T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

UZAY KİNEMATİĞİNİN LORENTZ GEOMETRİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Çetin CAMCI

ÇANAKKALE-2000

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu araştırma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ali Paşa AYDIN (Danışman)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hüsnü BAYSAL

Üye : Yrd. Doç. Dr. İsmail DEMİR

Kod No : 24

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Osman DEMİRCAN

Enstitü Müdür Vekili

İÇİNDEKİLER

ÖZ

Bu çalışmada, dual sayıların özelliklerinden faydalanarak E.Study dönüşümü Lorentz geometrisine çevrilmiştir. Lorentz iç ve dış çarpımlarının tanımından faydalanarak, Euclid uzayındaki "Uzay Kinematiği" ve "Kinematik Hareket" Lorentz uzayında incelenmiştir.

ABSTRACT

In this study, using prıperties of dual numbers, E.Study transformation which Euclidean is transformed into Lorentzion geometric correspondance. Using definetion of Lorentz dot and wedge products, "Space Kinematics" and "Kinematik motion" in Euclid space are obtained in Lorentz space.

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	:Reel Sayılar Cümlesi
$\mathbb{R}^n$	:n-boyutlu Reel Sayılar
E^n	:n-Boyutlu Euclid Uzayı
$\Vert\ \Vert$	:Norm Fonksiyonu
$\langle , \rangle$	:Euclid Anlamında İç Çarpım
$\langle , \rangle\vert_L$	:Lorentz Anlamında İç Çarpım
L^n	:n-Boyutlu Lorentz Uzayı
$d_f \vec{X}$	:Sürüklenme Hızı
$GL(n,\mathbb{R})$	:n Boyutlu Genel Lineer Grup

BÖLÜM I

I.1.TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

TANIM I.1.1 (ID-Cümlesi):$\forall\, a, a^* \in$IR olmak üzere bir A= (a, a^*) ikilisine bir sıralı ikili denir.

Bu şekilde tanımlanan IR×IR cümlesi ID ile gösterilir ve

ID= $\{ (a, a^*) \mid a, a^* \in$ IR $\}$

dir[1].

TANIM I.1.2 (ID de Toplama):

$\oplus$:IDxID $\longrightarrow$ ID

iç işlemi A= (a, a^*) , B= (b, b^*) $\in$ID olmak üzere

A$\oplus$B = $(a+b, a^*+b^*)$

dir [1].

TANIM I.1.3 (ID de çarpma işlemi):

$\otimes$: IDxID $\longrightarrow$ ID

iç işlemi A= (a, a^*) , B= (b, b^*) $\in$ID olmak üzere

A$\otimes$B = $(ab,\ ab^* + a^*b)$

şeklinde tanımlanır . $\otimes$ işlemi ID deki çarpma işlemi olarak adlandırılır[1].

TANIM I .1 .4 (ID de Eşitlik) : A= (a, a^*) , B= (b, b^*) $\in$ID için

A=B $\Leftrightarrow$ $a = b$, $a^* = b^*$

dir [1].

TANIM I.1.5 (Dual Sayılar Sistemi-Dual Sayı): IR reel sayılar olmak üzere

ID =IR x IR

cümlesi üzerinde, toplama ve eşitlik Tanım .I.1.2, Tanım. I. 1. 3 ve

Tanım I.1.4 deki gibi tanımlanmış ise ID cümlesine *dual sayılar sistemi* denir ve $(a, a^*) \in$ ID elemanına da bir *dual sayı* denir [1].

TEOREM I.1.1 : (ID, ⊕, ⊗) üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır.

Bu teoremi biraz açarsak

i) (ID , ⊕) ikilisi bir Abel grubudur.

ii) İkinci işlem ⊗, ID de birleşmeli ve birinci işlem olan ⊕ üzerine dağılmalıdır. Ayrıca, ⊗ işlemine göre birim eleman (1,0) ve ⊕ işlemine göre ise (0,0) dır[1].

TEOREM I.1.2 : (ID , ⊕, ⊗) üçlüsü bir cisim değildir.

İSPAT : ID′=ID-$\{0\}$ denirse (ID′,⊗) ikilisi grup aksiyomlarını sağlamadığı için (ID, ⊕, ⊗) üçlüsü bir cisim değildir, gerçekten $\forall A = (a, a^*)$ için

$$A \otimes X = X \otimes A = (1,0)$$

olacak şekilde bir tek X=(x, x^*) ∈ID ters eleman yoktur. Çünkü, bu eleman için Tanım I.1.3 ve Tanım I.1.4 gereğince

$$A \otimes X = (a, a^*) \otimes (x, x^*) = (ax, a^*x + ax^*) = (1,0)$$

ise

$$ax = 1 \text{ ve } a^*x + ax^* = 0$$

bulunur. Son denklemlerden x ve x^* çözülürse

$$X = (x, x^*) = \left(\frac{1}{a}, -\frac{a^*}{a^2}\right)$$

elde edilir. Bu durumda X=(x, x^*) elemanı, A nın ters elemanı olması için $a \neq 0$ olmalıdır. Bu yüzden $(0, a^*) \in$ ID elemanlarının tersi yoktur.

O halde (ID, ⊕, ⊗) üçlüsü bir cisim değildir[1].

SONUÇ I.1.1: ID dual sayılar sistemi, çıkarma ve A≠$(0, a^*)$ olmak üzere bölme işlemine göre kapalıdır.

TEOREM I.1.3: ID dual sayılar halkası IR reel sayılar cümlesine izomorf bir alt cümleyi alt cisim olarak kapsar.

İSPAT: $f : \mathbb{ID} \longrightarrow \mathbb{IR}$

$$(a,0) \longrightarrow f(a,0) = a$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonu bir izomorfizmdir.

1) f lineerdir : A= $(a,0)$ ve B = $(b,0)$ olmak üzere

$$f(A \oplus B) = f(a+b,0) = a+b = f(a,0) + f(b,0)$$

olur.

2) f bire-birdir: A=$(a,0) \neq (b,0)$=B için f(A) $\neq f$(B) dir. Gerçekten Tanım I.1.4 gereğince A≠B demek $a \neq b$ demektir. Bu da f(A) $\neq f$(B) olduğunu ifade eder.

3) f örtendir: $\forall x \in \mathbb{IR}$ reel sayısı için bir tek $(x,0) \in \mathbb{ID}$ dual sayısının $f(x,0)$ resmidir [1].

SONUÇ I.1.2: Teorem I.1.3 ün sonucu olarak $(a,0)$ dual sayısı, izomorf olduğu 'a' reel sayısı ile gösterilecektir, yani

$$(a,0) = a$$

alınacaktır [1].

TANIM I.1.6 (Dual Sayının Reel ve Dual Kısmı): Bir A=$(a,a^*) \in \mathbb{ID}$ dual sayısında "a" reel sayısına A nın reel kısmı, "a^*" reel sayısına da A nın dual kısmı denir ve ReA=a, DuA=a^* şeklinde yazılır [1].

TANIM I.1.7: (0,1) dual sayısı kısaca ε ile gösterilir, yani

$$\varepsilon = (0,1)$$

dir.

SONUÇ I. 1.3: Tanım I.1.6 gereğince

$$\varepsilon \otimes \varepsilon = \varepsilon^2 = (0,1) \otimes (0,1) = (0\ ,\ 0.1+1.0) = (0,0) = 0$$

dır [1].

TEOREM I.1.4: A=$(a,a^*) \in \mathbb{ID}$ dual sayısı

$$A = (a,a^*) = a + \varepsilon a^*$$

şeklinde yazılabilir.

İSPAT: Tanım I.1.2 gereğince A=(a, a^*) için

A= $(a,0) \oplus (0,a^*)$

yazılabilir. Tanım I.1.3 den bu son ifade

A = $(a, 0) \oplus (0,1) \otimes (a^*, 0)$

olur. Sonuç I.1.2 den dolayı ve Tanım I.1.6 dan

A = $a + \varepsilon a^*$

dir [1].

SONUÇ I.1.4: IR de tanımlanan (+) ve (•) işlemlerine ait kurallar ID de aynen kullanılabilir.

Bundan sonra $\oplus$ ve $\otimes$ sembolleri yerine, sırası ile, (+) ve (•) işaretlerini kullanacağız.

TEOREM I.1.5 : İki dual sayının çarpımı sıfır ise çarpanlardan herhangi biri sıfır olmak zorunda değildir.

İSPAT: A=$(0, a^*)$ ve B=$(0, b^*)$ olmak üzere Tanım I.1.3 gereğince

A$\otimes$B= $(0, a^*) \otimes (0, b^*) = (0,0)$

olur, fakat A$\neq$0 ve B $\neq$ 0 dır [1].

TEOREM I.1.6: $\lambda \in$ IR ve A =(a, a^*) bir dual sayı ise λ skaleri ile A nın çarpımı

λA =$(\lambda a, \lambda a^*)$

dir.

İSPAT: $\lambda \in$ IR olduğundan Teorem I.1.3 gereğince λ reel sayısı $(\lambda,0)$ dual sayısına izomorftur. Tanım I.1.3 den

λA=$(\lambda,0) \otimes (a, a^*) = (\lambda a, \lambda a^*)$

olur [1].

TANIM I.1.8 (Bir Dual Sayının λ Skaleri ile Çarpımı): λ reel sayısı ile A dual sayının çarpımı

$$\text{IRxID} \longrightarrow \text{ID}$$

$$(\lambda, A) \longrightarrow \lambda \otimes A = (\lambda a, \lambda a^*)$$

şeklinde bir dış işlem olup bir dual sayının λ skaleri ile çarpımı denir [1].

I.2.DUAL VEKTÖR UZAYI

TANIM I.2.1 (Modül): Birimi '1' olan değişimli bir halka H olsun. H üzerinde bir modül diye bir S abel grubu ile aşağıdaki özelliklere sahip olan S üzerinde bir

$$HxS \longrightarrow S$$
$$(a,\alpha) \longrightarrow a\alpha$$

dış işlemine denir. $a,b \in H$ ve $\alpha,\beta \in S$ olmak üzere

M₁) $a(\alpha+\beta) = a\alpha + b\beta$

M₂) $(a+b)\alpha = a\alpha + b\alpha$

M₃) $(ab)\alpha = a(b\alpha)$

M₄) $1\alpha = \alpha$

ID dual sayılar halkası üzerinde $IDxIDxID=ID^3$ bir modüldür. ID nin birimi $(1,0) = 1$ olan değişimli bir halka olduğu Teorem I.1.1 ile verilmiştir. ID^3 ün ID üzerinde bir modül olduğu göstermek için önce (ID,+) nın bir Abel grubu olduğunu sonra

$$ID \times ID^3 \longrightarrow ID^3$$

dış işleminin M_1, M_2, M_3 ve M_4 aksiyomlarını göstermelidir.

$$ID^3 = \{ (A_1, A_2, A_3) \mid A_1, A_2, A_3 \in ID \}$$

cümlesinin her bir elemanı bir büyük ile gösterilirse $A \in ID$ için $A= (A_1,A_2,A_3)$ veya $A = (A_i)$, $i = 1,2,3$ notasyonlarından biri kullanılabilir [1].

TANIM I.2.2 (ID de Eşitlik): $(A_i) \in ID^3$ ve $B=(B_i) \in ID$, $i=1,2,3$ için

$$A=B \Leftrightarrow A_i=B$$

dir [1].

TANIM I.2.3 (ID^3 de Toplama): $A=(A_i) \in ID^3$ ve $B=(B_i) \in ID^3$; $i=1,2,3$ için A ile B yi

$$+ : ID^3 \times ID^3 \longrightarrow ID^3$$
$$(A,B) \longrightarrow A+B=(A_i+B_i)$$

üçlüsüne karşılık tutalım. A+B ye ID^3 de A ile B nin toplamı denir [1].

TANIM I.2.4 (ID^3 de Skaler ile Çarpma): $\lambda \in ID$ ve $A \in ID^3$ için λ ile A yı

$$.: ID \times ID^3 \longrightarrow ID^3$$

$$(\lambda, A) \longrightarrow \lambda A = (\lambda A_i) \; ; \; i=1,2,3$$

üçlüsüne karşılık tutalım. "λ A" ya A nın λ skaları ile çarpımı denir [1].

TEOREM I.2.1 (ID^3,+) bir Abel gruptur [1].

TEOREM I.2.2 (ID^3,+) sistemi ID üzerinde bir modüldür.

İSPAT: (ID^3,+) nın bir Abel grubu olduğu Teorem I.2.1 den ve ID nin birimi 1 olan değişmeli halka olduğu Teorem I.1.1 den bilinmektedir.

Şimdi M_1, M_2, M_3 ve M_4 aksiyomlarının sağlandığını gösterelim.

M_1) $\forall \alpha \in ID$ ve $\forall A, B \in ID^3$ için Tanım I.2.3 den ve Tanım I.2.4 den

$$\alpha (A+B) = (\alpha (A_i + B_i) = (\alpha A_i + \alpha B_i) = (\alpha A_i) + (\alpha B_i), \; i= 1,2,3$$

dir.

M_2) $\forall \alpha, \beta \in ID$ ve $\forall A \in ID^3$ için Tanım I.2.4 den

$$(\alpha + \beta)A = ((\alpha+\beta)A_i) = (\alpha A_i)+(\beta A_i) = \alpha A+\beta A$$

dir.

M_3) $\forall \alpha, \beta \in ID$ ve $\forall A \in ID^3$ için Tanım I.2.4 den

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$$

dır.

M_4) $(1,0) \in ID$ elemanının IR deki izomorfu 1 olmak üzere Tanım I.1.4 den $\forall A \in ID^3$ için

$$1A=A$$

dır.

Bundan sonra ID dual sayılar halkası üzerinde tanımlanan bu modüle 'ID-Modül denilecektir [1].

TANIM I.2.5 (ID-Modül Üzerinde İç Çarpım):

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^{\,*}$, $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^{\,*} \in ID$- Modül dual vektörünün iç çarpımı

$$< \, , \, >: ID^3 \times ID^3 \longrightarrow ID$$

şeklinde bir dönüşümdür ve

$$< \vec{A}, \vec{B} > = <\vec{a}+\varepsilon\vec{a}^*, \vec{b}+\varepsilon\vec{b}^*> = < \vec{a}, \vec{b} > + \varepsilon(<\vec{a}^*, \vec{b}> + < \vec{a}, \vec{b}^*>)$$

olarak tanımlanır [1].

TANIM I.2.6 (Dual Vektörün Normu): Bir $\vec{A} = \vec{a}+\varepsilon\vec{a}^* \in$ ID-Modülün normu

$$|| \vec{A} || = \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle}$$

olarak tanımlanır [1].

TEOREM I.2.3: Bir $\vec{A} = \vec{a}+\varepsilon\vec{a}^*$ dual vektörünün normu

$$|| \vec{A} || = \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle} = \left(\|\vec{a}\|, \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|} \right) \; ; \; \vec{a} \neq \vec{0}$$

dır.

Bundan sonra bu dual sayı

$$a = \|\vec{a}\| \text{ ve } a^* = \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|} \text{ olmak üzere}$$

$$\|\vec{A}\| = a + \varepsilon a^*$$

olarak yazılacaktır.

İSPAT: $\vec{A} = \vec{a}+\varepsilon\vec{a}^* \in$ ID-Modül vektörünü alırsak bu vektörün normu skaler olacağından

$$|| \vec{A} || = a+\varepsilon a^*$$

şeklinde yazabiliriz. Son ifadenin karesini alırsak

$$|| \vec{A} ||^2 = (a+\varepsilon a^*)^2$$

$$= a^2 + 2\varepsilon a a^*$$

elde edilir. Ayrıca Tanım I.2.6 dan

$$|| \vec{A} ||^2 = < \vec{A}, \vec{A} > = <\vec{a}, \vec{a}> + 2\varepsilon<\vec{a}, \vec{a}^*>$$

ifadesi ve dual sayıların eşitlik kavramından

$$a^2 = <\vec{a}, \vec{a}> = \|\vec{a}\|^2$$

olur, böylece

$$a^2 = \|\vec{a}\|^2$$

$$a = \|\vec{a}\|$$

elde edilir. Ayrıca dual kısımların eşitliğinden

$$aa^* = <\vec{a},\vec{a}^*>$$

$$a^* = \frac{\langle \vec{a},\vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|}$$

sonucuna ulaşırız. Dolayısıyla

$$\| \vec{A} \| = a + \varepsilon a^* = \|\vec{a}\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{a},\vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|} = \left(\|\vec{a}\|, \frac{\langle \vec{a},\vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|} \right)$$

elde edilir[1].

TANIM I.2.7 (Birim Dual vektör): Normu reel birime karşılık gelen $(1,0)$ dual sayısı olan vektöre birim dual vektör denir.

Tanım I.2.6 ve Teorem I.2.3 den $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ vektörü, birim dual vektör ise

$$\|\vec{a}\| = 1 \text{ ve } < \vec{a},\vec{a}^* > = 0 \qquad \text{(I.2.1)}$$

dir [1].

TEOREM I.2.4: $\vec{A} \neq (\vec{0},\vec{a}^*) \in$ ID-Modül olmak üzere

$$\vec{U} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

birim dual vektördür.

İSPAT: $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ ise Teorem I.2.3 den

$$\| \vec{A} \| = \|\vec{a}\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{a},\vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|}$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\vec{\mathrm{U}}=\frac{\vec{\mathrm{A}}}{\|\vec{\mathrm{A}}\|}=\frac{\vec{a}+\varepsilon\,\vec{a}^*}{\|\vec{a}\|+\varepsilon\dfrac{\langle\vec{a},\vec{a}^*\rangle}{\|\vec{a}\|}}=\frac{\vec{a}+\varepsilon\,\vec{a}^*}{\|\vec{a}\|\left(1+\varepsilon\dfrac{\langle\vec{a},\vec{a}^*\rangle}{\|\vec{a}\|^2}\right)}$$

elde edilir. Burada

$$\mathrm{k}=\frac{\langle\vec{a},\vec{a}^*\rangle}{\|\vec{a}\|^2}$$

dersek

$$\vec{\mathrm{U}}=\frac{\vec{a}+\varepsilon\,\vec{a}^*}{\|\vec{a}\|(1+\varepsilon\,\mathrm{k})}=\frac{(\vec{a}+\varepsilon\,\vec{a}^*)(1-\varepsilon\,\mathrm{k})}{\|\vec{\mathrm{a}}\|(1-\varepsilon^2\mathrm{k}^2)}=\frac{\vec{a}+\varepsilon\left(\vec{a}^*-\mathrm{k}\,\vec{a}^*\right)}{\|\vec{a}\|}$$

$$\vec{\mathrm{U}}=\vec{u}_0+\varepsilon\vec{u}_0^{\,*}=\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}+\varepsilon\frac{\vec{a}^*-\mathrm{k}\,\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

dual sayıların eşitliği tanımından

$$\vec{u}_0=\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}\quad \text{ve}\quad \vec{u}_0^{\,*}=\frac{\vec{a}^*-\mathrm{k}\,\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

dir.

$$<\vec{u}_0,\vec{u}_0>=1 \text{ ve } <\vec{u}_0,\vec{u}_0^{\,*}>=0$$

olduklarından $\vec{\mathrm{U}}$ birim dual vektördür [1].

SONUÇ I.2.1: Teorem I.2.4 de görüldüğü gibi

$$\vec{\mathrm{A}}=\|\vec{\mathrm{A}}\|\,\vec{\mathrm{U}} \tag{I.2.2}$$

şeklinde yazılabilir. (I.2.2) özdeşliğinde dual sayıları çarparsak

$$\vec{\mathrm{A}}=a\,\vec{u}+\left(a\,\vec{u}^*+a^*\vec{u}\right) \tag{I.2.3}$$

dir, ve

$$a^*=k\,\|\vec{a}\|=k\,a \tag{I.2.4}$$

olduğundan

$$\vec{\mathrm{A}}=a(1+\varepsilon\,k)\vec{U} \tag{I.2.5}$$

elde edilir.

I.3. E.STUDY DÖNÜŞÜMÜ

TANIM I.3.1 (Birim Dual Küre):

$$\{ \vec{X} = \vec{x} + \varepsilon.\vec{x}^{*} \mid \|\vec{X}\| = (1,0)\,; \vec{x}, \vec{x}^{*} \in \mathrm{IR}^{3} \}$$

cümlesine ID-Modülde birim dual küre denir [1].

TEOREM I.3.1 (E.STUDY): $A \neq (\vec{0}, \vec{a}^{*}) \in$ ID –Modül olmak üzere ID–Modülde denklemi

$$\|\vec{A}\| = (1,0)$$

olan birim dual kürenin dual noktaları IR^3 deki yönlü doğrulara bire bir karşılık gelir.

İSPAT: IR^3 deki bir doğru, bir başlangıç noktasına göre, üzerindeki bir M noktası ve doğrunun yönünü belirten bir $\vec{u}$ tarafından tamamen belirlenir. Böyle bir doğrunun vektörel denklemi

$$(\vec{x} - \vec{m}) \wedge \vec{u} = 0 \qquad (I.3.1)$$

dir.

(I.3.1) denkleminde $\vec{u}$ yerine $\lambda\,\vec{u}, \lambda \in \mathrm{IR}$, alınırsa yine aynı doğru belirtilmiş olacağından $\vec{u}$ birim vektör olarak alınabilir.

$$\vec{u}_0^{\,*} = \vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{m} \wedge \vec{u}$$

denirse $\vec{u}_0^{\,*}$ vektörüne $\vec{u}$ birim vektörünün O noktasına göre vektörel moment olarak bakılabilir.

