T.C.
CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2^Y-ÜZERİNDE ÇEŞİTLİ TOPOLOJİLER VE ÇOĞUL-DEĞERLİ FONKSİYONLARIN H-SÜREKLİLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

METİN AKDAĞ

Haziran - 1991 SİVAS

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne;

İş bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan Yr. Doç. Dr. Yalçın Küçük

Üye Prof. Dr. Orhan Özer

Üye Yr. Doç. Dr. Mehide Küçük

ONAY

Yukarıda imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

19.1.9.1 1991

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MÜDÜRÜ

Prof.Dr.İbrahim GÜMÜŞSUYU

Bu tezin hazırlanmasında istisnasız bir şekilde yardımlarını esirgemeyen sayın Yrd.Doç.Dr. Yalçın Küçük'e; çalışmalarım esnasında ihtiyaç duyduğum her türlü materyalin karşılanması için elinden gelen her şeyi yapan sayın Yrd.Doç.Dr. Mahide Küçük'e ve tezimin yazımında bana yardımcı olan tüm bölümümümdeki arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi bildirir, saygılar sunarım.

M.A.

ÖZET

2^Y-üzerinde yeni bazı topolojileri, çoğul-değerli fonksiyonların sürekliliklerini ve bunlar arasındaki ilişkileri sunmayı amaçlayan bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci ve ikinci bölümlerde öncelikle çoğul-değerli fonksiyonlar için V-a.y.s. (V-ü.y.s.) ile C-a.y.s. (C-ü.y.s.) tanımları ve ilgili teoremler ifade edildi. Ayrıca 2^Y-üzerinde $H^+(H^-)$ topolojileri ve çoğul-değerli fonksiyonların H-ü.y.s. (H-a.y.s.) kavramları tanımlandı. Teoremler ifade edilip kanıtlandı. Çoğul-değerli fonksiyonların kuvvetli kapalı grafikliliği ile H-üstten yarı sürekliliği arasındaki ilişki incelendi. $V^+(V^-)$, $C^+(C^-)$ ve $H^+(H^-)$ topolojileri karşılaştırıldı. Bunlardan yararlanılarak, çoğul-değerli fonksiyonların V-ü.y.s. (V-a.y.s.), C-ü.y.s. (C-a.y.s.) ve H-ü.y.s. (H-a.y.s.) olmaları arasındaki ilişkiler incelendi.

Üçüncü bölümde, çoğul-değerli fonksiyonların a-H-ü.y.s. (a-H-a.y.s.) kavramları tanımlandı. Ayrıca bu kavramlara eşdeğer koşullar teoremlerle ifade edilip, kanıtlandı. H-ü.y.s. (H-a.y.s.) ile a-H-ü.y.s. (a-Ha.y.s.) arasındaki ilişkiler incelendi.

Son bölümde de çarpım uzaylar üzerinde tanımlı olan çoğul-değerli fonksiyonların H-ü.y.s. (H-a.y.s.) olmaları incelendi.

SUMMARY

This study, aiming to present some topologies on 2^Y,continuity of multi-valued functions and relations among them, consist of four sections.

In the first and second sections, precedently, definitions of V-a.y.s. (V-ü.y.s.) and C-a.y.s. (C-ü.y.s.) and related theorems have been expressed. In addion, topologies of $H^+(H^-)$ on 2^Y and H-ü.y.s. (H-a.y.s.) concepts of multi-valued functions have been defined. Theorems have been proved by being expressed. The relation between Strongly-closed graphicaly of multi-valued functions and upper semi-continiuty has been studied. $V^+(V^-)$, $C^+(C^-)$ and $H^+(H^-)$ topologies have been compared. By making use of V-ü.y.s. (V-a.y.s.), C-ü.y.s. (C-a.y.s.) andH-ü.y.s. (H-a.y.s.) have been studied.

In the third section a-H-ü.y.s. (a-H-a.y.s.) concepts of multi -valued functions have been defined. Moreover, equivalent conditions to these concepts have been expressed and proved. The relations between H-ü.y.s. (H-a.y.s.) and a-H-ü.y.s. (a-H-a.y.s.) have been examined.

In the last section, H-ü.y.s. (H-a.y.s.) being of multi-valued functions defined on product-space has been examined.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

1.1. Önceki Çalışmalar:

Çoğul-değerli fonksiyonlar hakkındaki çalışmalara, 1930'lu yıllarda ayrı bir konu olarak başlanmış ve bu güne kadar bu tür fonksiyonların süreklilikleri, türevlenebilirlikleri, ölçülebilirlikleri, integrallenebilirlikleri ve homotop olmaları gibi bir çok özellikleri değişik araştırmacılar tarafından verilmiştir([3], [9], [12]).

Önceleri çoğul-değerli fonksiyonların sürekliliği çalışmaları, tek-değerli fonksiyonların denk süreklilik tanımlarının çoğul-değerli fonksiyonlara değişik adlarla genelleştirilmesi ile başlamıştır. Ancak, W.C.Stroter [21] 1951 yılında yayınladığı makalesinde, o yıla kadar yapılan bu çalışmaları derlemiştir. Daha sonra ki yıllarda başlangıçtakine benzer çalışmalar devam etmiştir. Alojzy Lechicki [12] makalelerinde 1979 yılına kadar çoğul-değerli fonksiyonların süreklilikleri ve ölçülebilirlikleri konusunda verilen değişik tanımları karşılaştırmalı olarak ele almış, denk ve farklı tanımları ayrıştırıp, tanımlamalarda sadeleşmeye gitmiştir.

Tek-değerli fonksiyonların zayıf süreklilikleri üzerindeki çalışmalar, 1922'de H.Blumberg [1] ile başlar. 1966'da T.Husain [8] ve 1968'de Singal and Singal [20] almost sürekli fonksiyonları değişik yaklaşımlarla tanımladılar. 1970 yılında K.R.Gentry ve H.B.Hoyle [7] C-sürekli fonksiyonların çalımasını başlattılar.

Çalışmamıza model olan tek-değerli fonksiyonların H-sürekliliği de 1975 yılında P.E.Long ve T.R.Hamlett [14] tarafından tanımlandı.

Bu çalışmada da 2^Y-üzerinde iki yeni topoloji tanımlanarak, çoğul-değerli fonksiyonların H-ü.y.s. (H-a.y.s.) ve a-H-ü.y.s. (a-H-a.y.s.) olmaları çalışıldı. Bu tanımlara denk koşullar teoremlerle ifade edilerek kanıtlandı.

1.2. Çoğul-Değerli Fonksiyon Kavramı ve Çoğul-Değerli Fonksiyonların Süreklilikleri

Genel olarak iki küme arasındaki çoğul-değerli bir fonksiyon aşağıdaki şekilde tanımlanır.

1.2.1. Tanım: X'in her bir öğesini Y'nin boş olmayan bir alt kümesine karşılık getiren bir F kuralına, X'den Y'ye Çoğul-değerli fonksiyon denir ve $F:X \to Y$ olarak yazılır. $x \in X$ öğesine karşılık gelen alt küme $F(x)$ ile gösterilir.

Çoğul-değerli fonksiyonların sürekliliğini tanımlamanın en doğal yolu, tek-değerli fonksiyonların sürekliliğinin çeşitli karakterizasyonlarından yararlanmaktır.

Tek-değerli fonksiyonların sürekliliğine eşdeğer olan ifadeler çoğul-değerli fonksiyonlara genellendiğinde eşdeğer olmayabilirler.

Örneğin, tek-değerli fonksiyonlar için bilinen, "X'den Y'ye tanımlı bir f(tek-değerli) fonksiyonunun sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul, Y'nin her açık alt kümesinin, f altındaki ters görüntüsünün X içinde açık olmasıdır". Ve "X'den Y'ye tanımlı bir f(tek-değerli) fonksiyonunun sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul Y'nin her kapalı alt kümesinin f altındaki ters görüntüsünün X içinde kapalı olmasıdır". İfadeleri f fonksiyonu çoğul-değerli olduğunda eşdeğer olmazlar. Bu nedenle, tek-değerli fonksiyonların sürekliliğine eşdeğer olan koşulların, çoğul-değerli fonksiyonlar için genellenmesinden çeşitli tip süreklilik tanımları doğal olarak ortaya çıkar. Bu konu ile ilgilenen araştırmacılar, bu genellemelerden ikisini birlikte alarak, çoğul-değerli fonksiyonların süreklilik tanımlarını yapmışlardır. Son çalışmalarda sıklıkla kullanılanlardan biri aşağıda verilecektir.

X,Y topolojik uzaylar ve $F:X \to Y$ çoğul-değerli fonksiyon olsun. Bir $A \subset X$ için $F(A)=\bigcup\{F(x)|x\in A\}$; $y\in Y$ için $F^-(y)=\{x|y\in F(x)\}$ ve $B\subset Y$ için $F^-(B)=\bigcup\{F^-(y)|y\in B\}=\{x|F(x)\cap B\neq\emptyset\}$ dir.

1.2.2. Tanım: X,Y topolojik uzaylar ve F,X'den Y'ye çoğul-değerli bir fonksiyon olsun.

(1) Her $B\subset Y$ kapalı kümesi için $F^-(B)$, X'in kapalı alt kümesi oluyorsa F'ye üstten yarı süreklidir veya kısaca ü.y.s.'dir denir.

(2) Her $A\subset Y$ açık kümesi için $F^-(A)$, X'in açık alt kümesi oluyorsa F'ye alttan yarı süreklidir veya a.y.s. dir denir.

(3) F çoğul-değerli fonksiyonu, ü.y.s. ve a.y.s. ise F'ye süreklidir denir.

Çoğul-değerli fonksiyon kavramı ile tek-değerli fonksiyon kavramı şöyle bağlanabilir: F, X'den Y'ye bir çoğul-değerli fonksiyon olsun. $\forall x\in X$ için $f(x)=F(x)$ denirse, F:X'den, $2^Y-\{\emptyset\}$'ye bir f tek-değerli fonksiyonu tanımlanır. 2^Y kümesi uygun topolojilerle donatılarak F'nin a.y.s. ve ü.y.s. olması tanımları, f'nin bu topolojilere göre sürekliliği cinsinden verilebilir.

$(Y;\tau)$ bir topolojik uzay olsun. Y kümesi üzerindeki τ topolojisinden yararlanılarak 2^Y kümesi üzerinde çeşitli topolojiler tanımlanabilir. Bunlardan ikisini şöyle tanımlayacağız. $G\in\tau$ olmak üzere $(G)=\{A\subset Y|A\cap G\neq\emptyset\}$ ve $<G>=\{A\subset Y|A\subset G\}$ küme ailelerini tanımlayalım. 2^Y kümesi üzerinde, $\{(G)|G\in\tau\}$ ailesini alt taban kabul eden topolojiye alt Vietoris topoloji ve $\{<G>|G\in\tau\}$ ailesini taban kabul eden topolojiye de üst Vietoris topoloji denir. Bu topolojiler sırasıyla V^- ve V^+ ile gösterilir. Ayrıca 2^Y üzerinde $V=V^+ \vee V^-$ topolojisine de Vietoris topoloji denir.

Bu durumda aşağıdaki teorem isteneni verir.

1.2.3. Teorem: X, Y topolojik uzaylar ve F, X'den Y'ye çoğul-değerli bir fonksiyon olsun. F fonksiyonunun a.y.s. [ü.y.s.] sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul X'den, $2^Y-\{\emptyset\}$'ye tanımlı olan ve F'ye karşılık gelen f tek-değerli fonksiyonunun V^- $[V^+;V]$ topolojisine göre sürekli olmasıdır.

Bazı yazarlar bu teoremi, F'nin a.y.s. [ü.y.s.] sürekli olması tanımı olarak almışlar ve a.y.s. [ü.y.s.] sürekli gösterimi yerine V-a.y.s.. [V-ü.y.s.] V-sürekli gösterimini kullanmışlardır.

Bir fonksiyonun bir noktada sürekli olması tanımı gözönüne alınırsa aşağıdaki teorem kolayca kanıtlanır.

1.2.4. Teorem: F, X'den Y'ye bir çoğul-değerli fonksiyon ve $x_0 \varepsilon X$ olsun. F fonksiyonunun $x_0 \varepsilon X$ noktasında V-ü.y.s. [V-a.y.s.] olması için gerekli ve yeterli koşul Y'nin, $F(x_0)$'ı bulunduran $[F(x_0)$ ile kesişen$]$ her $V \subset Y$ açık kümesi için $x \varepsilon U$ olduğunda $F(x) \subset V |F(x) \cap V \neq \emptyset|$ koşulunu sağlayacak şekilde X içinde $x_0 \varepsilon U$ olan bir U açık kümesinin bulunmasıdır.

V.I. Ponomarev aşağıdaki tanım ve teoremleri kullanarak F'nin V-a.y.s. veya V-ü.y.s. olmasına eşdeğer koşullar elde etmiştir.

1.2.5. Tanım: $A \subset X$, $B \subset Y$ ve F, X'den, Y'ye bir çoğul-değerli fonksiyon olsun $F(A)=\bigcup\{F(x)|x\varepsilon A\}$, $F^-(B)=\{x|F(x)\cap B\neq\emptyset\}$ $F^{\#}(A)=\{y|F^-(y)\subset A\}$ ve $F^+(B)=\{x|F(x)\subset B\}$ kümelerine sırasıyla, A'nın, F altındaki büyük görüntüsü, B'nin F altındaki büyük ters görüntüsü, A'nın F altındaki küçük görüntüsü ve B'nin F altındaki küçük ters görüntüsü denir.

1.2.6. Teorem: F, X'den, Y'ye bir çoğul-değerli fonksiyon olsun. F'nin, X üzerinde V-ü.y.s. (V-a.y.s.) olması için gerekli ve yeterli koşul

Y içinde açık (kapalı) olan her B kümesinin $F^+(B)$ küçük ters görüntüsünün, X içinde açık (kapalı) olmasıdır (Ponomarev, 1955).

1.2.7. Tanım: (X,τ) bir topolojik uzay olsun.

a) $A\subset X$ için A'nın her açık örtüsünün kapanışları A'yı örten bir sonlu alt örtüsü varsa A'ya quasi H-kapalıdır denir. Eğer, X uzayının kendisi quasi H-kapalı ise (X,τ)'ya quasi H-kapalı uzay denir. X aynı zamanda Hausdorff uzay ise (X,τ)'ya H-kapalıdır denir.

b) X'in bütün quasi H-kapalı alt kümeleri kapalı ise (X,τ)'ya HC-uzay denir.

c) X'in bütün kapalı alt kümeleri quasi H-kapalı ise (X,τ)'ya C-kompakt uzay denir.

d) Her $x\in X$ noktasının $\bar{U}$ quasi H-kapalı olan bir U açık komşuluğu varsa (X,τ)'ya yerel H-kapalı uzay denir.

2. 2^Y-ÜZERİNDE ÇEŞİTLİ TOPOLOJİLER VE ÇOĞUL-DEĞERLİ FONKSİYONLARIN SÜREKLİLİKLERİ

2.1. 2^Y-Üzerinde Çeşitli Topolojiler:

Bu kesimde (Y,τ) topolojik uzayının quasi H-kapalı alt kümelerinden yararlanarak 2^Y-üzerinde yeni iki topoloji tanımlayacağız.

2.1.1. Önerme: (Y,τ) bir topolojik uzay olmak üzere,

$$\beta_1=\{2^Y-(A) \mid (A)=\{B\subset Y \mid A\cap B\neq\emptyset\},\ A \text{ quasi H-kapalı}\} \quad \text{ve}$$

$$\beta_2=\{\emptyset\}\cup\{2^Y-\langle A\rangle \mid \langle A\rangle=\{B\subset Y \mid B\subset A\},\ A \text{ quasi H-kapalı}\}$$

aileleri 2^Y kümesi üzerinde farklı iki topoloji için sırasıyla taban ve alt taban olurlar.

Kanıt: $A=\emptyset$ quasi H-kapalı bir küme, $(A)=\emptyset$ olduğundan

$$2^Y-(A)=2^Y \varepsilon \beta_1$$

dir. Böylece $2^Y=\bigcup_{B\varepsilon\beta_1} B$ olur.

$2^Y-(A_1)$, $2^Y-(A_2)\varepsilon\beta_1$ için ve $K\varepsilon[2^Y-(A_1)]\cap[2^Y-(A_2)]$ için $K\varepsilon 2^Y-(A_1\cup A_2)=[2^Y-(A_1)]\cap[2^Y-(A_2)]$ olduğundan β_1-2^Y-üzerinde bir topoloji için taban olur. β_2'nin alttaban oluşu benzer biçimde görülür.

Önermedeki β_1 ve β_2 ailelerinin taban ve alttaban olduğu topolojileri H^+ ve H^- ile gösterecek ve bunlara sırasıyla üst koquasi H-kapalı ve alt koquasi H-kapalı topolojiler diyeceğiz.

2.1.2.Önerme: (Y,τ) bir topolojik uzay olmak üzere 2^Y kümesi üzerindeki H^+, H^-, V^+ ve V^- topolojileri arasında aşağıdaki ilişkiler vardır.

1) Y HC-uzay ise $H^+\leq V^+$ ve $H^-\leq V^-$ dır.

2) Y C-kompakt ve HC-uzay ise $H^+=V^+$ ve $H^-=V^-$ dir.

3) Genel olarak $V^+\neq H^+$ ve $V^-\neq H^-$ dir.

Kanıt: 1) $2^Y-(A)\varepsilon\beta_1$ olsun.

$2^Y-(A)=\langle Y-A\rangle$, A quasi H-kapalı ve Y HC-uzay olduğundan $Y-A\subset Y$ açık kümedir. Böylece $\langle Y-A\rangle\varepsilon V^+$ olur sonuç olarak $H^+\leq V^+$ dır.

$2^Y-\langle A\rangle=(Y-A)$ olduğundan $H^-\leq V^-$ dir.

2) Y, C-kompakt HC-uzay uzayında quasi H-kapalı kümeler kapalı ve kapalı kümeler quasi H-kapalı olduğundan $V^+=H^+$ ve $V^-=H^-$ dir.

3) $V^+\neq H^+$ ve $V^-\neq H^-$ olduğunu örneklerle görelim.

$\mathbb{R}$ üzerinde $\beta=\{(-\infty,-r)\cup(r,+\infty)\mid r\varepsilon\mathbb{R}\}$ ailesinin taban olduğu topolojiyi gözönüne alalım. Bu topoloji $\mathbb{R}$'nin adi topolojisinden daha kaba olan bir topoloji olduğundan, $[a,b]$ tipindeki kapalı ve sınırlı bütün aralıklar bu topolojiye göre kompakt olurlar. Kompakt kümeler quasi H-kapalı olduğundan $[a,b]$ ler quasi H-kapalıdır. Şimdi, $V\varepsilon\beta$ olmak üzere $<V>\varepsilon V^+$ olsun. $<V>=2^{\mathbb{R}}-(\mathbb{R}-V)$ ve $\mathbb{R}-V=[-r,r]$ quasi H-kapalı olduğundan $<V>\varepsilon\beta_1$ dir. Böylece $V^+\leq H^+$ olur. Diğer taraftan sözgelişi $a>1$ için $2^{\mathbb{R}}-(\{a\})\varepsilon H^+$ olduğu halde, $2^{\mathbb{R}}-(\{a\})\not\varepsilon V^+$ dır. Çünkü eğer $2^{\mathbb{R}}-(\{a\})\varepsilon V^+$ olsa idi, sözgelişi $E=[-1/2,\ 1/2]\varepsilon 2^{\mathbb{R}}-(\{a\})$ için öyle bir $V\varepsilon\beta$ olurdu ki $E\varepsilon<V>\subset 2^{\mathbb{R}}-(\{a\})$ kapsaması sağlanırdı, başka bir yazımla $E=[-1/2,1/2]\subset(-\infty,-r)\cup(r,+\infty)\subset\mathbb{R}-\{a\}$ olacak şekilde bir $r\varepsilon\mathbb{R}$ olurdu. Böyle bir $r\varepsilon R$ sayısının bulunması mümkün olmadığından $H^+\nleq V^+$ olduğu görülmüş olur.

