15224

T.C.
CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI

KUANTUM MEKANİĞİNDE YOL İNTEGRALLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İsmail ÇELİK

SİVAS
ŞUBAT 1991

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

İşbu çalışma, jürimiz tarafından Fizik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : .Doç.Dr.İsmail.SÖKMEN.....

Üye : .Prof.Dr.Bünyamin.ÖZBAY...

Üye : .Doç.Dr.Nevzat.KAVGAR....

Üye : ....

Üye : ....

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

5.4.1991

Fen Bilimleri Enstitüsü

Prof.Dr.İbrahim GÜLÜŞSUYU

SUMMARY

In this study, it is shown that the various problems of Quantum Mechanics can be solved by the method of the path-integrals.

At the first step, the Feynman path-integral formalism is theoretically examined. In the second one, general quadratic Lagrangians are examined and propagator is derived. Under the point-canonical transformation and new-time concept the path-integral formalism is examined.

Finally, constrained path-integrals and well-known Quantum mechanical systems are examined. For instance, Coulomb problems is solved by using the point-canonic transformation.

ÖZET

Bu çalışmada, kuantum mekaniğin çeşitli problemleri yol integral yöntemi ile çözülebilirliği gösterilmiştir.

İlk olarak, Feynman yol integral formülasyonu kuramsal olarak incelendi. Sonra genel kuadratik Lagranjiyenler incelendi ve yayıcı türetildi. Yol integral yöntemi yeni zaman kavramı ve noktasal kanonik dönüşümler altında incelendi. Son olarak bağlı yol integraller ele alındı ve iyi bilinen kuantum mekaniksel sistem incelendi. Ayrıca Coulomb problemi noktasal kanonik dönüşümler kullanılarak çözülmüştür.

TEŞEKKÜR

Herşeyden önce bu çalışmam süresince yakın ilgilerini gördüğüm Prof.Dr.Bünyamin Özbay'a, Doç.Dr.Nevzat Kavcar'a teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmanın konusunun seçiminden başlayarak, sonuçlanmasına kadar çok yakından ilgi ve desteğini gördüğüm, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım danışmanım Sayın Doç.Dr.İsmail Sökmen'e tüm kalbimle sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, büyük bir özenle el yazılarını daktilo eden Sayın Fatma Baykal'a ve bilgi, deneyim ve yararlı eleştirilerini sunan tüm arkadaşlarıma teşekkür etmeyi bir görev bilirim.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Feynman'ın yol (path) integral[1] formülasyonu Schrödinger ve Heisenberg yöntemlerinin bir alternatifi olarak kuantum mekaniksel problemlerin bir çözümünü bize sağlar. Feynman metodu, Hamiltonien'e dayanan metotlardan daha fazla üstünlüğe sahip olup, kesin sezgi yolu ile anlaşılan klasik Lagrange bilgisini içeren bir yöntemdir. Lagrange temel yaklaşımı, göreli olmayan durumdan alan teorilerini kapsayan göreli durumlara kolay bir geçiş sağlar. Feynman yaklaşımında ana kapsam, sistem hakkında tüm bilgileri kapsayan propagatördür (yayıcı).

Yayıcı, tüm yolların katkılarının toplamıdır ve kuantum üst üste binme ilkesini sağladığını görürüz. Nitekim yayıcıya önemli katkılar genellikle klasik yollardan gelir. Klasik yol[2] etrafındaki açılıma dayanarak yarı klasik yaklaşıma benzer şekilde geliştirilebilir. Yol integral tekniği zor problemleri çözmek amacı ile kullanılır. Ayrıca yol integral tekniği zamana bağlı ve zamandan bağımsız sistemlerin çözümünde bize faydalı olur.

Bu yararlıklardan dolayı yol integral tekniği, literatürde önemli bir yer tutar. Yol integralinin Wiener integraline şekilsel benzerliği istatistik mekanik[3-5] uygulamalarında önemli sonuçlar vermiştir. Sonraki çalışmalarda herhangi bir ortamda hareketli parçacıkların yol integrali ile çözümü sağlanarak akla uygun doğru cevaplar elde edilmiştir. Polimer fiziğinin birkaç konusunda, polar kristalde bir elektronun hareketi, herhangi bir örgüde elektronik hal yoğunluğu, herhangi bir ortamda dalga propagatörü[6] yol integrallerinden yararlanarak bulundu. Feynman yol-integralinin son uygulamaları, gauge (ayar) alan teorilerinde[7,8], Stochastic kuantizasyon teorisinde, instanston teorisinde[9] ve kara delikler[10,11] fiziğinde kullanıldı. Yarı klasik yaklaşımların atomik saçılma[12] probleminde, moleküler reaksiyonlar[13] ve nükleer fizikte[14,15] ağır iyon çarpışmalarında kullanılması faydalı olmuştur.

Yol-Integralin mümkün olan uygulamalarından ayrı olarak Feynman yol integrallerinin[16,17] diğer bir ilginç durumu vardır. Sezgi yoluna başvurulması ve fiziksel önemin uzun bir süreden beri bilinmesine rağmen birleştirilmiş Feynman yol integrallerinin birçok analitik zorlukları vardır. Feynman integrali ve Wiener integrali arasındaki berzerlik yanlızca şekilseldir.

Mizrahi[18] Albeverio ve Hogh-Kröhn[19], Truman[20], DeWitt-Morette[21] nin son çalışmaları ile Feynman'ın birleştirilmiş yol integrallerindeki analitik zorluklar, ortadan kaldırılmış ve matematiksel temeller üzerine oturtulmuştur.

Feynman yol-integral tekniği kuantum kuramında önemli bir yer tutmaktadır. Değişik dönüşümler yardımı ile çok sayıda problem çözülmüştür. Feynman'in yol integral metodu kuantum kuramında tüm çekiciliğine rağmen, karşılaşılan integrasyonların herzaman Gaussian olmaması nedeni ile bu yöntemle sınırlı sayıda problem çözülebilmiştir. Duru ve Kleinert[22], kanonik dönüşümler yardımı ile Coulomb problemini Gaussian biçime indirgeyerek çözmüşler ve değişik görüşler getirmişlerdir.

Bu çalışmada, Feynman yol-integral tekniği yardımı ile kuantum mekaniksel sistemlerden serbest parçacık, Harmonik Osilatör ve lineer potansiyel problemlerini çözeceğiz. Ayrıca daha karmaşık kuantum mekaniksel sistemleri PCT (Point Canonical Transformation) ve yeni-zaman kavramları ışığı altında çözmeye çalışacağız. Bu şekilde, kuantum mekaniğinde path-integral yöntemi ile çeşitli problemlerin çözülebilirliğini göstermiş olacağız.

I. FEYNMAN YOL İNTEGRALLERİ

I.1- Feynman Propagatörün Tanımı ve Özellikleri

Göreli olmayan kuvantum mekaniğin Feyman'in Lagrange formülasyonunda temel nicelik K yayıcısıdır. Yayıcı, parçacığın t' zamanında x' konumunda olduğu t" zamanında x" konumunda bulunması için $K(x'',t'';x',t')$ ile tanımlanan kuvantum mekaniksel geçiş genliğini gösterir. Burada temel nokta Feynman(4) tarafından postüle edilen

$$K(x'',t'';x',t') = \int \exp\left\{(i/\hbar)\ S[x(t)]\right\} D[x(t)] \qquad \text{I.1}$$

olarak ifade edilen propagatördür. Burada $S[x(t)]$ klasik eylem fonksiyonu

$$S[x(t)] = \int_{t'}^{t''} L(x,\dot{x},t)\, dt \qquad \text{I.2}$$

dir. L, parçacığın lagranjiyeni $D[x(t)]$ sembolü, $x(t')=x'$ den $x(t'')=x''$ ne kadar tüm yollar üzerinden integrasyon olduğunu ifade eder. Ayrıca kuvantum üstüste gelme ilkesi, I.1 ile verilen yayıcıyı içine alır, çünkü tüm yollardan gelen katkıların toplamı olarak ifade edilir. Yol integralin I.1, kullanılması aşağıda anlatıldığı gibidir;

N alt aralık içinde $[t',t'']$ zaman aralığında P_N tane parçayı gözönüne alalım. Kolaylık yönünden alt aralıkların eş uzunlukta olmasını farzederek P_N'i karakterize edebiliriz.

$$P_N:\ t_0=t',t_1,t_2,\dots,t_{N-1},t_N=t'' \tag{I.3}$$

$$t_j-t_{j-1}=\epsilon\ ,\quad N\epsilon=t''-t',\quad j=1,2,\dots,N$$

olmak üzere x(t) yolunu ayrı ayrı kısımlardan oluşmuş şekilde, $x_j=x(t_j)$, $x'=x(t_0)$, $x_N=x(t_N)=x''$ olarak karakterize edebiliriz. $S\left[x(t)\right]$ eylem fonksiyonu[5],

$$S_N\left[x_j\right]=\epsilon\sum_{j=1}^{N} L\left[\frac{x_j+x_{j-1}}{2}\ ,\ \frac{x_j-x_{j-1}}{\epsilon}\ ,\ j\epsilon\right] \tag{I.4}$$

olarak ayrı formda ifade edilir. O halde Feynman ölçüsü,

$$D\left[x(t)\right]\rightarrow A_N\prod_{j=1}^{N-1} dx_j \tag{I.5}$$

haline gelir. M kütleli sabit bir parçacık için,

$A_N=\left[\dfrac{m}{2\pi i\hbar t}\right]^{3N/2}$ dir, diğer durumlar için uygun

bir biçimde ifade edilir. x(t) yollarının ayrı ayrı oluşturulması, çoklu Rieman integrali olarak uygun şekilde propagatörü yazmaya bize izin verir.

$$K_N(x'',t'';x',t')=A_N\int\dots\int\exp\left\{(i/\hbar)\ S_N\left[x_j\right]\right\}\prod_{j=1}^{N-1} dx_j \tag{I.6}$$

Sonuçta çoklu Rieman integrali $\epsilon\rightarrow 0$, $N\rightarrow\infty$

durumunda limit alınarak tam yayıcı $K(x'',t'';x',t')$ elde edilir.

$$K(x'',t'';x',t') = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \epsilon \to 0 \\ N\epsilon = (t''-t')}} K_N(x'',t'';x',t') \qquad (I.7)$$

Feynman ölçüsünde A_N seçimi $N \to \infty$ durumunda serbest parçacık normalizasyonu, (I.6) ile verilen yol integralin limiti alınarak elde edilir, yani

$$\int K_t(x'',t'';x',t') = 1 \qquad (I.8)$$

Yol integral ifadesinin bu belirli yöntemi çoklu Rieman integralinin limiti olarak ilk önce Feynman[1] tarafından önerildi ve sonradan Cameron[23] tarafından şematik olarak çok köşeli yollar verilir. Bu gösterimin doğruluğu Truman[20] tarafından kanıtlanmıştır. Bu açıklamalarla yayıcının belli birkaç özelliğini ifade etmiş olduk. Yol integral tanımını hesaba katmadan geçiş genliği, t' zamanındaki $\psi(x',t')$ dalga fonksiyonunu t'' zamanındaki $\psi(x'',t'')$ dalga fonksiyonuna bağlanır.

$$\psi(x'',t'') = \int K(x'',t'';x',t')\psi(x',t')dx', \quad (t'' > t') \qquad (I.9a)$$

Bu ifade $K(x'',t'';x',t') = \delta(x''-x')$ (I.9b) olduğunu gösterir.

Ayrıca, $(t''-t')=\epsilon$ sonsuzküçük zaman aralığı için (I.6) yayıcısını kullanarak, Schrödinger denklemine[16] uyan ψ fonksiyonunu gösterebiliriz.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi \tag{I.10}$$

Burada H Hamiltonien operatörüdür.

Ayrıca (I.8) ve (I.10) denklemleri arasındaki bu eşitlik (I.5) de A_N'nın seçimi ve doğru normalizasyona götürür. Denklem (I.4) ile verilen Mid-Point kuralı da, genelde gerekli olan bu eşitlik için eylemin ayrı ayrı kısımlardan meydana geldiğini kabul eder. Bununla birlikte, Lagranjiyen hızların çarpımlarını ifade etmediği özel durumda ve koordinata bağlı fonksiyonlar mid-point kuralı ile uygun hale getirilir. Eşitliği tam olarak kurmak için ilgili yayıcıyı gözönüne alalım.

$$\tilde{K}(x'',t'';x',t') = K(x'',t'';x',t')\Theta(t''-t') \tag{I.11}$$

Burada $\Theta(t)$, $t \geqslant 0$ için bir ve diğer durumda sıfır olan bir adım fonksiyonudur. Bu tanım sadece, relativistik olmayan kuantum mekaniğinde yollarda tersine zamanın olmadığı gerçeğini ifade eder. K yayıcısı

$$\left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t''} - H''\right]\tilde{K}(x'',t'';x',t') = \delta(x''-x')\,\delta(t''-t') \tag{I.12}$$

denklemini sağlar.

Burada H" yanlızca x" ve t" değişkenlerini içine alan operatörleri içerir. Bunun için yayıcı gerçekte (I.10) Schrödinger denkleminin Green fonksiyonudur. Tersi olarak bir sistem Schrödinger tipi bir denkleme sahipse (veya genel difüzyon denklemine) bir yol integrali gibi onun Green fonksiyonu[24] olarak ifade edilebilir. Bu yaklaşım diğer alanlarda yol integralin uygulanması açısından faydalıdır.

K'nın başka bir özelliği (I.6) yol integralinin tanımlanmasında kullanılmasıdır ve tam olarak yerleşik lagranjiyen'ler için geçerlidir.

$$K(x'',t'';x',t')=\int K(x'',t'';x,t)\; K(x,t;x',t')\; dx \qquad (I.13)$$

olarak ifade edilir. Burada komplex kuantum mekaniğinde K ile genliğin temsil edilmesinden başka Chapman-Kolmogorov denkleminde Markov yönteminin olasılık şartlarına uyumu ile bu özellik şekilsel olarak benzerdir. Fakat (I.6) yol integral denklemi anlamlıbir kavram ve bu eylemlerin kuantum mekanik tartışmalarda kullanılabilir olması önemlidir.

Nihayet klasik Lagranjiyen açık olarak zamana bağlı değilse, yayıcı Hamiltonien operatörünün $\varphi_n(x)$ enerji özfonksiyonların tam kümesi olarak,

$$K(x'',t'';x',t')=\sum_n \exp\left[(-i/\hbar)\,E_n(t''-t')\right]\varphi_n^{*}(x')\varphi_n(x) \quad (I.14)$$

şeklinde açılabilir. Bu açılım Feynman-Kac açılım teoremi olarak bilinir. Burada n üzerinde toplam, ayrı özdeğerler üzerinden toplam ve özdeğerler üzerindeki integrasyon olmak üzere her ikisini belirtir. Diğer bir deyişle klasik Lagranjiyen daha kullanışlı olmayan (I.14) formun genel açılımı, açık olarak zamana bağlıdır. Lagranjiyan zamana bağlı olduğu özel durumda değişmezdir. (I.14) açılımına benzer açılım teoremi Khandekar ve Lawande[25] tarafından verildi. Bununla beraber açılım, kuantum değişmez (invariant) operatörün özfonksiyonlar kümesidir.

I.2- Yolların Toplanması Hakkında Açıklamalar

Yayıcıyı bulmanın temel amacı $N \rightarrow \infty$ gittiğinde limit alınarak, denklem (I.6) ile verilen çoklu Rieman integralinin değerlendirilmesidir[4]. Bu yalnızca birkaç durumda mümkündür ve kesin olarak şu durumlarda geçerliliğini korur.

1- İntegrallerin gaussian olması

2- Recursive formülünün ardıl integrasyonları çözümünün var olmasıdır. İyi bilinen sabit W frekanslı harmonik osilatör ve serbest parçacık durumları birinci kategori altında toplanır. Burada iki örnek için standart yayıcıları aktaralım.

m kütleli serbest parçacık:

$$K_f(x'',t'';x',t')=\left[\frac{m}{2\pi i\hbar T}\right]^{3/2} \exp\left[\frac{im}{2hT}(x''-x')^2\right] \quad (I.15)$$

m kütleli ve W frekanslı Harmonik osilatör:

$$K_{H.O}(x'',t'';x',t')=\left[\frac{mw}{2\pi ihSinwT}\right]^{3/2} \exp\left[\frac{imw}{2hSinwT}\left[(x''^2+x'^2)CoswT-2x''x'\right]\right] \quad (I.16)$$

Burada T= t"-t' dür. Genel kuadratik forma sahip potansiyeller olduğunda integral gaussian yol integralleri olur. Kuadratik terim katsayıları ve m kütlesi dahi zamanla değişebilir. Bunun çözümü

$$\delta S = 0 \quad (I.17)$$

Hamilton ilkesinden bulanan $X_c(t)$ klasik yola bağlı oluşudur ve yayıcı,

$$K(x'',t'';x',t')=\left[\frac{1}{2\pi i\hbar}\right]^{3/2} Det\left|\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial x''\partial x'}\right| \exp\left[\frac{i}{\hbar} S_{cl}\right] \quad (I.18)$$

olarak verilir. Burada $S_{cl}=S\left[x_c(t)\right]$. Bu bağıntı Van Vleck-Pauli(27,28) formülü olarak bilinir. Bu formülün daha iyi anlaşılabilmesi için $S[x(t)]$ eyleminin $x_c(t)$ klasik yol civarında seriye açılması gerekir. .

$$S[x(t)] = S\left[x_c(t)+\eta(t)\right] = S[x_c]+\eta\delta^2 S[x_c] \qquad (I.19)$$

Burada kuadratik eylemler için $\delta^2 S$ in sıfıra özdeş olduğuna dikkat ederiz.

Yol integralleri, kartezyen koordinatlardan dönüşümler yardımı ile polar koordinatlara dönüştürülebilir. Dönüşümde çok köşeli yol şeklinde sonsuzküçük zaman aralıklarının kullanılması gerekir, bu kesin simetrili potansiyeller için uygulanabilir. Radyal yayıcının yerini tutan yol integralleri, recursive formülüne uygunsa kullanılabilir. Örnek olarak, serbest parçacık, harmonik osilatör ve kare potansiyeli verebiliriz.

I.3- Yol-İntegral Formalizminin Kuantum Mekaniğinden Türetilmesi

Düz bir yörüngede bir parçacığın hareket[29-31] ettiğini düşünelim. Koordinatı x, momentum operatörü $-i\, d/dx$ ve özdurumu $|k\rangle$ olmak üzere, parçacığa ait x- temsili ifadesi için,

$$\langle x|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}}\, e^{ikx} \qquad (I.20)$$

yazabiliriz, burada L peryodik sınır koşuludur. Parçacığı L boyutlu bir kutuya hapsettiğimizi düşünüyoruz ve $L \to \infty$ kabul ediyoruz.