$\vec{u}_0^{\,*}$ vektörel momenti, doğru üzerinde seçilen X noktasından bağımsızdır. Eğer doğru üzerinde X den başka bir Y noktası alınırsa

$$(\vec{y} - \vec{m}) \wedge \vec{u} = 0$$

dir. Buradan

$$\vec{u}_0^{\,*} = \vec{y} \wedge \vec{u} = \vec{m} \wedge \vec{u} \qquad (I.3.2)$$

olduğu görülür.

$\vec{u}_0^{\,*}$ vektörünün boyu O noktasının doğruya olan dik uzaklığına eşittir.

O noktasından doğruya inilen dikmenin ayağı Z olsun. $\vec{u}_0^{\,*}$ vektörü, X noktasının doğru üzerindeki seçilişinden bağımsız olduğundan

$$\vec{u}_0^{\,*} = \vec{z} \wedge \vec{u}$$

olur ve $\vec{u}_0^{\,*}$ vektörünün boyu

$$\left\|\vec{u}_0^{\,*}\right\| = \left\|\vec{z} \wedge \vec{u}\right\| = \left\|\vec{z}\right\| \left\|\vec{u}\right\| \sin\phi \qquad \text{(I.3.3)}$$

$$\left\|\vec{u}_0^{\,*}\right\| = \left\|\vec{z}\right\| = \delta$$

dır.

Bu son ifadeden de görüldüğü gibi $\vec{u}_0^{\,*}$, O başlangıç noktasının seçilişine bağlıdır. Eğer $(\vec{u}, \vec{u}_0^{\,*})$ vektör verilmiş ise IR^3 deki yönlü doğru tek anlamlı olarak bellidir.

$$\vec{u}_0^{\,*} = \vec{x} \wedge \vec{u}$$

olduğundan $\vec{u}_0^{\,*} \perp \vec{u}$ ve $\vec{u}_0^{\,*} \perp \vec{x}$ olur. O noktasından geçen ve $\vec{u}_0^{\,*}$ vektörüne düzlem içinde, O merkezli ve δ yarıçaplı çember çizilirse O dan $\vec{u}$ vektörüne çizilen dik doğru çemberi iki noktada keser. Bu noktalardan çizilen teğetler $(\vec{u}, \vec{u}_0^{\,*})$ ve $(\vec{u}, -\vec{u}_0^{\,*})$ vektör çiftine karşılık gelen yönlü doğrulardır. Momentin pozitif olduğu yani $(\vec{u}, \vec{u}_0^{\,*})$ vektör çiftine karşılık gelen yönlü doğru göz önüne alınırsa bu da bir tanedir. Böylece IR^3 deki yönlü doğrularla $(\vec{u}, \vec{u}_0^{\,*})$ vektör çiftleri bire bir karşılık gelmektedir. $\vec{u}, \vec{u}_0^{\,*} \in IR^3$ olmak üzere $(\vec{u}, \vec{u}_0^{\,*})$ vektör çifti için

$$<\vec{u}, \vec{u}> = 1 \text{ ve } <\vec{u}, \vec{u}_0^{\,*}> = 0 \qquad \text{(I.3.4)}$$

koşulları sağlanmaktadır.

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^{*} \in ID$-Modül birim dual vektör olsun (I.2.1) den

$$<\vec{a}, \vec{a}> = 1 \text{ ve } <\vec{a}, \vec{a}^{*}> = 0$$

olduğu bilinmektedir. Bu ise (I.3.4) başka bir şey değildir. Burada $\vec{a}$ vektörü $\vec{u}$ vektörüne ve $\vec{a}^{*}$ vektörü de $\vec{u}_0^{\,*}$ vektörüne karşılık gelmektedir, Yani $(\vec{u}, \vec{u}_0^{\,*})$ vektör çiftine $(\vec{a}, \vec{a}^{*})$ vektör çifti karşılık gelmektedir.

O halde $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ birim dual vektör verildiğinde IR^3 deki bir tek yönlü doğru tamamen bellidir. IR^3 deki yönlü doğrularla ID–Modülün birim dual vektörleri bire bir karşılık gelirler.

Eğer $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ birim dual vektörleri $\overrightarrow{OA} = \vec{A}$ yer vektörü olarak alınırsa IR^3 deki yönlü doğrular denklemi

$$\|\vec{A}\| = (1,0)$$

olan birim dual kürenin dual noktalarına bire bir karşılık gelir.

Teorem I.3.1 bize $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ birim dual vektörünün IR^3 de bir tek yönlü doğru belirttiğini göstermektedir. Burada $\vec{a}$ birim vektörü doğrunun yönünü, $\vec{a}^*$ ise O başlangıç noktasına göre $\vec{a}$ birim vektörünün vektörel momentini ifade etmektedir.

Aynı doğru O başlangıç noktasından başka bir P noktasına göre tek anlamlı olarak belirtilebileceğinden $\vec{a}^*$ vektörel momentini, O yerine başka bir P noktası alındığında $\vec{a}^*$ şeklinde yazmak faydalı olur. Böylece $\vec{a}^*$nin, $\vec{a}$ birim vektörünün herhangi noktaya göre vektörel momenti olduğu anlaşılmış olur [1].

TEOREM I.3.2: Başlangıç noktası yerine başka bir P noktası seçildiğinde IR^3 deki yönlü doğruyu belirten birim dual vektör

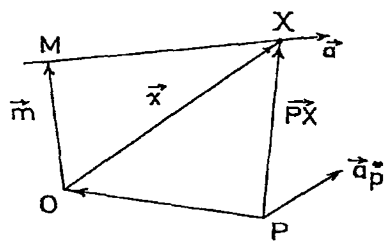
$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon.\left(\overrightarrow{PO} \wedge \vec{a} + \vec{a}^*\right)$$

dir.

İSPAT: Yönlü doğruyu P noktasına göre belirten birim dual vektör

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}_p^* \quad \text{ve} \quad \vec{a}_p^* = \overrightarrow{PX} \wedge \vec{a}$$

dir (ŞEKİL.I.3.2).



ŞEKİL I.3.2

$$\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{PO} + \vec{x}$$

olduklarından

$$\vec{a}_p^{\,*} = \left(\overrightarrow{PO} + \vec{x}\right) \wedge \vec{a}$$

$$= \overrightarrow{PO} \wedge \vec{a} + \vec{x} \wedge \vec{a}$$

$$= \overrightarrow{PO} \wedge \vec{a} + \vec{a}^*$$

dır. Böylece

$$\vec{\mathrm{A}} = \vec{a} + \varepsilon.\left(\overrightarrow{PO} \wedge \vec{a} + \vec{a}^*\right)$$

elde edilir [1].

TANIM I.3.2 (Dual Vektörün Ekseni): $\vec{\mathrm{A}} = \vec{a} + \varepsilon.\vec{a}^* \in$ ID-Modül olmak üzere

$$\vec{U} = \frac{\vec{\mathrm{A}}}{\left\|\vec{\mathrm{A}}\right\|}$$

birim dual vektörüne $\vec{\mathrm{A}}$ vektörünün ekseni denir [1].

TANIM I.3.3 (Dual Vektörün Yükselişi): $\vec{\mathrm{A}} = \vec{a} + \varepsilon.\vec{a}^* \in$ ID-Modül olmak üzere

$$\mathrm{k} = \frac{\left\langle \vec{a}, \vec{a}^* \right\rangle}{\left\|\vec{a}\right\|^2}$$

reel sayısına $\vec{\mathrm{A}}$ dual vektörünün adımı veya yükselişi denir [1].

(I.2.5) ifadesinde k= sonlu sayı ise $\vec{a} \neq 0$ ve $\vec{a}^* \neq 0$ dır. Burada $\vec{\mathrm{A}}$ dual vektörüne has dual vektör veya vida denir [1].

TANIM I.3.4 (Dual Açı): $\vec{\mathrm{A}}$ ve $\vec{\mathrm{B}}$ iki birim dual vektör olsunlar. Tanım I.2.5 ile verilen

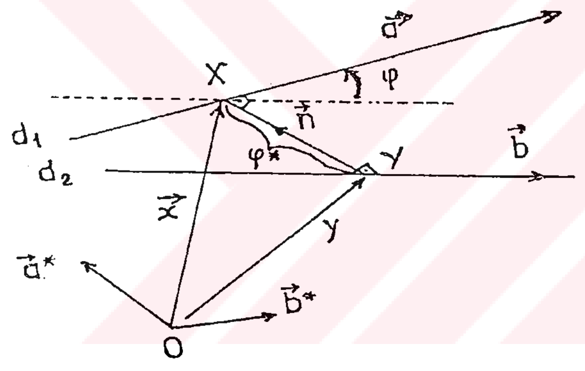
$$< \vec{\mathrm{A}},\vec{\mathrm{B}} > = < \vec{a},\vec{b} > + \varepsilon(<\vec{a},\vec{b}^*>+< \vec{a}^*,\vec{b} >)$$

iç çarpımının reel kısmı

$$<\vec{a},\vec{b} > = \mathrm{Cos}\varphi \ , 0 \leq \varphi \leq \pi , \quad \varphi \in \mathrm{IR}$$

dir (Şekil I.3.3).

$<\vec{\mathrm{A}},\vec{\mathrm{B}}>$ iç çarpımının dual kısmı olan $<\vec{a},\vec{b}^*>+< \vec{a}^*,\vec{b}>$ ifadesini geometrik manası ise



ŞEKİL I.3.3

$\vec{a}^*$ ve $\vec{b}^*$, sırası ile, d_1 ve d_2 yönlü doğruları üzerindeki X ve Y noktaları d_1 ve d_2 doğrularının ortak dikmelerinin ayakları olarak düşünülebilir. Bu ortak dikme yönündeki birim vektör

$$\vec{\mathrm{n}} = \pm \frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\left\| \vec{a} \wedge \vec{b} \right\|}$$

dir.

d_1 ve d_2 doğruları arasındaki en kısa uzaklık φ^* ile gösterilirse

$$\vec{x}-\vec{y}=\pm\frac{\vec{a}\wedge\vec{b}}{\left\|\vec{a}\wedge\vec{b}\right\|}\ \varphi^{*}$$

dir.

$$\vec{a}^{*}=\vec{x}\wedge\vec{a} \quad \text{ve} \quad \vec{b}^{*}=\vec{y}\wedge\vec{b}$$

olduklarından

$$\left\langle\vec{a},\vec{b}^{*}\right\rangle=\left\langle\vec{a},\vec{y}\wedge\vec{b}\right\rangle=\left\langle-\vec{y},\vec{a}\wedge\vec{b}\right\rangle$$

$$+\quad\left\langle\vec{a}^{*},\vec{b}\right\rangle=\left\langle\vec{x}\wedge\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\left\langle\vec{x},\vec{a}\wedge\vec{b}\right\rangle$$

$$\left\langle\vec{a},\vec{b}^{*}\right\rangle+\left\langle\vec{a}^{*},\vec{b}\right\rangle=\left\langle\vec{x}-\vec{y},\vec{a}\wedge\vec{b}\right\rangle$$

ise

$$<\vec{x}-\vec{y},\vec{a}\wedge\vec{b}>=<\pm\frac{\vec{a}\wedge\vec{b}}{\left\|\vec{a}\wedge\vec{b}\right\|}\ \varphi^{*},\vec{a}\wedge\vec{b}>=\pm\varphi^{*}\frac{1}{\left\|\vec{a}\wedge\vec{b}\right\|}<\vec{a}\wedge\vec{b},\vec{a}\wedge\vec{b}>$$

ise

$$<\vec{a},\vec{b}^{*}>+<\vec{a}^{*},\vec{b}>=\pm\varphi^{*}\left\|\vec{a}\wedge\vec{b}\right\|=\pm\varphi^{*}\sin\varphi$$

bulunur. Sonuç olarak $\vec{\mathrm{A}}$ ile $\vec{\mathrm{B}}$ nin iç çarpımı için

$$<\vec{\mathrm{A}},\vec{\mathrm{B}}>=\cos\varphi\pm\varepsilon\,\varphi^{*}\sin\varphi$$

burada (-) işaretini dikkate alırsak ve Taylor formülü gereğince

$$<\vec{\mathrm{A}},\vec{\mathrm{B}}>=\cos(\varphi+\varepsilon\,\varphi^{*}) \tag{I.3.5}$$

elde edilir. Bu son ifadedeki

$$\phi=\varphi+\varepsilon\,\varphi^{*}$$

dual sayısı $\vec{\mathrm{A}}$ ile $\vec{\mathrm{B}}$ birim vektörleri arasındaki dual açı denir [1].

SONUÇ I.3.1: Şayet $\vec{\mathrm{A}}$ ile $\vec{\mathrm{B}}$ vektörleri birim dual vektörler değilse $\vec{\mathrm{A}}$ ile $\vec{\mathrm{B}}$ vektörleri yönündeki birim dual vektörler

$$\vec{U}=\frac{\vec{\mathrm{A}}}{\left\|\vec{\mathrm{A}}\right\|} \quad \text{ve} \quad \vec{V}=\frac{\vec{\mathrm{B}}}{\left\|\vec{\mathrm{B}}\right\|}$$

olur.

$$< \vec{U},\vec{V} > = cos\phi$$

$$< \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}, \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|} > = cos\varphi$$

$$< \vec{A},\vec{B} > = \|\vec{A}\| \; \|\vec{B}\| \; cos\phi \qquad (I.3.6)$$

dir [1].

TANIM I.3.5 (ID-Modül Üzerinde Dış Çarpım): $\vec{A},\vec{B} \in$ID-Modül dual vektörlerinin dış çarpımı

$$\wedge : ID^3 x \; ID^3 \longrightarrow ID^3$$

şeklinde bir işlemdir ve

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{a} \wedge \vec{b} + \varepsilon(\vec{a} \wedge \vec{b}^* + \vec{a}^* \wedge \vec{b})$$

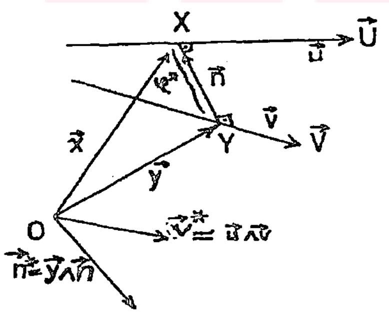
olarak tanımlanır [1].

TEOREM I.3.3: $\vec{A},\vec{B} \in$ ID-Modül için

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \|\vec{A}\| \; \|\vec{B}\| sin\phi \vec{N}$$

dir.

İSPAT: $\vec{A},\vec{B}$ nin eksenleri, sırası ile, $\vec{U}$ ve $\vec{V}$ olsun (Şekil.I.3.5).



ŞEKİL.I.3.5

$$\vec{U}\wedge\vec{V}=(\vec{u}+\varepsilon\,\vec{u}^{*})\wedge(\vec{v}+\varepsilon\,\vec{v}^{*})$$

$$=\vec{u}\wedge\vec{v}+\varepsilon\,(\vec{u}\wedge\vec{v}^{*}+\vec{u}^{*}\wedge\vec{v})$$

ve

$$\vec{u}^{*}=\vec{x}\wedge\vec{u}\quad\text{ve}\quad\vec{v}^{*}=\vec{y}\wedge\vec{v}$$

olduklarından

$$\vec{U}\wedge\vec{V}=\vec{u}\wedge\vec{v}+\varepsilon\,(\vec{u}\wedge(\vec{y}\wedge\vec{v})+(\vec{x}\wedge\vec{u})\wedge\vec{v})$$

elde edilir. Ayrıca

$$\vec{u}\wedge(\vec{y}\wedge\vec{v})=\langle\vec{u},\vec{v}\rangle\vec{y}-\langle\vec{u},\vec{y}\rangle\vec{v}$$

$$(\vec{x}\wedge\vec{u})\wedge\vec{v}=\langle\vec{x},\vec{v}\rangle\vec{u}-\langle\vec{u},\vec{v}\rangle\vec{x}$$

$$\vec{U}\wedge V=\vec{u}\wedge\vec{v}+\varepsilon\left[\langle\vec{x},\vec{v}\rangle\,\vec{u}-\langle\vec{y},\vec{u}\rangle\,\vec{v}-(\vec{x}-\vec{y})\cos\varphi\right]$$

dir.

$$\vec{x}=\vec{y}\mp\vec{n}\varphi^{*}\quad\text{ve}\quad\vec{u}\wedge\vec{v}=\mp\vec{n}\,sin\varphi$$

olduğundan

$$\langle\vec{x},\vec{v}\rangle\,\vec{u}-\langle\vec{y},\vec{u}\rangle\,\vec{v}=\langle\vec{y}\mp\vec{n}\varphi^{*},\vec{v}\rangle\,\vec{u}-\langle\vec{y},\vec{u}\rangle\,\vec{v}$$

$$=\langle\vec{y},\vec{v}\rangle\,\vec{u}-\langle\vec{y},\vec{u}\rangle\,\vec{v}\mp\varphi^{*}\det(\vec{u},\vec{v},\vec{u})$$

$$=\vec{y}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})$$

$$=\vec{y}\wedge(\mp\vec{n}\sin\varphi)$$

$$=\mp(\vec{y}\wedge\vec{n})\sin\varphi$$

$$=\mp\vec{n}^{*}\sin\varphi$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\vec{U}\wedge\vec{V}=\mp\vec{n}\sin\varphi+\varepsilon\left[\mp\vec{n}^{*}\sin\varphi\mp\varphi^{*}\vec{n}\cos\varphi\right]$$

elde edilir. Bu son ifadede (+) işareti dikkate alınırsa ve $\varepsilon^2=0$ olduğundan $\varepsilon^2\varphi^{*}\vec{n}^{*}\cos\varphi$ terimi ilave edilirse

$$\vec{U}\wedge\vec{V}=(\vec{n}+\varepsilon\,\vec{n}^{*})(\sin\varphi+\varepsilon\,\varphi^{*}\cos\varphi)$$

bulunur. $\vec{N}=\vec{n}+\varepsilon\,\vec{n}^{*}$ bir birim dual vektördür. Taylor formülünden

$$\sin\varphi+\varepsilon\,\varphi^{*}\cos\varphi=\sin(\varphi+\varepsilon\,\varphi^{*})=\sin\phi$$

ve

$$\phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$$

dır. Dolayısıyla

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{\mathrm{N}}\ sin\,\phi$$

elde edilir.

$$\vec{\mathrm{A}} = \|\vec{\mathrm{A}}\|\,\vec{U} \quad \text{ve} \quad \vec{\mathrm{B}} = \|\vec{\mathrm{B}}\|\,\vec{V}$$

olduklarından

$$\vec{\mathrm{A}} \wedge \vec{\mathrm{B}} = \|\vec{\mathrm{A}}\|\,\|\vec{\mathrm{B}}\|\ sin\,\phi\ \vec{\mathrm{N}}$$

elde edilir [1].

TANIM I.3.6 (ID-Modül Üzerinde Karma Çarpım): $\vec{\mathrm{A}},\vec{\mathrm{B}},\vec{\mathrm{C}} \in$ ID-Modül dual vektörlerinin karma çarpımı

$$f: \mathrm{ID}^3 \times \mathrm{ID}^3 \times \mathrm{ID}^3 \longrightarrow \mathrm{ID}$$

şeklinde bir dönüşümdür ve

$$f(\vec{\mathrm{A}},\vec{\mathrm{B}},\vec{\mathrm{C}}) = \left\langle \vec{\mathrm{A}} \wedge \vec{\mathrm{B}},\vec{\mathrm{C}} \right\rangle = \left\langle \vec{a} \wedge \vec{b},\vec{c} \right\rangle + \varepsilon\left[\left\langle \vec{a} \wedge b,\vec{c}^* \right\rangle + \left\langle \vec{a} \wedge \vec{b}^*,\vec{c} \right\rangle + \left\langle \vec{a}^* \wedge \vec{b},\vec{c} \right\rangle\right]$$

olarak tanımlanır [1].

TANIM I.3.6 (Lineer Işın Kompleksi): $\vec{\mathrm{A}} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a}^*$ bir has dual vektör olmak üzere

$$\left\langle \vec{a},\vec{x}^* \right\rangle + \left\langle \vec{a}^*,\vec{x} \right\rangle = 0$$

eşitliğini sağlayan $\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon\vec{x}^*$ doğrularının cümlesine bir lineer ışın kompleksi denir [1].

TANIM I.3.8 (Normlanmış Homogen Olmayan Plüker Doğru Koordinatları): $\vec{U} = \vec{u} + \varepsilon\vec{u}^*$ birim dual vektör olmak üzere IR^3 de standart baza göre

$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + u_3\vec{e}_3 \quad \text{ve} \quad \vec{u}_0^* = u_{01}^*\vec{e}_1 + u_{02}^*\vec{e}_2 + \vec{u}_{03}^*$$

dir.

$(\vec{u},\vec{u}_0^*)$ vektör çiftinin altı bileşeni normlanmış homogen olmayan plücker doğru koordinatları denir[1].

TANIM I.3.9 (Normlanmış Homogen Plücker Doğru Koordinatları): Teorem I.3.8 de verilen $\vec{u}$ vektörü yerine $\vec{v}=\rho\vec{u}$ ve $\vec{u}_0^*$ yerinede $\vec{v}_0^*=\rho\,\vec{u}_0^*$ alınırsa $\vec{u}$ vektörünün birim vektör olmasından

$$<\vec{u},\vec{u}_0^*>=0$$

dır. Dolayısıyla

$$<\vec{v},\vec{v}_0^*>=0$$

koşulu gerçeklenir. Burada yine

$$\vec{v}_0^*=\vec{x}\wedge\vec{v}$$

dir.

