T.C.

CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

17186

$(XY)^n = X^nY^n$ KOŞULLU HALKALAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

M.ALİ ÖZTÜRK

SİVAS

ARALIK - 1991

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Kâzım Kaya

Üye : Yrd. Doç. Dr. Arif Dane

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hatice Kandamar

Üye :

Üye :

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

6/12/199

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. İbrahim GÜMÜŞSUYU

Bu çalışmayı yöneten, yardımlarını esirgemeyen değerli hocam, Doç.Dr. Kazım KAYA` ya ve tez yazımında teknik yardımlarını esirgemeyen Salih YÜKSEK` e içten teşekkürlerimi sunarım.

M.A.Ö.

ÖZET

$(XY)^n = X^nY^n$ koşullu halkaların komütatifliği yanısıra $(XY)^n = (YX)^n$ koşullu halkaların komütatifliği hakkında yapılan bazı çalışmaları derlemeyi amaçlayan bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

1.Bölümde; ön bilgiler adı altında, tezin okunması sırasında karşılaşılabilinecek genel bilgiler verilmiştir.

2.Bölümde; $(xy)^n=(yx)^n$ koşulunu sağlayan halkaların komütatifliği ile ilgili bazı çalışmalar, bir sıra içerisinde verilmiştir.

3.Bölümde; $(xy)^n=x^ny^n$ koşulunu sağlayan halkaların komütatifliği ile ilgili bazı çalışmalar bir sıra içerisinde verilmiştir.

4.Bölümde; Merkezi sıfırdan farklı asal halkaların komütatifliliği ilgili bazı genelleştirmeler verilmiştir

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

I.BÖLÜM / ÖN BİLGİLER 1

II.BÖLÜM / $(XY)^n=(YX)^n$ KOŞULLU HALKALARIN KOMÜTATİFLİĞİ

1-Genelleştirilmiş komütatif halkalar.
L.P.Belluce-I.N.Herstein-S.K.Jain(1966) 9

2-Bir komütatiflik teoremi.
W.K. Nichelson-A.Yaqub (1980) 17

3-Gruplar ve halkalar için bir komütatiflik teoremi. W.K. Nichelson-A.Yaqub (1980) 24

4-Kom ü ting kuvvetli n-torsion free halkalar.
H.Abu-Khuzam - A.Yaqub (1980) 30

5-Polinomsal özellikler sağlayan s-unital halkalar için komütatiflik teoremleri.
H.Abu-Khuzam - H.Tominaga - A.Yaqub (1980) 36

6-İnvolving kom ü ting kuvvetli halkalar için bir komütatiflik teoremi.
E.Psomopoulos - H.Tominaga - A.Yaqub(1980) 44

III.BÖLÜM / $(XY)^n = X^nY^n$ KOŞULLU HALKALARIN KOMÜTATİFLİĞİ

1-Halkalarda kuvvet dönüşümleri
I.N. Herstein (1961) 46

2-Primary halkalar için bir komütatiflik teoremi. J. Luh (1971) 47

3-Bazı komütatiflik teoremleri üzerine uyarılar. A.Kaya - C.Koç (1976) 50

4-Halkalar için bir komütatiflik teoremi. S.Ligh - A.Richoux (1977) 54

5-Halkaların komütatifliği üzerine bir not. M.Hongan - I.Mogami (1976) 56

6-Bazı halkaların komütatifliği üzerine. B.Felzenscwalb (1979) 64

7-Luh`un bir komütatif teoremi üzerine. A.Richoux (1979) 79

8-Halkaların komütatifliği üzerine bir not. M.Ashraf - M.A. Kuadri (1986) 83

9-Yarı-asal halkaların komütatifliği ile ilgili iki uyarı. Kazım Kaya (1986) 86

IV.BÖLÜM / MERKEZİ SIFIRDAN FARKLI ASAL HALKALARININ KOMÜTATİFLİĞİ İLE İLGİLİ BAZI SONUÇLAR. 94

KAYNAKLAR

I.BÖLÜM

ÖN BİLGİLER

Bu bölümde,tezin okunması sırasında karşılaşabileceginiz genel bilgiler verilmiştir. Ayrıca aksi belirtilmedikçe bir R halkasının bütün nilpotent elemanlarının kümesi N ile gösterilecektir.

TANIM.1.1. R bir halka olsun.$\forall a \in R$ için $na=0$ olacak biçimde bir $n \in I^+$ varsa, böyle pozitif tamsayıların en küçüğüne R nin karekterisliği denir ve char R=n ile gösterilir. Böyle bir pozitif tamsayı yoksa R nin karekteristigi sıfırdır denir.

TANIM.1.2. R bir halka olsun. $0\neq a \in R$ için $ab=0$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir $b \in R$ varsa a ya sol sıfır bölen, $ca=0$ olaacak biçimde sıfırdan farklı bir $c \in R$ varsa a ya sağ sıfır bölen denir. Eğer $0\neq a \in R$ elemanı hem sol sıfır bölen hem de sağ sıfır bölen ise a ya sıfır bölen eleman denir. Eger sıfırdan farklı bir $a \in R$ elemaanı ne sol ne de sağ sıfır bölen değilse o zaman a ya regüler eleman denir.

TANIM.1.3. R bir halka olsun. Bir $a \in R$ için $a^n=0$ olacak biçimde bir $n \in I^+$ varsa a ya nilpotent eleman denir. Böyle pozitif tamsayıların en küçüğüne a nın nilpotentlik indeksi denir. Her elemanı nilpotent olan halkaya nil halka denir.

TANIM.1.4. Bir R halkasının bir e elemanı için $e^2=e$ ise e ye bir idempotent eleman denir.

TANIM.1.5. Sıfırdan farklı ve birimli bir halkanın, sıfırdan farklı her elemanı tersinir ise o halkaya bir bölüm halkası (division ring) veya skew-field denir.

TANIM.1.6. A bir (sağ) ideal ve bir $n \in I^+$ için $A^n=(0)$ ise A ya bir nilpotent (sağ) ideal denir. A nın her elemanı nilpotent ise A ya (sağ) nil ideal denir.

NOT: Her (sağ) nilpotent ideal bir (sağ) nil idealdir. Fakat karsıtı doğru değildir.

TANIM.1.7. R sıfırdan farklı bir halka olsun. R nin proper ideali yoksa R ye basit halka denir.

TEOREM.1.8. $\phi:R \longrightarrow S$ örten bir homomorfizm ve $Ker\phi=K$ olsun. R nin K yı kapsayan (sağ) ideallerin kümesinden S nin (sağ) ideallerin kümesine $A \longrightarrow A\phi$ biçiminde tanımlanan dönüşüm birebirdir.[1]

TANIM.1.9. $S_1, S_2 \ldots$ ler halka ve $S=S_1 \oplus S_2 \oplus \ldots$ olsun. $\forall i$ için $\phi_i:S \longrightarrow S_i$, $a \longrightarrow a(i)$ ile tanımlansın. Eğer $\forall i \in I^+$ için $T\phi_i=S_i$ ise o zaman T ye S_i halkaların bir altdirek toplamı denir. Bir R halkası yukarıdaki gibi bir T halkasına izomorf ise o zaman T ye R nin S_i halkaların vasıtasıyla gösterilişi denir.

TEOREM.1.10. Bir R halkasının $S_i (i \in I^+)$ halkaların altdirek toplamı olarak bir gösterilişi vardır. $\Longleftrightarrow$ $\forall i \in I^+$ için $R/K_i \cong S_i$ ve $\cap K_i=(0)$ olacak biçimde R de K_i idealleri vardır.[1]

TANIM.1.11. R bir halka ve A, B ve P, R nin keyfi idealleri olsun. Eğer $AB \subseteq P$ olduğunda $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ ise P ye asal ideal denir.

TANIM.1.12. R bir halka ve M onun boş kümeden farklı bir kümesi olsun. Eğer a,b $\in$ M için axb $\in$ M olacak biçimde bir x $\in$ R varsa M ye bir m-sistem denir.

TANIM.1.13. R bir halka ve A onun bir ideali olsun.Buna göre;$P(A)=\{r\in R \mid r$ yi kapsayan her M m-sistem için $A\cap M\neq\emptyset\}$ kümesine A nın asal radikali denir.

TANIM.1.14. Bir R halkasının sıfır idealinin asal radikaline R halkasının asal radikali denir ve P(R)(veya P(O)) ile gösterilir.

TEOREM.1.15. Bir R halkasının asal radikali P(R), R deki bütün asal ideallerin arakesitinden oluşur.[1]

TEOREM.1.16. P(R),R de her sağ (sol) nilpotent idealleri kapsayan bir nil idealdir.[1]

TANIM.1.17. Bir R halkasının asal radikali sıfır ise o zaman R halkasına yarı-asal halka denir.

LEMMA.1.18. Bir R halkası yarı-asaldır.$\Longleftrightarrow$ R halkasının sıfırdan farklı nilpotent ideali yoktur.[2]

TANIM.1.19. Bir R halkasının (O) ideali asal ise o zaman R halkasına asal halka denir.

TEOREM.1.20. R bir halka olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) R asal halkadır.

(ii) R nin A ve B idealleri için AB=(O) ise A=(O) veya B=(O) dır.

(iii) a,b $\in$ R için aRa =(O) ise a=0 veya b=0 dır.

(iv) a,b $\in$ R için (a)(b)=(O) ise (a)=(O) veya (b)=(O) dır.[1]

LEMMA.1.21. P, bir R halkasının ideali olsun.Bu durumda P,R de asal idealdir.$\Longleftrightarrow$ R/P halkası asaldır.[1]

TEOREM.1.22. Bir R halkası,asal halkaların bir altdirek toplamına izomorftur.$\Longleftrightarrow$ P(R)=(0) dır.[1]

TANIM.1.23. R bir halka ve M bir R-modülü olsun.Bir a $\in$ R için Mr=0 olduğunda r=0 ise M ye faithful R-modül denir.

TANIM.1.24. R bir halka ve M bir R-modülü olsun.Bir a $\in$ R için $T_a: M \longrightarrow M$, $m \longrightarrow ma$ dönüşümü bir R endomorfizmlerin kümesi E(M), fonksiyonlardaki toplama ve bileşke işlemi ile bir halkadır. O halde ; C(M)= $\{\ \theta\in\ E(M)\ |\ T_a\theta=\theta T_a, \forall a\in R$ için $\}$ kümesi E(M) nin bir althalkasıdır. C(M) ye R nin M üzerindeki komuting halkası denir. Eger MR$\neq$(0) ve M nin proper altmodülleri yoksa o zaman M ye indirgenemez (basit) R-modül denir.

TEOREM.1.25. M indirgenemez bir R-modül ise o zaman C(M) bir bölüm halkasıdır.[4]

TANIM.1.26. Bütün indirgenemez R-modülleri sıfırlayan R nin bütün elemanlarının kümesine yani;$J(R)=\{x\in R\,|\,Mx=(0)$, M ind. R-modül $\}$ R nin Jacobson radikali denir.

TANIM.1.27. R bir halka ve δ onun bir sag ideali olsun. $\forall\ x \in R$ için $x-ax \in \delta$ olacak biçimde $a \in R$ varsa δ ya R nin regüler sag ideali denir. Ayrıca $(\delta:R)=\{x\in R\,|\,Rx\subseteq\delta\}$ dır.

TANIM.1.28. R bir halka olsun. Bir $a\in R$ için $a+\grave{a}+a\grave{a}=0$ $(a+\grave{a}+\grave{a}a=0)$ olacak biçimde bir $\grave{a}\in R$ varsa a ya sag (sol) quasi-regüler eleman, à elamanına da a nın sag (sol) quasi-in-verse denir. δ, R nin bir sağ (sol) ideali olmak üzere; $\forall x \in \delta$ elemanı r.q.r.(l.q.r.) ise o zaman δ ya r.q.r. (l.q.r.) sağ (sol) ideal denir.

<u>TEOREM.1.29.</u> J(R), R nin bütün r.q.r. sağ ideallerini kapsayan r.q.r. sağ idealdir.Yani; J(R), R nin tek maksimal r.q.r. sağ idealidir.[4]

<u>LEMMA.1.30.</u> R birimli bir halka olsun.Bu durumda $a \in R$ elemanı r.q.r.(l.q.r.) dir.$\Leftrightarrow$ 1+a,R de sağ (sol) tersinirdir.[4]

<u>LEMMA.1.31.</u> R nin her sağ (sol) nil ideali J(R) de kapsanılır.[4]

<u>TEOREM.1.32.</u> $J(R/J(R))=(0)$ dır.[4]

<u>TANIMM.1.33.</u> $J(R)=(0)$ ise R ye yarı-basit halka denir.

<u>TANIM.1.34.</u> R bir halka olsun.m bir tamsayı olmak üzere $\forall x \in R$ için $mx=0$ olduğunda $m=0$ veya $x=0$ ise o zaman R ye m-torsion free halka denir.

<u>TANIM.1.35.</u> R bir halka olsun.R nin bir indirgenemez faithful R-modülü varsa o zaman R ye primitif halka, M bir indirgenemez R-modül ve n keyfi bir pozitif tamsayı olmak üzere $D=C(M)$ üzerinde $v_1,v_2,\dots,v_n \in M$ vektörleri lineer bağımsız ve $w_1,w_2,\dots,w_n \in M$ keyfi vektörleri için $w_i=v_ir$, $\forall i$ olacak biçimde bir $r \in R$ varsa o zaman R ye M üzerinde yoğundur denir.

<u>TEOREM.1.36.</u> R bir primitif halka ve M faithful indirgenemez R-modül olsun.Eğer $D=C(M)$ ise o zaman R,M üzerinde lineer dönüşümlerin bir yoğun halkasıdır.[4]

<u>TEOREM.1.37.</u> R bir primitif halka olsun.Bu durumda bir D bölüm halkası için ya $R \cong D_n$ (D bir bölüm halkası olmak

üzere D_n, D üzerinde nxn tipindeki matrisler halkası) ya da verilen herhangi bir m tamsayısı için R nin D_m üzerine homomorfik olarak düşen bir S_m alt halkası vardır.[4]

<u>LEMMA.1.38.</u> Bir primitif halka asal halkadır.[4]

<u>LEMMA.1.39.</u> R,sıfırdan farklı nil idealleri olmayan bir halka olsun.Bu durumda R, asal halkaların bir altdirek toplamıdır.[4]

<u>TEOREM.1.40.</u> R yarı basittir.⟺ R,primitif halkaların bir altdirek toplamına izomorftur.[4]

<u>SONUÇ.1.41.</u> Komütatif bir yarı-basit halka cisimlerin bir altdirek toplamıdır.[4]

<u>TEOREM.1.42.</u> Sonlu bir bölüm halkası komütatif bir cisimdir.[4]

<u>TEOREM.1.43.</u> R bir halka olsun. ∀a∈ R için n,a ya bağlı olmak üzere $a^{n(a)}=a$ olacak biçimde bir $n(a)>1$ tamsayısı varsa o zaman R komütatiftir.[4]

<u>TANIM.1.44.</u> R bir halka olsun. ∀x,y∈ R için $[x,y]=xy-yx$ komütatörlerinin ürettigi ideale R nin komütatör ideali denir ve D(R) ile gösterilir.

<u>TEOREM.1.45.</u> R merkezi Z(R) olan bir halka olsun.Verilen bir a∈ R için $a^{n(a)}\in Z(R)$ olacak biçimde bir $n(a)>0$ tamsayısı var olsun.Bu durumda eger R nin nil idealleri yoksa o zaman R komütatiftir. Denk olarak R nin komütatör ideali nildir.[4]

<u>TANIM.1.46.</u> R bir halka ve P onun sag(sol) ideali olsun. Eger R/P kalan sınıflar halkası bir sag(sol) primitif

halka ise P ye R nin bir sağ(sol) primitif ideali denir. Bütün primitif ideallerin ara kesiti sıfır olan halkaya yarı-primitif halka denir.

LEMMA.1.47. R bir halka, $J(R)$ onun Jacobson radikali olsun. Bu durumda $J(R)$, R nin bütün sağ(sol) primitif ideallerin arakesitidir. Ayrıca $a\in J(R)$ dır. $\Leftrightarrow$ Ra bir sol quasi regüler (l.q.r.) idealdir.[2]

LEMMA.1.48. R bir halka ve $0\neq\delta$ onun bir sağ ideali olsun. $a\in\delta$ ve sabit bir pozitif tamsayı için $a^n=0$ ise o zaman R nin nilpotent idealleri yoktur.[3]

LEMMA.1.49.(SUBLEMMA) R, sıfırdan farklı nilpotent idealleri olmayan ve $\operatorname{char}R\neq 2$ olan bir halka olsun. Eğer $a\in R$ elemanı $\forall x,(ax-xa)\in R$ ile komütatif ise o zaman $a\in Z(R)$ dır.[5]

TEOREM.1.50.(Richard Brauer) H ve K birer bölüm halkası $H\subseteq K$ ve her $\phi:K\longrightarrow K$ otomorfizmi için $(H)\phi\subseteq H$ olsun. Bu durumda $H=K$ veya $H\subseteq Z(K)$ dır.[33]

TANIM.1.51. R bir halka olsun. R nin $T(R)=\{x\in R \mid ax^n=x^na,\ n=n(x,a)\geq 1,\ \forall x\in R\}$ altkümesine R nin hipermerkezi denir ve $T(R)$ ile gösterilir. Bundan sonra $T(R)$ nin yerine T alınacaktır. T nin aşağıdaki üç temel özelliği sağladığı açıktır.

(i) $Z(R)\subseteq T$

(ii) T, R nin bir althalkasıdır.

(iii) Eğer ϕ, R nin bir otomorfizmi ise o zaman $(T)\phi\subseteq T$ dır.

LEMMA.1.52. Eğer D bir bölüm halkası ise o zaman $T(D)=Z(D)$ dır.[7]

LEMMA.1.53. Eger R bir yarı-basit halka ise o zaman $T(R)=Z(R)$ dır. [7]

LEMMA.1.54. R bir halka olsun. Eger $a\in T(R)$ elemanı nilpotent ise o zaman aR, R nin bir sag nil idealidir. (Böylece $a\in J(R)$ ve aR J(R) dır.)[7]

TEOREM.1.55. R nil idealleri olmayan bir halka olsun.Bu durumda T(R) nin nilpotent elemanları yoktur.[7]

LEMMA.1.56. R nil idealleri olmayan bir asal halka olsun. Bu durmda T(R) komütatif ve T(R) nin sıfırdan farklı bir elemanı R de sıfır bölen degildir.[7]

TEOREM.1.57. R nil idealleri olmayan bir halka olsun.Bu durumda $T(R)=Z(R)$ dır.[7]

2.BÖLÜM

$(XY)^n = (YX)^n$ KOŞULLU HALKALARIN KOMÜTATİFLİĞİ

Bu bölümde $(xy)^n = (yx)^n$ koşulunu sağlayan halkaların komütatifliği ile ilgili yapılan çalışmalar, bir sıra içerisinde verilmiştir.

L.P. Belluce - I.N. Herstein - S.K. Jain (1966)

GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMÜTATİF HALKALAR

TANIM.2.1. R bir halka olsun. Eğer x, y $\in$ R için $(xy)^{n(x,y)} = (yx)^{m(x,y)}$ olacak biçimde x ve y ye bağlı $m(x,y)$, $n(x,y)$ pozitif tamsayıları varsa o zaman R ye genelleştirilmiş komütatif halka denir ve g.c. halka biçiminde yazılır.

LEMMA.2.2. D bir bölüm halkası olsun. a,b $\in$ D için $a^{r(a,b)}b^{s(a,b)} = b^{s(a,b)}a^{r(a,b)}$ olacak biçimde $r(a,b)$ ve $s(a,b)$ pozitif tamsayıları varsa o zaman D komütatiftir.

İSPAT: $\forall$ x,y $\in$ D için x,y nin bir pozitif kuvvetiyle komütatif ise [8,teorem.1.] den D komütatif olur.

Varsayalım ki bir n>0 tamsayı olmak üzere a,b $\in$ D elemanları için a, b^n ile komütatif olmasın. Bu durumda $W = \{ x \in D \mid xb^{m(x)} = b^{m(x)}x \ , \ m(x) > 0\}$ kümesini alalım. W, D nin bir althalkasıdır. Çünkü; y_1 , $y_2 \in W$ alınırsa $y_1b^{m(y_1)} = b^{m(y_1)}y_1$ ve $y_2b^{m(y_2)} = b^{m(y_2)}y_2$ olacak biçimde $m(y_1)$ ve $m(y_2)$ pozitif tamsayılar vardır. Böylece;

$$(y_1-y_2)b^{m(y_1)m(y_2)} = y_1b^{m(y_1)m(y_2)} - y_2b^{m(y_2)m(y_1)}$$

$=y_1(b^{m(y_2)})^{m(y_1)} - y_2(b^{m(y_2)})^{m(y_1)}$

$=(b^{m(y_2)})^{m(y_1)}\ y_1 - (b^{m(y_2)})^{m(y_1)}y_2$

$=(b^{m(y_1)})^{m(y_2)}\ y_2 - (b^{m(y_1)})^{m(y_2)}\ y_2$

$=(b^{m(y_1)})^{m(y_2)}\ (y_1 - y_2)$

olur ve dolayısıyla $y_1 - y_2 \in W$ bulunur.

$(y_1y_2)b^{m(y_1)m(y_2)}=y_1(y_2(b^{m(y_1)m(y_2)})=y_1((b^{m(y_1)m(y_2)}y_2)$

$=(y_1(b^{m(y_2)m(y_1)})=((b^{m(y_2)m(y_1)}y_1)y_2=(b^{m(y_1)m(y_2)})\ (y_1y_2)$

ve dolayısıyla $y_1y_2 \in W$ olur.

a, b^n ile komütatif olmadığından $a \notin W$ ve dolayısıyla $W \neq D$ dır. Hipotezden $x \in D$ ise o zaman $x^{r(x,b)}\ b^{s(x,b)} = b^{s(x,b)}\ x^{r(x,b)}$ ve $x^{r(x,b)} \in W$ olur. Dolayısıyla [12] den D komütatiftir∎

<u>TEOREM.2.3.</u> D, g.c. bir bölüm halka ise bu durumda D komütatiftir.

<u>İSPAT:</u> $0\neq a,b \in D$ alalım. g.c. halkanın tanımından $x=a$, $y=ba^{-1}$ olarak alınırsa;

$$(aba^{-1})^n = ab^na^{-1} = (a(ba^{-1}))^n=((ba^{-1})a)^m=b^m \qquad (1)$$

olacak biçimde m ve n pozitif tamsayıları vardır. Bundan dolayı $(ab^na^{-1})^n=(ab^{n^2}a^{-1})=(a(b^na^{-1}))^n=((b^na^{-1})a)^m=b^{nm}$ elde edilir. Dolayısıyla buradan $aab^{n^2}a^{-1}a^{-1}=ab^{mn}a^{-1} \Rightarrow a^2b^{n^2}a^{-2} = ab^{mn}a^{-1}=(ab^na^{-1})^m=b^{mm}=b^{m^2}$ bulunur. Böylece

$$a^ib^{n^i}a^{-i}=b^{m^i}\ ,\ \forall i > 0 \text{ için} \qquad (2)$$

elde edilir. D, g.c. halkası olduğundan

$$b^{-n}a^kb^n=(b^{-n}ab^n)^k=(ab^nb^{-n})^t=a^t \qquad (3)$$

olacak biçimde t ve k pozitif tamsayıları vardır. (2) de i yerine k alınırsa $a^kb^{n^k}a^{-k}=b^{m^k}$ elde edilir. (3) den $a^k=b^na^tb^{-n}$ ifadesini alıp, bulduğumuz ifade de yerine yazılırsa ; $(b^n a^t b^{-n}) b^{n^k} (b^n a^t a^{-n})^{-1} = b^{m^k}$

$$\Rightarrow b^n a^t b^{-n} b^{n^k} b^n a^{-t} b^{-n} = b^{m^k}$$

$$\Rightarrow b^n a^t b^{n^k} a^{-t} b^{-n} = b^{m^k}$$

$$\Rightarrow a^t b^{n^k} a^{-t} = b^{-n} b^{m^k} b^n$$

$$\Rightarrow a^t b^{n^k} a^{-t} = b^{m^k} \tag{4}$$

elde edilir. (4) ve $a^k b^{n^k} a^{-k} = b^{m^k}$ den

$$a^t b^{n^k} a^{-t} = a^k b^{n^k} a^{-k} \Rightarrow b^{n^k} a^{t-k} = a^{t-k} b^{n^k} \tag{5}$$

bulunur. Eğer $k=t$ ise o zaman (3) den a nın pozitif bir kuvvetiyle b nin pozitif bir kuvveti komütatiftir. Yani; a^k ile b^n komütatiftir. Çünkü; $k=t$ ise (3) den $b^{-n} a^k b^n = a^k \Rightarrow a^k b^n = b^n a^k$ olur. Eğer $k \neq t$ ise o zaman (5) den a nın pozitif kuvveti ile b nin bir pozitif kuvveti komütatiftir. Yani; a^{t-k} ile b^n komütatiftir. Dolayısıyla keyfi $a,b \in D$ için $a^{r(a,b)} b^{s(a,b)} = b^{s(a,b)} a^{r(a,b)}$ olacak biçimde $r(a,b)$ ve $s(a,b)$ pozitif tamsayıları vardır. Böylece lemma.2.2. den R komütatiftir.

<u>TEOREM.2.4.</u> R bir yarı-basit g.c. halka olsun. $\forall\ x,y \in R$ için $x^{r(x,y)} y^{s(x,y)} = y^{s(x,y)} x^{r(x,y)}$ ise o zaman R komütatiftir.

<u>İSPAT:</u> R yarı-basit olduğundan teorem.1.40. dan R, primitif halkaların bir altdirek toplamına izomorftur. Dolayısıyla R halkası bir primitif halka olarak alınabilinir. Öteyandan [13] den bir g.c. halkanın althalkaları ve g.c. halkaların homomorfik görüntüleri de g.c. halkadır. Böylece teorem.1.37. den ya $R \cong D$ (D bir bölüm halkası) ya da $n > 1$ tamsayısı için D_n, R nin bir althalkasının homomorfik görüntüsüdür.

Eğer $R \cong D$ ise o zaman Lemma.2.3. den R komütatiftir. Eğer $n>1$ tamsayısı için D_n, R nin bir halkasının homomorfik görüntüsü ise $D_2 = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in I \}$ ve $x,y \in D$ için $x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olarak alalım.

$x^r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $y^s = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olur. Dolayısıyla $x^r y^s = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$y^s x^r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ bulunur. Buradan $x^r y^s \neq y^s x^r$ olduğundan teoremimizin koşullarını sağlayan bir primitif halka bölüm halkası olmak zorundadır. Böylece ispat biter ■

<u>SONUÇ.2.5.</u> R bir g.c. halka ise bu durumda $D(R) \subseteq J(R)$ dır.

<u>İSPAT:</u> Teorem.1.32. ye göre $R/J(R)$ yarı-basittir. Dolayısıyle teorem.2.4. den $R/J(R)$ komütatiftir. O halde $\bar{x},\bar{y} \in R/J(R)$ için $\bar{x}\bar{y} - \bar{y}\bar{x} = \bar{0} = J(R) \Rightarrow xy - yx \in J(R)$ olur. Böylece; $D(R) \subseteq J(R)$ olur.

<u>TEOREM.2.6.</u> R bir g.c. halka ise $D(R)$ komütatör ideali nildir.

<u>İSPAT:</u> Sonuç.2.5. den $D(R) \subseteq J(R)$ dir. Eğer $J(R)=(0)$ ise o zaman $D(R)=(0)$ ve dolayısıyla $D(R)$ nil olur. Bu nedenle $J(R) \neq (0)$ olsun. Bu durumda R nin maksimal nil idealle-rin dışında sıfırdan farklı nil idealleri olmasın. Bu durumda da $J(R) \neq (0)$ ve $D(R) \subseteq J(R)$ olduğundan $D(R)=(0)$ ve dolayısıyla $D(R)$ nil olur. Böylece $J(R) \neq (0)$ ve $D(R) \neq (0)$ olmak üzere R nin maksi mal nil ideallerin dışında

sıfırdan farklı nil idealleri olmadığını varsayalım.

Şimdi; ilk olarak $J(R)$ nin komütatif olmadığını gösterelim. Varsayalım ki $J(R)$ komütatif olsun. Buna göre $a,b \in J(R)$ve $y \in R$ için $(ab)y=(ba)y=b(ay)=a(yb)$ olur. Buradan $aby-ayb=0 \Rightarrow a(by-yb)=0$ elde edilir. Öteyandan $S=\{ x \in R \mid J(R)x=(0) \}$ kümesini düşünelim. $\forall$ $a,b \in J(R)$ ve $y \in R$ için $a(by-yb)=0$ olduğundan $J(R)(by-yb)=0$ ve böylece $(by-yb) \in S$ olur. O halde $by-yb \in J(R)\cap S$ dir.

Şimdi $J(R)\cap S$ nin ideal olduğunu gösterelim. S idealdir. Gerçekten; x_1, $x_2 \in S$ için $J(R)x_1=(0)$ ve $J(R)x_2=(0)$ dır. Dolayısıyla $J(R)(x_1-x_2)=(0)$ olur. Yani; $x_1-x_2 \in S$ olur. $x \in S$ ve $r \in R$ alalım. $J(R)xr=(0)r=(0)$ $\Rightarrow xr \in S$ olur. Öteyandan $J(R)rx \subseteq J(R)x=(0) \Rightarrow J(R)rx=(0)$ $\Rightarrow rx \in S$ olur. Buradan $J(R)\cap S$ ideal olur. Bir $a \in J(R)\cap S$ alalım. $a \in J(R)$ ve $a \in S$ dir. Dolayısıyla $a \in J(R)$ ve $J(R)a=(0)$ olur. Yani; $a \in J(R)$ ve $\forall c \in J(R)$ için $ca=0$ dır. Özel olarak $c=a$ alırsak $aa=a^2=0$ olur. Böylece a nilpotenttir. Dolayısıyla $J(R)\cap S$, R nin bir nil idealidir. R nin maksimal nil ideallerin dışında sıfırdan farklı nil idealleri olmadığından ve $J(R)\cap S \subseteq J(R)$ olduğundan $J(R)\cap S=(0)$ dır. Öteyandan $by-yb \in J(R)\cap S$ olduğundan $\forall b \in J(R)$ ve $\forall y \in R$ için $by-yb=0$ ve dolayısıyla $J(R) \subseteq Z(R)$ olur.

$a \in J(R)$ ve $x,y \in R$ alalım. Bu durumda $ax \in J(R)$ ve buradan $ax \in Z(R)$ olur. Böylece $(ax)y=y(ax)=(ya)x=(ay)x$ $\Rightarrow axy-ayx=0 \Rightarrow a(xy-yx)=0$ ve dolayısıyla $J(R)D(R)=(0)$

elde edilir. $D(R) \subseteq J(R)$ olduğundan özel olarak $D(R)^2=(0)$ olur. Böylece $D(R)$ nilpotent idealidir. R nin maksimal nil ideallernin dışında sıfırdan farklı nil idealleri olmadığından R nin (maksimal nilpotent ideallerin dışında) sıfırdan farklı nilpotent idealleri yoktur. Böylece $D(R)=(0)$ olur. Bu ise $D(R)$ nin sıfırdan farklı olmasıyla çelişir. O halde $J(R)$ komütatif değildir.

Şimdi $D(R)$ nin nil olmadığını varsayalım. Bu durumda [8,teoram.1.] den $ab \in J(R)$ ve $n>0$ tamsayısı için $ab^n \neq b^n a$ dır. b nin nilpotent olmadığı açıktır. Çünkü b nilpotent olsa, $b^n=0$ olacak biçimde bir $n \in I^+$ vardır. Bu nedenle $ab^n=0=b^n a$ olur. Bu ise $ab^n \neq b^n a$ olmasıyla çelişir.

$a \in J(R)$ olduğundan formal olarak $1-a$ tersinirdir. (R nin birimli olması gerekmez.) Ayrıca $\phi: R \longrightarrow R$, $x \longrightarrow$ $(1-a)x(1-a)^{-1}=(1-a)x(1-a')=x-ax-xa'+axa'$ dönüşümü bir izomorfizmadır.