Koordinat uzayında, momentum operatörünün herhangi bir f fonksiyonunun matris elemanı

$$\langle x' | f(-i \frac{d}{dx}) | x \rangle = \langle x' | k' \rangle \langle k' | f(-i \frac{d}{dx}) | k \rangle \langle k | x \rangle$$

$$= \sum_k \frac{1}{L} f(k) e^{ik(x'-x)} \qquad (I.21)$$

biçiminde yazılabilir. $L \to \infty$ iken integral aralığı $(-\infty, \infty)$'a genişletilirse son ifade,

$$\int \frac{dk}{2\pi} f(k) e^{ik(x'-x)} \qquad (I.22)$$

biçimini alır. Bu temel formüle bir uygulama olmak üzere, birim kütleli relativistik[32] olmayan parçacığı düşünelim. Bu parçacığın kinetik enerji operatörü,

$$K = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \qquad (I.23)$$

ile verilir. $e^{-i(t'-t)K}$ nın matris elemanının koordinat uzayında yazımı,

$$\langle x'|\,e^{-i(t'-t)K}|x\rangle = \int \frac{dk}{2\pi}\left\{\exp\left[-i\,\frac{1}{2}\,k^2(t'-t)+ik(x'-x)\right]\right\}$$

$$=\int \frac{dz}{2\pi}\,\exp\left\{-i\,\frac{1}{2}z^2(t'-t)+i\frac{1}{2}(x'-x)^2/(t'-t)\right\}$$

(I.24)

biçimindedir, burada $z= k-(x'-x)/(t'-t)$ alınmıştır.

Böylece,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-i\,\frac{1}{2}\,z^2\right\} dz = \sqrt{\frac{2\pi}{i\tau}} = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\begin{cases}\tau>0 \text{ ise } 1-i\\ \tau<0 \text{ ise } 1+i\end{cases}$$

(I.25)

bağıntısı yardımıyla,

$$\langle x'|\,e^{-i(t'-t)K}|x\rangle = \left[\frac{1}{2\pi i\tau}\right]^{1/2} \exp\left\{i\,\frac{1}{2}(x'-x)^2/\tau\right\} \quad (I.26)$$

yazılır. Burada $\tau = t'-t$ biçimindedir. (I.26) bağıntısı standart Gauss dağılımından üstel ifadede yer alan bir i faktörü kadar farklı olduğundan, pseuda-gaussian olarak adlandırılır. Dağılımın genişliği

$$|x'-x|_{ort} = O(\sqrt{\tau}) \qquad (I.27)$$

ile verilir. $\tau \to 0$ olduğunda Denklem (I.26) $\delta(x'-x)$ olur.

V(x) potansiyeli altında hareket eden bir parçacık için Hamilton operatörü,

$$H = K + V(x) = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \qquad (I.27)$$

olarak yazılır. Zamana bağlı Schrödinger denklemi,

$$H|t\rangle = i\frac{\partial}{\partial t}|t\rangle \qquad (I.28)$$

ile verilir, bunun x- temsili,

$$\langle x'|e^{-i(t'-t)H}|x\rangle \qquad (I.29)$$

t den t' ye durum vektörü ile ilgisi,

$$\langle x'|t'\rangle = \int dk \langle x'|e^{-i(t'-t)H}|x\rangle\langle x|t'\rangle \qquad (I.30)$$

şeklinde olur. H nın özvektörleri cinsinden,

$$H|a\rangle = Ea|a\rangle \qquad (I.31)$$

ve

$$\langle a'|a\rangle = \delta_{a'a} \qquad (I.32)$$

diklik koşulu kullanılarak Green fonksiyonu,

$$\langle x'|e^{-i(t'-t)H}|x\rangle = \sum_a \psi_a(x')\psi_a^*(x)\, e^{-i(t'-t)Ea} \qquad (I.33)$$

biçiminde yazılır, burada $\psi_a(x) = \langle x|a\rangle$ olarak alınmıştır.

Şimdi Feynman'ın izlediği geleneksel yolu izleyerek t'-t zaman aralığını birbirinin genişliği ϵ olan η aralığa böldüğümüzü düşünelim. Buna göre,

$$t'-t = \eta\epsilon \tag{I.34}$$

$\epsilon \to 0$ iken $\eta \to \infty$ olduğu açıktır.

Teorem: Herhangi bir durum vektörü $|\,\rangle$ olmak üzere,

$$\langle x'|e^{-i(t'-t)H}|\,\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\int \prod_{n=1}^{\eta} dx_n\left(\frac{1}{2\pi i\epsilon}\right)^{1/2} e^{i\epsilon L_n}\langle x,|\,\rangle \tag{I.35}$$

bağıntısı geçerlidir. Burada,

$$L_n = \frac{1}{2}\dot{x}_n^2 - V(\bar{x}_n), \quad \dot{x}_n = \frac{x_{n+1}-x_n}{}$$

$$\bar{x}_n = \frac{x_{n+1}+x_n}{2}, \qquad x_{\eta+1} = x' \tag{I.36}$$

ile verilmişlerdir.

İspat: $e^{-i(t'-t)} = e^{-i\epsilon\eta H}$ olduğundan,

$$\langle x'|e^{-i(t'-t)H}|x\rangle = \int\langle x'|e^{-i\epsilon H}|x\rangle dx_n$$

$$\cdot\, x_\eta\, e^{-i\epsilon H}\,|\,x_{\eta-1}\rangle\, dx_{\eta-1} \cdots$$

$$\cdots\langle x_3|\, e^{-i\epsilon H}|x_2\rangle\, dx_2$$

$$\langle x_2|\, e^{-i\epsilon H}|\,x\rangle \qquad (I.37)$$

şeklinde yazılabilir. $\epsilon \to 0$ iken,

$$e^{-i\epsilon H} = 1 - i\epsilon H + O(\epsilon^2) = 1 - i\epsilon K - i\epsilon V + O(\epsilon^2)$$

$$= e^{-i\epsilon K}\, e^{-i\epsilon V} + O(\epsilon^2) \qquad (I.38)$$

olur. Burada ϵ a göre ikinci mertebeden terimler ihmal edilmiştir. Matris gösterimde,

$$\langle x_{n+1}|\, e^{i\epsilon H}|x_n\rangle = \int dy\, \langle x_{n+1}|\, e^{-i\epsilon K}|\,y\rangle\langle\, y|\, e^{-i\epsilon V}|\,x_n\rangle$$

$$(I.39)$$

bağıntısı, Denklem (I.26) ile,

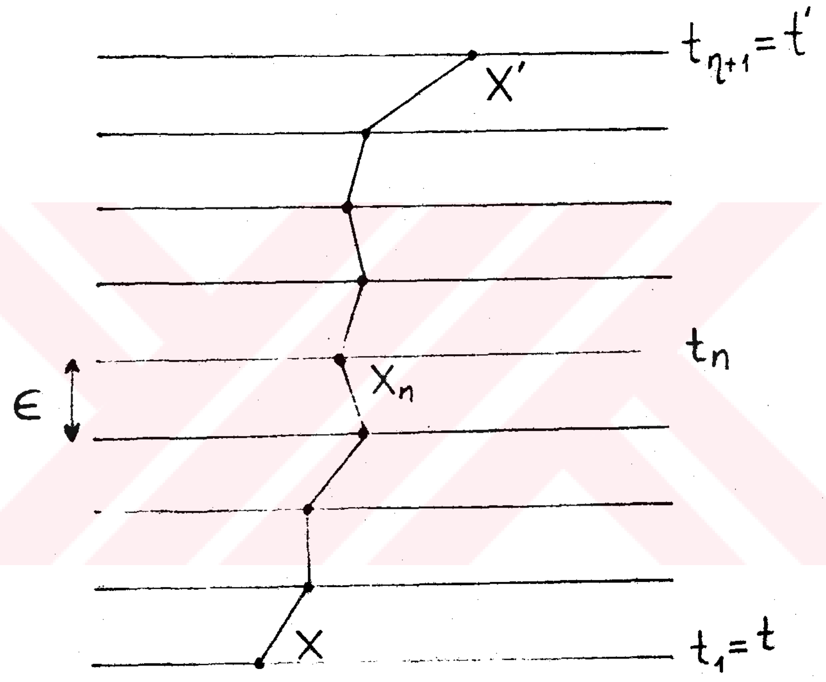
$$\langle y|\, e^{-i\epsilon V}\,|\,x_n\rangle = e^{-i\, V(x_n)}\, \delta(y - x_n) \qquad (I.40)$$

kullanılarak,

$$\langle x_{n+1}|\, e^{-i\epsilon H}|x_n\rangle = \left(\frac{1}{2\pi i\epsilon}\right)^{1/2} \exp\, i\left\{\frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n)^2 - \epsilon V(x_n)\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i \epsilon}\right)^{1/2} \; e^{i\epsilon L_n} + 0\,(\epsilon^{3/2}) \qquad \text{(I.41)}$$

elde edilir. Bu bağıntılar denklem (I.37) de yerine konulursa $x=x_1$ alınarak, denklem (I.35) in ispatı tamamlanmış olur.



Şekil 1: τ, t den t' ye değişirken ardışık $x=x_1, x_2, \ldots, x_{\eta+1}=x'$ bir $x(\tau)$ yol (path) tanımlar.

Şekil.1 de gösterildiği gibi t' ile t arası, ϵ genişliğinde η parçaya bölünmüştür $t'-t=\eta\epsilon$
Bunları aşağıdaki biçimde etiketleyebiliriz.

$$t_n = t+(n-1)\epsilon \qquad \text{(I.42)}$$

x_n ile, x in t_n deki değerleri, τ, t den t' ye değişirken bir $x(\tau)$ patikası (path) tanımlar. Böylece (I.35) bağıntısındaki integrant patikaya karşılık gelen dalga yayıcısı olarak tanımlanabilir. Lagranjiyen

$$L(x,\dot{x})= 1/2\ \dot{x}^2-V(x) \tag{I.43}$$

ile verilir. Eğer x'i $\bar{x}_n= \dfrac{x_{n+1}+x_n}{2}$ ile ve $\dot{x}$ yı

$\dot{x}_n= \dfrac{x_{n+1}-x_n}{\epsilon}$ ile değiştirirsek,

$$L_n= L(\bar{x}_n,\dot{x}_n) \tag{I.44}$$

biçiminde yazılabilir. $\epsilon \rightarrow 0$ olduğunda $\sum \epsilon L_n$ toplamı $x(\tau)$ patikası boyunca bir eylem integraline dönüşür.

$$\sum_{n=1}^{n} \epsilon L_n \longrightarrow \int_t^{t'} L(x(\tau),\dot{x}(\tau))\, d\tau = \int_t^{t'} L(\tau)\, d\tau \tag{I.45}$$

yol-integral literatüründe Denklem (I.35) bağıntısını daha sembolik bir biçimde,

$$\langle x'|\, e^{-itH}|x\rangle= \int [dx]\ e^{i\int_t^{t'} Ldt} \tag{I.46}$$

olarak yazılır. Herhangi t anında $|t\rangle$ ve t' anında $|t'\rangle$ hali için

$$\langle t'|e^{-i(t'-t)H}|\rangle = \int [dx] \langle t'|x'\rangle \, e^{i\int_t^{t'} Ld\tau} \langle x'|\rangle \quad (I.47)$$

yazabiliriz. Burada,

$$[dx] = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\frac{1}{2\pi i \epsilon}\right)^{(1/2)} \prod_{n=1}^{\eta+1} dx_n \qquad (I.48)$$

olarak verilmiştir. Denklem (I.46) orjinal biçimi olan Denklem (I.35) den farklı değildir.

Hamiltonyen H(x,p) den, x, $\dot{x}$ ve p nın fonksiyonu olan $\bar{L}$ yi tanımlamak yararlıdır.

$$\bar{L}(x,x,p) \equiv p\dot{x} - H(x,p) \qquad (I.49)$$

Burada şuna dikkat etmek gerekir; $\bar{L}$ x, $\dot{x}$ ve p gibi üç değişkene bağlıdır, yanlızca x, $\dot{x}$ gibi iki değişkene bağlı olan Lagranjiyen fonksiyonu değildir. Eğer $\bar{L}$ deki p yi x ve $\dot{x}$ ya bağlı olarak yazabilirsek $\bar{L}$ o zaman $L(x,\dot{x})$ ile ilişkili olur.

$$\bar{L}\,(x,x,p(x,x) = L(x,\dot{x}) \qquad (I.50)$$

denklem (I.35) için alternatif bir bağıntı,

$$\langle x'|e^{-i(t'-t)H}|\rangle = \lim_{\epsilon \to 0} \int \prod_{n=1}^{\eta} \frac{dx_n dk_n}{2\pi} \, e^{i\epsilon L_m} \langle x_{,}|\rangle \qquad (1.51)$$

ifadesi ile verilebilir. Burada,

$$\bar{L}_n = \bar{L}\,(\bar{x}_n, \dot{x}_n, k_n) \qquad (I.52)$$

$\dot{x}$ ve x daha önce tanımladığımız gibidir. Şimdi alternatif bağıntıyı ispatlamaya çalışalım.
Denklem (I.24) den,

$$\langle x_{n+1} | e^{-i\epsilon K} | x_n \rangle = \int \frac{dk_n}{2\pi}\, e^{-i1/2k_n^2\epsilon + ik_n(x_{n+1}-x_n)} \qquad (I.53)$$

yazabiliriz. Bu ifade Denklem (I.39 ile birleştirilirse,

$$\langle x_{n+1} | e^{-i\epsilon H} | x_n \rangle = \int \frac{dk_n}{2\pi}\, e^{-i1/2k_n^2\epsilon + ik_n(x_{n+1}-x_n) - i\, V(x_n)} \qquad (I.54)$$

elde edilir. Bu problemde $H(x,p)=1/2p^2+V(x)$ olmak üzere, üstel formda $-i$ kez,

$$k_n\left(\frac{x_{n+1}-x_n}{\epsilon}\right) - H(x_n,k_n) = \bar{L}(x_n,\dot{x}_n,k_n) \qquad (I.55)$$

vardır. Burada $\bar{L}$ denklem (I.49) da tanımlandığı gibidir. $\bar{L}(x_n,\dot{x}_n,k_n)$ deki x_n yerine $\bar{x}=1/2(x_{n+1}+x_n)$ alınırsa sonra da $x=x_1$ ve $x'=x_{\eta+1}$ alınır ve Denklem (I.54) de yerine konulursa alternatif bağıntı ispatlanmış olur. $\bar{L}(x_n,\dot{x}_n,k_n)$ deki x_n yerine $\bar{x}_n$ çizgi almak $\epsilon \to 0$ iken Denklem (I.27) nedeniyle geçerlidir.

Burada şuna dikkat çekmeliyiz. Denklem (I.52) $n=\eta$ için $\bar{L}$, $x_{\eta+1}=x'$ içerir, fakat $k_{\eta+1}$ i içermez. Şimdi koordinat uzayını düşünelim, τ ,t den t' ye değişirken ardışık (x_1,k_1), (x_2,k_2) ... (x_η,k_η) uzayda (buna faz uzayı denir) bir patika tanımlar. $\epsilon \to 0$ iken $\sum \epsilon L_n$, faz uzayında eylem integrali olarak yazılabilir.

$$\sum_{n=1}^{\eta} \epsilon\, \bar{L}_n \longrightarrow \int_t^{t'} \bar{L}(x(\tau),\dot{x}(\tau),k(\tau))d\tau \equiv \int_t^{t'} L(\tau)\, d\tau \tag{I.56}$$

Denklem (I.51) kapalı biçimde,

$$e^{-i(t'-t)H} = \int [dx\ dk]\ e^{i\int_t^{t'} \bar{L}dt} \tag{I.57}$$

olarak yazabiliriz. Burada

$$[dx\ dk] = \lim_{\epsilon \to 0} \prod_n \frac{dx_n\ dk_n}{2\pi} \tag{I.58}$$

ile verilmiştir.

II. ÖRNEK PROBLEMLER

Kuantum mekaniğinin temel problemlerinden serbest parçacık, Harmonik Osilatör ve lineer potansiyel problemlerini yol-integral tekniğini kullanarak tek boyutta çözeceğiz.

II.1- Yol İntegral Yöntemiyle

Serbest Parçacık Genliğinin Bulunması

Buraya kadar anlatılanların ışığı altında, yol-integral yöntemini kullanarak, serbest parçacığın genliğini hesaplayabiliriz.

Lagranjiyen, $L= T+V$ olmak üzere serbest parçacık $V= 0$ için L,

$$L= 1/2\, m\dot{\vec{x}}^2 \qquad \text{(II.1)}$$

olarak verilir. Euler-Lagrange denkleminden yararlanarak,

$$mx= at+ b \qquad \text{(II.2)}$$

biçiminde bir çözüm elde edilir. $x_i= x(t_i)$, $x_f= x(t_f)$ başlangıç değerlerini gözönünde tutarak,

$$\dot{\vec{x}}_{cl}= \frac{\vec{x}_f-\vec{x}_i}{T} \qquad \text{(II.3)}$$

elde edilir. Denklem (II.3), (II.1) ile verilen ifadede yerine konularak, Klasik eylem S_{cl},

$$S_{cl}= \int_{t_i}^{t_f} L(\dot{x},x,t)dt \qquad (II.4)$$

biçimindeki bağıntı yardımı ile,

$$S_{cl}= \frac{1}{2T} m(x_f-x_i)^2 \qquad (II.5)$$

elde edilebilir. Klasik eylemi belirlenmiş bir sistemin yayıcısını belirlemek için,

$$K(x_i,x_f;t)= \left[\frac{1}{2\pi i\hbar}\left|\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial x_f \partial x_i}\right|\right]^{1/2} \exp\left[\frac{i\, S_{cl}}{\hbar}\right] \qquad (II.6)$$

biçiminde verilen Van Vleck-Pauli formülü kullanılır. Bu formüle göre,

$$\left|\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial x_f \partial x_i}\right| \mp \frac{M}{T}$$, elde edilir.

Elde edilen ifadeler yerine konularak yayıcı,

$$K(x_i,x_f;t)= \left(\frac{M}{2\pi i\hbar T}\right)^{1/2} e^{\frac{i}{\hbar}\frac{M}{2T}(x_f-x_i)^2} \qquad (II.7)$$

biçiminde bulunur.

II.2 Yol-İntegral Yöntemiyle Harmonik Osilatör Genliğinin (Yayıcı) Belirlenmesi

Daha önceki (II.1) kesiminde olduğu gibi, aynı yolu izleyerek yol-integral tekniği ile harmonik osilatör yayıcısını hesaplayabiliriz.

