T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2-PARAMETRELİ HAREKETLERİN LORENTZ UZAYINDAKİ KARŞILIKLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet KALE

ÇANAKKALE – 2000

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu araştırma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ali Paşa AYDIN (Danışman)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Uğur CAMCI U. Camcı

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hüsnü BAYSAL

Kod No: 23

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Osman DEMİRCAN
Enstitü Müdür Vekili

İÇİNDEKİLER

ÖZ

Bu çalışmada 2-parametreli hareketlerin Lorentz uzayındaki karşılıkları elde edilmiştir.

Bölüm I de temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Diğer bölümlerde 2-parametreli hareketlerin Lorentz uzayındaki karşılıkları, kutup eksenleri, bir eğri elementini çizen noktalar ve 2-parametreli hareketlerden çekilen bir parametreli hareketler elde edilmiştir.

ABSTRACT

In this work, the correspondences of movements of 2-parameter motions in Lorentz space are obtained.

In chapter one, the fundamental definitions and theorems are given.

In the following chapters, the correspendes of 2-parameter motions in Lorentz space, polar axis, the points that drawn a curve element and motions with 1-parameter that is reduced from motions with 2-parameter are obtained.

SİMGELER

$\in$	: Eleman
$\Rightarrow$	: ise (gerektirir)
$\forall$	: Her
$\times$	: Vektörel çarpım
$\wedge$	: Dış çarpım
E^n	: n-boyutlu Euclid uzayı
$<,>$	: Euclid anlamında iç çarpım
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar sistemi
$\vec{v}_r$	: Relatif hız vektörü
$\vec{v}_a$	: Mutlak hız vektörü
$\vec{v}_f$	: Sürüklenme hız vektörü
w_i	: Pfaff- formları
$d_f\vec{x}$	: X noktasının ilerleme doğrultusu
B_I	: Bir parametreli hareket
B_{II}	: İki parametreli hareket
(P)	: Hareketli pol eğrisi
(P')	: Sabit pol eğrisi
(g)	: L-düzlemindeki kutup eğrisi
(g')	: L'-düzlemindeki kutup eğrisi
k	: L-düzleminin zarf eğrisi
k'	: L'-düzleminin zarf eğrisi
δ	: Eğrilik yarıçapı
$\langle , \rangle\big\|_L$	: Lorentz anlamında iç çarpım

BÖLÜM I

I. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu kısımda daha sonraki bölümlerde kullanacağımız temel tanım ve teoremler verilecektir.

TANIM I .1 (Topoloji) :

X bir cümle olsun. X' in alt cümlelerinin bir koleksiyonu $\Im$ olsun. $\Im$ koleksiyonu aşağıdaki önermeleri doğrularsa X üzerinde bir topoloji adını alır.

($\Im$ 1) $X, \varnothing \in \Im$

($\Im$2) $\forall A_1, A_2 \in \Im \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \Im$

($\Im$3) $A_i \in \Im$, $i \in I$, $\bigcup_{i \in I} A_i$

dir[1].

TANIM I.2 (Topolojik Uzay) :

Bir X cümlesi ve üzerindeki bir $\Im$ topolojisinden oluşan (X, $\Im$) ikilisine bir topolojik uzay denir[1].

TANIM I.3 (Homeomorfizm) :

X ve Y birer topolojik uzay olsun. Bir

$$f: X \to Y$$

sürekli fonksiyonun f^{-1} tersi var ve f^{-1} de sürekli ise f ye X den Y ye bir homeomorfizm (topolojik dönüşüm) denir[1].

TANIM I.4 (Hausdorff Uzayı) :

X bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir n-boyutlu topolojik manifold (topolojik n-manifold) dur denir.

(M1) M bir Hausdorff uzayıdır.

(M2) M nin her bir açık alt cümlesi E^n veya E^n nin bir açık alt cümlesine homeomorftur.

(M3) M sayılabilir çoklukta açık alt cümlelerle örtülebilir [1].

TANIM I.5 (Dış Türev) :

M bir n-boyutlu topolojik manifold ve M üzerinde bir A bölgesinde tanımlı bir C^∞ sınıfından bir fonksiyon f olsun. (f bir 0-form olarak adlandırılır).

$$df(x) = X[f] = \langle \nabla f, x \rangle$$

olarak tanımlanan df 1-formuna f nin A daki dış türevi denir [1].

TANIM I.6 (Pfaff Formlar) :

Bir veya iki değişkenli diferansiyel ifadelere yani,

$$W_i = f_i(t)dt \text{ veya } W_i = f_i(u,v)du + g_i(u,v)dv$$

şeklindeki bağıntılara Pfaff -formları adı verilir [2].

TANIM I.7 (Lorentz Anlamında İç Çarpım) :

R^3 vektör uzayı üzerinde Euclid iç çarpımı yerine

$$\langle , \rangle_L : R^3 \times R^3 \to R$$

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \to \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_L = a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3$$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ biçiminde tanımlı $\langle , \rangle_L$ fonksiyonuna Lorentz iç çarpımı denir. R^3 afin uzayı Minkowski 3-uzayı olarak isimlendirilir ve R_1^3 ile gösterilir [4].

TANIM I.8 (Lorentz Uzayında Vektörler) :

R_1^2 uzayında herhangi bir vektör $\vec{a} = (a_1, a_2)$ olmak üzere

$\left\|\vec{a}\right\|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L > 0$ *ise* $\vec{a}$ ya space-like vektör

$\left\|\vec{a}\right\|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L < 0$ *ise* $\vec{a}$ ya time-like vektör

$\left\|\vec{a}\right\|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_L = 0$ *ise* $\vec{a}$ ya light-like (null) vektör

denir [4].

TANIM I.9 ($\vec{a}$ nın Lorentz Anlamındaki Normu):

$\vec{a} \in R_1^2$ vektörü için $\vec{a}$ nın Lorentz anlamındaki normu

$$\left\|\vec{a}\right\| = \sqrt{\left|\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle\right|}$$

biçiminde tanımlanır [4].