2.1.3.Önerme: $(Y;\tau)$ topolojik uzayı Hausdorff ise $C^+\leq V^+$ ve $C^-\leq V^-$ dir.

Kanıt: $2^Y-(C)\varepsilon C^+$ olsun.

$2^Y-(c)=<Y-C>$, C-kompakt ve Y-Hausdorff olduğundan $Y-C\subsetneq Y$ açık kümedir. Böylece $<Y-C>\varepsilon V^+$ olur. Sonuç olarak $C^+\leq V^+$ dır. $2^Y-<C>=(Y-C)$ olduğundan $C^-\leq V^-$ dir.

2.1.4.Önerme: (Y,τ) bir topolojik uzay olsun. 2^Y üzerinde $C^+\leq H^+$ ve $C^-\leq H^-$ dir.

Kanıt: Kompakt kümeler aynı zamanda quasi H-kapalı olduğundan sonuç açıktır.

2.1.5. Sonuç: $(Y;\tau)$ HC-uzay ise

$C^+\leq H^+\leq V^+$ ve $C^-\leq H^-\leq V^-$ dir.

Kanıt:2.1.4.önerme ve 2.1.2.önermelerden açıktır.

2.2. Çoğul-Değerli Fonksiyonların H^+, H^-, V^+ ve V^- (H-ü.y.s., H-a.y.s., V-ü.y.s. ve V-a.y.s.) Süreklilikleri.

Bu kesime H-ü.y.s. ve H-a.y.s. kavramlarını tanımlayarak başlayalım.

2.2.1. Tanım: X, Y topolojik uzaylar $F:X\to Y$ bir çoğul-değerli fonksiyon ve $x_0\varepsilon X$ olsun.

a) $F(x_0)\cap V=\emptyset$ olan bir V quasi H-kapalı kümesi için

$$x\varepsilon U_{x_0} \Rightarrow F(x)\cap V=\emptyset$$

gerektirmesini sağlayan en az bir $U_{x_0}\subset X$ açık kümesi varsa, F'ye $x_0\varepsilon X$ noktasında H-üstten yarı sürekli veya kısaca H-ü.y.s. denir.

b) $F(x_0)\cap V\neq\emptyset$ ve Y-V quasi H-kapalı olan bir V-kümesi için

$$x\varepsilon U_{x_0} \Rightarrow F(x)\cap V\neq\emptyset$$

gerektirmesini sağlayan en az bir $U_{x_0}\subset X$ açık kümesi varsa F'ye $x_0\varepsilon X$ noktasında H-alttan yarı sürekli veya kısaca H-a.y.s. denir.

Şimdi çoğul-değerli bir fonksiyonun H-ü.y.s. ve H-a.y.s. oluşunu bu fonksiyona karşı gelen tek-değerli fonksiyonun sürekliliği cinsinden verelim.

2.2.2. Önerme: X, Y topolojik uzaylar $F:X\to Y$ çoğul-değerli fonksiyon ve H^+, H^-, 2^Y kümesi üzerindeki üst ve alt koquasi H-kapalı topolojiler olmak üzere,

1) F'nin $x_0\varepsilon X$'de H-ü.y.s. olması için gerekli ve yeterli koşul, F'ye karşı gelen, $f:X\to(2^Y,H^+)$ tek-değerli fonksiyonunun $x_0\varepsilon X$'de sürekli olmasıdır.

2) F'nin $x_0\varepsilon X$'de H-ü.y.s. olması için gerekli ve yeterli koşul, F'ye karşı gelen, $f:X\to(2^Y,H^-)$ tek-değerli fonksiyonunun $x_0\varepsilon X$'de sürekli olmasıdır.

Kanıt: 1) ($\Rightarrow$): F, x_0'de H-ü.y.s. ve $f(x_0)\varepsilon 2^Y-(A)\varepsilon\beta_1$ olsun. $f(x_0)\varepsilon 2^Y-(A)=\langle Y-A\rangle=\{B|B\subset Y-A\}$ olduğundan $f(x_0)\subset Y-A$ dır. Buradan $F(x_0)\cap A=\emptyset$ olur. F, x_0'da H-ü.y.s. olduğundan x_0'ı bulunduran bir $U_{x_0}\subset X$ açık kümesi, $x\varepsilon U_{x_0}$ iken $F(x)\cap A=\emptyset$ olacak biçimde vardır. Her $x\varepsilon X$ için $f(x)=F(x)$ olduğundan $f(x)\not\varepsilon(A)$ yani $f(x)\varepsilon 2^Y-(A)$ olur. Böylece $f:X\to(2^Y,H^+)$ fonksiyonu x_0'da sürekli olur.

($\Leftarrow$): Tersine, $f:X \to (2^Y, H^+)$ tek-değerli fonksiyonu $x_0 \varepsilon X$'de sürekli olsun. $F(x_0) \cap A=\emptyset$ olan bir A-quasi H-kapalı kümesi alalım. Bu durumda $f(x_0) \not\varepsilon (A)$ yani $f(x_0) \varepsilon 2^Y-(A) \varepsilon \beta_1$ olur. f, fonksiyonu sürekli olduğundan, x_0'ı bulunduran bir $U_{x_0} \subset X$ açık kümesi $f(U_{x_0}) \subset 2^Y-(A)$ olacak şekilde vardır. Buradan $x \varepsilon U_{x_0}$ iken $f(x) \varepsilon 2^Y-(A)$ olur. Böylece $F(x) \cap A=\emptyset$ olur ki bu F'nin x_0'da H-ü.y.s. olması demektir.

2) Benzer biçimde kanıtlanır.

Aşağıda bir F çoğul-değerli fonksiyonun H-ü.y.s. ve H-a.y.s. oluşuna eşdeğer koşulları veren önermeler vereceğiz.

2.2.3. Önerme: $F:X \to Y$ bir çoğul-değerli fonksiyon olsun. Aşağıdakiler eşdeğerdir.

1) F, H-ü.y.s. dir.

2) $V \subset Y$ tümleyeni quasi H-kapalı olan bir küme ise $F^+(V) \subset X$ açıktır.

3) $A \subset Y$ quasi H-kapalı ise $F^-(A) \subset X$ kapalıdır.

Kanıt: (1) $\Rightarrow$ (2): F, H-ü.y.s. ve $V \subset Y$ tümleyeni quasi H-kapalı olan bir küme olsun. $x_0 \varepsilon F^+(V)$ alalım. $F^+(V)$'nin tanımından $F(x_0) \subset V$ dir. Buradan $F(x_0) \cap (Y-V)=\emptyset$ ve Y-V quasi H-kapalıdır. F, x_0'da H-.ü.y.s. olduğundan ,

$$x \varepsilon U_{x_0} \Rightarrow F(x) \subset V$$

gerektirmesini sağlayan x_0'ın bir $U_{x_0} \subset X$ açık komşuluğu vardır. Böylece $x_0 \varepsilon U_{x_0} \subset F^+(V)$ olur. Buradan $x_0 \varepsilon [F^+(V)]^o$ olur. Sonuç olarak $F^+(V) \subset [F^+(V)]^o$'dir,ve $F^+(V) \subset X$ açık kümedir.

(2) $\Rightarrow$ (3): $A \subset Y$ quasi H-kapalı bir küme olsun. Y-A tümleyeni quasi H-kapalı olan bir kümedir. (2)'den $F^+(Y-A)$ X açık bir kümedir. $F^+(Y-A)=X-F^-(A)$ eşitliğinden, $F^-(A) \subset X$ kapalıdır.

(3) $\Rightarrow$ (1): Y içinde quasi H-kapalı olan her kümenin büyük ters görün-

tüsü kapalı olsun. $x_0 \varepsilon X$ için $A \subset Y$ quasi H-kapalı ve $F(x_0) \cap A = \emptyset$ olsun. $F(x_0) \subset Y-A$ ve $Y-A$ tümleyeni quasi H-kapalı olan bir kümedir. (3)'e göre $F^-(A) \subset X$ kapalıdır. Buradan $X-F^-(A)=F^+(Y-A)$ açıktır. Ayrıca $F(x_0) \subset Y-A$ olduğundan $x_0 \varepsilon F^+(Y-A)$ ve $F^+(Y-A)$ x_0'ın bir komşuluğudur. $x \varepsilon F^+(Y-A)$ için $F(x) \subset Y-A$ dır. Böylece $x \varepsilon F^+(Y-A)$ için $F(x) \cap A = \emptyset$ olur. Sonuç olarak F, x_0'da H-ü.y.s. dir.

2.2.4. Teorem: $F: X \to Y$ çoğul-değerli fonksiyon olsun. Aşağıdakiler eş değerdir.

1) F, $x_0 \varepsilon X$'de H-ü.y.s. dir.

2) Tümleyeni quasi H-kapalı olan her $V \subset Y$ kümesi için $F(x_0) \subset V$ ile $x_0 \varepsilon [F^+(V)]^0$ dır.

3) Herbir x_0'a yakınsayan $(a_\lambda)_{\lambda \varepsilon \Delta} \subseteq X$ ağı ve $F(x_0) \subset V$ ile $Y-V$ quasi H-kapalı olan V kümesi için bir $\lambda_0 \varepsilon \Delta$ vardır;öyleki $\forall \lambda \geq \lambda_0$ için $F(a_\lambda) \subset V$ dir.

Kanıt: (1) $\Rightarrow$ (2): F, H-ü.y.s. olsun. $F(x_0) \subset V$ ile $V \subset Y$ tümleyeni quasi H-kapalı olan bir küme olsun. F, $x_0 \varepsilon X$'de H-ü.y.s. olduğundan $x_0 \varepsilon U_{x_0}$ ile $U_{x_0} \subset X$ açık kümesi vardır; öyleki her $x \varepsilon U_{x_0}$ için $F(x) \subset V$ dir. Buradan $x_0 \varepsilon U_{x_0} \subset F^+(V)$ olur. Sonuç olarak $x_0 \varepsilon [F^+(V)]^0$ dir.

(2) $\Rightarrow$ (3): $F(x_0) \subset V$, $Y-V$ quasi H-kapalı ve $(a_\lambda)_{\lambda \varepsilon \Delta} \subseteq X$ x_0'a yakınsayan bir ağ olsun. (2)'den $x_0 \varepsilon [F^+(V)]^0$ dir. Ağın yakınsaması tanımından $\exists \lambda_0 \varepsilon \Delta$ vardır; öyleki $\forall \lambda \geq \lambda_0$ için $a_\lambda \varepsilon [F^+(V)]^0$ dir.Buradan,

$$F(a_\lambda) \subset F([F^+(V)]^0) \subset F(F^+(V)) \subset V \text{ dir.}$$

(3) $\Rightarrow$ (1): Kabul edelim ki F, x_0'da H-ü.y.s. olmasın ve (3) sağlansın. Bu durumda en az bir $V \subset Y$, $F(x_0) \subset V$ ve $Y-V$ quasi H-kapalı kümesi vardır; öyleki x_0'ı bulunduran her U-açığı için en az bir $x_U \varepsilon U$ noktası vardır; öyleki $F(x_U) \not\subset V$ dir.

$$\mathcal{U}_{x_0} = \{U\subset X:\ x_0\varepsilon U\varepsilon\tau\}$$

$$D = \{(U,x_U):\ U\varepsilon\ \mathcal{U}_{x_0} \wedge\ x_U\varepsilon U \wedge F(x_U) \not\subset V\}$$

kümelerini tanımlayalım. D-kümesini yönlendirelim:

$$(U,x_U)\leq(U',x_U) \Longleftrightarrow U'\subset U$$

ile D yönlü bir kümedir. Ayrıca, $\phi:(D,\leq) \to X$, $\phi[(U,x_U)]=x_U$ şeklinde tanımlanan ϕ'de x_0'a yakınsayan bir ağdır. Her $(U,x_U)\varepsilon D$ için $F(x_U)\not\subset V$ dir. Bu ise (3) ile çelişki doğurur. Çünkü, x_0'a yakınsayan her ağ ve $F(x_0)\subset V$, Y-V quasi H-kapalı olan $V\subset Y$ kümesi için en az bir $(U_0,x_{U_0})\varepsilon D$ vardır; öyleki her $(U,x_U)>(U_0,x_{U_0})$ için $F(x_U)\subset V$ olmalıdır.bu ise mümkün değildir. O halde, F, x_0'da H-ü.y.s. dir.

2.2.5. Önerme: X, Y topolojikuzaylar $F:X \to Y$ çoğul-değerli fonksiyon olsun. Aşağıdakiler eşdeğerdir.

1) F, H-a.y.s. dir.

2) $V\subset Y$ tümleyeni quasi H-kapalı olan bir küme ise $F^-(V)\subset X$ açıktır.

3) $K\subset Y$ quasi H-kapalı küme ise $F^+(K)\subset X$ kapalıdır.

Kanıt: (1) $\Longrightarrow$(2): F, H-a.y.s. olsun. $V\subset Y$ tümleyeni quasi H-kapalı olan bir küme olsun. $x\varepsilon F^-(V)$ alalım. Bu durumda $F(x)\cap V\neq\emptyset$ tur. F, H-a.y.s. olduğundan bir $U_x\subset X$ açık kümesi $z\varepsilon U_x$ ise $F(z)\cap V\neq\emptyset$ olacak şekilde vardır. Buradan $x\varepsilon U_x\subseteq F^-(V)$ dir. Sonuç olarak $x\varepsilon[F^-(V)]^0\supset F^-(V)$ olur. $F^-(V)\subset X$ açıktır.

(2) $\Longrightarrow$ (3): $K\subset Y$ quasi H-kapalı küme olsun. Y-K tümleyeni quasi kapalı olan bir kümedir. (2)'den $F^-(Y-K)\subset X$ açıktır.$F^-(Y-K)=X-F^+(K)$ olduğundan $F^+(K)\subset X$ kapalıdır.

(3) $\Longrightarrow$(1): $F(x)\cap V\neq\emptyset$ ve Y-V quasi H-kapalı olan bir küme V olsun. (3)'den $F^+(Y-V)\subset X$ kapalıdır. $F^+(Y-V)=X-F^-(V)$ olduğundan $F^-(V)\subset X$

açıktır. $x\varepsilon F^-(V)$ dir ve $z\varepsilon F^-(V)$ için $F(z)\cap V\neq\emptyset$ tur. Buradan F, $x\varepsilon X$'de H-a.y.s. olur. $x\varepsilon X$ keyfi olduğundan F, X'de H-a.y.s. dir.

2.2.6. Teorem: X, Y topolojik uzaylar $F:X\rightarrow Y$ çoğul-değerli fonksiyon olsun. Aşağıdakiler eşdeğerdir.

1) F, x_0'da H-a.y.s. dir.

2) $V\subset Y$ tümleyeni quasi H-kapalı ve $F(x_0)\cap V\neq\emptyset$ olan her küme için $x_0\varepsilon[F^-(V)]^o$ dir.

3) x_0'a yakınsayan her $(a_\lambda)_{\lambda\varepsilon\Delta}\subset X$ ağı ve $F(x_0)\cap V\neq\emptyset$ Y-V quasi H-kapalı olan V kümesi için $\exists\lambda_0\varepsilon\Delta \ni \forall\lambda\geq\lambda_0$ için $F(a_\lambda)\cap V\neq\emptyset$ tur.

Kanıt: (1) $\Rightarrow$ (2): F, x_0'da H-a.y.s. olsun. Tümleyeni quasi H-kapalı olan ve $F(x_0)\cap V\neq\emptyset$ olan bir küme $V\subset Y$ olsun. F, x_0'da H-a.y.s. olduğundan $\exists U_{x_0}\subset X$ açığı vardır öyleki $x_0\varepsilon U_{x_0}$ ve $\forall x\varepsilon U_{x_0}$ için $F(x)\cap V\neq\emptyset$ tur. Böylece $x_0\varepsilon U_{x_0}\subset F^-(V)$ olur. $x_0\varepsilon[F^-(V)]^o$ dir.

(2) $\Rightarrow$ (3): $(a_\lambda)_{\lambda\varepsilon\Delta}\subset X$ ağı x_0'a yakınsayan bir ağ olsun. $F(x_0)\cap V\neq\emptyset$, Y-V quasi H-kapalı olan bir $V\subset Y$ alalım. (2)'den $x_0\varepsilon[F^-(V)]^o$ dir. $U=[F^-(V)]^o$ olsun. $U\subset X$ açıktır ve $x_0\varepsilon U$ dur. $(a_\lambda)_{\lambda\varepsilon\Delta}$ ağı x_0'a yakınsadığından $x_0\varepsilon U$ için $\exists\lambda_0\varepsilon\Delta$ vardır; öyleki $\forall\lambda\geq\lambda_0$ için $a_\lambda\varepsilon U$ dır. Buradan $\lambda\geq\lambda_0$ için $F(a_\lambda)\cap V\neq\emptyset$ tur.

(3) $\Rightarrow$ (1): (3) doğru olsun ve F, $x_0\varepsilon X$'de H-a.y.s. olmasın. Bu durumda tümleyeni quasi H-kapalı ve $F(x_0)\cap V\neq\emptyset$ olan bir $V\subset Y$ kümesi vardır ki x_0'ın her U açık komşuluğu için bir $x_U\varepsilon U$ vardır; öyleki $F(x_U)\cap V=\emptyset$ tur. Şimdi,

$$\mathcal{U}_{x_0}=\{U\subset X: x_0\varepsilon U\varepsilon\tau\}$$

$$D=\{(U,x_U)\mid U\varepsilon\mathcal{U}_{x_0}\wedge x_U\varepsilon U\wedge F(x_U)\cap V=\emptyset\}$$

kümelerini tanımlayıp D'yi yönlendirelim. Teorem 2.2.4'e benzer olarak

D-yönlü kümedir ve $(x_U) \subset X$, x_0'a yakınsayan bir ağdır. Fakat $\forall (U,x_U) \varepsilon D$ için $F(x_U) \cap V = \emptyset$ tur. Halbuki (3)'den x_0'a yakınsayan (x_U) ağı ve $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$, Y-V quasi H-kapalı kümesi için en az bir $(U_0, x_{U_0}) \varepsilon D$ olmalıdır öyleki $\forall (U,x_U) > (U,x_{U_0})$ için $F(x_U) \cap V \neq \emptyset$ dır. Bu bir çelişkidir. O halde F, x_0'da H-a.y.s. dir.

2.2.7. Tanım: Bir x noktasının bir $\mathcal{F}$ süzgecinin H-yığılma noktası olması için gerekli ve yeterli koşul x'i içiren her tümleyeni quasi H-kapalı olan U-kümesi için ve $\forall F \varepsilon \mathcal{F}$ için $F \cap U \neq \emptyset$ olmasıdır.

2.2.8. Teorem: $F:X \to Y$ çoğul-değerli fonksiyon olsun. Aşağıdakiler eşdeğerdir.

1) F, H-a.y.s. dir

2) Tümleyeni quasi H-kapalı olan her $V \subset Y$ kümesi için $F^{-}(V) \subset X$ açıktır.

3) $K \subset Y$ quasi H-kapalı küme ise $F^{+}(K) \subset X$ kapalıdır.

4) $x_0 \varepsilon X$ ve $\mathcal{F}$, x_0'a yakınsayan bir süzgeç ise herbir $y \varepsilon F(x_0)$, $F(\mathcal{F})$ süzgecinin bir H-yığılma noktasıdır.