Harmonik osilatör, Lagrangiyen'i

$$L = \frac{1}{2} m\dot{\vec{x}}^2 + \frac{1}{2} m w^2 \vec{x}^2 \qquad \text{(II.8)}$$

biçiminde verilir. Euler-Lagrange denkleminden yararlanarak klasik çözümler, $\vec{x}_i \equiv \vec{x}(t_i)$; $\vec{x}_f \equiv \vec{x}(t_f)$ başlangıç değerler gözönünde tutularak

$$\vec{x}(t_f) = A\mathrm{Sin}wt_f + B\mathrm{Cos}wt_f$$

$$\vec{x}(t_i) = A\mathrm{Sin}wt_i + B\mathrm{Cos}wt_i \qquad \text{(II.9)}$$

olarak elde edilir. Elde edilen iki denklem kullanılarak, A ve B değerleri elde edilir. Bulunan değerler,

$$\vec{x}_{cl}(t) = A\mathrm{Sin}wt + B\mathrm{Cos}wt \qquad \text{(II.10)}$$

denkleminde yerine konularak $\vec{x}_{cl}(t)$ klasik çözümü,

$$\vec{x}_{cl}(t) = \frac{1}{\mathrm{Sin}wT}\left[x_i \mathrm{Sin}w(t_f - t) + x_f \mathrm{Sin}w(t - t_i) \right] \qquad \text{(II.11)}$$

şeklinde elde edilir.

Denklem (II.11) ile verilen ifade L, Lagranjiyen de yerine konularak, klasik eylem S_{cl},

$$S_{cl}=\int_{t_i}^{t_f} L(x,\dot{x};t)\,dt \qquad (II.12)$$

şeklindeki bağıntı yardımı ile

$$S_{cl}=\frac{MW}{2SinWT}\left[(x_f^2+x_i^2)\ Cos\ WT-2x_i x_f\right] \qquad (II.13)$$

elde edilebilir. Klasik eylemi belirlenmiş bir sistemin yayıcısını belirlemek için Denk. (II.6) yardımı ile,

$$\left|\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial x_f\,\partial x_i}\right| \equiv \left|-\frac{MW}{Sin\ WT}\right| = \frac{MW}{Sin\ WT} \qquad (II.14)$$

elde edilir. Tüm değerler Denk.(II.6)da yerlerine konularak yayıcı,

$$K(x_i,x_f;t) = \left(\frac{MW}{2\pi i\hbar SinWT}\right)^{1/2} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\ \frac{MW}{2SinWT}\left[(x_f^2+x_i^2)\,CosWT-2x_i x_f\right]\right\} \qquad (II.15)$$

biçiminde elde edilebilir.

II.3- Yol-İntegral Yöntemiyle Lineer Potansiyel Altında Bir Parçacık Yayıcısının Belirlenmesi

Bu kesimde yine yol-integral yöntemini kullanarak, lineer potansiyel altında bir parçacığın yayıcısını hesaplayacağız. Yayıcının belirlenmesinde önceki kesimde izlenen yolu izleyeceğiz. Buna göre sistemin Lagranjiyeni,

$$L = \frac{1}{2} m\dot{\vec{x}}^2 + f\vec{x} \qquad \text{(II.16)}$$

biçiminde verilir. Aynı şekilde Euler-Lagrange denkleminden yararlanarak klasik çözüm,

$$\vec{x}_{cl}(t) = \frac{f}{2m} t^2 + a.t + b \qquad \text{(II.17)}$$

elde edilir. $x_i = x(t_i)$ ve $x_f = x(t_f)$ başlangıç değerleri gözönüne alınarak,

$$x_i = \frac{f}{2m} t_i^2 + at_i + b$$

$$x_f = \frac{f}{2m} t_f^2 + at_f + b \qquad \text{(II.18)}$$

şeklinde ifadeler elde edilir. Bu denklemlerden a ve b değerleri buhunarak Denklem (II.17) de yerine konularak,

$$\vec{x}_{cl}(t)=\frac{1}{T}\,x_i(t_f-t)+x_f(t-t_i)\;+\frac{f}{8m}\,(2t-t_f-t_i)^2-T^2 \qquad \text{(II.19)}$$

klasik çözüm elde edilir. Bu idafe L, Lagranjiyende yerine konularak klasik eylem S_{cl},

$$S_{cl}=\int_{t_i}^{t_f} L(x,x;t)\;dt \qquad \text{(II.20)}$$

bağıntısı yardımı ile klasik eylem S_{cl},

$$S_{cl}=\frac{1}{2T}\,M(x_f-x_i)^2+\frac{1}{2}\,f(x_f-x_i)T-\frac{1}{24m}\,f^2T^3 \qquad \text{(II.21)}$$

elde edilebilir. Klasik eylemi belirlenmiş bir sistemin yayıcısını belirlemek için, Denk. (II.6) yardımı ile

$$\left|\frac{\partial^2 S_{cl}}{\partial x_f\,\partial x_i}\right|=\left|-\frac{M}{T}\right|=\frac{M}{T} \qquad \text{(II.22)}$$

elde edilir. Denk. (II.6) ile verilen formülde değerler yerine konularak yayıcı,

$$K(x_i,x_f;t)=\left(\frac{M}{2\pi i hT}\right)^{1/2}\exp\left[\frac{i}{h}\left(\frac{1}{2T}\,M(x_f-x_i)^2+\frac{1}{2}\,f(x_f+x_i)T-\frac{1}{24m}\,f^2T^3\right)\right] \qquad \text{(II.23)}$$

biçiminde elde edilir.

III. GENEL KUADRATİK LAGRANJİYENLER

III.1- Çok Köşeli Yollar Yaklaşımı İle Yayıcının Türetilmesi

Bu kısımda, bir boyutta kuadratik eylem için çok köşeli yollar[4] yaklaşımını uygulayacağız. Kuadratik eylem Lagranjiyeni,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left\{a(t)\dot{x}^2 - b(t)x^2\right\} + c(t)x \tag{III.1}$$

olmak üzere, burada $a(t) > 0$, $b(t)$ ve $c(t)$ zamana bağlı fonksiyonlardır. Fiziksel olarak Lagranjiyen, $W(t) = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/2}$ değişken frekanslı osilatör kuvvetinin hareketine karşılık gelir. Bu tür kuadratik Lagranjiyen (III.1) formu, $a = e^{\gamma t}$, $b = e^{\gamma t}$, $c = 0$ olacak şekilde ilk kez Caldirola[33] ve daha sonra Kanai tarafından önerilmiştir, bu yüzden Lagranjiyen (III.1) Caldirola-Kanai Lagranjiyeni olarak bilinir.

K, yayıcısı geleneksel olarak çok köşeli yollar yaklaşıma göre,

$$K(x'',t''|x',t') = \lim_{N\to\infty} K_N(x'',t''|x',t') \tag{III.2}$$

şeklinde değerlendirilir. Burada K_N,

$$K_N = A_N \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{k=1}^{N-1} dx_k \exp\left[\frac{i}{\hbar} S_N\right] \tag{III.3}$$

olarak tanımlanır. Burada A_N, Feynman ölçüsünü tanımlayan normalizasyon faktörüdür. Normalizasyon faktörü,

$$\prod_{k=1}^{N}\left(\frac{a_k}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{1/2} \quad , \quad a_k = a(t_k) \tag{III.4}$$

olarak verilir ve S_N, herbiri ϵ uzunluğunda $[t', t'']$ zaman aralığında N tane alt aralıkların tümüyle tanımlanan ayrı ayrı kısımlardan oluşan eylemdir.

$x_k = x(t_k)$, $x_0 = x'$, $x_N = x''$ ve benzer olarak a,b,c katsayıları için

$$S_N = \left[\frac{1}{2\epsilon}\right]\sum_{k=1}^{N}\left\{a_k(x_k - x_{k-1})^2 - \epsilon^2 b_k x_k^2 + 2\epsilon c_k x_k\right\} \tag{III.5}$$

tanımlanır. $\dot{x} = \dfrac{x_k - x_{k-1}}{\epsilon}$ yazılarak elde edilir.

$$K_N = A_N \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{k=1}^{N-1} dx_k \exp\left[\frac{i}{\hbar} S_N\right] \tag{III.3}$$

ifadesindeki integralin alınabilmesi için X ve Y kolon vektörleri tanımlanır ve P simetrik matrisi oluşturulur. X ve Y vektörleri

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} \quad , \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} \tag{III.6}$$

olmak üzere, burada

$$y_1 = -c_1\epsilon^2 + a_1 x_0$$
$$y_k = -c_k\epsilon^2 \qquad (2 \leqslant k \leqslant N-2) \qquad \text{(III.7)}$$
$$y_{N-1} = -c_{N-1}\epsilon^2 + a_N x_N$$

Ve (N-1) boyutlu P simetrik matrisi aşağıdaki yapıdadır.

$$P_{k,k} = a_k + a_{k+1} - b_k\epsilon^2$$
$$P_{k+1,k} = -a_{k+1} \;, \quad P_{j,k} = 0 \qquad (j \neq k, k \pm 1) \qquad \text{(III.8)}$$

Bu şekilde K_N yayıcısı,

$$K_N(x'',t''|x',t') = \left(\prod_{k=1}^{N} a_k\right)^{1/2} \left(\frac{\alpha}{i\pi}\right)^{N/2} \exp\left\{i\alpha\left[a_1 x_0^2 + (a_N - b_N\epsilon^2)x_N^2 + 2\epsilon^2 c_N x_N\right]\right\} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\left\{i\alpha\left[x^T P x - 2x^T y\right]\right\} \qquad \text{(III.9)}$$

olarak yazılabilir. Burada $dx = \prod_{k=1}^{N-1} dx_k$, x^T: x in transposesi ve $\alpha = (2\hbar\epsilon)^{-1}$ dir. (III.9) da Gaussian integral,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\left\{i\alpha\left[x^T P x - 2x^T y\right]\right\} = \left(\frac{i\pi}{\alpha}\right)^{(N-1)/2} (\det P)^{-1/2} \exp\left[-i\alpha\left(y^T P^{-1} y\right)\right] \qquad \text{(III.10)}$$

haline dönüştürerek kolay bir şekilde değerlendirilir.

Buna uygun olarak,

$$K_N = \left(D_N / i\pi \right)^{1/2} \exp(i \chi_N) \tag{III.11}$$

bulunur. Burada D_N ,

$$D_N = \left[\left(\prod_{k=1}^{N} a_k \right) \left(\alpha / \det P \right) \right]^{1/2} \tag{III.12}$$

$$\chi_N = \alpha \left[a_1 x_0^2 + (a_N - b_N \epsilon^2) x_N^2 + 2\epsilon^2 C_N x_N - (Y^T P^{-1} Y) \right] \tag{III.13}$$

Böylelikle, D_N normalizasyon faktörü ve χ_N bileşeni-ni yayıcıda değerlendirmemiz $\epsilon \to 0$ sınırında ve $N \to \infty$ $N\epsilon = t'' - t'$ aralığında bulmamız gerekir. Şimdi D ve χ yi ayrı ayrı bu sınırlar içinde ifade etmeye çalışalım.

III.1.1- χ Bileşeni

Yeni bir U vektörünü

$$PU = Y \tag{III.14}$$

olacak şekilde tanımlayalım (III.14) ün elemanları

$$-a_k U_{k-1} + (a_k + a_{k+1} - b_k \epsilon^2) U_k - a_{k+1} U_{k+1} = -C_k \epsilon^2 \tag{III.15}$$

$k= 1,2,...,N-1$ olmak üzere uç-nokta değerleri $U_0=X_0$, $U_N=X_N$ olarak yazılır. Denk. (II.15) bağıntısı, her iki taraf ϵ^2 ile bölünür ve $\epsilon \to 0$ giderken limit alınır ve düzenlenerek diferansiyel denklem,

$$\frac{d}{dt}\left\{a(t)\dot{u}(t)\right\} + b(t)u(t) = c(t) \tag{III.16}$$

elde edilir. Uç nokta değerleri $U_0=X_0$, $U_N=X_N$ alınmıştır. Şimdi (III.13) denkleminde χ_N bileşenini ele alarak,

$$\chi = \left(\frac{1}{2\epsilon\hbar}\right)\left[a_1 X_0^2 + (a_N - b_N\epsilon^2)X_N^2 + 2\epsilon^2 c_N X_N - \sum_{k=1}^{N-1} y_k u_k\right.$$

şeklinde elde edilir. Denk. (III.7) de Y_k nın tanımlarını kullanarak ve $U_0=X_0$ ve $U_N=X_N$ eşitliğini gözönüne alarak,

$$\chi = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)\left\{a_N X_N\left(\frac{U_N - U_{N-1}}{\epsilon}\right) - a_1 X_1\left(\frac{U_1 - U_0}{\epsilon}\right) + \sum_{k=1}^{N}\epsilon c_k u_k + \epsilon c_N X_N\right\}$$

elde edilir. $\epsilon \to 0$ durumunda limit alınarak,

$$\chi = \lim_{\epsilon \to 0} \chi_N = \left(\frac{1}{2\hbar}\right)\left\{a'' x'' \dot{u}'' - a' x' \dot{u}' + \int_{t'}^{t''} c(t)\,U(t)\,dt\right\} \tag{III.17}$$

elde edilir. Burada (III.7) klasik hareket denkleminin U(t) çözümüyle χ bileşeninin belirlendiğine dikkat etmek gerekir. Ayrıca,

$$\chi = S_{cl}/\hbar \tag{III.18}$$

ifadesinin doğruluğunu göstermek kolaydır. Burada

S_{cl}, (III.16) denklemiyle belirlenen klasik yol boyunca

$\int_{t'}^{t''} L dt$ bağıntısına klasik eylem denir.

$\mathcal{K}$ için (III.17) ifadesi, x' ve x" uç noktalarında $\mathcal{K}$ ye doğrudan bağlıdır. Bunun için (III.16) Klasik denklemin formal çözümüne gerek duyarız. Daha önce verilen x' ve x" uç noktalarını gözönüne alırız. $V = u\sqrt{a}$, denklem (III.16) da yerine konularak,

$$\ddot{V} + \Omega^2(t)V = C/\sqrt{a} \qquad \text{(III.19a)}$$

elde edilir. Hesaplama sırasında

$$V(t') = \sqrt{a'}\,X' \;, \quad V(t'') = \sqrt{a''}\,X'' \qquad \text{(III.19b)}$$

olduğu gibi $U(t') = x_0 = x'$ ve $U(t'') = x_N = x''$ uç nokta koşulları gözönüne alınır. Daha sonra,

$$\Omega^2(t) = \frac{1}{2}\left(\dot{a}^2/2a^2 - \ddot{a}/a\right) + b/a \qquad \text{(III.19c)}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$V_1(t') \equiv V_1' = 0 \;, \quad V_2(t'') \equiv V_2'' = 0 \qquad \text{(III.20a)}$$

başlangıç koşullarına uyan homojen denklem

$$\ddot{V} + \Omega^2(t)V = 0 \tag{III.20b}$$

iki bağımsız çözümü V_1 ve V_2 ise $G(t',s)=G(t'',s)=0$ olmak üzere (III.19) denklemi için $G(t,s)$ Green fonksiyonu önerebiliriz.

$$G(t,s) = \begin{cases} [V_1(t)V_2(s)]/Q & t < s \\ [V_1(s)V_2(t)]/Q & t > s \end{cases} \tag{III.21}$$

$$Q = \dot{V}_1(s)V_2(s) - V_1(s)\dot{V}_2(s) \tag{III.22}$$

olarak yazılır. Burada Q, s'den bağımsızdır ve s=t' veya s=t" yazılarak sonuçta,

$$Q = \dot{V}_1' V_2' = -V_1'' \dot{V}_2'' \tag{III.23}$$

elde edilir. Böylece (III.19b) sınır koşulları altında (III.20b) denkleminin şekilsel çözümü,

$$V(t) = \frac{\sqrt{a'}\, X' V_2}{V_2'} + \frac{\sqrt{a''}\, X'' V_1}{V_1''} - \int_{t'}^{t''} \frac{G(t,s)\, C(s)}{\sqrt{a(s)}}\, ds \tag{III.24}$$

olarak elde edilir. Bu çözüm ve $U=v/\sqrt{a}$ bağıntısı (III.17) denkleminde yerine konur ve χ bileşeni,

$$\chi=-\frac{1}{4\hbar}\left[\frac{\dot{a}''X''^2}{a''}+\frac{\dot{a}'X'^2}{a'}\right]+\frac{1}{2\hbar}\left[\frac{\dot{V}_1''X''^2}{V_1''}+\frac{\dot{V}_2'X'^2}{V_2'}-\frac{2X'X''\dot{V}_1'}{V_1'}\right.$$

$$\left.+\frac{2X'}{V_2'}\int_{t'}^{t''}\frac{c(s)V_2(s)}{\sqrt{a(s)}}ds+\frac{2X''}{V_1''}\int_{t'}^{t''}\frac{c(s)V_1(s)}{\sqrt{a(s)}}ds-\int_{t'}^{t''}dt\int_{t'}^{t''}ds\frac{c(t)G(t,s)c(s)}{\sqrt{a(t)a(s)}}\right]$$

(III.25)

elde edilir. Burada $X=\sqrt{a}\,x$ ve $V_2'V_1'=-V_1''V_2''$ bağıntısı kullanılmıştır.

III.1.2- D Normalizasyon Faktörü

D Normalizasyon faktörünü belirlemek için detP ifadesini bulmak gerekir. P matrisinin (III.8) ile verilen tanımından, recursion bağıntısına uyan P determinatının k. mimörünün Δ_k olduğunu görmek kolaydır. $\Delta_0=1$, $\Delta_{-1}=0$ olmak üzere,

$$\Delta_k=(a_k+a_{k+1}-b_k\epsilon^2)\Delta_{k-1}-a_k^2\Delta_{k-2}\ ,\quad k>1$$

(III.26)

Burada Δ_k,

$$\Delta_k=\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\left(\prod_{j=1}^{k+1}a_j\right)\psi_{k+1} \qquad \text{(III.27)}$$

kümesine sahiptir. Denklem (III.26) ve (III.27) ile verilen denklem kullanılarak,

$$a_{k+1}\psi_{k+1}-(a_k+a_{k-1})\psi_k+a_k\psi_{k-1}+b_k\epsilon^2\psi_k=0$$

(III.28a)

bağıntısı elde edilir. Burada sınır şartları,

$$\psi_0 = 0 \quad , \quad \psi_1 = \frac{\epsilon}{a_1} \tag{III.28b}$$

kullanılır. Denklem (III. 28a) bağıntısı düzenlenerek ϵ^2 ye bölünür ve $\epsilon \to 0$ durumunda limit alınarak,

$$\frac{d}{dt}(a\dot{\psi}) + b\psi = 0 \tag{III.29a}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu, (III.29a) denklemi, (III.16) denkleminin yerini tutan homojen diferansiyel denklemdir. Sonuç olarak

$$\psi(t') = \psi' = 0 \quad , \quad \dot{\psi} = \frac{1}{a'} \tag{III.29b}$$

sınır koşullarına uyan çözümü V_1 'e bağlı olarak

$$\psi(t) = \frac{V_1(t)}{\sqrt{[a(t)\,a(t')]}} \cdot \frac{1}{\dot{V}_1(t')} \tag{III.29c}$$

şeklinde verilir. Son olarak, det P= $_{N-1}$ ise bu durumda

$$D = \lim_{\epsilon \to 0} D_N = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\left(\prod_{k=1}^{N} a_k \right) \frac{\alpha}{\det P} \right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{1}{2\hbar\psi''} \right]^{1/2} = \left\{ \frac{(\dot{V}_1'^2 (\dot{a}a''))^{1/4}}{\sqrt{2\hbar V_1''}} \right\} \tag{III.30}$$

yazılabilir.

$$D=\left[\frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 \chi}{\partial x'\partial x''}\right|\right]^{1/2}=\left[\frac{1}{2\hbar}\left|\frac{\partial^2 S_a}{\partial x'\partial x''}\right|\right]^{1/2} \quad \text{(III.31)}$$

bağıntısının doğruluğunu (III.25) ve (III.30) dan kontrol edebiliriz. Böylece (III.1) denklemi ile verilen Kuadratik eylem için yayıcı,

$$K(x'',t''|x',t')=\left(D/\pi i\right)^{1/2} \exp\left\{i\chi\right\} \quad \text{(III.32)}$$

olarak verilir. Yayıcı tam olarak Van-Vleck-Pauli formülü ile verilir.

$$K(x'',t''|x',t')=\left[\frac{1}{2\pi i\hbar}\left|\frac{\partial^2 S_a}{\partial x'\partial x''}\right|\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar}S_a\right] \quad \text{(III.33)}$$

Bu sonuç genel olarak bir kuadratik eylem ve iki ve üç boyutlu kuadratik eylemlerin yayıcılarını bulmak için faydalı ve geçerlidir.