TANIM I.10 (Lorentz Anlamında Ortogonal Vektör) :

R_1^2 uzayında iki vektör $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ olsun.

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle_L = 0$$

ise $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerine Lorentz anlamında ortogonaldirler denir [4].

TANIM I.11 (Lorentz Geometrisinde Vektörler)

$\vec{a} \in R_1^2$ time-like vektör olsun. $\vec{e} = (0,1)$ olmak üzere

$\langle \vec{a}, \vec{e} \rangle < 0$ *ise* $\vec{a}$ ya future-pointing time like vektör

$\langle \vec{a}, \vec{e} \rangle > 0$ *ise* $\vec{a}$ ya past-pointing time like vektör

denir [4].

TANIM I.12 (Yönlendirilmiş Hiperbolik Açı) :

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$, R_1^2 uzayında future-pointing (veya past-pointing) time-like iki vektör olsun.

$$\begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

eşitliği sağlanacak şekilde $\theta \in R$ sayısına $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ ye yönlendirilmiş hiperbolik açı denir ve $\theta = (a, b)$ biçiminde gösterilir [4].

TANIM I.13 (Lorentz Anlamında Vektörel Çarpımı) :

R_1^3 uzayında iki vektör $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ olsun. $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ ve $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ olmak üzere:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_L=(a_3b_2-a_2b_3,a_1b_3-a_3b_1,a_1b_2-a_2b_1)$$

vektörüne $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ nin Lorentz anlamında vektörel çarpımı denir.

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j \text{ ise}\\ 0, & i\neq j \text{ ise}\end{cases} \qquad \text{ve} \qquad \vec{l}_i=(\delta_{i1},\delta_{i2},\delta_{i3})$$

olmak üzere

$$\vec{a}\times\vec{b}\Big|_L=-\det\begin{bmatrix}\vec{l}_1 & \vec{l}_2 & -\vec{l}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{bmatrix}$$

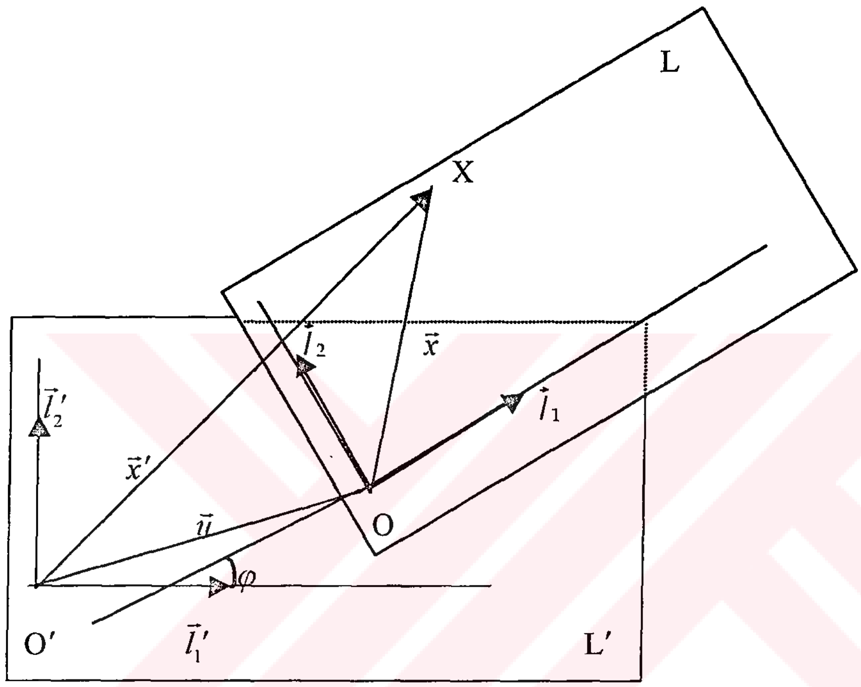
ile verilir. Lorentz anlamında

$$\vec{l}_1\times\vec{l}_2=\vec{l}_3 \quad , \quad \vec{l}_2\times\vec{l}_3=-\vec{l}_1 \quad , \quad \vec{l}_3\times\vec{l}_1=-\vec{l}_2$$

dir [4].

TANIM I.14 (Relatif Hız) :

X noktasının L-Lorentz düzlemine göre hız vektörüne, yani X noktası L-düzlemindeki yörünge eğrisini çizerken sahip olduğu vektörel hıza X noktasının $\overrightarrow{V_r}$ relatif hızı denir [2].



(Şekil I.1)

TANIM I.15 (Mutlak Hız) :

X noktasının L′-Lorentz düzlemine göre hız vektörüne X noktasının $\overrightarrow{V_a}$ mutlak hızı denir [2]. (Şekil I.1).

TANIM I.16 (Euclid Anlamında Sürüklenme Hızı) :

X noktasının $\overrightarrow{V_f}$ sürüklenme hızını bulalım.

X noktasının $\overrightarrow{V_r}$ relatif hızı için

$$\overrightarrow{X} = x_1 \overrightarrow{e_1} + x_2 \overrightarrow{e_2} \tag{I.1}$$

denkleminde $\overrightarrow{e_1}$ ve $\overrightarrow{e_2}$ yi sabit tutarak diferensiyel almak suretiyle

$$\overrightarrow{V_r} = dx_1 \overrightarrow{e_1} + dx_2 \overrightarrow{e_2} \tag{I.2}$$

buluruz.

$$\overrightarrow{e_1} = \cos\varphi \overrightarrow{e_1'} + \sin\varphi \overrightarrow{e_2'} \tag{I.3}$$

$$\overrightarrow{e_2} = -\sin\varphi \overrightarrow{e_1'} + \cos\varphi \overrightarrow{e_2'} \tag{I.4}$$

denklemlerinde $\overrightarrow{e_1'}$ ve $\overrightarrow{e_2'}$ vektörlerini sabit tutarak her iki tarafın diferensiyeli alınırsa

$$d\overrightarrow{e_1} = -\sin\varphi d\varphi \overrightarrow{e_1'} + \cos\varphi d\varphi \overrightarrow{e_2'}$$

$$= \left(-\sin\varphi \overrightarrow{e_1'} + \cos\varphi \overrightarrow{e_2'}\right) d\varphi$$

$$d\overrightarrow{e_2} = -\cos\varphi d\varphi \overrightarrow{e_1'} - \sin\varphi d\varphi \overrightarrow{e_2'}$$

$$= -\left(\cos\varphi \overrightarrow{e_1'} + \sin\varphi \overrightarrow{e_2'}\right) d\varphi$$

elde edilir. Parantezlerin içindeki ifadeleri (I.3) ve (I.4) formülleri ile karşılaştırırsak

$$\overrightarrow{de_1} = d\varphi\overrightarrow{e_2} \qquad , \qquad \overrightarrow{de_2} = -d\varphi\overrightarrow{e_1} \qquad (\text{I.5})$$

yazılır.