Kanıt: (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3) ve (3) $\Rightarrow$ (1) gerektirmeleri 2.2.5 önermede kanıtlandı. Biz (1) $\Rightarrow$ (4) ve (4) $\Rightarrow$ (1)'i kanıtlayacağız.

(1) $\Rightarrow$ (4): Kabul edelimki F, H-a.y.s. olsun. $x_0 \varepsilon X$ ve $\mathcal{F}$-süzgeci x_0'a yakınsasın. $y \varepsilon F(x_0)$ ve V, y'yi içeren tümleyeni quasi H-kapalı olan bir küme olsun. $y \varepsilon F(x_0) \cap V \neq \emptyset$ tur. F, H-a.y.s. olduğundan x_0'ı içeren bir U-açığı vardır öyleki $\forall x \varepsilon U$ için $F(x) \cap V \neq \emptyset$ tur. Bir $\mathcal{F}$-süzgeci için $F(\mathcal{F})$'de bir süzgeçtir. $F(A) \varepsilon F(\mathcal{F})$ keyfi kümesini alalım. $\mathcal{F} \to x_0$ olduğundan bir $U_{x_0} \subset U$ ve $U_{x_0} \varepsilon \mathcal{F}$ vardır. $\mathcal{F}$-süzgeç olduğundan A, $U_{x_0} \varepsilon \mathcal{F}$ için bir $U_1 \varepsilon \mathcal{F}$ vardır; öyleki $U_1 \subset A \cap U_{x_0}$ dır. Eğer $x \varepsilon U_1$ ise $U_1 \subset U_{x_0} \subset U$ olduğundan $F(x) \cap V \neq \emptyset$ tur. Diğer yandan $x \varepsilon A$ ise $F(x) \subset F(A)$ olduğundan $U_1 \subset A$ için $F(U_1) \subset F(A)$ dır. $F(U_1) \cap V \neq \emptyset$ olduğun-

dan da $F(A)\cap V\neq\emptyset$ tur. Sonuç olarak y, $F(\mathcal{F})$'in bir H-yığılma noktası olur.

(4) $\Rightarrow$ (1): (4) doğru olsun. $F(x_0)\cap V\neq\emptyset$ ile V, tümleyeni quasi H-kapalı olan bir küme olsun. x_0'a yakınsayan açık kümelerin komşuluklar süzgeci $\mathcal{F}$-olsun. Eğer, F, x_0'da H-a.y.s. değil ise; bu durumda herbir $U\in\mathcal{F}$ için bir $x\in U$ vardır; öyleki $F(x)\cap V=\emptyset$ tur.

$$\tilde{U}=\{x\in U:\ F(x)\cap V=\emptyset\}$$

kümesini herbir $U\in\mathcal{F}$ için elde edebiliriz. Buradan,

$$\tilde{\mathcal{F}}=\{\tilde{U}:\ U\in\mathcal{F}\}$$

ailesi x_0'a yakınsayan bir süzgeçtir. Çünkü $\tilde{U}\subset U$ dur. Böylece hipotezden $y_0\in F(x_0)$ $F(\tilde{\mathcal{F}})$ nın bir H-yığılma noktasıdır. Fakat, $\forall\tilde{U}\in\tilde{\mathcal{F}}$ için $F(\tilde{U})\cap V=\emptyset$ tur. Bu da H-yığılma noktası olmasıyla çelişir. O halde F, x_0'da H-a.y.s. dir. $x_0\in X$ keyfi olduğundan F H-a.y.s. dir.

2.2.9. Teorem: $F:X\to Y$ çoğul-değerli fonksiyon, Y-quasi H-kapalı ve HC-uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir:

1) F, x_0'da H-.a.y.s. dir.

2) $F(x_0)\cap V\neq\emptyset$ ile herbir $V\subset Y$ açık kümesi için $x_0\in[F^-(\overset{o}{\overline{V}})]^o$ dir.

3) $F(x_0)\cap V\neq\emptyset$ ile herbir $V\subset Y$ regüler açık kümesi için $x_0\in[F^-(V)]^o$ dir.

4) $F(x_0)\cap V\neq\emptyset$ ile herbir $V\subset Y$ regüler açık kümesi için bir $U\subset X$ açık kümesi vardır; öyleki $x_0\in U$ ve $\forall x\in U$ için $F(x)\cap V\neq\emptyset$ tur.

5) Herbir $(x_\lambda)_{\lambda\in\Delta}\subset X$ x_0'a yakınsak ağı ve herhangi bir $F(x_0)\cap V\neq\emptyset$ ile $V\subset Y$ regüler açık kümesi için bir $\lambda_0\in\Delta$ vardır; öyleki $\forall\lambda\geq\lambda_0$ için $F(x_\lambda)\cap V\neq\emptyset$ tur.

Kanıt: (1) $\Rightarrow$ (2): $F(x_0)$ $V\neq\emptyset$ ile $V\subset Y$ açık olsun. V-açık olduğundan $V\subset\overset{o}{\overline{V}}$ dir. $F(x_0)\cap\overset{o}{\overline{V}}\neq\emptyset$ ve $Y-\overset{o}{\overline{V}}\subset Y$ regüler kapalıdır. Y quasi H-kapalı uzay olduğundan regüler kapalı alt kümeleri quasi H-kapalıdır. O halde

F, x_0'da H-a.y.s. olduğundan bir $U_{x_0} \subset X$ açık kümesi vardır öyleki $x_0 \in U_{x_0}$ ve $\forall x \in U_{x_0}$ için $F(x) \cap \overset{\circ}{\bar{V}} \neq \emptyset$ tur. Buradan, $x_0 \in U_{x_0} \subset F^-(\overset{\circ}{\bar{V}})$ olur. $x_0 \in [F^-(\overset{\circ}{\bar{V}})]^{\circ}$ dir.

(2) $\Rightarrow$ (3): $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$ ile $V \subset Y$ regüler açık olsun. (2)'den $x_0 \in [F^-(\overset{\circ}{\bar{V}})]^{\circ}$ dir. V-regüler açık olduğundan $V = \overset{\circ}{\bar{V}}$ dir. O halde $x_0 \in [F^-(V)]^{\circ}$ dir.

(3) $\Rightarrow$ (4): $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$ ile $V \subset Y$ regüler açık olsun (3)'den $x_0 \in [F^-(V)]^{\circ}$ dir. $U = [F^-(V)]^{\circ}$ diyelim. Böylece $x_0 \in U$ ve $x \in U$ için $x \in F^-(V)$ olacağından $F(x) \cap V \neq \emptyset$ tur.

(4) $\Rightarrow$ (1): $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$ ile $Y-V$ quasi H-kapalı olan bir küme V olsun. Y, HC-uzay olduğundan Y-V- kapalıdır. O halde V-açıktır ve $V \subset \overset{\circ}{\bar{V}}$ dir. $\overset{\circ}{\bar{V}}$ regüler açık ve $F(x_0) \cap \overset{\circ}{\bar{V}} = \emptyset$ olduğundan (4)'den bir $U \subset X$ açık kümesi vardır; öyleki $x_0 \in U$ ve $\forall x \in U$ için $F(x) \cap \overset{\circ}{\bar{V}} \neq \emptyset$ tur.Böylece F, x_0'da H-a.y.s. dir.

(4) $\Rightarrow$ (5): (3) $\Rightarrow$ (4)'den $U = [F^-(V)]^{\circ}$ için $x_0 \in U$ dır ve $\forall x \in U$ için $F(x) \cap V \neq \emptyset$ tur. Eğer $(a_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$, x_0'a yakınsayan bir ağ ise x_0'ın U-komşuluğu için bir $\lambda_0 \in \Delta$ vardır; öyleki $\forall \lambda \geq \lambda_0$ için $a_\lambda \in F^-(V)$ dir. O halde $\forall \lambda \geq \lambda_0$ için $F(a_\lambda) \cap V \neq \emptyset$ tur.

(5) $\Rightarrow$ (4): Hipotez doğru olsun. (4) doğru olmasın. Bu durumda $G \cap F(x_0) \neq \emptyset$ ile bir $G \subset Y$ regüler açık kümesi vardır; öyleki $x_0 \in U$ olan her U için bir $x_U \in U$ vardır; öyleki $F(x_U) \cap G = \emptyset$ tur.

$$\mathcal{U}_{x_0} = \{U \subset X : x_0 \in U \text{ ve } U \in \tau\}$$

$$D = \{(U, x_U) : U \in \mathcal{U}_{x_0} \wedge x_U \in U,\ F(x_U) \cap G = \emptyset\}$$

kümelerini tanımlayalım. D yönlü bir küme ve $(x_U) \subset X$ ağı x_0'a yakınsaktır. Fakat $\forall (U, x_U) \in D$ için $F(x_U) \cap G = \emptyset$ turki bu, hipotez ile çelişir. O halde (4) sağlanır.

2.2.10. Teorem: $F:X \to Y$ çoğul-değerli fonksiyon ve Y, quasi H-kapalı HC-uzay olsun. Aşağıdakiler eşdeğerdir.

1) F, H-a.y.s. dir.

2) $G\subset Y$ açık olmak üzere $F^-(G)\subset [F^-(\overset{\circ}{\overline{G}})]^{\circ}$ dir.

3) $G\subset Y$ regüler açık olmak üzere $F^-(G)\subset X$ açıktır.

4) $G\subset Y$ açık olmak üzere $F^-(\overset{\circ}{\overline{G}})\subset X$ açıktır.

5) $V\subset Y$ kapalı olmak üzere $\overline{[F^+(\overset{\circ}{\overline{V}})]}\subset F^+(V)$ dir.

6) $V\subset Y$ regüler kapalı ise $F^+(V)\subset X$ kapalıdır.

7) $x_0\varepsilon X$, $\mathcal{F}\to x_0$ olan bir süzgeç ise her bir $y\varepsilon F(x_0)$ için y, $F(\mathcal{F})$ süzgecinin bir H-yığılma noktasıdır.

2.2.11. Teorem: $F:X \to Y$ çoğul-değerli bir fonksiyon ve Y quasi H-kapalı HC-uzay olsun. Aşağıdakiler eşdeğerdir.

1) F, x_0'da H-ü.y.s. dir.

2) $F(x_0)\subset V$ ile herbir $V\subset Y$ açık kümesi için $x_0\varepsilon[F^+(\overset{\circ}{\overline{V}})]^{\circ}$ dir.

3) $F(x_0)\subset V$ ile herbir $V\subset Y$ regüler açık kümesi için $x_0\varepsilon[F^+(V)]^{\circ}$ dir.

4) $F(x_0)\subset V$ ile herbir $V\subset Y$ regüler açık kümesi için bir $U\subset X$ açık kümesi vardır; öyleki $x_0\varepsilon U$ ve $\forall x\varepsilon U$ için $F(x)\subset V$ dir.

5) Herbir x_0'a yakınsayan $(a_\lambda)_{\lambda\varepsilon\Delta}$ ağı ve $F(x_0)\subset V$ ile herbir $V\subset Y$ regüler açık kümesi için bir $\lambda_0\varepsilon\Delta$ vardır; öyleki $\forall\lambda\geq\lambda_0$ için $F(a_\lambda)\subset V$ dir.

2.2.12. Teorem: $F:X \to Y$ çoğul-değerli fonksiyon ve Y quasi H-kapalı, HC-uzay olsun. Aşağıdakiler eşdeğerdir.

1) F, H-ü.y.s. dir.

2) Herbir $G\subset Y$ açık kümesi için $F^+(G)\subset[F^+(\overset{\circ}{\overline{G}})]^{\circ}$ dir.

3) $G\subset Y$ regüler açık ise $F^+(G)\subset X$ açıktır.

4) Herbir $G\subset Y$ açık kümesi için $F^+(\overset{\circ}{\overline{G}})\subset X$ açıktır.

5) $V \subset Y$ kapalı ise $\overline{[F^{-}(\overset{\circ}{V})]} \subset F^{-}(V)$ dir.

6) $V \subset Y$ regüler kapalı ise $F^{-}(V) \subset X$ kapalıdır.

2.2.10, 2.2.11 ve 2.2.12 teoremleri, quasi H-kapalı, HC-uzay kavramları düşünülerek doğrudan elde edilir.

2.2.13. Önerme: X, Y topolojik uzaylar, $A \subset X$ olsun. X'den Y'ye tanımlı bir F çoğul-değerli fonksiyonu verilsin. F, H-ü.y.s. (H-.a.y.s) ise A'dan Y'ye tanımlı $F|_A$ kısıtlanmış fonksiyonu da H-ü.y.s. (H-a.y.s.) olur.

Kanıt: $F:X \to Y$ H-ü.y.s. (H-a.y.s.) olsun. F'ye karşı gelen, f tek-değerli fonksiyonu, X'den $(2^Y, H^+)$ $[(2^Y, H^-)]$'ye süreklidir. X üzerinde sürekli f fonksiyonunun $f|_A$ kısıtlanmışı, A'dan $(2^Y, H^+)$ $[(2^Y, H^-)]$'ye süreklidir. Bu $F|_A: A \to Y$ çoğul-değerli fonksiyonunun H-ü.y.s. (H.a.y.s.) olmasını verir.

2.2.14. Önerme: X, Y, Z topolojik uzaylar,
$F:X \to Y$ V-ü.y.s. (V-a.y.s.) ve $G:Y \to Z$ H-ü.y.s. (H-a.y.s.) ise
$GoF:X \to Z$ H-ü.y.s. (H-a.y.s.) dir.

Kanıt: $K \subset Z$ quasi H-kapalı ($V \subset Z$ tümleyeni quasi H-kapalı olan bir küme) olsun. $G:Y \to Z$ H-ü.y.s. (H-.a.y.s.) olduğundan $G^{-}(K) \subset Y$ kapalı $[G^{-}(V) \subset Y$ açık$]$'tır. $F:X \to Y$ V-ü.y.s. (V-a.y.s.) olduğundan $F^{-}(G^{-}(K)) \subset X$ kapalı $[F^{-}(G^{-}(V)) \subset X$ açık$]$' tır. Böylece;
$F^{-}(G^{-}(K)) = (GoF)^{-}(K)$ $[F^{-}(G^{-}(V)) = (GoF)^{-}(V)]$ eşitliğinden $(GoF)^{-}(K) \subset X$ kapalı $[(GoF)^{-}(V) \subset X$ açık$]$' tır. Öyleyse $GoF:X \to Z$ H-ü.y.s.(H-a.y.s.) olur.

2.2.15. Önerme: X, Y topolojik uzaylar, Y HC-uzay ve C-kompakt uzay $F:X \to Y$ bir çoğul-değerli fonksiyon olsun. F, H-ü.y.s. (H-.a.y.s.) ve F(X) görüntüsü Y'nin bir quasi H-kapalı alt kümesi içinde ise

F, V-ü.y.s. (V-.a.y.s.) dir.

Kanıt: $K\subset Y$ quasi H-kapalı ve $F(X)\subset K$ olsun. V, Y içinde herhangi bir açık küme ile $V\cup(Y-K)\subset Y$ içinde tümleyeni quasi H-kapalı olan bir kümedir. F, H-ü.y.s. (H-a.y.s.) olduğundan $F^{+}(V\cup(Y-K))$ $[F^{-}(V\cup(Y-K)]$ X içinde açık kümedir. Diğer taraftan $F(X)\subset K$ olduğundan, $F^{+}(V)=F^{+}(V\cup(Y-K))$ $[F^{-}(V)=F^{-}(V\cup(Y-K))]$ eşitliğinden $F^{+}(V)$ $[F^{-}(V)]$ X içinde açık olur. Öyleyse F, V-ü.y.s. (V-a.y.s.) dir.

2.2.16. Tanım: (Y,τ) bir topolojik uzay olsun. $\theta\subset\tau$ olduğunda $\bigcap\theta\varepsilon\tau$ oluyorsa, (Y,τ)'ya doymuş (saturated) uzay denir.

2.2.17. Tanım: $F:X\to Y$ çoğul-değerli fonksiyon ve $x_0\varepsilon X$ olsun.

a) $F(x_0)\subset V$, $V\subset Y$ açık kümesi için $\exists U_{x_0}\subset X$ açık kümesi varsa öyleki $x_0\varepsilon U_{x_0}$ ve $\forall x\varepsilon U_{x_0}$ için $F(x)\subset\bar{V}$ oluyorsa F'ye x_0'da Weakly ü.y.s. denir.

b) $F(x_0)\subset V$, $V\subset Y$ $Y-V$ quasi H-kapalı olan bir kümesi için en az bir $U_{x_0}\subset X$ açık kümesi varsa öyleki $x_0\varepsilon U_{x_0}$ ve $\forall x\varepsilon U_{x_0}$ için $F(x)\subset\bar{V}$ oluyorsa F'ye x_0'da H-Weakly ü.y.s. denir.

2.2.18. Teorem: X, Yerel H-kapalı Hausdorff uzayı ve $A\subset X$ quasi H-kapalı küme ise $x\notin A$ için $A\subset K$ kapalı ve $x\varepsilon U$ açık ve $U\cap K=\emptyset$ olan U, K kümeleri vardır.

2.2.19. Teorem: X quasi H-kapalı uzay ve $x_0\varepsilon X$ olsun. x_0'ın her $N\varepsilon\tau(x_0)$ komşuluğu için en az bir $x_0\varepsilon U\subset\bar{U}\subset\bar{N}$ ve $\bar{U}$ quasi H-kapalı olan U-açık kümesi vardır.

2.2.20. Tanım: X,Y topolojik uzaylar $F:X\to Y$ çoğul-değerli bir fonksiyon ve $x_0\varepsilon X$ olsun. F'nin, $x_0\varepsilon X$'de weakly ü.y.s. olması için gerekli ve yeterli koşul $F(x_0)\subset V$ olan her $V\subset Y$ açık kümesi için x_0'ın

$$x \in U_{x_0} \Rightarrow F(x) \subset \overline{V}$$

gerektirmesini sağlayan en az bir $U_{x_0} \subset X$ açık kümesi vardır.

2.2.21. Tanım: X,Y topolojik uzaylar $F:X \to Y$ çoğul-değerli bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer F, çoğul-değerli fonksiyonu, $F(x_0) \subset V$, Y-V quasi H-kapalı olan her $V \subset Y$ kümesi için, x_0'ın

$$x \in U_{x_0} \Rightarrow F(x) \subset \overline{V}$$

gerektirmesini sağlayan en az bir $U_{x_0} \subset X$ açık kümesine sahip ise weakly H-ü.y.s.'dir, denir.

2.2.22. Önerme: X doymuş, Y quasi H-kapalı Hausdorff uzaylar ve $F:X \to Y$ bir çoğul-değerli fonksiyon olsun. F, H-ü.y.s.,nokta kompakt ise F, weakly ü.y.s.'dir.

Kanıt: F, H-ü.y.s., nokta kompakt ve herhangi bir $x_0 \in X$ alalım. $F(x_0) \subset V$ $(\subset Y)$ açık küme olsun. Y Hausdorff ve $F(x_0)$ kompakt ve $F(x_0) \subset V$ olduğundan, $F(x_0) \subset W \subset \overline{W} \subset \overline{V}$ olan en az bir $W \subset Y$ açık kümesi $\overline{W}$ quasi H-kapalı olmak üzere vardır. Ayrıca her $y \notin \overline{W}$ için Y hausdorff ve $\overline{W}$ quasi H-kapalı olduğundan, en az bir $y \in H_y \subset Y$ açık ve $\overline{W} \subset F_y \subset Y$ kapalı kümeleri vardır; öyleki $H_y \cap F_y = \emptyset$ tur. $\overline{W} \subset F_y$ olduğundan, $\overline{W} \cap H_y = \emptyset$ tur. Diğer yandan $y \in H_y$ açığı için Y uzayı quasi H-kapalı olduğundan en az bir $G_y \subset Y$ açığı vardır; öyleki $y \in G_y \subset \overline{G}_y \subset \overline{H}_y$ ve $\overline{G}_y$ quasi H-kapalıdır. Buradan $F(x_0) \subset \overline{W} \subset Y - \overline{G}_y$ olur. $Y - \overline{G}_y$ tümleyeni quasi H-kapalı olan bir kümedir. F, H-ü.y.s. oldugundan x_0'ın $F(U_y) \subset Y - G_y$ olan bir $U_y \subset X$ açık komşuluğu vardır. X uzayı doymuş olduğundan, $U_{x_0} = \bigcap_{y \notin \overline{W}} U_y$ denirse, U_{x_0} açık ve $F(U_{x_0}) \subset \overline{W} \subset \overline{V}$ olur. Böylece F, x_0'da weakly ü.y.s. dir. $x_0 \in X$ keyfi olduğundan F, X üzerinde weakly ü.y.s. dir.