Yayıcı, (x_k, k=1,...N-1) orta koordinatların herbiri üzerinde ardıl integrasyonlar yardımı ile de bulunabilir.(26) Bu teknik, polar koordinatlarda yol integrasyon için gerekli olur.

Diğer bir önemli nokta, Lagranjiyen'deki kinetik enerji terimindeki a(t) faktörünü yok etmektir.

$$X = x/\sqrt{a} \quad \text{(III.34)}$$

bağıntısı, (III.1) Lagranjiyen denkleminde yerine komur ve

$$\mathcal{L}(x,\dot{x};t)=\tilde{\mathcal{L}}(x,\dot{x};t)-\frac{1}{4}\frac{d}{dt}(\dot{a}x^2/a) \qquad \text{(III.35)}$$

şekline dönüştürülebilir. Bu durumda yeni Lagranjiyen $\tilde{L}$,

$$\tilde{\mathcal{L}}(x,\dot{x};t)=\frac{1}{2}(\dot{X}^2-\Omega^2(t)X^2) \qquad \text{(III.36)}$$

olarak verilir. Burada $\Omega^2(t)=\frac{1}{2}(\dot{a}^2/2a^2-\ddot{a}/a)+b/a$ dır. Bu dönüşüm, aynı zamanda Feynman ölçüsünün dönüşmesine neden olur. O halde,

$$D[x(t)]=(a'a'')^{1/4}D[X(t)] \qquad \text{(III.37)}$$

ve bu dönüşümler sonunda yayıcı;

$$K(x'',t''|x',t')=(a'a'')^{1/4}\exp\left\{-\left(\frac{i}{4\hbar}\right)\left[\frac{\dot{a}''}{a''}x''^2-\frac{\dot{a}'}{a'}x'^2\right]\right\}$$
$$\int D[X(t)]\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}\mathcal{L}(x,\dot{x};t)\,dt\right\} \qquad \text{(III.38)}$$

olarak elde edilir. Bu dönüşüm, D ve χ ifadelerinde bulunan $(a'a'')^{1/4}$ faktörünü ayırır ve dolayısıyle yol integrasyon basitleştirilmiş olur.

III.2. <u>Özel Durumlar</u>

Kuadratik eyleme sahip (III.32) yayıcının özel durumlarından bahsetmek için D ve χ nin alternatif formlarını hesaplamak uygundur. Denklem (III.20a) ile verilen uç nokta koşullarını sağlayan (III.20b) homojen denklemin $V_1(t)$ ve $V_2(t)$ olmak üzere iki bağımsız çözümlerinin olduğuna dikkat edelim. Bu çözümler,

$$V_1(t) = \rho(t)\,\mathrm{Sin}\,\phi(t,t')$$
$$V_2(t) = \rho(t)\,\mathrm{Sin}\,\phi(t'',t) \tag{III.39}$$

formuna sahiptir. Denklemde $\rho(t)$, Piney denklemi(34) olarak bilinen yardımcı denklemi sağlar. Buna göre

$$\ddot{\rho} + \Omega^2(t)\rho - \rho^{-3} = 0 \tag{III.40}$$

ve $\phi(t,s)$ ifadesi

$$\phi(t,s) = \mu(t) - \mu(s) = \int_s^t \rho^{-2}(t)\,dt \tag{III.41}$$

olarak verilir. Dikkat edilirse $\rho(t)$ ve $\mu(t)$, (III.20b) ile verilen denklemin zamana bağlı osilatörün, genlik ve fazı olarak yorumlanır. Buna göre $G(t,s)$, Green fonksiyonu,

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\rho(t)\rho(s)\,\mathrm{Sin}\,\phi(t,t')\,\mathrm{Sin}\,\phi(s,t'')}{\mathrm{Sin}\,\phi(t'',t')} , & t<s \\[2ex] \dfrac{\rho(t)\rho(s)\,\mathrm{Sin}\,\phi(t'',t)\,\mathrm{Sin}\,\phi(s,t')}{\mathrm{Sin}\,\phi(t'',t')} , & t>s \end{cases} \tag{III.42}$$

olarak elde edilir. Tam yayıcı,

$$K(x'',t''|x',t')=\left[2\pi i\hbar\sigma'\sigma \,\mathrm{Sin}\,\phi(t'',t')\right]^{1/2}\exp\left[\frac{i}{2\hbar}\left\{\frac{a''\dot{\sigma}''x''^2}{\sigma''}-\frac{a'\dot{\sigma}'x'^2}{\sigma'}\right\}\right]$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{i}{2\hbar\,\mathrm{Sin}\,\phi(t'',t')}\left[\left\{\frac{x''^2}{\sigma''^2}+\frac{x'^2}{\sigma'^2}\right\}\mathrm{Cos}\,\phi(t'',t')\right.\right.$$

$$-\frac{2x''x'}{\sigma''\sigma'}+\frac{2x''}{\sigma''}\int_{t'}^{t''}G(t)\,\mathrm{Sin}\,\phi(t,t')\,dt+\frac{2x'}{\sigma'}\int_{t'}^{t''}G(t)\,\mathrm{Sin}\,\phi(t'',t)\,dt$$

$$\left.\left.-2\int_{t'}^{t''}\int_{t'}^{t}G(t)\,G(s)\,\mathrm{Sin}\,\phi(t'',t)\,\mathrm{Sin}\,\phi(s,t')\,ds\,dt\right]\right\} \qquad \text{(III.43)}$$

biçiminde elde edilir. Burada $\sigma=\rho(t)/\sqrt{a}$ ve $G(t)=c(t)\sigma(t)$ dir.

Litaratürde bu ifade tüm özel durumları belirtir. Örneğin a=1, $b(t)=w^2$=sbt. olduğundan $=w^{-1/2}$, $\phi(t,s)=w(t-s)$ olarak alınabilir ve yayıcı,

$$K(x'',t''|x',t')=\left[\frac{w}{2\pi i\hbar\,\mathrm{Sin}\,wT}\right]^{1/2}\exp\left[\frac{iw}{2\hbar\,\mathrm{Sin}\,wT}\left\{(x''^2+x'^2)\,\mathrm{Cos}\,w(t''-t')\right.\right.$$

$$-2x'x''+\frac{2x''}{w}\int_{t'}^{t''}c(t)\,\mathrm{Sin}\,w(t-t')\,dt+\frac{2x'}{w}\int_{t'}^{t''}c(t)\,\mathrm{Sin}\,w(t''-t)\,dt$$

$$\left.\left.-\frac{2}{w^2}\int_{t'}^{t''}dt\int_{t'}^{t}ds\;c(t)\,c(s)\,\mathrm{Sin}\,w(t''-t)\,\mathrm{Sin}\,w(s-t')\right\}\right] \qquad \text{(III.44)}$$

şeklinde elde edilir.

Bu sönümsüz harmonik osilatörün yayıcısıdır[16]. $a(t)=\exp(\gamma t)$, $b(t)=\exp(\gamma t)w^2(t)$, $c(t)=\exp(\gamma t)f(t)$ durumunda $\Omega^2(t)=w^2(t)-\gamma^2/4$ olduğu ve (III.43) denklemi ile verilen yayıcı olup, ilk önce Khandekar ve Lawande[25] tarafından ortaya atılmıştır. Ayrıca $a=m\exp(\alpha t)$, $b=w^2\exp(\alpha t)$ ve $c=0$ olarak seçilirse, (III.39) ile verilen denklem analitik olarak çözülebilir ve farklı bir osilatör[35] için Landovitz tarafından bulunan yayıcı tekrar bulunabilir. Eğer $a=\exp(\gamma t)$, $b=\exp(\gamma t)w^2$ ve $c(t)=\exp(\gamma t)$ değerleri (III.43) ile verilen denklemde yerlerine konursa bu durumda Chang[36], Gerry[37] ve Dodnov[38] tarafından bulunan yayıcı elde edilir. Son olarak zamana bağlı harmonik osilatörde $c=0$ durumu, son yıllarda Chang[39] ve Rezende[40] tarafından incelenmiştir.

III.3- Genelleştirme

Lagranjiyen üç boyutta genelleştirilebilir, bu durumda Lagranjiyen L,

$$L=\frac{1}{2}\left[\frac{dX^T}{dt}A(t)\frac{dX}{dt}-X^TB(t)X+\frac{dX^T}{dt}.C(t)X\right]+f\cdot X \qquad \text{(III.45)}$$

olarak verilir. Burada $X=(x_1,x_2,x_3)$, $f=(f_1,f_2,f_3)$; üç boyutlu vektörler olup, A, B ve C, 3x3 matrisdir. Yayıcı, yukarıdakine benzer şekilde Papadopoulos[41] tarafından değerlendirilmiştir. Van Vleck-Pauli[27,28] formülü uygulanarak yayıcı,

$$K(x'',t''|x',t')=\left[\det\left\{A(t')/2\pi i\hbar D(t'')\right\}\right]\exp\left[\frac{i}{\hbar}S_{cl}(x'',t''|x',t')\right]$$

(III.46)

biçiminde elde edilir. D(t) matrisi,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{dD}{dt}A\right]+D\frac{dC}{dt}+DB=\frac{dD}{dt}C^{-}-DC^{-}A^{-1}D^{-1}\frac{dD}{dt}A+DC^{-}A^{-1}C^{-}$$

(III.47)

ile verilen diferansiyel denklemin çözümüdür. Çözümde,

$C^{\mp}=(C\mp C^{T})$ ve

$$D(t')=0 \quad , \quad \left.\frac{dD(t)}{dt}\right|_{t=t'}=I \qquad \text{(III.48)}$$

sınır koşulları kullanılmıştır. Denk. (III.46) ile verilen Van Vleck-Pauli determinantının zamana bağlı faktör olduğu gösterilebilir. Denk. (III.46)'nın özel durumu Papadopoulos tarafından incelenmiştir.

IV- <u>İKİ ZAMANLI KUADRATİK EYLEMLER</u>

Yol integral teorisinde yerleşik olmayan kuadratik eylemler(4) birçok fiziksel uygulamalarda ortaya çıkar. Bu tür eylemler genel olarak,

$$S=\frac{1}{2}\int_0^T dt\,\dot{x}^2-\frac{1}{2}\int_0^T dt\int_0^T ds\; G(t,s)^2\,X(t)\,X(s)+\int_0^T f(t)\,X(t)\,dt \qquad \text{(IV.1)}$$

şeklindedir. Burada G(t,s), t ve s'nin simetrik bir fonksiyonu, f(t) ise zamana bağlı harici bir kuvveti gösterir. Fiziksel olarak G(t,s), verilen bir sistemin daha büyük bir sistemle etkileşmesi ile oluşan doğal olayları ayrıntılı ve basit olarak karakterize etme yoludur.

Tarihsel olarak, (IV.1) denklemi ile verilen yerleşik olmayan eylem, ilk kez Feynman[42] tarafından polaron probleminin yol integral teorisinde ortaya atıldı. Bundan sonra bu teori daha geliştirildi. (IV.1) ile verilen yerleşik olmayan eylemin basit formu Bezak[43] tarafından random potansiyelinde elektron gazı için kullanıldı. Bu tür eylemler gaussian integralleri kapsadığından tam olarak bulunabilir. Ayrıca, karmaşık sistemlerde, elektronik hal yoğunluklarının hesaplanmasında bu tür eylemler kullanılır.

IV.1- <u>Yayıcının Türetilmesi</u>

Yayıcının türetilmesi, (III.1) kesimindeki kuadratik eylemlerde olduğu gibi aynı yol izlenerek elde edilir. Bu durumda yaklaşık yayıcı,

$$K_N(X,T|X_0,0)=\left(\frac{\alpha}{i\pi}\right)^{N/2}\exp\left\{i\alpha\left(X_0^2+X_N^2+2\epsilon^2 f_N X_N\right)\right\}\int_{-\infty}^{+\infty}dX\,\exp\left\{i\alpha\left[\tilde{X}PX-2XY\right]\right\} \tag{IV.2}$$

olarak verilir. Burada $\alpha=(2h\epsilon)^{-1}$ ve $\epsilon=\frac{T}{N}$

X ve Y, (N-1) elemana sahip kolon vektörleridir. Ve

$$X=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix}, \qquad Y=\begin{bmatrix} X_0-\epsilon^2 f_1 \\ -\epsilon^2 f_2 \\ \vdots \\ X_N-\epsilon^2 f_{N-1} \end{bmatrix} \tag{IV.3}$$

şeklinde tanımlanır. $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$, X ve Y nin yerini tutan dizi vektörleridir. P, (N-1) boyutlu kare matris olup,

$$P_{ij} = P_{ji} \quad , \quad P_{i,j+1} = -\epsilon^3 G_{i,j+1} - 1 \tag{IV.4}$$

$$P_{jj} = 2 - \epsilon^3 G_{jj} \quad , \quad P_{ij} = -\epsilon^3 G_{ij} \, , \quad [(i \neq j), (j \pm 1)]$$

yapılarına sahiptir. Denklem (IV.2) ile verilen Gaussian integral,

$$K_N = \left[\frac{\alpha}{i\pi \det P}\right]^{1/2} \exp\left\{-i\alpha\left[X_0^2 + X_N^2 + 2\epsilon^2 f_N X_N - \tilde{Y} P^{-1} Y\right]\right\} \tag{IV.5}$$

sonucu, matris özelliklerinden faydalanarak bulunur, Gaussian integral kolay bir biçimde değerlendirilir. Bu bağıntıyı,

$$K_N = \left(\frac{D_N}{i\pi}\right)^{1/2} \exp\{i\chi_N\}$$

şeklinde gösterebiliriz. Buna göre χ_N bileşenini ve D_N normalizasyon faktörünü,

$$\chi = \alpha\left[X_0^2 + X_N^2 + 2\epsilon^2 f_N X_N - \tilde{Y} P^{-1} Y\right] \tag{IV.6}$$

$$D_N = (\alpha / \det P)^{1/2} \tag{IV.7}$$

olarak ifade ederiz. Şimdi χ_N ve D_N ifadelerini ayrı ayrı tanımlayalım.

IV.2- χ Bileşeni

Daha önce (III.1) kesiminde olduğu gibi yeni bir U vektörü,

$$PU = Y \tag{IV.8}$$

olacak şekilde tanımlanır. Y ve P nin (IV.3) ve (IV.4) ifadelerini kullanarak,

$$U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1} + \epsilon^3 \sum_{k=1}^{N} G_{jk} U_k = \epsilon^2 f_j \tag{IV.9}$$

şeklinde bir bağıntı,

$$U_0 = X_0 \ , \quad U_N = X_N \tag{IV.10}$$

sınır değerleri gözönüne alınarak elde edilir. Denklem (IV.9) ile verilen ifade ϵ^2 ye bölünür ve $\epsilon \to 0$ için limit alınarak,

$$U(0) = X_0 \ , \quad U(T) = X \tag{IV.11}$$

sınır koşulları altında integro-diferansiyel denklem,

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \int_0^T ds\, G(t,s)\, U(s) = f(t) \tag{IV.12}$$

elde edilir. Elde edilen bu denklem, (IV.1) ile verilen ifadenin $S[x(t)]$ değişimi ile bulunan klasik hareket denklemidir. Dolayısıyla,

$$\chi_N=\left(\frac{1}{2\hbar\epsilon}\right)\left[x_0^2+x_N^2+2\epsilon^2 f_N x_N-\sum_{k=1}^{N} y_k u_k\right.$$

$$=\frac{1}{2\hbar}\left[\frac{x_N(U_N-U_{N-1})}{\epsilon}-\frac{x_0(U_1-U_0)}{\epsilon}+\epsilon\sum_{k=1}^{N} f_k U_k+\epsilon f_N x_N\right] \quad \text{(IV.13)}$$

yazılabilir. $\epsilon \to 0$ için limit alınarak

$$\chi=\lim_{N\to\infty}\chi_N=\frac{1}{2\hbar}\left[x\dot{U}(T)-x_0\dot{U}(0)+\int_0^T f(t)\,U(t)\,dt\right] \quad \text{(IV.14)}$$

elde edilir. (IV.14) ile verilen ifade $S_{cl}/\hbar$ 'a eşittir. Bu x_0 dan x'e klasik yol boyunca hesaplanan eylemdir.