Şekil (I.1) deki $\overrightarrow{OO'} = \vec{u}$ vektörünü $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ doğrultularındaki bileşenlerine göre

$$\overrightarrow{OO'} = \vec{u} = u_1\overrightarrow{e_1} + u_2\overrightarrow{e_2} \qquad (\text{I.6})$$

şeklinde yazabiliriz. (I.6) nın her iki tarafının diferensiyelini alırsak

$$d\vec{u} = du_1\overrightarrow{e_1} + u_1\overrightarrow{de_1} + du_2\overrightarrow{e_2} + u_2\overrightarrow{de_2}$$

buluruz. Burada (I.5) deki değerler yerine yazılırsa

$$du = du_1\overrightarrow{e_1} + u_1 d\varphi\overrightarrow{e_2} + du_2\overrightarrow{e_2} - u_2 d\varphi\overrightarrow{e_1}$$

veya

$$du = (du_1 - u_2 d\varphi)\overrightarrow{e_1} + (du_2 + u_1 d\varphi)\overrightarrow{e_2} \qquad (\text{I.7})$$

formülünü elde ederiz.

X noktasının $\overrightarrow{V_a}$ mutlak hızı için

$$\overrightarrow{x'} = -\vec{u} + \vec{x} = (-u_1 + x_1)\overrightarrow{e_1} + (-u_2 + x_2)\overrightarrow{e_2} \qquad (\text{I.8})$$

olur. (I.8) bağıntısının tam diferensiyelini almak suretiyle

$$\overrightarrow{V_a} = d\overrightarrow{x'} = -d\vec{u} + d\vec{x}$$

$$\overrightarrow{V_a} = -(du_1 - u_2 d\varphi)\overrightarrow{e_1} - (du_2 + u_1 d\varphi)\overrightarrow{e_2} + x_1 d\overrightarrow{e_1} + dx_1\overrightarrow{e_1} + x_2 d\overrightarrow{e_2} + dx_2\overrightarrow{e_2} \qquad (\text{I.9})$$

bulunur. (I.5) ve (I.2) ifadelerini (I.9) ifadesinde kullanırsak

$$\overrightarrow{V_a} = d\vec{x}' = (du_1 + u_2 d\varphi - x_2 d\varphi)\overrightarrow{e_1} + (-du_2 - u_1 d\varphi + x_1 d\varphi)\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{V_r} \qquad (\text{I.10})$$

elde edilir.

$$\overrightarrow{V_f} = -\{du_1 + (-u_2 + x_2)d\varphi\}\overrightarrow{e_1} + \{-du_2 + (-u_1 + x_1)d\varphi\}\overrightarrow{e_2} \qquad (\text{I.11})$$

vektörüne X noktasının sürüklenme hız vektörü denir [2].

TANIM I.17 (Lorentz Anlamında Sürüklenme Hızı) :

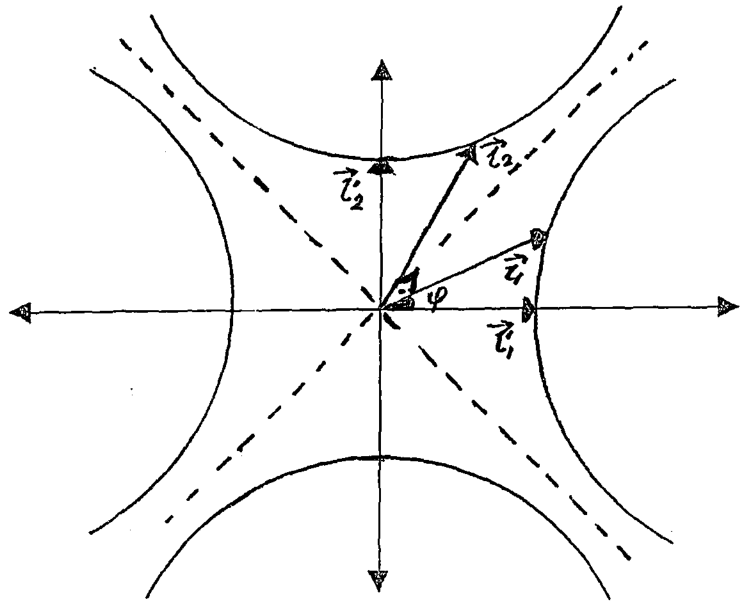
X noktasının $\overrightarrow{V_r}$ relatif hızı için

$$X = x_1\overrightarrow{l_1} + x_2\overrightarrow{l_2} \qquad (\text{I.12})$$

denkleminde $\overrightarrow{l_1}$ ve $\overrightarrow{l_2}$ yi sabit tutarak diferensiyel alırsak

$$\overrightarrow{V_r} = dx_1\overrightarrow{l_1} + dx_2\overrightarrow{l_2} \qquad (\text{I.13})$$

bulunur.



(Şekil I.2)

$$\vec{l}_1 = \cosh\varphi \vec{l}_1' + \sinh\varphi \vec{l}_2' \qquad (\text{I.14})$$

$$\vec{l}_2 = \sinh\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\vec{l}_1' + \cosh\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\vec{l}_2'$$

$$= \sinh\varphi \vec{l}_1' + \cosh\varphi \vec{l}_2' \qquad (\text{I.15})$$

Katsayılar matrisinin determinantı alınırsa $\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi = 1$ bulunur.