2.2.23. Önerme: X uzayı regüler, Y HC-uzay ve F,X'den Y'ye açık, kapalı ve ters nokta kapalı dönüşüm ise F, weakly H-ü.y.s. dir.

Kanıt: Kabul edelim ki F, $x_o \varepsilon X$'de weakly H-ü.y.s. olmasın.Bu durumda Y'nin $F(x_o)\subset V$ koşulunu sağlayan ve tümleyeni quasi H-kapalı olan öyle bir $V\subset Y$ açık kümesi vardır ki, x_o'ı bulunduran her U açık kümesi için $F(U)\not\subset V$ olur. Buradan her $U\varepsilon\eta_{x_o}$ için $F(U)\cap Y-V\neq\emptyset$ dır. Ayrıca F kapalı dönüşüm olduğundan, $F(\bar{U})\subset Y$ kapalıdır. Böylece $\{F(\bar{U})\cap Y-V \mid U\varepsilon\eta_{x_o}\}$ ailesi, Y-V'nin kapalı alt kümelerinden oluşan ve içleri sonlu arakesit özelliğine sahip olan bir ailedir. Gerçekten en az bir $n_o \varepsilon N$ için
$\bigcap_{i=1}^{n_o}[F(\bar{U}_i)\cap(Y-V)]^o=\emptyset$ olsaydı, $\bigcap_{i=1}^{n_o}[F(\bar{U}_i)]^o\cap(Y-\bar{V})=\emptyset$ olup
$\bigcap_{i=1}^{n_o}[F(U_i)]^o\subset\bar{V}$ olurdu. buradan,

$$\bigcap_{i=1}^{n_o}[F(\bar{U}_i)]^o=[\bigcap_{i=1}^{n_o}F(\bar{U}_i)]^o\subset\bar{V} \text{ ve } [F(\bigcap_{i=1}^{n_o}\bar{U}_i)]^o\subset V \text{ ve}$$

$[F(\bigcap_{i=1}^{n_o}U_i)]^o\subset\bar{V}$ elde ederiz. U_i'ler açık ve F, açık dönüşüm oldugundan, $F(\bigcap_{i=1}^{n_o}U_i)=[F(\bigcap_{i=1}^{n_o}U_i)]^o\subset\bar{V}$ dir. Bu ise F'nin x_o'da weakly H-ü.y.s. olmasını verir. Öyleyse kabulümüz ile çelişki doğar. Y uzayı HC-uzay olduğundan, $\bigcap_{U\varepsilon\eta_{x_o}} F(\bar{U})\cap(Y-V)\neq\emptyset$ olur. Bir $y\varepsilon Y$ için $y\varepsilon\bigcap_{U\varepsilon\eta_{x_o}} F(\bar{U})\cap(Y-V)$ dir. $F(x_o)\subset V$ olduğundan $y\not\varepsilon F(x_o)$ dır. Buradan $F^-(y)\cap\{x_o\}=\emptyset$ ve $x_o\not\varepsilon F^-(y)$ olur. X uzayı regüler ve $F^-(y)$ kapalı olduğundan en az bir $U_1,U_2\subset X$ açık kümeleri $x_o\varepsilon U_1$, $F^-(y)\subset U_2$ ve $U_1\cap U_2=\emptyset$ olacak şekilde vardır. $\bar{U}_1\cap F^-(y)=\emptyset$ olur. Sonuç olarak $y\not\varepsilon F(U_1)$ olur ki bu $y\varepsilon\bigcap_{U\varepsilon\eta_{x_o}} F(\bar{U})\cap(Y-V)$ oluşu ile çelişir. Bu çelişkiye F,x_o'da weakly H-ü.y.s. olmasın demekle düştük. O halde F,x_o'da weakly H-ü.y.s. dir.

$F:X\rightarrow Y$ çoğul-değerli bir fonksiyon olsun. Her $x\varepsilon X$ için $\bar{F}(x)=\overline{F(x)}$ ile $\bar{F}:X\rightarrow Y$ bir yeni fonsiyon tanımlayalım.

2.2.24. Önerme: $F:X\rightarrow Y$ weakly H-ü.y.s. ise $\bar{F}:X\rightarrow Y$ weakly H-ü.y.s. dir.

Kanıt: $x\varepsilon X$ ve $\bar{F}(x)\subset W$ için Y-W quasi H-kapalı bir küme olsun. $\bar{F}(x)=\overline{F(x)}\subset W$ olduğundan, $F(x)\subset W$ dir. F, weakly H-ü.y.s. olduğundan, bir $x\varepsilon U_x\subset X$ açık kümesi vardır; öyleki $F(U)\subset\bar{W}$ dir. Buradan $F(U)\subset\bar{W}$ ise

$\overline{F(\bar{U})} \subset \bar{W}$ tır. $\bar{F}(U)=\bigcup_{x\varepsilon U}\bar{F}(x)=\bigcup_{x\varepsilon U}\overline{F(x)} \subset \overline{F(U)}$ olduğundan $\bar{F}(U) \subset \bar{W}$ tır. O halde F, $x\varepsilon X$'de weakly H-ü.y.s. dir. $x\varepsilon X$ keyfi olduğundan F, X'de weakly H-ü.y.s. olur.

2.2.25. Tanım: X,Y topolojik uzaylar, $F:X\rightarrow Y$ çoğul-değerli bir fonksiyon olsun.

$G(F)=\{(x,y) \mid x\varepsilon X, y\varepsilon F(x)\} \subset X\times Y$ kümesine F'nin grafiği denir.

2.2.26. Tanım: X,Y topolojik uzaylar ve $F:X\rightarrow Y$ çoğul-değerli bir fonksiyon olsun. $G(F)$, F'nin grafiği olmak üzere her bir $(x,y)\varepsilon X\times Y-G(F)$ için çin $(U\times V)\cap G(F)=\emptyset$ $[(U\times\bar{V})\cap G(F)=\emptyset]$ olacak şekilde X içinde x-noktasının bir U, Y içinde y-noktasının bir V komşuluğu varsa, F'ye grafiği kapalıdır (kuvvetli kapalıdır) denir.

2.2.27. Önerme: F, X'den Y'ye kuvvetli kapalı grafikli bir çoğul-değerli fonksiyon ise F, H-ü.y.s. dir.

Kanıt: Kabul edelim ki $G(F)$ kuvvetli kapalı olsun. $K\subset Y$ quasi H-kapalı ve $x\notin F^{-}(K)$ olsun. $F(x)\cap K=\emptyset$ dır. Her $y\varepsilon K$ için $(x,y)\notin G(F)$'tir. $G(F)$ kuvvetli kapalı olduğundan $x\varepsilon U_y(x)$, $y\varepsilon V_y$ açık kümeleri vardır; öyleki $F(U_y(x))\cap\bar{V}_y=\emptyset$ tur. $\{V_y \mid y\varepsilon K\}$ ailesi K'nın bi açık örtüsünü oluşturur. K quasi H-kapalı olduğundan $y_1,y_2,\ldots,y_n\varepsilon K$ noktaları vardır; öyleki $K\subset\bigcup_{i=1}^{n}\bar{V}_{y_i}$ dir. Her i için V_{y_i}'ye karşı gelen $U_{y_i}(x)$'ler için $U=\bigcap_{i=1}^{n}U_{y_i}(x)$ olsun. $x\varepsilon U$ ve $U\subset X$ açıktır. Ayrıca her i için $F(U_{y_i}(x))\cap\bar{V}_{y_i}=\emptyset$ olduğundan $F(U)\cap\bar{V}_{y_i}=\emptyset$ ve $F(U)\cap\bigcup_{i=1}^{n}\bar{V}_{y_i}=\emptyset$ dır. $K\subset\bigcup_{i=1}^{n}\bar{V}_{y_i}$ olduğundan $F(U)\cap K=\emptyset$ tur. Diğer yandan $U\subset F^{-}(F(U))$ olduğundan $U\cap F^{-}(K)=\emptyset$ dır. Sonuç olarak $x\varepsilon U\subset X-F^{-}(K)$ olur. Buradan, $X-F^{-}(K)$ açık ve $F^{-}(K)$ kapalıdır. Böylece F, X'de H-ü.y.s. olur.

2.2.28. Önerme: $F:X\rightarrow Y$ çoğul-değerli fonksiyonu H-ü.y.s., nokta kompakt ve Y H-kapalı uzay ise $G(F)$ kuvvetli kapalıdır.

Kanıt: $(x,y)\notin G(F)$ alalım. $y\notin F(x)$'tir. Y Hausdorff olduğundan ve $F(x)$ kompakt olduğundan $y\in U$, $F(x)\subset V$ açıkları vardır; öyleki $U\cap V=\emptyset$ tur. Buradan $\bar{U}\cap V=\emptyset$ olur. Diğer yandan $y\in U$ açığı için Y quasi H-kapalı olduğundan $y\in V_1\subset \bar{V}_1\subset \bar{U}$ ve $\bar{V}_1$ quasi H-kapalı olan bir $V_1\subset Y$ açık kümesi vardır. $F(x)\subset Y-\bar{V}_1$ ve $Y-\bar{V}_1$ tümleyeni quasi H-kapalı olan bir küme ve F, H-ü.y.s. olduğundan bir $U_1\subset X$ açık kümesi vardır; öyleki $x\in U_1$ ve her $x_1\in U_1$ için $F(x_1)\subset Y-\bar{V}_1$ tır. Bu durumda $F(U_1)\cap\bar{V}_1=\emptyset$ tur. Sonuç olarak $G(F)$ kuvvetli kapalıdır.

2.2.29. Önerme: $F:X\to Y$ nokta kompakt çoğul-değerli fonksiyon ve Y, yerel H-kapalı (H-kapalı) Hausdorff olsun. Eğer her bir $K\subset Y$ quasi H-kapalı kümesi için $F^-(K)\subset X$ kapalı ise $G(F)$ kuvvetli kapalıdır.

Kanıt: Kabul edelim ki Y yerel H-kapalı olsun. $(x,y)\notin G(F)$ alalım. Bu durumda $y\notin F(x)$'tir. Y Hausdorff olduğundan ve $F(x)$ kompakt olduğundan ayrık açık V_1 ve W kümeleri vardır; öyleki $y\in V_1$ ve $F(x)\subset W$ dir. $V_1\cap W=\emptyset$ ise $\bar{V}_1\cap W=\emptyset$ tur. Ayrica $y\in Y$ için y'nin quasi H-kapalı olan V_2 komşuluğu vardır. $V=V_1\cap \mathring{V}_2$ diyelim. Bu durumda V, y'yi içeren bir açık kümedir. V_2, y'nin quasi H-kapalı komşuluğu olduğundan Y yerel H-kapalı uzayında V_2 kapalıdır. O halde $\bar{V}\subset V_2$ dir. V açık olduğundan $\bar{V}$ regüler kapalıdır. V_2 quasi H-kapalı olduğundan da $\bar{V}$, V_2'de quasi H-kapalıdır. Böylece $\bar{V}$, Y'de quasi H-kapalıdır. Kabulümüzden $F^-(\bar{V})\subset X$ kapalıdır. $U=X-F^-(\bar{V})$ diyelim. $x\in U$ ve $U\subset X$ açıktır ve $F(U)\cap\bar{V}=\emptyset$ tur. O halde $G(F)$ kuvvetli kapalıdır.

2.2.30. Sonuç: $F:X\to Y$ çoğul-değerli fonksiyon, Y, H-kapali (Yerel H-kapalı, Hausdorff) ve F, nokta kompakt, ise aşağıdakiler eşdeğerdir.

1) $G(F)$ kuvvetli kapalıdır.

2) F, H-ü.y.s. dir.

Kanıt: Açıktır.

2.2.31. Önerme: $F:X \to Y$ weakly H-ü.y.s. ve Y regüler, quasi H-kapalı ise $G(\overline{F})$ kapalıdır.

Kanıt: $F:X \to Y$ weakly H-ü.y.s. ise 2.2.24. Önerme'den $\overline{F}$'de weakly H-ü.y.s. dir. Kabul edelim ki $(x,y) \notin G(\overline{F})$ olsun. Bu durumda $y \notin \overline{F}(x)$'tir. $\overline{F}(x)=\overline{F(x)}$ olduğundan $y \notin \overline{F(x)}$ olur. Y regüler olduğundan $y \in V$, $\overline{F(x)} \subset W$ açık kümeleri vardır; öyleki $V \cap W=\emptyset$ tur. Buradan $V \cap \overline{W}=\emptyset$ tur. W açık olduğundan $W \subset \overset{\circ}{\overline{W}}$ dir. Y quasi H-kapalı olduğundan da Y-W quasi H- kapalıdır. $\overline{F}$, weakly H-ü.y.s. olduğundan X'de bir U açık kümesi vardır; öyleki $\overline{F}(U) \subset \overset{\circ}{\overline{W}}$ dir. Buradan $\overline{F}(U) \subset \overset{\circ}{\overline{W}} \subset \overline{W}$ tır. Böylece $\overline{F}(U) \cap V=\emptyset$ tur. Sonuç olarak $G(\overline{F})$ kapalıdır.

2.2.32. Tanım: F, X'den Y'ye bir çoğul-değerli fonksiyon olsun.

$$G:X \to X \times Y,\ G(x)=\{(x,y) \mid y \in F(x)\}$$

biçiminde tanımlanan G çoğul-değerli fonksiyonuna, F'ye karşı gelen çoğul-değerli grafik fonksiyonu denir.

2.2.33. Önerme: X,Y topolojik uzaylar, F, X'den Y'ye bir çoğul-değerli fonksiyon ve X quasi H-kapalı olsun. F'nin, G çoğul-değerli grafik fonksiyonu H-ü.y.s. ise, F'de H-ü.y.s. dir.

Kanıt: $x_0 \in X$ ve $F(x_0) \subset V$ $(\subset Y)$ tümleyeni quasi H-kapalı olan bir küme olsun. X quasi H-kapalı olduğundan $X \times (Y-V) \subset X \times Y$ quasi H-kapalıdır.

$$p_y: X \times Y \to Y,\ p_y(x,y)=y \text{ olmak üzere}$$

$$X \times (Y-V)=X \times Y-p_y^{-1}(V)$$

olur.

$G(x_0)=\{(x_0,y) \mid y \in F(x_0)\} \subset p_y^{-1}(V)$, $X \times Y$ içinde tümleyeni quasi H-kapalı olan bir kümedir. G, H-ü.y.s. olduğundan X içinde x_0'ı bulunduran ve $G(U_{x_o}) \subset p_y^{-1}(V)$ olan bir U_{x_o} açık kümesi vardır. Buradan $p_y(G(U_{x_o}))=F(U_{x_o}) \subset V$ olur. Böylece F, H-ü.y.s. olur.

2.2.34. Tanım: X,Y topolojik uzaylar, $F:X\to Y$ bir çoğul-değerli fonksiyon ve $x_o \in X$ olsun.

$F(x_o) \cap C=\emptyset$ olan bir C kompakt kümesi için

$$x \in U_{x_o} \Rightarrow F(x) \cap C=\emptyset$$

gerektirmesini sağlayan en az bir $U_{x_o} \subset X$ açık kümesi varsa, F'ye $x_o \in X$ noktasında C üstten yarı sürekli veya kısaca C-ü.y.s. denir.

2.2.35. Önerme: Eğer bir $F:X\to Y$ çoğul-değerli fonksiyonu nokta kapalı C-ü.y.s. ve Y bir yerel kompakt Hausdorff uzay ise G(F) kuvvetli kapalıdır.

Kanıt: $(x,y)\notin G(F)$ yani $y\notin F(x)$ olsun. Regülerlikten en az bir V_1,V_2 $(\subset Y)$ açık kümeleri $F(x)\subset V_1$, $y\in V_2$, $V_1 \cap V_2=\emptyset$ koşullarını sağlayacak şekilde vardır. Y'nin yerel kompakt Hausdorff oluşundan, $y\in V \subset \bar{V} \subset V_2$, $\bar{V}$ kompakt olacak şekilde bir V açık kümesi vardır. $F(x)\cap V_2=\emptyset$ idi. $F(x)\cap \bar{V}=\emptyset$ yani $F(x)\subset Y-\bar{V}$ olur. F, C-ü.y.s. ve $Y-\bar{V}$ tümleyeni kompakt olan bir açık küme olduğundan öyle bir $x\in U(\subset X)$ açık kümesi vardır ki $F(U)\subset Y-\bar{V}$ yani $F(U)\cap\bar{V}=\emptyset$ dir. Sonuç olarak $(U\times\bar{V})\cap G(F)=\emptyset$ olur. F'nin grafiği kuvvetli kapalıdır.

2.2.36. Önerme: X,Y topolojik uzaylar, Y HC-uzay ve F, X'den Y'ye bir çoğul-değerli fonksiyon olsun.

1) F'nin $x_o\in X$ H-ü.y.s. olması için gerekli ve yeterli koşul tümleyeni quasi H-kapalı ve $F(x_o)\subset V$ olan her V $(\subset Y)$ açık kümesi için x_o'ı bulunduran ve $x\in U_{x_o}$ ise $F(x)\subset V$ gerektirmesini sağlayan bir U_{x_o} $(\subset X)$ açık kümesinin bulunmasıdır.

2) F'nin $x_o\in X$'de H-a.y.s. olması için gerekli ve yeterli koşul tüm-

leyeni quasi H-kapalı ve $F(x_0)\cap V\neq\emptyset$ olan her V ($\subset Y$) açık kümesi için x_0'ı bulunduran ve $x\in U_{x_0}$ ise $F(x)\cap V\neq\emptyset$ gerektirmesini sağlayan bir U_{x_0} ($\subset X$) açık kümesinin bulunmasıdır.

Kanıt: (1):($\Rightarrow$): F, x_0'da H-ü.y.s. olsun. Tümleyeni quasi H-kapalı ve $F(x_0)\subset V$ olan bir $V(\subset Y)$ açık kümesini alalım. F, x_0'da H-ü.y.s. olduğundan en az bir U_{x_0} ($\subset X$) açığı vardır; öyleki $x_0\in U_{x_0}$ ve her $x\in U_{x_0}$ için $F(x)\subset V$ dir.

($\Leftarrow$): $x_0\in X$, tümleyeni quasi H-kapalı ve $F(x_0)\subset V$ olan bir V ($\subset Y$) kümesini alalım. Y, HC-uzay olduğundan $Y-V$ quasi H-kapalı kümesi kapalıdır. O halde V açıktır. Hipotezden enaz bir U_{x_0} ($\subset X$) açık kümesi vardır ki $x_0\in U_{x_0}$ ve her $x\in U_{x_0}$ için $F(x)\subset V$ dir. Buradan F, x_0'da H-ü.y.s. dir.

2) Benzer biçimde yapılır.

2.2.37. Önerme: X,Y topolojik uzaylar Y, HC-uzay ve $F:X\to Y$ bir çoğu-değerli fonksiyon olsun.

1) F'nin H-ü.y.s. olması için gerekli ve yeterli koşul Y içinde tümleyeni quasi H-kapalı olan her açık kümenin küçük ters görüntüsünün X içinde açık olmasıdır.