IV.3- D Normalizasyon Faktörü

Det P nin değerini bulmak için

$$P = L + V \quad \text{(IV.15)}$$

biçiminde ifade ederiz. Burada L ve V, (N-1) boyutlu kare matristir. Bu ifade tek değildir ve L^{-1} sağlayacak şekilde L ve V seçilebilir. L ve V,

$$L_{ij}=L_{ji}\ ,\quad L_{j,j+1}=-1\ ,\quad L_{jj}=2$$

$$L_{ij}=0\quad (i\neq j,\ j\pm 1)\ ,\quad V_{ij}=\epsilon^2 G_{ij} \quad \text{(IV.16)}$$

olacak şekilde seçeriz. O halde,

$$\det(P)=\left[\det(L)\right]\left[\det(I+L^{-1}V)\right] \quad \text{(IV.17)}$$

olarak yazılabilir, det $(I+L^{-1}V)$ faktörünü değerlendirmek için,

$$det(I+\lambda K)= exp\left[Tr\int_0^{\lambda} d\mu\, R(\mu)\right] \tag{IV.18}$$

sonucu kullanılır. Burada K sonlu boyutlu kare matris ve $R_{(\mu)}$ matrisi,

$$R= K-\mu KR \tag{IV.19}$$

ifadesini sağlar. $\lambda=1$, $K=L^{-1}V$ durumunda, (IV.19) ile verilen denklem

$$LR= V-\mu VR \tag{IV.20}$$

şeklini alır. $R=R/\epsilon$ ifadesini ve (IV.16) ile verilen denklem ve (IV.19) denklemleri kullanılarak (IV.20) ile verilen ifade,

$$2\tilde{R}_{jk}-\tilde{R}_{j-1,k}-\tilde{R}_{j+1,k}=-\epsilon^2 G_{jk}+\mu\epsilon^2\sum_{j} G_{jl}\tilde{R}_{lk} \tag{IV.21}$$

biçimine dönüştürülür. Dönüşümde,

$$\tilde{R}_{0k} = \tilde{R}_{Nk} = 0 \tag{IV.22}$$

koşulları gözönüne alınır. Denklem (IV.21) yeniden düzenlendikten sonra her iki taraf ϵ^2 ye bölünür ve $\epsilon \to 0$ için limit alınır ve integro-diferansiyel denklem haline dönüşür.

$$\frac{d^2}{dt^2}\tilde{R}(t,s)+\mu\int_0^T G(t,r)\tilde{R}(r,s)\,dr = G(t,s) \tag{IV.23}$$

Bu integro-diferansiyel denklem ilave sınırlar,

$$R(0,S) = R(T,S) = 0 \quad \text{için } (0\leqslant S\leqslant T) \tag{IV.24}$$

gözönüne alınarak elde edilir. (IV.18) ile verilen denklemden,

$$\det(I+L^{-1}V) = \exp\left[\int_0^1 d\mu \sum_{j=1}^{N-1} \epsilon\, \tilde{R}_{jj}\right]$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \det(I+L^{-1}V) = \exp\left[\int_0^T dt \int_0^1 d\mu\, R(t,t,\mu)\right] \qquad \text{(IV.25)}$$

olduğu görülür. Diğer bir det (L) faktörünü bulmak için (IV.16) ile verilen denklemden, det (L) nin k. minörünün

$$\Delta_k = 2\Delta_{k-1} - \Delta_{k-2} \quad , \qquad k \geqslant 1 \qquad \text{(IV.26)}$$

ile verilen recurrence bağıntısına uyduğunu görürüz. Burada $\Delta_0 = 1$, $\Delta_{-1} = 0$ alınır. (IV.26) ile verilen denklemin çözümü $\Delta_k = k+1$ olduğu açıktır. Dolayısıyle det $(L) = \Delta_{N-1} = N = T/\epsilon$. Böylece D normalizasyon faktörü,

$$D = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{\alpha}{\det P}\right]^{1/2} = \left[\frac{1}{2\pi i\hbar T}\right] \exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^T dt \int_0^1 d\mu\, \tilde{R}(t,t,\mu)\right] \qquad \text{(IV.27)}$$

olarak elde edilir.

IV.4- Yayıcı

Yayıcıyı elde etmek için, (IV.14), (IV.27) ve (IV.5) ile verilen denklemleri birleştirirsek,

$$K(x,T|x_0,0) = \left[\frac{1}{2\pi i\hbar T}\right]^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T dt \int_0^1 d\mu\, \tilde{R}(t,t,\mu)\right\}$$

$$\cdot \exp\left\{\frac{i}{2\hbar}\left[x\dot{u}(T) - x_0\dot{u}(0) + \int_0^T dt\, f(t)u(t)\right]\right\} \qquad \text{(IV.28)}$$

biçiminde elde edilir. Yayıcı yerleşik olmayan karesel eylemler için,

$$K(x,T \mid x_0,0)= \emptyset(T)\exp(iS_{cl}/\hbar) \qquad (IV.29)$$

genel formuna sahiptir. Burada $\emptyset(T)$,(IV.28) ile verilen denklemin birinci üstel ifade ve katsayı ile verilir ve Van Vleck-Pauli formülünden farklıdır. Yayıcının açık olarak değerlendirilmesi (IV.11) ile verilen klasik hareket denklemi ve integro-diferansiyel denklemin çözümlerine bağlıdır.

V. POLAR KOORDİNATLARDA YOL İNTEGRALLERİ

V.1- Yayıcının Formu

Yol integral, çok köşeli yollar yaklaşımını kullanarak küresel polar koordinatlarda geliştirilebilir. m kütleli bir parçacığın V(x) potansiyelinde hareketini tanımlayan eylemin genel formu,

$$S[x(t)]=\int_{t'}^{t''}dt\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2-V(x)\right] \qquad (V.1)$$

biçiminde verilir. Kesim (II) ye göre, denklem (V.1) in bileşenleri ayrı olarak,

$$S=\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{m\left[x_j-x_{j-1}\right]^2}{2\epsilon}-\epsilon V(x_j)\right) \qquad (V.2)$$

olarak yazılabilir. Alışılmış küresel polar koordinatları (r,θ,φ) belirterek ilkönce,

$$(x_j - x_{j-1})^2 = r_j^2 + r_{j-1} - 2 r_j r_{j-1} \cos \Theta_{j,j-1} \qquad (V.3)$$

ifadesini yazarız. Burada $\Theta_{j,j-1}$; x_j ve x_{j-1} arasındaki açıdır. Cos $\Theta_{j,j-1}$ nin değerleri $(\theta_j \varphi_j)$ ve $(\theta_{j-1} \varphi_{j-1})$ açısal terimler ile ifade edilir.

$$\cos \Theta_{j,j-1} = \cos\theta_j \cos\theta_{j-1} + \sin\theta_j \sin\theta_{j-1} \cos(\varphi_j - \varphi_{j-1}) \qquad (V.4)$$

Burada potansiyel terimin küresel simetrik olduğu kabul edilmiştir. Böylesi bir durumda Denklem (V.2) $S(x_j, x_{j-1})$ ifadesi; (V.4) ile verilin denklem sonuçları kullanılarak basitleştirilir (sadeleştirilir). Bunun için,

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar} S\right] = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left\{\sum_{j=1}^{N} \frac{m}{2\epsilon}(r_j^2 + r_{j-1}^2) - \epsilon V(r_j)\right\}\right] \exp\left[\frac{m}{i\hbar\epsilon}\sum_{j=1}^{N} r_j r_{j-1} \cos\Theta_{j,j-1}\right] \qquad (V.5)$$

(V.5) de ikinci üstel ifade formül (V.5) kullanılarak küresel harmonikleri kapsayan seriye açılabilir.

$$\exp(u \cos\Theta_{j,j-1}) = 4\pi \sqrt{\frac{\pi}{2u}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-l}^{l} I_{l+1/2}(u)\, Y_{ln}^{*}(\theta_j, \varphi_j)\, Y_{ln}(\theta_{j-1}, \varphi_{j-1}) \qquad (V.6)$$

Burada $I_{l+1/2}(u)$ sanal argümanın Bessel fonksiyonudur. (V.5) denkleminde (V.6) sonucu yazılarak,

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar} S\right] = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left\{\sum_{j=1}^{N} \frac{m}{2\epsilon}(r_j^2 + r_{j-1}^2) - \epsilon V(r_j)\right\}\right] (4\pi)^N \prod_{j=1}^{N} \left[\frac{i\pi\hbar\epsilon}{2m r_j r_{j-1}}\right]^{1/2}$$

$$I_{l+1/2}\left[\frac{m r_j r_{j-1}}{i\hbar\epsilon}\right] \sum_{l_j=0}^{\infty} \sum_{n_j=-l_j}^{l_j} Y_{l_j n_j}^{*}(\theta_j, \varphi_j)\, Y_{l_j n_j}(\theta_{j-1}, \varphi_{j-1}) \qquad (V.7)$$

bulunur.

Burada $\{\ell_j\}$, $\{n_j\}$ sembolleri $l_1, l_2, \ldots, l_N$ ve $n_1, n_2, \ldots, n_N$ olarak ayrı ayrı temsil edilir. K_N için önce (I.6) bağıntısında (V.7) ifadesinin yerine konulacağına ve

$$dx_j = r_j^2 \operatorname{Sin}\theta_j \, d\theta_j \, d\varphi_j \tag{V.8}$$

nin hacim eleman olduğuna dikkat edilmelidir.

θ_j ve φ_j $(1 < j < N-1)$ açısal değişkenleri üzerinden integrasyonlar, küresel harmonikler arasındaki iyi-bilinen ortogonallik bağıntısı kullanılarak alınır. Küresel harmonikler,

$$\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \; Y^{*}_{\ell n}(\theta,\varphi)\, Y_{\ell' n'}(\theta,\varphi)\, \operatorname{Sin}\theta = \delta_{\ell\ell'}\, \delta_{nn'} \tag{V.9}$$

şeklindedir. Küresel polar koordinatlarda yayıcı,

$$K(x'',t''|x',t') \equiv K(r'',\theta'',\varphi'',t''|r',\theta',\varphi',t')$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n=-\ell}^{\ell} K_\ell(r'',t''|r',t')\, Y^{*}_{\ell n}(\theta'',\varphi'')\, Y_{\ell n}(\theta',\varphi') \tag{V.10}$$

şeklindedir. Burada $K_\ell(r'',t''|r',t')$, radyal yayıcı olup,

$$K_\ell(r'',t''|r',t') = \lim_{N\to\infty} (4\pi)^N A_N \int \prod_{j=1}^{N} R_\ell(r_j, r_{j-1}) \prod_{j=1}^{N-1} r_j^2\, dr_j \tag{V.11}$$

şeklinde verilir. Bu bağıntıda R_l,

$$R_\ell = \left[\frac{i\pi\epsilon\hbar}{2m r_j r_{j-1}}\right]^{1/2} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left\{\sum_{j=1}^{N} \frac{m}{2\epsilon}(r_j^2 + r_{j-1}^2) - \epsilon V(r_j)\right\}\right]$$

$$\cdot\, I_{\ell+1/2}\left[\frac{m r_j r_{j-1}}{i\hbar\epsilon}\right] \tag{V.12}$$

şeklinde verilir ve A_N ,

$$A_N=\left[\frac{m}{2\pi i\epsilon\hbar}\right]^{3N/2} \tag{V.13}$$

olarak verilir. Böylece, küresel simetrik potansiyeller için küresel polar koordinatta yayıcının türetilmesi tamamlanmış olur. Bu alanda en önemli çalışmalar ilkkez Edwards ve Gulyqeuv (44) tarafından yapılmıştır.

V.2- İki Boyutta Yayıcı

Üç boyutlu küresel polar koordinatlarda, yol integralinin genel ifadelerinde, denklem (V.4) ve (V.6) da $\theta_j=\pi/2$ yerleştirilerek iki boyutlu yol integrali elde edilebilir. Denklem (V.7) nin açılımı ile bunu görmek kolaydır.

$$\exp(u\cos\varphi)=\left[\frac{\pi}{2u}\right]^{1/2}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\,i^k\,J_{k+1/2}(u)\,P_k(\cos\varphi) \tag{V.14}$$

bu ifade bu şekilde de gösterilebilir.

$$\exp(u\cos\varphi)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\,I_k(-u)\exp(ik\varphi) \tag{V.15}$$

Bu durumda Feynman ölçüsünün dönüşümü,

$$dx_j dy_j = r_j dr_j d\varphi_j \tag{V.16}$$

şeklindedir. Daha sonra (V.15) açılımı, $\theta_j= 1/2\pi$ olacak şekilde $\exp(iS/\hbar)$ ifadesinde yerine konularak, φ_j üzerindeki integrasyonlar ortoganallik özelliği kullanılarak (şayet V potansiyeli yanlızca r nin bir fonksiyonu ise) kolayca alınır. Ortoganallik özelliği,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\{i\varphi(k-m)\}\, d\varphi = \delta_{km} \tag{V.17}$$

bağıntısı ile verilir. Açısal değişkenler üzerinden integrasyonlar düzenlenerek yayıcı,

$$K(r'',\varphi''|r',\varphi') = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l K_l(r'',r';T)\exp\{il(\varphi''-\varphi')\} \tag{V.18}$$

olarak yazılabilir. Burada K_l radyal yayıcı olmak üzere,

$$K_l = \lim_{N\to\infty} (2\pi)^{N-1} B_N \int \prod_{j=1}^{N} R_l(r_j,r_{j-1}) \prod_{j=1}^{N-1} r_j\, dr_j \tag{V.19}$$

R_l ise ,

$$R_l = \exp\left[\frac{im}{2\hbar\epsilon}(r_j^2+r_{j-1}^2) - \frac{i\epsilon}{\hbar}V(r_j)\right] I_l\left[\frac{m r_j r_{j-1}}{i\hbar\epsilon}\right] \tag{V.20}$$

bağıntısı ile verilir. Dikkat edilirse problemin boyutu değişmiştir, Normalizasyon sabiti de değişmek zorundadır. O halde,

$$B_N = \left[\frac{m}{2i\pi\epsilon\hbar}\right]^N \tag{V.21}$$

olur. Denk. (V.18) yanlızca radyal koordinata bağlı bir potansiyelin iki boyutta yayıcısını belirtir. Denklem (V.11) ve (V.19) da verilen radyal yayıcı ifadeleri kapalı formda aşağıda olduğu gibi yazılabilir.

$$K_\ell(r'',r';T)=(r'r'')^{1-d/2}\left[\frac{m}{i\hbar\epsilon}\right]^N\int\int\prod_{j=1}^{N-1}r_j\,dr_j$$

$$\prod_{j=1}^{N}\exp\left[\frac{im}{2\hbar\epsilon}(r_j^2+r_{j-1}^2)-\frac{i\epsilon V}{\hbar}\right]I_{\nu(\ell)}\left[\frac{m r_j r_{j-1}}{i\hbar\epsilon}\right] \qquad (V.22)$$

Burada d sembolü ile problemin boyutu ifade edilir. Bundanbaşka $\nu(\ell)$, d=3 ve ℓ=2 durumunda ℓ+1/2 ve ℓ değerlerini alır. Denklem (V.22) deki yol integral bir boyutta karakterize edilmiş, dönüşmüş eylemli hareketli parçacığın yayıcısı olarak da yorumlanır. Bunu daha açık olarak görmek için $I_\nu(z)$ Bessel fonksiyonunun(45) asimtotik açılımını kullanırız. Bu açılım,

$$I_\nu(u/\epsilon)=\left[\epsilon/2\pi u\right]^{1/2}\exp\left[\frac{u}{\epsilon}-\frac{1}{2}\left\{\nu^2-\frac{1}{4}\right\}\epsilon/u+O(\epsilon^2)\right]$$

şeklindedir ve (V.22) de radyal yayıcı yeniden,

$$K_\ell(r'',r';T)=(r'r'')^{1/2-\frac{d}{2}}\left[\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right]^{N/2}\int\int\prod_{j=1}^{N-1}r_j\,dr_j$$

$$\prod_{j=1}^{N}\exp\left[\frac{im}{2\hbar\epsilon}(r_j-r_{j-1})^2-\frac{i\epsilon V}{\hbar}-\frac{i\hbar\epsilon(\nu-\frac{1}{4})}{2m r_j r_{j-1}}\right] \qquad (V.23)$$

şeklinde ifade edilir. (V.23) denkleminde $\epsilon\to 0$ 'a götürürsek,

$$K_\ell(r'',r';T)=(r'r'')^{1/2-d/2}\int D[r(t)]\exp\left[(i/\hbar)\int L(r,\dot r,t)\,dt\right] \qquad (V.24)$$

elde edilir. Burada $L(r,\dot r,t)$, ortalama radyal lagranjiyen ve

$$L(r,\dot r,t)=\frac{m}{2}\dot r^2-\frac{\hbar^2(\nu^2-\frac{1}{4})}{2mr^2} \qquad (V.25)$$

olarak verilir.

V.3- Düzgün Magnetik Alanda Yüklü Bir Parçacığın Hareketi

Küresel geometride yol integral[4] formulasyonu düzenli bir B magnetik alanında e yüklü ve m kütleli parçacığın yayıcısını belirlemek için etkin bir biçimde kullanılabilir. Parçacığın klasik hareket denklemi,

$$m(\ddot{r}+\Omega^2 r) = e(\dot{r}xB) \qquad (V.26)$$

olarak verilir. B alanı Z- doğrultusunda kabul edilirse sistemin Lagranjiyeni,

$$L= \frac{m\dot{r}^2}{2} +mw(x\dot{y}-y\dot{x})- \frac{m\Omega^2}{2}\, r^2 \qquad (V.27)$$

biçimini alır. Burada $w=eB/2m$ olmak üzere Larmor frekansıdır. Lagranjiyeni,

$$L=L_0(Z,\dot{Z})+L^{\perp}(\dot{x},\dot{y}|\, x,y) \qquad (V.28)$$

şeklinde yazmak uygundur. Burada L_0,

$$L_0= 1/2m(\dot{Z}^2-\Omega^2 Z^2) \qquad (V.29)$$

olarak verilir. $L^{\perp}$, Z eksenine dik bir yüzeyde hareket eden parçacğın Lagranjiyenidir,

$$L^{\perp}=1/2m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+mw(x\dot{y}-y\dot{x})-m\Omega^2(x^2+y^2) \qquad (V.30)$$

ile verilir. Z- doğrultusu boyunca hareket eden parçacık harmonik osilatör sistemini tanımlar. Bu nedenle K yayıcısı iki yayıcının çarpımı gibi,

$$K = K_0(Z'',t'' \mid Z',t')K^{\perp}(x'',y'',t'' \mid x',y',t') \qquad (V.31)$$

olarak ifade edilebilir. Burada K_0,

$$K_0 = \left[\frac{m\Omega}{2\pi i\hbar \sin\Omega T}\right]^{1/2} \exp\left[\frac{im\Omega}{2\hbar \sin\Omega T}\left\{(z''^2 + z'^2)\cos\Omega T - 2z'z''\right\}\right] \qquad (V.32)$$

biçiminde verilen harmonik osilatör yayıcısıdır, $K^{\perp}$, Denklem (V.30) ile verilen birleşik yayıcıdır. Burada yeni $K^{\perp}$ yayıcıyı değerlendirmek önemlidir. Bunun için genel kuadratik Lagranjiyen(41) yol integrali III. kesimde geliştirilmiş yöntemler kullanılarak değerlendirilir. Ayrıca polar koordinatlarda K yı bulmak elverişlidir. Denklem (V.20) de verildiği gibi radyal simetrik potansiyeller için yayıcı geliştirilmiştir. $L^{\perp}$, polar koordinatlarda

$$L^{\perp} = 1/2m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 - \Omega r^2 + 2wr^2\dot{\theta}) \qquad (V.33)$$

olduğu kolayca görülebilir, fakat radyal simetrik değildir. Bunun için $\varphi = \theta + wt$ lineer dönüşümü Denklem (V.33)'e uygulanır ve

$$L(r,\dot{r},\varphi,\dot{\varphi}) = 1/2(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 - (\Omega^2 + w^2)r^2) \qquad (V.34)$$

elde edilir. Bu ise $\Omega' = \left[(\Omega^2 + w^2)\right]^{1/2}$ frekanslı harmonik osilatör Lagranjiyenidir. Bu yüzden daha önceki kesimde türetilen H.O. yayıcı ifadesi kullanılabilir. Buna göre $K^{\perp}$,

$$K^{\perp} = \left[\frac{m\Omega'}{2\pi i\hbar \sin\Omega' T}\right]^{1/2} \exp\left[\frac{im\Omega'}{2\hbar \sin\Omega' T}\left\{(r''^2 + r'^2)\cos\Omega' T - 2r'r''\cos(\theta'' - \theta' + wT)\right\}\right] \qquad (V.35)$$

biçimini alır. Burada $T=t''-t'$. Tam yayıcı $K(x'',t'',t')$, Denklem (V.32) ve Denklem (V.35) in çarpımları alınarak bulunur. Bu yayıcının bir uygulaması olarak, $T \rightarrow -i\hbar\beta$ dönüşümü yapılarak, düzgün bir mağnetik alanda parçacıkların matris yoğunluğu, $\rho(r'',r',\beta)$ biçiminde,

$$\rho(r'',r',\beta)=\left[\frac{m\omega}{2\pi\hbar \operatorname{Sinh}\Omega\beta\hbar}\right]^{1/2}\left[\frac{m\Omega'}{2\pi\hbar \operatorname{Sinh}\Omega'\beta\hbar}\right]\exp\left[\frac{m\Omega}{2\hbar \operatorname{Sinh}\Omega\beta\hbar}\left\{(z''^2+z'^2)\right.\right.$$

$$\left.\left.\operatorname{Cosh}\Omega\beta\hbar-2z'z''\right\}\right]\exp\left[\frac{-m\Omega'}{2\hbar \operatorname{Sinh}\Omega'\beta\hbar}\left\{(r''^2+r'^2)\operatorname{Cos}\Omega'\beta\hbar\right.\right.$$

$$\left.\left.-2r'r\operatorname{Cos}(\theta''-\theta'+i\hbar\omega\beta)\right\}\right] \qquad \text{(V.36)}$$

verilebilir.