(I.14) ve (I.15) ifadelerinde $\vec{l}_1'$ ve $\vec{l}_2'$ vektörleri sabit tutularak her iki tarafın tam diferensiyeli alınırsa

$$d\vec{l}_1 = \sinh\varphi d\varphi \vec{l}_1' + \cosh\varphi d\varphi \vec{l}_2'$$

$$= \left(\sinh\varphi \vec{l}_1' + \cosh\varphi \vec{l}_2'\right) d\varphi \qquad (\text{I.16})$$

$$\overrightarrow{OO'} = \vec{u} = u_1\vec{l_1} + u_2\vec{l_2} \qquad (\text{I}.19)$$

yazabiliriz. Bu ifadede her iki tarafın diferensiyelini alırsak

$$d\vec{u} = du_1\vec{l_1} + d\vec{l_1}u_1 + du_2\vec{l_2} + d\vec{l_2}u_2$$

elde ederiz. Bu eşitlikte (I.18) deki değerler yerlerine yazılırsa

$$d\vec{u} = du_1\vec{l_1} + u_1 d\varphi\vec{l_2} + du_2\vec{l_2} + u_2 d\varphi\vec{l_1}$$

$$= (du_1 + u_2 d\varphi)\vec{l_1} + (du_2 + u_1 d\varphi)\vec{l_2} \qquad (\text{I}.20)$$

bulunur. X noktasının $\overrightarrow{V_a}$ mutlak hızı için

$$\vec{x}' = -\vec{u} + \vec{x} = (-u_1 + x_1)\vec{l_1} + (-u_2 + x_2)\vec{l_2}$$

olur. Bu ifadenin diferansiyelini almak suretiyle

$$\vec{V_a} = d\vec{x}' = -d\vec{u} + d\vec{x}$$

$$\vec{V_a} = -(du_1 + u_2 d\varphi)\vec{l_1} - (du_2 + u_1 d\varphi)\vec{l_2} + x_1 d\vec{l_1} + dx_1 \vec{l_1} + x_2 d\vec{l_2} + dx_2 \vec{l_2} \qquad (\text{I.21})$$

bulunur. (I.18) ve (I. 13) deki bağıntı kullanılırsa

$$\vec{V_a} = -(du_1 + u_2 d\varphi)\vec{l_1} - (du_2 + u_1 d\varphi)\vec{l_2} + x_1 d\varphi \vec{l_2} + dx_1 \vec{l_1} + x_2 d\varphi \vec{l_1} + dx_2 \vec{l_2}$$

$$\vec{V_a} = d\vec{x}' = (-du_1 - u_2 d\varphi + x_2 d\varphi)\vec{l_1} + (-du_2 - u_1 d\varphi + x_1 d\varphi)\vec{l_2} + \vec{V_r} \qquad (\text{I.22})$$

elde edilir.

$$\vec{V_f} = -\{du_1 + (u_2 - x_2)d\varphi\}\vec{l_1} + \{-du_2 + (-u_1 + x_1)d\varphi\}\vec{l_2} \qquad (\text{I.23})$$

vektörüne X vektörünün Lorentz anlamındaki sürüklenme hız vektörü denir [3].

TANIM I.18 (Topolojik Manifold) :

M bir Hausdorff uzayı olsun. $\forall m \in M$ noktası için M'de E^n, $n \geq 0$'ye homeomorf olan bir U açık komşuluğu bulunabilirse M'ye bir n-boyutlu topolojik manifold denir [5].

TANIM I.19 (Sıfırıncı Mertebeden Diferensiyel Form) :

E^n de açık alt cümle U olmak üzere bir

$$f{:}U \to R$$

fonksiyonunun k-ıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli iseler f fonksiyonuna C^k sınıfından diferensiyellenebilirdir denir. Özel olarak f sadece sürekli ise C^0 sınıfındandır denir. U üstünde tanımlı C^1 sınıfından fonksiyona U üstünde bir 0-form adı verilir [1].

TANIM I.20 (Hiperyüzey) :

E^n, n-boyutlu Öklid uzayında (n-1) boyutlu veya (n-1)-yüzey diye E^n'deki boş olmayan bir M cümlesine denir. Öyleki bu M cümlesi

$$M = \left\{ x \in U \subset E^n \middle| f{:}U \overset{dif.bilir}{\to} R, \mathrm{U} \in \Im \right\}$$

$$x \to f(x) = c$$

$\nabla f\big|_p \neq 0, \forall p \in M$ biçiminde tanımlanır.

E^2 de bir 1-yüzeye düzlemsel eğri denir. E^3 de bir 2-yüzeye sadece yüzey denir. E^n de bir (n-1)-yüzey, n>3 olması halinde daha çok bir hiperyüzey olarak adlandırılır [1].

TANIM I.21 (Hiperküre) :

E^n, n-boyutlu Euclid uzayında

$$S_r^{n-1} = \left\{ \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = r^2, \ \ r \in R, \ r = sabit \right\}$$

nokta cümlesine bir (n-1)-boyutlu hiperküre veya (n-1)-küre denir [1].

TANIM I.22 (Dönme Polü) :

Sürüklenme hızının sıfır olduğu noktalara pol noktası veya dönme polü veya ani dönme merkezi denir [2].

TANIM I.23 (Nokta Yoğunluğu) :

İki-parametreli bir B_{II}-hareketinde L-düzlemindeki X noktasının yüzey elementine X noktasının L'-düzlemindeki nokta yoğunluğu denir. [2].

TANIM I.24 (Doğru Yoğunluğu) :

L-düzlemindeki g doğrusunun

$$(g) = dh \wedge d\varphi$$

ile verilen ifadesine g doğrusunun doğru yoğunluğu denir [2].

