1 & t & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
t & 1-t & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 1-t & t & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t & 1-t & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1-t & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-t & t & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & t & 1-t & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & t & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1-t & t \\
0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1-t
\end{bmatrix}_{2n+5 \times 2n+5}
\end{array}
$$

2n+5. satır ve 2n+5. sütunu çıkarırsak

$$
\Delta(t)=\begin{bmatrix}
1-t & -1 & t & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
t & 1-t & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 1-t & t & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t & 1-t & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1-t & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-t & t & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t & 1-t & 0 \\
0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & t \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1-t
\end{bmatrix}_{2n+4 \times 2n+4}
$$

elde edilir.

2n+3.satır ve 2n+3.sütuna göre açarsak.

$$M_1 = t \begin{bmatrix} 1-t & -1 & t & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ t & 1-t & 0 & -1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1-t & t & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 1-t & -1 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1-t \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 1-t & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & t & 1-t \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2n+3 \times 2n+3}$$

$$= t \begin{bmatrix} 1-t & -1 & t & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ t & 1-t & 0 & -1 & -1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1-t & 1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 1 & -1 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1-t \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 1-t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & t & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2n+3 \times 2n+3}$$

$$M_2 = (1-t)\begin{bmatrix} 1-t & -1 & t & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ t & 1-t & 0 & -1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1-t & t & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 1-t & -1 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1-t \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 1-t & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & t & 1-t \\ 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & -1 \end{bmatrix}_{2n+3 \times 2n+3}$$

$$= (1-t)\begin{bmatrix} 1-t & -1 & t & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ t & 1-t & 0 & -1 & -1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1-t & 1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 1 & -1 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1-t \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & t & 1 \\ 0 & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & -1 \end{bmatrix}_{2n+3 \times 2n+3}$$

Bu işlemlere benzer şekilde devam edilirse $\Delta(t)=M_1+M_2$ olur.

$$\pm (1-t)t^{n-1} \begin{bmatrix} t^2-t+1 & t(1-t) & nt-n \\ -1 & 0 & n-(n+1)t \\ 0 & 1-t & t \end{bmatrix} + t^n \begin{bmatrix} 1-t & -1 & 0 \\ t & 1-t & nt-n \\ -1 & 0 & n-(n+1)t \end{bmatrix}$$

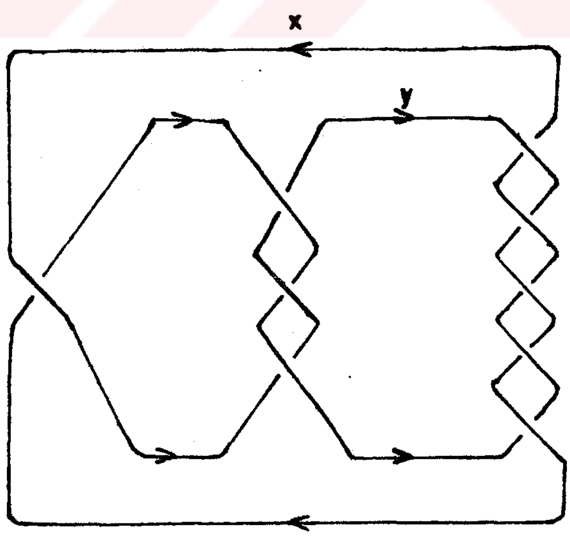
$\Delta_{2n}(t)=t^n\{(n+1)t^4-(3n+1)t^3+(4n+1)t^2-(3n+1)t+(n+1)\}$ elde edilir.

Aynı şekilde K_{2n+1} içinde

$\Delta_{2n+1}(t)=t^n\{(n+1)t^4-(3n+3)t^3+(4n+3)t^2-(3n+3)t+(n+1)\}$ olur.

4.1.4 ÖRNEK : Pretzel düğümünün Alexander matrisi ve Alexander polinomu:

Diyagramı şekil 1.9 da verilen pretzel düğümünün düğüm grubu.



Şekil 1.9

$G = \Pi_1(S^3 - K_p, p) = \{x, y : (y\bar{x})^3(\bar{y}x)^3 y(\bar{x}y)^2(x\bar{y})^3 = (\bar{x}y)^3(x\bar{y})^2 x(y\bar{x})^3(\bar{y}x)^3\}$

Jakobien matrisi $\quad [a_{11}, a_{12}] = \left[\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}\right]$.

$u = (y\bar{x})^3 (\bar{y}x)^3 y (\bar{x}y)^2 (x\bar{y})^3$

$v = (\bar{x}y)^3 (x\bar{y})^2 x(y\bar{x})^3(\bar{y}x)^3$ olmak üzere

$r = uv^{-1}$

Alexander matrisi

$$(a_{ij}) = \alpha\gamma\left[\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}\right] = \left[\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^{\alpha\gamma}, \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^{\alpha\gamma}\right] = [a_{11}, a_{12}]$$

Burada $\quad a_{11} = \alpha\gamma\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) = \alpha\gamma\left(\frac{\partial(uv^{-1})}{\partial x}\right) = \alpha\gamma\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)$

$a_{11} = t^{-1}(6t^2 - 11t + 6)$ bulunur. Benzer şekilde Alexander matrisinin diğer girişi $a_{12} = -t^{-1}(6t^2 - 11t + 6)$ dır.

O halde a_{11} veya a_{12} bize pretzel düğümünün Alexander polinomunu verir. Yani $\Delta_p(t) = 6t^2 - 11t + 6$ olur.

KAYNAKLAR

1) Bozhüyük, M.E., 1973, Basit Kapalı Uzay Eğrileri.TÜBİTAK Temel Bilimler Araştırma Grubu, TBAG_I55 nolu araştırma Projesi, Ankara.

2) Bozhüyük, M.E., 1984, Genel Topolojiye Giriş. Atatürk Üniversitesi Basım Evi, Erzurum, Yayın No. 610.

3) Burde, Gerhard-Heiner Zieschang, 1985, Walterde Gruyter Berlin Newyork.

4) Chen, K.T., Fox, R.H. and Lyndon,R.C., Jully, 1958 Analys of Mathematics vol. 68. No.1 Printed in Japan.

5) Dane, A., 1986, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi Özel Sayı.2, S.121-129.

6) Dold,A., and Eckmann, B., 1983 Bulletin (New Series) of the American mathematical society volume 12, Number 2.

7) Fox, R.H., 1963. Indroduction to Knot Theory. Blaisdell Ginn, Newyork, S. 94-123.

8) Fox, R.H., 1962, A Goick Trip Through Knot theory Topology of 3- manifolds and Related Topics, prentics- Hall, Englewood clıffs, New Jersey.

9) Fox, R.H., Free differential Calculus. I. Anals of mathematic vol. 57 No.3, S.547-560. 1952

10)Freyd, P., Yetter, D., Hoste, J., Lickorish, W.B.R., Milletp,K., And olneanu, A., 1985, A New poynnomial. Invariant of knots and lınks.

11)Kauffmann, L.H., 1988, New ınvariants in the Theory of Knots Amer math monthly, march.

12) Magnus, W., 1935, Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring. Math. Ann. 111, 259-280.

13) Reidemeister, K., 1926 Knotten and Gruppen. Hamburg Abhandlungen

14) Rolfsen, D., 1976, Knots and links, University of British Columbia.

15) Rolfsen, D., 1983 Knot Theory and Manifolds, proceedugs of a conference heldin voncuover, Canada.