2) F'nin H-a.y.s. olması için gerekli ve yeterli koşul Y içinde tümleyeni quasi H-kapalı olan her açık kümenin büyük ters görüntüsünün X içinde açık olmasıdır.

Kanıt: (1): ($\Rightarrow$): $V(\subset Y)$ tümleyeni quasi H-kapalı olan bir açık küme ve $x_0\in F^+(V)$ olsun. Bu durumda $F(x_0)\subset F(F^+(V))$ veya $F(x_0)\cap Y-V=\emptyset$ olur. $Y-V$ quasi H-kapalı ve F, x_0'da H-ü.y.s. olduğundan X içinde x_0'ı bulunduran ve $F(U_{x_0})\cap Y-V=\emptyset$ koşulunu sağlayan bir U_{x_0} ($\subset X$) açık kümesi vardır. Buradan $F(U_{x_0})\subset V$ olur. Sonuç olarak $x_0\in U_{x_0}\subset F^+(V)$ veya $x_0\in[F^+(V)]^o$

olur. O halde $F^+(V) \subset X$ açık olur.

($\Leftarrow$): Bir $x_0 \varepsilon X$ için $F(x_0) \cap V = \emptyset$ ve V quasi H-kapalı olsun. Bu durumda Y-V, $F(x_0)$'ı bulunduran ve tümleyeni quasi H-kapalı olan bir açık kümedir. Ç ünkü Y, HC-uzaydır. Hipotezden $F^+(Y-V)$, X içinde açık bir küme ve $x_0 \varepsilon F^+(Y-V)$ dir. Buradan

$$F(x_0) \subset F(F^+(Y-V)) \subset Y-V$$

dir. O halde;

$$F(F^+(Y-V)) \cap V = \emptyset$$

olur. Böylece F, x_0'da H-ü.y.s. dir. Bunu her bir $x_0 \varepsilon X$ için yapabileceğimizden F, X'de H-ü.y.s. dir.

(2):($\Rightarrow$): V, tümleyeni quasi H-kapalı olan bir açık küme ve $x_0 \varepsilon F^-(V)$ olsun. Bu durumda $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$ dır. Y-V quasi H-kapalı ve F, x_0'da H-a.y.s. olduğundan X'in x_0'ı bulunduran bir U_{x_0} ($\subset X$) açık kümesi vardır öyleki her $x \varepsilon U_{x_0}$ için $F(x) \cap V \neq \emptyset$ gerektirmesi sağlar. Böylece $x_0 \varepsilon U_{x_0} \subset F^-(V)$ yani $x_0 \varepsilon [F^-(V)]^0$ olur. O halde $F^-(V) \subset X$ açıktır.

($\Leftarrow$): Hipotez sağlansın. $V \subset Y$ tümleyeni quasi H-kapalı ve $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$ olan bir küme olsun. Y, HC-uzay olduğundan V açıktır. Hipotezden $F^-(V)$ X içinde açık ve $x_0 \varepsilon F^-(V)$ dir. Her bir $x \varepsilon F^-(V)$ için $F(x) \cap V \neq \emptyset$ olduğundan F, x_0'da H-a.y.s. dir. $x_0 \varepsilon X$ keyfi olduğundan F, X'de H-a.y.s. dir.

2.2.38. Önerme: X,Y topolojik uzaylar, Y HC-uzay ve $F: X \to Y$ bir çoğul-değerli fonksiyon olsun.

1) F'nin H-ü.y.s. olması için gerekli ve yeterli koşul Y içinde quasi H-kapalı olan her kümenin büyük ters görüntüsünün X içinde kapalı olmasıdır.

2) F'nin H-a.y.s. olması için gerekli ve yeterli koşul Y içinde quasi H-kapalı olan her kümenin küçük ters görüntüsü X içinde kapalıdır.

Kanıt: (1): ($\Rightarrow$): F, H-ü.y.s. ve $V \subset Y$ quasi H-kapalı olsun. $Y-V$ tümleyeni quasi H-kapalı olan bir açık kümedir. 2.2.37. Önerme'den $F^+(Y-V)=X-F^-(V)$ açıktır. Buradan $F^-(V) \subset X$ kapalıdır.

($\Leftarrow$): Koşul doğru olsun. V tümleyeni quasi H-kapalı olan bir küme ve $F(x_0) \subset V$ olsun. Y-V quasi H-kapalı olduğundan hipotezden $F^-(Y-V)$ X içinde kapalıdır. $F^-(Y-V)=X-F^+(V)$ eşitliğinden $F^+(V)$ açıktır. Buradan F, x_0'da H-ü.y.s. dir. $x_0 \in X$ keyfi olduğundan F, X'de H.ü.y.s. dir.

2) Benzer biçimde yapılır.

2.2.39. Önerme: Y, HC-uzay $F:X \to Y$ H-ü.y.s. (H-a.y.s.) ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda,

$F|_A: A \to Y$ kısıtlanmış fonksiyonu

H-.ü.y.s. (H-a.y.s.) dir.

Kanıt: $F:X \to Y$ H-ü.y.s. (H-a.y.s.) olsun. F'ye karşı gelen f tek-değerli fonksiyonu X'den $(2^Y,H^+)$ $[2^Y,H^-]$' ye süreklidir. X üzerinde sürekli f, fonksiyonunun $f|_A$ kısıtlanmışı A'dan $(2^Y,H^+)$ $[(2^Y,H^-)]$'ye süreklidir. Bu ise $F|_A:A \to Y$ kısıtlanmış çoğul-değerli fonksiyonunun H-ü.y.s. (H-a.y.s.) olmasını verir.

2.2.40. Önerme: X, Y, Z topolojik uzaylar Z, HC-uzay F, X'den Y'ye V-ü.y.s. ve $G:Y \to Z$ H-ü.y.s. ise bu durumda $GoF:X \to Z$ bileşke çoğul-değerli fonksiyonu H-ü.y.s. dir.

Kanıt: Z herhangi bir uzay iken yapılan ile aynıdır.

2.2.41 Örnek: $X = Y = \mathbb{R}$ ve X üzerinde adi topoloji ve Y üzerinde sayılabilir tümleyenler topolojisi bulunsun. $F:X \to Y$

$$F(x) = \begin{cases} x \ , & x < 0 \\ [0,1] \ , & x = 0 \\ x+1 \ , & x > 0 \end{cases}$$

F, C-ü.y.s.'dir. Ancak H-ü.y.s. değildir.

Kanıt: Sayılabilir tümleyenler topolojisine göre kompakt kümeler sadece sonlu kümelerdir. Bu nedenle, $x_0 < 0$ ve $F(x_0) \cap C = \emptyset$ olan bir $C(\subset Y)$ kompakt kümesi için C sonlu olduğundan $C = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ yazılabilir. $F(x_0)$ noktasına en yakın olan y_i'yi y_{i_0} ile gösterirsek;

$$\varepsilon = \frac{|F(x_0) - y_{i_0}|}{10} > 0$$

alırsak $x \varepsilon (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \Rightarrow F(x) \cap C = \emptyset$ olur.

$x_0 > 0$ için F'nin C-ü.y.s. oluşu benzer düşünceyle gösterilir.

$x_0 = 0$ iken $F(0) = [0,1] \cap C = \emptyset$ olan bir $C(\subset Y)$ kompakt kümesini alalım C içinde $[0,1]$ kümesine en yakın nokta y_{i_0} ise y_{i_0} ile $[0,1]$ arasındaki uzaklığın onda birine dersek $x \varepsilon (-\varepsilon, \varepsilon) \Rightarrow F(x) \cap C = \emptyset$ tur.

Sonuç olarak F, C-ü.y.s.'dir. Ancak $(-\infty, 0) \subset Y$ bir quasi H-kapalı kümedir. Ve $F(0) \cap (-\infty, 0) = \emptyset$ tur. 0'ın hangi U_0 komşuluğunu alırsak alalım, bu komşuluk içindeki x 0 olan noktalar için

$$x \varepsilon U_0 \Rightarrow F(x) \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset$$

tur. Bu da bize F'nin x=0 noktasında H üstten yarı sürekli olmadığını gösterir.

Böylece C-ü.y.s. olan fakat, H-ü.y.s. olmayan bir çoğul-değerli fonksiyon örneği vermiş olduk.

3. BÖLÜM: ÇOĞUL-DEĞERLİ FONKSİYONLARIN H-ALMOST SÜREKLİLİKLERİ

Bu bölümde çoğul-değerli fonksiyonların a-H-a.y.s. (a-H-ü.y.s.) olması için denk koşullar verildi. Tek-değerli fonksiyonlarla ilişkileri incelendi. a-H-a.y.s. (a-H-ü.y.s.) çoğul-değerli fonksiyonlar ile H-ay.s. (H-ü.y.s.) çoğul-değerli fonksiyonlar arasındaki ilişkiler incelendi. Son olarakta a-H-ü.y.s., H-ü.y.s. ve kapalı grafiklilik arasındaki gerektirmeler tartışıldı.

3.1. Çoğul Değerli Fonksiyonların Almost H-Üstten Yarı Süreklilikleri (a-H-ü.y.s.):

Bu kesimde, Çoğul-değerli fonksiyonların a-H-ü.y.s. olmasına denk koşullar verildi.

3.1.1. Tanım: $F:X \to Y$ çoğul-değerli fonksiyon $F(x_o) \cap H = \emptyset$ olan her H, quasi H-kapalı kümesi için $x \in U_{x_o} \Rightarrow F(x) \cap \overset{o}{\bar{H}} = \emptyset$ gerektirmesini sağlayan bir $U_{x_o} \subset X$ kümesi varsa F'ye almost H-ü.y.s. denir. Kısaca a-H-ü.y.s. ile gösterilir.

3.1.2. Önerme: $F:X \to Y$ çoğul-değerli fonksiyonu x_o'da a-H-ü.y.s. olması için gerekli ve yeterli koşul $f:X \to (2^Y, H^+)$ tek-değerli fonksiyonu almost süreklidir.

Kanıt: ($\Rightarrow$): $F:X \to Y$ çoğul-değerli fonksiyonu x_o'da a-H-ü.y.s. olsun. $f(x_o) \in 2^Y - (H) = \langle Y-H \rangle \in \beta_1$ alalım. Bu durumda $F(x_o) \subset Y-H$ tır. $F(x_o) \cap H = \emptyset$ olur. F, a-H-ü.y.s. idi x_o'ın öyle bir U_{x_o} açık komşuluğu vardır ki $x \in U_{x_o} \Rightarrow F(x) \cap \overset{o}{\bar{H}} = \emptyset$ gerektirmesi sağlanır. Buradan

$$x \in U_{x_o} \Rightarrow F(x) \cap \overset{o}{\bar{H}} = \emptyset$$
$$\Leftrightarrow F(x) \subset Y - \overset{o}{\bar{H}}$$

$$\Rightarrow F(x)=f(x)\varepsilon\langle \overset{o}{\overline{Y-H}}\rangle$$
$$\Rightarrow f(x)\varepsilon \overset{o}{\overline{2^Y-(H)}}$$

dır.

$(\Leftarrow)$: $f:X\to(2^Y,H^+)$ almost sürekli ve H, $F(x_o)\cap H=\emptyset$ olan bir quasi H-kapalı küme olsun. Buradan $F(x_o)\subset Y-H$ tır. $f(x_o)=F(x_o)\varepsilon\langle Y-H\rangle=\overset{o}{\overline{}}$ $2^Y-(H)\varepsilon H^+$ olur. f, x_o'da a-H.ü.y.s. olduğundan $x\varepsilon U_{x_o}\Rightarrow f(x)\varepsilon\overline{2^Y-(H)}$ olan x_o'ın bir U_{x_o} açık komşuluğu vardır. Denk olarak,

$$x\varepsilon U_{x_o}\Rightarrow F(x)\ \langle\overset{o}{\overline{Y-H}}\rangle=\langle Y-\overline{\overset{o}{H}}\rangle$$
$$\Rightarrow F(x)\subset Y-\overline{\overset{o}{H}}$$
$$\Rightarrow F(x)\cap\overline{\overset{o}{H}}=\emptyset$$

olur. Sonuç olarak F, x_o'da a-H.ü.y.s. dir.

3.1.3. Önerme: Y, HC-uzay $F:X\to Y$ çoğul-değerli bir fonksiyon olsun. F, x_o'da a-H-ü.y.s. olması için gerekli ve yeterli koşul tümleyeni qasi H-kapalı olan ve $F(x_o)\subset V$ koşulunu sağlayan her açık küme için $x\varepsilon U_{x_o}\Rightarrow F(x)\subset\overset{o}{\overline{V}}$ gerektirmesini sağlayan x_o'ın bir U_{x_o} açık komşuluğunun var olmasıdır.

Kanıt: $(\Rightarrow)$: F, x_o'da a-H-ü.y.s. olsun. V, tümleyeni quasi H-kapalı küme ve $F(x_o)\subset V$ olan bir açık küme olsun. Bu durumda $F(x_o)\cap Y-V=\emptyset$ ve Y-V quasi H-kapalı küme ve F, x_o'da a-H-ü.y.s. olduğundan

$$x\varepsilon U_{x_o}\Rightarrow F(x)\cap(\overline{Y\overset{o}{-}V})=\emptyset$$

gerektirmesini sağlayan x_o'ın en az bir U_{x_o} açık komşuluğu vardır. Denk olarak;

$$x\varepsilon U_{x_o}\Rightarrow F(x)\cap Y-\overset{o}{\overline{V}}=\emptyset\quad\text{veya}$$
$$x\varepsilon U_{x_o}\Rightarrow F(x)\subset\overset{o}{\overline{V}}$$

olur.

($\Leftarrow$): Tümleyeni quasi H-kapalı küme ve $F(x_0)\subset V$ olan her V açık kümesi için x_0'ın,

$$x\varepsilon U_{x_0} \Longrightarrow F(x)\subset \overset{o}{\overline{V}}$$

gerektirmesini sağlayan bir U_{x_0} açık komşuluğu var olsun. H bir quasi H-kapalı küme olmak üzere $F(x_0)\cap H=\emptyset$ olsun. Bu durumda Y-H tümleyeni quasi H-kapalı olan bir açık kümedir. Hipotez gereği x_0'ın

$$x\varepsilon U_{x_0} \Longrightarrow F(x)\subset \overset{o}{\overline{Y-H}}$$

gerektirmesini sağlayan bir U_{x_0} açık komşuluğu vardır. Denk olarak,

$$x\varepsilon U_{x_0} \Longrightarrow F(x)\subset Y-\overset{\overline{o}}{H}$$

veya $$x\varepsilon U_{x_0} \Longrightarrow F(x)\cap \overset{\overline{o}}{H}=\emptyset$$

olur. Sonuç olarak F, x_0'da a-H-ü.y.s. dir.

3.1.4. Teorem: X, herhangi bir topolojik uzay Y, HC-uzay ve $F:X\to Y$ bir çoğul-değerli fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdirler.

1) F, x_0'da a-H-ü.y.s. dir,

2) $F(x_0)\subset V$ olan, tümleyeni quasi H-kapalı olan her V açık kümesi için $x_0\varepsilon[F^+(\overset{o}{\overline{V}})]^o$ dir.

3) $F(x_0)\subset V$ ve tümleyeni quasi H-kapalı olan regüler açık her V kümesi için $x_0\varepsilon[F^+(V)]^o$ dir.

4) $F(x_0)\subset V$ ve tümleyeni quasi H-kapalı olan, regüler açık her V kümesi için x_0'ın $x\varepsilon U_{x_0} \Longrightarrow F(x)\subset V$ gerektirmesini sağlayan açık bir U_{x_0} komşuluğu vardır.

5) x_0'a yakınsayan her $(a_\lambda)_{\lambda\varepsilon\Delta}$ ağı ve $F(x_0)\subset V$ olup tümleyeni quasi H-kapalı olan regüler açık her V kümesi için en az bir $\lambda_0\varepsilon\Delta$ vardır; öyleki $\forall\lambda\geq\lambda_0$ için $F(a_\lambda)\subset V$ olur.

Kanıt: (1) $\Longrightarrow$ (2): F, x_0'da a-H-ü.y.s. olsun. $F(x_0)\subset V$ ve tümleyeni quasi H-kapalı olan bir V açık kümesi alalım. 3.1.3. Önermeden x_0'ın

$$x\varepsilon U_{x_o} \Rightarrow F(x)\subset \overset{o}{\bar{V}}$$

gerektirmesini sağlayan açık bir U_{x_o} komşuluğu vardır. F^+'nın tanımından $x\varepsilon U_{x_o} \Rightarrow x\varepsilon F^+(\overset{o}{\bar{V}})$ dir. Buradan $x\varepsilon[F^+(\overset{o}{\bar{V}})]^o$ olur.

(2) $\Rightarrow$(3): V, $F(x_o)\subset V$ ve tümleyeni quasi H-kapalı olan bir regüler açık küme olsun. $V=\overset{o}{\bar{V}}$ olduğundan bunu (2)'de yerine yazarsak,

$$x_o\varepsilon[F^+(V)]^o=[F^+(\overset{o}{\bar{V}})]^o$$

olur.

(3) $\Rightarrow$(4): V, $F(x_o)\subset V$ ve tümleyeni quasi H-kapalı olan regüler açık bir küme olsun. (3)'den $x_o\varepsilon[F^+(V)]^o$ dir. $U_{x_o}=[F^+(V)]^o$ dersek

$$x\varepsilon U_{x_o} \Rightarrow x\varepsilon F^+(V) \text{ olur. Buradan,}$$

$$x\varepsilon U_{x_o} \Rightarrow F(x)\subset V$$

olur.

(4) $\Rightarrow$(1): V, $F(x_o)\subset V$ ve tümleyeni quasi H-kapalı olan bir açık küme olsun. $V\subset\overset{o}{\bar{V}}$ ve $Y-\overset{o}{\bar{V}}$ quasi H-kapalıdır. Çünkü $Y-\overset{o}{\bar{V}}=\overline{Y\overset{o}{-}V}$ regüler kapalı bir alt kümedir, (Y-V) quasi H-kapalı olduğundan da $\overline{Y\overset{o}{-}V}$ quasi H-kapalıdır. O halde $\overset{o}{\bar{V}}$ tümleyeni quasi H-kapalı olan bir regüler açık kümedir. (4)'den x_o'ın

$$x\varepsilon U_{x_o} \Rightarrow F(x)\subset \overset{o}{\bar{V}}$$

gerektirmesini sağlayan bir U_{x_o} açık komşuluğu vardır. Sonuç olarak F, x_o'da a-H-ü.y.s. olur.

(4) $\Rightarrow$ (5): $(a_\lambda)_{\lambda\varepsilon\Delta}\subset X$, x_o'a yakınsayan bir ağ olsun. V, $F(x_o)\subset V$ ve tümleyeni quasi H-kapalı olan bir regüler açık küme olsun. (4)'den x_o'ın

$$x\varepsilon U_{x_o} \Rightarrow F(x)\subset V$$

gerektirmesini sağlayan bir U_{x_o} açık komşuluğu vardır. (3 $\Leftrightarrow$ 4) olduğundan bu $U_{x_o}=[F^+(V)]^o$ alınabilir. Diğer yandan $a_\lambda\to x_o\varepsilon U_{x_o}$ olduğundan en az bir $\lambda_o\varepsilon\Delta$ vardır; öyleki

$$\lambda \geq \lambda_0 \Longrightarrow a_\lambda \varepsilon [F^+(V)]^o \subset F^+(V)$$
$$\Longrightarrow F(a_\lambda) \subset V$$

olur. Sonuç olarak $\lambda \geq \lambda_0 \Longrightarrow F(a_\lambda) \subset V$ elde edeceğiz.