TANIM I.25 (Pol Eğrisi) :

Her t anına bir P dönme polü karşılık geleceğinden, hareket esnasında P noktası her iki L ve L'-düzleminde yer değiştirerek bir yörünge çizer. P noktasının hareketinin L-düzleminde çizdiği geometrik yere (P) hareketli pol eğrisi denir. (P) noktasının L'-düzlemindeki geometrik yerine ise hareketin (P') sabit pol eğrisi denir [2].

TANIM I.26 (Zarf Eğrisi) :

Hareketli pol eğrisinin, sabit pol eğrisi üzerindeki hareketinden meydana gelen eğriye zarf eğrisi denir [2].

TANIM I.27 (Kutup Ekseni) :

Üzerinde bir başlangıç noktası bulunan sağa doğru yönlendirilmiş yatay bir eksen, düzlem noktalarının yerlerini belirtmek için kullanılıyorsa bu eksene kutup ekseni adı verilir [2].

TANIM I.28 (Geodezik- B_I Hareketi) :

B_{II}-hareketinin 1-parametreli B_I-hareketlerine, bu hareketlerin pol eğrileri tekabül eden kutup eksenlerine dik oluyorsa geodezik adı verilir [2].

TANIM I.29 (Oskülatör- B_I Hareketi) :

Pol yörüngelerinin her defa kutup eksenine değen B_I-hareketlerine oskülatör-B_I hareketi denir [2].

TANIM I.30 (Yay Elementi) :

s-yay parametresi ile verilmiş bir eğri için s nin ds diferensiyeline yay elementi denir [1].

TANIM I.31 (Kontengez Açısı) :

(P) pol eğrisinin komşu iki teğetinin açısı $\Im$, (P') pol eğrisinin komşu iki teğetinin açısı $\Im'$ olarak alınırsa bu $\Im$ ve $\Im'$ açılarına kontengez açısı adı verilir [2].

TEOREM I.1:

$f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ skalar fonksiyon veya sıfırıncı mertebeden diferensiyel form ve W yı da bir p-form olarak alırsak dış türev aşağıdaki özelliğe sahip olur [2].

$$d(f\,W) = d(W f) = df \wedge W + f\,dW$$

TEOREM I.2:

R_1^3 Minkowski uzayında üç vektör $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ve $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ olsun. Bu durumda Lorentz anlamında

i) $\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c} \rangle = -\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

ii) $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = -\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a}$

iii) $\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{a} \rangle = 0$ *ve* $\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{b} \rangle = 0$

iv) $\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b} \rangle = -\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle + \left(\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \right)^2$

dir [4].

TEOREM I.3:

Trigonometrik fonksiyonlar ile hiperbolik fonksiyonlar arasında aşağıdaki bağıntılar vardır.

a) $\cosh(i\theta) = \cos\theta$

b) $\sinh(i\theta) = i\sin\theta$

c) $\sin(i\theta) = i\sinh\theta$

d) $\cos(i\theta) = \cosh\theta$

dır [7].

İSPAT:

a) $\cosh x = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ ifadesinde $x = i\theta$ alınırsa

$$\cosh(i\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta}{2} = \frac{2\cos\theta}{2} = \cos\theta$$

elde edilir.

b) $\sinh x = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ ifadesinde $x = i\theta$ alınırsa

$$\sinh(i\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2} = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta - \cos\theta + i\sin\theta}{2}$$

$$= \frac{2i\sin\theta}{2} = i\sin\theta$$

c) $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ ifadesinde $x=i\theta$ alınırsa

$$\sin(i\theta)=\frac{e^{i(i\theta)}-e^{-i(i\theta)}}{2i}=\frac{e^{i^2\theta}-e^{-i^2\theta}}{2i}=\frac{e^{-\theta}-e^{\theta}}{2i}=-\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2i}$$

olur. Bu son eşitliği (i) ile çarpıp bölersek

$$\sin(i\theta)=-\frac{i}{i}\left(\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2i}\right)=i\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}=i\sinh\theta$$

bulunur.

d) $\cos(i\theta)=\dfrac{e^{i(i\theta)}+e^{-i(i\theta)}}{2}=\dfrac{e^{i^2\theta}+e^{-i^2\theta}}{2}=\dfrac{e^{-\theta}+e^{\theta}}{2}=\dfrac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}=\cosh\theta$

olur. Buradan $\cos(i\theta)=\cosh\theta$ elde edilir.

TEOREM I.4:

Euclid geometrisindeki $e^{i\theta}$ ifadesi, Lorentz geometrisinde $e^{i\theta}=\cosh(i\theta)+\sinh(i\theta)$ şeklindedir.

İSPAT:

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ açılımında $\cos\theta$ ve $\sin\theta$ yerine, Teorem I.3 ün (a) ve (b) şıklarından eşitleri yazılırsa;

$$e^{i\theta}=\cosh(i\theta)+\sinh(i\theta)$$

şeklinde yazılabilir.

TEOREM I.5:

İki hareketin terkibinde bir noktanın mutlak hız vektörü, sürüklenme hız vektörü ile relatif hız vektörünün toplamına eşittir. Bundan dolayı $\overrightarrow{V_a}$ mutlak hızı, $\overrightarrow{V_f}$ sürüklenme hızı ve $\overrightarrow{V_r}$ relatif hızı arasında

$$\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_f} + \overrightarrow{V_r}$$

bağıntısı vardır [2].

TEOREM I.6:

Sabit ve hareketli düzlemlerdeki pol eğrilerini çizen P dönme polünün her t anındaki hızları birbirinin aynıdır. [2].

BÖLÜM II

II. Lorentz Geometrisinde 2-Parametreli Hareketler

Önce 1-parametreli bir B_1 hareketini izah edelim.