R bir g.c. halka olduğuna göre $x=(1-a)b$ ve $y=b(1-a)^{-1}$ olarak alınırsa; $\{[(1-a)b][b(1-a)^{-1}]\}^r=$ $\{(1-a)b^2(1-a)^{-1}\}^r=\{b(1-a)^{-1}(1-a)b\}^s=b^{2s}$ olacak biçimde pozitif $s=s(x,y)$, $r=r(x,y)$ tamsayıları vardır. Buradan $\{(1-a)b^2(1-a)^{-1}\}^r=(1-a)b^{2r}(1-a)^{-1}$ elde edilir. Böylece $(1-a)b^{2r}(1-a)^{-1}=b^{2s}$ olur. Buradan $(1-a)b^{2r}(1-a)^{-1}(1-a)$ $= b^{2s}(1-a) \Rightarrow (1-a)b^{2r}=b^{2s}(1-a)$ elde edilir. Yani; $m=2r$ $n=2s$ olmak üzere;

$$(1-a)b^m=b^n(1-a) \qquad (1)$$

olacak biçimde m ve n pozitif tamsayıları vardır.
a, b nin pozitif bir kuvveti ile komütatif olmadığından

(1) deki m ve n pozitif tamsayıları birbirinden farklıdır. Bu durumda $m > n$ olsun. Öteyandan a nın quasi-inverse $\acute{a}$ olmak üzere $(1-a)^{-1}=(1-\acute{a})$ olarak alınabilir. ab, $ba \in J(R)$ olduğundan (1) i elde edidişindeki gibi aşağıdaki ifadeler bulunur.

$$(1-ab)b^{m}=b^{p}(1-ab) \tag{2}$$

$$(1-ba)b^{m}=b^{q}(1-ba) \tag{3}$$

(1),(2) ve (3) ifadeleriden sırasıyla

$$\left.\begin{aligned} &(1-a)b^{m_1}(1-a)^{-1}=b^{n_1} \\ &(1-ab)b^{m_2}(1-ab)^{-1}=b^{n_2} \\ &(1-ba)b^{m_3}(1-ba)^{-1}=b^{n_3} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ifadeleri bulunur. Bu durumda (1),(2) ve (3) ifadeleri $m=m_1m_2m_3$ içinde geçerlidir. (2) b ile soldan (3) de b ile sağdan çarpılırsa;

$$\begin{array}{r} (b-bab)b^{m}=b^{p}(b-bab) \\ -\ (b-bab)b^{m}=\ -b^{q}(b-bab) \\ \hline (b^{p}-b^{q})(b-bab)=0 \end{array}$$

elde edilir. Eğer $p \neq q$ ise $b \in J(R)$ olduğundan $r=\min(p,q)$ olmak üzere $b^{r}(b-bab)=0$ dır. Çünkü; eğer $p>q$ ise o zaman $(b^{p-r}-1)b^{r}(b-bab)=0$ olur. Buradan $(b^{p-r}-1)^{-1}(b^{p-r}-1)b^{r}(b-bab)=0 \Rightarrow b^{r}(b-bab)=0 \Rightarrow b^{r+1}(1-ab)=0 \Rightarrow$ $b^{r+1}(1-ab)(1-ab)^{-1}=0 \Rightarrow b^{r+1}=0$ olur. Bu ise b nin nilpotent olmamasıyla çelişir. O halde $p=q$ dır. Böylece (2) ve (3) ifadeleri $(1-ab)b^{m}=b^{q}(1-ab)$ ve $(1-ba)b^{m}=b^{p}(1-ba)$ biçiminde yazılabilir. Dolayısıyla buradan,

$(1-ba)b^{m}$ $(1-ab)b^{m}=b^{p}(1-ba)-b^{p}(1-ab) \Rightarrow$

$\{(1-ba)-(1-ab)\}b^{m}=b^{p}\{(1-ba)-(1-ab)\}$ den

$$(ab-ba)b^n=b^p(ab-ba) \tag{5}$$

elde edilir. Tekrar (1) ve (2) ifadelerine dönülürse (1) i sağdan b ile çarpıp (2) den çıkartılırsa;

$$b^{m+1}-b^m=b^{n+1}-b^p-(b^n-b^p)ab \tag{6}$$

elde edilir. Şimdi $b^n=b^p$ ise (6) dan $b^{m+1}-b^m=b^{n+1}-b^n$ elde edilir. Böylece $b^{m+1}-b^m-b^{n+1}+b^n=0$ ve $m>n$ olduğundan $b^n(1-b-b^{m-n}+b^{m+1-n})=0$ olur. $b+b^{m-n}-b^{m+1-n}\in J(R)$ olduğundan formal olarak $(1-b-b^{m-n}+b^{m+1-n})$ tersinirdir. Böylece $b^n=0$ olur. Bu ise b nin nilpotent olmamasıyla çelişir. O halde $b^n\neq b^p$ dir. (6) ifadesi sağdan ve soldan b ile çarpılırsa;

$$\begin{array}{rl} & b^{m+2}-b^{m+1}=b^{m+2}-b^{p+1}-b^{n+1}ab+b^{p+1}ab \\ - & b^{m+2}+b^{m+1}=-b^{m+2}+b^{p+1}+b^nab^2-b^pab^2 \\ \hline & b^nab^2-b^pab^2-b^{n+1}ab+b^{p+1}ab=0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad (b^nab-b^pab-b^{n+1}a+b^{p+1}a)b=0$$

$$\Rightarrow \quad \{b^n(ab-ba)-b^p(ab-ba)\}b=0 \quad \Rightarrow \quad (b^n-b^p)(ab-ba)b=0$$

elde edilir. $n\neq p$ ve $b\in J(R)$ olduğundan $t=\min(n,p)$ olmak üzere;

$$b^t(ab-ba)b = 0 \tag{7}$$

bulunur. Tekrar (1) in elde edilişine dönülürse (1) den (4) e kadar yapılanlar düşünülüp, (4) den sonra $m=m_1m_2m_3$ ve p, q için yapılanlarda m yerine km, p yerine de kp alınırsa (k>0 tamsayı) (5) ifadesi elde edildiği gibi $(ab-ba)b^{km}=b^{kp}(ab-ba)$ ifadesi de elde edilir. Böylece; $kp<t$ olmak üzere (7) soldan b^{kp-t} ile çarpılırsa, $b^{kp-t}b^t(ab-ba)b=0 \Rightarrow b^{kp}(ab-ba)b=0$ elde edilir.

Bu ifade sağdan b ile çarpılırsa; $(ab-ba)b^{km+m}=0 \Rightarrow$

$(ab-ba)b^{(k+1)m}=0$ olur. $0=(ab-ba)b^{(k+1)m}=b^{(k+1)p}(ab-ba)$ olduğundan, eğer $w=\max\{(k+1)m\ ,\ (k+1)p\}$ ise o zaman $(ab-ba)b^{w}=b^{w}(ab-ba)=0$ elde edilir. i üzerinde tümevarım yapılırsa;

$$0=(ab^{i}-b^{i}a)b^{w}=b^{w}(ab^{i}-b^{i}a),\ \forall\ i>0 \text{ için} \qquad (8)$$

olur. Çünkü; $i=1$ için $(ab-ba)b^{w}=b^{w}(ab-ba)=0$ olduğundan doğru ve $i=n$ için $0=(ab^{n}-b^{n}a)b^{w}=b^{w}(ab^{n}-b^{n}a)$ doğru olsun. $i=n+1$ için ,

$$\begin{aligned}(ab^{n+1}-b^{n+1}a)b^{w}&=ab^{n+1}b^{w}-b^{n+1}ab^{w}\\ &=ab^{n+1}b^{w}-bb^{n}ab^{w}\\ &=ab^{n+1}b^{w}-bab^{n}b^{w}\\ &=(ab-ba)b^{w}b^{n}\\ &=0 \text{ olur.}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}b^{w}(ab^{n+1}-b^{n+1}a)&=b^{w}ab^{n}b-b^{w}b^{n+1}a\\ &=b^{n}b^{w}ab-b^{n}b^{w}ba\\ &=b^{n}b^{w}(ab-ba)\\ &=0\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla istenen bulunmuş olur. $\forall i>0$ için (8) geçerli olduğundan özel olarak $i=w$ için de doğrudur. Yani; $(ab^{w}-b^{w}a)b^{w}=b^{w}(ab^{w}-b^{w}a)=0$ olur. Buradan $ab^{2w}=b^{w}ab^{w}$ ve $b^{w}ab^{w}=b^{2w}a$ ve dolayısıyla $ab^{2w}=b^{2w}a$ olur. Yani; a, b nin bir pozitif kuvveti ile komütatiftir. Bu ise $a,b \in J(R)$ ve $n>0$ tamsayı için $ab^{n} \neq b^{n}a$, olmasıyla çelişir. □

W.K.Nicholson - A.Yaqub (1980)

BIR KOMÜTATIFLIK TEOREMI

<u>TEOREM.2.7.</u> R birimli bir halka olsun. $\forall x,y \in R$ için $(xy)^{k}=(yx)^{k}$ ve $(xy)^{l}=(yx)^{l}$ olacak biçimde $k=k(x,y)$ ve

$l=l(x,y)$ gibi aralarında asal pozitif tamsayılar varsa o zaman R komütatiftir.

Teoremin ispatını yapmadan önce aşağıdaki Lemma yı ispatlayalım.

LEMMA.2.8. R birimli bir halka olsun. $\forall x,y \in R$ ve $n\geq 1$ tamsayısı için $x^n y=0=(x+1)^n y$ ise o zaman $y=0$ dır.

İSPAT: $\forall x,y \in R$ için ;

$$\begin{aligned} 0&=x^{n-1}(x+1)^n y=x^{n-1}(x^n+nx^{n-1}+\ldots+nx+1)y \\ &=x^{n-1}x^n y+nx^{n-1}x^{n-1}y+\ldots+nx^{n-1}xy+x^{n-1}y \\ &=x^{n-1}x^n y+nx^{n-2}x^n y+\ldots+nx^n y+x^{n-1}y \\ &=x^{n-1}y \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer biçimde;

$$\begin{aligned} 0&=(x+1)^{n-1}\{-1+(x+1)\}^n y \\ &=(x+1)^{n-1}\{(-1)^n+n(-1)^{n-1}(x+1)+\ldots+n(-1)(x+1)^{n-1}+(x+1)^n\}y \\ &=(-1)^n(x+1)^{n-1}y+\ldots+n(-1)(x+1)^n(x+1)^n y+(x+1)^{n-1}(x+1)^n y \\ &=(-1)^n(x+1)^{n-1}y \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $0=(x+1)^{n-1}y$ ve dolyısıyla $x^{n-1}y=0=(x+1)^{n-1}y$ olur. Bu metodla devam edilirse $xy=0=(x+1)y$ ve buradan $xy=0=xy+y$ ve böylece $y=0$ elde edilir■

TEOREM.2.7.NİN.İSPATI: İlk önce teoremin ispatında kullanacağımız bazı ifadeleri ispatlayalım.

1.İDDİA: $F\subseteq R$ sonlu bir küme olsun. Bu durumda $\forall k\geq n$ ve $\forall\ x,\ y\ \in F$ için $(xy)^k=(yx)^k$ olacak biçimde bir $n=n(F)$ pozitif tamsayısı vardır.

İSPAT: $x,\ y\in R$ alalım. Teoremin ifadesindeki gibi k ve l seçelim. k ve l aralarında asal olduklarından $rk-sl=1$ olacak biçimde r ve s pozitif tamsayıları vardır.

Eğer $n=ls$ ise $rk=n+1$ olur. Hipotezden $(xy)^k=(yx)^k$ ve $(xy)^l=(yx)^l$ olduğuna göre buradan $(xy)^{rk}=(yx)^{rk}$ ve $(xy)^{sl}=(yx)^{sl}$ ve dolayısıyla $(xy)^n=(yx)^n$ ve $(xy)^{n+1}=(yx)^{n+1}$ elde edilir. O halde $(xy)^n(xy)=(xy)^{n+1}=(yx)^{n+1}=(yx)^n(yx)=(xy)^n(yx) \Rightarrow (xy)^n(xy)=(xy)^n(yx)$ elde edilir. Böylece $\forall t\geq n$ için $(xy)^t(xy)=(xy)^t(yx)$ ifadesi geçerlidir. O halde bir $k\geq n$ için $(xy)^k=(yx)^k$ geçerli ise buradan $(xy)^k(xy)=(xy)^{k+1}=(xy)^k(yx)=(yx)^k(yx)=(yx)^{k+1}$ elde edilir. Dolayısıyla tümevarımda $\forall x,y \in R$ ve $\forall\ k\geq n$ için $(xy)^k=(yx)^k$ olacak biçimde $n=n(x,y)\geq 1$ tamsayısı vardır.

Şimdi bir $F \subseteq R$ sonlu kümesi verilsin $\forall x,y \in F$ için $n(x,y)$ biçiminde bir tamsayı seçilebilir. $n=\max\{n(x,y) \mid x,y \in F\}$ olsun. Eğer $x,y \in F$ ve $k\geq n$ ise o zaman $k\geq n(x,y)$ ve $(xy)^k=(yx)^k$ dır.

<u>**2.İDDİA:**</u> $R^* \subseteq Z(R)$ ve $J(R) \subseteq Z(R)$ dir. Burada $R^*=\{x \in R \mid x \text{ tersinir}\}$.

<u>**İSPAT:**</u> Sabit bir $u \in R^*$ ve keyfi bir $x \in R$ alalım. 1.iddia daki gibi $n=n(u,u^{-1}x,u^{-1}(x+1))$ seçelim. Eğer $k\geq n$ ise $u^{-1}x^ku=(u^{-1}xu)^k=(uu^{-1}x)^k=x^k$ dır. Böylece; $x^ku=ux^k$ olur. Bu durumda bu ifade $k=n,n+1$ için geçerli olduğundan $x^{n+1}u=ux^{n+1}=ux^nx=x^nux \Rightarrow x^{n+1}u=x^nux$ ve dolyısıyla $x^n(xu-ux)=0 \Rightarrow x^n[x,u]=0$ bulunur. n nin seçiminden dolayı x yerine x+1 yazılabilir. Böylece $(x+1)^n[x+1,u]=0 = (x+1)^n[x,u]$ olur ve dolayısıyla lemma.2.8. den $\forall x \in R$ için $[x,u]=0$ elde edilir. Böylece $R^* \subseteq Z(R)$ dir.

$1+J(R)=\{1+x \mid x \in J(R)\}$ olsun. $x \in J(R)$ olduğunda $1+x$ tersinirdir. O halde; $1+J(R)$ nin her elemanı tersinirdir. Böylece $1+J(R) \subseteq R^*$ olur. Buradan da $J(R) \subseteq R^* \subseteq Z(R)$ ve dolyısıyla $J(R) \subseteq Z(R)$ olur.

3.İDDİA: $R/J(R)$ komütatiftir.

İSPAT: $R/J(R)$ yarı-basit olduğundan teorem.1.40. dan $\bar{R}=R/J(R)$ halkası, primitif halkaların bir altdirek toplamıdır. O halde $\bar{R}$ halkası bir primitif halka olarak düşünülebilir. Böylece teorem.1.37. den ya $\bar{R} \cong D$ (D bir bölüm halkası) ya da bir $n>1$ tamsayısı için D_n $\bar{R}$ nin bir althalkasının homomorfik görüntüsüdür.

Eger $\bar{R} \cong D$ ise o zaman $\bar{R}$ bir bölüm halkası olur. Bir bölüm halkasının sıfırdan farklı her elamanı tersinir olduğundan 2.iddia`dan $\bar{R}=R/J(R)$ komütatif olur.

Eger bir $n>1$ tamsayısı için D_n, $\bar{R}$ nin bir althalkasının homomorfik görüntüsü ise ve $x,y \in D_n$ (D_n, nxn tam matrisler halkası) için;

$$x=E_{n1} = \begin{bmatrix} 00\ldots1 \\ 00\ldots0 \\ \ldots\ldots \\ 00\ldots0 \end{bmatrix} \quad , \quad y= E_{n1}= \begin{bmatrix} 00\ldots0 \\ 00\ldots0 \\ \ldots\ldots \\ 00\ldots1 \end{bmatrix} \quad \text{alırsak,}$$

$$(xy)^2 = \begin{bmatrix} 100\ldots0 \\ 000\ldots0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 000\ldots0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad (yx)^2 = \begin{bmatrix} 000\ldots0 \\ 000\ldots0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 000\ldots0 \end{bmatrix} \quad \text{olur.}$$

Böylece $(xy)^2 \neq (yx)^2$ olduğundan teoremin koşullarını sağlayan $\bar{R}$ primitif halkası, bir bölüm halkası olmak zorundadır. Böylece 3.iddianın ispatı biter.

4.İDDİA: $\forall$ $x,y \in R$ için $xy^n=y^nx$ olacak biçimde bir $n=n(x,y)$ pozitif tamsayısı vardır.

İSPAT: 1.iddia daki gibi $n=n(x,x+1,y)$ alalım. Bu durumda; $(xy)^n x=x(yx)^n=x(xy)^n \Rightarrow (xy)^n x=x(xy)^n \Rightarrow$ $(xy)^n x-x(xy)^n=0 \Rightarrow [(xy)^n,x]=0$ olur. 3.iddia dan $R/J(R)$ komütatif olduğundan $\bar{x},\bar{y} \in R/J(R)$ için $(\bar{x}\bar{y})^n=\bar{x}^n\bar{y}^n \Rightarrow$ $(\bar{x}\bar{y})^n-\bar{x}^n\bar{y}^n=\bar{0} \Rightarrow \{(xy)^n-x^ny^n\}+J(R) = J(R) \Rightarrow$ $(xy)^n-x^ny^n \in J(R)$ olur. 2.iddiadan $J(R)\subseteq Z(R)$ olduğundan $(xy)^n-x^ny^n \in Z(R)$ olur. Böylece $[x,(xy)^n- x^ny^n]=0 \Rightarrow$ $[x,(xy)^n]-[x,x^ny^n]=0 \Rightarrow [x,x^ny^n]=0 \Rightarrow x(x^ny^n)-(x^ny^n)x=0$ $\Rightarrow x^n(xy^n-y^nx)=0 \Rightarrow x^n[x,y^n]=0$ elde edilir.

Şimdi n nin seçiminden x yerine $x+1$ yazılırsa, $0=(x+1)^n[x+1,y^n]=(x+1)^n[x,y^n]$ ve dolayısıyla $x^n[x,y^n]=0$ $=(x+1)^n[x,y^n]$ bulunur. Böylece lemma.2.8. den $[x,y^n]=0$ elde edilir.

Şimdi teoremin ispatını tamamlayalım. $x,y\in R$ alalım. 4.iddiadan x, her biri ile komütatif olan y^p ve $(y+1)^q$ olacak biçimde p ve q pozitif tamsayıları vardır.

Eğer $m=pq$ ise x,y^m ve $(y+1)^m$ ile komütatiftir. Çünkü; $xy^m=xy^{pq}=x(y^q)^px=y^{pq}x=xy^m$ ve $x(y+1)^m=x(y+1)^{pq}=$ $x\{(y+1)^p\}^q=\{(y+1)^p\}^q=\{(y+1)^p\}^qx=(y+1)^{pq}x=(y+1)^mx$ dir.

1. İddiadaki gibi $n=n(y,\ y^{m-1}x,y+1,(y+1)^{m-1}x,$ $y^{m-1}(x+1),(y+1)^{m-1}(x+1)^{m-1})$ seçelim. $y^mx=xy^m$ olduğundan $\forall k \geq n$ için $y^{mk}x^k=(y^mx)^k=(y^mx)(y^mx)\ldots(y^mx)$

$$=y(y^{m-1}x)y(y^{m-1}x)\ldots y(y^{m-1}x)$$
$$=\{(y^{m-1}x)y\}^k=(y^{m-1}x)y(y^{m-1}x)y\ldots(y^{m-1}x)y$$
$$=y^{m-1}(xy^m)^{k-1}xy=y^{m-1}(y^mx)(y^mx)\ldots(y^mx)xy$$
$$=y^{-1}y^{mk}x^ky=y^{mk-1}x^ky$$

elde edilir. Buradan $y^{mk}x^k=y^{mk-1}x^ky \Rightarrow y^{mk}x^k-y^{mk-1}x^ky=0$ $\Rightarrow y^{mk-1}(yx^k-x^ky)=0$ yani;

$$y^{mk-1}[y,x^k]=0 \quad , \forall x, \ y \in R \tag{1}$$

olur. n nin seçiminden y yerine y+1 yazılırsa,

$$0=(y+1)^{mk-1}[x,y^k] \quad , \forall x, \ y \in R \tag{2}$$

olur. (1),(2) ve lemma.2.8. den $[x,y^k]=0$ bulunur. Bu da $\forall$ $k \geq n$ için geçerli olduğundan $k=n$, $n+1$ için de geçerli olur. Böylece $x^{n+1}y=yx^{n+1}=x^n yx \Rightarrow x^{n+1}y=x^n yx \Rightarrow x^n[x,y]=0$ elde edilir. Tekrar n nin seçiminden x yerine x+1 yazabiliriz. Böylece $x^n[x,y]=0=(x+1)^n[x,y]$ ve lemma.2.8. den $[x,y]=0$ elde edilir ■

ÖRNEK:

$R = \{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in Z_p, \ p \text{ asal} \}$ alalım. Aşağıdaki

üç şıkta da p asal pozitif tamsayı olarak alındı.

(a) Eğer k tek tamsayı ise p,k nın herhangi bir sabit asal böleni olsun. Örneğin; k=3, p=3 ise o zaman ,

$R=\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in Z_3 \}$ olur. Böylece; x, y $\in$ R için

$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ olarak alınırsa,

$xy= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $yx= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ve dolayısıyla $xy \neq yx$ olur.

Öteyandan $(xy)^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ve $(yx)^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ dır. Yani;

$(xy)^3=(yx)^3$ olduğu halde R komütatif değildir.

(b) Eğer k çift tamsayı ve $k>2$ ise o zaman p, $k/2$ nin herhangi bir sabit asal böleni olsun. Örneğin; $k=4$, $p=2$ ise o zaman $R=\left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in Z_2 \right\}$ olur.

Bu durumda $x,y \in R$ için $x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ olarak

alınırsa, $xy= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $yx= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve dolayısıyla $xy \neq yx$ olur.

Öteyandan;

$(xy)^4= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (yx)^4$ olduğu halde R komütatif değildir.

(c) Eğer $k=2$ ve $p=2$ ise o zaman,

$R=\left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in Z_2 \right\}$ olur. Bu durumda $x,y \in R$ için

$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ olarak alınırsa;

$xy=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ ve $yx=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ ve dolayısıyla $xy\neq yx$ olur.

öteyandan $(xy)^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=(yx)^2$ olduğu halde R

komütatif değildir. Bu da teoremin hipotezinde verilen $(xy)^k=(yx)^k$ ve $(xy)^l=(yx)^l$ ifadelerinden biri olmadığında halkanın komütatif olmak zorunda olmadığını gösterir.

W.K.Nicholson-A.Yaqub (1979)

GRUPLAR VE HALKALAR İÇİN BİR KOMÜTATİFLİK TEOREMİ

LEMMA.2.9. R bir halka olsun. $\forall x,y\in R$ için $[x,[x,y]]=0$ ise o zaman her pozitif n tamsayısı için $[x^n,y]=nx^{n-1}[x,y]$ dir.

İSPAT: $x,y,z\in R$ için $[xz,y]=x[z,y]+[x,y]z$ dır. O halde $[x^k,y]=[xx^{k-1},y]=x[x^{k-1},y]+[x,y]x^{k-1}$ olur. Öteyandan $x[x,y]=[x,y]x$ olduğundan x in bir pozitif m kuvveti içinde $x^m[x,y]=[x,y]x^m$ dir. Böylece;

$$[x^k,y]=x[x^{k-1},y]+x^{k-1}[x,y] \tag{1}$$

elde edilir. Şimdi aynı işlemleri $[x^{k-1},y]$ için yapılırsa

$$[x^{k-1},y]=x[x^{k-2},y]+x^{k-2}[x,y] \tag{2}$$

elde edilir. (2) yi (1) de yerine yazılırsa;

$[x^k,y]=x(x[x^{k-2},y]+x^{k-2}[x,y])+x^{k-2}[x,y]$

$$=x^2[x^{k-2},y]+2x^{k-1}[x,y] \tag{3}$$

elde edilir. Tekrar aynı işlemleri $[x^{k-2},y]$ için yapılırsa

$$[x^{k-2},y]=x[x^{k-3},y]+x^{k-3}[x,y] \qquad (4)$$

elde edilir. (4), (3) te yerine yazılırsa $[x^k,y]=x^3[x^{k3},y]+3x^{k-1}[x,y]$ elde edilir. Aynı metodla devam edilirse $[x^k,y]=x^{k-1}[x,y]+(k-1)x^{k-1}[x,y]=kx^{k-1}[x,y]$ elde edilir.

LEMMA.2.10. R birimli bir halka ve $f:R \longrightarrow R$, $\forall x \in R$ için $f(x+1)=f(x)$ olacak biçimde bir fonksiyon olsun. Eğer bir n pozitif tamsayısı ve $\forall x \in R$ için $x^n f(x)=0$ ise o zaman $\forall x \in R$ için $f(x)=0$ dır.

İSPAT: $\forall x \in R$ için $x^n f(x)=0$ alalım. R birimli olduğundan x yerine x+1 yazılabilir. Bu durumda $\forall x \in R$ için;

$0=x^{n-1}(x+1)^n f(x)=x^{n-1}(x^n+nx^{n-1}+...+nx+1)f(x)$

$=x^{n-1}x^n f(x)+nx^{n-2}x^n f(x)+...+nx^n f(x)+x^{n-1}f(x)=x^{n-1}f(x)$

elde edilir. Aynı işlemleri $x^{n-1}f(x)=0$ için yapıp tekrar devam edilirse sonunda $xf(x)=0$ elde edilir. Öteyandan bu ifade de x yerine x+1 alınırsa, $xf(x)=0=(x+1)f(x) \Rightarrow \forall x \in R$ için $f(x)=0$ elde edilir.

Bu lemma kullanıldığında f(x) i genellikle y ve z, x'e bağlı olmamak üzere $f(x)=[x,y]z$ biçiminde alınacaktır.

TEOREM.2.11. R birimli ve asosiyatif bir halka olsun. k ve l aralarında asal sabit pozitif tamsayılar olmak üzere $\forall x,y \in R$ için $x^k y^k=y^k x^k$ ve $x^l y^l=y^l x^l$ ise o zaman R komütatiftir.

İSPAT: Teoremin ispatı bir takım iddiaların sonunda yapılacaktır.

1.İDDİA: R^* ve $R/J(R)$ komütatiftir.

İSPAT: [23, teorem.1.] den R^* komütatiftir. R^* nin hipotezleri aynı zamanda R nin althalkaları ve homomorfik görüntüleri için de geçerlidir. R/J(R) yarı basit olduğundan teorem.1.40. 'dan R/J(R), primitif halkaların bir altdirek toplamına izomorftur. Dolayısıyla teorem.1.37. den ya R/J(R) = D(D bir bölüm halkası) ya da bir n>1 tamsayısı için D_n, R/J(R) nin bir althalkasının homomorfik görüntüsüdür.

Eğer $R/J(R) \cong D$ ise o zaman [16, teorem.1.]' den R/J(R) komütatiftir.

Eğer n>1 tamsayısı için D_n, R nin bir althalkasının homomorfik görüntüsü ise o zaman n=2 için

$D_2 = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in I \}$ olur. Bu durumda $x,y \in D_2$ için

$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olarak alınırsa;

$x^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $y^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olur. Dolayısıyla ;

$x^2y^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $y^2x^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve böylece $x^2y^2 \neq y^2x^2$

bulunur. Bu nedenle teoremin hipotezlerini sağlayan bir primitif halka bir bölüm halkası olmak zorundadır.

2.İDDİA: J(R) komütatif ve $J(R)^2 \subseteq Z(R)$ dir.

İSPAT: a, b $\in$ J(R) alalım. Bu durumda 1+a ve 1+b tersinir ve dolyısıyla (1+a), (1+b) $\in R^*$ olur. 1.İddia dan R^*

komütatif olduğundan $(1+a)(1+b)=(1+b)(1+a) \Rightarrow 1+b+a+ab=1+a+b+ba \Rightarrow ab=ba$ olur. Böylece $J(R)$ komütatiftir.

Şimdi bir $y \in R$ alalım. $\forall a,b \in J(R)$ için $(ab)y=a(by)=(by)a=b(ya)=(ya)b=y(ab)$ olur. Dolayısıyla $ab \in Z(R)$ ve böylece $J(R)^2 \subseteq Z(R)$ olur.

k ve l aralarında asal olduğundan r ve s pozitif tamsayılar olmak üzere $rk-sl=1$ olur. Eğer $n=sl$ ise o zaman $rk=n+1$ ve dolyısıyla $\forall x,y \in R$ için $[x^n,y^n]=0$ ve $[x^{n+1},y^{n+1}]=0$ elde edilir.

<u>**3.İDDİA:**</u> $\forall a \in J(R)$ ve $\forall\ y \in R$ için $n[a,y^n]=0=(n+1)[a,y^{n+1}]$ dır.

<u>**İSPAT:**</u> $[a,y^n] \in J(R)$ ve $[1+a,\ y^n] \in J(R)$ dir. $a \in J(R)$ için $1+a=u$ dersek; $u,[a,y^n]$ ile komütatiftir. Çünkü $[a,y^n](1+a)=[a,y^n]+[a,y^n]a=[a,y^n]+a[a,y^n]=(1+a)[a,y^n]$ dır. Dolayısıyla $u \in R$ ve $y \in R$ olduğundan hipotezden $[u^n,\ y^n]=0$ ve böylece Lemma.2.9. dan $[u^n,y^n]=0=nu^{n-1}[u,y^n]$ elde edilir. $nu^{n-1}[u,y^n]=0=n(1+a)^{n-1}[1+a,y^n]=n(1+a)^{n-1}[a,y^n]=n[a,y^n]$ elde edilir. Benzer biçimde $[u^{n+1},y^{n+1}]=0$ hipotezini dikkate alır, işlemler yapılırsa $(n+1)[a,y^{n+1}]=0$ ifadesi elde edilir.

<u>**4.İDDİA**</u> $\forall a \in J(R)$ ve $\forall y \in R$ için $[a,y^{n+1}]=0$ dır.

<u>**İSPAT:**</u> 2. iddia dan $J(R)^2 \subseteq Z(R)$ idi. O halde hipotezden $[(y+a)^{n+1},y^{n+1}]=0$ ifadesi düşünülürse,

$$0=[(y+a)^{n+1},y^{n+1}]=[y^na+\ldots+ay^n,y^{n+1}] \quad (\mathrm{Mod}.Z(R)) \qquad (5)$$

dır. Çünkü;

$$\begin{aligned}(y+a)^3 &=(y+a)(y+a)(y+a)=(y^2+ya+ay+a^2)(y+a)\\ &=(y^3+y^2a+yay+ya^2+ay^2+aya+a^2y+a^3)\\ &=(y^3+y^2a+yay+ay^2) \qquad (\mathrm{Mod}.Z(R))\end{aligned}$$

dır. Bunu n+1 için $(y+a)^{n+1}=(y^{n+1}+y^{n}a+\ldots+ay^{n})$ (Mod. $Z(R)$) biçiminde yazılır ve böylece (5) elde edilir. (5) den

$$0=n[y^{n}a+y^{n-1}+\ldots+yay^{n-1}+ay^{n},\ y^{n+1}] \qquad (6)$$

yazılır. Öteyandan 3. iddia dan $nay^{n}=ny^{n}a$ idi. Böylece (6) dan $n(y^{n}a+y^{n-1}+\ldots+yay^{n-1}+ay^{n})y^{n+1}$

$$=y^{n}nay^{n+1}+y^{n-1}nay^{n+2}+\ldots+ynay^{2n}+nay^{2n+1}$$

$$=n(y^{2n}ay+y^{2n-1}ay^{2}+\ldots+y^{n+1}ay^{n})+nay^{2n+1}$$

ve $ny^{n+1}(y^{n}a+y^{n-1}ay+\ldots+yay^{n-1}+ay^{n})$

$$=ny^{2n+1}a+n(y^{2n}ay+y^{2n-1}ay^{2}+\ldots+y^{n+1}ay^{n-1})$$ elde edilir. Dolayısıyla buradan $nay^{2n+1}=ny^{2n+1}a$ $\Rightarrow n(ay^{2n+1}-y^{2n+1}a)=0 \Rightarrow n[a,y^{2n+1}]=0$ olur. Buradan da;

$$0=n[a,y^{2n+1}]=n[a,\ y^{2n}y]=n\{[a,y^{2n}]y+y^{2n}[a,y]\}$$

$$=n[a,y^{n}y^{n}]y+ny^{n}[a,y^{n}]+ny^{2n}[a,y]$$

$$=ny^{2n}[a,y]$$

elde edilir. Böylece lemma.2.10. dan $n[a,y]=0$ olur. 3. iddia dan $(n+1)[a,y^{n+1}]=0$ idi. O halde;

$$(n+1)[a,y^{n+1}]=0=n[a,y^{n+1}]+[a,y^{n+1}]$$

$$=n[a,y^{n}]y+ny^{n}[a,y]+[a,y^{n+1}]=[a,y^{n+1}]$$

bulunur.