(5) $\Longrightarrow$ (4): Kabul edelimki hipotez doğru fakat (4) doğru olmasın. Böylece tümleyeni quasi H-kapalı olan öyle bir G regüler açık kümesi vardır ki x_0'ı bulunduran her $U \subset X$ açık kümesinde öyle bir $a_U \varepsilon U$ noktası vardır ki $F(a_U) \not\subset G$ olur.

$$\mathcal{U}_{x_0} = \{U \subset X | x_0 \varepsilon U \wedge U \text{ Açık}\} \quad \text{ve}$$
$$D = \{(a_U, U) | \ U \varepsilon \mathcal{U}_{x_0} \wedge F(a_U) \not\subset V\}$$

kümelerini tanımlayalım ve D'yi şöyle yönlendirelim:

$$(a_U, U) \leq (a_U{}', U') \Longleftrightarrow U' \subset U.$$

Bu yönlendirme ile D yönlü kümedir.

$$\Phi : (D, \leq) \to X, \quad \Phi[(a_U, U)] = a_U$$

X üzerinde x_0'a yakınsayan bir ağdır. Ancak $\forall U \varepsilon \mathcal{U}_{x_0}$ için $F(a_U) \not\subset V$ olduğundan bu hipotezle çelişir. Böylece (4) doğru olur.

3.1.5. Teorem: X herhangi bir topolojik uzay Y, HC-uzay ve $F: X \to Y$ çoğul-değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdirler.

1) F, a-H-ü.y.s. dir.

2) Tümleyeni quasi H-kapalı olan her $V \subset Y$ açık kümesi için $F^+(V) \subset [F^+(\overset{o}{\bar{V}})]^o$ dir.

3) Tümleyeni quasi H-kapalı olan her $V \subset Y$ regüler açık kümesi için $F^+(V)$ açıktır.

4) Tümleyeni quasi H-kapalı her $V \subset Y$ açık kümesi için $F^+(\overset{o}{\bar{V}})$ açıktır.

5) Y'nin her quasi H-kapalı H, alt kümesi için

$$\overline{[F^-(\overline{\overset{o}{H}})]} \subset F^-(H) \qquad \text{dır.}$$

6) Y'nin her quasi H-kapalı ve regüler kapalı H alt kümesi için $F^{-}(H)$ kapalıdır.

Kanıt: (1)$\Longrightarrow$(2): $V\subset Y$ tümleyeni quasi H-kapalı olan bir açık küme olsun. $x\in F^{+}(V)$ alalım. Bu durumda $F(x)\subset V$ dir. Bir önceki teoremden $x\in[F^{+}(\overset{o}{\bar{V}})]^{o}$ olur. Böylece $F^{+}(V)\subset[F^{+}(\overset{o}{\bar{V}})]^{o}$ olur.

(2) $\Longrightarrow$ (3): $V\subset Y$ tümleyeni quasi H-kapalı olan bir regüler açık küme olsun. $V=\overset{o}{\bar{V}}$ dir. (2)'den

$$F^{+}(V)\subset[F^{+}(\overset{o}{\bar{V}})]^{o}=[F^{+}(V)]^{o}$$

olur. $[F^{+}(V)]^{o}\subset F^{+}(V)$ her zaman vardır. Sonuç olarak,

$$F^{+}(V)=[F^{+}(V)]^{o}$$

olur. Ve $F^{+}(V)\subset X$ açıktır.

(3) $\Longrightarrow$ (4): $V\subset Y$ tümleyeni quasi H-kapalı olan bir küme ise $\overset{o}{\bar{V}}$ kümesi tümleyeni quasi H-kapalı olan regüler açık bir kümedir. (3)'den $F^{+}(\overset{o}{\bar{V}})$ açıktır.

(4) $\Longrightarrow$ (1): $V\subset Y$ tümleyeni quasi H-kapalı olan her $V\subset Y$ açık kümesi için $F^{+}(\overset{o}{\bar{V}})\subset X$ açık olsun. $x_0\in X$ herhangi bir nokta, V, $F(x_0)\subset V$ ve $Y-V$ quasi H-kapalı olan bir küme olsun. (4)'den $x_0\in F^{+}(V)$ açıktır. $U_{x_0}=F^{+}(\overset{o}{\bar{V}})$ denirse,

$$x\in U_{x_0}\Longrightarrow x\in F^{+}(\overset{o}{\bar{V}}) \text{ veya}$$

$$x\in U_{x_0}\Longrightarrow F(x)\subset\overset{o}{\bar{V}}$$

olur. Sonuç olarak F, x_0'da a-H-ü.y.s. olur. $x_0\in X$ keyfi olduğundan F, X üzerinde a-H-ü.y.s. olur.

(2) $\Longrightarrow$ (5): $H\subset Y$ quasi H-kapalı bir küme olsun. $Y-H$ tümleyeni quasi H-kapalı olan bir kümedir. (2)'den

$$F^{+}(Y-H)\subset[F^{+}(\overset{o}{\overline{Y-H}})]^{o}$$

dır. $X-F^{-}(H)\subset X-[F^{-}(\overline{\overset{o}{H}})]$ ve

$$[F^{-}(\overline{\overset{o}{H}})]\subset F^{-}(H)$$

olur.

(5) $\Longrightarrow$ (6): H regüler kapalı quasi H-kapalı bir küme olsun. (5)'den

$$[F^{-}(\overline{\overset{o}{H}})]\subset F^{-}(H) \quad \text{tır.}$$

$H=\overset{o}{H}$ olduğundan $\overline{[F^-(\overset{o}{\bar{H}})]}=\overline{[F^-(H)]}$ ve $\overline{[F^-(H)]}\subset F^-(H)$ olur. Her zaman $F^-(H)\subset\overline{[F^-(H)]}$ olduğundan $F^-(H)$, X içinde kapalı bir küme olur.

(6) $\Rightarrow$ (3): $V\subset Y$ tümleyeni quasi H-kapalı olan bir regüler açık küme olsun. $Y-V$ quasi H-kapalı, regüler kapalı bir kümedir (6)'dan $F^-(Y-V)$ X içinde kapalıdır.

$$F^-(Y-V)=X-F^+(V)$$

olduğundan $F^+(V)$, X içinde açıktır.

3.1.6. Teorem: X bir topolojik uzay, Y quasi H-kapalı uzay ve $F:X\to Y$ bir çoğul-değerli fonksiyon ise aşağıdakiler eşdeğerdir.

1) F, x_o'da a-H-ü.y.s. dir.

2) $F(x_o)\subset V$ olan her açık küme için $x_o\varepsilon[F^+(\overset{o}{\bar{V}})]^o$ dir.

3) $F(x_o)\subset V$ olan her regüler açık küme için $x_o\varepsilon[F^+(V)]^o$ dir.

4) $F(x_o)\subset V$ olan her açık küme için

$$x\varepsilon U_{x_o} \Rightarrow F(x)\subset V$$

gerektirmesini sağlayan açık bir U_{x_o} komşuluğu vardır.

5) x_o'a yakınsayan her $(a_\lambda)_{\lambda\varepsilon\Delta}\subset X$ ağı ve $F(x_o)\subset V$ olan her regüler açık V kümesi için $\exists\lambda_o\varepsilon\Delta$ vardır; öyleki,

$$\lambda\geq\lambda_o \Rightarrow F(a_\lambda)\subset V$$

olur.

Kanıt: (1) $\Rightarrow$ (2): F, x_o'da a-H-ü.y.s. olsun. $V\subset Y$ açık bir küme ve $F(x_o)\subset V$ olsun. $F(x_o)\subset V\subset\overset{o}{\bar{V}}$ dir ve $Y-\overset{o}{\bar{V}}=\overline{Y-\overset{o}{V}}$ kümesi quasi H-kapalı kümedir. $\overset{o}{\bar{V}}$ açık ve tümleyeni quasi H-kapalı kümedir. F, a-H-ü.y.s. olduğundan x_o'ın

$$x\varepsilon U_{x_o} \Rightarrow F(x)\subset\overset{o}{\overline{\overset{o}{\bar{V}}}}=\overset{o}{\bar{V}}$$

gerektirmesini sağlayan bir açık komşuluğu vardır. Buradan,

$x_o\varepsilon U_{x_o}\subset F^+(\overset{o}{\bar{V}})$ dır. Sonuç olarak $x_o\varepsilon[F^+(\overset{o}{\bar{V}})]^o$ olur.

(2) $\Rightarrow$ (3): $V \subset Y$, $F(x_0) \subset V$ koşulunu sağlayan regüler açık bir küme olsun. $V = \overset{o}{V}$ olduğundan $V \subset Y$ açıktır. Böylece,

$$x \varepsilon [F^+(V)]^o = [F^+(\overset{o}{V})]^o \quad \text{olur.}$$

(3) $\Rightarrow$ (4): V, $F(x_0) \subset V$ olan bir regüler açık küme olsun. (3)'den $x_0 \varepsilon [F^+(V)]^o$'dir. $U_{x_0} = [F^+(V)]^o$ dersek

$$x \varepsilon U_{x_0} \Rightarrow F(x) \subset V$$

olur.

(4) $\Rightarrow$ (1): V, $F(x_0) \subset V$ koşulunu sağlayan bir açık küme olsun. $V \subset \overset{o}{\bar{V}}$ ve $Y - \overset{o}{\bar{V}}$ quasi H-kapalı olduğundan $\overset{o}{\bar{V}}$ tümleyeni quasi H-kapalı olan bir regüler açık kümedir. (4)'den x_0'ın

$$x \varepsilon U_{x_0} \Rightarrow F(x) \subset \overset{o}{\bar{V}}$$

gerektirmesini sağlayan bir U_{x_0} açık komşuluğu vardır. O halde F, x_0'da a-H-ü.y.s. dir.

(4) $\Rightarrow$ (5): $a_\lambda \to x_0$ olan bir $(a_\lambda)_{\lambda \varepsilon \Delta}$ ağı verilsin. V, $F(x_0) \subset V$ olan bir regüler açık küme olsun. (4)'den x_0'ın

$$x \varepsilon U_{x_0} \Rightarrow F(x) \subset V$$

gerektirmesini sağlayan bir U_{x_0} açık komşuluğu vardır (3) $\Leftrightarrow$ (4) olduğundan $U_{x_0} = [F^+(V)]^o$ alınabilir. Diğer taraftan $a_\lambda \to x_0 \varepsilon U_{x_0}$ olduğundan $\exists \lambda_0 \varepsilon \Delta$ vardır; öyleki

$$\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow a_\lambda \varepsilon\, U_{x_0} = [F^+(V)]^o \subset F^+(V)$$
$$\Rightarrow F(a_\lambda) \subset V$$

olur. Buradan,

$$\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow F(a_\lambda) \subset V$$

elde edilir.

(5) $\Rightarrow$ (4): Kabul edelimki hipotez doğru fakat (4) doğru olmasın. Böylece öyle bir regüler açık G kümesi vardırki x_0'ı bulunduran her $U \subset X$

açık kümesi için U içinde öyle bir a_U noktası vardır ki $F(a_U) \not\subset G$ dir.

$\mathcal{U}_{x_0} = \{U \subset X \mid x_0 \in U \wedge U\text{-açık}\}$ ve

$D = \{(a_U, U) \mid U \in \mathcal{U}_{x_0} \wedge F(a_U) \not\subset V\}$

kümelerini tanımlayalım. D'yi şöyle yönlendirelim.

$(a_U, U) \leq (a_{U'}, U') \Longleftrightarrow U' \subset U$

dir. Bu yönlendirme ile D yönlü kümedir.

$\Phi : (D, \leq) \to X, \Phi[(a_U, U)] = a_U$

X üzerinde x_0'a yakınsayan bir ağdır. Fakat $\forall U \in \mathcal{U}_{x_0}$ için

$F(a_U) \not\subset V$

dir. Bu ise hipotez ile çelişir. Böylece (4) doğru olur.

3.1.7. Teorem: X, herhangi bir topolojik uzay Y, HC-uzay ve quasi H-kapalı olsun. $F : X \to Y$ çoğul-değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir:

1) F, a-H-ü.y.s. dir.

2) Her $V \subset Y$ açık kümesi için $F^+(V) \subset [F^+(\overset{o}{\overline{V}})]^{o}$ dir.

3) Her $V \subset Y$ regüler açık kümesi için $F^+(V)$ açıktır.

4) Her $V \subset Y$ açık kümesi için $F^+(\overset{o}{\overline{V}})$ açıktır.

5) $V \subset Y$ kapalı ise

$\overline{[F^-(\overline{\overset{o}{V}})]} \subset F^-(V)$

dir.

6) Y'nin regüler kapalı her V alt kümesi için $F^-(H)$ kapalıdır.

3.1.8. Teorem: X, herhangi bir topolojik uzay Y, HC-uzay ve quasi H-kapalı olsun. $F : X \to Y$ çoğul-değerli fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir.

1) F, a-H-ü.y.s. dir.

2) Her $V \subset Y$ açık kümesi için $F^+(V) \subset [F^+(\overset{o}{\overline{V}})]^{o}$ dir.

3) Her $V \subset Y$ regüler açık kümesi için $F^{+}(V) \subset X$ açıktır.

4) $F(x_0) \subset V$ olan her $V \subset Y$ açık kümesi için x_0'ın

$$x \in U_{x_0} \Rightarrow F(x) \subset \overset{o}{\bar{V}}$$

gerektirmesini sağlayan bir U_{x_0} açık komşuluğu vardır.

5) x_0'a yakınsayan her $(a_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ ağı ve $F(x_0) \subset V$ olan her regüler açık V kümesi için $\exists \lambda_0 \in \Delta$ vardır, öyleki $\forall \lambda \geq \lambda_0$ için $F(a_\lambda) \subset V$ olur.

3.2. Çoğul-Değerli Fonksiyonların Almost H-Alttan Yarı Süreklilikleri (a-H-ü.y.s.):

Bu kesimde çoğul-değerli fonksiyonların almost H-a.y.s. olmasına denk koşullar verildi.

3.2.1. Tanım: $F:X \to Y$ çoğul-değerli fonksiyon $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$ olan her tümleyeni quasi H-kapalı olan V, kümesi için

$$x \in U_{x_0} \Rightarrow F(x) \cap \overset{o}{\bar{V}} \neq \emptyset$$

gerektirmesini sağlayan bir $U_{x_0} \subset X$ açık kümesi varsa F'ye almost H-alttan yarı süreklidir denir. Kısaca a-H-a.y.s. ile gösterilir.

3.2.2. Teorem: X, herhangi bir topolojik uzay, Y, HC-uzay ve $F:X \to Y$ bir çoğul-değerli fonksiyon olsun. Aşağıdakiler eşdeğerdir.

1) F, a-H-a.y.s. dir.

2) Tümleyeni quasi H-kapalı her $V \subset Y$ açık kümesi için

$$F^{-}(V) \subset [F^{-}(\overset{o}{\bar{V}})]^{o}$$

dir.

3) Tümleyeni quasi H-kapalı her $V \subset Y$ regüler açık kümesi için $F^{-}(V) \subset X$ açıktır.

4) Tümleyeni quasi H-kapalı her $V \subset Y$ açık kümesi için $F^{-}(\overset{o}{\bar{V}}) \subset X$ açıktır.

5) $H \subset Y$ quasi H-kapalı küme ise $\overline{[F^{+}(\overline{\overset{o}{H}})]} \subset F^{+}(H)$ olur.

6) H, quasi H-kapalı, regüler kapalı küme ise $F^+(H)\subset X$ kapalıdır.

Kanıt: (1) $\Rightarrow$ (2): $V\subset Y$ tümleyeni quasi H-kapalı olan açık bir küme olsun. $x\varepsilon F^-(V)$ alalım. Bu durumda $F(x)\cap V\neq\emptyset$ dır. Bir önceki önermenin (1) $\Rightarrow$ (2) gerektirmesinden $x\varepsilon[F^-(\overset{o}{\overline{V}})]^o$ dir. Böylece

$$F^-(V)\subset[F^-(\overset{o}{\overline{V}})]^o$$

olur.

(2) $\Rightarrow$ (3): $V\subset Y$ tümleyeni quasi H-kapalı olan bir regüler açık küme olsun. $V=\overset{o}{\overline{V}}$ dir. Böylece (2)'den $F^-(V)\subset[F^-(\overset{o}{\overline{V}})]^o=[F^-(V)]^o$ olur. $[F^-(V)]^o\subset F^-(V)$ her zaman doğru olduğundan $F^-(V)=[F^-(V)]^o$ olur ki $F^-(V)\subset X$ açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (4): V, tümleyeni quasi H-kapalı olan bir açık küme olsun. Bu durumda $V\subset\overset{o}{\overline{V}}$ ve $\overset{o}{\overline{V}}$ regüler açık ve tümleyeni quasi H-kapalı bir kümedir. (3)'den $F^-(\overset{o}{\overline{V}})\subset X$ açıktır.

(4) $\Rightarrow$ (1): $V\subset Y$ tümleyeni quasi H-kapalı olan bir açık küme ve $x_o\varepsilon X$ için $F(x_o)\cap V\neq\emptyset$ olsun. Bu durumda $V\subset\overset{o}{\overline{V}}$ ve $\overset{o}{\overline{V}}$, tümleyeni quasi H-kapalı olan regüler açık bir kümedir. (4)'den $F^-(\overset{o}{\overline{V}})\subset X$ açıktır. Ve $x_o\varepsilon F^-(\overset{o}{\overline{V}})$ olur. $U_{x_o}=F^-(\overset{o}{\overline{V}})$ dersek $x\varepsilon U_{x_o}\Rightarrow F(x)\cap\overset{o}{\overline{V}}\neq\emptyset$ olur ki F,x_o'da a-H-a.y.s. dir. $x_o\varepsilon X$ keyfi olduğundan F, X üzerinde a-H-a.y.s. dir.

(2) $\Rightarrow$ (5): $H\subset Y$ quasi H-kapalı küme olsun. Bu durumda Y, HC-uzay olduğundan Y-H tümleyeni quasi H-kapalı olan açık bir açık kümedir. (2)'den

$$F^-(Y-H)\subset[F^-(\overset{o}{\overline{Y-H}})]^o$$

dir. Buradan,

$$F^-(Y-H)=X-F^+(H) \quad \text{ve}$$

$$[F^-(\overset{o}{\overline{Y-H}})]^o=[F^-(Y-\overline{\overset{o}{H}})]^o=[X-F^+(\overline{\overset{o}{H}})]^o=X-\overline{[F^+(\overline{\overset{o}{H}})]}$$

olduğundan $X-F^+(H)\subset X-\overline{[F^+(\overline{\overset{o}{H}})]}$ olur. Sonuç olarak,

$$\overline{[F^+(\bar{\overset{o}{H}})]} \subset F^+(H)$$

olur.

(5) $\Rightarrow$ (6): H, regüler kapalı quasi H-kapalı küme olsun. Bu durumda $H=\bar{\overset{o}{H}}$ dır. (5)'den

$$\overline{[F^+(\bar{\overset{o}{H}})]} = \overline{[F^+(H)]} \subset F^+(H)$$

olur. Her $H\subset Y$ için $F^+(H) \subset \overline{[F^+(H)]}$ her zaman var olduğundan,

$$F^+(H) = \overline{[F^+(H)]} \quad \text{yani} \quad F^+(H) \ \text{kapalı olur.}$$

(6) $\Rightarrow$ (3): $V\subset Y$ tümleyeni quasi H-kapalı regüler açık bir küme olsun. $Y-V$ quasi H-kapalı ve regüler kapalıdır. (6)'dan,

$$F^+(Y-V) = X-F^-(V)$$

kapalıdır. Sonuç olarak $F^-(V)\subset X$ açıktır.

3.2.3. Teorem: X, herhangi bir topolojik uzay, Y, quasi H-kapalı, HC-uzay ve $F:X \to Y$ bir çoğul-değerli fonksiyon olsun. Aşağıdakiler eşdeğerdirler.