$(\vec{v},\vec{v}_0^*)$ vektör çiftinin $(\vec{v},\vec{v}_0^*)=(\rho u_1,\rho u_2,\rho u_3;\rho u_{10}^*,\rho u_{02}^*,\rho u_{03}^*)$ altı bileşeni normlanmış homogen Plücker doğru koordinatlarıdır[1].

I.4.DUAL DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR

TANIM I.4.1 (Bir Dual Sayının 0'ıncı Kuvveti): $z=x+\varepsilon x^*\in$ID-Modül olmak üzere

$$z^0=(x+\varepsilon x^*)^0=(1,0)$$

dır[1].

TEOREM I.4.1: $z=x+\varepsilon x^*$ $\in$ID-Modül ve n$\in$N olmak üzere

$$z^{\mathrm{n}}=(x+\varepsilon x^*)^{\mathrm{n}}=x^{\mathrm{n}}+\varepsilon\,\mathrm{n}\,x^{\mathrm{n-1}}x^*$$

dir.

TANIM I.4.2 (Taylor Açılımı): f fonksiyonu G bölgesinde tanımlı olmak üzere

$$f(z)=f(z_0)+\frac{z-z_0}{1!}f'(z_0)+\frac{(z-z_0)^2}{2!}f''(z_0)+\ldots+\frac{(z-z_0)^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}!}f^{(\mathrm{n})}(z_0)+\ldots$$

serisine f dual fonksiyonunun $z_0\in$G noktasındaki Taylor açılımı denir.

$z_0 = 0$ noktasındaki Taylor açılımını yaparsak

$$f(z) = f(0) + \frac{z}{1!} f'(0) + \frac{z^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{z^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots \qquad \text{(I.4.1)}$$

Maclaurin seri açılımını elde ederiz[1].

TEOREM I.4.2: $z = x + \varepsilon x^*$ olmak üzere

$$f(z) = f(x + \varepsilon x^*) = f(x) + \varepsilon\, x^* f'(x)$$

dir.

İSPAT: (I.3.1) formülü gereğince ve Teorem I.3.1 den

$$f(z) = f(0) + \frac{x + \varepsilon x^*}{1!} f'(0) + \ldots + \frac{x^n + n\varepsilon x^{n-1}}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots$$

$$f(x + \varepsilon x^*) = (f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)} + \ldots) + \varepsilon x^* (f'(0) + \frac{x}{1!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n+1)}(0) + \ldots)$$

olur. $g(z) = f'(z)$ dersek

$$g^{(n-1)}(z) = f^{(n)}(z) \text{ ve } g^{(n)}(z) = f^{(n+1)}(z)$$

olur. Dolayısıyla

$$f(x + \varepsilon \cdot x^*) = (f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)} + \ldots) + \varepsilon \cdot x^*.(g(0) + \frac{x}{1!} g'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} g^{(n)}(0) + \ldots)$$

ise

$$f(z) = f(x) + \varepsilon x^* g(x)$$

elde edilir.

$z = x + \varepsilon \cdot x^*$ ve $g(x) = f'(x)$ yazarsak

$$f(x + \varepsilon x^*) = f(x) + \varepsilon x^* f'(x)$$

genel formülüne ulaşırız[1].

SONUÇ I.3.1: (I.3.1) formülünden

$$cos(x + \varepsilon x^*) = cos\, x - \varepsilon x^* sin\, x \qquad \text{(I.4.3)}$$

$$sin(x + \varepsilon x^*) = sin\, x + \varepsilon x^* cos\, x \qquad \text{(I.4.4)}$$

dir.

TANIM I.4.2 (Özel Bir Dönüşüm):

$$f_3 : GL(3,IR) \longrightarrow GL(3,IR)$$

$$A \longrightarrow f_3[A]$$

dönüşümünü, A= $[a_{ij}]_{3x3}$ olmak üzere

$$f_3[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & -a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

TEOREM I.4.3: A,B$\in$GL(3,IR) ve "d" bir türev operatörü olmak üzere

i) $f_3[A \cdot B] = f_3[A] f_3[B]$

ii) $f_3[f_3[A]] = A$

iii) $(f_3[A])^T = f_3[A^T]$

iv) $f_3(dA) = d[f_3[A]]$

dir.

İSPAT: i) A=$[a_{ij}]_{3x3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in$GL(3,IR) matrisini

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}, A_{21} = [a_{31} \quad a_{32}], A_{22} = [a_{33}]$$

şeklinde blok matrislere ayırırsak

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \text{ ve } f_3(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

olur.

A,B$\in$GL(3,IR) için $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ şeklinde

yazarsak

$$A.B = \begin{bmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} & A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} \\ A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} & A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece

$$f_3(A.B)=\begin{bmatrix} A_{11}\cdot B_{11}+A_{12}\cdot B_{21} & -(A_{11}\cdot B_{12}+A_{12}\cdot B_{22}) \\ -(A_{21}\cdot B_{11}+A_{22}\cdot B_{21}) & A_{21}\cdot B_{12}+A_{22}\cdot B_{22} \end{bmatrix}$$

olur. Diğer taraftan

$$f_3[A]\cdot f_3[B]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A_{11}\cdot B_{11}+A_{12}\cdot B_{21} & -(A_{11}\cdot B_{12}+A_{12}\cdot B_{22}) \\ -(A_{21}\cdot B_{11}+A_{22}\cdot B_{21}) & A_{21}\cdot B_{12}+A_{22}\cdot B_{22} \end{bmatrix}$$

dolayısıyla

$$f_3[A]\,f_3[B]=f_3[AB]$$

sonucuna ulaşılır.

ii) $f_3(A)=\begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$

ise

$$f_3[f_3[A]]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}=A$$

olur.

iii) $f_3[A]=\begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$

ise

$$(f_3[A])^T=\begin{bmatrix} A^T{}_{11} & -A^T{}_{12} \\ -A^T{}_{21} & A^T{}_{22} \end{bmatrix}$$

dir. Ayrıca

$$A^T=\begin{bmatrix} A^T{}_{11} & A^T{}_{12} \\ A^T{}_{21} & A^T{}_{22} \end{bmatrix}$$

ise

$$f_3[A^T]=\begin{bmatrix} A^T{}_{11} & -A^T{}_{12} \\ -A^T{}_{21} & A^T{}_{22} \end{bmatrix}$$

dir. Buradan

$$(f_3[\mathrm{A}])^{\mathrm{T}} = f_3[\mathrm{A}^{\mathrm{T}}]$$

sonucuna ulaşılır.

iv) $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} \end{bmatrix}$ ise $d\mathrm{A} = \begin{bmatrix} d\mathrm{A}_{11} & d\mathrm{A}_{12} \\ d\mathrm{A}_{21} & d\mathrm{A}_{22} \end{bmatrix}$

ve

$$f_3[d\mathrm{A}] = \begin{bmatrix} d\mathrm{A}_{11} & -d\mathrm{A}_{12} \\ -d\mathrm{A}_{21} & d\mathrm{A}_{22} \end{bmatrix}$$

olur. Ayrıca

$$f_3(\mathrm{A}) = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_{11} & -\mathrm{A}_{12} \\ -\mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} \end{bmatrix} \text{ ise } df_3(\mathrm{A}) = \begin{bmatrix} d\mathrm{A}_{11} & -d\mathrm{A}_{12} \\ -d\mathrm{A}_{21} & d\mathrm{A}_{22} \end{bmatrix}$$

dir. Dolayısıyla

$$f_3[d\mathrm{A}] = df_3[\mathrm{A}]$$

elde edilir.

BÖLÜM II

II.1 LORENTZ İÇ ÇARPIMI

Lorentz iç çarpımının bir çok literatürde iki farklı tanımı vardır. Bu iki tanım aynı anlama gelmelerine rağmen kullanım yerlerine göre bazı farklı geometrik sonuçlara sahiptirler.

TANIM II.1.1 (Lorentz İç Çarpımı ve Vektörel Çarpım): n-boyutlu vektör uzayı IR^n ve $\vec{x},\vec{y} \in IR^n$ için Lorentz iç çarpımı

$$< , >\big|_{L_1} : IR^n x IR^n \longrightarrow IR$$

$$(\vec{x},\vec{y}) \longrightarrow <\vec{x},\vec{y}>\big|_{L_1} = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n \qquad (II.1.1)$$

veya

$$< , >\big|_{L_2} : IR^n x IR^n \longrightarrow IR$$

$$(\vec{x},\vec{y}) \longrightarrow <\vec{x},\vec{y}>\big|_{L_2} = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i y_i \qquad (II.1.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada tanımlanan $< , >\big|_{L_1}$ ve $< , >\big|_{L_2}$ fonksiyonları IR^n de bir Lorentz iç çarpımı olup, bu fonksiyonlarla birleşen IR^n vektör uzayına da n-boyutlu standart Lorentz uzayı ya da kısaca Lorentz uzayı denir ve sırası ile ,

$$L^n(n-1,1) = \left\{ IR^n, \langle , \rangle\big|_{L_1} \right\}$$

ve

$$L^n(1,n-1) = \left\{ IR^n, \langle , \rangle\big|_{L_2} \right\}$$

şeklinde gösterilir.

Özel olarak n=3 için $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere

$$<\vec{x},\vec{y}>\big|_{L_1} = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3 \qquad (II.1.3)$$

ve bu iki vektörün vektörel çarpımı

$$\vec{x} \wedge \vec{y}\big|_{L_1} = -\begin{vmatrix} E_1 & E_2 & -E_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \qquad \text{(II.1.4)}$$

şeklinde tanımlanır. Aynı şekilde

$$<\vec{x},\vec{y}>\big|_{L_2} = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \qquad \text{(II.1.5)}$$

ve

$$\vec{x} \wedge \vec{y}\big|_{L_2} = -\begin{vmatrix} -E_1 & E_2 & E_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \qquad \text{(II.1.6)}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tez çalışması $L^3(2,1)$ uzayında yapılacaktır. Bu çalışmada, aksi söylenmedikçe Lorentz uzayı deyince $L^3(2,1)$ uzayı anlaşılacaktır.

Yukarıdaki vektörel çarpımda

$\vec{E}_1 \wedge \vec{E}_2\big|_L = \vec{E}_3$, $\vec{E}_2 \wedge \vec{E}_3\big|_L = -\vec{E}_1$ ve $\vec{E}_3 \wedge \vec{E}_1\big|_L = \vec{E}_2$

dir [5].

TANIM II.1.2 (Time-like, Space-like ve Null Vektörler): $L^3(2,1)$ Lorentz uzayında herhangi bir vektör $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ olmak üzere

i) $<\vec{x},\vec{x}>\big|_L \rangle\ 0$ ise $\vec{x}$ vektörüne Space-like vektör

ii) $<\vec{x},\vec{x}>\big|_L \langle\ 0$ ise $\vec{x}$ vektörüne Time-like vektör

iii) $<\vec{x},\vec{x}>\big|_L = 0$ ise $\vec{x}$ vektörüne Light-like (Null) vektörler

denir [5].

TEOREM II.1.1: $L^3(2,1)$ uzayında üç vektörler $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ve $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \in IR^3$ olmak üzere bu durumda

1) $\left\langle \vec{a} \wedge \vec{b}\big|_{L_1}, \vec{c} \right\rangle\big|_L = -\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

2) $\vec{a} \wedge \vec{b}\big|_L = -\vec{b} \wedge \vec{a}\big|_L$

3) $(\vec{a} \wedge \vec{b}\big|_L) \wedge \vec{c}\big|_L = -\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle\big|_L \cdot \vec{b} + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle\big|_L \cdot \vec{a}$

4) $\langle \vec{a}\wedge\vec{b}|_L, \vec{a}\rangle|_L = 0$ veya $\langle \vec{a}\wedge\vec{b}|_L, \vec{b}\rangle|_L = 0$

5) $\langle \vec{a}\wedge\vec{b}|_L, \vec{a}\wedge\vec{b}|_L\rangle|_L = -\langle \vec{a},\vec{a}\rangle|_L \cdot \langle \vec{b},\vec{b}\rangle|_L + (\langle \vec{a},\vec{b}\rangle|_L)^2$

dir [5].

TANIM II.1.3 (Lorentz Hiperbolik Birim Kürerler): Aşağıda tanımlanan S_1^2 ve H_0^2 kümelerine Lorentz hiperbolik birim küreler denir.

$$S_1^2 = \{\vec{a} \in \mathrm{IR}^3 / \langle \vec{a},\vec{a}\rangle|_L = 1\}$$
$$H_0^2 = \{\vec{a} \in \mathrm{IR}^3 / \langle \vec{a},\vec{a}\rangle|_L = -1\}$$

şeklinde ifade edilir [7].

TANIM II.1.4 (Lorentz Anlamında Diklik): n-boyutlu Lorentz uzayı L^n nin iki $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörü için

$$\langle \vec{x},\vec{y}\rangle|_L = 0$$

ise bu iki vektöre Lorentz anlamında diktirler denir [5].

TANIM II.1.5 (Lorentz Uzayında Norm): n-boyutlu Lorentz uzayı L^n de bir vektör $\vec{x}$ ve $<\ ,\ >|_L$ de L^n uzayında Lorentz iç çarpımı olmak üzere, $\vec{x}$ vektörünün normu

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{|\langle \vec{x},\vec{x}\rangle|_L|}$$

şeklinde tanımlanır [5].

TEOREM II.1.2: $\vec{x} \in L^n$ olmak üzere ;

1) $\|\vec{x}\| \geq 0$ dır.

2) $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x}$ bir null vektördür.

3) $\vec{x}$ bir Space-like vektör ise

$$\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x},\vec{x}\rangle_L$$

dir.

4) $\vec{x}$ bir Time-like vektör ise

$$\|\vec{x}\|^2 = -\langle \vec{x},\vec{x}\rangle_L$$

dir [5].

TANIM II.1.6 (Time Koni):n-boyutlu Lorentz uzayı L^n nin bütün time-like vektörlerinin cümlesi δ olsun . $u \in$ δ için

$$C(\vec{u}) = \{ v \in \delta / \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|_L < 0 \}$$

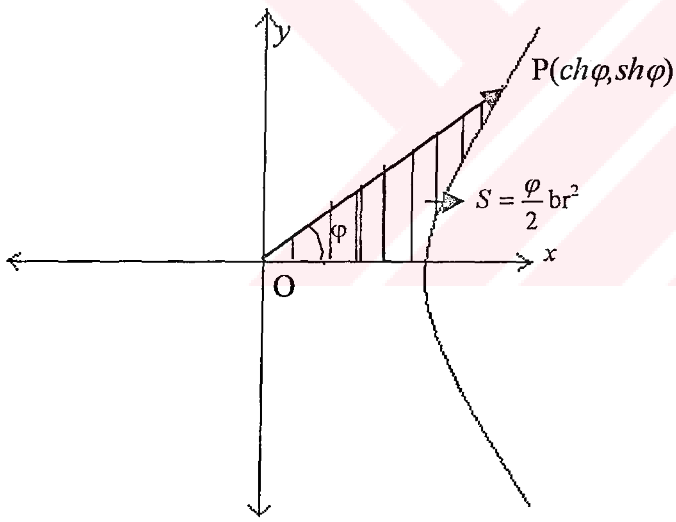
olmak üzere $C(\vec{u})$ ya $\vec{u}$ nü ihtiva eden L^n nin time konisi denir [5].

TANIM II.1.7 (Space Koni):n-boyutlu Lorentz uzayı L^n nin bütün space-like vektörlerinin cümlesi δ olsun . $u \in$ δ için

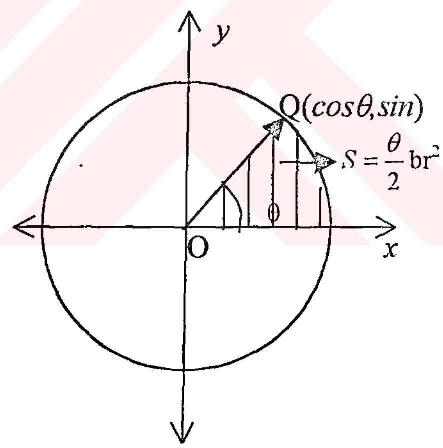
$$C(\vec{u}) = \{ v \in \delta / \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|_L > 0 \}$$

olmak üzere $C(\vec{u})$ ya $\vec{u}$ nü ihtiva eden L^n nin space konisi denir [5].

TANIM II.1.8 (Hiperbolik Radyan): Sıkca kullanılan "*Shu*", "*Chu*" ifadelerindeki "u" hiperbolik radyan cinsinden bir açı birimidir (Şekil II.1.3).



ŞEKİL II.1.1

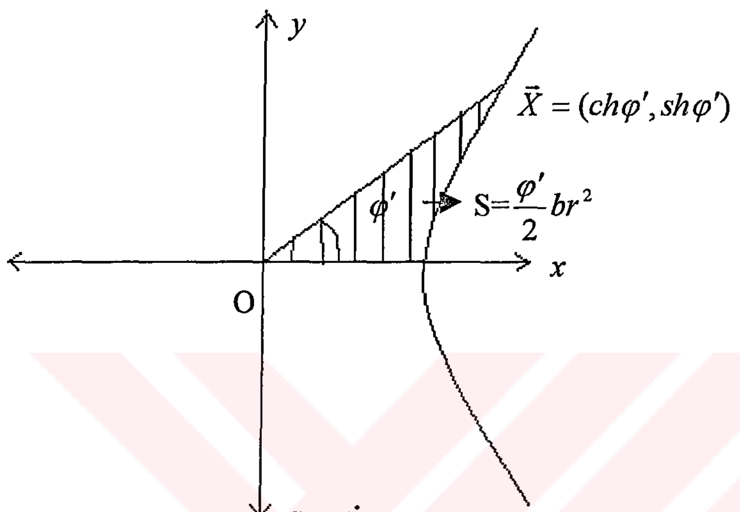


ŞEKİL II.1.2

Şekil II.1.2 deki birim hiperbol üzerindeki bir P noktasının koordinatları olarak verilen "$sh\varphi$" ve "$ch\varphi$" sayıları, birim çember Şekil II.1.2 üzerindeki bir $Q(\cos\theta, \sin\theta)$ noktasının koordinatlarına oldukça benzemektedir. Birim çember üzerinde Q noktasının koordinatları için kullanılan θ radyanlık açı Şekil II.1.2 deki taralı alanın iki katıdır.

Aynı şekilde hiperbol üzerindeki "φ" radyanlık açı ise yine Şekil II.1.3 deki taralı bölgenin iki katına eşittir [6].

TANIM II.1.9 (Space-Like Vektörler Arasındaki Lorentz anlamında Açı): $\vec{x} \in L^2$ Space-Like birim vektör olsun $\vec{x}$ vektörünün ox ekseni ile, saatin ters yönündeki açısı φ' olsun.(Şekil II.1.3)



ŞEKİL II.1.3

$\vec{x}, \vec{y} \in L^2$ Space-like birim vektörler olsun. $\vec{x}$ in ox ekseni ile yaptığı açı φ_1' ve $\vec{y}$ nin ox ekseni ile yaptığı açı φ_2' olsun. Dolayısıyla

$$\vec{x} = (ch\varphi_1', sh\varphi_1') \text{ ve } \vec{y} = (ch\varphi_2', sh\varphi_2')$$

olur. Böylece

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|_L = ch\varphi_1' \cdot ch\varphi_2' - sh\varphi_1' \cdot sh\varphi_2' = ch(\varphi_1' - \varphi_2')$$

Burada iki vektör arasındaki Lorentz anlamındaki açı

$$\varphi = \varphi_1' - \varphi_2'$$

dir [6].

TEOREM II.1.3: $\vec{x}$ Space-like birim vektör ve ox ekseni ile saatin ters yönünde yaptığı açı φ' olsun. R_x de y=x doğrusuna göre yansıma olmak üzere $\vec{x}$ nün y=x doğrusuna göre yansıması olan $\vec{x}'$ vektörü oy ekseni ile $-\varphi'$ açısı yapar.

İSPAT: $\vec{x}$ Space-like birim vektör ve ox ekseni ile saatin ters yönünde φ' açısı yapıyorsa $\vec{x} = (ch\varphi', sh\varphi')$ dir. R_x de y=x doğrusuna göre yansıma ise

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ olmak üzere

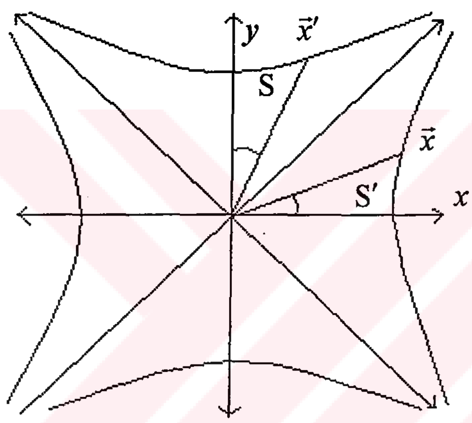
$$R_x : L^2 \longrightarrow L^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow R_x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \vec{x}'$$

olur.

$$\vec{x}' = (sh\varphi', ch\varphi')$$

şeklinde yazabiliriz.



ŞEKİL II.1.4

Şekil II.1.4 de S=S' ve φ' saatin ters yönünde iken φ saat yönünde olduğundan

$$\varphi' = -\varphi$$

dir. Dolayısıyla

$$\vec{x}' = (-sh\varphi, ch\varphi)$$

olur.

TEOREM II.1.4: $\vec{x}(x, y)$ vektörünün y=x doğrusuna göre yansıması $\vec{x}'$ ise

$$\langle \vec{x}, \vec{x}' \rangle \big|_L = 0$$

dır.