5. İDDİA: $J(R)\subseteq Z(R)$ dir.

İSPAT: 4. İddianın ispatındaki gibi $a\in J(R)$, $y\in R$ alınırsa;

$$0=[(y+a)^{n},\ y^{n}]=[y^{n-1}a+\ldots+ay^{n-1},y^{n}] \text{ (Mod. } Z(R)) \qquad (7)$$

olur. Ayrıca 4. iddia dan $0=[a,y^{n+1}] \Rightarrow ay^{n+1}=y^{n+1}a$ idi. Böylece (7) den

$$(y^{n-1}a+y^{n-2}ay+\ldots+yay^{n-2}+ay^{n-1})y^{n}$$

$$=y^{n-1}ay^{n}+(y^{2n-1}a+y^{2n-2}ay+\ldots+y^{n+1}ay^{n-2})$$

ve $y^{n}(y^{n-1}a+y^{n-2}ay+\ldots+yay^{n-2}+ay^{n-1})$

$$=(y^{2n-1}a+y^{2n-2}ay+\ldots+y^{n+1}ay^{n-2})+y^{n}ay^{n-1}$$

elde edilir. Buradan da $y^{n-1}ay^{n}=y^{n}ay^{n-1}$ bulunur. Bu ifadeyi sağdan ve soldan y ile çarpılırsa, $y^{n}ay^{n+1}= y^{n+1}ay^{n} \Rightarrow y^{2n+1}a=ay^{2n+1}$ elde edilir.

Bu ifadeyi kullanıp, $y^{n-1}a=y^{n}ay^{n-1}$ ifadesini sağdan ve soldan y ile çarpılarak, $y^{n}ay^{n+1}=y^{n+1}ay^{n}$ ifadesi bulunmuştu. Şimdi buradan, $y^{n}y^{2n+1}=y^{n+1}ay^{n} \Rightarrow$ $y^{2n+1}a=y^{n+1}ay^{n} \Rightarrow$

$ay^{2n+1}=y^{n+1}ay^{n} \Rightarrow ay^{2n+2}=y^{n+1}ay^{n+1} \Rightarrow ay^{2n+2}=y^{2n+2}a$ olur. Böylece buradan,

$$0=ay^{2n+2}-y^{2n+2}a=[a,\ y^{2n+2}]$$

$$=[a,\ y^{2n+1}]y+y^{2n+1}[a,y]$$

$$=y^{2n+1}[a,y],\quad \forall\ y \in R \text{ ve } \forall a \in J(R)$$

elde edilir. Böylece lemma.2.10 dan $[a,y]=0$ ve dolayısıyla $J(R) \subseteq Z(R)$ bulunur.

Şimdi teoremin ispatını tamamlayalım. $x,y \in R$ alalım. $R/J(R)$ komütatif olduğundan $x,y \in R/J(R)$ için $xy-yx= 0 \Rightarrow (xy-yx)+J(R)=J(R) \Rightarrow xy-yx \in J(R)$ ve böylece $[x,y] \in Z(R)$ olur. O halde, lemma.2.9. dan $0=[x^{n},y^{n}]= nx^{n-1}[x,y^{n}]$ bulunur. Dolayısıyla lemma.2.10. dan $n[x,y^{n}]=0$ olur. Tekrar lemma.2.9. dan $n^{2}y^{n-1}[x,y]=0=n[x,y^{n}]$ ve dolayısıyla Lemma.2.10. dan $n^{2}[x,y]=0$ elde edilir. Aynı metod $[x^{n+1},y^{n+1}]=0$ için yapılırsa $(n+1)^{2}[x,y]=0$ elde ederiz. Böylece buradan da; $n^{2}[x,y]+2n[x,y]+[x,y] =0 \Rightarrow 2n[x,y]+[x,y]=0 \Rightarrow 2n^{2}[x,y]+n[x,y]=0 \Rightarrow n[x,y]=0$ bulunur. Böylece $(n+1)^{2}[x,y]=0=n^{2}[x,y]+2n[x,y]+[x,y]$ den $[x,y]=0$ olur ve ispat biter ∎

ÖRNEK: $k>1$ bir tamsayı ve p, k yı bölen herhangi asal sayı olsun.

$R_k=\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in Z_p,\ p \text{ asal}\}$ biçiminde tanımla-

yalım. Örnek olarak k=3 ve p=3 olsun. Bu durumda;

$$R_3=\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in Z_3\} \text{ olur. } x,\ y \in R_3 \text{ için;}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ olarak alınırsa;}$$

$xy= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ve $yx= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ve dolayısıyla $xy \neq yx$ olur.

Öteyandan $x^3= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $y^3= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ve dolayısıyla,

$$x^3y^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ y^3x^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Böylece $x^3y^3 = y^3x^3$ olduğu halde R komütatif değildir. Bu da teoremin hipotezinde verilen $x^ky^k = y^kx^k$ ve $x^ly^l = y^lx^l$ ifadelerinden biri olmadığında halkanın komütatif olmak zorunda olmadığını gösterir∎

H.Abu-Khuzam – A.Yaqub (1980)

KOMMUTING KUVVETLİ n-TORSİON FREE HALKALAR

<u>LEMMA.2.12.</u> R birimli bir halka olsun. $\forall x,\ y \in R$ için

$[x,[x,y]]=0$ ise o zaman $\forall k>0$ tamsayısı için $[x^k,y]=kx^{k-1}[x,y]$ dir.

İSPAT: Lemma.2.9. da yapıldı.

LEMMA.2.13. R birimli bir halka olsun. $\forall x,y \in R$ ve bir $m>0$ tamsayı için $x^m[x,y]=0=(x+1)^m[x,y]$ ise o zaman $[x,y]=0$ dır.

İSPAT: Lemma.2.8. deki gibi yapılır.

LEMMA.2.14. n, sabit pozitif bir tamsayı olmak üzere R birimli ve n-torsion free bir halka olsun. $\forall x, y \in R$ için $[x^n,y^n]=0$ ise o zaman;

(i) $a \in N$, $x \in R$ için $[a,x^n]=0$ dır.

(ii) $a, b \in N$ için $[a,b]=0$ dır.

İSPAT: **(i)** Keyfi $a \in N$ ve $x \in R$ alalım. a, nilpotent olduğundan $\forall x \in R$ ve $\forall k \geq m$ için $[a^k,x^n]=0$ olacak biçimde bir m pozitif tamsayısı vardır. İşte böyle tamsayıların en küçüğü m olsun. Yani; $m_o (m_o \geq 1)$ minimal olmak üzere,

$$[a^k,x^n]=0, \ \forall x \in R \text{ ve } \forall k \geq m_o \qquad (1)$$

olsun. İddiamız $m_o=1$ dır. $m_o \neq 1$ olsun. Bu durumda $m_o \geq 2$ dır. Ayrıca lemma nın $[x^n,y^n]=0$ hipotezinden,

$$[(1+a^{mo-1})^n,x^n]=0 \ , \quad \forall x \in R \qquad (2)$$

dır. O halde ; (1) ve (2) den,

$$\begin{aligned} 0&=[(1+a^{mo-1})^n, \ x^n] \\ &=[(1+na^{mo-1}+\ldots+na^{(mo-1)(n-1)}+a^{(mo-1)n},x^n] \\ &=[1,x^n]+n[a^{mo-1},x^n]+\ldots+[a^{(mo-1)n},x^n] \\ &=n[a^{mo-1},x^n] \end{aligned}$$

elde edilir. R n-torsion free olduğundan $[a^{mo-1},x^n]=0$ olur. Bu ise (1) deki m_o ın minimal olmasıyla çelişir. O halde $m_0=1$ ve dolayısıyla (1) den $[a,x^n]=0$ olur.

(ii) $a,b \in N$ alalım. (i) de $\forall x \in R$ için $[a,x^n]=0$ olduğu gösterildiğine göre $[a,b^n]=0$ dır. Şimdi (i) deki metod tekrar uygulanırsa, $\forall k \geq p$ için $[a,b^k]=0$ olacak biçimde bir pozitif tamsayı vardır. İşte böyle pozitif tamsayıların en küçüğü p_0 olsun. Yani; $p_0 (p_0 \geq 1)$ minimal pozitif tamsayı olmak üzere,

$$[a,b^k]=0 \quad , \forall k \geq p_0 \tag{3}$$

olsun iddia $p_0=1$ dir. $p_0 \neq 1$ ve $P_0 \geq 2$ olsun. (i) den,

$$[a,(1+b^{p_0-1})^n]=0 \tag{4}$$

dır. (3), (4) kullanılır ve (i) deki gibi işlemler yapılırsa bir çelişki elde edilir. Böylece; $p_0=1$ ve dolayısıyla (3) den $[a,b]=0$ elde edilir ■

<u>LEMMA.2.15.</u> n, sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere R birimli ve n-torsion free bir halka olsun. $\forall x, y \in R$ için $[x,y^n]=0$ ise o zaman $N \subseteq Z(R)$ dir.

<u>İSPAT:</u> $a \in N$ ve $x \in R$ alalım. a, nilpotent olduğundan lemma.2.14. de yaptığımız gibi $q_0 (q_0 \geq 1)$ minimal tamsayı olmak üzere ;

$$[x,a^k]=0 \quad , \forall x \in R \text{ ve } \forall k \geq q_0 \tag{5}$$

olsun. İddia $q_0=1$ dir. $q_0>1$ olsun. Hipotezden $[x,(1+a^{q_0-1})^n]=0$ dır. Böylece lemma.2.14 deki metod kullanılırsa $[x, a^{q_0-1}]=0$ elde edilir. Bu ise (5) deki q_0 ın minimal olmasıyla çelişir. O halde; (5) den $[a,x]=0$ ve dolyısıyla $N \subseteq Z(R)$ olur ■

<u>TEOREM.2.16.</u> R birimli, n-torsion free bir halka olsun ve n, k sabit pozitif tamsayı olmak üzere, $(n,k)=1$ olacak biçimde verilsin. Buna göre $\forall x, y \in R$ için

$[x^n,y^n]=0$ ve $[x^k,y^k]\in Z(R)$ ise o zaman R komütatiftir.

İSPAT: R nin bütün k. kuvvetten elemanlarının kümesi S olsun. Bu durumda $[x^k,y^k]\in Z(R)$ olduğu için,

$$[[a,b],x]=0,\ \forall a,\ b\in S,\ \forall x\in R \qquad (6)$$

dir. Şimdi a, b ∈ S olsun. Bu durumda $[a^n,b^n]=0$ dır. b^n ∈ S olduğu açık. Böylece (6) ve lemma.2.12. den $0=[a^n,b^n]=na^{n-1}[a,b^n]$ dir. R n-torsion free olduğundan,

$$a^{n-1}[a,b^n]=0,\quad \forall a,\ b\in S \qquad (7)$$

dır. $[a^n,b^n]=0$ da hipotezden dolayı a yerine 1+a yazılırsa, $[(a+1)^n,b^n]=0$ ve $0=n(a+1)^{n-1}[a+1,b^n]$ olur. R, n-torsion free olduğundan;

$$(a+1)^{n-1}[a,b^n]=0\ ,\quad \forall a,b\in S \qquad (8)$$

elde edilir. Böylece (7),(8) ve lemma.2.13. den $[a,b^n]=0$ bulunur. Burada Lemma.2.12. kullanılırsa $[a,b^n]=0$ $=nb^{n-1}[a,b]$ elde edilir. R n-torsion free olduğundan ;

$$b^{n-1}[a,b]=0\ ,\ \forall a,\ b\in S \qquad (9)$$

olur. $[a,\ (b+1)^n]=[a,b^n]+n[a,b^{n-1}]+...+n[a,b]$ olduğu bilinmektedir. a, b ∈ S olduğundan $[x^k,\ y^k]\in Z(R)$ kullanılırsa $[a,b^n]$, $[a,b^{n-1}],...,[a,b]\in Z(R)$ olur. Böylece ; $[a^n,\ (b+1)^n]=0$ ve Lemma.2.12. den $na^{n-1}[a,\ (b+1)^n]=0$ bulunur. R n-torsion free olduğundan $a^{n-1}[a,\ (b+1)^n]=0$ olur. $[a^n,\ (b+1)^n]=0$ ifadesinde a yerine a+1 alıp, yukarıdaki işlemleri tekrar yapılırsa; $(a+1)^{n-1}[a,\ (b+1)^n]=0$ elde edilir. Böylece $a^{n-1}[a,(b+1)^n]=0=(a+1)^{n-1}[a,(b+1)^n]$ ve lemma.2.10 dan $[a,(b+1)^n]=0$ elde edilir. Bu ifadeye (7)'den (9)'a kadar yapılan işlemlerin aynısı yapılırsa ;

$$(b+1)^{n-1}[a,b]=0 \ , \ \forall a,\ b \in S \qquad (10)$$

elde edilir. Böylece (9), (10) ve lemma.2.13. den $[a,b]=0$ ve dolyısıyla $\forall x,\ y \in R$ için $[x^k,y^k]=0$ olur. O halde ; teorem.2.11. den R komütatiftir ∎

TEOREM.2.17. R birimli ve n-torsion free bir halka olsun. n, k sabit pozitif tamsayılar ve $(n,k)=1$ olmak üzere, $\forall x,\ y \in R$ için $[x^n,y^n]=0$ ve $(xy)^k-(yx)^k \in Z(R)$ ise o zaman R komütatiftir.

İSPAT: $\forall x,\ y \in R$ için $[x^n,y^n]=0$ oldugundan lemma.2.14. (ii) den N komütatif bir ideal, [9,teorem.1.] den D(R) nildir. Bu durumda $a,\ b \in N$ ve $r \in R$ için $(ab)r=a(br)=(br)a=(ra)b=r(ab)$ olur. O halde ;

$$N^2 \subseteq Z(R) \ , \ \forall a \in N \ , \ \forall y \in R \qquad (11)$$

olur. Böylece ;

$$(ay+y)^k=(ay+y)(ay+y)\ldots(ay+y)$$
$$=y^k+ay^k+yay^{k-1}+\ldots+y^{k-1}ay \ (\mathrm{Mod}.Z(R) \qquad (12)$$
$$(ya+y)^k=(ya+y)(ya+y)\ldots(ya+y)$$
$$=y^k+y^ka+yay^{k-1}+\ldots+y^{k-1}ay \ (\mathrm{Mod}.Z(R) \qquad (13)$$

elde edilir. Dolyısıyla (12) ile (13) birbirinden çıkartılırsa $(ay+y)^k-(ya+y)^k=ay^k-y^ka \ \ (\mathrm{Mod}.N^2) \Rightarrow$ $(ay+y)^k-(ya+y)^k-(ay^k-y^ka) \in N^2$ dir. Böylece (12) den $(ay+y)^k-(ya+y)^k-(ay^k-y^ka)=z \in Z(R)$ ve dolayısıyla,

$$(ay+y)^k-(ya+y)^k=(ay^k-y^ka)+z \ , \ z\in Z(R) \qquad (14)$$

$$(ay+y)^k-(ya+y)^k=((a+1)y)^k-(y(a+1))^k \qquad (15)$$

elde edilir. Böylece (14) ve (15) den ,

$$ay^k-y^ka \in Z(R) \ , \ \forall a \in N,\ \forall y \in R \qquad (16)$$

olur. Şimdi ; S, R nin bütün k. kuvvetten elamanları kümesi olsun. O halde ; (16) dan ,

$$[a,x] \in Z(R)\ ,\ \forall a \in N,\ \forall x \in S \tag{17}$$

olur. Öteyandan lemma.2.14.(i) den,

$$[a,x^n]=0,\ \forall a \in N,\ \forall x \in R \tag{18}$$

bulunur. Dolayısıyla $\forall a \in N$ ve $\forall x \in S$ için $[a,x^n]=0$ ve $[a,(x+1)^n]=0$ olur. Bu durumda (17) ve Lemma.2.12. den $nx^{n-1}[a,x]=0$, $n(x+1)^{n-1}[a,x]=0$ dır ve dolayısıyla R n-torsion free olduğundan $x^{n-1}[a,x]=0=(x+1)^{n-1}[a,x]$ elde edilir. Böylece lemma.2.13. den ,

$$[a,x]=0\ ,\ \forall a \in N\ ,\ \forall x \in S \tag{19}$$

dir. (19) ve D(R) nil olduğundan;

$$[x,[x,y]]=0\ ,\ \forall x,\ y \in R \tag{20}$$

olur. Böylece (20) ve Lemma.2.12. den $nx^{n-1}[x,y^n]=0$ ve R n-torsion free olduğundan $x^{n-1}[x,y^n]=0$ olur. Yani;

$$x^{n-1}[x,y^n]=0\ ,\ \forall x \in S\ ,\ \forall y \in R \tag{21}$$

dır. $[x^n,y^n]=0$ ifadesinde x yerine x+1 yazılırsa $[(x+1)^n,y^n]=0$ olur. Böylece (20) ve Lemma.2.12. den

$$(x+1)^{n-1}[x,y^n]=0\ ,\ \forall x \in S\ ,\ \forall y \in R \tag{22}$$

elde edilir. Dolayısıyla (21), (22) ve Lemma.2.13. den ,

$$[x,y^n]=0\ ,\ \forall x \in S\ ,\ \forall y \in R \tag{23}$$

olur. Şimdi (20), (23) ve Lemma.2.12. den $ny^{n-1}[x,y]=0$ ve R n-torsion free olduğundan;

$$y^{n-1}[x,y]=0\ ,\ \forall x,\ y \in S \tag{24}$$

elde edilir. (23) de y yerine y+1 yazılırsa ,

$$(y+1)^{n-1}[x,y]=0\ ,\ \forall x,\ y \in S \tag{25}$$

elde edilir. Böylece (24), (25) ve Lemma.2.13. den ,

$$[x,y]=0\ ,\ \forall x,\ y \in S \tag{26}$$

elde edilir. Yani ; $\forall x,\ y \in R$ için $[x^k,y^k]=0$ ve dolayısıyla teorem.2.7. den R komütatiftir ■

UYARI:

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \;\middle|\; a,b,c,d \in Z_2 \right\}$$ olsun. k=1 ve n=2 için R halkası teorem.2.17. deki " n-torsion free " hipotezinden başka diger hipotezleri sağladığı halde komütatif degildir. Bu da R halkasının n-torsion free hipotezinin gerekli olduğunu gösterir ■

H.Abu-Khuzam - H.Tominaga - A.Yaqub (1980) POLİNOMSAL ÖZELLİKLER SAGLAYAN s-UNITAL HALKALAR İÇİN KOMÜTATİFLİK TEOREMLERİ

TANIM.2.18. R bir halka olmak üzere $\forall x \in R$ için $x \in xR \cap Rx$ ise R halkasına s-unital halka denir.

UYARI.2.19. R bir s-unital halka ve F, R nin sonlu bir altkümesi olsun. Buna göre, $\forall x \in F$ için $ex=xe=x$ olacak biçimde bir $e \in R$ vardır. [28]

TANIM.2.20. R bir s-unital halka olsun. R nin sonlu bir F altkümesinin her x elamanı için $ex=x=xe$ olacak biçimde $e \in R$ elemanına pseudo-birim denir.

LEMMA.2.21. n ve m birer sabit pozitif tamsayı olsun.

(i) R bir halka ve a, b $\in$ R olmak üzere $[a,[a,b]]=0$ ise o zaman $[a^n,b]=na^{n-1}[a,b]$ dır.

(ii) R bir s-unital halka ve e, $\{a,b\} \subseteq R$ nin bir pseudo-birimi olsun. Buna göre, $a^m b=0=(a+e)^m b$ ise o zaman $b=0$ dır.

(iii) R bir halka olsun $\forall x, y \in R$ için $[x^n,y^n]=0$

veya $(xy)^{n+1}-x^{n+1}y^{n+1}=0$ ise o zaman $D(R)\subseteq N$ dir.

(iv) R bir s-unital halka olsun. $\forall x, y \in R$ için, $[x^n,y^n]=0$ ise o zaman $k[x^n,y]=0$ olacak biçimde bir k pozitif tamsayısı vardır.

__İSPAT:__ **(i)** lemma.2.9. da yapıldı.

(ii) e, $\{a,b\}\subset R$ nin pseudo-birimi olduğuna göre $ae=ea=a$ ve $be=eb=b$ dır. $(a+e)^m=0$ ifadesini soldan a^{m-1} ile çarpıp, $(a+e)^m$ nin binom açılımı yapılırsa

$$\begin{aligned}0&=a^{m-1}(a+e)^m b\\ &=a^{m-1}\{a^m+ma^{m-1}e+\ldots+mae^{m-1}+e^m\}b\\ &=a^{m-1}\{a^m+ma^{m-1}+\ldots+ma+e\}b\\ &=a^{m-1}a^m b+ma^{m-2}a^m b+\ldots+ma^m b+a^{m-1}b\\ &=a^{m-1}b\end{aligned}$$

elde edilir. Öteyandan $0=a^m b=\{-e+(a+e)\}^m b$ ifadesini soldan $(a+e)^{m-1}$ ile çarpıp $\{-e+(a+e)\}^m$ nin binom açılımı yapılırsa ,

$$\begin{aligned}0&=(a+e)^{m-1}\{-e+(a+e)\}^m b\\ &=(a+e)^{m-1}\{(-e)^m+m(-e)^{m-1}(a+e)+\ldots+(a+e)^m\}b\\ &=(a+e)^{m-1}b+m(a+e)^m b+\ldots+(a+e)^{m-1}(a+e)^m b\\ &=(a+e)^{m-1}b\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $a^{m-1}b=0=(a+e)^{m-1}b$ olur. Bu metodla devam edilirse $ab=0=(a+e)b \Rightarrow ab=0=ab+b \Rightarrow b=0$ bulunur.

(iii) $\forall x,y \in R$ için $(xy)^{n+1}-x^{n+1}y^{n+1}=0$ ise [6,teorem.1] den $D(R)\subseteq N$ dir. Öteyandan $\forall x, y \in R$ için $[x^n,y^n]=0$ ise [9,teorem.1] den $D(R)\subseteq N$ dir.

(iv) x ve y R nin keyfi elemanları ve e, $\{x,y\}$ nin bir pseudo-birimi olsun. $[x^n,y^n]=0$ da y nin yerine y+e yazılırsa , $[x^n,(y+e)^n]=0$ olur. $[x,y_1+y_2+\ldots+y_n]$

$=[x,y_1]+[x,y_2]+\ldots+[x,y_n]$ olduğuna göre,

$$0=[x^n,(y+e)^n]$$

$$=[x^n,y^n+ny^{n-1}e+\ldots+nye^{n-1}+e^n]$$

$$=[x^n,y^n]+[x^n,ny^{n-1}]+\ldots+[x^n,y^n]+[x^n,e]$$

$$=[x^n,ny^{n-1}]+[x^n,\binom{n}{2}y^2]+\ldots+[x^n,ny^{n-1}]$$

elde edilir. Bu ifade de $i=1,2,3,\ldots,n-1$ olmak üzere y yerine iy yazılırsa,

$$=[x^n,n(iy)]+[x^n,\binom{n}{2}(iy)^2]+\ldots+[x^n,n(iy)^{n-1}]$$

$$=i[x^n,ny]+i^2[x^n,\binom{n}{2}y^2]+\ldots+i^{n-1}[x^n,ny^{n-1}]$$

elde edilir. Bu denklem sistemi açık olarak ;

$$0=[x^n,ny]+[x^n,\binom{n}{2}y^2]+\ldots+[x^n,ny^{n-1}]$$

$$0=2[x^n,ny]+2^2[x^n,\binom{n}{2}y^2]+\ldots+2^{n-1}[x^n,ny^{n-1}]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0=(n-1)[x^n,ny]+(n-1)^2[x^n,\binom{n}{2}y^2]+\ldots+(n-1)^{n-1}[x^n,ny^{n-1}]$$

biçiminde yazılabilir. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı ;

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2 & 2^2 & \ldots & 2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (n-1) & (n-1)^2 & \ldots & (n-1)^{n-1} \end{vmatrix} = d \neq 0$$

dır. O halde ; denklem sisteminin tek çözümü; sıfır çözümüdür. $x_1=[x^n,ny]=0 \Rightarrow n[x^n,y]=0$ bulunur. $n=k$ olarak alınırsa $k[x^n,y]=0$ elde edilir∎

LEMMA.2.22. n, sabit bir pozitif tamsayı ve R, her komütatörü n-torsion free olan bir s-unital halka olsun.

(i) m, pozitif bir tamsayı olmak üzere $\forall x,\ y \in$

R için $nx^m[x,y]=0$ ise R komütatiftir.

(ii) $\forall x,\ y \in R$ için $[x^n,y]=0$ ise o zaman R komütatiftir.

İSPAT: (i) x ve y, R nin keyfi elemanları ve e de $\{x,y\}$ nin bir pseudo-birimi olsun.

$nx^m[x,y]=0$ denkleminde x yerine x+e yazılırsa $n(x+e)^m[x+e,\ y]=0 \Rightarrow n(x+e)^m[x,y]=0$ elde edilir. Böylece lemma.2.20.(ii) den $n[x,y]=0$ ve dolayısıyla $[x,y]=0$ elde edilir.

(ii) $[x^n,y]=0$ olduğundan Lemma.2.21. (ii) den $D(R)\subseteq N$ dir. $N\subseteq Z(R)$ olduğunu gösterelim. $u \in N$ alalım. Bu durumda $\forall y \in R$ için $[u,y]=0$ olduğu gösterilmelidir. u nilpotent olduğundan $\forall\ k\geq m$ tamsayılar için $[u^k,y]=0$ olacak biçimde minimal pozitif bir m tamsayısı vardır. Eğer $m\geq 2$ ise ozaman e, $\{u,y\}$ nin bir pseudo-birimi olmak üzere hipotezden ;

$$\begin{aligned}0&=[(e+u^{m-1}),\ y]\\&=[e^n+ne^{n-1}u+\ldots+neu^{(m-1)(n-1)}+u^{(m-1)n},\ y]\\&=[e,y]+[nu^{m-1},y]+\ldots+[nu^{(m-1)(n-1)},y]+[u^{(m-1)n},y]\\&=n[u^{m-1},\ y]\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $[u^{m-1},\ y]=0$ olur. Bu ise m nin minimal olmasıyla çelişir. O halde ; $N\subseteq C(R)$ olur. Dolayısıyla $D(R)\subseteq N \subseteq Z(R)$ olduğu gösterilmiş olur ki bu da keyfi $x,\ y \in R$ elemanları için $[x,\ [x,y]]=0$ verir. Böylece lemma.2.22.(i) den $[x^n,\ y]=0=nx^{n-1}[x,y]]$ olur. Dolayısıyla (i) şıkkından R komütatif olur∎

TEOREM.2.23. n, sabit bir pozitif tamsayı ve R her komütatörü n-torsion free olan bir s-unital halka olsun. $\forall x,y \in R$ için $[x^n,y^n]=0$ ve $[x,(xy)^n-(yx)^n]=0$ ise o zaman R komütatiftir.

İSPAT: İlk önce $\forall d \in R$ ve $\forall u \in N$ için $[u,d^n]=0$ olduğunu gösterelim. f, $\{d,u\}$ nın bir pseudo-birimi olsun. u nilpotent olduğundan $\forall i \geq m$ tamsayılar için $[u^i, d^n]=0$ olacak biçimde m minimal pozitif tamsayısı vardır. Eğer $m \geq 2$ ise o zaman ;

$$
\begin{aligned}
0&=[(f+u^{m-1})^n,d^n]=[f^n+nf^{n-1}u^{m-1}+\ldots+fu^{(m-1)n},d^n]\\
&=[f+nu^{m-1})+\ldots+u^{(m-1)n},d^n]\\
&=[f,d^n]+[nu^{m-1},d^n]+\ldots+[u^{(m-1)n},d^n]\\
&=n[u^{m-1},d^n]
\end{aligned}
$$

elde edilir. R nin her komütatörü n-torsion free olduğundan $[u^{m-1},d^n]=0$ elde edilir. Bu ise m nin minimal olmasıyla çelişir. O halde ;

$$[u,d^n]=0 \;,\; \forall u \in N \;,\; \forall d \in R \qquad (1)$$

dır. Hipotezde $[x^n,y^n]=0$ olduğundan lemma.2.21.(iv) den $k[x^n,y]=0$ olacak biçimde bir pozitif k tamsayısı vardır. Lemma.2.21.(iii) den $D(R) \subseteq N$ olduğundan $[x^n,y] \in N$ dir. Böylece (1) den $[x^n, [x^n,y]]=0$ dır. Dolayısıyla lemma.2.21.(i) den $[x^{nk},y]=kx^{n(k-1)}[x^n,y]=0$ dır. Şimdi R nin keyfi a, b elemanlarını alalım. e, $\{a,b\}$ nin bir pseudo-birimi olsun. Bu durumda $[x,(xy)^n-(yx)^n]=0$ hipoteziyle (1) birleştirilirse ,

$$
\begin{aligned}
0&=[a,(a^{nk}b)^n-(a^{nk-1}ba)^n]\\
&=[a,(a^{nk}b)(a^{nk}b)\ldots(a^{nk}b)-(a^{nk-1}ba)(a^{nk-1}ba)\ldots\\
&\qquad\qquad (a^{nk-1}ba)]\\
&=[a,(a^{nk})^n b^n-a^{nk-1}b(a^{nk}b)^{n-1}a]
\end{aligned}
$$

$=[a,a^{n^2k}b^n-a^{nk-1}a^{nk(n-1)}b^na]$

$=[a,a^{n^2k}b^n-a^{nk-1}a^{(n^2k-nk)}b^na]$

$=[a,a^{n^2k}b^n-a^{nk-1}a^{n^2k-1}b^na]$

$=[a,aa^{n^2k-1}b^n-a^{nk-1}a^{n^2k-1}b^na]$

$=[a,[a,a^{n^2k-1}b^n]]$

$=a^{n^2k-1}[a,[a,b^n]]$

dır. Benzer biçimde $0=(a+e)^{n^2k-1}[a,[a,b^n]]$ elde edilir. Böylece lemma.2.21.(ii) den $[a,[a,b^n]]=0$ dır. Dolayısıyla lemma.2.21.(i) den $na^{n-1}[a,b^n]=0$ dır. Ayrıca $n(a+e)^{n-1}[a,b^n]=0$ olacağından lemma.2.21.(ii) den $n[a,b^n]=0$ ve R nin her komütatörü n-torsion free olduğundan $[a,b^n]=0$ dır. Böylece lemma.2.22.(ii) den R komütatiftir∎

SONUÇ.2.24. n, sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere R her komütatörü n-torsion free olan bir s-unital halka olsun. $\forall x,\ y \in R$ için $(xy)^n-(yx)^n=0$ ise R komütatiftir.

İSPAT: [28, teorem.3.] nin son hipotezin ispatından $[x^n,y^n]=0$ olduğu kolayca görülür. Böylece teorem.2.23 den R komütatiftir∎

TEOREM.2.25. n, sabit bir tamsayı ve R her komütatörü (n+1)n torsion free olan bir s-unital halka olsun. $\forall x,y \in R$ için $(xy)^{n+1}-x^{n+1}y^{n+1}=0$ ise o zaman R komütatiftir.