1) F, a-H-a.y.s. dir.

2) Her $V\subset Y$ açık kümesi için $F^-(V)\subset X$ açıktır.

3) Her $V\subset Y$ regüler açık kümesi için $F^-(V)\subset X$ açıktır.

4) Her tümleyeni quasi H-kapalı olan $V\subset Y$ kümesi için $F^-(\overset{o}{\bar{V}})\subset X$ açıktır.

5) Her kapalı $H\subset Y$ kümesi için $\overline{[F^+(\bar{\overset{o}{H}})]} \subset [F^+(H)]$ dır.

6) Her $H\subset Y$ regüler kapalı kümesi için $F^+(H)\subset X$ kapalıdır.

3.2.4. Teorem: $F:X \to Y$ çoğul-değerli fonksiyonu $x_o\varepsilon X$'de a-H-a.y.s. olması için gerekli ve yeterli koşul $f:X \to (2^Y, H^-)$ tek-değerli fonksiyonunun almost sürekli olmasıdır.

Kanıt: ($\Rightarrow$) $F:X \to Y$ çoğul-değerli fonksiyonu x_o'da a-H-a.y.s. olsun. $x_o\varepsilon X$ için $f(x_o)\varepsilon 2^Y-\langle H\rangle \varepsilon \beta_2$ alalım. $2^Y\langle H\rangle=(Y-H)$ ve $F(x_o)=f(x_o)$

olduğundan $F(x_o)\varepsilon(Y-H)'$ dır. Buradan $F(x_o)\cap Y-H\neq\emptyset$ ve $Y-(Y-H)=H$ quasi H-kapalı küme olur. F, x_o'da a-H-a.y.s. olduğundan x_o'ın

$$x\varepsilon U_{x_o} \Rightarrow F(x)\cap \overset{o}{\overline{Y-H}} \neq\emptyset$$

gerektirmesini sağlayan açık bir U_{x_o} komşuluğu vardır.

$$\overset{o}{(\overline{Y-H})} = (Y-\overset{o}{\bar{H}}) = 2^Y-<\overset{o}{\bar{H}}>$$

ve $f(x)=F(x)\varepsilon 2^Y-<\overset{o}{\bar{H}}>_o$ ve $<\overset{o}{\bar{H}}> = <\overset{o}{\bar{H}}>$ olduğundan

$$x\varepsilon U_{x_o} \Rightarrow f(x)\varepsilon \overline{2^Y-<H>}$$

olur. O halde f, x_o'da almost süreklidir.

($\Leftarrow$): Tersine, $f:X\to(2^Y,H^-)$ tek-değerli fonksiyonu x_o'da almost sürekli, $F(x_o)\cap V\neq\emptyset$ ve $Y-V$ quasi H-kapalı küme olsun. Buradan $f(x_o)=F(x_o)\varepsilon(V)=2^Y-<Y-V>\varepsilon\beta_2$ olur. f, x_o'da almost sürekli olduğundan x_o'ın

$$x\varepsilon U_{x_o} \Rightarrow f(x)\varepsilon \overset{o}{\overline{2^Y-<Y-V>}}=\overset{o}{(V)}\subset(\overset{o}{\bar{V}})$$

gerektirmesini sağlayan açık bir U_{x_o} komşuluğu vardır. Buradan

$$x\varepsilon U_{x_o} \Rightarrow f(x)=F(x)\varepsilon(\overset{o}{\bar{V}})$$
$$\Rightarrow F(x)\cap\overset{o}{\bar{V}}\neq\emptyset$$

olur. F, x_o'da a-H-a.y.s. dir.

3.2.5. Teorem: X, herhangi bir topolojik uzay, Y, HC-uzay, $F:X\to Y$ çoğul-değerli fonksiyon ve $x_o\varepsilon X$ olsun.

F, x_o'da a-H-a.y.s. olması için gerekli ve yeterli koşul tümleyeni quasi H-kapalı ve $F(x_o)\cap V\neq\emptyset$ olan her V açık kümesi için x_o'ın

$$x\varepsilon U_{x_o} \Rightarrow F(x)\cap V\neq\emptyset$$

gerektirmesini sağlayan bir U_{x_o} açık komşuluğunun var olmasıdır.

Kanıt: Açıktır.

3.2.6. Teorem: X, herhangi bir topolojik uzay Y, HC-uzay ve $F:X\to Y$ bir çoğul-değerli fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir.

1) F, x_0'da a-H-a.y.s. dir.

2) $F(x_0)\cap V\neq\emptyset$ olan tümleyeni quasi H-kapalı her V açık kümesi için $x_0\varepsilon[F^-(\overset{o}{V})]^o$ dir.

3) $F(x_0)\cap V\neq\emptyset$ olan, tümleyeni quasi H-kapalı olan her V regüler açık kümesi için $x_0\varepsilon[F^-(V)]^o$ dir.

4) $F)x_0)\cap V\neq\emptyset$ olan, tümleyeni quasi H-kapalı olan her V regüler açık küme için x_0'ın,

$$x\varepsilon U_{x_0} \Rightarrow F(x)\cap V\neq\emptyset$$

gerektirmesini sağlayan bir U_{x_0} açık komşuluğu vardır.

5) X, içinde x_0'a yakınsak olan her $(a_\lambda)_{\lambda\varepsilon\Delta}$ ağı ve $F(x_0)\cap V\neq\emptyset$ olan tümleyeni quasi H-kapalı her regüler açık V kümeşi için $\exists\lambda_0\varepsilon\Delta$ vardır; öyleki $\forall\lambda\geq\lambda_0 \Rightarrow F(a_\lambda)\cap V\neq\emptyset$ olur.

Kanıt: (1) $\Rightarrow$(2): F, x_0'da a-H-a.y.s., $F(x_0)\cap V\neq\emptyset$ ve $Y-V$ quasi H-kapalı küme olsun. Bu durumda x_0'ın

$$x\varepsilon U_{x_0} \Rightarrow F(x)\cap \overset{o}{V}\neq\emptyset$$

gerektirmesini sağlayan bir açık U_{x_0} komşuluğu vardır. Bu durumda $x\varepsilon U_{x_0}$ iken $x\varepsilon F^-(\overset{o}{V})$ olur. Yani, $x_0\varepsilon U_{x_0}\subset F^-(\overset{o}{V})$ dir. Böylece $x_0\varepsilon[F^-(\overset{o}{V})]^o$ dir.

(2) $\Rightarrow$ (3): V, tümleyeni quasi H-kapalı olan regüler açık bir küme ve $F(x_0)\cap V\neq\emptyset$ olsun. $V=\overset{o}{\bar{V}}$ dir. (2)'den

$$x_0\varepsilon[F^-(\overset{o}{\bar{V}})]^o=[F^-(V)]^o$$

olur.

(3) $\Rightarrow$ (4): V, tümleyeni quasi H-kapalı ve $F(x_0)\cap V\neq\emptyset$ olan bir regüler açık küme olsun. (3)'den $x_0\varepsilon[F^-(V)]^o$ olur. $U_{x_0}=[F^-(V)]^o$ denirse $x_0\varepsilon U_{x_0}$ ve $x\varepsilon U_{x_0} \Rightarrow F(x)\cap V\neq\emptyset$ gerektirseni sağlanır.

(4) $\Rightarrow$ (1): V, tümleyeni quasi H-kapalı küme ve $F(x_o) \cap V \neq \emptyset$ olsun. Y, HC-uzay olduğundan $V \subset \overset{o}{\bar{V}}$ ve $\overset{o}{\bar{V}}$ regüler açık ve tümleyeni quasi H-kapalı kümedir. Buradan $Y-\overset{o}{\bar{V}}$ quasi H-kapalı kümedir. (4)'den x_o'ın

$$x \varepsilon U_{x_o} \Rightarrow F(x) \cap \overset{o}{\bar{V}} \neq \emptyset$$

gerektirmesini sağlayan bir açık U_{x_o} komşuluğu vardır. Böylece F, x_o'da a-H-a.y.s. olur.

(4) $\Rightarrow$ (5): V, tümleyeni quasi H-kapalı ve $F(x_o) \cap V \neq \emptyset$ olan regüler açık bir küme olsun. 3$\Rightarrow$4'den $x_o \varepsilon U_{x_o} = [F^{-}(V)]^{o}$ için $x \varepsilon U_{x_o} \Rightarrow F(x) \cap V \neq \emptyset$ olur. $a_\lambda \to x_o$ olan bir ağ $(a_\lambda)_{\lambda \varepsilon \Delta}$ olsun. Bu durumda $x \varepsilon U_{x_o}$ için $\exists \lambda_o \varepsilon \Delta$ vardır; öyleki $\forall \lambda \geq \lambda_o$ için $a_\lambda \varepsilon U_{x_o}$ dır. Buradan $\lambda \geq \lambda_o \Rightarrow F(a_\lambda) \cap V \neq \emptyset$ olur.

(5) $\Rightarrow$ (4): Kabul edelimki hipotez doğru, (4) doğru olmasın. Böylece $V_o \cap F(x_o) \neq \emptyset$ olan tümleyeni quasi H-kapalı olan öyle bir V_o regüler açık kümesi vardır ki x_o'ı bulunduran her $U \subset X$ açık kümesi için $\exists x_U \varepsilon U$ $x_U \varepsilon U \Rightarrow F(x_U) \cap V = \emptyset$ olur.

$$\mathcal{U}_{x_o} = \{U \subset X \mid x_o \varepsilon U \text{ ve } U\text{-açık}\}$$

ve $D = \{(a_U, U) \mid U \varepsilon \mathcal{U}_{x_o} \wedge a_U \varepsilon U \wedge a_U \notin F^{-}(V_o)\}$ kümelerini tanımlayalım. D kümesi üzerindeki yönlendirmeyi şöyle yapalım:

$$(a_U, U) \leq (a_{U'}, U') \Leftrightarrow U' \subset U$$

böylece $(D, \leq)$ bir yönlü kümedir. Ayrica

$$\Phi : (D, \leq) \to X, \quad \Phi[(a_U, U)] = a_U$$

X üzerinde x_o'a yakınsayan bir ağdır. Ancak, her a_U için $F(a_U) \cap V_o = \emptyset$ olur ki bu hipotez ile çelişir. O halde (4) doğru olmalıdır.

3.2.7. Teorem: X, herhangi bir topolojik uzay Y, HC-uzay ve quasi H-kapalı ve $F: X \to Y$ bir çoğul-değerli fonksiyon olsun. Bu durumda,

1) F, x_o'da a-H-a.y.s. dir.

2) $F(x_0)\cap V\neq\emptyset$ olan her $V\subset Y$ açık kümesi için $x_0\varepsilon[F^-(\overset{o}{\bar V})]^o$ dir.

3) $F(x_0)\cap V\neq\emptyset$ olan her $V\subset Y$ regüler açık kümesi için $x_0\varepsilon[F^-(V)]^o$ dır.

4) $F(x_0)\cap V\neq\emptyset$ olan, her $V\subset Y$ regüler açık kümesi için x_0'ın

$$x\varepsilon U_{x_0} \Rightarrow F(x)\cap V\neq\emptyset$$

gerektirmesini sağlayan bir U_{x_0} açık komşuluğu vardır.

5) X içinde x_0'a yakınsak olan her $(a_\lambda)_{\lambda\varepsilon\Delta}$ ağı ve $F(x_0)\cap V\neq\emptyset$ olan her $V\subset Y$ regüler açık kümesi için en az bir $\lambda_0\varepsilon\Delta$ vardır; öyleki $\forall\lambda\geq\lambda_0$ için $F(a_\lambda)\cap V\neq\emptyset$ olur.

Kanıt: Açıktır.

3.2.8. Teorem: Y bir HC-uzay olsun. Eğer $F:X\to Y$ H-a.y.s. ise a-H-a.y.s. dir.

Kanıt: $H\subset Y$ herhangi bir quasi H-kapalı küme olsun. F, H-a.y.s. olduğundan $F^+(H)\subset X$ kapalıdır.

Şimdi $x\varepsilon X$ ve $F(x)\cap V\neq\emptyset$ ve tümleyeni quasi H-kapalı olan bir küme V olsun. Bu durumda $F(x)\cap V\neq\emptyset$ tur. Çünkü Y, HC-uzay olduğundan V açıktır. Buradan $V\subset\overset{o}{\bar V}$ dir. F, H-a.y.s. olduğundan $F(x)\cap V\neq\emptyset$ için en az bir $U_x\subset X$ açığı vardır; öyleki $x\varepsilon U_x$ ve $\forall z\varepsilon U_x$ için $F(z)\cap V\neq\emptyset$ tur. $V\subset\overset{o}{\bar V}$ olduğundan $\forall z\varepsilon U_x$ için $F(z)\cap\overset{o}{\bar V}\neq\emptyset$ dir. O halde F, $x\varepsilon X$'de a-H-a.y.s. olur. $x\varepsilon X$ keyfi olduğundan da F, a-H-a.y.s. olur.

3.2.9. Teorem: F, H-ü.y.s. ise a-H-ü.y.s. dir. Eğer Y, HC-uzay ise

Kanıt: $x_0\varepsilon X$ ve $F(x_0)\subset V$ tümleyeni quasi H-kapalı olan bir küme olsun. F, F, H-ü.y.s. olduğundan en az bir $U_{x_0}\subset X$ açığı vardır; öyleki $x_0\varepsilon U_{x_0}$ ve $\forall x\varepsilon U_{x_0}$ için $F(x)\subset V$ dir. Y, HC-uzay olduğundan V açıktır. Buradan $V\subset\overset{o}{\bar V}$ dir. O halde $\forall x\varepsilon U_{x_0}$ için $F(x)\subset\overset{o}{\bar V}$ dir. Sonuç olarak F, $x_0\varepsilon X$'de a-H-ü.y.s. dir. $x_0\varepsilon X$ keyfi olduğundan F, x'de a-H-ü.y.s. dir.

3.2.10. Sonuç: Y, bir HC-uzay olsun. Eğer $F:X\to Y$ fonksiyonu kuvvetli kapalı grafikli ise F, a-H-ü.y.s. dir.

Kanıt: F, kuvvetli kapalı grafikli olduğundan F, H-ü.y.s. dir. Y, HC-uzay olduğundan da F, a-H-ü.y.s. dir.

3.2.11. Teorem: Y bir H-kapalı, HC-uzay ve $F:X\to Y$ çoğul-değerli fonksiyonu nokta kompakt ise aşağıdakiler eşdeğerdir:

1) F, a-H-ü.y.s. dir.

2) G(F), kuvvetli kapalıdır.

3) F, H-ü.y.s. dir.

Kanıt: (1)$\Longrightarrow$(2): $(x,y)\notin G(F)$ alalım. Bu durumda $y\notin F(x)$'tir. $F(x)$ nokta kompakt ve Y Hausdorff olduğundan $F(x)\subset V$ ve $y\in U$ açık kümeleri vardır; öyleki $U\cap V=\emptyset$ tur. Buradan $\bar{U}\cap\overset{\circ}{\overline{V}}=\emptyset$ tur. $V\subset Y$ açık olduğundan $V\subset\overset{\circ}{\overline{V}}$ dir. O halde $F(x)\subset\overset{\circ}{\overline{V}}$ olur. $\overset{\circ}{\overline{V}}\subset Y$ regüler açıktır. Buradan $Y-\overset{\circ}{\overline{V}}$ quasi H-kapalıdır. F, a-H-ü.y.s. olduğundan bir $x\in U_x\subset X$ açık kümesi vardır; öyleki $F(U_x)\subset\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\overline{V}}}}$ dir. $\overset{\circ}{\overline{V}}\subset Y$ regüler açık olduğundan $\overset{\circ}{\overline{V}}=\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\overline{V}}}}$ dir. Sonuç olarak $F(U_x)\subset\overset{\circ}{\overline{V}}$ olur. Buradan $F(U_x)\cap\bar{U}=\emptyset$ tur. Çünkü $\overset{\circ}{\overline{V}}\cap\bar{U}=\emptyset$ dır. O halde G(F) kuvvetli kapalıdır.

(2) $\Longrightarrow$(3): 2.2.27. Önerme'den açıktır.

(3) $\Longrightarrow$(1): 3.2.9. Teorem'den açıktır.

3.2.12. Teorem: X, herhangi bir uzay, Y regüler, HC, C-kompakt uzay olsun. Bu durumda,

F, a-H-a.y.s.'dir. $\Longleftrightarrow$ a.y.s.'dir.

Kanıt: ($\Longrightarrow$): F,bir $x_0\in X$'de a-H-a.y.s. olsun. V, $F(x_0)\cap V\neq\emptyset$ olan bir açık küme olsun. $y\in F(x_0)\cap V$ alalım. Bu durumda, $y\in F(x_0)$ ve $y\in V$ dir. Y regüler olduğundan $y\in G\subset\bar{G}\subset V$ olan bir $G\subset Y$ açık kümesi vardır. Dolayısıyla $y\in F(x_0)\cap G\neq\emptyset$ dır. Y-G quasi H-kapalı küme ve F, x_0'da a-H-a.y.s. olduğundan x_0'ın

$$x \in U_{x_0} \Rightarrow F(x) \cap \overset{\circ}{\bar{G}} \neq \emptyset$$

gerektirmesini sağlayan bir açık $U_{x_0} \subset X$ kümesi vardır. Buradan $\overset{\circ}{\bar{G}} \subset V$ olduğundan,

$$x \in U_{x_0} \Rightarrow F(x) \cap V \neq \emptyset$$

olur. O halde F, x_0'da a.y.s.'dir. $x_0 \in X$ keyfi olduğundan F, X'de a.y.s. olur.

($\Leftarrow$) Y, HC-uzay olduğundan 3.2.9. Teorem'den açıktır.

3.2.13. Teorem: X, herhangi bir topolojik uzay, Y regüler, HC ve C-kompakt uzay olsun. $F: X \to Y$ nokta parakompakt bir çoğul-değerli fonksiyon olsun. Bu durumda,

F, a-H-ü.y.s.'dir. $\Leftrightarrow$ ü.y.s.'dir.

Kanıt: ($\Rightarrow$) F, herhangi bir $x_0 \in X$'de a-H-ü.y.s. ve V, $F(x_0) \subset V$ olan bir açık küme olsun. $y \in F(x_0)$ için $\{y\} \subset V$ dir. Y regüler olduğundan $y \in G_y \subset \bar{G}_y \subset V$ olan $\exists G_y \subset Y$ açık kümesi vardır. Buradan,

$$F(x_0) \subset \bigcup_{y \in F(x_0)} G_y \subset \bigcup_{y \in F(x_0)} \bar{G}_y \subset V$$

olur. $F(x_0)$ parakompakt olduğundan,

$$\mathcal{U} = \{G_y \mid y \in F(x_0)\}$$

örtüsünün $F(x_0)$'ı örten yerel sonlu bir

$$\mathcal{V} = \{T_y \mid y \in F(x_0)\}$$

inceliği vardır. Buradan, $\bigcup_{y \in F(x_0)} T_y = T$ dersek;

$$F(x_0) \subset T \subset \bar{T} \subset \bigcup_{y \in F(x_0)} \bar{G}_y \subset V$$

olur. Y-T, kapalı ve Y, C-kompakt olduğundan Y-T quasi H-kapalıdır. F, a-H-ü.y.s. olduğundan x_0'ın

$$x \in U_{x_0} \Rightarrow F(x) \subset \overset{\circ}{\bar{T}} \subset \bar{T} \subset V$$

gerektirmesini sağlayan bir $U_{x_0} \subset X$ açık komşuluğu vardır. O halde F, x_0'da ü.y.s.'dir. $x_0 \in X$ keyfi olduğundan F, X'de ü.y.s.'dir.