İSPAT: $\vec{x}(x,y)$ olmak üzere

$$\mathrm{IR_x}(\vec{x}) = \mathrm{R_x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

ise

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = (y,x)$$

olur. Dolayısıyla

$$\langle \vec{x}, \vec{x}' \rangle = xy\text{-}yx = 0$$

elde edilir.

TEOREM II.1.5: $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ time-like future pointing (veya past pointing) vektörler olmak üzere $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri arasındaki açı φ ise

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|_L = -ch\varphi$$

dir.

İSPAT: $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri oy ekseni ile saat yönünde yaptıkları açı φ_1 ve φ_2 olsun. Dolayısıyla

$$\vec{x} = (-sh\varphi_1, ch\varphi_1) \text{ ve } \vec{y} = (-sh\varphi_2, ch\varphi_2)$$

dir.

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|_L = sh\varphi_1\, sh\varphi_2 - ch\varphi_1\, ch\varphi_2$$

elde edilir.

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

dersek

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|_L = -ch\varphi \qquad \text{(II.1.8)}$$

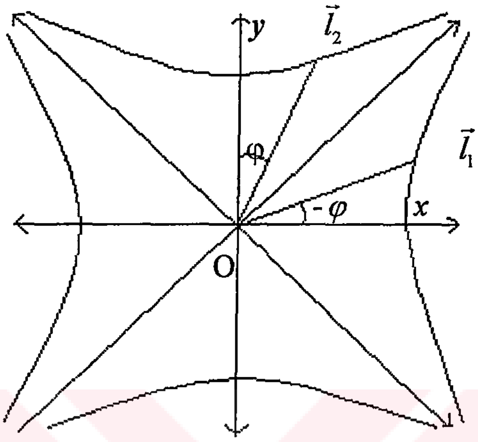
sonucuna ulaşırız.

L^2 DE DÖNME

Biliyoruz ki $\vec{e}_1 = (1,0)$ ve $\vec{e}_2 = (0.1)$ olmak üzere

$$\langle e_1, e_2 \rangle|_L = \langle e_2, e_1 \rangle|_L = 0 - 0 = 0$$

dır. Böylece $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ vektörleri Euclid anlamında dik olduğu gibi Lorentz anlamında da diktir. Şimdi $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ yi φ (Lorentz anlamında φ radyanlık açı) kadar döndürelim (Şekil II.1.5).



ŞEKİL II.1.5

$\vec{x}=(x,y)$ vektörünün φ açısı kadar dönmesi sonucunda koordinatları $\vec{x}=(x',y')$ olsun. Dolayısıyla

$$\vec{x}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2=x'\vec{l}_1+y'\vec{l}_2 \tag{II.1.9}$$

yazılabilir. (II.1.9) u $\vec{l}_1$ ile çarparsak

$$x'=x\langle\vec{e}_1,\vec{l}_1\rangle|_L+y\langle\vec{e}_2,\vec{l}_1\rangle|_L$$

elde edilir. Ayrıca

$$\langle\vec{e}_1,\vec{l}_1\rangle|_L=ch\varphi \text{ ve } \langle\vec{e}_2,\vec{l}_1\rangle|_L=0-(-sh\varphi)=sh\varphi$$

olduğundan

$$x'=x\,ch\varphi+y\,sh\varphi \tag{II.1.10}$$

dir. Aynı şekilde (II.1.9) denklemini $\vec{l}_2$ vektörü ile çarparsak ve

$$\langle\vec{e}_1,\vec{l}_2\rangle|_L=-sh\varphi \text{ ve } \langle\vec{e}_2,\vec{l}_2\rangle|_L=0-(-ch\varphi)=ch\varphi$$

olduğundan

$$-y' = -x\,sh\varphi - y\,ch\varphi$$

$$y' = x\,sh\varphi + y\,ch\varphi \qquad (\text{II}.1.11)$$

dir. (II.1.10) ve (II.1.11) denklemlerini matris formunda yazarsak

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (\text{II}.1.12)$$

yazılabilir. Burada

$$\mathrm{A}(\varphi) = \begin{bmatrix} ch\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi \end{bmatrix}$$

matrisine L^2 de φ açısı kadar dönme matrisi denir [4].

II.2 DUAL UZAYIN LORENTZ GEOMETRİSİ

TEOREM II.2.1 Bir $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ birim dual vektörünün normu

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle|_L} = \left(\|\vec{a}\|, \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|} \right) ; \ \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle|_L \neq 0$$

dır. Burada $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle|_L \neq 0$ koşulu $\vec{a}$ nın null vektör olmadığını gösterir.

İSPAT: $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ dual vektör olmak üzere

$$\|\vec{A}\|^2 = \langle \vec{A}, \vec{A} \rangle|_L = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle|_L + 2\varepsilon \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle|_L$$

dir.

$$\|\vec{A}\| = a + \varepsilon a^* \tag{II.2.1}$$

dersek

$$\|\vec{A}\|^2 = a^2 + 2\varepsilon a a^*$$

olur. Dual sayıların eşlik kavramından

$$a^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle|_L = \|\vec{a}\|^2 \text{ ve } a a^* = \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle|_L$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla

$$a = \|\vec{a}\| \quad \text{ve} \quad a^* \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle|_L}{\|\vec{a}\|}$$

elde edilir. a^* tanımlı olması için paydanın sıfırdan farklı olması gerekir, yani

$$\|\vec{a}\| \neq 0 \Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle|_L \neq 0$$

dır.

Şayet $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ dual vektöründe $\vec{a}$ null vektör ise $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle|_{L_1} = 0$ dır.

(II.2.1) den

$$\|\vec{A}\| = \varepsilon a^*$$

dır. Dolayısıyla

$$\|\vec{A}\|^2 = (0,0)$$

elde edilir. Karesi sıfır olan dual sayı ise $\|\vec{A}\| = (0, a^*)$ dır. Dolayısıyla $\vec{a}$ null vektör ise

$$\|\vec{A}\| = (0, a^*) = \varepsilon a^*$$

olur.

TEOREM II.2.2: $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ birim dual vektör ise

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle|_L = \pm 1 \quad \text{ve} \quad \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle|_L = 0$$

dir.

İSPAT: $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle|_L \neq 0$ için $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ birim dual vektör ise

$$\|\vec{A}\| = \|\vec{a}\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle|_L}{\|\vec{a}\|} = (1,0)$$

ise

$$\|\vec{a}\| = 1 \quad \text{ve} \quad \langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle = 0$$

dır.

$\|\vec{a}\| = 1$ ise $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle|_L = \mp 1$ elde edilir.

TEOREM II.2.3: $\vec{A} \neq (\vec{0}, \vec{a}^*) \in ID$ olmak üzere

$$\vec{U} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

birim dual vektördür.

İSPAT: $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ olmak üzere

$$U = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} + \varepsilon \frac{\vec{a}^* - k\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \vec{u} + \varepsilon \vec{u}^*$$

den

$$u = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \quad , \quad u^* = \frac{\vec{a}^* - k\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

bulunur. Burada

$$k = \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle|_L}{\|\vec{a}\|^2}$$

dir. Sonuç olarak

$$\vec{A} = \|\vec{A}\| \vec{U} \tag{II.2.1}$$

şeklinde yazılır.

TANIM II.2.1 (Null Koni): V vektör uzayının bütün null vektörlerinin kümesi

$$\wedge = \{\vec{v} \in (V - \{0\}) / \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle|_L = 0\}$$

şeklinde gösterilir. Bu kümeye null konisi denir.

ÖRNEK II.2.2: L^3 'de null konisi

$$\wedge=\{(x,y,z) \;/\; z^2= x^2+ y^2 \;;\; x,y,z\in IR\}$$

şeklindedir.

TEOREM II.2.4: $d \not\subset \wedge$ olmak üzere "d" doğrusuna dışındaki herhangi bir P noktasından daima bir dik inilebilir.

İSPAT: Doğrultman vektörü $\vec{a} = (a,b,c)$ ve geçtiği bir noktası $M=(x_0,y_0,z_0)$ olan "d" doğrusunun analitik denklemi

$$\alpha : IR \longrightarrow IR^3$$

$$t \longrightarrow \alpha(t)=(a\,t+x_0,\; b\,t+y_0,\; c\,t+z_0)$$

dır. Ayrıca

$$\alpha(t)=(a,b,c)\,t+(x_0,y_0,z_0)=\vec{a}\,t+\vec{m}$$

şeklinde yazılabilir.

$\alpha(t)$ doğrusunun dışından sabit bir $P=(x',y',z')$ noktasını alalım. $t=t_0$ için $\overrightarrow{P\alpha(t_0)} \perp d$ olsun. $\vec{a}$ vektörü "d" doğrultusunda olduğundan

$$\overrightarrow{P\alpha(t_0)} \perp d \quad \text{ise} \quad \overrightarrow{P\alpha(t_0)} \perp \vec{a}$$

dır. Böylece

$$\overrightarrow{P\alpha(t_0)} \perp \vec{a} \iff \langle \overrightarrow{P\alpha(t_0)}, \vec{a} \rangle|_L = 0$$

olur, ayrıca

$$\overrightarrow{\mathrm{P}\alpha(\mathrm{t}_0)} = \overrightarrow{\alpha(\mathrm{t}_0)} - \vec{\mathrm{P}} = \vec{a}\,\mathrm{t}_0 + \vec{m} - \vec{p} = \vec{a}\,\mathrm{t}_0 + \overrightarrow{\mathrm{PM}}$$

dir, ve

$$\left\langle \overrightarrow{\mathrm{P}\alpha(\mathrm{t}_0)}, \vec{a} \right\rangle\Big|_L = \left\langle \vec{a}\,\mathrm{t}_0 + \overrightarrow{\mathrm{PM}}, \vec{a} \right\rangle\Big|_L = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle\big|_{L_l}\mathrm{t}_0 + \left\langle \overrightarrow{\mathrm{PM}}, \vec{a} \right\rangle\Big|_L = 0$$

ise

$$\mathrm{t}_0 = \frac{\left\langle \overrightarrow{\mathrm{MP}}, \vec{a} \right\rangle\big|_L}{\|\vec{\mathrm{a}}\|^2}$$

elde edilir. Burada t_0 ın tanımlı olması için $\|\vec{a}\|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle\big|_L \neq 0$ olması gerekir. Burada $\mathrm{d} \not\subset \wedge$ olduğundan $\|\vec{a}\|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle\big|_L \neq 0$ olduğu açıktır dolayısıyla "d" doğrusuna dışındaki herhangi bir noktadan dik inilebilir.

TEOREM II.2.5: $\vec{\mathrm{A}} = (\vec{0}, \vec{a}^*) \in$ ID-Modül olmak üzere ID-Modülde denklemi

$$\|\vec{\mathrm{A}}\| = (1,0)$$

olan birim dual kürenin "$\mathrm{IR}^3/\wedge$" deki yönlü doğrulara bire bir karşılık gelir

İSPAT: IR^3 deki bir doğru ,bir O başlangıç noktasına göre, üzerindeki bir M noktası ve doğrunun yönünü belirten bir $\vec{u}$ vektörü tarafından tamamen belirlenir.

Böyle bir doğrunun vektörel denklemi

$$(\vec{x} - \vec{m}) \wedge \vec{u}\big|_L = \vec{0} \tag{II.2.2}$$

dir. (II.2.2) denkleminde $\vec{u}$ yerine $\lambda\,\vec{u}$ ($\lambda \in \mathrm{IR}$) alınırsa yine aynı doğru belirtilmiş olacağından $\vec{u}$ birim vektör olarak alınabilir. Burada $\vec{y}$ ve $\vec{z}$ vektörleri doğru üzerinde olduğundan

$$(\vec{y} - \vec{m}) \wedge \vec{u}\big|_L = \vec{0} \text{ ve } (\vec{z} - \vec{m}) \wedge \vec{u}\big|_L = \vec{0}$$

şeklinde yazılabileceğinden

$$\vec{x} \wedge \vec{u}\big|_L = \vec{y} \wedge \vec{u}\big|_L = \vec{z} \wedge \vec{u}\big|_L = \vec{m} \wedge \vec{u}\big|_L$$

elde edilir. Burada vektörel çarpım doğru üzerindeki noktaya bağlı değildir, her zaman bir sabit vektöre eşittir. Bu sabit vektöre $\vec{u}_0^{\,*}$ vektörü dersek; $\vec{u}_0^{\,*}$

vektörüne $\vec{u}$ birim vektörünün O noktasına göre Lorentz anlamında vektörel momenti olarak bakılabilir.

Burada $(\vec{u},\vec{u}_0^*)$ vektör çiftine yalnız ve yalnız bir doğru karşılık gelir. $\vec{u},\vec{u}_0^* \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $(\vec{u},\vec{u}_0^*)$ vektör çifti için

$$\langle \vec{u},\vec{u}\rangle|_L = \mp 1$$

olduğunu kabul etmiştik. Ayrıca

$$\langle \vec{u},\vec{u}_0^*\rangle|_L = \langle \vec{u},\vec{x}\wedge\vec{u}\rangle|_L = -\det(\vec{u},\vec{x},\vec{u}) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\langle \vec{u},\vec{u}\rangle|_L = \mp 1 \text{ ve } \langle \vec{u},\vec{u}_0^*\rangle|_L = 0 \qquad (\text{II}.2.3)$$

koşulları sağlanır.

$\vec{\mathrm{A}} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a}^*$ birim dual vektörü için Teorem II.2.2 den

$$\langle \vec{a},\vec{a}\rangle|_L = \mp 1 \text{ ve } \langle \vec{a},\vec{a}_0^*\rangle|_L = 0$$

olduğu bilinmektedir. Bu ise (II.2.3) den başka bir şey değildir. Burada $\vec{a}$ vektörü $\vec{u}$ vektörüne $\vec{a}^*$ vektörü de $\vec{u}_0^*$ vektörüne karşılık gelmektedir yani, $(\vec{u},\vec{u}_0^*)$ vektör çiftine $(\vec{a},\vec{a}_0^*)$ dual vektör çifti karşılık gelir.

O halde $\vec{\mathrm{A}} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a}^*$ birim dual vektörü verildiğinde "$\mathbb{R}^3/\wedge$" deki bir tek yönlü doğru tamamen bellidir. "$\mathbb{R}^3/\wedge$" deki yönlü doğrularla ID-Modülün birim dual vektörleri ile bire birdirler, yani

$$\|\vec{\mathrm{A}}\| = (1,0)$$

olan birim dual kürenin noktalarına bire bir karşılık gelirler.

Teorem II.2.5 gösterdi ki $\vec{\mathrm{A}} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a}^*$ birim dual vektörü "$\mathbb{R}^3/\wedge$" de bir tek yönlü doğru belirtmektedir. $\vec{a}$ birim vektörü doğrunun yönünü ve $\vec{a}^*$ vektörü ise "O" başlangıç noktasına göre $\vec{a}$ birim vektörünün Lorentz anlamında vektörel momentini ifade eder.

TANIM II.2.2 (Dual Açı): $\vec{\mathrm{A}}$ ve $\vec{\mathrm{B}}$ iki birim dual vektörler olsunlar. Şayet $\vec{\mathrm{A}}$ ve $\vec{\mathrm{B}}$ dual vektörlerinin reel kısmı time-like ise iki vektörün Lorentz iç çarpımı

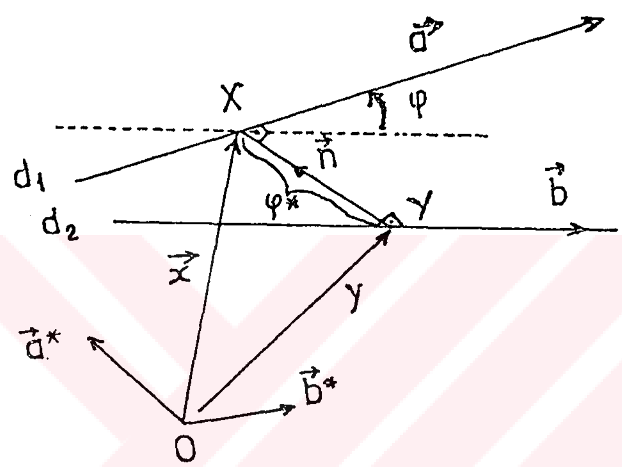
$$\left\langle \vec{A},\vec{B}\right\rangle\Big|_L = \left\langle \vec{a},\vec{b}\right\rangle\Big|_L + \varepsilon\cdot\left(\left\langle \vec{a},\vec{b}^*\right\rangle\Big|_L + \left\langle \vec{a}^*,\vec{b}\right\rangle\Big|_L\right)$$

dır. Bu iç çarpımın reel kısmı

$$\left\langle \vec{a},\vec{b}\right\rangle\Big|_L = -ch\varphi \ , \ \varphi \in \mathrm{IR}$$

dir.

$\left\langle \vec{A},\vec{B}\right\rangle\Big|_L$ Lorentz iç çarpımının dual kısmı olan "$\left\langle \vec{a},\vec{b}^*\right\rangle\Big|_L + \left\langle \vec{a},\vec{b}\right\rangle\Big|_L$" ifadesinin geometrik yorumu aşağıdaki şekilde yapılır.



ŞEKİL II.2.1

Şekil II.2.1 de ortak dikme yönündeki birim vektör

$$\vec{n} = \pm\frac{\vec{a}\wedge\vec{b}\big|_L}{\left\|\vec{a}\wedge\vec{b}\big|_L\right\|}$$

şeklindedir. d_1 ve d_2 doğruları arasındaki en kısa uzaklık φ^* ile gösterilirse

$$\vec{x}-\vec{y} = \pm\frac{\vec{a}\wedge\vec{b}}{\left\|\vec{a}\wedge\vec{b}\right\|}\,\varphi^*$$

dır.

$$\vec{a}^* = \vec{x}\wedge\vec{a} \ \text{ ve } \ \vec{b}^* = \vec{y}\wedge\vec{b}$$

olduklarından ve

$$\left\langle \vec{a},\vec{b}^{*}\right\rangle\Big|_L=\left\langle \vec{a},\vec{y}\wedge\vec{b}\right\rangle\Big|_L=\left\langle -\vec{y},\vec{a}\wedge\vec{b}\right\rangle\Big|_L$$

$$\left\langle \vec{a}^{*},\vec{b}\right\rangle\Big|_L=\left\langle \vec{x}\wedge\vec{a},\vec{b}\right\rangle\Big|_L=\left\langle \vec{x},\vec{a}\wedge\vec{b}\right\rangle\Big|_L$$

özdeşliklerinden

$$\begin{aligned}\left\langle \vec{a},\vec{b}^{*}\right\rangle\Big|_L+\left\langle \vec{a}^{*},\vec{b}\right\rangle\Big|_L&=\left\langle \vec{x}-\vec{y},\vec{a}\wedge\vec{b}\right\rangle\Big|_L\\&=\pm\frac{\varphi^{*}\left\langle \vec{a}\wedge\vec{b},\vec{a}\wedge\vec{b}\right\rangle\Big|_L}{\left\|\vec{a}\wedge\vec{b}\right\|}\\&=\pm\varphi^{*}\left\|\vec{a}\wedge\vec{b}\right\|\\&=\pm\varphi^{*}sh\varphi\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak $\vec{\mathrm{A}}$ ile $\vec{\mathrm{B}}$ dual vektörünün iç çarpımı

$$\left\langle \vec{\mathrm{A}},\vec{\mathrm{B}}\right\rangle\Big|_L=-ch\varphi\pm\varepsilon\varphi^{*}sh\varphi \tag{II.2.4}$$

dir.

Teorem I.2.2 den, $\phi=\varphi+\varepsilon\cdot\varphi^{*}$ olmak üzere

$$-ch\varphi-\varepsilon\varphi^{*}sh\varphi=-ch\phi$$

olur. (II.2.4) ifadesinde (-) işaretini göz önüne alırsak

$$\left\langle \vec{\mathrm{A}},\vec{\mathrm{B}}\right\rangle\Big|_L=-ch\phi \tag{II.2.5}$$

olur. Buradaki $\phi=\varphi+\varepsilon\varphi^{*}$ dual sayısına $\vec{\mathrm{A}}$ ile $\vec{\mathrm{B}}$ birim dual vektörleri arasındaki dual açı denir.

SONUÇ II.2.1: Şayet $\vec{\mathrm{A}}$ ve $\vec{\mathrm{B}}$ vektörleri birim dual vektörler değil ise $\vec{\mathrm{A}}$ ile $\vec{\mathrm{B}}$ vektörleri doğrultusundaki birim dual vektörler

$$\vec{U}=\frac{\vec{\mathrm{A}}}{\left\|\vec{\mathrm{A}}\right\|}\quad\text{ve}\quad\vec{V}=\frac{\vec{\mathrm{B}}}{\left\|\vec{\mathrm{B}}\right\|}$$

olur.

$$\left\langle \vec{U},\vec{V}\right\rangle\Big|_L=-ch\phi\quad\text{ve}\quad\phi=\varphi+\varepsilon\varphi^{*}$$

olduğundan

$$\left\langle \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}, \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|} \right\rangle\Big|_L = -ch\phi$$

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle\big|_L = -\|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|\, ch\phi \qquad \text{(II.2.6)}$$

elde edilir.