Şekil (I.1) e göre hareketli L-düzlemini $\{O;\vec{l_1},\vec{l_2}\}$ eksen sistemi ve L' sabit düzlemini de $\{O';\vec{l_1'},\vec{l_2'}\}$ eksen sistemi ile ifade edelim. Hareketli eksen sisteminin başlangıç noktasından sabit eksen sisteminin başlangıç noktasına giden $\overrightarrow{OO'} = \vec{u}$ vektörü ve $\vec{l_1'},\vec{l_1}$ vektörleri arasındaki dönme açısı φ tarif edilsin. Burada

$$\overrightarrow{OO'} = \vec{u} = u_1\vec{l_1} + u_2\vec{l_2} \tag{II.1}$$

ve O ile O' noktaları çakışacak şekilde kaydırılmış olarak düşünülürse

$$\vec{l_1} = \cosh\varphi\vec{l_1'} + \sinh\varphi\vec{l_2'}$$

$$\vec{l_2} = \sinh\varphi\vec{l_1'} + \cosh\varphi\vec{l_2'} \tag{II.2}$$

bağıntıları elde edilir. Herhangi bir X noktası önce L nin sonrada L' nün noktası olarak düşünülebilir. Bu durumda;

$$\overrightarrow{OX} = \vec{x} = x_1\vec{l_1} + x_2\vec{l_2}$$

$$\overrightarrow{O'X} = \vec{x'} = x_1'\vec{l_1'} + x_2'\vec{l_2'} \tag{II.3}$$

X noktasının her iki eksen sisteminde koordinatlarını

$$x = x_1 + ix_2 \quad , \quad x' = x_1' + ix_2' \tag{II.4}$$

ve $\overrightarrow{OO'}$ vektörünü de hareketli eksen sisteminde

$$u = u_1 + iu_2 \qquad (\text{II}.5)$$

kompleks sayıları ile gösterelim.

Bunlar arasında aşağıdaki bağıntılar mevcuttur; yani

$$x' = (x - u)e^{i\varphi} \qquad (\text{II}.6)$$

$$u' = -ue^{i\varphi} \qquad (\text{II}.7)$$

ifadelerinden

$$x' = xe^{i\varphi} - ue^{i\varphi}$$

$$x' = u' + xe^{i\varphi} \qquad (\text{II}.8)$$

sonucu elde edilir.

1- parametreli B_1-hareketinde φ ve u yu dolaylı olarak da u' yü bir reel t-parametresine bağlı olarak düşünelim. X noktası L-düzleminde bulunuyorsa X sabittir. (II.6) ve (II.8) bağıntılarının her iki tarafının diferensiyeli alınırsa,

$$dx' = -due^{i\varphi} + i(x - u)e^{i\varphi}d\varphi = du' + ix'e^{i\varphi}d\varphi$$

$$dx' = \{-du + i(x - u)d\varphi\}e^{i\varphi} = du' + ixe^{i\varphi}d\varphi \qquad (\text{II}.9)$$

bulunur. P dönme polü $dx' = 0$ ve $dx = 0$ ile karekterize edildiğinden

$$-du + i(x - u)d\varphi = 0$$

dir ve buradan

$$x = u - idu / d\varphi$$

olur. $dx' = 0$ için $x = p$ olduğundan

$$p = x = u - idu / d\varphi \qquad (\text{II}.10)$$

bulunur. Tekrar (II.6) bağıntısını kullanırsak

$$x' = (x - u)e^{i\varphi} \Rightarrow x - u = x'e^{-i\varphi}$$

$$\Rightarrow x = u + x'e^{-i\varphi}$$

diferensiyeli alınırsa

$$dx = du - ix'e^{-i\varphi}d\varphi \qquad (\text{II}.11)$$

bulunur. P dönme polü $dx = 0$ olarak karakterize edildiğinden

$$du - ix'e^{-i\varphi}d\varphi = 0$$

$$x' = e^{i\varphi}du / id\varphi$$

dir. $dx = 0$ için x' noktaları p' pol noktalarına eşit olacağından

$$p' = x' = -ie^{i\varphi}du / d\varphi \qquad (\text{II}.12)$$

bulunur. Böylece P dönme polünü veren kompleks sayılar bulunmuş olur.

Şimdi u_1, u_2, φ ve dolayısıyla da u ve u' kompleks büyüklüklerinin iki reel parametreye bağlı olduğunu kabul edelim. Şayet $du/d\varphi \neq 0$ ise yani u gerçekten φ'ye bağlı ise bu parametrelerden birini φ dönme açısı olarak seçebiliriz.

$$u = u_1 + iu_2 = u(\varphi, \lambda) \qquad (\text{II}.13)$$

ile uygun diferensiyellenebilme altında iki parametreli veya yüzey çizen B_{II}-hareketi tarif edilebilir.

Yukarıdaki (II.13) ifadesinde keyfi λ parametresi yerine $\lambda = \lambda(\varphi)$ fonksiyonu seçilirse, B_{II}-hareketinden 1-parametreli bir B_I-hareketi elde edilir. Bu harekete karşılık gelen dönme polü için (II.10) ve (II.12) ifadelerinde

$$du/d\varphi = \partial u/\partial\varphi + \partial u/\partial\lambda(d\lambda/d\varphi) = u_\varphi + u_\lambda(d\lambda/d\varphi) \qquad (\text{II}.14)$$

konulursa

$$p = x = u - i(u_\varphi + u_\lambda d\lambda/d\varphi),\ p' = x' = -ie^{i\varphi}(u_\varphi + u_\lambda d\lambda/d\varphi) \quad (\text{II}.15)$$

bulunur.

Bir an için φ ve λ nın tespit edildiğini ve yalnız $d\lambda/d\varphi = \mu$ yürüyüş istikametinin değiştiğini düşünelim, yani bu anda mümkün olan bütün B_I'leri B_{II}'den çıkarılan (φ , λ) konumu vasıtasıyla tetkik edelim.

Kompleks sayı düzleminde

$$x = a + b\mu$$

ile (a ve b kompleks sabit sayılar, μ reel bir parametre olsun.) bir doğrunun parametrik tarifi verildiği için şu teorem elde edilir.

TEOREM II.1:

İki parametreli B_{II}-hareketinin bir (φ , λ) konumunda bu hareketten çekip çıkarılabilen bütün bir parametreli B_I-hareketlerinin P dönme polleri L hareketli düzleminde bir g doğrusu ve L′ sabit düzleminde keza bir g′ doğrusu meydana getirirler.