($\Leftarrow$) Y, HC-uzay olduğundan 3.2.8. Teoremden açıktır.

4. BÖLÜM: ÇARPIM UZAYLAR

Bu bölümde, bir çarpım uzaydan diğer bir çarpım uzaya veya bir uzaydan bir çarpım uzaya tanımlı çoğul-değerli fonksiyonların H-ü.y.s. (H-a.y.s.) ve a-H-ü.y.s. (a-H-a.y.s) olmaları durumu incelendi. Ayrıca bir çoğul-değerli fonksiyonunun kuvvetli kapalı grafikliliği ile H-ü.y.s. H-a.y.s. sürekliliği arasındaki ilişkiler araştırıldı. Çarpım uzaylar için gerekli olan ön-teoremler kanıtsız olarak verildi.

$\{X_\alpha : \alpha\varepsilon\Delta\}$ topolojik uzaylar ailesini ve $\prod_{\alpha\varepsilon\Delta} X_\alpha$'da çarpım uzayını göstersin.

4.1. Önerme: $f:X \to Y$ sürekli ve $A\subset X$ quasi H-kapalı kümesinin f(A) görüntüsüde quasi H-kapalıdır.

4.2. Önerme: $f:X \to Y$, açık, örten sürekli bir fonksiyon ise X yerel H-kapalı olduğundan Y'de yerel H-kapalıdır.

4.3. Teorem: $\prod X_\alpha$ yerel H-kapalı ise $\forall_{\alpha\varepsilon\Delta}$ için X_α'larda yerel H-kapalıdır.

4.4. Önerme: $\forall_{\alpha\varepsilon\Delta}$ için $F_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ nokta kapalı ise $F:\prod X_\alpha \to \prod Y_\alpha$, $F(x)=\prod F_\alpha(x_\alpha)$ ile tanımlı fonksiyon nokta kapalıdır.

4.5. Teorem: $\forall_{\alpha\varepsilon\Delta}$ için X_α HC-uzay ise $\prod X_\alpha$'da HC-uzaydır.

4.6. Teorem: $\{X_\alpha : \alpha\varepsilon\Delta\}$ ve $\{Y_\alpha : \alpha\varepsilon\Delta\}$ topolojik uzayların iki ailesi olsun ve $F_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ $\forall_{\alpha\varepsilon\Delta}$ için bir çoğul-değerli fonksiyonolsun. Eğer F_α' lar kuvvetli kapalı grafikli iseler $F: \prod X_\alpha \to Y_\alpha$ $F(\{x\})=\prod F_\alpha(x_\alpha)$ ile tanımlı fonksiyon kuvvetli kapalı grafiklidir.

Kanıt : $x=(x_\alpha)$, $y=(y_\alpha)$ olmak üzere,

$(x,y)\notin G(F)$ olsun. $y\notin F(x)$'tir. Bu durumda bir $\beta\in\Delta$ vardır; öyleki $F(x)=F(\{x_\alpha\})=\Pi F_\alpha(x_\alpha)$ 'dan $y_\beta\notin F_\beta(x_\beta)$'dır. $G(F_\beta)$ kuvvetli kapalı olduğundan $U_\beta\subset X_\beta$, $V_\beta\subset Y_\beta$ açıklarıvardır; öyleki $x_\beta\in U_\beta$, $y_\beta\in V_\beta$ ve $F_\beta(U_\beta)\cap\bar{V}_\beta=\emptyset$ tur. $U=U_\beta\times\prod_{\alpha\neq\beta}X_\alpha$ ve $V_\beta\times\prod_{\alpha\neq\beta}Y_\alpha=V$ dersek U ve V, x ve y' yi içeren birer açık kümedirler. Ayrıca $F(U)\cap\bar{V}=\emptyset$ tur. Çünkü;

$$\begin{aligned}F(U)\cap\bar{V}&=(F_\beta(U_\beta)\times\prod_{\alpha\neq\beta}Y_\alpha)\cap(\bar{V}_\beta\times\prod_{\alpha\neq\beta}Y_\alpha)\\&=(F_\beta(U_\beta)\cap\bar{V}_\beta)\times\prod_{\alpha\neq\beta}Y_\alpha\\&=\emptyset\times\prod_{\alpha\neq\beta}Y\\&=\emptyset\end{aligned}$$

dır. Sonuç olarak G(F) kuvvetli kapalıdır.

4.7. Sonuç:$\{X_\alpha:\alpha\in\Delta\}$, $\{Y_\alpha:\alpha\in\Delta\}$ topolojik uzayların iki ailesi olsun. $F_\alpha:X_\alpha\to Y_\alpha$ $\forall\alpha\in\Delta$ için H-ü.y.s. (C-ü.y.s.) nokta kompakt (nokta kapalı) ve Y_α'lar $\forall\alpha\in\Delta$ için yerel-H-kapalı Hausdorff (yerel kompakt Hausdorff) ise bu durumda,

$$F:\Pi X_\alpha\to\Pi Y_\alpha\qquad F(x)=\Pi F_\alpha(x_\alpha)\ \text{ ile tanımlı}$$

çoğul-değerli fonksiyon H-ü.y.s. (C-ü.y.s.) dir.

Kanıt: $\forall\alpha\in\Delta$ için F_α'lar H-ü.y.s. (C-ü.y.s.) olduğundan 2.2.28 sonuç (2.2.35. Önerme)'den $G(F_\alpha)$'lar kuvvetli kapalıdır. 4.6. Teoremden de G(F) kuvvetli kapalıdır. O halde F, H-ü.y.s. (C-ü.y.s.) olur.

4.8. Lemma: $\forall\alpha\in\Delta$ için Y_α HC-uzay ise $\prod_{\alpha\in\Delta}Y_\alpha$ HC-uzaydır.

Kanıt: $G\subset\prod_{\alpha\in\Delta}Y_\alpha$ quasi H-kapalı bir küme olsun. $G=\prod_{\alpha\in\Delta}G$ olan $G_\alpha\subset Y_\alpha$ kümeleri vardır. Diğer yandan,

$$P_\alpha:\Pi Y_\alpha\to Y_\alpha$$

sürekli bir dönüşümdür. Sürekli bir fonksiyon altında quasi H-kapalı kümelerin görüntüsü quasi H-kapalıdır. Buradan $P_\alpha(G)=G_\alpha\subset X_\alpha$ quasi

H-kapalıdır. $\forall\alpha\varepsilon\Delta$ için Y_α HC-uzay olduğundan $G_\alpha \subset X_\alpha$ kapalıdır, yani $G_\alpha = \bar{G}_\alpha$ dır. Sonuç olarak,

$$G = \prod_{\alpha\varepsilon\Delta} G_\alpha = \prod_{\alpha\varepsilon\Delta} \bar{G}_\alpha = \overline{\prod_{\alpha\varepsilon\Delta} G_\alpha} = \bar{G}$$

olur. Bu durumda $\prod_{\alpha\varepsilon\Delta} Y_\alpha$, HC-uzaydır.

4.9. Lemma: $F: \prod_{\alpha\varepsilon\Delta} X_\alpha \to \prod_{\alpha\varepsilon\Delta} Y_\alpha$ çoğul-değerli fonksiyonu H-almost-ü.y.s. olsun ve $\forall\alpha\varepsilon\Delta$ için Y_α quasi H-kapalı olsun. Bu durumda $F_\alpha: X_\alpha \to Y_\alpha$ H-almost-ü.y.s. dir.

Kanıt: Bir $\beta\varepsilon\Delta$ alalım. $x_\beta\varepsilon X_\beta$, $F_\beta(x_\beta) \subset V_\beta \subset Y_\beta$ tümleyeni quasi H-kapalı olan bir küme olsun.

$$A_\beta = \{x\varepsilon \prod_{\alpha\varepsilon\Delta} X_\alpha \mid x'\text{in } \beta \text{ ıncı koordinatı } x_\beta \text{ olur}\}$$

kümesini tanımlayalım. $x\varepsilon A_\beta$ alalım. $A_\beta \subset \prod_{\alpha\varepsilon\Delta} X_\alpha$ olduğundan $x\varepsilon \prod_{\alpha\varepsilon\Delta} X$ dır. Diğer yandan,

$$P_\beta : \prod Y_\alpha : \to Y_\beta$$

fonksiyonu için, $P_\beta^{-1}(V_\beta) = V_\beta \times \prod_{\alpha\neq\beta} Y_\alpha$ dır. $\prod_{\alpha\varepsilon\Delta} Y_\alpha - P_\beta^{-1}(V_\beta) = (Y_\beta - V_\beta) \times \prod_{\alpha\neq\beta} Y_\alpha$ kümesi quasi H-kapalıdır. Çünkü $Y_\beta - V_\beta$ quasi H-kapalı ve $\forall\alpha\varepsilon\Delta$ için Y_α-quasi H-kapalı olduğundan $Y_\beta - V_\beta \times \prod_{\alpha\neq\beta} Y_\alpha$-quasi H-kapalıdır.

$F(x) \subset V_\beta \times \prod_{\alpha\neq\beta} Y_\alpha$ dır. F, H-almost-ü.y.s. olduğundan bir $U \subset \prod X_\alpha$ açık kümesi vardır; öyleki $F(U) \subset \overline{(V_\beta \times \prod_{\alpha\neq\beta} Y)}^{\circ}$' dir.

$F(U) \subset \overline{(V_\beta \times \prod_{\alpha\neq\beta} Y_\alpha)}^{\circ} \subset \overset{\circ}{\bar{V}}_\beta \times \prod_{\alpha\neq\beta} Y_\alpha$ dir. Öte yandan $P_\beta(U) = U_\beta \subset X_\beta$ açıktır. Çünkü P_β açık dönüşümdür. $F_\beta(U_\beta) \subset \overset{\circ}{\bar{V}}_\beta$ olur. O halde F_β, $x_\beta\varepsilon X_\beta$'da H-almost-ü.y.s. dir. $x_\beta\varepsilon X_\beta$ keyfi olduğundan F_β, X_β'da H-almost-ü.y.s. dir.

4.10. Teorem: Herbir $\alpha\varepsilon\Delta$ için Y_α H-kapalı, yerel H-kapalı HC-uzay olsun. Eğer $F: \prod_{\alpha\varepsilon\Delta} X_\alpha \to \prod_{\alpha\varepsilon\Delta} Y_\alpha$ H-ü.y.s. ise bu durumda $F_\alpha: X_\alpha \to Y_\alpha$ H-ü.y.s. dir.

Kanıt : Herbir $\alpha\varepsilon\Delta$ için Y_α H-kapalı, yerel H-kapalı HC-uzay olduğundan $\prod_{\alpha\varepsilon\Delta} Y_\alpha$'da H-kapalı, yerel H-kapalı ve HC-uzaydır. F, H-ü.y.s. olduğundan H-almost-ü.y.s. dir. 3.2.11. Teorem'den $\forall\alpha\varepsilon\Delta$ için F_α'lar H-almost-ü.y.s. dir. Sonuç olarak F_α' lar H-ü.y.s. olur.

4.11. Sonuç : Herbir $\alpha\varepsilon\Delta$ için Y_α, H-kapalı, yerel H-kapalı HC-uzay ve F_α nokta kompakt olsun. Bu durumda $F: \prod_{\alpha\varepsilon\Delta} X_\alpha \to \prod_{\alpha\varepsilon\Delta} Y_\alpha$'nın H-a.y.s. olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall\,\alpha\varepsilon\Delta$ için $F_\alpha:X_\alpha \to Y_\alpha$'nın H-ü.y.s. olmasıdır.

Kanıt: ($\Rightarrow$) Teorem 4.9'dan açıktır.

($\Leftarrow$): Sonuç 4.7.'den açıktır.

4.12. Teorem: $\forall\alpha\varepsilon\Delta$ için $F_\alpha:X \to Y_\alpha$ kuvvetli kapalı grafikli ise $F:X \to \prod Y_\alpha$ kuvvetli kapalı grafiklidir. $F(x)= \prod F_\alpha(x)$ ile tanımlıdır.

Kanıt: $(x,y) \notin (G(F)$ olsun. Bu durumda $y \notin F(x)$'tir. Buradan $\exists\beta\varepsilon\Delta$ için $y_\beta \notin F_\beta(x)$ olur. $(x,y_\beta) \notin G(F_\beta)$ dır. $G(F_\beta)$ kuvvetli kapalı olduğundan bir $x\varepsilon U \subset X$ açık kümesi ve $y\varepsilon V_\beta \subset Y_\beta$ açık kümesi vardır; öyleki $F_\beta(U) \cap \bar{V}_\beta = \emptyset$ tur. $V= V_\beta \times \prod_{\alpha\neq\beta} Y_\alpha$ dersek V-açıktır ve $y\varepsilon V$ dir. Ayrıca, $F(U) \cap \bar{V} = \emptyset$ tur. Çünkü,

$$
\begin{aligned}
F(U) \cap \bar{V} &= F(U) \cap (\bar{V}_\beta \times \prod_{\alpha\neq\beta} Y_\alpha) \\
&= (F_\beta(U) \cap \bar{V}_\beta) \times \prod_{\alpha\neq\beta} Y_\alpha \cap F_\alpha(U) \\
&= \emptyset
\end{aligned}
$$

tur. O halde G(F) kuvvetli kapalıdır.

4.13. Sonuç : Eğer Y_α, yerel H-kapalı Hausdorff uzay (yerel kompakt Hausdorff) ve $F_\alpha:X \to Y_\alpha$ nokta kompakt (nokta kapalı) ve H-ü.y.s. (C-ü.y.s.) ise $F:X \to \prod_{\alpha\varepsilon\Delta} Y_\alpha$ H-ü.y.s. (C-ü.y.s) dir.

Kanıt: Açıktır. (4.12 Teoremden ve 3.2.11. Teorem'lerden)

4.14. Sonuç: X, Y topolojik uzaylar ve Y yerel H-kapalı (yerel kompakt) Hausdorff uzaylar $F:X \to Y$ çoğul-değerli fonksiyonu nokta kompakt (nokta kapalı) ve H-Ü.y.s. (C-Ü.y.s.) ise $g:X \to X \times Y$ tanımlı çoğul-değerli grafik fonksiyonu H-Ü.y.s. (C-Ü.y.s.)dir.

Kanıt: $I_X: X \to X$ özdeşlik fonksiyonunu düşünelim. I_X süreklidir. X HC-uzay olduğundan I_X H-Ü.y.s. dir. $G(I_X)$ kuvvetli kapalıdır. Çünkü $(x,y) \notin G(I_X)$ için $I_X(x)=x \neq y$ dir. X-Hausdorff uzay olduğundan $x \neq y$ için $\exists U,V(\subset X)$ açık kümeleri vardır; öyleki $U \cap V=\emptyset$ ve $x \in U$ $y \in V$ dir. Buradan $U \cap \bar{V}=\emptyset$ tur. $I_X(U)=U$ olduğundan $I_X(U) \cap \bar{V}=\emptyset$ olur. O halde $G(I_X)$ kuvvetli kapalıdır. 3.2.11.Teorem'den $G(F)$ kuvvetli kapalıdır. Sonuç olarak 4.12.Teorem'den $G(g)$ kuvvetli kapalıdır. O halde g-H-Ü.y.s. olur.

4.15. Teorem: Her bir $\alpha \in \Delta$ için Y_α H-kapalı HC-uzay olsun. $F:X \to \prod_{\alpha \in \Delta} Y_\alpha$ çoğul-değerli fonksiyonu nokta kompakt H-Ü.y.s. ise $F_\alpha: P_\alpha oF:X \to Y_\alpha$ H-Ü.y.s. dir.

Kanıt: Y , H-kapalı ve HC-uzay olduğundan $\prod Y_\alpha$' da H-kapalı ve HC-uzaydır. F, H-Ü.y.s. olduğundan F, H-almost-ü.y.s. dir. 2.4. Lemma'dan da $F_\alpha: P_\alpha oF:X \to Y_\alpha$ H-almost-Ü.y.s. dir. Çünkü P_α ve F, H-Ü.y.s. olduğundan $P_\alpha oF=F_\alpha$' da H-Ü.y.s. dir. 3.2.11. Teorem'den F_α' M-üy.s. olur.

4.16. Sonuç: Herbir $\alpha \in \Delta$ için Y_α yerel H-kapalı, H-kapalı, HC-uzay ve $F:X \to \prod Y_\alpha$ nokta kompakt ve $F_\alpha: X \to Y_\alpha$ nokta kompakt olsun. Bu durumda,

F, H-Ü.y.s. olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall \alpha \in \Delta$ için F_α' nın H-Ü.y.s. olmasıdır.

Kanıt: ($\Rightarrow$): 4.15. Teorem'den açıktır.

($\Leftarrow$): 4.13. Sonuç'tan açıktır.

DEĞİNİLEN BELGELER DİZİNİ

1) H.Blumberg, "New properties of all real functions",
Trans. Amer. Math. Soc. 24 (1922), 113-128.

2) C.T.R., Borgers, "A study of multi-valued fuctions",
Pasific. J. Math., 23 (1967) 45-1461.

3) T.F.Bridland, "Trajectory integrals of set valued functions",
Pasific. J.Math., 33 (1970) 43-67.

4) G.Choquet, "Convergens",
Grenoble Üniversite Analles, 23 (1947) 57-112.

5) S.Eilenberg and D.Montgomery, "Fixed point theorems for multi-valued transformations",
Amer. J. Math. 68 (1946) 222-244.

6) J.O.Frink, "topology in Lattices",
Transactions of the Amer. Math. Soc. 53 (1942) 569-582.

7) K.R.Genty and H.B.Hoyle, "C-continiuous functions",
Yokohama Math. J. 18 (1970) 71-76.

8) T.Husain, "Almost continuous mapping",
Proae. Math. 10 (1966), 1-7.

9) M.Q.Jacobs, "Measurable multi-valued mappings and Lusin's theo",
Trans. Amer. Math. Soc., 143 (1968) 471-481.

10) J.E.Joseph, "Multifunctions and graphs "
Pasific Jour. Math., 79 (1978) 509-529.

11) J.Kelley, "General topology",
Van Nostrand, Priceton.

12) Y.Küçük and O.Özer, "2^Y-üzerinde çeşitli topolojiler ve çoğu-değerli fonksiyonların süreklilikleri",
Doğa-Tr.J. of Mathematics, 14 (1990), 158-167.

13) A.Lechicki, " On continuous and measurable multifunctions",
Ann. Soc. Math. Polonae, Seria:1, XX1 (1979), 141-156.

14) P.E.Long and T.R.Hamlett, "H-continuous functions",
Boll. Un. Math. Ital. 11 (1975), 552-558.

15) E.Michael, "Topologies on spacies of subsets",
Trans. Amer. Math. Soc., 71 (1951) 152-182.

16) T.Noiri, "Properties of H-continuous functions",
Res. Rep. OfYatsushiro Nat. Coll. Of Tech., 1 (1979), 85-90.

17) O.Özer, "A note on multifunctions",
Acta. Sci. Math. 46 (1983), 121-125.

18) V.I.Ponomarev, "A new space of closed sets and multivalued continu-
ousmappings of bicompacta",
Amer. Math. Soc. 38 (1964), 95-118.

19) L.Ratner, "Multivalued transformations",
Univercity of California: 1949.

20) R.E.Smithson, "Some general properties of multivalued functions",
Pac. J. Math., 15 (1965), 681-703.

21) M.K.Singal and Singal, "Almost continüous mappings",
Yokohama Math. J. 16 (1968), 63-73.

22) W.L.Stroter, "Continuous multivalued functions",
Boletim do Sociedade de S. Paulo, 10 (1955), 87-120.

23) H.V.Velicko, "H-closed topologial spaces",
Math. Sb. 70 (1966), 98-112.

24) G.Viglino, "C-compact spaces",
Duhe. Math. J. , 36 (1969), 761-764,