TANIM II.2.3 (Lorentz Dış Çarpım): $\vec{A}, \vec{B} \in$ ID-Modül dual vektörlerinin Lorentz dış çarpımı

$$\wedge:\ ID^3 x ID^3 \longrightarrow ID^3$$

şeklinde bir işlemdir ve

$$\vec{A} \wedge \vec{B}\big|_L = \vec{a} \wedge \vec{b}\big|_L + \varepsilon\ (\vec{a} \wedge \vec{b}^*\big|_L + \vec{a}^* \wedge \vec{b}\big|_L)$$

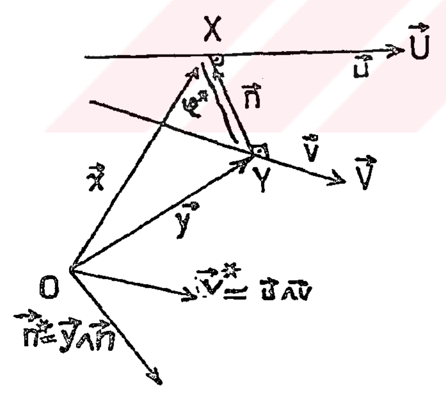
olarak tanımlanır.

TEOREM II.2.6: $\vec{A}, \vec{B} \in$ ID-Modül için

$$\vec{A} \wedge \vec{B}\big|_L = \|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|\, sh\phi\, \vec{N}$$

dir.

İSPAT: $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ eksenleri, sırası ile, $\vec{U}$ ile $\vec{V}$ olsun (Şekil II.2.2).



ŞEKİL II.2.2

$$\vec{U} \wedge \vec{V}\big|_L = (\vec{u} + \varepsilon \vec{u}^*) \wedge (\vec{v} + \varepsilon \vec{v}^*)\big|_L$$

$$\vec{U} \wedge \vec{V}\big|_L = \vec{u} \wedge \vec{v}\big|_L + \varepsilon\left(\vec{u} \wedge \vec{v}^*\big|_L + \vec{u}^* \wedge \vec{v}\big|_L\right)$$

ve

$$\vec{u}^* = \vec{x} \wedge \vec{u}\big|_L\,, \quad \vec{v}^* = \vec{y} \wedge \vec{v}\big|_L$$

olduklarından

$$\vec{U} \wedge \vec{V}\big|_L = (\vec{u} + \varepsilon\vec{u}^*) \wedge (\vec{v} + \varepsilon\vec{v}^*)\big|_L$$

$$\vec{U} \wedge \vec{V}\big|_L = \vec{u} \wedge \vec{v}\big|_L + \varepsilon\left(\vec{u} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{v}\big|_L)\big|_L + (\vec{x} \wedge \vec{u}\big|_L) \wedge \vec{v}\big|_L\right)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\vec{u} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{v}\big|_L)\big|_L = \langle \vec{y},\vec{u}\rangle\big|_L \vec{v} - \langle \vec{v},\vec{u}\rangle\big|_L \vec{y}$$

$$(\vec{x} \wedge \vec{u}\big|_L) \wedge \vec{v}\big|_L = \langle \vec{u},\vec{v}\rangle\big|_L \vec{x} - \langle \vec{x},\vec{v}\rangle\big|_L \vec{u}$$

bağıntılarından

$$\vec{u} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{v}\big|_L)\big|_L + (\vec{x} \wedge \vec{u}\big|_L) \wedge \vec{v}\big|_L = \langle \vec{y},\vec{u}\rangle\big|_L \vec{v} - \langle \vec{x},\vec{v}\rangle\big|_L \vec{u} + (\vec{x} - \vec{y})\langle \vec{u},\vec{v}\rangle\big|_L$$

$$\vec{u} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{v}\big|_L)\big|_L + (\vec{x} \wedge \vec{u}\big|_L) \wedge \vec{v}\big|_L = \langle \vec{y},\vec{u}\rangle\big|_L \vec{v} - \langle \vec{x},\vec{v}\rangle\big|_L \vec{u} + (\vec{x} - \vec{y})\,ch\varphi$$

(Şekil II.2.2) den

$$\vec{x} = \vec{y} \pm \vec{n}\,\varphi^* \text{ ve } \vec{u} \wedge \vec{v} = \pm\vec{n}\,sh\varphi$$

ifadelerinden

$$\begin{aligned}\langle \vec{y},\vec{u}\rangle\big|_L \vec{v} - \langle \vec{x},\vec{v}\rangle\big|_L \vec{u} &= \langle \vec{y},\vec{u}\rangle\big|_L \vec{v} - \langle \vec{y} \pm \vec{n}\,\varphi^*,\vec{v}\rangle\big|_L \vec{u} \\ &= \langle \vec{y},\vec{u}\rangle\big|_L \vec{v} - \langle \vec{y},\vec{v}\rangle\big|_L \vec{u} \pm \varphi^* \det(\vec{u},\vec{v},\vec{u}) \\ &= \vec{y} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}\big|_L)\big|_L \\ &= \vec{y} \wedge (\pm\vec{n}\,sh\varphi)\big|_L \\ &= \pm(\vec{y} \wedge \vec{n})sh\varphi \\ &= \pm\,\vec{n}^*\,sh\varphi\end{aligned}$$

elde edilir, dolayısıyla

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \pm\vec{n}\,sh\varphi + \varepsilon\left[\pm\,\vec{n}^*\,sh \pm \varphi^*\vec{n}\,ch\varphi\right] \qquad \text{(II.2.7)}$$

elde edilir. Bu son ifadede (+) işaretleri alınırsa ve $\varepsilon^2 = 0$ olduğundan "$\varepsilon^2\,\varphi^*\,\vec{n}^*\,ch\varphi$" terimi ilave edilirse

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = (\vec{n} + \varepsilon\vec{n}^*)(sh\varphi + \varepsilon\,\varphi^* ch\varphi)$$

bulunur. $\vec{\mathrm{N}} = \vec{n} + \varepsilon \vec{n}^*$ bir birim dual vektördür. Taylor formülünden de $\phi = \varphi + \varepsilon \varphi^*$ olmak üzere

$$sh\varphi + \varepsilon \varphi^* ch\varphi = ch\phi$$

dir, dolayısıyla

$$\vec{U} \wedge \vec{V}\big|_L = sh\phi \vec{\mathrm{N}}$$

olur.

$$\vec{U} = \frac{\vec{\mathrm{A}}}{\|\vec{\mathrm{A}}\|} \text{ ve } \vec{V} = \frac{\vec{\mathrm{B}}}{\|\vec{\mathrm{B}}\|}$$

olduklarından

$$\frac{\vec{\mathrm{A}}}{\|\vec{\mathrm{A}}\|} \wedge \frac{\vec{\mathrm{B}}}{\|\vec{\mathrm{B}}\|}\Big|_L = sh\phi \vec{\mathrm{N}}$$

$$\vec{\mathrm{A}} \wedge \vec{\mathrm{B}}\big|_{\mathrm{L}} = \|\vec{\mathrm{A}}\| \, \|\vec{\mathrm{B}}\| sh\varphi \vec{\mathrm{N}}$$

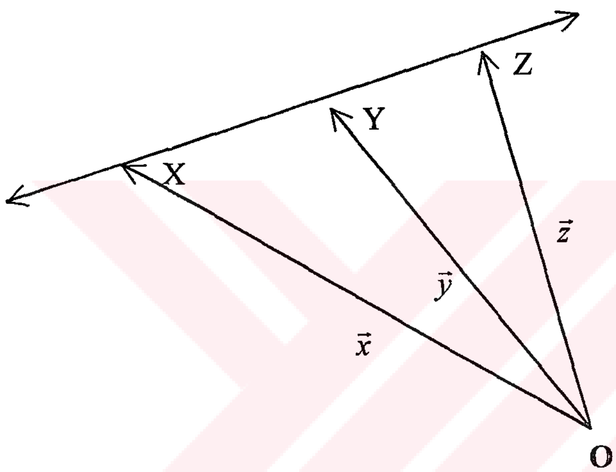
elde edilir.

BÖLÜM III

Bu bölümde aksi söylenmedikçe iç çarpım olarak Lorentz iç çarpımı, yani "$<,>|_L$" ve yine dış çarpım olarak da Lorentz dış çarpımı $(\wedge|_L)$ alınacaktır. Bu bölümün Euclid anlamında incelenişi [1] ve [4] de vardır.

III.1:DOĞRUNUN LORENTZ GÖSTERİMİ

M noktasından geçen ve $\vec{a}$ yön vektörü ile verilen bir doğrunun λ parametreli denklemi (Şekil II.1.1).



ŞEKİL III.1.1

$$\vec{y} = \vec{x} + \lambda \cdot \vec{a} \tag{III.1.1}$$

dir. Burada doğrunun denklemi $\vec{a}$ yön vektörünün boyuna bağlı olmadığından $\vec{a}$ yön vektörünü birim vektör olarak alabiliriz, dolayısıyla

$$\|\vec{a}\| = 1$$

dir. Böylece

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \pm 1 \tag{III.1.2}$$

elde edilir. Şekil III.1.1 deki doğru denkleminde X noktasını özel olmaktan kurtarmak için

$$\vec{a}^* = \vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{y} \wedge \vec{a} \tag{III.1.3}$$

şeklinde $\vec{a}^*$ vektörel momentini teşkil edelim bu sayede $(\vec{a},\vec{a}^*)$ vektörel çifti sayesinde "d" doğrusunu ifade ederiz, burada

$$\langle \vec{a},\vec{a}^* \rangle = \langle \vec{a}^*,\vec{a} \rangle = \langle \vec{x}\wedge\vec{a},\vec{a} \rangle = -\det(\vec{a},\vec{x},\vec{a}) = 0 \qquad \text{(III.1.4)}$$

dır. $\vec{A}$ dual vektörünü $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a}^*$ şeklinde alırsak

$$\begin{aligned}\langle \vec{A},\vec{A} \rangle &= \langle \vec{a},\vec{a} \rangle + \varepsilon\left(\langle \vec{a},\vec{a}^* \rangle + \langle \vec{a}^*,\vec{a} \rangle\right) \\ &= \langle \vec{a},\vec{a} \rangle + 2\varepsilon\langle \vec{a},\vec{a}^* \rangle\end{aligned}$$

(III.1.2) ve (III.1.4) den

$$\|\vec{A}\| = \langle \vec{A},\vec{A} \rangle = \pm 1$$

elde edilir. Aynı şekilde $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon\vec{a}^*$ ve $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon\vec{b}^*$ farklı birim dual vektörleri Teorem II.2.5 den farklı iki doğru belirtir. Bu doğrular ,sırası ile d_1 ve d_2 olsun. $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ birim dual vektörlerinin reel kısımları time-like ise (II.2.5) den

$$\langle \vec{A},\vec{B} \rangle = \langle \vec{a},\vec{b} \rangle + \varepsilon\left(\langle \vec{a},\vec{b}^* \rangle + \langle \vec{a},\vec{b} \rangle\right) \qquad \text{(III.1.5)}$$

dir. $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ birim dual vektörlerinin reel kısımları time-like ise (II.2.5) den

$$\langle \vec{A},\vec{B} \rangle = -ch\phi$$

olur ve $\phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ şeklindedir. Bu dual sayıdaki φ reel ve φ^* dual kısımları ,sırası ile, uzaydaki iki doğrunun doğrultman vektörleri arasındaki Lorentz anlamında φ radyanlık açıyı ve iki doğru arasındaki en kısa uzaklığı (Normal uzaklık) ifade eder. (III.1.4) ifadesinde

1) $\langle \vec{A},\vec{B} \rangle = 0$ ise Lorentz anlamında dik kesişen iki doğruyu karakterize eder.

2) $\langle \vec{A},\vec{B} \rangle =$ reel veya

$$\langle \vec{a}^*,\vec{b} \rangle + \langle \vec{a},\vec{b}^* \rangle = 0 \qquad \text{(III.1.6)}$$

ise bu doğrular için kesişme şartıdır (indizent şartı).

3) $\langle \vec{A},\vec{B} \rangle = \pm 1$ ise paralel doğrular için karakteristiktir [7].

III.2 LİNEER IŞIN KOMPLEKSİNİN LORENTZ GEOMETRİSİ

ID-Modülde birim dual $\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^*$ vektörünü IR^3 de bir yönlü doğru gösterdiği Teorem II.2.5 ile gösterilmişti. Burada $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ birim vektörü $\vec{X}$ doğrusunun yönünü ve $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ da O başlangıç noktasına göre vektörel momentini verir. Böylece Teorem II.2.2 den

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \pm 1 \text{ ve } \langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle = 0$$

veya

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = \pm 1 \text{ ve } x_1 x_1^* + x_2 x_2^* - x_3 x_3^* = 0 \qquad \text{(III.2.1)}$$

koşulları sağlanır. Eğer (III.2.1) koşullarından başka bir Plücker doğru koordinatları arasında

$$F(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 0$$

bağıntısı varsa $\vec{X}$ doğrusunun bağımsız parametre sayısı üç olur.

$\vec{A}$ bir has dual vektör olmak üzere

$$\langle \vec{a}, \vec{x}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{x} \rangle = 0 \qquad \text{(III.2.2)}$$

denklemini sağlayan $\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^*$ doğrularının cümlesine bir lineer ışın kompleksi dendiğini biliyoruz.

Şayet burada $\vec{X}$ dual vektörünü birim dual vektör alırsak

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \pm 1 \text{ ve } \langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle = 0$$

dır.

Şimdi $\vec{a}$ ve $\vec{a}^*$ vektörleriyle

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$$

dual vektörünü oluşturabiliriz. $\vec{A}$ dual vektörü doğrultusundaki birim dual vektör

$$\vec{U} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

dir. Burada

$$k = \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|^2}$$

dersek

$$\vec{U} = \vec{u} + \varepsilon \vec{u}^* = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} + \varepsilon \frac{\vec{a}^* - k\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

elde ederiz. Son ifadede k ya $\vec{A}$ dual vektörünün parametresi veya yükselişi, $\vec{U}$ birim vektörüne de $\vec{A}$ dual vektörünün ekseni denir. Burada k nın tanımlı olması için $\|\vec{a}\| \neq 0$ olmalıdır yani, $\vec{a}$ vektörü null vektör değildir.

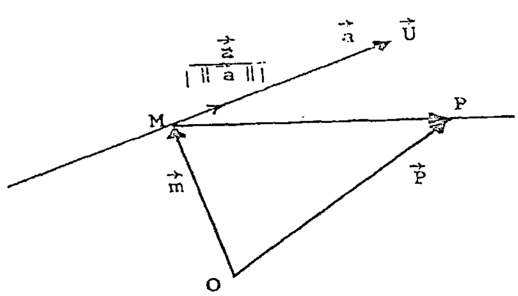
Adımı k olan $\vec{U}$ ekseni etrafındaki helisel hareket göz önüne alınırsa bu helisel hareket; Darboux dönme vektörü $\vec{a}$ olan $\vec{U}$ ekseni etrafındaki bir dönme ile kayma vektörü "$k\vec{a}$" olan eksen doğrultusundaki bir kaymadan teşkil edilebilir. Bu halde kayma miktarının dönme miktarına oranı gerçekten k dır, yani

$$k = \frac{\|k\vec{a}\|}{\|\vec{a}\|}$$

olur.

Burada bilindiği gibi $\|\vec{a}\| = \omega$, $\vec{a}$ Darboux vektörü etrafındaki dönme açısıdır.

$\overrightarrow{OM} = \vec{m}$ olmak üzere $\vec{U}$ ekseni etrafındaki bir nokta M olsun (Şekil III.2.1).



ŞEKİL III.2.1

$$\vec{u}_0^* = \vec{m} \wedge \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

ifadesi Teorem I.1.9 dan dolayı

$$\vec{u}_0^* = \frac{\vec{a}^* - k\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

olur, dolayısıyla

$$\frac{\vec{a}^* - k\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \vec{m} \wedge \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

bağıntılarından

$$\vec{a}^* - k\vec{a} = \vec{m} \wedge \vec{a} \qquad \text{(III.2.3)}$$

elde edilir.

$\vec{U}$ ekseni etrafındaki helisel hareket yapan herhangi bir nokta "P" olsun. Bu noktanın yörüngesi adi bir helisdir. "P" noktasının $\vec{v}$ hız vektörü $\vec{U}$ ekseni etrafındaki sırf dönmenin hız bileşeni ile $\vec{U}$ boyunca cereyan eden sırf kaymanın hız bileşenlerinden teşkil edilebilir.

Dönme hızı $\vec{v}_d$, kayma hızı $\vec{v}_k$ ile gösterilirse

$$\vec{v} = \vec{v}_d + \vec{v}_k$$

dır.

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \vec{p} - \vec{m}$$

olduğundan dönme hızı

$$\vec{v}_d = \vec{a} \wedge (\vec{p} - \vec{m})$$

dir. Kayma hızının da

$$\vec{v}_k = k \cdot \vec{a}$$

olacağı açıktır. Buna göre (III.2.3) formülü göz önüne alınırsa

$$\vec{v} = \vec{a} \wedge \vec{p} + \vec{a}^* \qquad \text{(III.2.4)}$$

elde edilir.

$\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon\vec{x}^*$ doğrusu "P" noktasının helisel yörüngesinin herhangi bir normali olsun , böylece

$$\vec{x} = \vec{p} \wedge \vec{x} \quad \text{ve} \quad \langle \vec{v}, \vec{x} \rangle = 0$$

koşulları var olduğundan

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}, \vec{x} \rangle &= \langle \vec{a} \wedge \vec{p} + \vec{a}^*, \vec{x} \rangle \\ &= \langle \vec{a} \wedge \vec{p}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{x} \rangle \\ &= \langle \vec{a}, \vec{p} \wedge \vec{x} \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{x} \rangle \\ &= \langle \vec{a}, \vec{x}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{x} \rangle \end{aligned}$$

elde edilir, ve böylece

$$\langle \vec{a}, \vec{x}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{x} \rangle = 0$$

bulunur.

TEOREM III.2.1: Lineer ışın kompleksine bir helis hareketi, tersine olarak bir helis hareketine de bir lineer ışın kompleksi bağlıdır. Kompleksin ekseni helisin ekseni ile çakışır, kompleksi ekseni helisin ekseni ile çakışır, kompleksin ve helis hareketinin adımları aynıdır.

Lineer bir kompleksin (∞^3) sayıdaki ışınları IR^3 ün helis hareketine uyan noktalardaki yörünge normallerinin bütününden oluşur.

TANIM III.2.3 (Lineer Komplekse Dejenere):

$$k = \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|^2}$$

olmak üzere, $k = 0$ ise lineer komplekse dejenere veya singüler lineer kompleks denir.

$k = 0$ olması halinde (III.2.2) denklemi eksen kompleksin doğrularının (III.1.3) kesişme koşulu ile aynı olur. Bu nedenle dejenere veya singüler bir ışın kompleksi $\vec{A}$ ekseninin ışın demeti de denir.

TANIM III.2.4 (Işın Kongrüansı):

$\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* = \vec{X}(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ doğrusunun $(x_1, x_2, x_3; x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ normlanmış homojen olmayan altı Plücker doğru koordinatları arasında

$$\langle \vec{x},\vec{x}\rangle = \pm 1 \text{ ve } \langle \vec{x},\vec{x}^*\rangle = 0 \tag{III.2.5}$$

$$F(x_1,x_2,x_3;x_1^*,x_2^*,x_3^*) = 0 \tag{III.2.6}$$

Bağıntılarından başka

$$\phi\,(x_1,x_2,x_3;x_1^*,x_2^*,x_3^*) = 0 \tag{III.2.7}$$

bağıntısı da varsa $\vec{X}$ doğrusunun bağımsız parametre sayısı iki olur.

İki bağımsız parametreye bağlı (∞^2) sayıdaki $\vec{X}$ doğrularının cümlesine kongrüans denir.

LİNEER IŞIN KONGRÜANSININ LORENTZ GEOMETRİSİ

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ has dual vektörleri için

$$F\ldots\ \langle \vec{a},\vec{x}^*\rangle + \langle \vec{a}^*,\vec{x}\rangle = 0$$

$$\phi\ldots \langle \vec{b},\vec{x}^*\rangle + \langle \vec{b}^*,\vec{x}\rangle = 0$$

denklemlerini sağlayan doğruların cümlesine lineer ışın kongrüansı denir. Bu denklemleri, sırası ile, λ ve μ homogen parametreleri ile çarpıp toplarsak

$$\langle \lambda\vec{a}+\mu\vec{b},\vec{x}^*\rangle + \langle \lambda\vec{a}^*+\mu\vec{b}^*,\vec{x}\rangle = 0 \tag{III.2.8}$$

olur. Bu halde her $\frac{\mu}{\lambda}$ değer çiftine bir ışın kongrüansını kapsayan bir ışın kompleksi karşılık gelir.

Her (III.2.8) deki komleks demetinde dejenere iki kompleks vardır ($\langle \vec{a},\vec{a}^*\rangle = 0$ ise $k_1 = 0$ ve $\langle \vec{b},\vec{b}^*\rangle = 0$ ise $k_2 = 0$).Bu dejenere komplekslerin eksenlerine ışın kongrüansının kılavuz hatları denir. Bu takdirde kongrüans ,iki kılavuz hattını kesen doğruların bütününden oluşur. Bu oluşma şeklinden ötürü kongruansa ışın ağı da denir.