İSPAT: İlk olarak $\forall d \in R$ ve $\forall u \in N$ için $[u,d^{n+1}]=0$ olduğunu gösterelim. f, {u,d} nin pseudo-birimi olsun. Eğer u_o , u nun bir quasi-inverse ise o zaman $fu_o=u_of=u_o$ ve $\Phi:R \longrightarrow R$, $x \longrightarrow x-xu+u_oxu$ dönüşümü R nin bir otomorfizmasıdır.

f, u nun bir pseudo-birimi olduğuna göre $fu=uf=f$ dir. Öteyandan $u \in N$ olduğuna göre nilpotentlik indeksi m olmak üzere $u^m=0$ dır. $u_0=-u+u^2-\ldots+(-1)^{m-1}u^{m-1}$ olmak üzere $u+u_0+u_0u=0$ olacak biçimde bir $u_0 \in R$ vardır.

$$
\begin{aligned}
fu_0 &= f(-u+u^2-\ldots+(-1)^{m-1}u^{m-1}) \\
&= f(-u)+fu^2-\ldots+f(-1)^{m-1}u^{m-1} \\
&= -u+u^2-\ldots+(-1)^{m-1}u^{m-1} \\
&= u_0
\end{aligned}
$$

olur. Benzer biçimde $u_0f=u_0$ dır. Hipotezden ;

$$
\begin{aligned}
0 &= (d(f-u))^{n+1}-d^{n+1}(f-u)^{n+1} \\
&= d^{n+1}(f-u)^{n+1}(f-u_0)-d^{n+1}(f-u)^n(f-u)(f-u_0) \\
&= (f-u)^{n+1}(f-u_0)^{n+1}d^{n+1}(f-u)^{n+1}(f-u_0)-d^{n+1}(f-u)^n \\
&= (f-u)^{n+1}((f-u_0)^{n+1}d^{n+1}(f-u)^{n+1})(f-u_0)-d^{n+1}(f-u)^n \\
&= (f-u)^{n+1}\Phi(d)^{n+1}(f-u_0)-d^{n+1}(f-u)^n \\
&= (f-u)^{n+1}\Phi(d^{n+1})(f-u_0)-d^{n+1}(f-u)^n \\
&= (f-u)^{n+1}(f-u_0)d^{n+1}(f-u)(f-u_0)-d^{n+1}(f-u)^n \\
&= (f-u)^n d^{n+1}-d^{n+1}(f-u)^{n+1} \\
&= [(f-u)^n,d^{n+1}], \quad \forall u \in N \ , \ \forall d \in R \qquad (2)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu durumda $\forall i \geq m$ için $[u^i,d^{n+1}]=0$ olacak biçimde minimal m pozitif tamsayısını seçelim. Bu durumda (2) den $[(f-u^{m-1})^n, d^{n+1}]=0$ dır. Buradan ,

$$
\begin{aligned}
0 &= [(f-u^{m-1})^n, d^{n+1}] \\
&= [f^n-nu^{m-1}f^{n-1}+\ldots+(-1)^{n-1}fu^{(m-1)(n-1)}+u^{(m-1)n},d^{n+1}] \\
&= [f-nu^{m-1}+\ldots+(-1)^{n-1}u^{(m-1)(n-1)}+u^{(m-1)n},d^{n+1}] \\
&= [f,d^{n+1}]+[-nu^{m-1},d^{n+1}]+\ldots+[u^{(m-1)n},d^{n+1}] \\
&= n[u^{m-1},d^{n+1}]
\end{aligned}
$$

elde edilir. R nin her komütatörü n-torsion free olduğundan $0=[u^{m-1},d^{n+1}]$ dır. Bu ise m nin minimal olmasıyla çelişir. O halde ;

$$[u, d^{n+1}]=0 \quad , \forall u \in N \quad , \forall d \in R \qquad (3)$$

dır. R^*, R nin bütün $(n+1)$. kuvvetten elemanların ürettiği bir althalka olsun. Bu durumda R^* nin bütün nilpotent elemanları kümesini N^* ve merkezini de Z^* ile gösterelim. $N^* \subseteq Z^*$ olduğu (3) de gösterildi. Üstelik lemma.2.21.(iii) den $D(R^*) \subseteq N^*$ ve dolayısıyla $D(R^*) \subseteq N^* \subseteq Z^*$ dır. Şimdi R^* nin keyfi a^* , b^* elemanlarını alalım. Bu durumda $[a^*,(b^*)^{n+1}],[(a^*)^{n+1},(b^*)^{n+1}] \in Z^*$ dır. Böylece lemma.2.21.(i) den

$$\begin{aligned} n(a^*)^{n+1}[a^*,(b^*)^{n+1}] &= n(a^*)^2(a^*)^{n-1}[a^*,(b^*)^{n+1}] \\ &= a^{*2}[(a^*)^n,(b^*)^{n+1}] \\ &= a^*[(a^*)^n,(b^*)^{n+1}]a^* \\ &= (a^*b^*)^{n+1}a^* - a^*(b^*a^*)^{n+1} \\ &= (a^*b^*)^{n+1}a^* - (a^*b^*)^{n+1}a^* \\ &= 0 \qquad (4) \end{aligned}$$

elde edilir. R s-unital olduğundan (a^*,b^*) nın e gibi bir pseudo-birimi vardır. Öteyandan $n(a^*)^{n+1}[a^*,(b^*)^{n+1}]=0$ ifedesinde a^* yerine a^*+e alıp (4) ifadesinin elde edilişinde ki işlemler yapılırsa $n(a^*+e)^{n+1}[a^*,(b^*)^{n+1}]=0$ ifedesi bulunur. Böylece lemma.2.21.(ii) den $n[a^*,(b^*)^{n+1}]=0$ bulunur. Dolayısıyla hipotezden $[a^*,(b^*)^{n+1}]=0$ ve Lemma.2.22.(ii) den R^* komütatiftir. Yani ; $\forall x, y \in R$ için $[x^{n+1},y^{n+1}]=0$ dır. Hipotezden $(xy)^{n+1}-x^{n+1}y^{n+1}=0$ olduğuna göre $0=[x^{n+1},y^{n+1}]=x^{n+1}y^{n+1}-y^{n+1}x^{n+1}=(xy)^{n+1}-(yx)^{n+1}$ elde edilir. Böylece sonuç. 2.24. den R komütatiftir ■

E.Psomopoulos - H.Tominiaga - A.Yaqub (1980)

INVOLVING KOMUTING KUVVETLI HALKALAR IÇIN

BIR KOMÜTATIFLIK TEOREMI

TEOREM.2.26. n sabit bir pozitif tamsayı ve R de bir s-unital halka olsun. $\forall x, y \in R$ için ,

(i) $[x^n, y^n]=0$

(ii) $n[x,y]=0 \Rightarrow [x,y]=0$

(iii) $[(x(1+u))^n - x^n(1+u)^n, x]=0$, $\forall u \in N$

ise o zaman R komütatiftir.

ISPAT: $u \in N$ ve $x \in R$ alalım. Lemma.2.14.(i) den $[u,(ux)^n]=0$ dır. Eger $1,(u,x)$ nin bir pseudo-birimi ise o zaman $\forall x \in R$, $\forall u \in N$ için $[1+u, ((1+u)x)^n]=0$ dır. Böylece (iii) hipotezinden ,

$0=x((1+u)x)^n - x((1+u)x)^n$

$=x((1+u)x)^n - x(1+u)^{-1}(1+u)((1+u)x)^n$

$=x((1+u)x)^n - x(1+u)^{-1}((1+u)x)^n(1+u)$

$=x(1+u)x(1+u)x\ldots(1+u)x - x(1+u)^{-1}(1+u)x(1+u)x\ldots x(1+u)$

$=(x(1+u))^n x - x(x(1+u))^n$

$=[(x(1+u))^n, x]$

$=[x^n(1+u)^n, x]$

$=x^n[(1+u)^n, x]$

elde edilir. Bu durumda (x,u) nın her pseudo-birimi $(x,[(1+u)^n,x])$ nin de birimi oldugundan lemma.2.21.(ii) den $\forall x \in R$ için $[(1+u)^n,x]=0$ dır. Çünkü $x^n[(1+u)^n,x]=0=(x+1)^n[(1+u)^n,x]$ oldugundan lemma.2.21.(ii) den $[(1+u)^n,x]=0$ dır. üstelik Lemma.2.21.(iii) den $[1+u,x]=[1,x]+[u,x]=[u,x] \in N$ dir. Böylece lemma.2.14.(ii) den

$[1+u,[1+u,x]]=0$ olur. Lemma.2.21.(i) den $[(1+u)^n, x]=0=n(1+u)^{-1}[u,x]$ ve dolayısıla $[u,x]=0$ dır. Böylece $N \subseteq Z(R)$ dir. Şimdi $x, y \in R$ alalım. $[x,y] \in D(R) \subseteq N \subseteq Z(R)$ olduğundan $[x,[x,y]]=0$ dır. Böylece lemma.2.21.(i) den $[x^n,y^n]=0=nx^{n-1}[x,y^n]$ elde edilir. Benzer düşünce ile $[x^n, y^n]=0$ ifadesinde x yerine x+1 yazılırsa $[(x+1)^n,y^n]=0$ olur. Dolayısıyla Lemma.2.20.(i) den $n(x+1)^{n-1}[x,y^n]=0$ elde edilir. Böylece $n[x,y^n]=0$ bulunur. (ii) hipotezinden $[x,y^n]=0$ dır. Bu durumda Lemma.2.22.(ii) den R komütatiftir ■

3.BÖLÜM

$(XY)^n=X^nY^n$ KOŞULLU HALKALARIN KOMÜTATİFLİĞİ

Bu bölümde $(XY)^n=X^nY^n$ koşulunu sağlayan halkaların komütatifliği ile ilgili yapılan çalışmalar, bir sıra içerisinde verilmiştir.

I.N.Herstein (1961)

HALKALARDA KUVVET DÖNÜŞÜMLERİ

TEOREM.3.1 R bir halka olsun. $\forall x,y\in R$ ve sabit bir $n>1$ tamsayısı için $(xy)^n=x^ny^n$ ise o zaman R nin her ab-ba komütatörü nilpotenttir. Üstelik nilpotent elemanların kümesi R nin bir idealini oluşturur.

SONUÇ.3.2. R, teorem.3.1. deki hipotezleri sağlayan bir halka olsun. Eğer R nin nil idealleri yoksa o zaman R komütatiftir.

TEOREM.3.3. R bir halka olsun. $\forall x,y\in R$ ve sabit bir $n>1$ tamsayısı için $(x+y)^n=x^n+y^n$ ise o zaman R nin her komütatörü nilpotentdir. Üstelik nilpotent elemanların kümesi R nin bir idealini oluşturur.

LEMMA.3.4. R bir halka olsun. $\forall x,y\in R$ için $(xy)^n=x^ny^n$, $(x+y)^n=x^ny^n$ ve $\phi:R\longrightarrow R$, $x\longrightarrow x^n$ örten bir homomorfizma ise o zaman bir $a\in R$ nilpotent elemanı $a\in Z(R)$ dir.

TEOREM.3.5. R bir halka olsun. $\forall x,y\in R$ için $(xy)^n=x^ny^n$, $(x+y)^n=x^n+y^n$ ve $\phi:R\longrightarrow R$, $x\longrightarrow x^n$ bir örten

J.Luh (1971)

PRIMARY HALKALAR İÇİN BİR KOMÜTATİFLİK TEOREMİ

TANIM.3.6. R birimli bir halka olsun.Eğer $R/J(R)$ bir basit halka(artinian olması gerekmez)ise o zaman R ye primary halka denir.Eğer $R/J(R)$ bir bölüm halkası ise o zaman R ye competely primary halka denir.

UYARI.3.7. Her competely primary halka bir primary halkadır.

İSPAT R bir competely primary halka olsun.O halde $R/J(R)$ bir bölüm halkasıdır.Her bölüm halkası basit olduğundan R primary halka olur.■

TEOREM.3.8. R bir primary halka olsun. n, pozitif bir tamsayı olmak üzere ; $\forall x,y\in R$ için

$$(xy)^n=x^n \quad y^n \quad , \; k=n,\; n+1,\; n+2 \qquad (A)$$

ise o zaman R komütatiftir.

Teoremin ispatına başlamadan önce kullanılan lemmaları verelim.

LEMMA.3.9. R birimli bir halka olsun. Eğer R (A) özelliğini sağlarsa o zaman R nin Jacobson radikali komütatiftir.

İSPAT: $S=\{1-x \mid x\in J(R)\}$ kümesi birimli bir çarpımsal gruptur.

(i) $\forall (1-x),(1-y)\in S$ için $(1-x)(1-y)=(1-x-y+xy)\in S$

(ii) $\forall (1-x),\ (1-y),\ (1-z)\in S$ için

$$\{(1-x)(1-y)\}(1-z)=(1-x-y+xy)(1-z)$$
$$=1-x-y+xy-z+(x-y+xy)z$$

$=1-x-y+xy-z+xz-yz+xyz$

$=(1-x)(1-y-z+yz)$

$=(1-x)\{(1-y)(1-z)\}$

(iii) $\forall\ (1-x)\in S$ için $(1-0)(1-x)=(1-x)(1-0)=(1-x)$ olacak biçimde $(1-0)=1\in S$ olduğundan S birimlidir.

(iv) $\forall(1-x)\in S$ için teorem.1.29. dan $x\in J(R)$ ise $-x\in J(R)$ dir. Dolayısıyla $(-x)+(-x)'+(-x)'(-x)=0$ olacak biçimde bir $(-x)'\in R$ vardır. O halde ;

$(-x)'=-(-x)-(-x)'(-x)\in J(R)$ dir. Şimdi $1-x=1+(-x)$ nin tersinin $1+(-x)'$ olduğunu gösterelim.

$\{1+(-x)'\}\{1+(-x)\}=1+(-x)'+(-x)+(-x)'(-x)=1$

$\{1+(-x)\}\{1+(-x)'\}=1+(-x)+(-x)'+(-x))(-x)'=1$

S, R nin bir altkümesi olduğundan , (A) özelliğini sağlar. Böylece S komütatiftir.Keyfi $x,y\in J(R)$ için $(1-x)(1-y)=(1-y)(1-x) \Rightarrow 1-x-y+xy=1-y-x+yx \Rightarrow xy=yx$ olur ∎

<u>**LEMMA.3.10.**</u> R bir halka olsun. Eğer $R/J(R)$ komütatif ise o zaman $x\in R$ için $x^n\in J(R) \Rightarrow x\in J(R)$ dır.

<u>**İSPAT**</u>: Keyfi bir $r\in R$ ve $x\in R$ için $x\in J(R)$ olsun. $R/J(R)$ komütatif olduğundan $\bar{x},\bar{r}\in R/J(R)$ için $(\overline{xr})^n=(\bar{x}\bar{r})^n=\bar{x}^n\bar{r}^n$ dır. $x^n\in J(R)$ olduğundan $\bar{x}^n=(x+J(R))^n=x^n+J(R)=\bar{0}$ dır. Dolayısıyla $(\bar{x}\bar{r})^n=\bar{x}^n\bar{r}^n=\bar{0}$ dır.Böylece $\overline{xr}$ nilpotenttir. r keyfi olduğundan xR bir sağ nil idealdir.O halde lemma.1.31. den $xR\subseteq J(R)$ dir.Dolayısıyla; teorem.1.29. dan J(R) r.q.r. ideal olduğundan xR bir r.q.r. sağ idealdir. Böylece, [2, lemma.9.2.15.] den $x\in J(R)$ dir ∎

<u>**LEMMA.3.11.**</u> R bir competely primary halka olsun. Eğer $x\in R$ ve $x\in J(R)$ ise o zaman $ux=xu=1$ olacak biçimde bir $u\in R$

elemanı vardır.

İSPAT: R competely primary halka olduğuna göre $R/J(R)$ bölüm halkasıdır. Dolayısıyla $x\in R$, $x\notin J(R)$ ise $yx\equiv 1(\mathrm{mod}\ J(R))$ olacak biçimde bir $y\in R$ vardır. Böylece $s=1-yx\in J(R)$ dır. O halde; $yx=1-s$ olur. Lemma.3.9. dan $1-s$ ve dolayısıyla yx tersinirdir. O halde $ayx=1$ ve $yxa=1$ olacak biçimde bir $a\in R$ vardır. $ay=u$ dersek $ux=1$ olacak biçimde $u\in R$ vardır. Benzer biçimde $xy\equiv 1(\mathrm{mod} J(R))$ olarak $xv=1$ olacak biçimde bir $v\in R$ bulunur. Şimdi $u=v$ olduğu gösterilirse ispat biter. $u=u-uv+uv=u(1-v)+uv=u(xv-v)+uv$ $=u(x-1)v+uv=(ux-u)v+uv=(1-u)v+uv=v-uv+uv=v$ olur■

TEOREM.3.8.İN İSPATI: R bir primary halka ve (A) özelliğini sağlasın. Böylece $R/J(R)$ yarı-basit ve (A) özelliğini sağladığından teorem.3.1 ispatında $R/J(R)$ nin komütatif olduğu gösterilmişti. Dolayısıyla sonuç.1.41. den $R/J(R)$ cisimlerin bir altdirek toplamıdır. Yani; $R/J(R)=F_1\oplus F_2\oplus F_3\oplus\ldots$, $F_i (i\in R)$ cisim. T, $R/J(R)$ nin bir ideali ve sırasıyla A_i-ler F_i-lerin birer idealleri ise o zaman $T=A_1\oplus A_2\oplus A_3\oplus\ldots$ dır. $R/J(R)$ basit olduğundan $R/J(R)$ proper ideali yoktur. Ayrıca F_i-ler cisim olduğundan F_i-lerin proper idealleri yoktur. Böylece $R/J(R)$ cisimdir. O halde (A) özelliğini sağlayan bir R primary halkası, bir competely primary halkasıdır.

Şimdi, keyfi $x,y\in R$ için $xy=yx$ olduğunu gösterelim.

I.DURUM: Eğer $x,y\in J(R)$ ise lemma.3.9. dan $xy=yx$ olur.

II.DURUM: $x,y\notin J(R)$ ise o zaman (A) nın ilk iki özelliğinden ;

$$x^{n+1}y^{n+1}=(xy)^{n+1}=(xy)^n(xy)=x^ny^nxy \qquad (1)$$

dır. Lemma.3.1.den $x \notin J(R)$ olduğundan $x^n \notin J(R)$ dır.

O halde;lemma.3.11.den $x^n u=ux^n=1$ olacak biçimde bir $u \in R$ vardır. Öteyandan $y \notin J(R)$ olduğundan tekrar lemma.3.11. den $yv=vy=1$ olacak biçimde bir $v \in R$ vardır. Dolayısıyla $x^n u=ux^n=yv=vy=1$ olur.

$$xy^n= ux^n xy^n yv= ux^{n+1}y^{n+1}v= ux^n y^n xyv= y^n x \qquad (2)$$

elde edilir. (A) nın son iki özelliğinden $(xy)^{n+2}=$ $(xy)^{n+1}(xy)=x^{n+1}y^{n+1}xy$ bulunur. (2) yi bulduğumuz yöntemle ;

$$xy^{n+1}=y^{n+1}x \qquad (3)$$

elde edilir.(2) ve (3) den

$$y^{n+1}x=xy^{n+1}=xy^n y=y^n xy \qquad (4)$$

elde edilir. (4) soldan v ile çarpılrsa; $vy^{n+1}x=vy^n xy$ $\Rightarrow$ $vy^n yx=vy^n xy$ olur.Böylece lemma.3.11.den $vy^n=1$ olduğundan $yx=xy$ elde edilir.

III.DURUM: Eğer $x\in J(R)$ ve $y \notin J(R)$ ise o zaman $1 \notin J(R)$ olduğundan $(1-x) \notin J(R)$ dır. Böylece II.DURUM dan $(1-x)y= y(1-x) \Rightarrow y-xy=y-yx \Rightarrow xy=yx$ olur.Böylece $\forall x,y\in R$ için $xy=yx$ olduğundan R komütatif ve dolayısıyla ispat biter ∎

A.Kaya - C.Koç (1976)

BAZI KOMÜTATİFLİK TEOREMLERİ ÜZERİNE UYARILAR

__TEOREM.3.12.__ R bir halka olsun.$n>1$ bir tamsayı olmak üzere ; $\forall x,y\in R$ için (A) $(xy)^n=x^n y^n$ veya
(B) $(x+y)^n=x^n+y^n$ ise o zaman R nin komütatör ideali D(R), P(R) asal radikal tarafından kapsanılır. Ayrıca

$P(R)$,R nin bütün nilpotent elemanlarının kümesidir.

İSPAT Eğer R halkası (A) veya (B) özelliklerinden birini sağlayan bir asal halka ise [17] den R nin sıfırdan farklı nilpotent elemanları yoktur. Ayrıca R komütatiftir. Öteyandan [16] dan R nin sıfırdan farklı nilpotent elemanları olmadığından R nin sıfırdan farklı sıfır bölenleri yoktur.

O halde; şimdi, R herhangi bir halka ve P de onun asal ideali olsun. Böylece; lemma.1.21. R/P asal halkası komütatiftir. O halde; R/P komütatif bir integral bölgesidir.

R/P komütatif olduğundan $\forall \bar{x},\bar{y}\in R/P$ için $\bar{x}\bar{y}-\bar{y}\bar{x}=\bar{0}=P(R) \Rightarrow xy-yx\in P(R)$ dır. Bunu R nin her P asal ideali için yapılabileceğinden $[x,y]\in \cap P_i, P_i$ asal olur. Böylece teorem.1.15. den $P(R)=\cap P_i, P_i$ asal ideal olduğuna göre $[x,y]\in P(R)$ olur. Öteyandan $[x,y]\in D(R)$ olduğu açık. Dolayısıyla $D(R)\subseteq P(R)$ olur.

Ayrıca, eğer bir $z\in R$ için $z^m=0$ olacak biçemde $m>1$ tamsayısı varsa o zaman $\bar{z}^m$ nin R/P deki görüntüsü $\bar{z}^m=\bar{0}$ dır.Böylece;$\bar{z}=\bar{0}$ dır. Buradan $z\in P$ ve dolayısıyla $z\in P(R)$ olur.

Şimdi, $t\in P(R)$ alalım. t nin nilpotent olduğunu gösterelim. Teorem.1.12. dan $P(R)$ nin her elemanın nilpotent olduğu açıktır.Böylece,$P(R)$=R nin bütün nilpotent elemanların kümesi olur∎

SONUÇ.3.13. (A) veya (B) özelliğini sağlayan bir yarı-asal halka komütatiftir.

İSPAT: R bir yarı-asal halka olduğundan $P(R)=(0)$ dır.

Böylece teorem.3.12 den $D(R)\subseteq P(R)=(0)$ olduğundan $D(R)=(0)$ ve dolayısıyla R komütatiftir■.

TEOREM.3.14. R birimli bir halka olsun.n,x ve y ye bağlı bir $n=n(x,y)$ pozitif tamsayı olmak üzere $\forall x,y\in R$ için

$$(xy)^k=x^ky^k\ ,\quad k=n,n+1,n+2 \tag{A}$$

ve ayrıca ,R nin bütün sıfır bölenlerini kapsayan R nin bir proper sol(sağ) L ideali varsa o zaman R komütatiftir.

İSPAT: İlk önce R nin bütün sıfır bölen olmayan elemanların kümesi S,kısalma özelliğini sağlayan bir çarpımsal yarı-grup olduğunu gösterelim.

(i) $x,y\in S$ için $xyz=0 \Rightarrow yz=0 \Rightarrow z=0$ dır.Böylece xy sıfır bölen değildir. O halde; $xy\in S$ dir.

(ii) $x,y,z\in S$ için $x(yz)t=0 \Rightarrow (yz)t=0 \Rightarrow t=0$ ve $(xy)zt=0 \Rightarrow zt=0 \Rightarrow t=0$ olduğundan $x(yz)=(xy)z$ olur.Böylece; S bir yarı-gruptur.

$x,y,z\in S$ için $xy=xz$(veya $yx=zx$) ise o zaman $xy-xz=0 \Rightarrow x(y-z)=0 \Rightarrow y-z=0 \Rightarrow y=z$ bulunur.Böylece S kısalma özelliğini sağlar.

I.DURUM: $x,y\in S$ alalım.$S\subseteq R$ olduğundan,S (A) özelliğini sağlar.Böylece; (A) nın ilk iki özelliğinden $x^{n+1}y^{n+1}=x^ny^nxy \Rightarrow x^n(xy^n)y=x^n(y^nx)y$ dır.Dolayısıyla S nin kısalma özelliğinden $xy^n=y^nx$ elde edilir.Benzer biçimde (A) nın son iki özelliğinden $xy^{n+1}=y^{n+1}x$ elde edilir. Böylece $y^{n+1}x=xy^{n+1}=(xy^n)y=(y^nx)y \Rightarrow y^n(yx)=y^n(xy)\Rightarrow$ $y^n(yx)=y^n(xy)\Rightarrow yx=xy$ ve böylece S komütatiftir.Yani x ve y elemanları R nin sıfır bölen değilse o zamanxy=yx dır.

II.DURUM: Eğer $y \in S$ ve $x \notin S$ ise bu durumda $x\bar{S}$ olduğundan x sıfır bölendir. O halde; hipotezden $x \in L$ ve $1-x \notin L$ dir. Aksi halde; $1-x \in L \Rightarrow 1 \in L \Rightarrow L=R$ olur. Bu da L nin proper sol(sağ) ideal olmasıyla çelişir. O halde I.DURUM dan $(1-x)y=y(1-x) \Rightarrow xy=yx$ olur.

III.DURUM: $x,y \notin S \Rightarrow (1-x),(1-y) \in S$ olur. Böylece I.DURUM dan $(1-x)(1-y)=(1-y)(1-x) \Rightarrow xy=yx$ olur. Böylece R komütatiftir■

SONUÇ.3.15. Bir competely primary halkası (A) özelliğini sağlarsa komütatiftir.

İSPAT: R bir competely primary halka ise o zaman tanım.3.6. dan R/J(R) bir bölüm halkasıdır. R/J(R) nin sıfırdan farklı her elemanı tersinirdir. Böylece R/J(R) nini sıfır bölen elemanı yoktur. O halde; teorem.3.14. den R komütatiftir■

SONUÇ.3.16. Bir primary halkası (A) özelliğini sağlarsa komütatiftir.

İSPAT: R bir primary halka ise tanım.3.6. dan R/J(R) basittir. Dolayısıyla [19,teorem.1.] den R/J(R) komütatiftir. R/J(R) yarı-basit ve komütatif olduğundan sonuç.1.41.den R/J(R) cisimlerin bir altdirek toplamıdır. O halde R/J(R) bir bölüm halkasıdır. Böylece sonuç.3.15. den R komütatiftir■

TEOREM.3.17. R bir birimli halka olsun. Eğer bir $x \in R$ için **(A)** $(1+x)^{n(x)}=1+x^{n(x)}$ ve (B) $(1+x)^{n(x)+1}=1+x^{n(x)+1}$ olacak biçimde bir $n(x) > 1$ tamsayısı varsa o zaman R, GF(2) nin cebirsel genişlemesinin bir altdirek toplamıdır.

İSPAT: Bir $x\in R$ alalım. $1+x^{n(x)+1}=(1+x)^{n(x)+1}=(1+x)^{n(x)}(1+x)=(1+x^{n(x)})(1+x)=1+x^{n(x)}+x+x^{n(x)+1}\Rightarrow$ $x^{n(x)}+x=0 \Rightarrow x^{n(x)}=-x$ elde edilir. Bunu $\forall x\in R$ için yapılabilir. O halde; R birimli olduğu için özel olarak $1^{n(1)}+1=0 \Rightarrow 2=0$ olur. Bir başka deyişle $2.1=1+1=0$ dır. O halde; $\forall\ x\in R$ için $2x=2(1.x)=(2.1)x=0x=0$ olur. Böylece charR= 2 dir. Dolayısıyla $\forall x\in R$ için $x^{n(x)}=x$ olur. Bu durumda teorem.1.43. den R komütatiftir. Özel olarak $x\in J(R)$ alınırsa $x^{n(x)}=x$ dır. Buradan $x(x^{n(x)-1}+1)=0$ olur. Öteyandan $x\in J(R) \Rightarrow x^{n(x)-1}\in J(R)$ dır. Dolayısıyla lemma.1.30. dan $x^{n(x)-1}+1$ tersinirdir. Böylece $x(1+x^{n(x)-1})(1+x^{n(x)-1})^{-1}=0 \Rightarrow x=0$ olur. Bu da $J(R)=(0)$ ve dolayısıyla R nin bir yarı-basittir. O halde; sonuç.1.41. den R cisimlerin bir altdirek toplamıdır. CharR= 2 olduğundan R, FG(2) nin cebirsel genişlemesinin bir altdirek toplamıdır∎

S.Ligh - A.Richoux (1977)

HALKALAR İÇİN BİR KOMÜTATİFLİK TEOREMİ

TEOREM.3.18. R birimli bir halka olsun. n, bir pozitif tamsayı olmak üzere; $\forall x,y\in R$ için

$$(xy)^k=x^ky^k,\quad k=n,n+1,n+2 \qquad (A)$$

ise o zaman R komütatiftir.

İSPAT: $x,y\in R$ alalım. (A) nın ilk iki özelliğinden $x^{n+1}y^{n+1}=(xy)^{n+1}=(xy)^n(xy)=x^ny^nxy\Rightarrow x^{n+1}y^{n+1}=x^ny^nxy$ $\Rightarrow x^{n+1}y^{n+1}-x^ny^nxy=0 \Rightarrow x^n(xy^{n+1}-y^nxy)=0$

$$x^n(xy^n-y^nx)y=0,\ \forall x,y\in R \qquad (1)$$

elde edilir. Dolayısıyla (1) de x yerine $x+1$ yazılırsa

$(x+1)^n[(x+1)y^n-y^n(x+1)]y=0 \Rightarrow (x+1)^n[xy^n+y^n-y^nx-y^n]y=0$

ve buradan

$$(x+1)^n(xy^n-y^nx)y=0, \quad \forall x,y\in R \qquad (2)$$

elde edilir. (2) yi soldan x^{n-1} ile çarpıp ve $(x+1)^n$ açılırsa

$0=x^{n-1}(x+1)^n(xy^n-y^nx)y$

$=x^{n-1}(x^n+nx^{n-1}+...+nx+1)(xy^n-y^nx)y$

$=x^{n-1}x^n(xy^n-y^nx)y+nx^{n-2}x^n(xy^n-y^nx)y+...+x^{n-1}(xy^n-y^nx)y$

$=x^{n-1}(xy^n-y^nx)y \quad , \forall x,y\in R \qquad (3)$

elde edilir. Bu metodla devam edilirse

$$0=x(xy^n-y^nx)y, \quad \forall x,y\in R \qquad (4)$$

elde edilir. (4) de x yerine $(x+1)$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
0&=(x+1)\{(x+1)y^n-y^n(x+1)\}y\\
&=(x+1)\{xy^n+y^n-y^nx-y^n\}y\\
&=(x+1)(xy^n-y^nx)y\\
&=\{(x+1)xy^n-(x+1)y^nx\}y\\
&=\{xxy^n+xy^n-xy^nx-y^nx\}y\\
&=x(xy^n+y^nx)y+(xy^n-y^nx)y\\
&=(xy^n-y^nx)y, \quad \forall x,y\in R \qquad (5)
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi (A) nın son iki özelliğinden $x^{n+2}y^{n+2} =(xy)^{n+2}=(xy)^{n+1}(xy)=x^{n+1}y^{n+1}xy \Rightarrow x^{n+2}y^{n+2}= x^{n+1}y^{n+1}xy$

ve buradan;

$$0=x^{n+1}(xy^{n+1}-y^{n+1}x)y, \quad \forall x,y\in R \qquad (6)$$

elde edilir. (1) den (5) ifadesinin elde edilişindeki metodu (6) ya uygulanırsa;

$$0=(xy^{n+1}-y^{n+1}x)y, \quad \forall x,y\in R \qquad (7)$$

elde edilir. (5) y ile soldan çarpılırsa,

$$0=y(xy^n-y^nx)y,\ \forall x,y\in R \tag{8}$$

elde edilir. Böylece (7) ve (8) den,

$xy^{n+2}=y^{n+1}xy$ ve $xy^{n+2}=yxy^{n+1} \Rightarrow xy^{n+2}=yxy^{n+1} \Rightarrow$

$xy^{n+2}-yxy^{n+1}=0$ ve dolayısıyla;

$$0=(xy-yx)y^{n+1},\ \forall x,y\in R \tag{9}$$

elde edilir. Şimdi (1)` den (5)` e kadar uyguladığımız metodu (9) da y yerine y+1 alınarak yapılırsa

$$0=(xy-yx)y,\ \forall x,y\in R \tag{10}$$

elde edilir. Son olarak (10) da y yerine y+1 alırsak

$0=\{x(y+1)-(y+1)x\}(y+1)=(xy+x-yx-x)(y+1)=(xy-yx)y+(xy-yx)$

$=xy-yx$ ve dolayısıyla R komütatif olur∎

M.Hangan - I.Mogami (1978)

HALKALARIN KOMÜTATİFLİĞİ ÜZERİNE BİR NOT

TEOREM.3.19. R bir s-unital halka olsun. n, sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere; $\forall x,y\in R$ için

$$(xy)^k=x^ky^k \quad ,k=n,n+1,n+2 \tag{A}$$

ise o zaman R komütatiftir.