VI. YOL-İNTEGRAL YÖNTEMİNDE YENİ-ZAMAN KAVRAMI

Bu kesimde, temelleri ilk defa Duru-Kleinert[22] tarafından ortaya konan daha sonraları N.K. Pak ve İ. Sökmen[46] tarafından genellemesi yapılan Yeni-zaman kavramını aktaracağız.

Feynman'ın yol-integral tekniği[32] kuantum kuramında önemi son derece büyüktür, fakat integrasyonların herzaman gaussian olmaması nedeniyle bu teknikle sınırlı sayıda problem çözülebilmiştir. Duru ve Kleinert kanonik dönüşümler yardımı ile Coulamb problemini Gaussian biçime indirgemişlerdir. Bu dönüşümler yardımı ile değişik problemlere çözüm getirilmiştir.

VI.1- Yol-Integral Yönteminde Noktasal Kanonik Dönüşümler

Faz uzayında, $t_i=0$ anında q noktasından T anındaki q_f noktasına giden parçacık için yayıcı,

$$K(q_f,q_i,T)=\int D_q D_p \exp\left\{ i/\hbar \int_0^T dt \left[p\dot{q}-H(p,q) \right] \right\} \qquad \text{(VI.1)}$$

yazılabilir, burada sonlu boyutlu integralin limiti anlaşılmalıdır.

$$K=\lim_{N\to\infty}\int \prod_{j=1}^{N} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \prod_{j=1}^{N-1} dq_j \, \exp\left\{ \frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N} \left[p_j(q_j-q_{j-1}) - \epsilon H\left(p_j, \frac{q_j+q_{j-1}}{2}\right)\right]\right\} \qquad \text{(VI.2)}$$

$$t_j-t_{j-1}=\epsilon\,, \quad T=N\epsilon\,, \quad q_f=q(t_N)\,, \quad q_i=q(t_0)$$

p_j nin q_j ye kanonik eşlenik olmadığı, bunların $(j-1,j)$ aralığına sınırlandırılması nedeniyle açıktır. Bundan başka, p ve q integrallerinin sayısı uyuşmadığından, direkt kanonik dönüşümlerin nasıl gösterilebileceği açık değildir. Böylece kendimizi PCT ye (Point canonical transformation) kısıtlayacağız.

PCT aşağıdaki gibi tanımlanmıştır,

$$q=f(Q)\,, \quad p=\frac{1}{f'(Q)}P\,, \quad f'=\frac{df}{dQ}\,, \quad K(P,Q)\equiv H(p,q) \qquad \text{(VI.3)}$$

öyle ki,

$$p.\dot{q}-H(p,q) = P\dot{Q}-K(P,Q) \qquad \text{(VI.4)}$$

PCT nin zaman-örgüsündeki açılımında, mid-point açılım metodunu[47] kullanmak doğru olacaktır. Bu açılımda ϵ nin derecesine göre etkin terimler tutulacaktır.

Öngörülerimizin ışığı altında PCT dönüşümünün ölçüsünü hesaplayalım. Önce P_j için PCT yi yazalım.

$$P_j = p_j \frac{\Delta Q_j}{\Delta q_j} \qquad \text{(VI.5)}$$

Şimdi de $q_j = f(Q_j)$ ve $q_{j-1} = f(Q_{j-1})$ alarak $\bar{Q}_j$ yakınında Δq_j yi ΔQ_j cinsinden açalım.

$$\Delta q_j = \Delta Q_j f'(Q_j)\left\{1 + \frac{1}{24}\frac{f'''(\bar{Q}_j)}{f'(Q_j)}(\Delta Q_j)^2\right\} \qquad \text{(VI.6)}$$

Burada $(\Delta Q_j)^2 \sim \epsilon$ dereceli terimler tutulmuştur. Benzer şekilde

$$P_j = p_j\{f'(\bar{Q}_j)\}^{-1}\left\{1 - \frac{1}{24}\frac{f'''(\bar{Q}_j)}{f'(\bar{Q}_j)}(\Delta Q_j)^2\right\} \qquad \text{(VI.7)}$$

yazılabilir. q_j ve p_j nin kanonik eşlenik olmaması nedeniyle, d_{p_j} ve d_{q_j} yi ayrı ayrı değerlendirmeliyiz.

$$\prod_{j=1}^{N-1} dq_j = \prod_{j=1}^{N-1} f'(Q_j)\, dQ_j \qquad \text{VI.8)}$$

(j-1,j) aralığını tanımlayan bu bağıntı simetrik bir görünüşe sahip değildir. Bu ifadeyi Q_j, Q_{j-1} civarında simetrik hale getirmeliyiz; öyle ki, bir orta-nokta (mid-point) civarında açılım yaparken, bu aralığın hiç bir son noktası tercih edilmesin. Bu kolayca aşağıdaki gibi yapılır.

$$\prod_{j=1}^{N-1} dq_j = \{f'(Q_N) f'(Q_0)\}^{-1/2} \prod_{j=1}^{N}\{f'(Q_j) f'(Q_{j-1})\}^{1/2} \prod_{j=1}^{N-1} dQ_j \qquad \text{(VI.9)}$$

$f'(Q_j)$ ve $f'(Q_{j-1})$, $\bar{Q}_j$ yakınında $(\Delta Q^2 \sim \epsilon)$ derecesindeki terimler tutularak açılırsa,

$$\left\{f'(Q_j)f'(Q_{j-1})\right\}^{1/2} = f'(\bar{Q}_j)\left\{1 - \frac{1}{8}\lambda(\bar{Q}_j)(\Delta Q_j)^2\right\}$$

$$\lambda(\bar{Q}_j) = \left(\frac{f''}{f'}\right)^2 - \left(\frac{f'''}{f'}\right) \qquad \text{VI.10)}$$

Böylece,

$$\prod_{j=1}^{N-1} dq_j = \left\{f'(Q_N)f'(Q_0)\right\}^{1/2} \prod_{j=1}^{N} f'(\bar{Q}_j)\left\{1 - \frac{\lambda}{8}(\Delta Q_j)^2\right\} \prod_{j=1}^{N-1} dQ_j \qquad \text{(VI.11)}$$

yazılabilir. $\prod dp_j$ için karşılık gelen dönüşüm Denklen (VI.7) den,

$$\prod_{j=1}^{N} dp_j = \prod_{j=1}^{N} dp_j (f'(\bar{Q}_j))^{-1}\left\{1 - \frac{1}{24}\frac{f'''}{f'}(\Delta Q_j)^2\right\} \qquad \text{(VI.12)}$$

kolayca yazılır. Denklem (VI.11) ve (VI.12) nin birleştirilmesiyle dönüşmüş ölçü,

$$\prod_{j=1}^{N} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \prod_{j=1}^{N-1} dq_j = \left\{f'(Q_N)f'(Q_0)\right\}^{-1/2} \prod_{j=1}^{N} \frac{dp_j}{2\pi\hbar}$$

$$\prod_{j=1}^{N-1} dQ_j \left\{1 - \frac{1}{8}\left(\lambda - \frac{f'''}{3f'}\right)(\Delta Q_j)^2\right\} \qquad \text{(VI.13)}$$

olarak elde edilir.

Şimdi bu eylemin nasıl dönüşeceğini ele alalım. Denklem (VI.6) ve (VI.7) kullanılarak kısa-zaman eylemi,

$$A(j,j-1) = p_j \Delta q_j - \epsilon\left\{\frac{p_j^2}{2m} + V(\bar{q}_j)\right\} \qquad \text{(VI.14)}$$

aşağıdaki biçime indirgenir.

$$A(j,j-1) = p_j \Delta q_j - \epsilon\left\{\frac{p_j}{2mf'^2} + V(f(\bar{Q}_j))\right\} + \frac{p_j^2}{24m}\frac{f'''}{(f')^3}(\Delta Q_j)^2$$

$$\text{(VI.15)}$$

Yeni Q_j, P_j değişkenleri cinsinden yayıcının yol-integral ifadesini bulmamıza rağmen, eylemin $\epsilon P_j^2\,(\Delta Q_j)^2$ gibi bir terim içermesi nedeniyle ve jakobiyeninde $(\Delta Q)^2$ gibi bir terim bulundurması nedeniyle henüz amacımıza ulaşmış değiliz.

Bu terimlerden kurtulmak için aşağıdaki gibi bir yol izleyeceğiz[48]. Burada bir yaklaşım yaparak, eylem içerisindeki ek terimi üstel ifadeden indirerek jakobiyenin içine sokalım. Jakobiyen,

$$J=\left\{f'(Q_N)f'(Q_0)\right\}^{-1/2}\prod_{j=1}^{N}\left\{1-\frac{1}{8}\left(\lambda+\frac{f'''}{f'}\right)(\Delta Q_j)^2 + \frac{i\epsilon}{\hbar}\,\frac{P_j^2}{24m}\,\frac{f'''}{(f')^3}(\Delta Q_j)^2\right\} \qquad \text{(VI.16)}$$

Böylece dönüşmüş büyüklükler cinsinden yayıcı,

$$K(f(Q_f),f(Q_i);T)=\lim_{N\to\infty}\int\prod_{j=1}^{N}\frac{dP_j}{2\pi\hbar}\prod_{j=1}^{N-1}dQ_j\,(J)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N}A(j,j-1)\right\}$$

$$A(j,j-1)=P_j\Delta Q_j-\epsilon\left\{\frac{P_j^2}{2m(f')^2}+V(f(\bar{Q}_j))\right\} \qquad \text{(VI.17)}$$

olarak bulunur.

VI.2- Yeni-Zaman Dönüşümü

Bu kesimde Duru ve Kleinert'i izleyerek orjinal PCT yi zaman üzerine uygulayacağız.

$$\frac{dt}{ds}=\left\{f'(Q(s))\right\}^2, \quad t(s_N)=t_f, \quad t(s_0)=t_i \qquad \text{(VI.18)}$$

Denklem (VI.18) i orta nokta (mid-point) düşüncesine uygun olarak (j-1,j) aralığında hiç bir uç nokta diğerine tercih edilmeyecek biçimde simetrik hale getirelim. Böylece,

$$\epsilon = \sigma f'(Q_j) f'(Q_{j-1}) \quad , \quad \epsilon = t_j - t_{j-1} \quad , \quad \sigma = S_j - S_{j-1} \qquad \text{(VI.19)}$$

yazılır. $f'(Q_j)$ ve $f'(Q_{j-1})$'i $\bar{Q}_j$ civarında seriye açarsak ayrık biçimde,

$$\epsilon = \sigma f'(\bar{Q}_j) \left\{ 1 - \frac{\lambda}{4} (\Delta Q_j) \right\} \qquad \text{(VI.20)}$$

yazılabilir.

$S = S_N - S_0$ niceliği yola bağımlı bir niceliktir. Bu bağımlılığı aşağıdaki gibi bir yardımcı koşulla gösterebiliriz.

$$t_N - t_0 = \int_{S_0}^{S_N} ds \left\{ f'(Q(s)) \right\}^2 \qquad \text{(VI.21)}$$

Bunu aşağıdaki integral yardımıyla yol-integral içine aktarabiliriz.

$$f'(Q_N) f'(Q_0) \int_0^{\infty} dS \, \delta\left(T - \int_0^{T} ds \, f'(Q(s))\right) = 1 \qquad \text{(VI.22)}$$

sonuç olarak,

$$K(f(Q_f), f(Q_i); T) = \lim \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} ET} \left\{ f'(Q_N) f'(Q_0) \right\}^{1/2} \int_0^{\infty} dS$$

$$\int \prod_{j=1}^{N} \frac{dP_j}{2\pi\hbar} \prod_{j=1}^{N-1} dQ_j \left(\prod_{j=1}^{N} J_j^{\sigma} \right) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^{N} A_j(j, j-1) \right\} \qquad \text{(VI.23)}$$

yazılır, burada A(j,j-1),

$$A_\sigma(j,j-1) = P_j \Delta Q_j - \sigma_j \left\{ \frac{P_j^2}{2m} \left(1 - \frac{\lambda}{4} (\Delta Q_j)^2 + f'(\bar{Q}_j)^2 \left(V(f(\bar{Q}_j)) - E \right) \right\} \qquad \text{(VI.24)}$$

ve yeni etkin jakobiyen J_j^σ (σ ya göre terimler tutulmuştur),

$$J_j^\sigma = 1-\frac{1}{8}\left(\lambda+\frac{f'''}{3f'}\right)(\Delta Q_j)^2+\frac{i\sigma_j}{24\hbar m}\,\frac{f'''}{f'}P_j^2(\Delta Q_j)^2 \qquad (VI.25)$$

olarak verilmiştir. Daha önce yaptığımız gibi eylem içerisindeki $\sigma_j P_j^2\ (\Delta Q_j)^2$ biçimindeki üstel terimi açarak (yine σ ya göre terimler tutuluyor),

$$P_E(Q_f,Q_i;S)=\lim_{N\to\infty}\int\prod^{N}\frac{dP_j}{2\pi\hbar}\prod^{N-1}dQ_j\prod_{j=1}^{N}\left[1-\frac{1}{8}\left(\lambda+\frac{f'''}{3f'}\right)(\Delta Q_j)^2+\frac{i\sigma}{8\hbar m}\left(\lambda+\frac{f'''}{3f'}\right)\right.$$

$$\left.P_j^2(\Delta Q_j)^2\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N}\left[P_j\Delta Q_j-\sigma_j\left(\frac{P_j^2}{2m}+f(\bar{Q}_j)^2\left(V(f(\bar{Q}_j))-E\right)\right)\right]\right\}\right] \qquad (VI.26)$$

bulunur.

Son adımda gösterim basitliği açısından Fourier dönüşmüş yayıcı G,

$$K(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi\hbar}\,e^{-\frac{i}{\hbar}ET}\,G(E) \qquad (VI.27)$$

ve indirgenmiş yayıcı P_E,

$$G(f(Q_f),f(Q_i);E)=\left\{f'(Q_f)f'(Q_i)\right\}^{1/2}\int_0^\infty dS\,P_E(Q_f,Q_i;S) \qquad (VI.28)$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Şimdi, Schulman-Mc Laughlin'in gösterdiği yolla, jakobiyen içerisindeki σ mertebesinden terimleri, ek bir potansiyel terimiymiş gibi eylemin içerisine, üstel bir terim olarak katacağız. Bu amaçla aşağıdaki integraller kullanılarak,

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} dx\,dy\, e^{-ax^2+bxy}\, y^2 = \frac{\pi}{2} a^{-1/2} \left(-\frac{b^2}{4a}\right)^{-3/2}$$

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} dx\,dy\, e^{-ax^2+bxy}\, x^2 y^2 = -\frac{\pi}{2} a^{-3/2} \left(-\frac{b^2}{4a}\right)^{-3/2} \qquad \text{(VI.29)}$$

J_j^{σ} ifadesi için,

$$J_j^{\sigma} = 1 - i \frac{\sigma_j}{\hbar} \Delta V(f(\bar{Q}_j))$$

$$\Delta V = \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{3}{8} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{f'''}{f'} \right) \right\} \qquad \text{(VI.30)}$$

elde edilir. Bu ifade üstel forma getirilirse,

$$P_E(Q_f, Q_i; S) = \lim_{N\to\infty} \int \prod^{N} \frac{dP_j}{2\pi\hbar} \prod^{N-1} dQ_j \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^{N} \left[P_j \Delta Q_j - \sigma_j \left[\frac{P_j^2}{2m} \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + f'(\bar{Q}_j)^2 (V(f(\bar{Q}_j)) - E) + \Delta V(f(\bar{Q}_j)) \right]\right] \right\} \qquad \text{(VI.31)}$$

olur. Bu son ifadeyle amacımıza ulaşmış olduk.

Konfigurasyon uzayına dönüp P-integralini alırsak,

$$P_E(f(Q_f), f(Q_i); S) = N \int DQ \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \int_0^S ds\, \mathcal{L}_{new}(Q, \dot{Q}) \right\} \qquad \text{(VI.32)}$$

olarak Feynman'ın yazdığı orijinal yayıcı elde edilir. Burada yeni Lagranjiyen,

$$\mathcal{L}_{new}(Q, \dot{Q}) = \frac{1}{2} m \dot{Q}^2 - V_{new}(Q)$$

$$V_{new}(Q) = f'(Q)^2 (V(f(Q)) - E) + \Delta V(f(Q)) \qquad \text{(VI.33)}$$

olarak tanımlanmıştır.

VI.3 Coulomb Problemi

Bu problem son zamanlarda, yeni zaman dönüşüm formülasyonu kullanılarak Duru ve Kleinert tarafından çözülmüştür. Daha sonra bu problem Point Kanonik dönüşümler yardımı ile tam çözümü Pak ve Sökmen tarafından verilmiştir(49).