(III.2.7) kompleks demetinin adımı

$$k = \frac{\langle \lambda\vec{a}+\mu\vec{b},\lambda\vec{a}^*+\mu\vec{b}^*\rangle}{\left\|\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}\right\|}$$

olduğundan kompleks demetinin dejenere kompleksleri için

$$\lambda^2 \left\langle \vec{a}, \vec{a}^* \right\rangle + \lambda \mu \left(\left\langle \vec{a}, \vec{b}^* \right\rangle + \left\langle \vec{a}^*, \vec{b} \right\rangle \right) + \mu^2 \left\langle \vec{b}, \vec{b}^* \right\rangle = 0 \tag{III.2.9}$$

dir. Her iki tarafı μ^2 ye bölersek

$$\left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 \left\langle \vec{a}, \vec{a}^* \right\rangle + \frac{\lambda}{\mu} \left(\left\langle \vec{a}, \vec{b}^* \right\rangle + \left\langle \vec{a}^*, \vec{b} \right\rangle \right) + \left\langle \vec{b}, \vec{b}^* \right\rangle = 0 \tag{III.2.10}$$

elde edilir. Bu ise bir karesel ifadedir. (III.2.9) denkleminin diskiriminantı

$$\Delta = \left\langle \vec{a}, \vec{a}^* \right\rangle \left\langle \vec{b}, \vec{b}^* \right\rangle - \left(\left\langle \vec{a}, \vec{b}^* \right\rangle + \left\langle \vec{a}^*, \vec{b} \right\rangle \right)^2 = 0$$

dir. Burada üç durum vardır.

1.Hal: $\Delta > 0$ ise ışın ağına eliptik ışın ağı denir.

2.Hal: $\Delta < 0$ ise ışın ağına hiperbolik ışın ağı denir. Bu iki halde ışın ağının kılavuz hatları kesişmez, çünkü

$$\left\langle \vec{a}, \vec{a}^* \right\rangle = 0 \ , \ \left\langle \vec{b}, \vec{b}^* \right\rangle = 0$$

olsa bile

$$\Delta = -\left(\left\langle \vec{a}, \vec{b}^* \right\rangle + \left\langle \vec{a}^*, \vec{b} \right\rangle \right)^2 \neq 0$$

dır. Şu halde $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ kılavuz doğruları kesişmezler.

3.Hal: $\Delta = 0$ ise ışın ağına parabolik ışın ağı denir.

Son hal ilk iki halin sınır halidir. Parabolik halde kılavuz doğrular hem çakışık hem de reeldir.

III.3. REGLE YÜZEY

TANIM III.3.1 (Regle Yüzey): $\vec{X}=\vec{x}+\varepsilon\vec{x}^{*}=\vec{X}(x_1,x_2,x_3;\ x_1^*,x_2^*,x_3^*)$ doğrusunun $(x_1,x_2,x_3;\ x_1^*,x_2^*,x_3^*)$ normlanmış altı Plücker doğru koordinatları arasında

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2=\pm 1 \text{ ve } x_1\,x_1^*+x_2\,x_2^*-x_3\,x_3^*=0 \qquad \text{(III.3.1)}$$

bağıntılarından başka

$$\mathrm{F}\,(x_1,x_2,x_3;\ x_1^*,x_2^*,x_3^*)=0 \qquad \text{(III.3.2)}$$

$$\Phi\,(x_1,x_2,x_3;\ x_1^*,x_2^*,x_3^*)=0 \qquad \text{(III.3.3)}$$

$$\Psi\,(x_1,x_2,x_3;\ x_1^*,x_2^*,x_3^*)=0 \qquad \text{(III.3.4)}$$

bağıntıları da varsa $\vec{X}$ doğrularının bağımsız parametre sayısı bir tanedir.

E.STUDY tekabülüne uyan ve bağımsız bir parametreye bağlı (∞^1) sayıdaki $\vec{X}$ doğrularının cümlesine regle yüzey veya ışın ağı denir.

REGLE YÜZEYİN LORENTZ GEOMETRİSİ

TANIM III.3.1 deki F, Φ, Ψ ler ; $\vec{\mathrm{A}},\vec{\mathrm{B}},\vec{\mathrm{C}}$ has dual vektörler olmak üzere

$$\mathrm{F}\ldots\left\langle \vec{a},\vec{x}^{*}\right\rangle+\left\langle \vec{a}^{*},\vec{x}\right\rangle=0$$

$$\Phi\ldots\left\langle \vec{b},\vec{x}^{*}\right\rangle+\left\langle \vec{b}^{*},\vec{x}\right\rangle=0$$

$$\Psi\ldots\left\langle \vec{c},\vec{x}^{*}\right\rangle+\left\langle \vec{c}^{*},\vec{x}\right\rangle=0$$

şeklinde verilebilir. O zaman bir regle yüzey F=0, $\Phi=0,\Psi=0$ ışın kompplekslerinin üçünde de ortak (∞^1) doğrunun cümlesi olarak düşünülebilir.

Bir regle yüzey, bir "t" parametresine bağlı $\vec{X}=\vec{X}(\mathrm{t})$ birim dual vektörel fonksiyon olmak üzere

$$\vec{X}(\mathrm{t})=\vec{x}(\mathrm{t})+\varepsilon\,\vec{x}^{*}(\mathrm{t}) \qquad \text{(III.3.5)}$$

şeklinde yazılabilir.

$\vec{X} = \vec{X}(t)$ fonksiyonunun "t" ye göre istenildiği kadar türetilebildiği kabul ediliyor. (III.3.5) deki birim dual vektörüne

$$\|\vec{X}\| = (1,0) \text{ ve } \overrightarrow{OX} = \vec{X}$$

olduğundan birim dual Lorentz küresi üzerinde bir dual "X" noktası karşılık gelir. Biliniyor ki noktaya da IR^3 de bir $\vec{X}$ doğrusu karşılık gelir. "t" parametresi değiştikçe

$$\overrightarrow{OX} = \vec{X}(t) = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^*$$

birim dual vektörü, birim dual Lorentz küresi üzerinde bir ($\vec{X}$) dual eğrisi çizer.

($\vec{X}$) dual eğrisine regle yüzeyin dual küresel resmi denir. Birim dual küre üzerinde $\vec{X} = \vec{X}(t)$ dual eğrisinin

$$d\phi = d\varphi + \varepsilon d\varphi^*$$

dual yay elementi için

$$d\phi^2 = \langle d\phi, d\phi \rangle = \left\langle \dot{\vec{X}}, \dot{\vec{X}} \right\rangle dt^2$$

yazılabilir. Tanım I.1.4 den faydalanarak (III.3.1) ifadesini açarsak

$$d\varphi^2 = \langle d\vec{x}, d\vec{x} \rangle \text{ ve } d\varphi d\varphi^* = \langle d\vec{x}, d\vec{x}^* \rangle$$

elde edilir.

TANIM III.3.2. (Dağıtma Parametresi veya Dral):

$$\frac{1}{d} = \frac{\langle d\vec{x}, d\vec{x}^* \rangle}{\langle d\vec{x}, d\vec{x} \rangle} = \frac{d\varphi\, d\varphi^*}{d\varphi\, d\varphi} = \frac{d\varphi^*}{d\varphi}$$

ifadesindeki $\frac{1}{d}$ büyüklüğüne regle yüzeyin "t" parametrisine ait olan $\vec{X}$ ana doğrusu boyunca dağıtma parametresi veya drali denir.

TANIM III.3.3 (Toruslar veya Açılabilir Regle Yüzey): Komşu ana doğruları kesişen regle yüzeylere toruslar veya açılabilir regle yüzeyler denir.

Dral in (veya $d\varphi^* = 0$) sıfır olması toruslar için karakteristikdir .

III.4.LORENTZ KÜRESİ ÜZERİNDE BİR HAREKETİN LORENTZ GÖSTERİMİ

IR^3 de sabit ve hareketli sistemler, sırası ile, H' ve H olsun. H' ve H sistemlerinin ortonormal koordinat sistemleri de, sırası ile,

$$\left\{ O'; \vec{l}_i \right\} \text{ve} \left\{ O ; \vec{l}_i \right\},\ 1 \leq i \leq 3$$

ve

$$\left\langle \vec{l}_i, \vec{l}_j \right\rangle = \left\langle \vec{l}_i', \vec{l}_j' \right\rangle = \begin{cases} 1 \ , & i = j = 1,2 \\ -1 \ , & i = j = 3 \\ 0 \ , & i \neq j \end{cases}$$

dir. H' ile H aynı şekilde yönlenmiş olsun, yani birinden diğerine geçilebilsin. H' sistemini sabit olma gibi bir imtiyazdan kurtarmak için H nın H' ye göre H/H' hareketi hem H' ye hem de H ya göre hareket eden H_1 sistemine nispet edilir. Bu üçüncü sisteme mukayese sistemi denir. H_1 deki ortonormal koordinat sistemi

$$\left\{ Q; \vec{r}_i \right\},\ 1 \leq i \leq 3$$

ve

$$\left\langle \vec{r}_i, \vec{r}_j \right\rangle = \begin{cases} 1 \ , & i = j = 1,2 \\ -1 \ , & i = j = 3 \\ 0 \ , & i \neq j \end{cases}$$

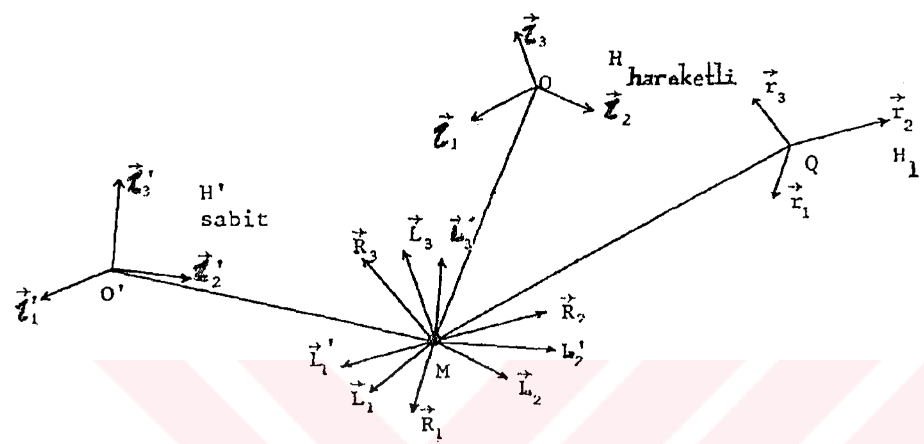
dir ve H_1 de H' ve H ile aynı şekilde yönlendirilmiş olsun.

Teorem II.2.5 gereğince l_i', l_i, r_i , $1 \leq i \leq 3$ eksenlerine ID-Modülde, sırası ile, aynı M merkezli K, K' ve K_1 birim dual Lorentz kürelerinin dual noktaları karşılık geleceğinden H_1/H', H'/H dolayısıyla H/H' hareketleri, sırası ile, K_1/K, K_1/K ve K/K' dual Lorentz küresel hareketler olarak incelenebilirler.

K, K' ve K_1 birim dual Lorentz kürelerinin ortak merkezi M olsun .Bu birim dual Lorentz kürelere sıkı sıkıya bağlı ortonormal baz sistemleri de, sırası ile,

$$\left\{M;\vec{L}_i'\right\},\ \left\{M;\vec{L}_i\right\},\ \left\{M;\vec{R}_i\right\}, 1 \le i \le 3$$

olsun (Şekil III.4.1).



ŞEKİL III.4.1

Burada

$$\vec{L}_i' = \vec{l}_i' + \varepsilon \vec{l}_i'^{*},\ \vec{L}_i = \vec{l}_i + \varepsilon \vec{l}_i^{*},\ \vec{R}_i = \vec{r}_i + \varepsilon \vec{r}_i^{*},\ 1 \le i \le 3$$

ve

$$\vec{l}_i^{*} = \overrightarrow{MO} \wedge \vec{l}_i$$

$$\vec{l}_i'^{*} = \overrightarrow{MO'} \wedge \vec{l}_i'$$

$$\vec{r}_i^{*} = \overrightarrow{MQ} \wedge \vec{r}_i$$

dir.

Bu baz sistemleri de aynı yönlü olurlar, yani bir dönüşümle birinden diğerine geçilebilir. Elbette ki bu dönüşümler, M noktası etrafındaki dönmelerdir.

$A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri 3x3 tipinde determinantının değeri “1” olan matrisler olmak üzere

$$\mathrm{L}=\mathrm{A}\,\mathrm{R} \text{ ve } \mathrm{L}'=\mathrm{B}\,\mathrm{R} \tag{III.4.1}$$

yazılabilir. Burada

$$\mathrm{R}=\begin{bmatrix}\vec{\mathrm{R}}_1\\ \vec{\mathrm{R}}_2\\ \vec{\mathrm{R}}_3\end{bmatrix},\ \mathrm{L}=\begin{bmatrix}\vec{\mathrm{L}}_1\\ \vec{\mathrm{L}}_2\\ \vec{\mathrm{L}}_3\end{bmatrix},\ \mathrm{L}'=\begin{bmatrix}\vec{\mathrm{L}}_1'\\ \vec{\mathrm{L}}_2'\\ \mathrm{L}_3'\end{bmatrix}$$

şeklinde dual sutun matrislerdir.

A ve B dual matrislerinin elemanları $\tau = \mathrm{t}+\varepsilon\,\mathrm{t}^*$ dual parametresinin yeteri kadar türetilebilen fonksiyonlardır. Burada aksi söylenmedikçe $\mathrm{t}^*=0$ alınacaktır. Böylece bir parametreli hareketler söz konusudur.

LEMMA.III.4.1

(III.4.1) deki dönüşüm matrisi olan

$$\mathrm{A}^{-1}=f_3\left[\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\right]=\left[f_3[\mathrm{A}]\right]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & -a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & -a_{23}\\ -a_{13} & -a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

matrisinin tersi

$$\mathrm{A}^{-1}=f_3\left[\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\right]=\left[f_3[\mathrm{A}]\right]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & -a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & -a_{23}\\ -a_{13} & -a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

dir.

İSPAT: $\mathrm{A}=\left[\mathrm{a}_{ij}\right]$ ise $f_3\left[\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\right]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & -a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & -a_{23}\\ -a_{13} & -a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$

dir. (III.4.1) den

$$\vec{\mathrm{L}}_i=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}\vec{\mathrm{R}}_k \quad \text{ve} \quad \vec{\mathrm{L}}_j=\sum_{p=1}^{3}a_{jp}\vec{\mathrm{R}}_p$$

yazabiliriz.

$$\alpha_{ij}=\left\langle \vec{\mathrm{L}}_i,\vec{\mathrm{L}}_j\right\rangle=\left\langle \sum_{k=1}^{3}a_{ik}\vec{\mathrm{R}}_k\ ,\ \sum_{p=1}^{3}a_{jp}\vec{\mathrm{R}}_p\right\rangle$$

diyelim. $\left\{\mathrm{M};\vec{\mathrm{R}}_1,\vec{\mathrm{R}}_2,\vec{\mathrm{R}}_3\right\}$ sistemi Lorentz uzayında ortonormal baz olduğu için

$$\alpha_{ij}=a_{1i}\,a_{1j}+a_{2i}\,a_{2j}-a_{3i}\,a_{3j} \tag{III.4.2}$$

elde ederiz.

Aynı şekilde $\{M;\vec{L}_1,\vec{L}_2,\vec{L}_3\}$ sisteminde Lorentz uzayında ortonormal bir bazdır. Böylece

$$\alpha_{ij}=\begin{cases} 1\ , & i=j=1,2 \\ -1\ , & i=j=3 \\ 0\ , & i\neq j \end{cases}$$

dir. Burada (III.4.2) den

$$A\cdot f_3\lfloor A^T\rfloor=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{32} & -\alpha_{33} \end{bmatrix}$$

dir. Dolayısıyla

$$A^{-1}=f_3\lfloor A^T\rfloor=[f_3\lfloor A\rfloor]^T \qquad \text{(III.4.3)}$$

olur. Böylece ispat biter.

(III.4.1) ve (III.4.3) den

$$R=f_3\lfloor A^T\rfloor E$$

olur. E sabit bir sistem olduğundan

$$dR=df_3\lfloor A^T\rfloor E$$

elde edilir. Yine (III.4.1) den

$$dR=df_3\lfloor A^T\rfloor A R$$

olur.

$$\Omega=df_3\lfloor A^T\rfloor A \qquad \text{(III.4.4)}$$

dersek

$$dR=\Omega R \qquad \text{(III.4.5)}$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca

$$f_3\lfloor A^T\rfloor A=I$$

olduğundan

$$df_3\lfloor A^T\rfloor A+f_3\lfloor A^T\rfloor dA=0$$

ise

$$
\begin{aligned}
df_3\lfloor A^{T} \rfloor A &= -\, f_3\lfloor A^{T} \rfloor dA \\
&= -\,(dA\, f_3[A])^{T} \\
&= -\,(df_3\lfloor f_3\lfloor A^{T}\rfloor \rfloor f_3[A])^{T} \\
&= -\,(f_3\lfloor df_3\lfloor A^{T}\rfloor \rfloor f_3[A]\,)^{T} \\
&= -\,(f_3\lfloor df_3\lfloor A^{T}\rfloor A\rfloor)^{T}
\end{aligned}
$$

olur. (III.4.4) den

$$\Omega = -(f_3[\Omega])^{T} = -(f_3[\Omega^{T}])$$

elde edilir.

$$\Omega = \lfloor \Omega_{ij} \rfloor_{3x3}$$

matrisinde

$$C_{11} = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{bmatrix},\ C_{12} = \begin{bmatrix} \Omega_{13} \\ \Omega_{23} \end{bmatrix}, C_{21} = [\Omega_{31} \quad \Omega_{32}] \text{ ve } C_{22} = [\Omega_{33}]$$

dersek

$$\Omega = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

olur, böylece

$$f_3[\Omega^{T}] = \begin{bmatrix} C^{T}{}_{11} & -C^{T}{}_{12} \\ -C^{T}{}_{21} & C^{T}{}_{22} \end{bmatrix} \text{ ve } -f_3[\Omega^{T}] = \begin{bmatrix} -C^{T}{}_{11} & C^{T}{}_{12} \\ C^{T}{}_{21} & -C^{T}{}_{22} \end{bmatrix}$$

olur. (III.4.6) dan

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C^{T}{}_{11} & C^{T}{}_{12} \\ C^{T}{}_{21} & -C^{T}{}_{22} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Matrislerin eşitliğinden

$$C_{11} = -C^{T}{}_{11} \qquad \text{(III.4.6)}$$

$$C_{22} = -C^{T}{}_{22} \qquad \text{(III.4.7)}$$

$$C_{12} = C^{T}{}_{21} \qquad \text{(III.4.8)}$$

$$C_{21} = C^{T}{}_{12} \qquad \text{(III.4.9)}$$

olur. Burada C_{11} ve C_{22} anti-simetrik matris olduklarından

$$\Omega_{11} = \Omega_{22} = \Omega_{33} = 0$$

olur.

$$i \neq j \text{ için } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}, \ \Omega_{ij} = \Omega_k \ \text{ olmak üzere}$$

$$\Omega_{23} = \Omega_1 \ , \ \Omega_{13} = -\Omega_2 \ , \ \Omega_{12} = \Omega_3$$

dersek (III.4.6), (III.4.7), (III.4.8), (III.4.9) dan

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{III.4.10}$$

elde edilir. (III.4.5) den

$$\begin{bmatrix} d\vec{R}_1 \\ dR_2 \\ d\vec{R}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{R}_2 \\ \vec{R}_3 \end{bmatrix}$$

olur ve bu ifadeden

$$\left. \begin{aligned} d\vec{R}_1 &= \ \ \Omega_3 \vec{R}_2 - \Omega_2 \vec{R}_3 \\ d\vec{R}_2 &= -\Omega_3 \vec{R}_1 + \Omega_1 \vec{R}_3 \\ d\vec{R}_3 &= -\Omega_2 \vec{R}_1 + \Omega_1 \vec{R}_2 \end{aligned} \right\} \tag{III.4.11}$$

elde edilir.

Aynı şekilde K_1/K' dual dönme hareketi için değişimler "d'" ile gösterilirse

$$d'R = \Omega' R \tag{III.4.12}$$

olur. Böylece

$$\begin{bmatrix} d'\vec{R}_1 \\ d'R_2 \\ d'\vec{R}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega'_3 & -\Omega'_2 \\ -\Omega'_3 & 0 & \Omega'_1 \\ -\Omega'_2 & \Omega'_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{R}_2 \\ \vec{R}_3 \end{bmatrix}$$

ise

$$\left. \begin{aligned} d'\vec{R}_1 &= \Omega'_3 \vec{R}_2 - \Omega'_2 \vec{R}_3 \\ d'\vec{R}_2 &= -\Omega'_3 \vec{R}_1 + \Omega'_1 \vec{R}_3 \\ d'\vec{R}_3 &= -\Omega'_2 \vec{R}_1 + \Omega'_1 \vec{R}_2 \end{aligned} \right\} \tag{III.4.13}$$

elde edilir.

ÖRNEK III.4.1: L^2 de $\vec{X}=(\rho\, ch\theta, \rho\, sh\theta)$ alırsak

$$d\vec{X}=(d\rho\ ch\theta+\rho\, sh\theta\, d\theta,\ d\rho\, sh\theta+\rho\, ch\theta . d\theta)$$

$$\vec{R}_1=(ch\theta,\ sh\theta)$$

$$\vec{R}_2=(sh\theta,\ ch\theta)$$

dersek

$$d\vec{X}=d\rho\ \vec{R}_1\ +\rho\, d\theta\ \vec{R}_2$$

elde edilir.

$$d\vec{R}_1=(sh\theta,\ ch\theta)\, d\theta=\vec{R}_2\ d\theta$$

ise

$$\Omega_{11}=\Omega_{22}=0 \text{ ve } \Omega_{12}=\Omega_{21}=d\theta$$

olduğundan

$$\Omega=\begin{bmatrix} 0 & d\theta \\ d\theta & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Böylece

$$\begin{bmatrix} d\vec{R}_1 \\ d\vec{R}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & d\theta \\ d\theta & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{R}_2 \end{bmatrix}$$

olur.