İSPAT: $x,y\in R$ alalım. e, {x,y} nin bir pseudo-birimi olsun. $x^n[x,y^n]y=x^{n+1}y^{n+1}-x^ny^nxy=(xy)^{n+1}-(xy)^nxy=0$ dır. Şimdi bir $s>1$ tamsayısı olmak üzere $\forall\ x,y\in R$ için $x^s[x,y^n]y=0$ olacak biçimde s minimal olsun. Böylece $x^s[x,y^n]y=0$ ifadesinde x yerine x+e yazılırsa $(x+e)^s[x+e,y^n]y=0$ olur. Bu ifadeyi soldan x^{s-1} ile çarpıp ve $(x+e)^s$ yi açılırsa $0=x^{s-1}[x,y^n]$ elde edilr. Bu ise s nin minimal olmasıyla çelişir. O halde; $x[x,y^n]y=0$ dır. Bu ifade $\forall x,y\in R$ için geçerli olduğundan x yerine x+e alınabilr.Böylece $(x+e)[x+e,y]y=0 \Rightarrow x[x,y^n]y+e[x,y]y=0 \Rightarrow [x,y^n]y=0$ elde edilir. Benzer biçimde $x^{n+1}[x,y^{n+1}]y=0$ alıp,işlemler yapılırsa $[x,y^{n+1}]y=0$ elde edilir.Buradan $[x,y]y^{n+1}=0=[x,y^{n+1}]y-y[x,y^n]y$ bulunur.Dolayısıyla $t>1$ tamsayı olmak üzere ,$\forall x,y\in R$ için $[x,y]y^t=0$ olacak biçimde t minimal olsun.$\forall x,y\in R$ için $[x,y]y^t=0$ olduğundan y yerine y+e yazılırsa $[x,y+e](y+e)^t=0 \Rightarrow [x,y](y+e)^t=0$ olur. Böylece $0=[x,y](y+e)^t y^{t-1}=$ $[x,y](y^t+ty^{t-1}e+\ldots+xye^{t-1}+e^t)y^{t-1}=$ $[x,y](y^t+ty^{t-1}+\ldots+y+e)y^{t-1}=[x,y]y^t y^{t-1}+\ldots+[x,y]y^{t-1}=$ $[x,y]y^{t-1}$ elde edilir. Bu ise t nin minimal olmasıyla çelişir. O halde $[x,y]y=0$ olur.Şimdi sol-sağ simetriğinden $x[x,y]=0$ elde edilir.Bu ifade de x yerine x+e yazılırsa $0=(x+e)[x+e,y]=x[x,y]+e[x,y]=[x,y]$ olur ve dolayısıyla ispat biter∎

TANIM.3.20. Bir $x\in R$ elemanı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa x e almost central eleman denir. $\forall y\in R$ için

(i) $(xy)^k=x^ky^k, k=n,n+1,n+2\ ,n=n(x,y)$

(ii) $(yx)^h=y^hx^h, h=m,m+1,m+2,m=m(x,y)$

olacak biçimde m ve n pozitif tamsayıları vardır.

LEMMA.3.21. R yarı-primitif s-unital bir halka olsun. $x\in R$ elemanı almost central ve $y\in R$ ise o zaman aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) $x^jy=0$,j pozitif bir tamsayı

(i′) $yx^j=0$,j pozitif bir tamsayı

(ii) $xy=0$

(ii′) $yx=0$

İSPAT: (ii) $\Rightarrow$(i) ve (ii′) $\Rightarrow$(i) olduğu açık.(i) $\Rightarrow$(ii) $j=1$ için doğru olduğu açık.Bu nedenle bir $s>1$ tamsayısı için $x^sy=0$ olsun.x, almost central olduğundan keyfi bir $z\in R$ için, $\{x(x^{s-2}yz)\}^t=x^t(x^{s-2}yz)^t$ olacak biçimde bir $t>1$ tamsayısı vardır.$t+s-2 \geq s$ olduğundan $x^t(x^{s-2}yz) = 0$ dır.Böylece $\{x(x^{s-1}yz)\}^t=0$ olur.Dolayısıyla $(x^{s-1}yz)^t=0$ $\forall z\in R \Rightarrow x^{s-1}yR$ R nin bir sağ nil ideali olur.Öteyandan bir yarı-primitif halka yarı-asaldır.Çünkü;R yarı-primatif halka olduğundan tanım.1.46. dan R nin bütün primitif ideallerinin arakesiti sıfırdır. Ayrıca lemma.1.47. den J(R), R nin bütün primitif ideallerin arakesitidir.O halde R yarı-primitif olduğundan J(R)=(0) dır.Yani; $(0)= J(R)= \cap P_i, P_i$ primitif ideal. Öteyandan tanım.1.46. dan R/P primitif halkadır.Yani;R bir halka ve P onun bir ideali ise R/P primitif halkadır.$\Leftrightarrow$ P primitif idealdir.Dolayısıyla lemma.1.38. den R/P primitif halka $\Rightarrow$ R/P asal halka $\Leftrightarrow$ P asal ideal olur. Böylece bir P primitif ideali bir P asal idealidir.O halde P_j-ler asal ideal ve P_i-ler primitif ideal olmak üzere $\cap P_j \subseteq \cap P_i$ dir.$(0)=\cap P_i, P_i$ primitif ideal olduğuna göre $(0)=\cap P_j$, P_j asal olur. Böylece teorem.1.15. den P(R)=(0) olur. Dolayısıyla R yarı-asaldır. Lemma.1.31. den J(R),R nin bütün sağ(sol) nil idealleri kapsadığından ve J(R)=(0) olduğundan $X^{s-1}yR=(0)$ dır.Buradan $x^{s-1}yRx^{s-1}y=(0)$ ve R yarı-asal olduğundan $x^{s-1}y=0$ olur. Bu ise s nin minimal olmasıyla çelişir.O halde $xy=0$ dır.
(i′)$\Rightarrow$(ii′) $yx^j=0$ olsun.$j=1$ için doğru olduğu açık. O halde $t>1$ tamsayısı için $yx^t=0$ olsun.x almost central

eleman olduğundan keyfi bir $z\in R$ için $\{(zyx^{t-2})x\}^k=(zyx^{t-2})^k x^k$ olacak biçimde bir $k>1$ tamsayısı vardır. $k+t-2\geq t$ olduğundan $(zyx^{t-2})x^k=0$ olur. Buradan $\forall z\in R$ için $(zyx^{t-1})^k=0$ ve dolayısıyla Rxy^{t-1}, R nin bir sol nil ideal olur. Öteyandan R yarı-primitif ise R nin yarı-asaldır. O halde; lemma.1.31. den $Rxy^{t-1}=(0) \Rightarrow xy^{t-1}Rxy^{t-1}=(0)$ olur. R yarı-asal olduğundan $xy^{t-1}=0$ olur. Bu ise t nin seçimi ile çelişir. O halde; $xy=0$ dır.

<u>(ii)=>(ii')</u> $xy=0$ olsun. Bu durumda $(yx)^2=0$ ve x almost central eleman olduğundan $(yx)^m=y^m x^m=0$ dır. Böylece; (i') $\Rightarrow$(ii') den $y^m x=0$ dır. Öteyandan R s-unital olduğundan $\{x,y\}$ nin bir e gibi bir pseudo-birimi vardır. x almost central eleman olduğundan $\{(y+e)\}^h=(y+e)^h x^h$ $h=p,p+1,p+2$ olcacak biçimde bir h pozitif tamsayısı vardır. $\{(y+e)x\}^h=(y+e)x(y+e)x\ldots(y+e)x=yx^h+x^h=(y+e)x^h$ $\Rightarrow \{(y+e)x\}^h-(y+e)x^h=0 \Rightarrow (y+e)^h x^h-(y+e)x^h=0 \Rightarrow$ $\{(y+e)^h-(y+e)\}x^h=0$ bulunur. (i')=>(ii') den $\{(y+e)^h-(y+e)\}x=0$ $h=p,p+1,p+2$ elde edilir.

Şimdi $t>1$ bir tamsayı olmak üzere $y^t x=0$ olacak biçimde t minimal olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
0&=y^{t-2}\{(y+e)^{p+1}-(y+e)\}x-\{(y+e)^p-(y+e)\}x\\
&=y^{t-2}\{(y+e)^{p+1}x-(y+e)x-(y+e)^p x+(y+e)x\}\\
&=y^{t-2}\{(y+e)^{p+1}x-(y+e)^p x\}=y^{t-2}\{(y+e)^p((y+e)x-x)\}\\
&=y^{t-2}(y+e)^p yx=y^t x+y^{t-1}x=y^{t-1}x
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ise t nin minimal olmasıyla çelişir. O halde; $t=1$ olmak zorundadır. Böylece $yx=0$ dır.

<u>TEOREM.3.22.</u> R bir s-unital halka olsun.

(i) R bir yarı-primitif ise o zaman R nin her almost central elemanı halkanın merkezindedir.

(ii) R nin her almost central regüler elemanı, R nin merkezindedir.

(iii) $x \in R$ elemanı almost central ve bir pozitif i tamsayısı için $x^i \in J(R)$ ise $x \in J(R)$ dir.

<u>İSPAT:(i)</u> x bir almost central eleman, y keyfi bir eleman ve e de $\{x,y\}$ nin bir pseudo-birimi olsun.

x almost central eleman olduğundan $x^n[x,y^n]y=0$ dır. Lemma.3.21. dan $x[x,y^n]y=0$ ve dolayısıyla $[x,y^n]yx=0$ dır. Benzer biçimde x almost central eleman olduğundan $[x,y^{n+1}]yx=0$ dır. Böylece $[x,y]y^{n+1}x=[x,y^{n+1}]yx-y[x,y^n]yx=0$ olur. O halde, lemma.3.21. den $x[x,y]y^{n+1}=0$ dır. Bu ifade $\forall\ x,y \in R$ için geçerli olduğundan y yerine y+e yazılabilir. Bu durumda bir pozitif q tamsayısı için $x[x,y](y+e)^{q+1}=0$ elde edilir. Şimdi bir $t>1$ tamsayı olmak üzere; $x[x,y]y^t=0$ olacak biçimde t minimal olsun. Dolayısıyla $0=x[x,y](y+e)^{q+1}y^{t-1}=x[x,y]y^{t-1}$ elde edilir. Bu ise t nin minimal olmasıyla çelişir. O halde $x[x,y]y=0$ dır. Buradan $0=x[x,y](y+e)^{q+1}x=x[x,y]x$ dır. Böylece, lemma.3.21. den $[x,y]x^2=0$ ve dolayısıyla $[x,y]x=0$ olur. Şimdi bu son ifade dikkate alınırsa keyfi bir $z \in R$ için $[x,y]z[x,y]=[x,yz]xy-y[x,z]xy-[x,yzy]x+y[x,yz]x=0$ dır. Böylece buradan $([x,y]z)^2=0$ ve dolayısıyla $([x,y]R)^2=(0)$ olur. Yani, $[x,y]R$, R nin bir sağ nil idealidir. R yarı-primitif olduğundan R nin sağ(sol) nil idealleri yoktur. Ayrıca R yarı-asaldır. Böylece $[x,y]R=(0)$ ve dolayısıyla $[x,y]=0$ olur. O halde $x \in Z(R)$ dır.

(ii) $x, y \in R$ alalım. x almost central regüler eleman ve y keyfi bir eleman olsun. Eğer $ex=x$ ise o zaman e, R nin birimidir. Gerçekten, $\forall z \in R$ için $(z-ze)x=0$ ise x regüler olduğundan $z-ze=0 \Rightarrow z=ze$ ve ayrıca $x(z-ze)=0 \Rightarrow z-ez=0 \Rightarrow z=ez$ dir.

(i) de yapıldğı gibi $x^n[x,y^n]y=0$ ve $x^{n+1}[x,y^{n+1}]y=0$ dır. Dolayısıyla; $[x,y^n]y=0$ ve $[x,y^{n+1}]y=0$ dır. Böylece $[x,y]y^{n+1}=[x,y^{n+1}]y-y[x,y^n]y=0$ olarak bulunur. Bu ifade $\forall y \in R$ için geçerli olduğundan y yerine $y+1$ yazılabilir. Bu durumda bir q pozitif tamsayı için $[x,y](y+1)^{q+1}=0$ elde edilir.

Şimdi $t>1$ tamsayı olmak üzere $[x,y]y^t=0$ olacak biçimde t minimal olsun.

Bu durumdan $0=[x,y](y+1)^{q+1}y^{t-1}=[x,y]y^{t-1}$ elde edilir. Bu ise t nin minimal olamasıyla çelişir. O halde $[x,y]y=0$ dır. Bu ifadeyi kullanarak $0=[x,y](y+1)^{q+1}x=[x,y]x$ ifadesi bulunur. Dolayısıyla x regüler olduğundan $[x,y]x=0 \Rightarrow [x,y]=0$ olur. Böylece $x \in Z(R)$ dır.

(iii) $x \in R$ almost central ve bir i pozitif tamsayı için $x^i \in J(R)$ olsun.

$x \in R$ olduğundan $ex=x$ olacak biçimde bir $e \in R$ elemanı vardır. Teorem.1.32. den $J(R/J(R))=(0)$ dır. O halde $ex^i=x^i \in J(R/J(R))$ için $ex^i=x^i=0$ dır. Buradan $ex^i=0$ olur. Böylece lemma.3.21. den $ex=0$ dır. Dolayısıyla $ex=0=J(R)$ $\Rightarrow x=ex \in J(R)$ olur ■

<u>**SONUÇ.3.23.**</u> R bir halka ve $\forall x, y \in R$ için

$$(xy)^k=x^k y^k, \quad k=n, n+1, n+2 \qquad \text{(A)}$$

olacak biçimde bir n pozitif tamsayı var olsun.

(i) R yarı-primitif ise R komütatiftir.

(ii) R s-unital halka ve R nin bütün sıfır bölenleri halkanın bir tek yanlı proper ideali tarafından kapsanılırsa o zaman R komütatiftir.

(iii) R birimli ve R/J(R) halkası basit ise o zaman R komütatiftir.

__İSPAT:__ (i) [19,teorem.1] nin ispatında gösterildigi gibi R, bölüm halkaların bir altdirek toplamıdır.Gerçekten; lemma.3.21. in ispatında gösterildigi gibi, bir R yarı-primitif halkası bir yarı-basit halkadır. Böylece teorem.1.40 dan R, primitif halkaların bir altdirek toplamına izomorftur. O halde; R primitif halka olarak düşünülebilir. Buna göre teorem.1.37. den D bir bölüm halkası olmak üzere ya $R \cong D$ ya da k>1 tamsayısı için D_k,R nin bir althalkasının homomorfik görüntüsüdür.

I.DURUM: $R \cong D$ ise bu istenilen ifadedir.

II.DURUM: k>1 tamsayı olmak üzere D_k,R nin bir althalkasının homomorfik görüntüsü olsun. $x,y \in D_k$ için

$$x=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad y=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

olarak alınırsa; $xy=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ ve dolayısıyla,

$(xy)^2=xy$ olur. Ayrıca $x^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$ dır. O halde

$(xy)^n=x^n y^n$ den $xy=0$ olarak bulunur. Yani;

$$xy=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Bu durumda $1=0$ olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde hipotezimizi sağlayan bir primitif halka bölüm halkası olmak zorundadır. Böylece R bir bölüm halkası olarak alabilinir. Dolayısıyla R nin her elemanı regülerdir. Hipotezden R nin her elemanın almost central olduğu açık. O halde teorem.3.22.(ii) den R komütatiftir.

(ii) R nin bütün sıfır bölenleri; R nin bir tek yanlı proper ideali tarafından kapsanıldığı için en azında R halkasında bir sıfır bölensiz eleman vardır. Aksi halde; R nin tek yanlı proper ideali olamaz.

Teorem.3.22.(ii) den R birimli ve her regüler elemanı merkezdedir. Bir x elemanı sıfır bölen ise $x+1$ elemanı regülerdir. Çünkü x sıfır bölen ise o zaman $0\neq y\in R$ için $xy=0$ dır. Özel olarak y yerine x alırsak $xx=0 \Rightarrow x^2=0$ olur. Böylece x nilpotenttir. Dolayısıyla x q.r. eleman olur. Böylece $x+x'+x'x=0\,(x+x'+xx'=0)$ olacak biçimde bir $x'\in R$ vardır. Eğer $x+1$ regüler değilse o zaman $y\neq 0$ için $(x+1)y=0 \Rightarrow xy+y=0 \Rightarrow xy=-y$ olur.

Öteyanda $xy+x'y+x'xy=0$ da xy yerine $-y$ yazılırsa $-y+x'y-x'y= 0 \Rightarrow y=0$ elde edilir. Bu ise $y\neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde $x+1$ regülerdir. Böylece $x+1\in Z(R)$ ve dolayısıyla $\forall y\in R$ için $(1+x)y=y(1+x)\Rightarrow xy=yx$ ve böylece R komütatif olur.

(iii) (i) den $R/J(R)$ komütatiftir. Çünkü; $J(R/(J(R)) = (0)$ olduğundan $R/J(R)$ yarı-primitiftir. $R/J(R)$ yarı-basit ve komütatif olduğundan sonuç.1.41.den $R/J(R)$ cisimlerin bir altdirek toplamıdır. O halde; $R/J(R)$ bir cisimdir. Böylece; [2, teorem.2.2.20.] den $J(R)$ maksimal ideal olur.

Eğer $x\in R$ elemanı regüler ise (ii) den R komütatiftir. Aksi halde x regüler değilse o zaman (ii) nin ispatında yaptığımız gibi $x+1$ regüler olur. Böylece $x+1\in Z(R)$ ve dolayısıyla $(x+1)y=y(x+1)\Rightarrow xy=yx$ ve böylece $x\in Z(R)$ olur. O halde her iki durumda da R komütatiftir ■

B. Felzenswalb (1979)

BAZI HALKALARIN KOMÜTATİFLİĞİ ÜZERİNE

TEOREM.3.24. R birimli bir halka olsun. n,x ve y ye bağlı $n=n(x,y)>1$ bir tamsayı olmak üzere $\forall x,y\in R$ için;

$(xy)^k=x^k y^k$, $k=n(x,y), n(x,y)+1$

ise o zaman R nin komütatör ideali nildir. Denk olarak eğer R nin sıfırdan farklı nil idealleri yoksa o zaman R komütatiftir.

İSPAT: Nilpotent olmayan bir $a\in R$ alalım. U_a, a nın bütün kuvvetlerini bulundurmayan R nin bir maksimal ideali olsun. Burada şöyle bir soru akla gelebilir. Acaba U_a gerçekten R nin bir maksimal ideali mi?

Şimdi bu soruyu cevaplıyalım.

$M=\{U \mid a^n \notin U;\ U,\ R \text{ nin ideali}\}$ olsun. Bu durumda $a^n \notin (0)$ oldugundan $(0) \in M$ dir. Dolayısıyla $M \neq \emptyset$ dır. Böylece M de bir τ zinciri alınabilir. Eğer $\bigcup_{U \in \tau} U_u = v$ ise $v \in M$ olduğunu gösterelim $a^n \in \bigcup U_u$ olsun. Bu durumda en az bir i için $a^n \in U_i$ olur. Bu ise U_i-lerin seçimi ile çelişir. O halde $a^n \notin \bigcup U_u = v$ ve dolayısıyla Zorn Lemma dan M nin bir maksimal elemanı vardır. $U_a \neq R$ olmak üzere; R nin maksimal idealidir. Kabul edelim ki; $U_a \subsetneq U$ olacak biçimde R nin bir U ideali var olsun. Bu durumda $a^n \notin U_a$ fakat $a^n \in U$ olacak biçimde U, a nın bir kuvvetini bulundurur. Bu da a nın kuvvetlerini bulundurmayan ideallerin maksimal olmasıyla çelişir. O halde U_a, a nın bir kuvvetini bulundurmayan R nin bir maksimal idealidir. Böylece $R_a=R/U_a$ halkasını tanımlanabilir.

R_a halkasının sıfırdan farklı her ideali $\bar{a}=a+U_a$ nın bir kuvvetini bulundurur. Çünkü;

$$
\begin{array}{lcl}
\phi : R & \longrightarrow & R_a \text{ dogal homomorfizma} \\
\quad | & & | \\
U=\bar{U}\phi^{-1} & \longrightarrow & \bar{U} \neq (0) \text{ ideal} \\
| & & \\
U_a & &
\end{array}
$$

$U_a \subsetneq U$ ve $a^n \in U \Rightarrow (\bar{a})^n \in \bar{U}$ dır. Dolayısıyla R_a nın $(0) \neq \bar{U}$ gibi bir nil ideali varsa o zaman $(\bar{a})^n \in \bar{U}$ olacak biçimde $(a)^n$ elemanı vardır. U nil ideal olduğuna göre $((\bar{a})^n)^k=(0)$ olacak biçimde $k \in I^+$ vardır. Buradan $(\bar{a})^{nk}=(a+U_a)^{nk}=a^{nk}+U_a=0=U_a$ ve dolayısıyla $a^{nk} \in U_a$ olur.

Bu ise U_a nın tanımlanışı ile çelişir. O halde; Ra nın sıfırdan farklı nil ideali yoktur. Üstelik; R_a halkası R de tanımlanan hipotezleri sağlar. Yani; R_a halkası birimli $(\bar{1}=1+U_a)$ ve her $\bar{x},\bar{y}\in R_a$ için $(\bar{x}\bar{y})^k=\bar{x}^k\bar{y}^k$ $k=n(\bar{x},\bar{y}),n(\bar{x},\bar{y})+1$ özellikleri sağlar.

a, R nin nilpotent olmayan elemanlarını taramak üzere $\cap U_a$ bir nil idealdir.

Kabul edelim ki $\cap U_a$ bir nil ideal olmasın. Eğer x nilpotent değilse o zaman $x\in \cap U_a$ alınırsa $x\in U_x$ olur. U_x, $\cap U_a$ daki ideallerden biridir. ($a^n\notin U_a$ gibi) Dolayısıyla $x\notin U_x$ olmasıyla çelişir. Böylece $U=\cap U_a$ nil idealdir.

Şimdi; her U, R nin komütatör ideali D(R) yi kapsadığı gösterilirse ispat biter. (Yani; R_a komütatif olur.) Böylece; bundan sonra R, sıfırdan farklı nil idealleri olmayan ve R nin sıfırdan farklı her ideali nilpotent olmayan a nın bir kuvvetini kapsayan bir halka olarak alınacaktır. Bu durumda R nin komütatif olduğunu gösterelim.

$bd=0$ olan $b, d\in R$ elemanlarını alalım. Teoremin hipotezinden;

$$[d(1+db)]^k=d^k(1+db)^k,\ k=n,n+1 \qquad (1)$$

olacak biçimde bir $n>1$ tamsayısı vardır. (1) denklemini açar ve $bd=0$ kullanılırsa $(n-1)d^{n+1}b=0=nd^{n+2}b$ elde edilir. Şimdi (1) denklemini $n=2$ için yapalım:

$$\begin{aligned}[d(1+db)]^2&=\{d(1+db)\}\{d(1+db)\}\\&=(d+d^2b)(d+d^2b)\\&=d^2+d^3b+d^2bd+d^2bd^2b\\&=d^2+d^3b\end{aligned}$$

$$d^2(1+db)^2 = d^2(1+2db+dbdb)$$
$$= d^2+2d^3b$$

Buradan $d^2+d^3b=d^2+2d^3b \Rightarrow 2d^3b-d^3b=0$ elde edilir. Aynı düşünce ile $n=3$ için yapılırsa $3d^4b-d^4b=0$ elde edilir. Bu metodla devam edilirse $(n-1)d^{n+1}b=0$ elde edilir. Öteyandan $(n-1)d^{n+1}b=0$ ifadesi $k=n+1$ için de geçerli olduğundan $nd^{n+2}b=0$ bulunur. Böylece $(n-1)d^{n+1}b=0=nd^{n+2}b$ olur. Buradan; $nd^{n+2}b-d^{n+2}b=0=$ $d^{n+2}b=0$ elde edilir. Yani; $bd=0$ olacak biçimde $b,d\in R$ elemanları varsa o zaman $s>1$ olmak üzere $d^sb=0$ dır. Benzer biçimde ;

$[(1+db)b]^k=(1+db)^kb^k$, $k=n$, $n+1$ için yapılırsa; $s>1$ olmak üzere $db^s=0$ olur.

$\forall x\in R$ için $V_x=\{r\in R \mid rx^m=0, m>1\}$ R nin bir idealidir. Çünkü; $r_1,r_2\in V_x$ alınırsa; $r_1x^m=0$, $r_2x^m=0$, $m>1$ $(r_1-r_2)x^m = r_1x^m-r_2x^m=0-0=0$ ve buradan $r_1-r_2\in V_x$ olur. Şimdi; $r\in V_x$ ve $s\in R$ alalım. $rx^m=0, m>1$ için olur. $srx^m=0 \Rightarrow sr\in V_x$ olur. Öteyandan $rx^m=0$ olduğuna göre $(x^m)^t=0$ olacak biçimde bir $t>1$ vardır. Bu durumda $x^{mt}rs=0$ ve dolayısıyla $rs(x^{mt})^k=0$ olacak biçimde $k>1$ var olacağından $rs\in V_x$ olur.

R nin sıfırdan farklı her ideali a nın bir kuvvetini kapsadığından ve a nilpotent olmadığından $V_a=(0)$ dır.

Kabul edelim ki nilpotent olmayan bir $a\in R$ için $V_a\neq(0)$ olsun.

$V_a=\{r\in R \mid ra^m=0, m>1$ için$\}$ kümesini tanımlayalım. Bu durumda $0\neq a^t\in V_a$ için $a^ta^m=0$ olacak biçimde $m>1$ vardır.

$a^{m+t}=0$ olur. Bu ise a nın nilpotant olmamasıyla çelişir. O halde; $V_a=(0)$ dır. Böylece a sıfır bölen olmadığından regülerdir. Eğer $b\in R$ elemanı bir sıfır bölen ise o zaman $V_b\neq (0)$ dır. Aksi halde; $V_b=(0)$ ise yukarıdan b sıfır bölensiz olur. Bu ise b nin sıfır bölen olmasıyla çelişir. O halde; $V_b\neq(0)$ dır.

b sıfır bölen ise o zaman b nilpotenttir. Çünkü ; $V_b\neq(0)$ ve bir $t>1$ için $a^t\in V_b$ idi. Buradan $a^tb^m=0$ olacak biçimde bir $m>1$ vardır. a regüler olduğundan $aa\ldots ab^m=0$ ifadesinde a-lar teker teker yok edilirse $b^m=0$ ve dolayısıyla b nilpotent olur. Bundan dolayı R de her sıfır bölen bir eleman nilpotenttir.

<u>İDDİA:</u> $\forall$ $x,y\in$ R için $xy^m=y^mx$ olacak biçimde $m=m(x,y)>1$ vardır.

I.DURUM: Eğer x ve y regüler ise o zaman hipotezden $(xy)^{m+1}=(xy)^m(xy)=x^my^mxy$ ve $(xy)^{m+1}=x^{m+1}y^{m+1}$ olur. Buradan da $x^my^mxy=x^{m+1}y^{m+1}=$ $x^m(y^mxy-xy^{m+1})=0\Rightarrow$ $y^mxy-xy^{m+1}=0$ $\Rightarrow$ $(y^mx-xy^m)y=0\Rightarrow$ $y^mx-y^mx=0\Rightarrow$ $y^mx=xy^m$ olur.

II.DURUM: Eğer y sıfır bölen ise o zaman y nilpotenttir. Dolayısıyla $y^m=0$ olacak biçimde $m\in I^+$ vardır. Buradan $y^mx=0=xy^m$ elde edilir.

III.DURUM: Eğer x sıfır bölen ise o zaman x nilpotenttir. Bir nilpotent eleman q.r. olduğundan $x+x'+x'x=0$ olacak biçimde $x'\in$ R vardır. Buradan $xy+x'y+x'xy=0$ olur. $(1+x)$ regüler değilse o zaman $(1+x)$ sıfır bölendir. Dolayısıyla $(1+x)y=0=$ $y=-xy$ olur. $xy+x'y+x'xy=0$ da xy yerine $-y$ yazarsak $-y+x'y-x'y=0=$ $-y=0=$ $y=0$ olur. bu ise $y\neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde $1+x$ regülerdir. Bu durumda inceleme yapılırsa;

(i) $(1+x)$ regüler ve y regüler degilse o zaman $(1+x)$ regüler ve y sıfır bölendir. Dolayısıyla $(1+x)y^m=0$ $=y^m(1+x)=$ $y^m+xy^m=0=y^m+y^mx=$ $xy^m=0=y^mx$ bulunur.

(ii) $(1+x)$ regüler ve y regüler ise I.DURUM dan $(1+x)y^m=y^m(1+x) \Rightarrow$ $xy^m=y^mx$ bulunur.

Böylece $\forall y\in R$ için $xy^m=y^mx$ oldugundan $x\in T(R)$ dır. R nin sıfırdan farklı nil idealleri olmadığından teorem 1.57. den $x\in Z(R)$ ve dolayısıyla R komütatif olur■

__**NOTASYON:**__ R bir halka ve $c\in R$ olsun. R de c nin sağ ve sol sıfırlayanlarını sırasıyla $r(c)=\{x\in R \mid cx=0\}$ ve $l(c)=\{x\in R \mid xc=0\}$ olarak alalım.

__**LEMMA.3.25.**__ R sıfırdan farklı nil idealleri olmayan bir halka olsun. $\forall x\in R$ için $n=n(x)>1$ bir tamsayı olmak üzere; $(ax)^n=a^nx^n$ olacak biçimde bir $a\in R$ olsun. Bu durumda ;

(i) Eğer $x,y\in R$ ve $xy=0$ ise $xay=0$ dır.

(ii) $r(a)=\{x\in R \mid a^mx=0, m\geq 1\}$ dır.

(iii) $l(a)=\{x\in R \mid xa^m=0, m\geq 1\}$ dır.

(iv) $l(a)=r(a)$ dır.

__**İSPAT:**__ **(i)** $x,y\in R$ ve $xy=0$ olsun. Bu durumda; $(ayx)^n=a^n(yx)^n=0$ olacak biçimde $n=x(xy)>1$ tamsayısı vardır. O halde $\forall x\in R$ için $(ax)^n=a^nx^n$ olacak biçimde $n=n(x)>1$ tamsayısı vardır. O halde $yx\in R$ için de $(ayx)^na^n(yx)^n$ olacak biçimde bir $n=n(yx)>1$ tamsayısı vardır. Dolayısıyla; $(ayx)^n=a^n(yx)^n=a^n(yx)\ldots(yx)=a^ny(xy)\ldots(xy)x=0$ bulunur. Bu nedenle $xar(x)$, R nin bir sağ nil idealidir.

çünkü; $r(x)=\{y\in R \mid xy=0\}$ idi. O halde; $xar(x)=\{xay \mid y\in r(x)\}$ dır. Buna göre $r_1,r_2\in xar(x) \Longrightarrow r_1 xay_1$, $r_2 xay_2$ ve $y_1,y_2 \in r(x)$ dır. O halde $r_1-r_2=xay_1-xay_2=xa(y_1-y_2)\in xar(x)$ olur. Çünkü; $x(y_1-y_2)=xy_1-xy_2=0-0=0 \Rightarrow y_1-y_2\in r(x)$ dır. Öteyandan $r\in xar(x)$, $s\in R$ alınırsa; $r=xay$, $y\in r(x)$ $rs=xays \in xar(x)$ olur. çünkü; $xys=0 \Longrightarrow ys\in r(x)$ dir.

Böylece $xar(x)$, R nin bir sağ ideali olur. $(ayx)^n=0$ olduğuna göre $x(ayx)^n=0 \Longrightarrow (xay)^n x=0 \Longrightarrow (xay)^n xay=0 \Longrightarrow (xay)^{n+1}=0$ olur. Böylece $xar(x)$ nin her elemanı nilpotenttir. Hipotezden R nin sıfırdan farklı sağ nil ideali olmadığından $xar(x)=(0)$ olur. Dolayısıyla özel bir $y\in r(x)$ için de $xay=0$ olur.