(II.15) den şu anlaşılır; L-düzleminde g kutup ekseni

$$p_0 = u - iu\varphi \qquad (\text{II}.16)$$

olan p_0 noktasından geçer ve

$$v = -iu_\lambda \qquad (\text{II}.17)$$

kompleks sayısı ile verilen doğrultudadır.

L′-düzleminde g′ kutup ekseni

$$p_0' = -iu_\varphi e^{i\varphi} \qquad (\text{II}.18)$$

olan p_0 noktasından geçer ve doğrultusu

$$v' = -iu_\lambda e^{i\varphi} = ve^{i\varphi} \qquad (\text{II}.19)$$

ile verilir.

B_{II}-nin her (φ , λ) konumuna tekabül eden bu her iki g ve g′ kutup eksenleri $d\lambda / d\varphi = \mu$ 'nün değişimiyle nokta nokta (yani μ'nün aynı değerleriyle) tekabül ederler. Bu tekabül (II.19) ifadesinin mutlak değerinin alınmasıyla

$$|v'| = |-iu_\lambda e^{i\varphi}| = |-i||u_\lambda||e^{i\varphi}| = |u_\lambda|$$

veya

$$|v'| = |u_\lambda| = |v| \qquad (\text{II}.20)$$

den dolayı izometriktir veya uzunlukları sabit bırakır.

BÖLÜM III

III. Lorentz Anlamında 2-Parametreli Hareketlerin Kutup Eksenleri

III.1. Kutup Eksenleri

TEOREM III.1.1:

2-parametreli B_{II}-hareketinin bir (φ , λ) konumuna karşılık gelen g, g' kutup eksenleri, nokta nokta izometrik veya uzunlukları değişmeyecek şekilde birbirlerine karşılık gelirler.

TEOREM III.1.2:

B_{II}-hareketinin $(\varphi, \lambda) \rightarrow (\varphi + d\varphi, \lambda + d\lambda)$ gibi sonsuz küçük dönmelerine ait dönme pollerinin geometrik yeri φ ve λ sabit değerleri ile değişen $d\lambda / d\varphi$ oranına ait L ve L' düzlemlerinde birer g ve g' doğrularıdır.

Bundan böyle g ve g' kutup eksenleri yalnız (φ , λ) konumuna bağlıdır. Böylece bir B_{II}-2_parametreli hareketi ile kutup eksenlerinin bir $g(\varphi, \lambda) \leftrightarrow g'(\varphi, \lambda)$, yani L'nin doğrularının L''nün doğrularına bir doğru dönüşümü ile bağlanabilir. Bu dönüşüm özelliklerini aşağıdaki kısımda açıklayalım.

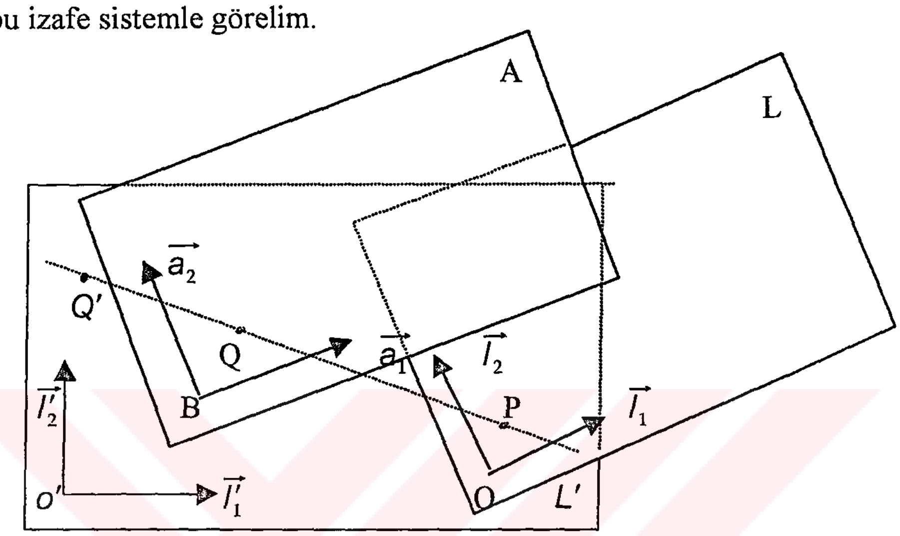
III.2. Kutup Eksenleri Dönüşümünün Yoğunluk Değişmezliği

TEOREM III.2.1:

İki parametreli B_{II}-hareketinde L-düzlemindeki g kutup eksenin yoğunluğu L'-düzlemindeki g' pol eksenin yoğunluğuna eşittir.

İSPAT: Hareketli koordinat sistemi ve kanonik izafe sistemde yapılan hesaplamalara benzer şekilde, uygun bir izafe sistem yardımıyla B_{II}-hareketinin tarifini kullanalım.

O halde L ve L′-düzlemlerini temsil eden $\{O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}$, $\{O';\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'}\}$ eksen sistemleri yanına tekrar hareketli bir $\{B;\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\}$ eksen sistemini ekleyelim. B_{II}-hareketini bu izafe sistemle görelim.

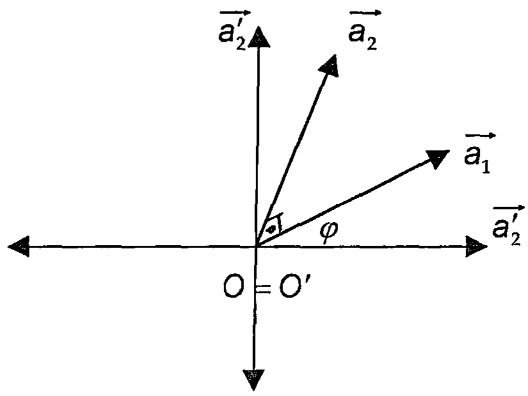


(Şekil III.1.1)

Bir noktanın L-düzlemine göre değişimini ⟨⟨d...⟩⟩ ile L′ düzlemine göre değişimini de ⟨⟨d′...⟩⟩ ile göstererek bu iki değişimi ayırt edelim. $\{B;\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\}$ sistemine öyle bir A düzlemi bağlayalım ki bu yeni izafe sistemi A nın temsilcisi olarak hareket etsin. Böylece A nın L-düzlemine göre hareketi, L-düzleminin L′-düzlemine göre hareketi gibi gösterilebilir. Ayrıca $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}$ vektörlerinin ve aynı zamanda

$$\overrightarrow{OB} = \vec{b} = b_1\overrightarrow{a_1} + b_2\overrightarrow{a_2} \qquad \text{(III.2.1)}$$

vektörünün değişimini $\{B;\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\}$ sistemi vasıtasıyla gösterebiliriz. Burada O noktası L üzerinde tespit edilmiş bir noktadır, yani hareketli düzlemin başlangıç noktasıdır.