ÖRNEK III.4.2: $\vec{X}=(\rho\, ch\phi, \rho\, sh\phi\, sh\theta, \rho\, sh\phi\, ch\theta)$ için

$$\vec{R}_1=(ch\phi, sh\phi\, sh\theta, sh\phi\, ch\theta)$$

$$\vec{R}_2=(0, ch\theta, sh\theta)$$

$$\vec{R}_3=(sh\phi, ch\phi\, sh\theta, ch\phi\, ch\theta)$$

ise

$$d\vec{X}=d\rho\vec{R}_1+\rho\, sh\phi\, d\theta\vec{R}_2+\rho\, d\phi\vec{R}_3$$

ve

$$d\vec{R}_1=sh\phi\, d\theta\vec{R}_2+d\phi\vec{R}_3$$

$$d\vec{R}_2=-sh\phi\, d\theta\vec{R}_2+ch\phi\, d\theta\vec{R}_3$$

elde edilir. (III.4.10) dan

$$d\vec{R}_1 = \Omega_3 \vec{R}_2 - \Omega_2 \vec{R}_3$$

$$d\vec{R}_2 = -\Omega_1 \vec{R}_2 + \Omega_1 \vec{R}_3$$

ise

$$\Omega_1 = ch\phi\, d\theta \,, \Omega_2 = -d\phi \,, \Omega_3 = ch\phi\ d\theta$$

bulunur. (III.4.11) den

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & sh\phi\, d\theta & d\phi \\ -sh\phi\, d\theta & 0 & ch\phi\, d\theta \\ d\phi & ch\phi\ d\theta & 0 \end{bmatrix}$$

olur ve

$$\begin{bmatrix} d'\vec{R}_1 \\ d'\vec{R}_2 \\ d'\vec{R}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & sh\phi\, d\theta & d\phi \\ -sh\phi\, d\theta & 0 & ch\phi\, d\theta \\ d\phi & ch\phi\ d\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{R}_2 \\ \vec{R}_3 \end{bmatrix}$$

dir.

III.5. HİPERBOLİK LORENTZ KÜRESİNDE HIZLARIN LORENTZ GEOMETRİSİ

Bölüm III.4 deki izafe sistemine göre koordinatları x_1, x_2, x_3 olan herhangi bir nokta X olsun.

$$\overrightarrow{OX} = \vec{X} = x_1 \vec{R}_1 + x_2 \vec{R}_2 + x_3 \vec{R}_3$$

ifadesinde

$$X^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ ve } R = (\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3)$$

olmak üzere

$$\vec{X} = X^T R \tag{III.5.1}$$

şeklinde yazılabilir. X noktası özel olarak Lorentz birim küresi üzerinde ,yani $X \in S_1^2$ veya $X \in H_0^1$ ise

$$\langle \vec{X}, \vec{X} \rangle = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = \pm 1$$

dir. (III.5.1) den

$$d\vec{X} = dX^T R + X^T dR \tag{III.5.2}$$

ve başka bir yönde ki türevi "d'" ise

$$d'\vec{X} = d'X^T R + X^T d'R \tag{III.5.3}$$

olur. (III.4.5) ifadesini (III.5.2) de yerine yazarsak

$$d\vec{X} = (dX^T + X^T \Omega) R \tag{III.5.4}$$

elde edilir. Aynı şekilde (III.4.13) ifadesini de (III.5.3) de yerine yazarsak

$$d'\vec{X} = (dX^T + X^T \Omega') R \tag{III.5.5}$$

olur.

X noktasının K ve K′ Lorentz birim dual küresi üzerinde sabit kalma koşulları ,sırası ile, $d\vec{X} = 0$ ve $d'\vec{X} = 0$ dır. Bu koşullar için

$$dX^T = -X^T \Omega \tag{III.5.6}$$

ve

$$d'X^T = -X^T \Omega'$$

elde edilir. (III.4.6) dan

$$dX^T = X^T f_3 \lfloor \Omega^T \rfloor$$

ise

$$dX = f_3[\Omega]X \quad \text{ve} \quad dX = f_3[\Omega']X \tag{III.5.7}$$

elde edilir.

Şimdi X noktasını K üzerinde sabit kabul edelim. Burada X in K'ye göre hızına X in sürüklenme hızı denir.

(III.5.6) yi (III.5.5) da yerine yazarsak

$$d_f\vec{X} = X^T(\Omega - \Omega')R \tag{III.5.8}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\Psi_i = \Omega_i - \Omega_i'$$

dersek (III.5.9) dan

$$d_f\vec{X} = -(x_2\Psi_3 + x_3\Psi_2)\vec{R}_1 + (x_1\Psi_3 + x_3\Psi_1)\vec{R}_2 + (x_2\Psi_1 - x_1\Psi_2)\vec{R}_3 \tag{III.5.9}$$

sonucuna ulaşırız. Burada

$$\vec{\Psi} = \Psi_1\vec{R}_1 + \Psi_2\vec{R}_2 - \Psi_3\vec{R}_3 \tag{III.5.10}$$

eşitliği ile verilen vektöre üç yüzlünün ani dönme vektörü denir. $\vec{\Psi}$ ani dönme vektörü her hangi bir andaki Pfaff vektörüdür. Burada $d_f\vec{X}$ in

$$d_f\vec{X} = \vec{\Psi} \wedge \vec{X} \tag{III.5.11}$$

olduğu (III.5.9) dan elde edilir.(III.5.11) deki ani dönme vektörünü dual formda yazarsak

$$\vec{\Psi} = \vec{\psi} + \varepsilon\vec{\psi}^*$$

olur. $\vec{\Psi}$ dual vektörüne K/K' hareketinin ani dual Pfaff vektörleri de denir. $\vec{\Psi}$ nin $\vec{\psi}$ reel ve $\vec{\psi}^*$ dual kısımları K/K' dual dönme hareketine karşılık gelen H/H' uzay hareketinin, sırası ile, ani dönme ve ani kayma Pfaff vektörlerine karşılık gelirler. Sırf dönme ve sırf kayma hareketini hariç tutmak için aksi söylenmedikçe $\vec{\psi} \neq 0$ ve $\vec{\psi}^* \neq 0$ alınacaktır.

$\psi \neq 0$ olmak üzere

$$\vec{\Psi} = \left\|\vec{\Psi}\right\| \vec{P} \tag{III.5.12}$$

şeklinde yazılabildiğinden

$$\vec{P} = \vec{p} + \varepsilon \vec{p}^{*}$$

birim dual vektörü tek anlamlı olarak belirlenmiş olur. Burada

$$\left\|\vec{\Psi}\right\| = \psi + \varepsilon \psi^{*} = \Psi$$

ani dual dönme açısıdır.

$\vec{\Psi}$ ani dönme vektörü ile birim dual Lorentz küresinin ani dual dönmesi belli olur. Bu dönme $\vec{P}$ dönme polü etrafında Ψ dual ani dönme açısı ile olur.

$\vec{\Psi}$ dual vektörü IR^3 çizgiler uzayında $\vec{P}$ ekseni etrafında oluşan ani helis hareketini belirtir. Burada ψ, $\vec{P}$ ekseni etrafındaki sonsuz dönme küçük dönme açısını ve ψ^{*}da $\vec{P}$ boyuca sonsuz küçük kayma uzunluğunu gösterir. Bilindiği gibi bu ani helis hareketinin adımı

$$k = \frac{\left\langle \vec{\psi}, \vec{\psi}^{*} \right\rangle}{\left\langle \vec{\psi}, \vec{\psi} \right\rangle} = \frac{\psi^{*}}{\psi}$$

dir.

III.6. DUAL İVMENİN LORENTZ GEOMETRİSİ

K birim dual Lorentz küresinin sabit bir noktasının X olması halinde X noktasının hızı (III.5.13) den

$$d_f \vec{X} = \vec{\Psi} \wedge \vec{X}$$

olarak bilinmektedir. Bu noktanın ivmesi ise

$$\vec{J} = d_f^2 \vec{X} = d(\vec{\Psi} \wedge \vec{X}) = d\vec{\Psi} \wedge \vec{X} + \vec{\Psi} \wedge d_f \vec{X} \tag{III.6.1}$$

veya

$$\vec{J} = d\vec{\Psi} \wedge \vec{X} + \vec{\Psi} \wedge (\vec{\Psi} \wedge \vec{X}) \tag{III.6.2}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\vec{J} = d\vec{\Psi} \wedge \vec{X} + \left\langle \vec{\Psi}, \vec{\Psi} \right\rangle \vec{X} - \left\langle \vec{\Psi}, \vec{X} \right\rangle \vec{\Psi}$$

$$= d\vec{\Psi} \wedge \vec{X} + \Psi^2 \vec{X} - \left\langle \vec{\Psi}, \vec{X} \right\rangle \vec{\Psi}$$

dir. (III.5.8) de

$$\left(d_f X\right)^{\mathrm{T}} = \mathrm{X}^{\mathrm{T}} (\Omega - \Omega') \tag{III.6.3}$$

dersek (III.5.8) ifadesi

$$d_f \vec{X} = \left(d_f X\right)^{\mathrm{T}} \mathrm{R} \tag{III.6.4}$$

şekline dönüşür. (III.6.3) eşitliğinin her iki tarafının tranzpozunu alırsak

$$d_f X = f_3 (\Omega' - \Omega) \mathrm{X} \tag{III.6.5}$$

olur.

$$\mathrm{M} = f_3 (\Omega' - \Omega) \tag{III.6.6}$$

denirse

$$d_f X = \mathrm{M} \mathrm{X} \tag{III.6.7}$$

elde edilir. (III.6.6) dan

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 0 & -\Psi_3 & \Psi_2 \\ \Psi_3 & 0 & -\Psi_1 \\ \Psi_2 & -\Psi_1 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. (III.6.7) den $\vec{J}$ ivmesi için matrissel olarak

$$\begin{aligned} J &= d\mathrm{M}\mathrm{X} + \mathrm{M} d_f \mathrm{X} \\ &= d\mathrm{M}\mathrm{X} + \mathrm{M}\mathrm{M}\mathrm{X} \\ &= d\mathrm{M}\mathrm{X} + \mathrm{M}^2\mathrm{X} \\ &= (d\mathrm{M} + \mathrm{M}^2)\mathrm{X} \end{aligned}$$

ifadesi bulunur. Ayrıca $\Psi^2 = \Psi_1^2 + \Psi_2^2 - \Psi_3^2$ olduğundan

$$\mathrm{M}^2 = \begin{bmatrix} \Psi^2 - \Psi_1^2 & -\Psi_1 \Psi_2 & \Psi_1 \Psi_3 \\ -\Psi_1 \Psi_2 & \Psi^2 - \Psi_2^2 & \Psi_2 \Psi_3 \\ -\Psi_1 \Psi_3 & -\Psi_1 \Psi_3 & \Psi^2 + \Psi_3^2 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir.

III.7. KANONİK KOORDİNAT SİSTEMİ VE EKSEN YÜZEYLERİNİN LORENTZ GEOMETRİSİ

(III.5.11) de $k \neq 0$ koşulu altında $\vec{P} = \vec{R}_3$ olacak şekilde yeni bir izafe sistemi seçilmiş olsun. $\vec{P} = \vec{R}_3$ (III.5.11) den

$$\Psi_1 = \Psi_2 = 0 \text{ ise } \Omega_1 = \Omega_1' \text{ ve } \Omega_2 = \Omega_2'$$

olur. Dolayısıyla

$$\vec{\Psi} = -\Psi_3 \vec{R}_3 = -\Psi_3 \vec{P} \tag{III.7.1}$$

elde edilir. Bu halde hareketin adımı

$$k = \frac{\psi^*}{\psi} = \frac{-\psi_3^*}{-\psi_3} = \frac{\psi_3^*}{\psi_3}$$

olur.

Seçilen izafe sistem $\vec{P} = \vec{R}_3$ koşulu ile tek anlamlı olarak belirlenmiştir. Çünkü bu sistemin $\vec{R}_3$ etrafında keyfi olarak dönebilme olanağı vardır, yani $\left\{Q;\, \vec{R}_i, 1 \leq i \leq 3\right\}$ izafe sistemi $\vec{P}$ ekseni etrafında helisel hareket yapabilir. Bu serbestlik $\vec{R}_1$ ve $\vec{R}_2$ nin özel olarak seçilmesi için kullanışlıdır.

$\vec{R}_1$ ve $\vec{R}_2$ eksenleri $\vec{R}_3$ etrafında $\phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ dual açısı kadar aynı yönde döndürülsün. Burada $\left\{M;\, \vec{R}_1, \vec{R}_2\right\}$ düzlemi Euclid düzlemi gibi davranır. Çünkü bu düzlemde herhangi X ve Y noktalarını alırsak

$$\overrightarrow{OX} = \vec{x} = (x_1, x_2, 0) \text{ ve } \overrightarrow{OY} = \vec{y} = (y_1, y_2, 0)$$

dir. Lorentz anlamında iç çarpım

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle\big|_L = x_1.y_1 + x_2.y_2 - 0.0 = x_1.y_1 + x_2.y_2$$

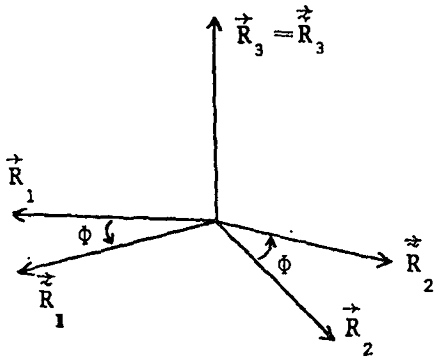
Euclid anlamında iç çarpım

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle\big|_E = x_1.y_1 + x_2.y_2 + 0.0 = x_1.y_1 + x_2.y_2$$

olur. Dolayısıyla xoy düzleminde

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle\big|_L = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle\big|_E$$

olduğu görülür. Böylece L(2,1) Lorentz uzayında *xoy* düzlemi Euclid düzlemi gibi davranır. $\vec{R}_3$ ekseni etrafında $\phi = \varphi + \varepsilon\ \varphi^*$ dual açısı kadar dönme, Euclid anlamında dönme ile çakışır (Şekil III.7.1).



ŞEKİL III.7.1

Bu sistem için

$$\vec{\tilde{R}}_1 = \vec{R}_1 \cos\phi + \vec{R}_2 \sin\phi$$

$$\vec{\tilde{R}}_2 = -\vec{R}_1 \sin\phi + \vec{R}_2 \cos\phi$$

$$\vec{\tilde{R}}_3 = \vec{R}_3$$

bağıntıları yazılabilir.

$$\{\mathrm{M}, \vec{\mathrm{L}}_i'\} \quad \text{ve} \quad \{\mathrm{M}, \vec{\mathrm{L}}_i\}, \quad 1 \le i \le 3$$

sistemlerinden $\{M; \vec{\tilde{R}}_1, \vec{\tilde{R}}_2, \vec{\tilde{R}}_3\}$ sistemine, sırası ile, A ve B gibi geçiş matrisi vardır. Dolayısıyla,

$$\tilde{R} = A\,E \qquad \text{ve} \qquad \tilde{R} = B\,E'$$

den (Bölüm III.4) deki metodu izleyerek

$$d\tilde{R} = \tilde{\Omega}\,\tilde{R} \qquad \text{ve} \qquad d'\,\tilde{R} = \tilde{\Omega}'\,\tilde{R}$$

formüllerine ulaşırız. Aynı şekilde

$$d\,R = \Omega R \qquad \text{ve} \qquad d'R = \Omega' R$$

olduğundan

$$\vec{\vec{R}}_1 = \vec{R}_1 \cos\phi + \vec{R}_2 \sin\phi$$

$$\vec{\vec{R}}_3 = \vec{R}_3$$

ifadelerinden diferansiyel olarak $\widetilde{\Omega}_1, \widetilde{\Omega}_2, \widetilde{\Omega}_3$ dual 1-formları Ω_1, Ω_2, Ω_3 dual 1-formları cinsinden ifade edilebilir.

$$d\vec{\vec{R}}_1 = d\vec{R}_1 \cos\phi - \vec{R}_1 \sin\phi\, d\phi + d\vec{R}_2 \sin\phi + \vec{R}_2 \cos\phi\, d\phi$$

$$d\vec{\vec{R}}_1 = (\Omega_3 \vec{R}_2 - \Omega_2 \vec{R}_3)\cos\phi - \vec{R}_1 \sin\phi\; d\phi + (-\Omega_3 \vec{R}_1 + \Omega_1 \vec{R}_3)\sin\phi + \vec{R}_2 \cos\phi\, d\phi$$

$$d\vec{\vec{R}}_1 = (-\Omega_3 \sin\phi - \sin\phi\, d\phi)\vec{R}_1 + (\Omega_3 \cos\phi + \cos\phi\, d\phi)\vec{R}_2$$

$$+ (-\Omega_2 \cos\phi + \Omega_1 \sin\phi)\vec{R}_3 \qquad \text{(III.7.2)}$$

Aynı şekilde (III.4.12) den

$$d\vec{\vec{R}}_1 = \widetilde{\Omega}_3 \vec{\vec{R}}_2 - \widetilde{\Omega}_2 \vec{\vec{R}}_3 = \widetilde{\Omega}_3(-\vec{R}_1 \sin\phi + \vec{R}_2 \cos\phi) - \widetilde{\Omega}_2 \vec{R}_3$$

$$d\vec{\vec{R}}_1 = -\widetilde{\Omega}_3 \sin\phi \vec{R}_1 + \widetilde{\Omega}_3 \cos\phi \vec{R}_2 - \Omega_2 \vec{R}_3 \qquad \text{(III.7.3)}$$

(III.6.1) ve (III.6.2) den

$$\widetilde{\Omega}_2 = \Omega_2 \cos\phi - \Omega_1 \sin\phi \qquad \text{(III.7.4)}$$

$$\widetilde{\Omega}_3 = \Omega_3 + d\phi$$

elde edilir. Aynı şekilde

$$\vec{\vec{R}}_2 = -\vec{R}_1 \sin\phi + \vec{R}_2 \cos\phi$$

$$\vec{\vec{R}}_3 = \vec{R}_3$$

ifadelerinin diferansiyelini alarak

$$\widetilde{\Omega}_1 = \Omega_1 \cos\phi + \Omega_2 \sin\phi \qquad \text{(III.7.5)}$$

olur.

$$cos\phi = cos(\varphi + \varepsilon\varphi^*) = cos\varphi - \varepsilon\varphi^* sin\varphi$$

$$sin\phi = sin(\varphi + \varepsilon\varphi^*) = sin\varphi + \varepsilon\varphi^* cos\varphi$$

eşitliklerini (III.6.3) de yerine yazarsak

$$\widetilde{\Omega}_2 = \widetilde{w}_2 + \varepsilon \widetilde{w}^*{}_2 = (w_2 + \varepsilon w^*{}_2)cos\phi - (w_1 + \varepsilon w^*{}_1)sin\phi$$

elde edilir. Dual sayıların eşitliğinden

$$\widetilde{w}_2 = w_2\, cos\varphi - w_1\, sin\varphi$$

$$\widetilde{w}^*{}_2 = w^*{}_2 \cos\varphi - w^*{}_1 \sin\varphi - \varphi^*(w_2 \sin\varphi + w_1 \cos\varphi)$$

ve aynı şekilde (III.7.4) den

$$\widetilde{\Omega}_1 = (w_1 + \varepsilon\, w^*{}_1)cos\phi + (w_2 + \varepsilon\, w^*{}_2)sin\phi = \widetilde{w}_1 + \varepsilon\widetilde{w}^*{}_1$$

eşitliğinden

$$\widetilde{w}_1 = w_1 \cos\varphi + w_2 \sin\varphi$$

$$\widetilde{w}^*{}_1 = w^*{}_1 \cos\varphi - w^*{}_2 \sin\varphi + \varphi^*(w_2 \cos\varphi - w_1 \sin\varphi)$$

olur. Dolayısıyla,

$$\widetilde{w}^*{}_2 = w^*{}_2 \cos\varphi - w^*{}_1 \sin\varphi - \varphi^*\widetilde{w}_1$$

$$\widetilde{w}^*{}_1 = w^*{}_1 \cos\varphi + w^*{}_2 \sin\varphi + \varphi^*\widetilde{w}_2$$

elde edilir. $\widetilde{\Omega}_1$=0 olacak şekilde $\phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ olacak şekilde dual açısını belirlemek mümkündür.

$$\widetilde{\Omega}_1 = 0$$

ise

$$\widetilde{w}_1 = w_1 \cos\varphi + w_2 \sin\varphi = 0$$

$$\widetilde{w}^*{}_1 = w^*{}_1 \cos\varphi + w^*{}_2 \sin\varphi + \varphi^*\widetilde{w}_2 = 0$$

denklemlerinden ϕ dual açısı tayin edilebilir. Şimdi hesap edilen ϕ dual açısı kadar dual Lorentz küre üzerinde bir dual dönmenin veya IR^3 de helisel hareketin yapıldığı kabul edilir.

$$d\widetilde{R} = \widetilde{\Omega}\widetilde{R} \text{ ve } d'\widetilde{R} = \widetilde{\Omega}'\widetilde{R}$$

ifadeleri,sırası ile ,

$$\begin{bmatrix} d\vec{\widetilde{R}}_1 \\ d\vec{\widetilde{R}}_2 \\ d\vec{\widetilde{R}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{\Omega}_3 & -\widetilde{\Omega}_2 \\ -\widetilde{\Omega}_3 & 0 & 0 \\ -\widetilde{\Omega}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\widetilde{R}}_1 \\ \vec{\widetilde{R}}_2 \\ \vec{\widetilde{R}}_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.7.6)}$$

ve

$$\begin{bmatrix} d\tilde{\vec{R}}_1 \\ d\tilde{\vec{R}}_2 \\ d\tilde{\vec{R}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\Omega}'_3 & -\tilde{\Omega}'_2 \\ -\tilde{\Omega}'_3 & 0 & 0 \\ -\tilde{\Omega}'_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\vec{R}}_1 \\ \tilde{\vec{R}}_2 \\ \tilde{\vec{R}}_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.7.7)}$$

olur. Aynı şekilde (III.5.7) ve (III.5.8) den

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\Omega}_3 & \tilde{\Omega}_2 \\ -\tilde{\Omega}_3 & 0 & 0 \\ \tilde{\Omega}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.7.8)}$$

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\Omega}'_3 & \tilde{\Omega}'_2 \\ -\tilde{\Omega}'_3 & 0 & 0 \\ \tilde{\Omega}'_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.7.9)}$$

olur.