(ii) $r(a)=\{x\in R \mid ax=0\}=\{x\in R \mid a^m x=0, m\ 1\}=T$ olduğunu gösterelim. $r(a)\subseteq T$ olduğu açık. Şimdi; $T\subseteq r(a)$ olduğunu gösterelim. $x\in T$ alınırsa $m>1$ için $a^m x=0$ dır. Eger $m=1$ ise $ax=0 \Rightarrow x\in r(a)$ olur. Eger $m>1$ ise bu durumda $a^t x=0$ ve $a^{t-1}x\neq 0$ $t>1$ tamsayısı için t minimal olsun. Bu durumda $t=2k$, $k\in I^+$ için $0=a^t x=a^{2k}x=(a^k)^2 x$ ve $t=2(k+1)$, $k\in I^+$ için $0=a^t x=(a^{k+1})^2 x$ ve $k<t$ oldugundan t nin minimal olmasıyla çelişir. O halde; $a^2 x=0$ olduğundan $ax=0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$a^2 b=0$ olduğunda $\forall x\in R$ ve $n=n(bx)>1$ tamsayısı için $(a(bx))^n=a^n(bx)^n=a\ldots aa^2(bx)(bx)\ldots(bx)=0$ olur. Böylece $\forall\, x\in R$ için $(abx)^n=0$ olduğundan abR nın her elemanı nilpotent olur. abR, R nin bir sağ nil idealidir. Hipotezden $abR=(0)$ dır. Hipotezden R nin sıfırdan farklı sağ nil idealleri olmadığına göre lemma.1.39.dan R, asal halkaların bir altdirek toplamıdır. Böylece

[2,Lemma.9.4.2.] den R halkası yarı-asaldır. Böylece $abR=(0)$ ise $abRab=(0)$ ve dolayısıyla $ab=0 \Rightarrow b\in r(a)$ ve $r(a) = \{x\in R \mid a^m x=0, m\geq 1\}$ dır.

(iii): (ii) de yaptığımız gibi $b\in R$ için $ba^2=0$ olduğunda $ba=0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Hipotezden $\forall x\in R$ için $n=n(xb)>1$ tamsayı olmak üzere; $(axb)^n=a^n(xb)^n$ dır. Dolayısıyla; $b(axb)^n= ba^n(xb)^n= ba^2a.....a(xb)^n= 0$ dır.
Buradan $b(axb)^n=(bax)^n b=0 \Rightarrow (bax)^n bax=0 \Rightarrow (bax)^{n+1}=0$ dır.
O halde; baR nin her elemanı nilpetenttir. baR, R nin bir sag ideali olduğuna göre baR, R nin bir sag nil idealidir. Hipotezden $baR=(0) \Rightarrow baRba=(0)$ R yarı-asal olduğundan $ba= 0$ dır. Böylece $b\in r(a)$ olur.

(iv): $x\in l(a)$ alalım. Notasyondan $xa=0$ dır. Dolayısıyla hipotezden $(ax)^n=a^n x^n$ olacak biçimde $n=n(x)>1$ vardı. O halde; $a^n x^n=(ax)^n=(ax)(ax)...(ax)=a(xa)(xa)...(xa)x=0$ elde edilir. $(ax)^n=0$ olduğundan $al(a)$ nın her elemanı nilpotenttir. $al(a)$, R nin bir sag idealidir. çünkü;

$r_1,r_2\in al(a)$ alınırsa ; $r_1=ab_1$, $b_1\in l(a)$ ve $r_2=ab_2$ $b_2\in l(a)$ dır. $r_1-r_2 = ab_1-ab_2 = a(b_1-b_2)$ olduğundan $r_1-r_2\in l(a)$ dır. Öteyandan; $r\in al(a)$, $s\in R$ olsun. Bu durumda; $rs =ays\in al(a)$ dır. Böylece $al(a)$, R nin bir sag nil idealidir. Hipotezden $al(a)=(0)$ olur. Bundan dolayı $\forall x\in R$ için $ax=0$ ve dolayısıyla $x\in r(a)$ olur. Yani; $l(a)\subseteq r(a)$ olur.

$b\in r(a)$ alalım. Bu durumda $ab=0$ dır. Bundan dolayı $(ba)^2=baba=0$ ve $c=(1+ba)a(1-ba)=(a-ba^2)(1-ba)=a-aba+ba^2-ba^2ba=a+ba^2$ elde edilir. $cb=(a+ba^2)b=ab+ba^2b=0$ ve

$c=(1+ba)a(1-ba)$, a ve b ye bagli bir sabit oldugundan c, a ile aynı özelliklere sahiptir. Dolayısıyla $\forall x\in R$ için $(cx)^{m(x)}=c^{m(x)}x^{m(x)}$ olacak biçimde $m(x)>1$ tamsayısı vardır. Böylece (i) de eger $x,y\in R$ ve $xy=0$ ise o zaman $xay=0$ idi. Bu kullanılırsa; $0=xcy=x(a+ba^2)y=xay+xba^2y$ $=xba^2y$ elde edilir. Simdi hipotezden $a^nx^n-(ax)^n=0 \Rightarrow$ $(a^nx^{n-1}-(ax)^{n-1}a)x=0 \Rightarrow (a^nx^{n-1}-(ax)^{n-1}a)ba^2x=0 \Rightarrow$ $a^nx^{n-1}ba^2x-(ax)^{n-1}aba^2x=0 \Rightarrow (a^nx^{n-1}ba^2)x=0 \Rightarrow$ $(a^nx^{n-1}ba^2x)ax=0 \Rightarrow (a^nx^{n-1}ba^3)x=0$ olur. Tekrar (i) yi kullanıp bu metoda devam edilirse, $a^nx^{n-1}ba^nx=0$ olur. Böylece $(a^nx^{n-1}b)^2=0$ olur. çünkü; $(a^nx^{n-1}b)^2=(a^nx^{n-1}b)(a^nx^{n-1}b)=(a^nx^{n-1}ba^nx)x^{n-2}b=0$ dır. bundan dolayı $a^nx^{n-1}r(a)$ nın her elemanı nilpotenttir. Ayrıca $a^nx^{n-1}r(a)$, R nin bir sag idealidir. çünkü; r_1, $r_2\in a^nx^{n-1}r(a)$ alınırsa; $r_1=a^nx^{n-1}y_1, y_1\in r(a)$ ve $r_2=a^nx^{n-1}y_2, y_2\in r(a)$ dır. Böylece: $r_1-r_2=$ $a^nx^{n-1}y_1-a^nx^{n-1}y_2=a^nx^{n-1}(y_1-y_2)\in a^nx^{n-1}r(a)$ öteyandan $r\in a^nx^{n-1}r(a)$ ve $s\in R$ alınırsa; $r=a^nx^{n-1}y$, $y\in r(a)$ $rs=a^nx^{n-1}ys\in a^nx^{n-1}r(a)$ dır.

Böylece $a^nx^{n-1}r(a)$, R nin bir sag nil idealidir. Dolayısıyla hipotezden $a^nx^{n-1}r(a)=(0)$ olur. $r(a)ax^{n-1}r(a)=(0)$ ve dolayısıyla [36, lemma.1.] den $r(a)a=(0)$ elde edilir. Özel olarak $b\in r(a)$ alınırsa $ba=0$ olur. Böylece $b\in l(a)$ ve $r(a)\subseteq l(a)$dır ∎

<u>**LEMMA.3.26.**</u> R bir yarı-basit halka olsun. $n=n(x)>1$ tamsayı olmak üzere $\forall x\in R$ için;

$$(ax)^k=a^kx^k \quad ,k=n(x),\ n(x)+1$$

olacak biçimde bir $a\in R$ elemanı R nin mer kezidir.

İSPAT: R yarı-basit olduğundan teorem.1.40 dan R. R_a pirimitif halkaların bir altdirek toplamına izomorftur. Böylece her bir $R_a=R/(\delta:R)$ de a nın görüntüsü R deki aynı özelliklere sahiptir. O halde; her R_a da a nın görüntüsünün merkezde olduğunu gösterilirse, a nın R nin merkezinde olduğunu gösterilmiş olur. R, primitif halkaların bir altdirek toplamı olduğuna göre keyfi bir primitif R halkası için işlemleri yapılması yeterlidir. Böylece R nin M gibi bir indirgenemez faithful R-modül vardır. Dolayısıyla teorem.1.25. den

$$C(M)=\{\phi\in E(M)\,|\,T_a\phi=\phi T_a,\ \forall a\in R \text{ için }\}$$

komüting halkası bir bölüm halkasıdır. O halde; teorem.1.36. dan R $D=C(M)$ bölüm halkası üzerinde M'den M'ye lineer dönüşümlerin bir yoğun halkasıdır.üstelik lemma.1.38. den bir pirimitif halka asal halka olduğundan lemma.3.25 den $r(a)=l(a)$ idi. O halde ;$a\in R$ elemanı regülerdir. Böylece (a üzerindeki hipotezle) $a^nx^nax-a^{n+1}x^{n+1}=0\Rightarrow$ $a^n(x^nax-ax^{n+1})=0$ elde edilir. Dolayısıyla;

$$x^nax=ax^{n+1}\ ,\quad n=n(x)>1,\ \forall x\in R \tag{2}$$

bulunur. Buna göre $V=M$ olduğu düşünülürse:

I.DURUM: Eger $boy_DV=1$ ise o zaman teorem.1.37. den $R\cong D$ dır. Böylece R bölüm halkası olur.O halde;(2) den $x^{n(x)}a=ax^{n(x)}$, $n(x)>1$, $\forall\ x\in R$ için elde edilir. Lemma.1.52. den $a\in Z(R)$ olur.

II.BÖLÜM: Eger $boy_DV>1$ ise o zaman $v\in V$ için D üzerinde v ve va lineer bağımsız vektörler olsun.

V üzerinde R nin yoğunluğundan $vx=0$ ve $vax=va$ olan bir $x\in R$ vardır. Böylece (2) den $v(x^n ax)=0=v(ax^{n+1})=vax^{n+1}=vax(x^n)=vax^n=.....=va$ elde edilir. Bu ise v, va nın lineer bağımsız olmasıyla çelişir. Çünkü; $ov+1va=0$ biçiminde yazılabilir. O halde; $\forall v\in V$ için v ve va , D üzerinde lineer bağımlıdırlar. Dolayısıyla $\mu(v)\in D$ olmak üzere verilen bir $v\in V$ için $va=\mu(v)v$ dır.

İDDİA: Eğer D üzerinde $v,w\in V$ vektörleri lineer bağımsız iseler o zaman $\mu(v)=\mu(w)$ dır.

$va=\mu(v)v$, $wa=\mu(w)w$ ve $(w+v)a=\mu(w+v)(w+V)$ için $(w+v)a=\mu(w+v)(w+v) \Rightarrow \mu(w)w+\mu(v)v=\mu(w+v)w+\mu(w+v)v \Rightarrow \{\mu(v)-\mu(w+v)\}v+\{\mu(w)-\mu(w+v)\}w=0$ olur. v,w lineer bağımsız vektörel olduğuna göre $\mu(v)-\mu(w+v)=0$ ve $\mu(w)-\mu(w+v)=0$ dır. Buradan $\mu(v)=\mu(w+v)$ ve $\mu(w)=\mu(w+v)$ ve dolayısıyla $\mu(v)=\mu(w+v)=\mu(w)$ elde edilir. Böylece μ, lineer bağımsız vektörler üzerinde sabittir. $boy_D V>1$ olduğundan $\mu(v)=\mu$ dır. Yani; μ, her $v\in V$ için v den bağımsızdır.

Eğer $x\in R$ ise o zaman $vx\in V$ olduğundan $(vx)a=\mu(vx) \Rightarrow v(xa)=\mu(vx)$ dır. Öteyandan $va=\mu v$ den $(va)x=(\mu v)x=\mu(vx)$ ve dolayısıyla $v(ax)=\mu(vx)$ elde edilir. Böylece buradan $v(xa)=v(ax)$ bulunur. Dolayısıyla; $v(xa)-v(ax)=0 \Rightarrow v(xa-ax)=0$ $\forall v\in V$ olur. V, faithful R-modül olduğuna göre $\forall x\in R$ için $xa-ax=0$ ve $a\in Z(R)$ olur ■

<u>**LEMMA.3.27.**</u> R sıfırdan farklı sağ nil idealleri olmayan bir asal halka olsun. $\forall x\in R$ için $n(x)>1$ bir tamsayı olmak üzere;

$$(ax)^k=a^k x^k \quad ,k=n(x),n(x)+1,n(x)+2$$

olacak biçimde bir $a\in R$ varsa o zaman $a\in Z(R)$ dır.

İSPAT: Lemma.3.26 dan R nin Jacobson radikali $J(R)\neq(0)$ olduğunu kabul edelim. Aksi halde; $J(R)=(0)$ ise o zaman R yarı-basit olugundan bunun ispatı lemma.3.26. da yapıldı. Şimdi $a\in R$ elemanı $\forall x\in J(R)$ için $[a,x]=ax-xa=0$ olduğunu gösterelim.

R asal ve sıfırdan farklı sag nil idealleri olmadığından lemme.3.25. (iv) den a regülerdir. Böylece $y=a(1+x)$ regülerdir.Çünkü; $a(1+x)t=0$ olsun.Eğer $t=0$ olduğunu gösterilirse $a(1+x)$ bir sol sıfır bölensiz olur. $a(1+x)t=0$ olsun. $\Rightarrow$ $(1+x)t=0$,$x\in J(R)$ için x,r.q.r olduğundan $x+x'+x'x=0$ olacak biçimde $x'\in R$ vardır. $(1+x')(1+x)=1$ olduğuna göre $(1+x')(1+x)t=0 \Rightarrow t=0$ olur. Benzer biçimde $ta(1+x)=0$, x q.r. olduğundan $x+x'+x'x=0$ olacak biçimde $x'\in R$ vardır. $(1+x)(1+x')=1$ olduğuna göre $ta(1+x)(1+x')=0\Rightarrow$ $ta=0$ ve a regüler olduğundan $ta=0$ olur. Şimdi ;hipotezden ;

$$(ay)^k=a^ky^k \ , \ k=n(y),n(y)+1,n(y)+2 \qquad (3)$$

olacak biçimde $n=n(y)>1$ vardır.(3) den $(ay)^{n+1}=(ay)^nay=a^ny^nay$ ve $(ay)^{n+1}=a^{n+1}y^{n+1}$ olduğundan $a^ny^nay=a^{n+1}y^{n+1}$ ve dolayısıyla $a^n(y^nay-ay^{n+1})=0\Rightarrow$ $(y^nay-ay^{n+1})=0\Rightarrow$ $(y^na-ay^n)y=0$ $\Rightarrow$ $y^na=ay^n$ bulunur. Benzer düşünce ile $a^{n+1}y^{n+1}y=a^{n+2}y^{n+2}$ den $y^{n+1}a=ay^{n+1}$ elde edilir. Dolayısıyla;$ay^{n+1}=y^{n+1}a=yy^na=yay^n\Rightarrow$ $ay^{n+1}=yay^n\Rightarrow$ $(ay-ya)y^n=0\Rightarrow ay-ya=0\Rightarrow[a,y]=0$ olur.Böylece $0=[a,a(1+x)]=a(a+ax)-(a+ax)a=$ $a^2+a^2x-a^2-axa=a(ax-xa)=a[a,x]\Rightarrow$ $[a,x]=0$ olur. Böylece $a\in Z(R)$ olur■

TEOREM.3.28. R,sıfırdan farklı sağ nil idealleri olmayan bir halka olsun. n, x e bağlı bir $n(x)>1$ tamsayı olmak üzere $\forall x\in R$ için

$$(ax)^k=a^kx^k,\ k=n(x),n(x)+1,n(x)+2$$

özelliğini sağlayan bir $a\in R$ varsa o zaman a, R halkasının merkezine aittir.

İSPAT: $x\in R$ ve $n=n(x)>1$ bir tamsayı olmak üzere ; $(ax)^k=a^kx^k$, $k=n(x),n(x)+1$ olacak biçimde bir $a\in R$ alalım. Bu durumda $(ax)^{n+1}=(ax)^nax=a^nx^nax$ ve $(ax)^{n+1}=a^{n+1}x^{n+1}$ olduğundan $a^nx^nax=a^{n+1}x^{n+1}$ dır. Böylece; $a^{n+1}x^{n+1}-a^nx^nax=0 \Rightarrow a^n(ax^n-x^na)x=0 \Rightarrow a^n[a,x^n]x=0$ elde edilir. Elde edilen bu ifadeyi sağdan x ile çarparak $a^n[a,x^n]x^n=0$ elde edilir. Lemma.3.25.(iv) den a^n nin sağ sıfırlayanları ile a nın sağ sıfırlayanları aynı olduğundan $a[a,x^n]x^n=0$ dır. Böylece lemma.3.25. (i) den $a[a,x^n]ax^n=0$ ve lemma.3.25. (iv) den $[a,x^n]x^na=0$ olur. Dolayısıyla ;

$$\begin{array}{r} a[a,x^n]ax^n=0 \\ -a\,[a,x^n]x^na=0 \\ \hline a[a,x^n]ax^n-a[a,x^n]x^na=0 \end{array}$$

bulunur. Buradan $a[a,x^n](ax^n-x^na)=0 \Rightarrow a[a,x^n]^2=0$ olur. Tekrar lemma.3.25.(iv) den $[a,x^n]^2a=0$ olur. Bu ifadeyi de sağdan x ile çarparak $[a,x^n]^2ax^n=0$ elde edilir. Öteyandan; $a[a,x^n]^2=0$ ifadesini sağdan x ile çarparak $a[a,x^n]^2x^n=0$ bulunur. Buradan lemma.3.25.(iv) den; $[a,x^n]^2x^na=0$ olur. Dolayısıyla ; $[a,x^n]^2ax^n=0$ ifadesinden $[a,x^n]^2x^na=0$ ifedesi çıkartılırsa; $[a,x^n]^2(ax^n-x^na)=0$ ve dolayısıla $[a,x^n]^3=0$ elde edilir. $[a,x^n]^s=0$ olacak biçimde $s \geq 1$ minimal olsun $(1 \leq s \leq 3)$.

<u>İDDİA:</u> Eğer P, R nin bir asal ideali ise o zaman $[a,x^n]^{s-1} \in P$ dır. Teorem.3.32. den $J(R/J(R))=(0)$ dır. Bundan dolayı $\overline{R}= R/J(R)$ bir yarı-basit halkadır. Dolayısıyla lemma.3.6. dan $\overline{a}=a+J(R) \in Z(R)$ dır. Böylece $\forall$ $x \in R$ için $[a,x^n]=ax^n-x^n a=0 \Rightarrow (ax^n-x^n a)+J(R)= (0)= J(R)$ $\Rightarrow$ $[a,x^n] \in J(R)$ dır. P, R nin asal ideali olmak üzere eğer $J(R) \subseteq P$ ise o zaman $[a,x^n] \in P$ olur. Bu lemma.3.26. da yapıldı. Eğer $\overline{R}= R/P$ halkasının sıfırdan farklı sag nil idealleri yoksa bu durumu da lemma.3.27. de yapıldı. O halde ; $J(R) \not\subseteq P$ ve $\overline{R}$ nin sıfırdan farklı sag nil idealleri olduğunda ispat yapılacaktır.

K , $\overline{R}$ nin bütün sag nil ideallerin birleşimi olsun. P, R nin asal ideali olduğundan lemma.1.21. den R/P asal halkadır. $J(R)$ nin $\overline{R}$ deki görüntüsü $\overline{J(R)} \neq (0)$ dir. Çünkü ; $\overline{J(R)}=(0)$ olsa bu durumda $J(R)+P=(0)=P \Rightarrow J(R) \subseteq P$ olur. Bu ise $J(R) \not\subseteq P$ olmasıyla çelişir.

K, $\overline{R}$ deki bütün sag nil ideallerin birleşimi olduğundan $\overline{J(R)} \in K$ dır. Bu nedenle $K \cap \overline{J(R)} \neq (0)$ dır.

$U=\{ u \in R \mid xuy=0 , \forall x,y \in R, xy=0$ için $\}$ kümesini alalım. U, R nin bir alt halkasıdır. Çünkü; $u_1,u_2 \in U$ alalım. Bu durumda $xu_1y=0$ $xu_2y=0$ dır. $x(u_1-u_2)y= xu_1y-xu_2y=0-0=0$ $\Rightarrow U_1-U_2 \in U$ olur. Öteyandan; $xu_1y=0 \Rightarrow xu_1u_2y=0 \Rightarrow u_1u_2 \in U$ Dolayısıyla ; R nin bir althalkası olan U, R nin otomorfizmaları altında invariyanttır. Çünkü ;

$$\begin{array}{ccc} \theta:R & \longrightarrow & R \\ | & & | \\ U & \longrightarrow & U\theta \subseteq U \\ \forall u & \longrightarrow & u\theta \in U \end{array}$$

$u\in U$ ise $xuy=0$ dır.Bu durumda $(xuy)\theta=0\theta=0$. θ, otomorfizma olduğundan $(x\theta)(u\theta)(y\theta)=0$ Dolayısıyla $u\theta\in U$ olur. Tabii ki $(xy)\theta=0\theta=0 \Rightarrow (x\theta)(y\theta)=0$ dır.Ayrıca lemma.3.25.(i) den $a\in U$ dır. U, R nin otomorfizmaları altında inveriyant olduğundan her $\bar{y}\in K\cap \overline{J(R)}$ için formal olarak

$$\begin{array}{ccc} T:\bar{R} & \longrightarrow & \bar{R} \\ | & & | \\ \bar{U} & \longrightarrow & \bar{U}T=(1+y)\bar{U}(1+y)^{-1}\subseteq\bar{U} \end{array}$$

dır.Böylece [10] dan ya $\bar{U}\subseteq Z(\bar{R})$ ya da $\bar{U}$, $\bar{R}$ nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Eğer $\bar{U}\subseteq Z(\bar{R})$ ise o zaman $a\in U$ için $\bar{a}\in \bar{U}$ idi.O halde;$\forall$ $x\in \bar{R}$ için $\bar{a}\bar{x}^n=\bar{x}^n\bar{a} \Rightarrow \bar{a}\bar{x}^n-\bar{x}^n\bar{a}=0=P \Rightarrow (ax^n-x^na)+P=0=P \Rightarrow (ax^n-x^na)\in P \Rightarrow [a,x^n]\in P$ dır. P ideal olduğundan $[a,x^n]^{s-1}\in P$ olur.

Eğer $\bar{U}$, $\bar{R}$ nin $\bar{A}\neq(0)$ bir idealini kapsarsa o zaman $\bar{a}\in \bar{U}$ için;

$$\begin{array}{ccl} T:\bar{R} & \longrightarrow & \bar{R} \\ | & & | \\ \bar{A} & \longrightarrow & \bar{A}T=\overline{[a,\ x^n]}\bar{A}\overline{[a,\ x^n]^{s-1}}\subset\overline{[a,\ x^n]}\bar{U}\overline{[a,\ x^n]^{s-1}}=(0) \end{array}$$

dır. Çünkü; $[a,\ x^n]^s=0$ idi. $[a,\ x^n][a,\ x^n]^{s-1}=0 \Rightarrow \overline{[a,x^n]}\bar{U}\overline{[a,x^n]^{s-1}}=(0)$ dır.Bu durumda $(0)\neq\bar{A}$ olduğuna göre $\overline{[a,x^n]}\bar{A}=(0)$ veya $\bar{A}\overline{[a,x^n]^{s-1}}=(0)$ dır.Eğer $\bar{A}\overline{[a,x^n]^{s-1}}\neq(0)$ ise o zaman $\overline{[a,x^n]}\bar{A}=(0)$ dır.Bir halkanın sıfırdan farklı bir ideali sol(sağ)dan halkanın bir elemanı ile çarpımı sıfır ise o zaman halkanın elemanı sıfırdır.O halde; $\overline{[a,x^n]}=0$ dır.Buradan $[a,x^n]\in P$ ve P asal ideal olduğundan $[a,x^n]^{s-1}\in P$ olur.

Eğer $\overline{[a,x^n]}\bar{A}\neq(0)$ ise bu durumda $\bar{A}\overline{[a,x^n]^{s-1}}=(0)$ olur.Dolayısıyla $[a,x^n]^{s-1}\in P$ olur.R nin sıfırdan farklı sağ nil ideallari olmadığından R yarı-asaldır. Bir yarı-asal halkanın asal radikali $P(R)=\cap(P_i | P_i$ asal ideal$)=(0)$ olduğuna göre P_i,R nin asal ideallerini taramak üzere $\cap P_i=(0)$ dır.Böylece $[a,x^n]^{s-1}=0$ olur.Bu ise s nin minimal olmasıyla çelişir.O halde s=1 dir.Yani;$[a,x^n]=0$ ve dolayısıyla teorem.1.57. den $a\in Z(R)$ olur∎

A.Richoux (1979)

LUH'UN BIR KOMÜTATIFLIK TEOREMIN ÜZERINE

__TEOREM.3.29.__ R nilpotent eleman olmayan bir halka olsun. n,x ve y ye bağlı $n(x,y)\geq 1$ bir tamsayı olmak üzere $\forall x,y\in$ R için;

$$(xy)^k=x^ky^k \quad , \; k=n(x,y),n(x,y)+1,n(x,y)+2 \qquad (A)$$

ise o zaman R komütatiftir.

Teoremin ispatına başlamadan önce basit bir yorum yapalım. R, (A) özelliğini sağlayan bir halka olsun.Bu durumda $x,y\in$ R alalım.$i,j\geq 1$ tamsayılar olmak üzere $x^iy^j=0$ olduğunu varsayalım.O halde ;$n_1=n(x,y)+1>1$ için hipotezden $(xy)^{n_1}=x^{n_1}y^{n_1}$ dır.$n_1\geq\max\{i,j\}$ ise o zaman $(xy)^{n_1}=x^{n_1}y^{n_1}$ ifadesinde i,j ye bağlı olarak $(xy)^{n_1}=x^{n_1}y^{n_1}=0$ ve dolayısıyla xy nilpotenttir.Aksi halde $\max\{i,j\}>n_1$ ise o zaman $n_2=n(x^{n_1},y^{n_1})+1>1$ için $(xy)^{n_1n_2}=(x^{n_1}y^{n_1})^{n_2}=x^{n_1n_2}y^{n_1n_2}$ bulunur.Burada $n_1n_2>n_1$ dır.Çünkü n_1,n_2-ler birer tamsayı olduğundan.Eğer $n_1n_2\geq\max\{i,j\}$ ise o zaman yukarıda yapıldığı gibi $(xy)^{n_1n_2}=0$ dır.Böylece xy nilpotenttir.Aksi halde deyip, aynı metodla devam edilirse $n_1n_2...n_r\geq\max\{i,j\}$ olacak biçimde $(xy)^{n_1n_2...n_r}=x^{n_1n_2...n_r}y^{n_1n_2...n_r}$ sağlayan $n_1n_2...n_r$

tamsayıları bulunabilir. Böylece xy nilpotent olur. Benzer düşünce ile x ve y nin rolleri değiştiri-lirse yx nilpotent olur. Şimdi (A) nın ilk iki özelli ğinden $x^{n(x,y)+1}y^{n(x,y)+1} = (xy)^{n(x,y)}(xy) =$ $x^{n(x,y)}y^{n(x,y)}xy \Rightarrow x^{n(x,y)}(xy^{n(x,y)}-y^{n(x,y)}x)y=0$ elde edilir. Dolayısıyla $k=n(x,y)$ olduğuna göre

$$x^{k}(xy^{k}-y^{k}x)y=0 \quad ,k=n(x,y),n(x,y)+1 \qquad (1)$$

olur. Şimdi teorem.3.29.'un ispatını tamamlayalım.

TEOREM.3.29.UN İSPATI: (1) den ve yukarıda yapılan yorumdan $\forall x,y\in R$ ve $i= n(x, y), n(x, y)+1$ için $x^{i}(y^{i}x-xy^{i})y=0$ oldugundan $x(y^{i}x-xy^{i})y$ nilpotenttir. Dolayısıyla;$(y^{i}x-xy^{i})yx$ nilpotenttir.Çünkü $x,y\in R$ için xy nilpotent ise o zaman $(xy)^{k}=0$ olacak biçimde $k\in I^{+}$ vardır.Buradan $y(xy)^{k}x=0 \Rightarrow (yx)^{k+1}=0$ ve dolayısıyla yx nilpotenttir.Teoremin hipotezinden;

$$0=(y^{i}x-xy^{i})yx, \quad \forall x,y\in R \quad i=n(x,y),n(x,y)+1 \qquad (2)$$

dır. (2) ifadesi soldan y ile çarpılırsa $i=n(x,y)$, $n(x,y)+1$ için $(y^{i}x-xy^{i})yx= 0$ elde edilir. Böylece ; $0=(y^{i+1}x-xy^{i+1})xy-(y^{i}x-xy^{i})yx=(yxy^{i}-xy^{i+1})yx$ ve dolayısıyla $\forall x,y\in R$ için $(yx-xy)y^{i+1}x=0$ elde edilir.Bu durumda $\{(yx-xy)y^{i+1}\}^{i=1}$ ve $x^{j=1}$ olarak düşünülürse $(yx-xy)y^{i+1}x$ ve $x(yx-xy)y^{i+1}$ nilpotent olur.Hipotezden $x(yx-xy)y^{i+1}=0$ dır.Tekrar yukarıdaki yorum düşünülürse $\{x(yx-xy)\}^{i=1}$ ve $y^{i+1}=j$ olarak alırsak $x(yx-xy)y$ ve dolayısıyla $y\{x(yx-xy)\}$ nilpotenttir.Böylece hipotezden $\forall x,y\in R$ $y\{x(yx-xy)\}=0$ dır.Bu ifade de x yerine y ve y yerine de x yazılırsa $x\{y(xy-yx)\}=0$ elde ederiz. Dolayısıyla buradan

$0= yx(yx-xy)+xy(xy-yx)= yxyx-yxxy+xyxy-xyyx= yx(yx-xy)+xy(xy-yx) \Rightarrow (yx-xy)^2=0$ elde edilir. Teoremin hipotezinden $yx-xy=0 \Rightarrow yx=xy$ olur■

LEMMA.3.30. R (A) özelliğini sağlayan bir halka ise o zaman R nin nilpotent elemanları merkezdedir.

İSPAT Bir $x\in R$ elemanı nilpotent olsun. Bu durumda $\forall y\in R$ için $xy=yx$ olduğunu gösterelim.

Keyfi bir $r\in R$ için $rx-xr=r(x+1)-(x+1)r$ dır. Yani; bir x elemanı merkeze ait ise x+1 de merkeze aittir. Dolayısıyla x yerine x+1 alınmasında hiç bir sakınca yoktur. Böylece (1) den $\forall y\in R$ için;

$$0=(x+1)^i(y^ix-xy^i)y, i=n(x,y),n(x,y)+1 \qquad (3)$$

elde edilir. x nilpotent olduğundan x, q.r. dır. Dolayısıyla lemma.1.30 dan 1+x tersinirdir. O halde (3) den

$$0=(y^ix-xy^i)y, i=n(x+1,y),n(x+1,y)+1 \qquad (4)$$

elde edilir. Buradan $i=n(x+1,y)$ için $0=(y^{i+1}x-xy^{i+1})y-y\{(y^ix-xy^i)\}=y^{i+1}xy-xy^{i+2}-y^{i+1}xy+yxy^{i+1}=yxy^{i+1}-xy^{i+2}=(yx-xy)y^{i+1}$ elde edilir. Şimdi bir $y\in R$ alalım. i pozitif tamsayı olmak üzere $(yx-xy)y^i=0$ olacak biçimde i minimal olsun. Bu ifade de y yerine y+1 alınırsa $j=n(x,y+1)$ için $0=\{(y+1)x-x(x+1)\}(y+1)^j=(yx-xy)(y+1)^j$ elde edilir. Bu ifadeyi y^{i-1} le çarpılırsa,

$0=(yx-xy)(y+1)^j.y^{i-1}=(yx-xy)(y^j+jy^{j-1}+...+jy+1)y^{j-1}=(yx-xy)y^jy^{i-1}+j(yx-xy)y^jy^{j-2}+...+j(yx-xy)y^j+(yx-xy)y^{i-1}=(yx-xy)y^{i-1}$ olur. Bu ise i nin minimal olmasıyla çelişir. O halde $(yx-xy)y^0=0 \Rightarrow (yx-xy)=0 \Rightarrow x\in Z(R)$ olur■

TEOREM.3.31 R, (A) özelliğini sağlayan birimli bir halka ise o zaman R komütatiftir.