Keyfi küresel simetrik potansiyel yayıcısı aşağıdaki forma sahiptir,

$$K^{(2)}(r_f,r_i;T)=\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\right)\exp\left[i\ell(\phi_f-\phi_i)\right]K_\ell^{(2)}(r_f,r_i;T) \quad \text{(VI.34)}$$

$$K^{(3)}(r_f,r_i;T)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}Y_{\ell m}^{*}(\theta_f,\phi_f)Y_{\ell m}(\theta_i,\phi_i)K_\ell^{(3)}(r_f,r_i;T) \quad \text{(VI.35)}$$

yayıcı iki ve üç boyutta olmak üzere(44) ayrı ayrı verilir. K yayıcısı, bir boyutta genel olarak,

$$K_\nu(r_f,r_i;T)=N\int Dr(t)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt\,L(r,\dot r)\right\} \quad \text{(VI.36)}$$

olarak verilir. Burada Lagranjiyen L,

$$L(r,\dot r)=\frac{1}{2}m\dot r^2-\left[(\nu^2-\frac{1}{4})\hbar^2/2mr^2+V(r)\right]$$

şeklinde verilir. İki ve üç boyutta K_ℓ yayıcıları

$$K_\ell^{(2)}=(r_fr_i)^{-1/2}K_\ell(r_f,r_i;T),\quad K_\ell^{(3)}=(r_fr_i)^{-1}K_{\ell+1/2}(r_f,r_i;T) \quad \text{(VI.37)}$$

biçiminde verilir. Hidrojen atomunun potansiyeli, $V(r)=-e^2/r$ olmak üzere iki ve üç boyuttaki çözümü, Denklem (VI.36) ile bir boyutta genel problemin çözümüne indirgenebilir.

Yeni zaman dönüşümünün yerini tutan point kanonik dönüşüm,

$$q=f(Q)\quad,\quad \frac{dt}{ds}=\left[f'(Q)\right]^2 \quad \text{(VI.38)}$$

ile yol integral,

$$K(f(Q_f),f(Q_i);T)=\int_0^{\infty} dE(2\pi\hbar)^{-1}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}ET\right]\left[f'(Q_f)f'(Q_i)\right]^{1/2}$$

$$\int_0^{\infty} dS \int DQ(s)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int^{S} ds\left[\frac{1}{2}m\dot{Q}^2 - V_{new}(Q)\right]\right\} \qquad \text{(VI.39)}$$

biçimine dönüştürülür. Burada V_{new} potansiyel,

$$V_{new}(Q) = \left[f'(Q)\right]^2\left[V(f(Q))-E\right] + \Delta V(f(Q))$$
$$\Delta V(f(Q)) = (\hbar^2/m)\left[\frac{3}{8}(f''/f')^2 - \frac{1}{4}(f'''/f')\right] \qquad \text{(VI.40)}$$

olarak verilir.

Şimdi Denklem (VI.36) ile verilen probleme PCT yi uygulayalım. $F_2(r,Pu)= r^{1/2}Pu$ üretici fonksiyondan,

$$r= u^2 \ , \quad p= (1/u)Pu \ , \qquad \text{(VI.41)}$$

bulunabilir. Yeni-zaman dönüşümü,

$$\frac{dt}{ds} = 4u^2 \qquad \text{(VI.42)}$$

şeklindedir. Buna göre yeni potansiyel,

$$V_{new}(u) = \left[(2\gamma)^2 - \frac{1}{4}\right]\hbar^2/2mu^2 - 4Eu^2 - 4e^2 \qquad \text{(VI.43)}$$

Bu problemin çözümünü, P_E^{γ} nin terimleri şeklinde yayıcıyı,

$$g^{\gamma}(f(u_f),f(u_i);t)=\left[f'(u_f)f'(u_i)\right]^{1/2}\int_0^{\infty} ds\, P_E^{\gamma}(u_f,u_i;s) \qquad \text{(VI.44)}$$

olarak ifade edilebilir. g^{γ} , Fourier dönüşmüş yayıcıdır, P_E^{γ} ise,

$$P_E^{\gamma}(u_f,u_i;S)=\exp(4ie^2S/\hbar)N\int Du(s)\exp\frac{i}{\hbar}\int_0^S ds\Big\{\frac{1}{2}m\dot{u}^2$$

$$-\left[(2\gamma)^2-\frac{1}{4}\right]\hbar^2/2mu^2+4Eu^2\Big\} \qquad \text{(VI.45)}$$

olarak ifade edilir.

$$k(T)=\int_{-\infty}^{+\infty} dE\,(2\pi\hbar)^{-1}\exp\left[-(i/\hbar)ET\right]g(E) \qquad \text{(VI.46)}$$

olarak dönüşüm yapılabilir. Bu problemin çözümü verilmiştir[50,51]. $1/2mw^2=-4E$ alınarak,

$$P_E^{\gamma}(u_f,u_i;S)=\exp(4ie^2S/\hbar)\left[mw(u_fu_i)^{1/2}/i\hbar\,\mathrm{Sin}wS\right]I_{2\gamma}$$

$$(mwu_fu_i/i\hbar\,\mathrm{Sin}wS)\exp\left[i(mw/2\hbar)(u_f^2+u_i^2)\mathrm{Cotg}wS \qquad \text{(VI.47)}$$

elde edilir. Burada $I_{2\gamma}$ dönüşmüş Bessel fonksiyonudur. Bu ifade (VI.44) de yerine konularak,

$$g^{\gamma}(f(u_f),f(u_i);E)=2mw(u_fu_i)\int_0^S dS\exp(4ie^2S/\hbar)(i\hbar\,\mathrm{Sin}wS)^{-1}$$

$$(mwu_fu_i/i\hbar\,\mathrm{Sin}wS)\exp\left[i(mw/2\hbar)(u_f^2+u_i^2)\mathrm{Cot}wS\right] \qquad \text{(VI.48)}$$

olarak bulunur.

İkinci adım olarak bu integral düzenlenir. Bunu yapmak için $wS=iq$ değişken değişimi yapılır ve aşağdaki ifadeler kullanılır;

$$\rho=2e^2/\hbar w,\quad \alpha=(imw/\hbar)u_fu_i,\quad \beta=(mw/2\hbar)(u_f^2+u_i^2) \qquad \text{(VI.49)}$$

Denklem (VI.39) integral formulü kullanılarak integral düzenlenebilir. Bu durumda,

$$\int_0^\infty dq\, e^{2pq}\,\mathrm{Cosech}(q)\, J_{2\nu}(\alpha\, \mathrm{Cosech} q)\, \exp(-\beta\, \mathrm{Coth} q)$$

$$=\alpha^{-1}\left[\Gamma(\tfrac{1}{2}-p+\gamma)/\Gamma(2\gamma+1)\right] M_{-p,\gamma}\left((\alpha^2+\beta^2)^{1/2}-\beta\right) W_{p,\gamma}\left((\alpha^2+\beta^2)^{1/2}+\beta\right) \qquad \text{(VI.50)}$$

elde edilir. Burada M ve W , Whittaker fonksiyonlarıdır. Bu durumda g^γ ,

$$g^\gamma(r_f,r_i;E)=(2/\omega)(-1)^{\gamma+1}\left[\Gamma(\tfrac{1}{2}-p+\gamma)/\Gamma(2\gamma+1)\right] M_{-p,\gamma}\left(-(\tfrac{m\omega}{\hbar})r_i\right) W_{p,\gamma}\left((\tfrac{m\omega}{\hbar})r_f\right) \qquad \text{(VI.51)}$$

biçimini alır.

Şimdi genel olarak bir boyutta problemi çözmüş olduk. Bu çözüm ile iki ve üç boyutta hidrojen atomunun genliğini elde edebiliriz. $\gamma=\ell$ konularak,

$$G^{(2)}(r_f,r_i;E)=\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \exp\left[i\ell(\phi_f-\phi_i)\right]\left[(-1)^{\gamma+1}/\pi\omega(r_f r_i)^{1/2}\right]$$

$$\left[\Gamma(\tfrac{1}{2}-p+\ell)/\Gamma(2\ell+1)\right] M_{-p,\ell}\left(-(\tfrac{m\omega}{\hbar})r_i\right) W_{p,\ell}\left((\tfrac{m\omega}{\hbar})\cdot r_f\right) \qquad \text{(VI.52)}$$

elde edilir. Burada, $\Gamma(1/2-p+l)$ ifadesinden enerji özdeğerler elde edilebilir.

$$1/2-p+l = -n' \ , \quad n'=0,1,2,3,\ldots \qquad \text{(VI.53)}$$

Enerji seviyeleri,

$$E_p = -me^4/2h^2p^2 \ , \quad p= n+1/2 \ , \ n=n'+l=0,1,2,3,\ldots \qquad \text{(VI.54)}$$

olarak elde edilir.

Denklem (VI.51) de $\gamma=\ell+1/2$ konularak üç boyutta hidrojen atomunun yayıcısı elde edilebilir.

$$G^{(3)}(r_j,r_i;E)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^{*}_{\ell m}(\theta_f,\phi_f)\, Y_{\ell m}(\theta_i,\phi_i)\left[2(-1)^{\gamma+3/2}/\omega r_f r_i\right]$$

$$\left[\Gamma(\ell-p+1)/\Gamma(2\ell+2)\cdot M_{-p,\ell+1/2}\left(-\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)r_i\right)W_{p,\ell+\frac{1}{2}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)r_f\right) \qquad \text{(VI.55)}$$

Burada $\Gamma(\ell-p+1)$ den enerji özdeğerleri bulunabilir.

$$\ell-p+1 = -n_r\ , \quad n_r= 0,1,2,3,\ldots \qquad \text{(VI.56)}$$

Enerji değerleri de,

$$E_p= -me^4/2\hbar^2p^2\ , \quad p= n_r+\ell+1= 1,2,3,\ldots \qquad \text{(VI.57)}$$

elde edilir.

VII. BAĞLI (CONSTRAİNED) YOL-İNTEGRALLERİ

Bu kesimde, konfigürasyon uzayının sınırlı bir kısmında bağlı hareket eden sistemleri inceleyeceğiz. Böylesi sistemlerin yayıcısı genel kuralı olarak, uygun yayıcı, sistemle ilgili diğer bir bağsız sisteme bağlanarak bulunabilmesidir. Bu PCT kullanılarak inşa edilebilir. Bağsız sistemlerin yayıcısı ilk defa PCT yöntemi kullanılarak değerlendirilmiştir. Bağlı ve bağsız sistemler arasındaki ilişki, bağlı problemin yayıcısını elde etmek için kullanılır. Örnek olarak yüzey üzerinde hareket eden parçacık örneğini verelim. Parçacık, polar koordinatlarda (r,θ) uygun biçimde tanımlanabilir. Yayıcı için

$t=T$ zamanında r de son bulan ve $t=0$ da r_0 dan başlayarak yollar üzerindeki toplamı elde etmemiz gerekir. Orijindeki singularityden dolayı uzay çoklu birleşik uzay haline gelir. r_0 dan r ye yolun genişletilmesinde bu özellik sağlanmaz. Bu durumda yanlızca singular nokta etrafı çevrilebilir. Singular noktanın etrafının m kez çevrilmesi ile elde edilen yol, onu n kez çeviren yoldan homotopolojik olarak farklıdır. Bu şekilde yolların farklı homotopy sınıfları singularity etrafında dönme sayısı olarak sınıflandırılır. n dönme sayısı $n=0,\pm 1,\pm 2, \ldots$ değerleri alır ve pozitif n, saat yönünün tersi ile, negatif değerler n+1, saat yönünü ifade eder.

$\cos^{-1}(r', r'') = \Theta$, $(0<\theta<2\pi)$ aralığında,

$$\int_0^T dt\,\dot{\theta} = \Theta + 2\pi n \qquad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots) \qquad \text{(VII.1)}$$

olarak yazılabilir. Yayıcıyı bulmak için homotopy sınıfı verilen tüm yollara ait toplamı elde etmek gerekir. Bunun için yayıcıda,

$$\int_0^T dt\,\dot{\theta} = \phi \qquad \text{(VII.2)}$$

sınırını kullanarak inşa etmek gereklidir. Yayıcıda bu sonuç,

$$K_\phi = \int \left(\delta\left(\phi - \int_0^T dt\,\dot{\theta}\right) \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_0^T L\,dt\right] D[r(t)]\right.$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int d\lambda \exp(i\lambda\phi) K_\lambda(r,T|r_0,0) \qquad \text{(VII.3)}$$

elde edilir. Burada ikinci adımda delta fonksiyonunun integral gösterimi kullanılır. K_λ (r,T | r_0, 0) yayıcısı

$$K_\lambda(r,T|r_0,0)=\int \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt(L-\lambda\hbar\dot{\theta})\right] D[r(t)] \quad \text{(VII.4)}$$

biçimindedir. Orijinal serbest parçacık Lagranjiyeni açısal hıza bağlı potansiyeli içeren ortalama Lagranjiyende yerine konularak,

$$\tilde{L}=L-\lambda\hbar\dot{\theta} \quad \text{(VII.5)}$$

elde edilebilir. Tam yayıcı, tüm homotopy sınıfları üzerinden toplamlarla ifade edilir,

$$K(r,T|r_0,0)=\int_{-\infty}^{+\infty} K_\phi \, d\phi \quad \text{(VII.6)}$$

biçimindedir. Yayıcı, polar koordinatlar kullanılarak da bulunabilir.

VII.1- K_ϕ Yayıcısının Değerlendirilmesi

Polar koordinatlarda yayıcının değerlendirilmesi V. kesimde açık olarak tartışılmıştır. Lagranjiyen de $\lambda\hbar\dot{\theta}$ terimi fazladan verildiğinde gerekli olan düzenleme yapılmalıdır. Kesim V de verildiği gibi K_λ ,

$$K_\lambda(r,T|r_0,0)=\lim_{N\to 0} A_N\int \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{j=1}^{N} S(r_j,r_{j-1})\right]\prod_{j=1}^{N-1} dr_j \quad \text{(VII.7)}$$

ifade edilebilir. Bununla birlikte, sonsuzküçük

$t_j - t_{j-1} = \epsilon$ aralığında eylem,

$$S(r_j, r_{j-1}) = \frac{\mu}{2\epsilon}(r_j^2 + r_{j-1}^2) - \frac{\mu}{\epsilon} r_j r_{j-1} \mathrm{Cos}(\theta_j - \theta_{j-1}) - \epsilon V(r_j) - \lambda \hbar (\theta_j - \theta_{j-1}) \tag{VII.8}$$

biçimini alır. Sonlu T zaman aralığı için yayıcı, ϵ un birinci mertebeden terimleri tutularak belirlenir. Aynı şekilde $\Delta\theta$ nın dördüncü mertebe üzerindeki terimler de tutulmalıdır. Buna göre,

$$\mathrm{Cos}(\Delta\theta) - a\epsilon\Delta\theta \cong \mathrm{Cos}(\Delta\theta - a\epsilon) + \frac{1}{2}a^2\epsilon^2$$

dolayısıyle açılım formülü,

$$\exp\left[\frac{u}{\epsilon}\mathrm{Cos}\theta\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(im\theta) I_m(u/\epsilon)$$

kullanılabilir. ϵ un küçük değerleri için dönüştürülmüş Bessel fonksiyonlarının asimtotik formuna gerek duyulur,

$$I_m(u/\epsilon) = (\epsilon/2\pi u)^{1/2} \exp\left[(u/\epsilon) - (m^2 - \tfrac{1}{4})\epsilon/2u + O(\epsilon^2)\right]$$

$u = -i\mu r_j r_{j-1}/\hbar$, $\Delta\theta = \theta_j - \theta_{j-1}$ ve $a = -i\lambda/u$ kullanılarak,

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar} S(r_j, r_{j-1})\right] = \sum_{m_j=-\infty} \exp\left[i m_j (\theta_j - \theta_{j-1})\right] I_{m_j+\lambda}\left[\frac{\mu r_j r_{j-1}}{i\hbar\epsilon}\right]$$

$$\cdot \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left\{\frac{\mu}{2\epsilon}(r_j^2 + r_{j-1}^2) - \epsilon V(r_j)\right\}\right] \tag{VII.9}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak bu ifade Denklem (VII.7) de yerine konularak açısal integrasyon alınır ve yayıcı

$$K_\lambda(r, \theta, T | r_0, \theta_0, 0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left[im(\theta - \theta_0)\right] R_{m+\lambda}(r, r_0, T) \tag{VII.10}$$

elde edilir. Burada $R_{\mu+\lambda}$,

$$R_{\mu+\lambda}=\lim_{N\to\infty}(2\pi)^{N-1}A_N\int\!\!\int\prod_{j=1}^{N}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left\{\frac{\mu}{2\epsilon}(r_j^2+r_{j-1}^2)-\epsilon V(r_j)\right\}\right]$$

$$I_{\mu_j+\lambda}\left[\frac{\mu r_j r_{j-1}}{i\hbar\epsilon}\right]\prod_{j=1}^{N-1}r_j\,dr_j \qquad \text{(VII.11)}$$

ile verilir. Bağlı K_ϕ yayıcısı

$$K_\phi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp[im(\theta-\theta_0)+i\lambda\phi]\,R_{\mu+\lambda}(r,r_0,T)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp[im(\theta-\theta_0-\phi)+i\lambda\phi]\,R_\lambda(r,r_0,T) \qquad \text{(VII.12)}$$

biçimini alır. Burada ikinci adım olarak $\lambda\to\lambda+m$ değişimi yapılır, aşağıdaki özdeşlik kullanılarak,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp(im\theta)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\theta+2\pi n) \qquad \text{(VII.13)}$$

yayıcı,

$$K_\phi=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\theta-\theta_0-\phi+2\pi n)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(i\lambda\phi)\,R_\lambda(r,r_0,T)\,d\lambda \qquad \text{(VII.14)}$$

elde edilir. Burada delta fonksiyonu, n dönme sayısı olmak üzere homotopi yollardan ayırmada etkindir. O halde tam yayıcı

$$K(r,T|r_0,0)=\int_{-\infty}^{+\infty}K_\phi\,d\phi=\sum_{n=-\infty}^{\infty}K_n(r,T,r_0) \qquad \text{(VII.15)}$$

biçimindedir, burada K_n,

$$K_n(r,T|r_0,0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[i\lambda(\theta-\theta_0+2\pi n)]\,R_\lambda(r,r_0,T)\,d\lambda \qquad \text{(VII.16)}$$

Böylece yayıcının, n dönme sayısı ile karakterize edilen farklı homotopy sınıflarına ait yayıcılarının toplamı olduğu görülebilir. Bu sonuç Inomata ve Singh[51] tarafından elde edilmiştir. Bu yol-integral formülasyonu uzun polimer zincirinin istatiksel özelliklerinin belirlenmesinde Edwards[52] tarafından kullanılmış ve geliştirilmiştir.