$\vec{R}_3 = \vec{P}$ dual vektörü hareketli K Lorentz Hiperbolik birim küresi üzerinde (P) dual hareketli pol eğrisini sabit K' Lorentz küresi üzerinde (P') sabit pol eğrisine resmeder. H/H' hareketli yapılırken bu pol eğrileri birbiri üzerinde yuvarlanırlar, yani dual yay uzunlukları aynı kalarak P noktasında birbirlerine teğet olurlar.

Dual pol eğrilerinin H ve H' uzaylarındaki karşılıkları H/H' hareketlerinin eksen yüzeyleri denen iki regle yüzeydir. Burada (P) ye karşılık gelen hareketli eksen yüzeyi P ani ekseninin H hareketlin uzayındaki geometrik yeridir. Aynı şekilde (P) ye karşılık gelen sabit eksen yüzeyi de $(\vec{P})$ ekseninin H' deki geometrik yeridir.

Yine $k \neq 0$ koşulu altında $\vec{P}(t) = \vec{R}_2(t)$ olacak şekilde izafe sitemini yeniden seçelim. $\vec{P} = \vec{R}_2$ olması

$$\psi_1 = \psi_2 = 0$$

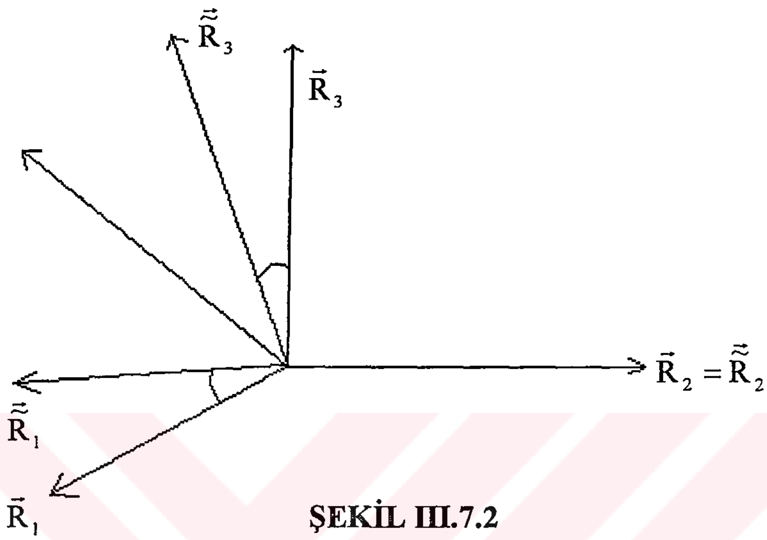
ise

$$\Omega_1 = \Omega'_1 \quad \text{ve} \quad \Omega_3 = \Omega'_3$$

olmasını gerektirir. O halde hareketin adımı

$$k = \frac{\psi_2^{\;*}}{\psi_2}$$

olur. $\vec{R}_1$ ve $\vec{R}_3$ eksenleri $\vec{R}_2$ etrafında $\phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ dual açısı kadar aynı yönde döndürülsün ve yeni sistem $\left\{ M; \tilde{\vec{R}}_i, 1 \le i \le 3 \right\}$ ile gösterilsin (Şekil III.7.2)



ŞEKİL III.7.2

Bu sistem için

$$\tilde{\vec{R}}_1 = ch\phi\,\vec{R}_1 + sh\phi\,\vec{R}_3$$

$$\tilde{\vec{R}}_2 = \vec{R}_2$$

$$\tilde{\vec{R}}_3 = sh\phi\,\vec{R}_1 + ch\phi\,\vec{R}_3$$

bağıntıları yazılabilir. Aynı şekilde

$$\left\{ M; \vec{E}_i' \right\} \text{ ve } \left\{ M; \vec{E}_i \right\},\ 1 \le i \le 3$$

sistemlerinden $\left\{ M; \tilde{\vec{R}}_1, \tilde{\vec{R}}_2, \tilde{\vec{R}}_3 \right\}$ sistemine, sırası ile, A ve B geçiş matrisleri vardır. Dolayısıyla

$$\tilde{R} = AE \text{ ve } \tilde{R} = BE'$$

den

$$d\tilde{R} = \tilde{\Omega}\tilde{R} \quad \text{ve } d'\tilde{R} = \tilde{\Omega}'\tilde{R}$$

formüllerine ulaşırız. Aynı şekilde

$$dR = \Omega\, R \text{ ve } d'R = \Omega' R$$

olduklarından

$$\vec{\tilde{R}}_1 = ch\phi\vec{R}_1 + sh\phi\vec{R}_3$$

$$\vec{\tilde{R}}_2 = \vec{R}_2$$

ifadelerinden yine diferansiyel alarak $\tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_3$ dual 1-formları $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ dual 1-formları cinsinden ifade edilebilir.

$$d\vec{\tilde{R}}_1 = ch\phi\, d\vec{R}_1 + sh\phi\, d\phi\vec{R}_1 + sh\phi\, d\vec{R}_3 + ch\phi\, d\phi\vec{R}_3$$

$$d\vec{\tilde{R}}_1 = (-sh\phi\Omega_2 + sh\phi\, d\phi)\vec{R}_1 + (ch\phi\Omega_3 + \mathrm{sh}\phi\Omega_1)\vec{R}_2 + (\text{-}ch\phi.\Omega_2 + ch\phi\, d\phi)\vec{R}_3$$

Aynı şekilde (III.4.12)den

$$d\vec{\tilde{R}}_1 = \tilde{\Omega}_3\vec{\tilde{R}}_2 - \tilde{\Omega}_2\vec{\tilde{R}}_3 = \tilde{\Omega}_3\vec{R}_2 - \tilde{\Omega}_2(sh\phi\vec{R}_1 + ch\phi\vec{R}_3)$$

$$d\vec{\tilde{R}}_1 = -sh\phi\tilde{\Omega}_2\vec{R}_1 + \tilde{\Omega}_3\vec{R}_2 - ch\phi\tilde{\Omega}_2\vec{R}_3$$

elde edilir, dolayısıyla

$$\tilde{\Omega}_2 = \Omega_2 - d\phi$$

$$\tilde{\Omega}_3 = sh\phi\Omega_1 + ch\phi\Omega_3$$

dir.

$$\vec{\tilde{R}}_2 = \vec{R}_2$$

$$\vec{\tilde{R}}_3 = sh\phi\vec{R}_1 + ch\phi\vec{R}_3$$

ifadelerinin diferansiyelini alırsak

$$\tilde{\Omega}_1 = ch\phi\Omega_1 + sh\phi\Omega_3$$

olur. Böylece

$$\tilde{\Omega}_1 = \tilde{\omega}_1 + \varepsilon\tilde{\omega}_1^* = (\omega_3 + \varepsilon\omega^*{}_3)sh\phi + (\omega_1 + \varepsilon\omega^*{}_1)ch\phi$$

dir. $\phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ ise

$$sh\phi = sh\varphi + \varepsilon\varphi^* ch\varphi$$

$$ch\phi = ch\varphi + \varepsilon\varphi^* sh\varphi$$

olduğundan

$$\tilde{\omega}_1 = \omega_1 ch\varphi + \omega_3 sh\varphi$$

$$\widetilde{\omega}^*{}_1 = \omega^*{}_1\, ch\varphi + \omega^*{}_3\, sh\varphi + \varphi^*(\omega_1\, sh\varphi + \omega_3\, ch\varphi)$$

dir. Aynı şekilde (III.6.11) den

$$\widetilde{\Omega}_3 = \widetilde{\omega}_3 + \varepsilon\,\widetilde{\omega}_3 = (\omega_1 + \varepsilon\,\omega^*{}_1)sh\phi + (\omega_3 + \varepsilon\,\omega^*{}_3)ch\phi$$

den işlemler yapılıp dual sayılarda eşitlik kavramından

$$\widetilde{\omega}_3 = \omega_1\, sh\varphi + \omega_3\, ch\varphi$$

$$\widetilde{\omega}^*{}_3 = \omega^*{}_1\, sh\varphi + \omega^*{}_3\, ch\varphi + \varphi^*(\omega_1\, ch\varphi + \omega_3\, sh\varphi)$$

olur. Dolayısıyla

$$\widetilde{\omega}^*{}_1 = \omega^*{}_1\, ch\varphi + \omega^*{}_3\, sh\varphi + \varphi^*\,\widetilde{\omega}_3$$

$$\widetilde{\omega}^*{}_3 = \omega_1' sh\varphi + \omega_2{}^* ch\varphi + \varphi^*\widetilde{\omega}_1$$

elde edilir. Aynı şekilde $\widetilde{\Omega}_1 = 0$ olacak şekilde $\phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ dual açısını belirlemek mümkündür.

$$\widetilde{\Omega}_1 = 0$$

ise

$$\widetilde{\omega}_1 = \omega_1 ch\varphi + \omega_3 sh\varphi = 0$$

$$\widetilde{\omega}^*{}_1 = \omega^*{}_1 ch\varphi + \omega^*{}_3 sh\varphi + \varphi^*\widetilde{\omega}_3 = 0$$

denklemlerinden $\phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ dual açısı tayin edilebilir. Şimdi hesap edilen ϕ dual açısı kadar dual Lorentz küre üzerinde bir dönmenin

$$d\widetilde{\mathrm{R}} = \widetilde{\Omega}\widetilde{\mathrm{R}} \text{ ve } d'\widetilde{\mathrm{R}} = \widetilde{\Omega}'\widetilde{\mathrm{R}}$$

ile ifade edildiğini biliyoruz. Bu ifadeler ,sırası ile,

$$\begin{bmatrix} d\vec{\widetilde{\mathrm{R}}}_1 \\ d\vec{\widetilde{\mathrm{R}}}_2 \\ d\vec{\widetilde{\mathrm{R}}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{\Omega}_3 & -\widetilde{\Omega}_2 \\ -\widetilde{\Omega}_3 & 0 & 0 \\ -\widetilde{\Omega}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\widetilde{\mathrm{R}}}_1 \\ \vec{\widetilde{\mathrm{R}}}_2 \\ \vec{\widetilde{\mathrm{R}}}_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.7.10)}$$

ve

$$\begin{bmatrix} d\vec{\tilde{\mathrm{R}}}_1 \\ d\vec{\tilde{\mathrm{R}}}_2 \\ d\vec{\tilde{\mathrm{R}}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\Omega}'_3 & -\tilde{\Omega}'_2 \\ -\tilde{\Omega}'_3 & 0 & 0 \\ -\tilde{\Omega}'_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\tilde{\mathrm{R}}}_1 \\ \vec{\tilde{\mathrm{R}}}_2 \\ \vec{\tilde{\mathrm{R}}}_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.7.11)}$$

olur. Benzer şekilde (III.5.7) ve (III.5.8) dan

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\Omega}_3 & \tilde{\Omega}_2 \\ -\tilde{\Omega}_3 & 0 & 0 \\ \tilde{\Omega}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.7.12)}$$

ve

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\Omega}'_3 & \tilde{\Omega}'_2 \\ -\tilde{\Omega}'_3 & 0 & 0 \\ \tilde{\Omega}'_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

73

III.8.YÖRÜNGE YÜZEYLERİNİN LORENTZ GEOMETRİSİ

III.8.1 Hareketli Uzayın Sabit Bir Doğrusunun Yörünge Yüzeyinin Lorentz Geometrisi

H hareketli uzayında tespit edilmiş $\vec{X}$ doğrusunu göz önüne alalım , yani K birim dual kürenin sabit bir X noktasını düşünelim. H/H' hareketinde $\vec{X}$ doğrusu H' sabit uzayında X `in yörünge yüzeyi denen bir $(\vec{X})$ regle yüzeyi çizer. X noktasının K' ye göre değişimi, yani $\vec{X}$ doğrusunun H' ye göre değişimi (III.5.2) formülünden

$$d_f\vec{X} = \vec{\Psi} \wedge \vec{X}$$

olarak bilinmektedir. Bu değişim kanonik izafe sisteminde ifade edilirse, $\vec{P} = \vec{\mathrm{R}}_3$ için

$$d_f\vec{X} = -\vec{\Psi}_3(\vec{P} \wedge \vec{X}) = -\Psi_3(\vec{\mathrm{R}}_3 \wedge \vec{X}) \qquad \text{(III.8.1)}$$

elde edilir.

$$\vec{X} = X_1\vec{\mathrm{R}}_1 + X_2\vec{\mathrm{R}}_2 + X_3\vec{\mathrm{R}}_3$$

olduğundan

$$d_f\vec{X} = -\vec{\Psi}_3(-X_1\vec{\mathrm{R}}_2 + X_2\vec{\mathrm{R}}_1)$$

$$d_f\vec{X} = \vec{\Psi}_3(X_2\vec{\mathrm{R}}_1 - X_1\vec{\mathrm{R}}_2) \qquad \text{(III.8.2)}$$

bulunur.

X noktası K' üzerinde dual yay elementi

$$d\phi = d\varphi + \varepsilon d\varphi^*$$

olan bir dual (X) eğrisi çizer . $(\vec{X})$ yörünge yüzeyinin drali hesaplanırsa

$$d\phi^2 = d\varphi^2 + 2\varepsilon d\varphi d\varphi^* = \left\langle d_f\vec{X}, d_f\vec{X} \right\rangle$$

$$d\phi^2 = (X_1^2 + X_2^2)\Psi_3^2 \qquad \text{(III.8.3)}$$

X noktası hiperbolik Lorentz küresi üzerinde olduğundan

$$\left\langle \vec{X}, \vec{X} \right\rangle = X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = \pm 1$$

dir. Buradan

$$X_1^2 + X_2^2 = \pm 1 + X_3^2$$

olur.(III.8.3) `den

$$d\phi^2 = (\pm 1 + X_3^2)\Psi_3^2$$

elde edilir. X_3 ve Ψ_3 yerine dual değeri yazılırsa

$$d\phi^2 = (\pm 1 + x_3^2 + 2\varepsilon . x_3 x_3^*).(\psi_3^2 + 2\varepsilon . \psi_3 \psi_3^*)$$

$$d\phi^2 = (\pm 1 + x_3^2)\psi_3^2 + 2\varepsilon[(\pm 1 + x_3^2)\psi_{33}^{*} + x_3 x_3^* \psi_3^2]$$

ve dual sayıların eşitliğinden

$$d\varphi = \left(\pm 1 + x_3^{\ 2}\right)\psi_3^{\ 2}\ , \quad d\varphi\, d\varphi^* = \left(\pm 1 + x_3^{\ 2}\right)\psi_3 \psi_3^{\ *} + x_3 x_3^{\ *} \psi_3^{\ 2},$$

$$\frac{1}{d} = \frac{d\varphi\, d\varphi^*}{d\varphi^2} = \frac{d\varphi^*}{d\varphi} = \frac{(\pm 1 + x_3^{\ 2})\psi_3\psi_3^{\ *} + x_3 x_3^{\ *}\psi_3^{\ 2}}{\left(\pm 1 + x_3^{\ 2}\right)\psi_3^{\ 2}}$$

elde edilir. Hareketin adımı

$$k = \frac{\psi_3^{\ *}}{\psi_3}$$

olduğundan

$$\frac{1}{d} = k + \frac{x_3 x_3}{\pm 1 + x^2{}_3} = k + \frac{x_1 x_1^* + x_2 x_2^*}{x_1^2 + x_2^2} \qquad \text{(III.8.4)}$$

şeklinde de yazılabilir.

Bir t anında aynı $\frac{1}{d}$ sabit dralli ışın yüzeylerini çizen $\vec{X} \in H$ sabit doğrularının bütünü

$$\left(k - \frac{1}{d}\right)\left(\pm 1 + x_3^{\ 2}\right) + x_3 x_3^{\ *} = 0 \qquad \text{(III.8.5)}$$

veya

$$\left(k - \frac{1}{d}\right)\left(x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}\right) + x_3 x_3^{\ *} = 0 \qquad \text{(III.8.6)}$$

şeklinde de yazılabilir. Böylece Plücker doğru koordinatlarına göre karesel bir denklem elde edilmiş olur. (III.8.5) denklemi normlanmış homogen olmayan Plücker doğru koordinatları için geçerlidir. (III.8.6) denklemi ise homogen formda yazılmıştır, Yani x_i ve x_i^* yerine ρx_i , ρx_i^*, $1 \leq i \leq 3$ alındığında denklemde değişiklik olmaz.

KAYNAKLAR

[1] HACISALİHOĞLU,H.H : "Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi", Yayın No:30, Gazi Üniversitesi, Fen-Ed. Fakültesi, ANKARA,1983.

[2] HACISALİHOĞLU,H.H : " Diferansiyel Geometri" İnönü Üniversitesi, Fen-Ed. Fakültesi,MALATYA,1983.

[3] HACISALİHOĞLU,H,H :"Lineer Cebir" Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat yayınları, ELAZIĞ, 1982.

[4] MÜLLER H.R : "Kinematik Dersleri"Ankara Üniversitesi Pess, 1963.

[5] BEKTAŞ M. : "Lorentz Düzleminde İntegral Geometrisi", Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, ELAZIĞ, 1998

[6] ERGİN, A.A : "Lorentz Düzleminde Kinematik Geometri ", Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 1989

[7] UĞURLU,H, : "Space-like Doğrultmanlı Bir Time-like Regle Yüzeye Bağlı Ani Dönme Vektörleri", Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Dergisi, 1998, Sayı:4, Sayfa:88-97

ÖZET

Bu çalışmada, dual sayıların özelliklerinden faydalanarak E. Study gösterimleri Lorentz geometrisine çevrilmiştir. Lorentz iç ve dış çarpımlarının tanımından faydalanarak, Euclid uzaydaki bazı ifadelerin Lorentz uzayındaki karşılıkları elde edilmiş ve bunlardan faydalanarak Euclid anlamındaki uzay kinematiği Lorentz anlamına dönüştürülmüştür.

Bölüm I' de ID-cümlesi tanımlanıp E.Study dönüşümleri hakkında genel bilgi verilip daha sonra özel bir f_3 dönüşümü tanımlanmıştır. Ayrıca Bölüm IIIde kullanılacak olan bazı dual ifadelerin Euclid anlamındaki formülleri verilmiştir.

Bölüm II'de Bölüm I'deki dual ifadelerin Lorentz karşılıkları incelenmiştir.

Bölüm III' de Lorentz uzayındaki dönmeyi ifade eden denklemler elde edilmiştir ve Bölüm I' de tanımlanan f_3 dönüşümü de dikkate alınarak bulunan bu denklemlerdeki Ω dönme matrisinin Euclid uzayındakinden farkının, anti-simetrik olmayışı sonucuna ulaşılmıştır.

SUMMARY

In this study, using properties of dual numbers, E.STUDY representations are transformed into Lorentz geometry. Considering definitions of the Lorentzian dot and exterior products, some relations in correspondances in Lorentzian space of Euclidean space are obtained and using these space kinematics in Euclidean means are transformed into Lorentzian ones.

In section I, the general knowledge about E.STUDY transformations is given, and then ID-set and a new f_3 transformation are defined. Also, Euclidean forms of some dual relations which is used in section III, is given.

In section II, Lorentz counterparts of dual expressions in section I are examined.

In section III, the equations explaining rotations in the Lorentz space are obtained and Ω rotation matrices is found that considering f_3 transformation defined in section I. Also, it follows that the difference of Ω rotation matrix in these equations from that ones in the Euclidean space is to be non-antisymmetric.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı öneren, tez çalışmasının planlanmasında ve düzenli bir şekilde yürütülmesinde yardımlarını esirgemeyen danışmanım Prof . Dr . Ali Paşa AYDIN 'a, çeşitli aşamalarda yardımlarını esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Hüsnü BAYSAL, Yrd. Doç. Dr. Uğur CAMCI, Yrd. Doç. Dr. İsmail DEMİR' e ve tez yazımı sırasında yardım eden Araştırma Görevlisi Can AKTAŞ' a teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZGEÇMİŞ

25/03/1971 yılında Ordu da doğdu. İlköğretimini Ordu 19 Eylül ilkokulunda tamamladıktan sonra Orta öğrenimini Samsun Mithat Paşa Lisesinde tamamladı. 1989 yılında girdiği 9 Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Matematik Bölümünden 1993 yılında mezun oldu. 1994 ile 1998 yılları arasında Van'ın Gevaş ilçesinde ve 1998-1999 öğretim yılında Çanakkale Gökçalı İlköğretim okulunda Matematik öğretmeni olarak görev yaptı. 1999 yılı Mayıs ayında 18 Mart Üniversitesinin açmış olduğu Araştırma görevliliği sınavını kazanmış olup, halen aynı üniversitede görev yapmaktadır.