İSPAT: Lemma.3.30. dan $N \subseteq Z(R)$ ve $Z(R)$,R nin ideali olduğundan N de R nin bir idealidir.Teorem.3.29 dan R/N komütatiftir. Gerçekten; R/N nilpotent elemanları yoktur. $\bar{x} \in \bar{R} = R/N$ alalım. $\bar{x}^n = 0$ olacak biçimde $n \in I^+$ varsa o zaman $\bar{x}^n = (x+N)^n = x^n+N = N \Rightarrow x^n \in N$ ve dolayısıyla $x \in N$ olur. Böylece , $x=0$ dır. Bundan dolayı R/N nin sıfırdan farklı nilpotent elemanları yoktur. R/N komütatif olduğundan $\forall \bar{x}, \bar{y} \in R/N$ için $\bar{x}\bar{y} = \bar{y}\bar{x} \Rightarrow \bar{x}\bar{y}-\bar{y}\bar{x}=0$ $\Rightarrow xy-yx \in N \subseteq Z(R) \Rightarrow xy-yx \in Z(R)$ olur. Bu durumda (1) den $0=x^i(y^ix-xy^i)y$,$i=n(x,y),n(x,y)+1$ dır. Öteyandan $x^i(y^ix-xy^i)y=x^i(y^i(xy)-(xy)y^i)=\{(y^ix-xy^i)y\}x^i$ dir. Böylece $\forall x, y \in R$ için,

$$x^i(y^ix-xy^i)y=(y^ix-xy^i)yx^i \quad ,i=n(x,y),n(x,y)+1 \qquad (5)$$

elde edilir. Böylece $j=(x,y)$ için (5) den,

$0=(y^{i+1}x-xy^{i+1})xy^{j+1}-\{y(y^ix-xy^i)\}x=(y^{i+1}x-xy^{i+1})xy^{j+1}-$ $(y^{i+1}x-yxy^{i+1})xy^{j+1}=(yxy^i-xy^{i+1})xy^{j+1}=(yx-xy)y^{j+1}x^{j+1}$

elde edilir. $(xy-yx) \in Z(R)$ olduğundan $(yx-xy)\ y^{j+1}x^{j+1}=$ $y^{j+1}x^{j+1}(yx-xy)=y^{j+1}\{-\{x(x^{j+1}y)-(x^{j+1}y)x\}=\{-\{x(x^{j+1}y-$ $(x^{j+1}y)x\}y^{j+1}=x^{j+1}(yx-xy)y^{j+1}$ olur.Böylece ;$j=(x,y)$ için

$$0=(yx-xy)y^{j+1}x^{j+1}=x^{j+1}(yx-xy)y^{j+1} \quad ,\forall x,y \in R \qquad (6)$$

elde edilir. Şimdi $x,y \in R$ alalım. Bu durumda,

$0=x^i(yx-xy)y^j$ olacak biçimde $\forall i,j \geq 0$ tamsayılarından i_o,minimal olacak biçimde birer i_o, j_o tamsayılarını seçelim. Bu durumda $i_o > 0$ olsun. (6) de x yerine x+1 yazılırsa $0=\{y(x+1)-(x+1)y\}y^k(x+1)^k=(x+1)^k(yx+y-xy-y)y^k=$ $(x+1)^k(yx-xy)y^k$ olacak biçimde bir $k=n(x+1,y)\geq 0$ tamsayısı vardır. Bu durumda max $\{j_o,k\}=1$ için $0=(x+1)^k(yx-$

$xy)y^1$ dır. Bu ifadeyi soldan x^{io-1} ile çarpar, $(x+1)^k$ açılım yapılırsa $0=x^{io-1}(x+1)^k(yx-xy)y=x^{io-1}x^k(yx-xy)y + kx^{io-2}x^k(yx-xy)y+\ldots+kx^{io-k}x^k(yx-xy)y+x^{io-1}(yx-xy)y =x^{io-1}(yx-xy)y$ elde edilir. Bu ise i_o nın minimal olmasıyla çelişir. O halde $i_o=0$ ve dolayısıyla $\forall x,y\in R$ için $0=(yx-xy)y^j$ olur. Bu durumda $j_o=j_o(x,y)\geq 0$ tamsayı olmak üzere $(yx-xy)y^{j_o}=0$ olacak biçimde j_o minimal olsun. $j_o>0$ deyip, yukarıdaki gibi işlemler yapılırsa bir çelişki bulunur. Böylece $j_o=0$ ve $yx-xy=0$ elde edilir■

M.Ashraf - M.A.Kuadri (1986)

HALKALARIN KOMÜTATİFLİĞİ ÜZERİNE BİR NOT

LEMMA.3.36. R bir yarı-asal halka olsun. $\forall x,y\in R$ için $(xy)^2=y^2x^2$ ise var o zaman R nin sıfırdan farklı nilpotent elemanları yoktur.

İSPAT: $a^2=0$ olacak biçimde $0\neq a\in R$ alalım. Hipotezden $\forall x\in R$ içiçn $x^2a^2=0$ ve dolayısıyla $(ax)^2=0$ olur. Eğer $aR\neq(0)$ ise o zaman aR, $\forall y\in R$ için $y^2=0$ olan sıfırdan farklı bir sağ nil idealidir. Böylece [3.lemma.2.1.1]den R nin sıfırdan farklı bir nipotent ideali vardır. Bu ise R nin yarı-asal olmasıyla çelişir. O halde $aR=(0)$ dır. Böylece $\forall a\in R$ için $aRa=(0)$ ve dolayısıyla $a=0$ olur■

LEMMA.3.37. R bir asal halka olsun. $\forall x,y\in R$ için $(xy)^2=y^2x^2$ özelliği varsa o zaman R nin bir sıfır bölenleri yoktur.

İSPAT Lemma.3.36 dan R nin sıfırdan farklı nilpotent elemanı yoktur. Böylece [3.lemma.1.1.1] den R nin sıfır bölenleri yoktur∎

TEOREM.3.38. R birimli bir yarı-asal halka olsun. $\forall x,y\in R$ için $(xy)^2=y^2x^2$ ise varsa o zaman R komütatiftir.

İSPAT Teorem.1.15. den bir R halkası asal radikali $P(R)=\cap P_i$, P_i asal ideal idi. R yarı-asal olduğundan $P(R)=(0)$ dır. Böylece teorem.1.10. dan R, R/P_i halkaların bir altdirek toplamıdır. Öteyandan lemma.1.21. den $P_i$ler asal ideal olduğundan $R_i=R/P_i$ halkası asal halkadır. Böylece R, R nin bir homomorfik görüntüsü olan R_i asal halkaların bir altdirek toplamına izomorftur. O halde R halkasını bir asal halka olarak düşünülebilir.

Hipotezde $\forall x,y\in R$ nin $(xy)^2=y^2x^2$ olduğuna göre bu ifade de y yerine y+1 yazılırsa $\{x(y+1)\}^2=(y+1)^2x^2 \Rightarrow$ $(x+xy)(x+xy)-x^2-2yx^2-y^2x^2=0$ ve dolayısıyla;

$$0=x^2y+xyx-2yx^2,\quad \forall x,y\in R \tag{1}$$

elde edilir.

I.DURUM: charR=2 ise o zaman (1) deki $2yx^2=0$ olur. Böylece (1) den $x(xy+yx)=0$ elde edilir. Lemma.3.38. den R nın sıfır bölenleri olmadığından $x=0$ veya $xy+yx=0$ dır. Eğer $x\neq 0$ ise $xy+yx=0$ olur. Ayrıca $x=0$ olduğunda da $xy+yx=0$ olacağından $xy=-yx=yx$ elde edilir.

II.DURUM: charR$\neq$2 ise o zaman (1) de y yerine $y+y^2$ yazılırsa $0=x^2(y+y^2)+x(y+y^2)x-2(y+y)^2x^2=x^2y+x^2y^2+xyx+xy^2x-2yx^2-2y^2x^2=x^2y+xyx-2yx^2+x^2y^2+xy^2x-2y^2x^2=x^2y^2+xy^2x-2y^2x^2$ olur. Yani;

$$0=(xy)^2+xy^2x-2y^2x^2,\quad \forall x,y\in R \tag{2}$$

(1)'i soldan y ile çarpılırsa

$$0=yx^2y+(yx)^2-2y^2x^2 \quad \forall x,y\in R \tag{3}$$

elde edilir.(2) ve (3) den

$$\begin{array}{l} (xy)^2+xy^2x-2y^2x^2=0 \\ -(yx)^2yx^2y+2y^2x^2 \ =0 \\ \hline yx^2y-xy^2x=0 \text{ ve dolayısıyla} \end{array}$$

$$yx^2y=xy^2x \ , \ \forall x,y\in R \tag{4}$$

elde edilir.(4) de y yerine x+y yazılır ve (4) kullanılırsa; $0=(x+y)x^2(x+y)-x(x+y)^2x=(x^3+yx^2)(x+y)-x(x+y)(x+y)x$ $=x^4+x^3y+yx^3+yx^2y-x^4+x^2yx-xyx^2-xy^2x$ ve dolayısıyla

$$0=x^3y+yx^3-x^2yx-xyx^2 \ , \ \forall x,y\in R \tag{5}$$

elde edilir.(5) de x yerine 1+x yazılır ve (5) kullanılırsa $0=(1+x)^3y+y(1+x)^3-(1+x)^2y(1+x)-(1+x)y(1+x)^2$

$=(1+3x+3x^2+x^3)y+y(1+3x+3x^2+x^3)-(1+2x+x^2)(y+yx)$
$-(y+xy)(1+2x+x^2)$

$=2x^2y+2yx^2-4xyx$ ve dolayısıyla

$$0=2(x^2y+yx^2-2xyx), \ \forall x,y\in R \tag{6}$$

elde edilir.Böylece char$\neq$ 2 olduğundan $x^2y+yx^2-2xyx=0$ dır. Dolayısıyla (6) da y yerine $y+y^2$ yazılır ve $x^2y+yx^2-2xyx=0$ ifadesi kullanılırsa; $0=x^2(y+y^2)+(y+y^2)x^2-2x(y+y^2)x = x^2y^2+y^2x^2-2xy^2x+x^2y+yx^2-2xyx$ den

$$0=x^2y^2+y^2x^2-2xy^2x \ , \ \forall x,y\in R \tag{7}$$

elde edilir.Ayrıca $yx^2y+(yx)^2-2y^2x^2=0$ ifadesinden $(yx)^2=2y^2x^2-yx^2y \Rightarrow x^2y^2=2(xy)^2-yx^2y$ elde edilir.Bu ifadede x ve y nin rollerini değiştirilirse $y^2x^2=2(yx)^2-xy^2x$ elde edilir.(4) den ve (3) den

$$x^2y^2=2(xy)^2-yx^2y \text{ ve } y^2x^2=2(yx)^2-xy^2x, \quad \forall x,y\in R \tag{8}$$

elde edilir. (8) deki ifadeler toplanırsa;

$$0=2yx^2y-(xy)^2-(yx)^2 \ ,\forall x,y\in R \tag{9}$$

elde edilir, (7) deki ifadeyi $(yx)^2+(xy)^2 2xy^2x=0$ biçiminde yazıp, (9) ile toplanırsa;

$$0=2(xy-yx)^2, \quad \forall x,y\in R \qquad (10)$$

elde edilir. char$R\neq 2$ olduğundan (10) dan $(xy-yx)^2=0$ elde edilir. Lemma.3.37. den $(xy-yx)=0 \Rightarrow xy=yx$ olur ■

Aşağıdaki örnek teorem.3.38. in herhangi bir halka için geçerli olmadığını gösterir.

ÖRNEK: $R=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0\end{bmatrix} \mid a,b\in I\right\}$ olsun. R halkası $\forall x,y\in R$ için $(xy)^2=y^2x^2$ hipotezini sağlar; fakat R komütatif değildir ■

Kâzım Kaya (1986)

UYARI-ASAL HALKALARIN KOMÜTATİFLİĞİ İLE İLGİLİ İKİ UYARI

LEMMA.3.39 R bir asal halka ve $x,y\in R$, $x\neq 0$ olsun. x, $xy\in Z(R)$ ise o zaman $y\in Z(R)$ dir.

İSPAT: $x,xy\in Z(R)$ alalım. Bu durumda $\forall z\in R$ için $xyz=zxy=xzy$ dir. Buradan $xyz=xzy$ alınırsa $x(yz-zy)=0$ elde edilir. Böylece $\forall r\in R$ için $rx(yz-zy)=0$ ve dolayısıyla $Rx(yz-zy)=(0)$ olur. $x\in Z(R)$ olduğundan $xR(yz-zy)=(0)$ olur R asal halka olduğundan teorem.1.20. den $x=0$ veya $(yz-zy)=0$ dır. $x\neq 0$ olduğundan $yz-zy=0$, $\forall z\in R \Rightarrow y\in Z(R)$ olur ■

LEMMA.3.40. R bir asal halka olsun. $\forall x\in R$ için $x^n\in Z(R)$ olacak biçimde sabit bir $n>1$ tamsayısı varsa o zaman R nin sıfırdan farklı nilpotent elemanı yoktur.

İSPAT $0\neq a\in R$ ve $a^2=0$ olsun. Bu durumda $\forall r\in R$ için $ar\in R$

olacağından hipotezden $(ar)^n \in Z(R)$ dır. Dolayısıyla $(ar)^n a = a(ar)^n$, $\forall r \in R$ olur. Böylece $(ar)^n ar = a(ar)^n r$ $\Rightarrow (ar)^{n+1} = a^2(ra)^{n-1}r^2 \Rightarrow (ar)^{n+1}=0$, $\forall r \in R$ elde edilir. Yani; aR idealin her elmanın sabit bir kuvveti sıfırdır. Eğer $aR \neq (0)$ ise o zaman [5.lemma.1.1] ile çelişir.

O halde $aR=(0)$ dır. R asal halka olacağından $a=0$ dır∎

LEMMA.3.41. R asal bir halka ve $\forall x,y \in R$ için $(xy)^2 - y^2x^2 \in Z(R)$ ise o zaman R komütatiftir.

İSPAT İlk olarak $Z(R) \neq (0)$ olduğunu gösterelim. $Z(R)=(0)$ olsun. Bu durumda $(xy)^2=y^2x$ dır. Bu ifade de x yerine x+y yazılırsa ; $\{(x+y)y\}^2 = y^2(x+y)^2 \Rightarrow (xy+y^2)(xy+y^2) - y^2(x+y)(x+y)=0 \Rightarrow (xy)^2+xy^3+y^2xy+y^4-y^2x^2-y^2xy-y^3x+y^4=0$ $\Rightarrow xy^3-y^3x+(xy)^2-y^2x^2=0 \Rightarrow xy^3-y^3x=0$ ve dolayısıyla $y^3 \in Z(R)$ dır. Lemma.3.40. den $y=0$ olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $Z(R) \neq (0)$ dır.

Buna göre $0 \neq r \in Z(R)$ alalım. hipotezde x yerine x+r yazılırsa $\{(x+r)y\}^2 - y^2(x+r)^2 \in Z(R) \Rightarrow (xy+ry)(xy+ry) -$

$y^2(x+r)(x+r) \in Z(R) \Rightarrow (xy)^2+(xy)(ry)+(ry)(xy)+(ry)^2 -$

$y^2(x^2+xr+rx+r^2) \in Z(R) \Rightarrow xyry+ryxy-y^2xr-y^2rx+(xy)^2 -$

$x^2y^2+(ry)^2-y^2r^2 \in Z(R) \Rightarrow xyry+ryxy-y^2xr-y^2rx \in Z(R)$

$\Rightarrow xy^2r+yxyr-2y^2xr \in Z(R) \Rightarrow (xy^2+yxy-2y^2x)r \in Z(R)$

elde edilir. Böylece lemma.3.39. dan;

$$(xy^2+yxy-2y^2x)r \in Z(R) \qquad (1)$$

elde edilir∎

I.DURUM: Eğer charR=2 ise o zaman $2y^2x=0$ olacağından $xy^2+yxy \in Z(R)$ dır. Bu ifade de x yerine xy yazılırsa $xyy^2+yxyxy \in Z(R) \Rightarrow (xy^2+yxy)y \in Z(R)$ dır. Dolayısıyla lemma.3.39.dan

(i) $xy^2+yxy\neq 0$ ise $y\in R$ olur. O halde $\forall x\in R$ için, $xy=yx$ ve dolayısıyla R komütatif

(ii) $xy^2+yxy=0$ ise o zaman;

$(xy+yx)y=0$ (2)

olur. (2) de x yerine r alınırsa $(ry+yr)y=0 \Rightarrow ry^2=-yry$ elde edilir. Tekrar (2) de x yerine xr alınırsa $(xry+yxr)y=0$ bulunur. Bu iki ifadeden $yxry-xyry=0$ elde edilir. Bu ifade $\forall x, y, r\in R$ için geçerli olduğundan $(yx-xy)Ry=(0)$ dır. Dolayısıyla R asal olduğundan teorem. 1.20. den $yx-xy=0$ veya $y=0$ dır. Eğer $y\neq 0$ ise $yx-xy=0$ dır. Eğer $y=0$ ise $yx-xy=0$ olur. Her durumda da $yx-xy=0$ olduğuna göre $yx-xy=0 \Rightarrow yx=xy$ elde edilir.

II.DURUM: Eğer $\mathrm{char}R\neq 2$ ise o zaman hipotezde x yerine x+y yazılırsa;

$xy^3-y^3x \in Z(R)$,$\forall x,y\in R$ (3)

elde edilir.(3) de x yerine xy^3 yazılırsa $(xy^3-y^3x)y^3\in Z(R)$ bulunur.Böylece lemma.3.39. dan $xy^3-y^3x\in Z(R)$ yani; $xy^3-y^3x\neq 0$ olduğundan $y^3\in Z(R)$,$\forall y\in R$ dır. Dolayısıyla [8,teorem.1] den R komütatiftir veya R nin komütatif ideali D(R) nildir.Öteyandan teorem.1.45. den R nin nil idealleri yoksa R komütatiftir.Lemma.3.40 dan R nin nilpotent elemanları olmadığından $D(R)=(0)$ ve dolayısıyla R komütatiftir ∎

<u>**LEMMA.3.42.**</u> R bir halka ve $\forall x,y\in R$ için $(xy)^2-y^2x^2 \in Z(R)$ ise o zaman $D(R)\subseteq P(R)$ dır.

<u>**İSPAT:**</u> Lemma.1.21. den R nin keyfi bir P asal ideali için $\bar{R}=R/P$ asal halkadır. Böylece lemma.3.41. den R ko-

mütatiftir. O halde ;$\forall \bar{x},\bar{y} \in \bar{R}$ için $[\bar{x},\bar{y}]=\bar{x}\bar{y}-\bar{y}\bar{x}=\bar{0}=P$ dir. Buradan $[x,y] \in P$ olur. Yani $\forall x,y \in R$ için $[x,y] \in \cap P_i, P_i$ asal ideal teorem.1.15. den $P(R)=\cap P_i, P_i$ asal ideal olduğuna göre $[x,y] \in P(R)$ dır. Öteyandan $[x,y] \in D(R)$ olduğu açık. O halde $D(R) \subseteq P(R)$ dır ■

TEOREM.3.43. R bir yarı-asal halka ve $\forall x,y \in R$ için $(xy)^2-y^2x^2 \in Z(R)$ ise o zaman R komütatiftir.

İSPAT: R yarı-asal olduğundan tanım.1.14 den $P(R)=(0)$ dır. Böylece lemma.3.42. den $D(R) \subseteq P(R)$ olduğuna göre $D(R)=(0)$ ve dolayısıyla R komütatiftir ■

UYARI.3.44. R bir halka olsun. $\forall x,y \in R$ için $(xy)^2-y^2x^2 \in Z(R)$ ise o zaman R nin idempotent elemanları R nin merkezindedir.

İSPAT: $e \in R$ ve e idempotent olsun. Hipotezde x yerine e yazılırsa $(ey)^2-y^2e \in Z(R)$ olur. Yani $\{(ey^2)-y^2e\}e= e\{(ey)^2-y^2e\}$ dır. Bu eşitlik sağdan e ile çarpılırsa $\{(ey)^2-y^2e\}e= e\{(ey)^2-y^2e\}e \Rightarrow (ey)^2e-y^2e \;=e(ey^2)e-ey^2e$ olur. Buradan $(ey)^2e=e(ey^2)e$ ve $y^2e=ey^2e$ elde edilir. $y^2e=ey^2e$ de y yerine e+y yazılırsa $(e+y)^2e= e(e+y)^2e$ $\Rightarrow$ $(e+ey+ye+y^2)e = e(e+ey+ye+y^2)e \Rightarrow e+ey+ye+y^2e =e+eye+eye+ey^2e \Rightarrow ye=eye$ elde edilir. Benzer düşünce ile hipotezde y yerine e yazılırsa ; $\forall x \in R$ için $ex=exe$ elde edilir. Bu ifadede x yerine y yazılırsa $ey=eye$ ve dolayısıyla $\forall y \in R$ için $ey=ye$ elde edilir. Böylece $e \in Z(R)$ olur ■

TANIM.3.45. R bir halka ve $a \in R$ olsun. $d:R \longrightarrow R$, dönüşümü (a) $d(x,y)=d(x)+d(y)$ ve (b) $d(xy)= d(x)y+xd(y)$

koşullarını sağlarsa o zaman d ye bir türev denir.

TANIM.3.46. R bir halka ve $a\in R$ olsun $d_a:R\longrightarrow R$

$r\longrightarrow ar-ra$ biçiminde tanımlanan türeve iç türev denir.

LEMMA.3.47. R bir asal halka ve $\forall x,y\in R$ için $x^2y^2-y^2x^2\in Z(R)$ ise o zaman R komütatiftir.

İSPAT: İlk olarak $Z(R)\neq(0)$ olduğunu gösterelim. Eğer $Z(R)=0$ ise o zaman hipotezden

$$0=x^2y^2-y^2x^2,\ \forall x,y\in R \tag{4}$$

olur. (4) de x yerine $x+y$ yazılırsa $(x+y)^2x^2=y^2(x+y)^2 \Longrightarrow$ $(x+y)(x+y)x^2=y^2(x+y)(x+y) \Longrightarrow (xy+yx)y^2=y^2(xy+yx)$ bulunur. Burada x yerine $x+(xy-yx)$ yazılırsa $\{(x+(xy-yx))y+y(x+(xy-yx))\}y^2=y^2\{(x+(xy-yx))y+y(x+(xy-yx))\}$ olur. Dolayısıyla buradan;

$$(xy^2-y^2x)y^2=y^2(xy^2-y^2x)\quad,\forall x,y\in R \tag{5}$$

elde edilir.

I.DURUM Eğer $\mathrm{char}R\neq 2$ ise o zaman $D_{y^2}:R\longrightarrow R\quad ,x\longrightarrow xy^2-y^2x$ dönüşümü iç türev (derivation) olmak üzere (5) ifadesi;

$$D_{y^2}D_{y^2}(x)=0\quad,\forall x\in R \tag{7}$$

biçiminde yazılabilir. [22.teorem.1]'e göre (7) den $D_{y^2}=0$ dır. Yani; $xy^2-y^2x=0$ olduğundan $y^2=0$ dır. Dolayısıyla $\forall\ x,y\in R$ için $xy^2=0$ dır. Bu ifade de y yerine $x+y$ yazılırsa $x(x+y)^2=0 \Longrightarrow xyx=0$,$\forall x,y\in R$ için olur. Böylece $xRx=(0)$ ve R asal olduğundan teorem.1.20. den $x=0$ olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $Z(R)\neq(0)$ dır.

II.DURUM: Eğer $\mathrm{char}R=2$ ise o zaman (5) ifadesi $xy^4-y^2xy^2-y^2xy^2+y^4x=0 \Longrightarrow xy^4+y^4x-2y^2xy^2=0 \Longrightarrow xy^4+y^4x=0$

lemma.3.40. dan $y=0$ dır.Bu ise bir çelişkidir.O halde $Z(R)\neq(0)$ dır.

Şimdi $0\neq r\in Z(R)$ alalım.Hipotezde x yerine $x+r$ yazılırsa $(x+r)^2y^2-y^2(x+r)^2\in Z(R)$ olur. Buradan; $2r(xy^2-y^2x)\in Z(R)$ bulunur. Lemma.3.39. dan $2(xy^2-y^2x)\in Z(R)$ elde edilir.

1.DURUM: Eğer char$R\neq2$ ise o zaman $2(xy^2-y^2x)=(xy^2-y^2x)+(xy^2-y^2x)\in Z(R)$ ve dolayısıyla $(xy^2-y^2x)\in Z(R)$ dır.O halde $(xy^2-y^2x)y^2=y^2(xy^2-y^2x)$ ve dolayısıyla $D_{y^2}D_{y^2}(x)=0$, $\forall x\in R$ olur. Böylece [22.teorem.1.] den $D_{y^2}=0$ ve dolayısıyla $xy^2-y^2x=0$ olur.Böylece $y^2\in Z(R)$ olur.Buradan y yerine $x+y$ yazılırsa $(x+y)^2=x^2+xy+yx+y^2\in Z(R)$ ve böylece ;

$$xy+yx\in Z(R)\ ,\forall x,y\in R \tag{8}$$

elde edilir.(8) de x yerine xy yazılırsa $(xy+yx)y\in Z(R)$ olur.Böylece lemma.3.35.

(i) $xy+yx\neq0$ ise $y\in Z(R)$ dır.

(ii) $xy+yx=0$ ise burada x yerine $x-y$ yazılırsa $(x-y)y+y(x-y)=0 \Rightarrow xy-y^2+xyx-y^2=0\Rightarrow xy+yx-2y^2=0\Rightarrow -2y^2=0$ $\Rightarrow y^2=0$ bulunur.Buna göre $0=xy^2$ ve y yerine $x+y$ yazılırsa $0=x(x+y)^2=xyx$, $\forall x,y\in R$ için bulunur.Böylece ;$xRx=(0)$ ve R asal olduğundan teorem.1.20. den $x=0$ olur.Bu ise bir çelişkidir. O halde $xy+yx\neq0$ dır. Böylece R komütatiftir.

2.DURUM: char$R=2$ ise o zaman hipotezde x yerine$x+y^2$ yazılırsa $(x+y^2)^2y^2-y^2(x+y^2)^2\in Z(R)\Rightarrow (x+y^2)(x+y^2)y^2=y^2(x+y^2)(x+y^2)\in Z(R)\Rightarrow x^2y^2-y^2x^2+xy^4-y^4x\in Z(R)$ $\Rightarrow xy^4-y^4x\in Z(R)$ olur.Burada x yerine xy^4 yazılırsa

$(xy^4-y^4x)y^4 \in Z(R)$ olur.Böylece lemma.3.39 dan $y^4 \in Z(R)$ $\forall y \in R$ elde edilir.O halde lemma.3.40. dan R nin nilpotent elemanları olmadığından R nin nil ideali yoktur.Öteyandan [8.teorem.1] den ya R komütatiftir ya da D(R) nildir. Böylece ,$\forall x,y \in R$ için $[x,y] \in D(R)=(0)$ olduğundan R komütatiftir■

LEMMA:3.48. R bir halka ve ,$\forall x,y \in R$ için $x^2y^2-y^2x^2 \in Z(R)$ ise o zaman $D(R) \subseteq P(R)$ dır.

İSPAT: Lemma.1.21. den R nin keyfi bir P asal ideali için R/P asal halakdır. R/P, $x^2y^2-y^2x^2$ özelliğini sağladığından lemma.3.47 den R/P komütatiftir. Dolayısıyla $\forall \bar{x},\bar{y} \in R/P$ için $\bar{x}\bar{y}-\bar{y}\bar{x}=0=P \Rightarrow xy-yx \in P$ olur.Böylece $\forall x,y \in R$ için $[x,y] \in \cap P_i, P_i$ asal ideal olur.Teorem.1.15. den $P(R)=\cap P_i, P_i$ asal ideal olduğuna göre $[x,y] \in P(R)$ dir. Öteyandan $[x,y] \in D(R)$ olduğu açıktır. O halde $D(R) \subseteq P(R)$ dır■

TEOREM.3.49. R bir yarı-asal halka olsun.$\forall x,y \in R$ için $x^2y^2-y^2x^2 \in Z(R)$ ise o zaman R komütatiftir.

İSPAT: R yarı-asal olduğundan tanım.1.17. den $P(R)=(0)$ dır. Lemma.3.48 den $D(R) \subseteq P(R)$ olduğuna göre $D(R)=(0)$ ve dolayısıyla R komütatiftir■

UYARI.3.50 R bir halka olsun.$\forall x,y \in R$ için $x^2y^2-y^2x^2 \in Z(R)$ ise o zaman R nin idempotent elemanları R nin merkezindedir.

İSPAT: $e \in R$ ve e idempotent olsun.Hipotezde y yerine e yazılırsa $x^2e-ex^2 \in Z(R)$ ve dolayısıyla $(x^2e-ex^2)e=e(x^2e-ex^2)$ dır.Bu ifadeyi sağdan e ile çarpıp çıkan ifade de x yerine x+e yazılırsa; $(x^2e-ex^2)e=ex^2e-ex^2e \Rightarrow$ $x^2e-ex^2e=0 \Rightarrow (x+e)^2e-e(x+e)^2e= 0 \Rightarrow (x^2+xe+ex+e)e-$ $e(x^2+ex+xe+e)e=0 \Rightarrow x^2e+xe+exe+e-ex^2e+exe+exe+e= 0 \Rightarrow$ $xe-exe+x^2e-ex^2e=0 \Rightarrow xe=exe$ elde edilir.

$(x^2e-ex^2)e=e(x^2e-ex^2)$ ifadesini soldan e ile çarpıp ; çıkan ifade de x yerine x+e yazılırsa $ex=exe$ elde edilir. Böylece buradan $ex=xe$ ve dolayısıyla $e\in Z(R)$ elde edilir■

UYARI.3.51: R bir yarı-asal halka ve $\forall\ x,y\in R$ için $[x^2,y]-[x,y^2]\in Z(R)$ ise o zaman R nin idempotent elemanları merkezdedir.

İSPAT: Hipotezde x yerine e yazılırsa $[e,y]-[e,y^2]\in Z(R)$ ve dolayısıyla $\{(ey-ye)-(ey^2-y^2e)\}e=e\{(ey-ye)-(ey^2-y^2e)\}$ olur. Buradan;

$$y^2e+ey^2+2eye=ey+ye+2ey^2e \qquad (9)$$

elde edilir. (9) da y yerine y+e alınırsa ; $(y+e)^2e+e(y+e)^2+2e(y+e)e=e(y+e)+(y+e)e+2e(y+e)^2e \Rightarrow$ $y^2e+ye+eye+e+ey+ey+eye+e+2eye+2e=ey+2e+ye+2ey^2e+2eye+2eye+2e$ $\Rightarrow y^2e+ey^2+2eye-ey-ye-2ey^2e+ey+ye-2eye=0$ ve dolayısıyla (9) kullanılırsa;

$$ey+ye= 2eye \qquad (10)$$

elde edilir.

I.DURUM: Eğer charR=2 ise o zaman $ey+ye=0 \Rightarrow ey=-ye=ye$ ve böylece $e\in Z(R)$ olur.

II.DURUM: Eğer charR$\neq$ 2 ise o zaman (10) ifadesini $ey+ye=eye+eye \Rightarrow eye-ye=ey-eye \Rightarrow (ey-ye)e=e(ey-ye)$ olur. Böylece lemma.1.49. dan $e\in Z(R)$ olur■

4.BÖLÜM.

MERKEZİ SIFIRDAN FARKLI ASAL HALKALARIN KOMÜTATİFLİĞİ İLE İLGİLİ BAZI SONUÇLAR

LEMMA.4.1. R bir halka olsun. $\forall x, y \in R$ için $[x, [x,y]]=0$ ise o zaman her pozitif n tamsayısı için $[x^n, y]=nx^{n-1}[x,y]$ dir.

İSPAT: Lemma.2.9. da yapıldı.

LEMMA.4.2. R merkezi sıfırda farklı bir asal halka olsun.

(i) $x,y \in R$ ve $z \in Z(R)$ için $x^n[x,y]=0=(x+z)^n[x,y]$ olacak biçimde bir $n\geq 1$ tamsayısı varsa o zaman $[x,y]=0$ dır.

(ii) n sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere $\forall x,y \in R$ için $[x^n,y^n]=0$ ise o zaman $k[x^n,y]=0$ olacak biçimde bir k pozitif tamsayı vardır.