VII.2- Dönel Cisim Problemi

Dönel cisim (Rigid Rotator) sabit yarıçaplı bir küre üzerinde bağlı hareket eden serbest bir parçacıkdır. Böylesi durumda yayıcıyı bulmak için polar koordinatlarda yol integrali kullanarak elde edilebilir. Denklem (V.12) ile verilen radial dalga yayıcı ifadesinden başlayarak ve onun asimtotik açılımı Bessel fonksiyonunda yerine konularak Radial yayıcının N. yaklaşımı,

$$K_\ell^{(N)} = (4\pi)\prod_{j=1}^{N}(r_j r_{j-1})^{-1}\left[\frac{1}{2\pi i\hbar\epsilon}\right]^{N/2}\int\prod_{j=1}^{N}\left[\exp\left\{\frac{im}{2m\hbar}(r_j-r_{j-1})^2 - \frac{i\hbar\epsilon\ell(\ell+1)}{2mr_j r_{j-1}} - \frac{i\epsilon V(r_j)}{\hbar}\right\}\right]\prod_{j=1}^{N-1} r_j^2 dr_j \qquad \text{(VII.17)}$$

olarak verilir[3]. Şimdi parçacığın hareketini sınırlı ve a yarıçaplı bir küreyi ele alalım. Bu durumda şekilsel yer değişimi açık olarak alınabilir. Denklem (VII.17) de $r''=r'=a$ alınarak,

$$\sqrt{m/2\pi i\hbar\epsilon}\,\exp(-i\epsilon V/\hbar)\longrightarrow \delta(r_j-a) \qquad \text{(VII.18)}$$

olarak ifade edilir. r_j üzerinden integral alınarak,

$$K_\ell = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \frac{1}{a^2} \exp\left[-\frac{i\hbar\epsilon N\ell(\ell+1)}{2ma^2}\right] = \frac{1}{a^2}\exp\left[-\frac{i\hbar T\ell(\ell+1)}{2ma^2}\right] \qquad \text{(VII.19)}$$

elde edilir. Böylece tam yayıcı[53] ,

$$K(\theta'',\varphi''|\theta',\varphi') = \frac{1}{a^2}\sum_{\ell=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{i\hbar T}{2ma^2}\ell(\ell+1)\right] Y^*_{\ell m}(\theta'',\varphi'') Y_{\ell m}(\theta',\varphi') \qquad \text{(VII.20)}$$

olarak bulunur. Denklem (VII.18) de olduğu gibi birleşimin yerine sınırlamaya bir alternatif olarak, iki boyutta küre yüzeyinde hareket eden bir parçacık problemi olarak formüle edilebilir. Ayrıca çok köşeli yollar şekli kullanılabilir. Bu yolla Denklem (VII.19) ifadesi elde edilebilir. Radial dalga yayıcısı için benzer adımlar izlendikten sonra üç boyutlu yayıcı,

$$K_\ell = \prod_{j=1}^{N} (r_j r_{j-1})^{-1/2} \left[\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right]^{N/2} \int\!\!\int \prod_{j=1}^{N-1} r_j\, dr_j$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{N} \exp\left\{\frac{im}{2\hbar\epsilon}(r_j - r_{j-1})^2 - \frac{i\hbar\epsilon(\ell^2 - 1/4)}{2m r_j r_{j-1}} - \frac{i\epsilon V(r_j)}{\hbar}\right\} \exp\left\{i\ell(\theta'' - \theta')\right\} \qquad \text{(VII.21)}$$

olarak yazılabilir. a yarıçaplı bir daire boyunca hareket eden bir parçacığın $\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}}\exp\left[-\frac{i\epsilon V(r_j)}{\hbar}\right]$ ifadesi için çözümün ne olması gerektiği sorusu vardır. Eğer problem bir boyutlu olarak formüle edilirse, simetri özelliğinden çok köşeli yollar şekli uygulanabilir, ve doğru yerdeğiştirme[51],

$$\left[\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right]^{1/2} \exp\left[-\frac{i\epsilon V}{\hbar}\right] \longrightarrow \delta(r_j - a)\exp\left[-\frac{i\hbar\epsilon}{8ma^2}\right] \qquad \text{(VII.22)}$$

olarak verilir. Denklem (VII.21) de bu formal (şekilsel) sınırlama birleştirilir. Radyal koordinat üzerinden integrasyonlar düzenlenir ve ($N \to \infty$ için limit alınarak)

$$K_\ell = \frac{1}{a} \exp\left[-\frac{i\hbar T \ell^2}{8ma^2} \right] \tag{VII.23}$$

elde edilir. Böylece problem için tam yayıcı,

$$K = \frac{1}{a} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{i\hbar T \ell^2}{2ma^2} \right] \exp\left[i\ell(\theta'' - \theta') \right] \tag{VII.24}$$

biçiminde verilir. Potansiyel terimi bir δ-fonksiyonu ile değiştirilerek radial dalga yayıcısı,

$$K_\ell = \frac{1}{a} \exp\left[-\frac{i\hbar T}{2ma^2} (\ell^2 - 1/4) \right] \tag{VII.25}$$

biçiminde elde edilir. Denklem (VII.25) ile Denklem (I.14) Feynman-Kac formülü ile karşılaştırılırsa, iki boyutlu Dönel Cisim'in özdeğerleri $\lambda = (\ell^2 - 1/4)\hbar / 2ma^2$ biçiminde elde edilebilir.

VII.3- Dönel Cisim İle İlgili Sistemler

Bu kısımda, birkaç yeni potansiyelin yayıcısını bulmak için genel koordinat dönüşüm yöntemini kullanacağız. Üç cisim problemini çözerken $1/r^2 \mathrm{Sin}^2\theta$ tipindeki potansiyeller polar koordinatlarda kolay bir şekilde çözülebilir. Ayrıca radial koordinat sabit bir değerle sınırlı ise bu sınırlama, Denklem (VII.21) de uygun δ-fonksiyonu ile verilen potansiyelde radial kısım yerleştirilerek sağlanabilir. Bu üç potansiyelin çözümlenmesini mümkün kılar. Bu potansiyeller, Scarf[54], Pöshl-Teller[55] ve Rosen-Morse[56] potansiyelleridir. Bu potansiyeller aşağıdaki biçimde verilir;

Scarf Potansiyeli:

$$V_s = V_0/\mathrm{Sin}^2 ax \;, \quad V_0 = \epsilon_0 (s^2 - 1/4) \;, \; \epsilon_0 = \frac{\hbar^2 a^2}{2m} \qquad \text{(VII.26)}$$

Pöshle-Teller Potansiyeli:

$$V_{PT} = V_0 \tan^2 ax \;, \; V_0 = \epsilon_0 \lambda (\lambda - 1) \qquad \text{(VII.27)}$$

Morse-Rosen Potansiyeli:

$$V_{RM} = V_0 \tanh^2 ax \;, \quad V_0 = \epsilon_0 \ell (\ell + 1) \qquad \text{(VII.28)}$$

Bu potansiyellerin birleşik yayıcısı ilk kez Pak ve Sökmen[49] tarafından verilmiştir. Problemler uygun dönüşümler altında incelenmiş ve bu problemler $V_{(\theta)}$ potansiyelini içeren yardımcı problemlere indirgenmiştir.

$V(\theta)$ potansiyeli,

$$V(\theta) = (\hbar^2/2m)\,(\mu^2 - 1/4)\;/\;\mathrm{Sin}^2\theta \qquad \text{(VII.29)}$$

olarak verilir. Burada μ , potansiyelin türüne bağlı bir sabittir. Koordinat dönüşümleriyle, Denklem (VII.29) ile verilen potansiyeli içeren bir probleme indirgenmiştir. Buna göre,

Scharf Potansiyeli:

$$x = a^{-1}\theta \qquad \text{(VII.30a)}$$

Pöschl- Teller Potansiyeli:

$$x = a^{-1}\theta - (\pi/2a) \qquad \text{(VII.30b)}$$

Morse-Rosen Potansiyeli :

$$x = a^{-1}\tanh^{-1}(\mathrm{Cos}\,\theta) \qquad \text{(VII.30c)}$$

biçiminde elde edilmiştir. Genel koordinat dönüşümünü kullanarak (VII.26-28) denklemleri ile verilen potansiyellerin Green fonksiyonu bulunabilir. Açık olarak fonksiyonlar,

$$G_S = a^{-1}\int dS \exp\left[\frac{i\hbar ES}{2mE_0}\right] K_S(\theta'',\theta',S) \qquad \text{(VII.31a)}$$

$$G_{PT} = a^{-1}\int dS \exp\left[\frac{i\hbar}{2m}\left\{\lambda(\lambda+1)+\frac{E}{E_0}\right\}S\right] K_{PT}(\theta'',\theta';S) \qquad \text{(VII.31b)}$$

$$G_{RM} = \frac{a^{-1}}{\sqrt{\mathrm{Sin}\,\theta''\,\mathrm{Sin}\,\theta'}}\int dS \exp\left[\frac{i\hbar}{2m}\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\right] K_{RM}(\theta'',\theta';S) \qquad \text{(VII.31c)}$$

verilir. Burada K_S, K_{PT} ve K_{RM}, Denklem (VII.29) ile verilen potansiyeli içeren birleşik yayıcılardır. Bu yayıcı,

$$K = D[\theta(s)]\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int^{S} dS\left\{\frac{m\dot{\theta}^2}{2} - \bar{V}(\theta)\right\}\right] \qquad \text{(VII.32)}$$

biçiminde verilir. Burada $\bar{V}(\theta)$, (VII.29) denklemi ile verilmiştir. Üç potansiyelin μ sabit değerleri,

$$\mu_S^2 = S^2\,, \quad \mu_{PT}^2 = \left[\lambda - 1/2\right]^2, \quad \mu_{RM} = l(l+1) - E/E_0 \qquad \text{(VII.33)}$$

olarak verilir.

Şimdi (VII.32) ile verilen yayıcının bulunmasını inceleyelim. $\bar{V}$, potansiyeli $0<\theta<\pi$ aralığı içinde parçacığın hareketini sınırlar. Bu problemi çözmek için ayrıca polar koordinatlarda $\bar{V}$ potansiyelini kapsayan iki boyutlu yardımcı bir problem gözönüne almak gerekir. Lagranjiyen,

$$\tilde{L}= \dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2-\bar{V}(\theta) \tag{VII.34}$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca radial koordinat sabit bir değerle (r=1 için) sınırlanan Lagranjiyen (VII.34) dolayısıyle (VII.32) ile verilen yayıcıya da yansır. Böylece (VII.34) ifadesini içeren problem çözülebilir ve (VII.26-28) ile tanımlanan potansiyellerin Green fonksiyonları elde edilebilir. Lagranjiyen (VII.34) ile tanımlanan problem üç cisim problemine uygulanabilir. Yayıcının türetilmesi üç cisim problemine benzer olarak elde edilebilir.

Radyal yayıcı,

$$K=\left[\frac{1}{i\hbar\epsilon}\right]^N\int\!\!\int\prod_{j=1}^{N-1}r_j dr_j \exp\left[\frac{i}{2\epsilon}\left\{(r_j^2+r_{j-1}^2)-\Omega^2\epsilon^2 r_j^2\right]I_{l+a+\frac{1}{2}}\left[\frac{r_j r_{j-1}}{i\hbar\epsilon}\right]$$

ifadesinden ve $\Omega=0$ ve $a=\mu$ alarak,

$$K=\sum_{n=0}^{\infty}K_N(r'',r',T)N_n^2(\sin\theta''\sin\theta')^{\mu+\frac{1}{2}}C_n^{\mu+1/2}(\cos\theta'')C_n^{\mu+1/2}(\cos\theta') \tag{VII.35}$$

elde edilir. Burada K_n,

$$K_n=\left[\frac{Q}{i\sin\Omega T}\right]\exp\left[\frac{i\Omega}{\hbar^2}\left\{(r'^2+r''^2)\cot\Omega T\right]I_{l+a+1/2}\left[\frac{\Omega r'r''}{i\hbar\sin\Omega T}\right]$$

elde edilir. K_n ifadesinin kapalı formunu elde etmek için radyal koordinat üzerinden integral alınarak düzenlenir. Radial yayıcı ifadesi sadece iki boyutlu dönel cisimin yerini tutar. Bu yüzden K_n bağıntısı,

$$K_n = \exp\left[(-i\hbar T/2m)\{n+\mu+1/2\}^2\right] \qquad \text{(VII.36)}$$

olarak verilir. Tam yayıcı, (VII.35) ifadesi (VII.36) yerine konularak elde edilebilir.

Denklem (VII.29) ile verilen potansiyelin bulunan yayıcısı alınarak, ilgili diğer (VII.26–28) ile verilen potansiyeller (VII.35) ifadesi (VII.31) de yerine konularak değerlendirilebilir. Bu ifade zamana göre integre edilerek ve uygun argümanlı δ-fonksiyonu kullanılarak yayıcılar,

$$G_S = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(E/E_0 - [n+s+\tfrac{1}{2}]^2 \psi_{ns}^*(\theta'')\psi_{ns}(\theta') \qquad \text{(VII.37a)}$$

$$G_{PT} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(E/E_0 + \lambda(\lambda-1) - (n+\lambda)^2)\psi_{nPT}^*(\theta'')\psi_{nPT}(\theta') \qquad \text{(VII.37b)}$$

$$G_{RM} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta([\ell+\tfrac{1}{2}] + [n+\mu+1/2]^2)\psi_{nRM}^*(\theta'')\psi_{nRM}(\theta') \qquad \text{(VII.37c)}$$

biçiminde elde edilir. Burada $\psi_n(\theta)$,

$$\psi_n(\theta) = N_n C_n^{\mu}(\cos\theta)(\sin\theta)^{\mu+1/2} \qquad \text{(VII.38)}$$

olarak verilir.

SONUÇ

Bu çalışmada, Kuantum mekaniğin çeşitli problemleri yol integral tekniği ile çözülebilir olduğu gösterilmiştir. Feynman yol integral tekniği ile sınırlı sayıda problem çözülebilmiştir, bunu integrasyonların herzaman gaussian olmaması doğurmuştur. Daha sonra yeni zaman dönüşümü ve noktasal kanonik dönüşümlerle bu tür integraller gaussian biçime dönüştürülmüş ve yol integral tekniği daha kullanışlı hale getirilmiştir. Dolayısıyla yol integral tekniği, kuantum mekaniksel sistemlerin çözümünde rahatlıkla önerilebilir.

KAYNAKLAR

1- R.P. Feynman, Rev. Mod. Phys. 20 (1948) 367.
2- C.DeWitt-Morette, Ann. Phys. 97 (1976) 367.
3- J.M. Gelfand and Y.M. Yaglom, J. Math. Phys. 1(1960)48.
4- D.C. Khandekar, S.V. Lawande; Feynman Path Integrals Some Exact Results and Applications; Phys. Rep. 137 (1986) 115.
5- F.W. Wiegel, Phys. Reporst 16C (1975) 59-113.
6- A.M.Arthurs (ed), Functional Integration and its Applications (Oxford 1962).
7- E.S. Abers and B.W. Lee, Phys. Reports 9C (1974)143.
8- A. Nevue Phys. Reports 23 C (1976) 265.
9- S. Coleman, Uses of Instantons in the Whys of Subnuclear Physics, Erice 1977, ed. A. Zichi.
10- S. W. Hawking and W. Israel (eds). Path-Integral Approach to Quantum Gravity (Cambridge, London 1979).
11- T.W. Narlikar and T. Padmanabhan, Phys. Reports 100 (1983) 151.
12- B.J.B. Corowley, Phys. Reports 57 (1980) 47.
13- W.J. Miller, J.Chem.Phys. 63 (1975) 996.
14- T.Koeling and R.A.Malfiet, Phys. Reports 22C(1975)181.
15- S.Levit and U. Smilansky, Ann. Phys. 103(1975) 198.
16- R.P. Feynman and A.R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals (Mc Graw Hill, New York 1965).
17- L.S. Schulman, Tecniques and Applications of Path Integration (John Wiley, 1981).
18-M.M. Mizrahi, J. Math. Phys. 17 (1976) 556.
19- S.A. Albeverio and R. Hoegh (eds), Mathematical Theory of Feynman Path Integrals, Springer Lecture Notes in Maths 523 (Berlin, Heidelberg, New York 1976).
20- A. Truman, J. Math. Phys. 17 (1976) 1852; 18 (1977) 2308.
21- C. DeWitt-Morette, Com. Math. Phys. 28 (1972) 47.
22- I.H. Duru and H. Kleinert, Phys. Lett. 84B (1979)185.
23- R.H. Cameron, J.Math. and Phys. 39(1960)126.

24- J.B. Keller and D.W. Mc. Laughlin, The A. Math. Month 82 (1975) 457.
25- D.C. Khandekar and S.V. Lawande, J. Math. Phys. 16(1975) 384.
26- Y. Tikochinsky, J. Math. Phys. 20(1979) 406.
27- J.H. Van-Vleck, P. Nat. Acad. of Sciences 14(1928) 178.
28- W. Pauli, Ausgewahlte Kapital Der Feldquantisierung (Lectures notes Zurih, 1952).
29- T.D. Lee, Particle Physics and Introduction to Field Theory, Harwood Academic Pres (1981).
30- E.S. Abers, B. W. Lee, Phys. Rep. C.No 1.(1973)141
31- M.S. Marinov, Phys. Rep., 1(1980)60.
32- I.S. Çürük, Yüksek Lisans Tezi, Cumhuriyet Üniv. Fen-Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü, Sivas 1986.
33- P. Caldirola, Nuova Cimento 18(1941)393.
34- E. Pinney, Proc. Am Maths. Soc. 1(1950) 681.
35- L.F. Landovitz, A.M. Levine and W.M. Schreiber, Phys. Rev. 20 A (1979) 1162.
36- B.K. Chang, J. Phys. 17 A(1984) 2475.
37- C.C. Gerry, J. Math.Phys. (to appear).
38- V.V. Dodnov, E.V. Kurmshev and V.I. Manko, Phys. Lett. 72A(1979) 10.
39- B.K. Chang. Revista Brasileria de Fisica 13 (1983) 360.
40- Jorge Rezende, J. Math. Phys. 25(1984)3264.
41- G.J. Papadopoulos, Phys. Rev. D11(1975)2870.
42- R.P. Feynman, Phys. Rev. 97(1955) 660.
43- V. Bezak, Proc. R. Soc.(London)A315 (1970)339.
44- S.Edward and Gulyaev, Proc.R.Soc. A 279 (1969) 229.
45- G.N.Watson, A. Treatise On The Theory of Bessel Functionals (Cambridge University Press, 1952).
46- N. Pak and I.Sökmen, Phys. Rev. A30(1984)1629.
47- J. Gervais and A. Jevicki, Nucl. Phys. 110B (1976) 53.

48- McLaughlin, L.S.Schulman, J. Matt. Phys.12(1971) 2520.

49- N.Pak and I.Sökmen, Phys. Lett. 100 A(1984)327.

50- S. Edwards and Y. Gylyaev, Proc. R.Soc. A279 (1964) 229.

51- A. Inomata and U.A.Singh, J. Math. Phys. 19 (1978) 2318.

52- S.F. Edwards, Proc. Phys. Soc.(London) 91(1967)513.

53- D.Peak and A. Inomata, J. Maths. Phys. 10(1969)1422.

54- F.Scarf, Phys. Rev. 112(1958) 1137.

55- G. Pöshle and E. Teller, Z.Phys. 83(1933) 1439.

56- N.Rosen and P.M. Morse, Phys. Rev. 42 (1932)210.