İSPAT: (i) $0=(x+z)^n[x,y]$ ifadesi soldan x^{n-1} ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned}0&=x^{n-1}(x+z)^n[x,y]\\&=x^{n-1}(x^n+nx^{n-1}z+\ldots+nxz^{n-1}+z^n)[x,y]\\&=x^{n-1}x^n[x,y]+nx^{n-1}zx^n[x,y]+\ldots+\\&\qquad nz^{n-1}x^n[x,y]+z^nx^{n-1}[x,y]\\&=z^nx^{n-1}[x,y]\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla;

$$\begin{aligned}0&=rz^nx^{n-1}[x,y],\ \forall r \in R \text{ için}\\&=z^nRx^{n-1}[x,y]\end{aligned}$$

olur. R asal halka olduğundan $x^{n-1}[x,y]=0$ dır. Öteyandan $0=x^n[x,y]=\{-z+(x+z)\}^n[x,y]$ ifadesi soldan $(x+z)^{n-1}$ ile çarpılırsa;

$$0=(x+z)^{n-1}\{-z+(x+z)\}^n[x,y]$$
$$=(x+z)^{n-1}(-z)^n+n(-z)^{n-1}(x+z)+\ldots+n(-z)(x+z)^{n-1}+z^n][x,y]$$
$$=(x+z)^{n-1}(-z)^n[x,y]+n(-z)^{n-1}(x+z)^n[x,y]+\ldots+(x+z)^{n-1}(x+z)^n][x,y]$$
$$=(-z)^n(x+z)^{n-1}[x,y]$$

elde edilir. Dolayısıyla;

$$=r(-z)^n(x+z)^{n-1}[x,y]\ ,\ \forall r\in R \text{ için}$$
$$=(-z)^nR(x+z)^{n-1}[x,y]$$

olur. R asal halka olduğundan $(x+z)^{n-1}[x,y]=0$ dır. Böylece, $x^{n-1}[x,y]=0=(x+z)^{n-1}[x,y]$ elde edilir. Bu metodla devam edilirse $x[x,y]=0=(x+z)[x,y] \Rightarrow z[x,y]=0$ bulunur. Böylece $\forall r\in R$ için $0=rz[x,y]$ ve dolayısıyla $zR[x,y]=(0)$ elde edilir. R asal ve $z\neq 0$ olduğundan $[x,y]=0$ dır∎

(ii) $\forall x,\ y\in R$ için $[x^n,y^n]=0$ olduğundan $z\in Z(R)$ olmak üzere y yerine y+z yazılırsa ;

$$0=[x^n,\ (y+z)^n]$$
$$=[x^n,y^n+ny^{n-1}z+\ldots+nyz^{n-1}+z^n]$$
$$=[x^n,y^n]+[x^n,ny^{n-1}z]+\ldots+[x^n,nyz^{n-1}]+[x^n,z^n]$$
$$=[x^n,\ \binom{n}{1}y^{n-1}]z+[x^n,\ \binom{n}{2}y^{n-2}]z^2+\ldots+[x^n,\ \binom{n}{n-1}y]z^{n-1}$$

elde edilir. Bu ifadede $j=1,2,1,\ldots,n-1$ olmak üzere y yerine jy yazılırsa;

$$0=j[x^n,\ \binom{n}{n-1}y]x^{n-1}+j^2[x^n,\ \binom{n}{n-2}y^2]z^{n-2}+\ldots+j^{n-1}[x^n,\ \binom{n}{1}y^{n-1}]z$$

bulunur. $j=1,2,3,\ldots,n-1$ için bu ifade açık olarak ;

$$0=[x^n, \binom{n}{n-1}y]z^{n-1}+[x^n, \binom{n}{n-2}y^2]z^{n-2}+\ldots+[x^n, \binom{n}{1}y^{n-1}]z$$

$$=2[x^n, \binom{n}{n-1}y]z^{n-1}+2^2[x^n, \binom{n}{n-2}y^2]z^{n-2}+\ldots+2^{n-1}[x^n, \binom{n}{1}y^{n-1}]z$$

$$0=(n-1)[x^n, \binom{n}{n-1}y]z^{n-1}+(n-1)^2[x^n, \binom{n}{n-2}y^2]z^{n-2}+\ldots+(n-1)^{n-1}[x^n, \binom{n}{1}y^{n-1}]z$$

biçiminde yazılır. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı;

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2 & 2^2 & \ldots & 2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n-1 & (n-1)^2 & \ldots & (n-1)^{n-1} \end{vmatrix} = d \neq 0$$

dir. Bu nedenle denklem sisteminin sıfır çözümü vardır. $0=[x^n, \binom{n}{n-1}y]z^{n-1}$ ifadesini düşünülürse $\forall\ r \in R$ için $0=rz^{n-1}\binom{n}{n-1}[x^n,y]$ ve dolayısıyla $z^{n-1}R\binom{n}{n-1}[x^n,y]=(0)$ olur. R asal olduğundan $\binom{n}{n-1}[x^n,y]=0$ olur. $\binom{n}{n-1}=k$ denilirse, $k[x^n,y]=0$ elde edilir ∎

<u>LEMMA.4.3.</u> R merkezi sıfırdan farklı asal ve n-torsion free bir halka olsun. $\forall x,y \in R$ için $[x^n,y^n]=0$ ise o zaman

(i) $\forall a \in N$, $\forall x \in R$ için $[a, x^n]=0$ dır.

(ii) N komütatiftir.

<u>İSPAT:</u> (i) a nilpotent olduğundan $\forall x \in R$ ve $\forall k \geq m$ için $[a^k,x^n]=0$ olacak biçimde bir m pozitif tamsayısı vardır. İşte böyle tamsayıların en küçüğü m_o olsun. Yani; $m_o(m_o\geq 1)$ minimal olmak üzere $\forall x \in R$ ve $\forall\ k\geq m_o$ için $[a^k,x^n]=0$ olsun.

İddia $m_o=1$ dir. $m_o \neq 1$ olsun. Bu durumda $m_o\geq 2$ dir.

Lemma'nın $0=[x^n,y^n]$ hipotezinden $z \in Z(R)$ olmak üzere $\forall x \in R$ için $[(z+a^{m_0-1})^n, x^n]=0$ dır. Dolayısıyla buradan;

$$0=[(z+a^{m_0-1})^n, x^n]$$
$$=[z^n+nz^{n-1}a^{m_0-1}+\ldots+nza^{(m_0-1)(n-1)}+a^{(m_0-1)n},x^n]$$
$$=[z^n,x^n]+n[z^{n-1}a^{m_0-1},x^n]+\binom{n}{2}[z^{n-2}a^{(m_0-1)2},x^n]+\ldots+n[za^{(m_0-1)(n-1)},x^n]+[a^{(m_0-1)n},x^n]$$
$$=n[z^{n-1}a^{m-1},x^n]$$

elde edilir. Çünkü; $k=(m_0-1)2 \geq m_0$ dır. R n-torsion free olduğundan $0=[z^{n-1}a^{m-1},x^n]$ dır. Böylece buradan $0=[z^{n-1},x^n]a^{m_0-1}+z^{n-1}[a^{m_0-1},x^n]$ bulunur. Dolayısıyla; $\forall r \in R$ için $0=rz^{n-1}[a^{m_0-1},x^n] \Rightarrow z^{n-1}R[a^{m_0-1},x^n]=(0)$ ve böylece R asal olduğundan, $0=[a^{m_0-1},x^n]$ elde edilir. Buise m_0 nin minimal olmasıyla çelişir. O halde $[a,x^n]=0$ dır.

(ii) (i) de $\forall x \in R$ için $[a,x^n]=0$ olduğuna göre $a,b \in N$ için $[a,b^n]=0$ dır. Böylece $\forall k \geq t$ için $[a,b^k]=0$ olacak biçimde bir pozitif t tamsayısı vardır. İşte böyle tamsayıların en küçüğü t_0 olsun. Yani; $t_0 (t_0 \geq 1)$ minimal olmak üzere; $a,b \in N$ ve $\forall k \geq t_0$ için $[a,b^k]=0$ olsun.

İddia $t_0=1$ dir. $t_0 \neq 1$ olsun. Bu durumda $t_0 \geq 2$ dir. $[a,x^n]=0$ da $z \in Z(R)$ olmak üzere x yerine $z+b^{t_0-1}$ yazılırsa $\forall a, b \in N$, $\forall z \in Z(R)$ için $[a,(z+b^{t_0-1})^n]=0$ olur. Buradan ;

$$0=[a,(z+b^{t_0-1})^n]$$
$$=[a,(z^n+nz^{n-1}b^{t_0-1}+\ldots+nz^{(t_0-1)(n-1)}+b^{(t_0+1)n}]$$
$$=[a,z^n]+n[az^{n-1}b^{t_0-1}]+\ldots+n[a,zb^{(t_0-1)(n-1)}]+[a,b^{(t_0+1)n}]$$
$$=[a,z^n]+n[z^{n-1}b^{t_0-1}]$$

elde edilir. R n-torsion free olduğundan, $0=[a,z^{n-1}b^{t_0-1}]$ olur. Dolayısıyla;

$$0=[a,z^{n-1}b^{t_0-1}]=z^{n-1}[a,b^{t_0-1}]+[a,z^{n-1}]b^{t_0-1}$$
$$=z^{n-1}[a,b^{t_0-1}]$$

bulunur. $\forall r \in R$ için $0=rz^{n-1}[a,b^{t_0-1}]$ ve dolayısıyla $z^{n-1}R[a,b^{t_0-1}]=(0)$ ve R asal olduğundan $[a, b^{t_0-1}]=0$ elde edilir. Bu ise t_0 nın minimal olmasıyla çelişir. O halde; $[a,b]=0$ ve N komütatiftir ■

<u>LEMMA.4.4.</u> R bir halka olsun. $\forall x, y \in R$ için $[x^n, y^m]=0$ ise o zaman $D(R) \subseteq N$ dir.

<u>İSPAT:</u> [9]

<u>LEMMA.4.5.</u> R merkezi sıfırdan farklı asal ve n-torsion free bir halka olsun. $\forall x, y \in R$ için $[x,y^n]=0$ ise o zaman $N \subseteq Z(R)$ dir.

<u>İSPAT:</u> $a \in N$ ve $x \in R$ alalım. a nilpotent olduğundan $\forall x \in R$ ve $\forall k \geq q$ için $[x,a^k]=0$ olacak biçimde bir q pozitif tamsayısı vardır. İşte böyle tamsayıların en küçüğü q_0 olsun. Yani; $q_0 (q_0 \geq 1)$ minimal olmak üzere $\forall x \in R$ ve $\forall k \geq q_0$ için $[x,a^k]=0$ olsun.

İddia $q_0=1$ dir. $q_0 \neq 1$ olsun. Bu durumda $q_0 \geq 2$ dir. $z \in Z(R)$ olmak üzere; Hipotezde y yerine $z+a^{q_0-1}$ yazılırsa ; $0=[x, (z+a^{q_0-1})^n]$ olur.

$$0=[x,(z+a^{q_0-1})^n]=[x,z^n+nz^{n-1}a^{q_0-1}+\ldots+nza^{(q_0-1)(n-1)n}$$
$$=[x,z^n]+n[x,z^{n-1}a^{q_0-1}]+\ldots+n[x,za^{(q_0-1)(n-1)n}]+$$
$$[x,a^{(q_0-1)n}]$$
$$=n[x,z^{n-1}a^{q_0-1}]$$

elde edilir. R n-torsion free olduğundan, $0=z^{n-1}[x,a^{q_0-1}]$

olur. Dolayısıyla; $\forall r \in R$ için $0=rz^{n-1}[x,a^{q_0-1}]$ ve buradan $z^{n-1}R[x,a^{q_0-1}]=(0)$ ve dolayısıyla R asal olduğundan $[x,a^{q_0-1}]=0$ elde edilir. Bu ise q_0 nin minimal olmasıyla çelişir. Böylece; $[x,a]=0$ ve $N\subseteq Z(R)$ olur ∎

LEMMA.4.6. R merkezi sıfırdan farklı, asal ve n-torsion free bir halka olsun.

(i) $m>0$ tamsayı olmak üzere $\forall x, y \in R$ için $nx^m[x,y]=0$ ise o zaman R komütatiftir.

(ii) $\forall x, y \in R$ için $[x^n,y]=0$ ise o zaman R komütatiftir.

İSPAT: (i) $x, y \in R$ ve $z \in Z(R)$ alalım. $\forall x, y \in R$ için $nx^m[x,y]=0$ olduğuna göre x yerine x+z yazılırsa;

$$0=n(x+z)^m[x+z,\ y]=n(x+z)^m[x,\ y]$$

olur. Böylece lemma.4.2.(i) den $n[x,y]=0$ ve R n-torsion free olduğundan $[x,y]=0$ ve dolayısıyla R komütatif olur.

(ii) $[x^n,y]=0$ olduğundan lemma.4.4. den $D(R)\subseteq N$ olur. Öteyandan lemma.4.5. den $N\subseteq Z(R)$ olduğuna göre $D(R)\subseteq N\subseteq Z$ olur. Böylece buradan $[x,\ [x,y]]=0$ dır. O halde lemma.4.1. den $[x^n,y]=0=nx^{n-1}[x,y]$ ve dolayısıyla (i) den R komütatiftir ∎

TEOREM.4.7. n, sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere; R merkezi sıfırdan farklı, asal ve n-torsion free bir halka olsun. $\forall x,y \in R$ için $[x^n,y^n]=0$ ve $[x,(xy)^n-(yx)^n]=0$ ise o zaman R komütatiftir ∎

İSPAT: $[x^n,y^n]=0$ olduğundan $\forall u \in N$ ve $\forall d \in R$ için lemma.4.3.(i) den $[u,d^n]=0$ dır. Ayrıca lemma.4.2.(ii) den $k[x^n,y]=0$ olacak biçimde bir k pozitif tamsayısı vardır. Lemma.4.4. den $D(R)\subseteq N$ olduğundan $[x^n,y] \in N$

dir. O halde ; $\forall u \in N$ ve $\forall d \in R$ için $[u,d^n]=0$ oldugundan $[x^n,[x^n,y]]=0$ dır. Böylece lemma.4.1. ve $k[x^n,y]=0$ dan;

$$0=kx^{n(k-1)}[x^n,y]=[x^{nk},y]=[(x^n)^k,y] \tag{1}$$

elde edilir. Şimdi keyfi a, $b \in R$ alalım. Bu durumda, $[x,(xy)^n-(yx)^n]=0$ ve (1) kullanılırsa;

$$0=[a,\ (aa^{nk-1}b)^n-(a^{nk-1}ba)^n]$$

$$=[a,(aa^{nk}b)(a^{nk}b)\ldots(a^{nk}b)-(a^{nk-1}ba)(a^{nk-1}ba)\ldots(a^{nk-1}ba)]$$

$$=[a,(a^{nk})^n b^n-a^{nk-1}b(a^{nk}b)^{n-1}a]$$

$$=[a,a^{n^2k}b^n-a^{nk-1}a^{nk(n-1)}b^n a]$$

$$=[a,aa^{n^2k-1}b^n-a^{nk-1}a^{n^2k-nk}b^n a]$$

$$=[a,aa^{n^2k-1}b^n-a^{n^2k-1}b^n a]$$

$$=[a,\ [a,a^{n^2k-1}b^n]]$$

$$=a^{n^2k-1}[a,[a,b^n]]\ ,\ \forall a,\ b \in R \tag{2}$$

elde edilir. (2) de $z \in Z(R)$ olmak üzere a yerine $a+z$ yazılırsa ;

$$0=(a+z)^{n^2k-1}[a,[a,b^n]] \tag{3}$$

elde edilir. (2), (3) ve lemma.4.2.(i) den $0=[a,[a,b^n]]$ elde edilir. Böylece lemma.4.1. den ;

$$[a^n,b^n]=0=na^{n-1}[a,b^n]\ ,\ \forall a,\ b \in R \tag{4}$$

elde edilir. Tekrar lemma.4.1. den ;

$$[(a+z)^n b^n]=0=n(a+z)^{n-1}[a,b^n],\ \forall a,b \in R \text{ ve } \forall z \in Z(R) \tag{5}$$

olur. Böylece (4), (5) ve lemma.4.2.(i) den $n[a,b^n]=0$ ve R n-torsion free oldugundan $[a,b^n]=0$ elde edilir. Dolayısıyla lemma.4.6.(ii) den R komütatiftir∎

SONUÇ.4.8. n, sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere, R merkezi sıfırdan farklı, yarı-asal n-torsion free bir halka olsun. $\forall x,y \in R$ için $[x^n,y^n]=0$ ve $[x,(xy)^n-(yx)^n]=0$ ise o zaman R komütatiftir.

İSPAT: R yarı-asal ve P onun keyfi bir asal ideali olsun. Bu durumda lemma.1.21. den R/P bir asal halkadır. $\bar{x}$, $\bar{y} \in R/P$ için $[\bar{x}^n, \bar{y}^n]=0$ ve $[\bar{x}, (\bar{x}\bar{y})^n-(\bar{y}\bar{x})^n]=0$ dır. Gerçekten ; $[\bar{x}^n, \bar{y}^n]=[(x+P)^n, (y+P)^n]=[x^n+P, y^n+P]=(x^n+P)(y^n+P)-(y^n+P)(x^n+P)=x^ny^n+P-(y^nx^n+P)=(x^ny^n-y^nx^n)+P=P=\bar{0}$ dır. Benzer olarak $[\bar{x}, (\bar{x}\bar{y})^n-(\bar{y}\bar{x})^n]=0$ olduğu gösterilir. Böylece; teorem.4.7. den R/P komütatiftir. O halde ; $\bar{x}$, $\bar{y} \in R/P$ için $[\bar{x}, \bar{y}]=\bar{0} \Rightarrow [x,y]+P=P \Rightarrow [x,y] \in P$ dir. Dolayısıyla buradan $[x,y] \in \cap P_i$, P_i asal idealdir. R yarı-asal olduğundan tanım.1.17. den $P(R)=(0)$ dır. Öteyandan teorem.1.15. den $P(R)=\cap P_i$, P_i asal olduğuna göre $[x,y]=0$ ve dolayısıyla R komütatiftir∎

TEOREM.4.9. n, sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere; R merkezi sıfırdan farklı, asal ve n-torsion free bir halka olsun. $\forall\, x, y \in R$ için $[x^k,y^k]=0$ ve $[x^l,y^l]=0$ olacak biçimde aralarında asal pozitif tamsayılar varsa o zaman R komütatiftir.

İSPAT: k ve l aralarında asal olduğundan $rk-sl=1$ olacak biçimde r ve s pozitif tamsayıları vardır. Eğer $n=sl$ ise o zaman $rk=n+1$ dir. Dolayısıyla $[x^k,y^k]=0$ ve $[x^l,y^l]=0$ ifadelerinden $[x^n,y^n]=0$ ve $[x^{n+1},y^{n+1}]=0$ ifadeleri bulunur. Böylece; lemma.4.3.(ii) den N komütatif bir idealdir. O halde; bir $y \in R$ alalım. $\forall a, b \in N$ için $(ab)y=a(by)=(by)a=b(ya)=y(ab)$ olur. Böylece ;

$$N^2 \subseteq Z(R) \;,\; \forall a, b \in N \text{ ve } \forall y \in R \qquad (1)$$

Öteyandan $\forall x, y \in R$ için $[x^n,y^n]=0$ olduğundan lemma.4.3.

(i) den $a \in N$, $y \in R$ için $[a,y^n]=0$ dır. Ayrıca $\forall x,y \in R$ için $[x^{n+1},y^{n+1}]=0$ olduğundan lemma.4.3.(i) den $[a,y^{n+1}]=0$ dır. yani ;

$$[a,y^n]=0=[a,y^{n+1}],\ \forall a \in N,\ \forall y \in R \qquad (2)$$

Şimdi; $[x^n,y^n]=0$ ifadesinde x yerine $y+a$ yazılırsa $[(y+a)^n,y^n]=0$ elde edilir. Teorem.2.11. de 5.İDDİA daki gibi J(R) nin yerine N alarak işlemler yapılırsa;

$$0=y^{2n+1}[a,y]\ ,\ \forall a\in N,\ \forall y \in R \qquad (3)$$

elde edilir. (3) de $z \in Z(R)$ olmak üzere y yerine $y+z$ yazılırsa ;

$$0=(y+z)^{2n+1}[a,y],\ \forall a \in N,\ \forall y \in R\ ,\ \forall z \in Z(R) \qquad (4)$$

elde edilir. Böylece (3), (4) ve lemma.4.2.(ii) den $[a,y]$ bulunur. Yani; $N\subseteq Z(R)$ dir. Dolayısıyla $[x^n,y^n]=0$ olduğundan lemma.4.4. den $D(R)\subseteq N$ idi. O halde; $\forall x,y \in R$ için $[x,y] \in Z(R)$ dir. Böylece lemma.4.1. den ;

$$0=[x^n,y^n]=nx^{n-1}[x,y^n],\ \forall x,\ y \in R \qquad (5)$$

elde edilir. Öteyandan $[x^n,y^n]=0$ ifadesinde $\forall z \in Z(R)$ olmak üzere ; x yerine $x+z$ yazılırsa $[(x+z)^n,y^n]=0$ ve dolayısıyla lemma.4.1. den ;

$$0=[(x+z)^n,y^n]=n(x+z)^{n-1}[x,y],\ \ \forall x,\ y \in R \qquad (6)$$

elde edilir. (5), (6) ve lemma.4.2.(i) den $0=n[x,y]$ ve R n-torsion free olduğundan $[x,y^n]=0$ ve dolayısıyla lemma.4.6.(ii) den R komütatiftir∎

<u>SONUÇ.4.10.</u> n, sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere, R merkezi sıfırdan farklı, yarı-asal n-torsion free bir halka olsun.$\forall x,y \in R$ için $[x^k,y^k]=0$ ve $[x^l y^l]=0$ olacak biçimde aralarında asal pozitif tamsayı varsa o zaman R

komütatiftir.

İSPAT: R yarı-asal ve P onun keyfi bir asal ideali olsun. Bu durumda lemma.1.21. den R/P bir asal halkadır. $\forall x, y \in R$ için $[x^k,y^k]=0$ ve $[x^l,y^l]=0$ olduğundan $\bar{x}, \bar{y} \in R/P$ için de $[\bar{x}^k,\bar{y}^k]=0$ ve $[\bar{x}^l,\bar{y}^l]=0$ dir. Böylece teorem.4.9. dan R/P komütatiftir. O halde $[\bar{x},\bar{y}]=0=P \Rightarrow [x,y] \in P$ dir. Dolayısıyla $[x,y] \in \cap P_i$, P_i asal dır. Öteyandan R yarı-asal olduğundan $P(R)=(0)$ dır. Ayrıca teorem.1.15. den $P(R)=\cap P_i$, P_i asal olduğuna göre $[x,y]=0$ ve dolayısıyla R komütatiftir∎

TEOREM.4.11. n, sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere; R merkezi sıfırdan farklı, asal ve n-torsion free bir halka olsun. $\forall x, y \in R$ için $[x^n,y^n]=0$ ve $[x^k,y^k]\in Z(R)$ olacak biçimde aralarında asal k ve n pozitif tamsayılar varsa o zaman R komütatiftir.

İSPAT: S, R nin bütün k. kuvvetten elemanlar tarafından üretilen bir althalka olsun. Bu durumda ;

$$[x,[a,b]], \ \forall x\in R, \ \forall a, \ b\in S \qquad (1)$$

a, $b \in S$ alalım. O halde $[x^n,y^n]=0$ olduğundan $[a^n,b^n]=0$ dır. $b^n \in S$ olduğu açıktır. (1) ve lemma.4.1. den $[a^n,b^n]=0=na^{n-1}[a,b^n]$ ve R n-torsion free olduğundan

$$0=a^n[a,b^n], \ \ \forall a, \ b \in S \qquad (2)$$

dir. $[x^n,y^n]=0$ ifadesinde $z \in Z(R)$ olmak üzere a yerine $a+z$ yazılıp hipotezden $[(a+z)^n,b^n]=0$ dır. Böylece (1) ve lemma.4.1. den $[(a+z)^n,b^n]=0= n(a+z)^n[a,b]$ ve dolayısıyla R n-torsion free olduğundan;

$$0=[(a+z)^{n-1}[a,b^n], \ \forall a,b \in S, \ \forall z \in Z(R) \qquad (3)$$

elde edilir. (2), (3) ve lemma.4.2.(i) den ;

$$0=[a,b^n],\ \forall a,b \in S \qquad (4)$$

Dolayısıyla;

$$[a,(b+z)^n]=[a,b^n]+n[a,b^{n-1}z]+\ldots+n[a,bz^{n-1}]+[a,z^n]$$
$$=nz[a,b^{n-1}]+\ldots+nz^{n-1}[a,b]$$

bulunur. a, b $\in$ S ve $\forall i>0$ tamsayısı için $b^i \in S$ olduğundan (1) den $[a,b^i] \in Z(R)$ olur. Böylece $[a,(b+z)^n] \in Z(R)$ elde edilir. Bu ifade ile $[a^n,(b+z)^n]=0$ ifadesini birlikte düşünüp, lemma.4.1. den $[a^n,(b+z)^n]=0=na^{n-1}[a,(b+z)^n]$ ve dolayısıyla R n-torsion free olduğundan ;

$$0=a^{n-1}[a,(b+z)^n],\ \forall a,\ b \in S,\ \forall z \in Z(R) \qquad (5)$$

elde edilir. $[x^n,y^n]=0$ hipotezinde $z \in Z(R)$ olmak üzere x yerine x+z ve y yerine y+z yazılırsa, (1) ve lemma.4.1. den $[(a+z)^n,(b+z)^n]=0=n(a+z)^{n-1}[a,(b+z)^n]$ ve dolayısıyla R n-torsion free olduğundan;

$$0=(a+z)^{n-1}[a,(b+z)^n],\ \forall a,\ b \in S,\ \forall z \in Z(R) \qquad (6)$$

elde edilir. Öteyandan $[x^n,y^n]=0$ ifadesinde $z \in Z(R)$ olmak üzere y yerine b+z yazıp, (1)` den (3)` e kadar yapılan işlemler tekrar yapılırsa ;

$$0=a^{n-1}[a,(b+z)^n],\ \forall a,\ b \in S,\ \forall z \in Z(R) \qquad (7)$$

elde edilir. (6), (7) ve lemma.4.2.(i) den;

$$0=[a,(b+z)^n],\ \forall a,\ b \in S,\ \forall z \in Z(R) \qquad (8)$$

elde edilir. (1), (8) ve lemma.4.1. den $[a,(b+z)^n]=0 =n(b+z)^{n-1}[a,b]$ ve R n-torsion free olduğundan;

$$0=(b+z)^{n-1}[a,b],\ \forall a,\ b \in S,\ \forall z \in Z(R) \qquad (9)$$

elde edilir. Öteyandan, (1), (4) ve lemma.4.1. den $[a,b^n]=0=nb^{n-1}[a,b]$ ve R n-torsion free olduğundan;

$$0=b^{n-1}[a,b] \ , \quad \forall a,\ b \in S \tag{10}$$

elde edilir. Böylece, (9), (10) ve lemma.4.2.(i) den ;

$$0=[a,b], \ \forall a,\ b \in S \tag{11}$$

elde edilir. Yani $\forall x,\ y \in R$ için $[x^k,y^k]=0$ dır. Böylece teorem.4.9. dan R komütatiftir∎

SONUÇ.4.12. n, sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere, R merkezi sıfırdan farklı, yarı-asal ve n-torsion free bir halka olsun.$\forall x,y \in R$ için $[x^n,y^n]=0$ ve $[x^k y^k] \in Z(R)$ olacak biçimde aralarında asal pozitif tamsayı varsa o zaman R komütatiftir.

İSPAT: R yarı-asal ve P onun keyfi bir asal ideali olsun. Bu durumda lemma.1.21. den R/P bir asal halkadır. $\forall\ x,\ y \in R$ için $[x^n,y^n]=0$ ve $[x^k,y^k] \in Z(R)$ ise $\bar{x},\ \bar{y} \in R/P$ için $[\bar{x}^n,\bar{y}^n]=0$ ve $[\bar{x}^k,\bar{y}^k] \in Z(R/P)$ olduğundan teorem.4.11. den R/P komütatiftir. O halde $[\bar{x},\bar{y}]=0=P \Rightarrow [x,y] \in P$ dir. Dolayısıyla $[x,y] \in \cap P_i$, P_i asal dır. Öteyandan R yarı-asal olduğundan $P(R)=(0)$ dır. Ayrıca teorem.1.15. den $P(R)=\cap P_i$, P_i asal olduğuna göre $[x,y]=0$ ve dolayısıyla R komütatiftir∎

KAYNAKLAR

1. McCoy, N.H. , "The theory of rings"
New York . The Macmillan Campany,Press 1964
2. Hungerford, T.W. , "Algebra"
Washington: Univ. of Washington, press 1980
3. Herstein, I.N. , "Rings with involution"
Chicago: Univ. of Chicago, Press 1976
4. ———————— , "Non-Kommutative Rings"
Chicago: The Math.Association Amer.
Press 1968
5. ———————— , "Topics in Ring Theory"
Chicago: Univ. of Chicago, Press 1965
6. ———————— , "Power maps in rings"
Michigan Math. J. S(1961), 29-32
7. ———————— , "On the hyper center of a ring"
Jaurnal of Algebra, 36(1975), 151-157
8. ———————— , "Two remarks on the commutativity of rings"
Canad. J.Math. 7(1955) 411-412
9. ———————— , "A commutativity theorem"
J.Algebra, 38(1976), 238-241
10. ———————— , "Invariant subrings of a certainkind"
Israel J.Math. 26(2)(1977), 205-208
11. Belluce, L.P.-Herstein, I.N.-Jain,S,K,
"Generalized commutative rings"
Nagoya Math. , 27(1966), 1-5

12. Faith, C. , "Algebraic division ring extensions."
Proc. A.M.S. vol. 11 (1969),274-283

13. ———————— , "Radical extension of rings"
Proc. A.M.S. vol. 12 (1961),274-283

14. Amitsur, S.A. , "A generalisat of Hilbert`s Nullstellensatz"
Proc. A.M.S. 8 (1957), 649-656

15. Kaplansky , I., "Rings with a polynomial identity"
Bull. A.M.S. 54 (1940), 575-580

16. Koh , K. , "Problem 5559"
A.M. Monthly 75 (1968), 1132

17. Bell ,H.E. ,"On a commutativity theorem of Herstein"
Arch. Math. XXI (1970), 265-267

18. Luh, J. ,"A commutativity theorem for primary rings"
Acta Math. Acad. Sci. Hungar. , 22(1-2) (1971),211-213

19. Kaya , A. , "On a commutativity theorem of Luh"
Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 28 (1976), 33-36

20. Kaya , A. - Koç , C. , "Remarks on some commutativity theorems"
Rev. Fac. Sci. Univ. İst. , Ser. A,40 (1976), 1-3

21. Gupta , V. , "Some remarks on the commutativity of rings"
Acta Math. Acad. Sci. Hung.Tomus 36 (1980)

22. Posner, E.C. , "Derivation in prime rings"
Proc. A.M.S. 8 (1957), 1093-1100

23. Nicholson , W.K. - Yaqub , A. , "A commutativity theorem for rings and groups"
Canad. Math. Bull.Vol.22(4) (1979) 419-423

24. ——————— , "A commutativity theorem"
Algebra Universalis, 10 (1980) 260-263

25. Abu-Khuzam , H. - Yaqub , A. , "n-Torsion free rings with com u ting powers"
Math. Jap. 25 , No:1 (1980) 37-42

26. Psomopoulos , E. - Tominaga, H. - Yaqub, A. ,"A commutavity theorem for rings involving com u tings powers"

27. Abu-Khuzam , H. - Tominaga, H. - Yaqub, A. , "Commutativity theorems for s-unital rings satisfying polynominal identities"
Math. J. Okayama Univ.

28. Hirano, Y. - Hongan, M. - Tominaga, H. , "Commutativity theorem for certain rings"
Math. J. Okayama Univ. 22 (1980), 65-72

29. Ligh, S. - Richoux, A. , "Commutativity theorem for rings"
Bull. Austran.Math.Soc.Vol.16 (1977) 75-77

30. Richoux, A. , "On a commutativity theorem of Luh"
Acta.Math. Acad. Sci. Hung. Tomus 34(1-2) (1979) 23-25

31. Hongan, M. - Mogami, I. , "Note on commutativity of rings"

Math. J. Okayama Univ. 20 (1978) 21-24

32. Tominaga, H. , "On s-unital rings"

Math. J. Okayama Univ. 18 (1976) 117-134

33. Brauer, R. , "On a theorem of H. cartan"

Bull. A.M.S. 55 (1949) 619-620

34. Felzenswalb, B. ,"On the commutativity of certain rings"

Acta.Math. Acad. Sci. Hung. Tomus 34(3-4) (1979) 257-260

35. ―――――――― , "Rings radical over subrings"

Israel J. Math. 23(2) (1976) 156-164

36. Ashraf, M. - A.Quadri, M. , "A note on commutativity of rings"

Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A_1 Vol.35 (1986) (1-3)

37. Kaya, K. , "Yarı-asal halkaların komütatifligi ile ilgili iki uyarı"

C.Ü.Fen-Edb.Fak.Fen Bil.Der.2(1986) 99-103