(Şekil III.1.2)

Yukarıdaki şekilde O ve O′ noktalarını çakışmış olarak düşünürsek $\vec{a_1}$ *ve* $\vec{a_2}$ vektörleri $\vec{a_1'}$ *ve* $\vec{a_2'}$ doğrultularında bileşenlerine ayrılabilir ve

$$\vec{a_1} = \cosh\varphi \vec{a_1'} + \sinh\varphi \vec{a_2'} \qquad (\text{III}.2.2)$$

$$\vec{a_2} = \sinh\varphi \vec{a_1'} + \cosh\varphi \vec{a_2'} \qquad (\text{III}.2.3)$$

şeklinde yazılabilirler. Bu denklemlerde $\vec{a_1'}$ *ve* $\vec{a_2'}$ vektörlerini sabit tutarak her iki tarafın diferensiyeli alınırsa,

$$d\vec{a_1} = \sinh\varphi d\varphi \vec{a_1'} + \cosh\varphi d\varphi \vec{a_2'}$$

$$= \left(\sinh\varphi \vec{a_1'} + \cosh\varphi \vec{a_2'}\right) d\varphi$$

$$d\vec{a_2} = \cosh\varphi d\varphi \vec{a_1'} + \sinh\varphi d\varphi \vec{a_2'}$$

$$= \left(\cosh\varphi \vec{a_1'} + \sinh\varphi \vec{a_2'}\right) d\varphi$$

bulunur. Parantez içindeki ifadeler $\vec{a_1}$ *ve* $\vec{a_2}$ nin bileşenleri ile karşılaştırılırsa

$$\overrightarrow{da_1} = d\varphi\overrightarrow{a_2} \quad , \quad \overrightarrow{da_2} = d\varphi\overrightarrow{a_1} \qquad (\text{III.2.4})$$

olduğu görülür.

(III.2.1) ifadesinin diferensiyeli alınırsa

$$d\vec{b} = db_1\overrightarrow{a_1} + b_1\overrightarrow{da_1} + db_2\overrightarrow{a_2} + b_2\overrightarrow{da_2}$$

elde edilir. Burada (III.2.4) de bulunan $\overrightarrow{da_1}$ ve $\overrightarrow{da_2}$ değerlerini yerine yazarsak

$$d\vec{b} = db_1\overrightarrow{a_1} + b_1 d\varphi\overrightarrow{a_2} + db_2\overrightarrow{a_2} + b_2 d\varphi\overrightarrow{a_1}$$

$$= (db_1 + b_2 d\varphi)\overrightarrow{a_1} + (db_2 + b_1 d\varphi)\overrightarrow{a_2} \qquad (\text{III.2.5})$$

bulunur.

Aynen benzer biçimde A nın L'-düzlemine göre hareketinde

$$d'\overrightarrow{a_1} = d\varphi'\overrightarrow{a_2} \quad , \quad d'\overrightarrow{a_2} = d\varphi'\overrightarrow{a_1} \qquad (\text{III.2.6})$$

ve $\vec{b}'$ vektörünü de

$$\overrightarrow{O'B} = \vec{b}' = b_1'\overrightarrow{a_1} + b_2'\overrightarrow{a_2} \qquad (\text{III.2.7})$$

şeklinde yazabiliriz. (III.2.7) ifadesinin diferensiyeli alınırsa

$$d'\vec{b}' = db_1'\overrightarrow{a_1} + b_1'd'\overrightarrow{a_1} + db_2'\overrightarrow{a_2} + b_2'd'\overrightarrow{a_2}$$

bulunur. (III.2.6) ifadesindeki değerler yerine yazılırsa

$$d'\vec{b}' = db_1'\overrightarrow{a_1} + b_1'd\varphi'\overrightarrow{a_2} + db_2'\overrightarrow{a_2} + b_2'd\varphi'\overrightarrow{a_1}$$

$$= (db_1' + b_2'd\varphi')\overrightarrow{a_1} + (db_2' + b_1'd\varphi')\overrightarrow{a_2} \qquad \text{(III.2.8)}$$

sistemi bulunur. Kısalık olması bakımından

$$d\varphi = \Im \ \ ve \ \ d\varphi' = \Im' \qquad \text{(III.2.9)}$$

$$db_1 + b_2 d\varphi = \sigma_1 \qquad , \qquad db_2 + b_1 d\varphi = \sigma_2 \qquad \text{(III.2.10)}$$

$$db_1' + b_2'd\varphi' = \sigma_1' \qquad , \qquad db_2' + b_1'd\varphi' = \sigma_2' \qquad \text{(III:2.11)}$$

sembollerini kullanalım ve B noktasının L′-düzlemine göre değişimini de

$$d'\vec{b}' = d'\vec{b} \qquad \text{(III.2.12)}$$

ile gösterelim. Böylece A nın L-düzlemine göre hareketi

$$d\overrightarrow{a_1} = \Im\overrightarrow{a_2} \qquad , \qquad d\overrightarrow{a_2} = \Im\overrightarrow{a_1} \qquad \text{(III.2.13)}$$

$$d\vec{b} = \sigma_1\overrightarrow{a_1} + \sigma_2\overrightarrow{a_2} \qquad \text{(III.2.14)}$$

ve A nın L'-düzlemine göre

$$d'\overrightarrow{a_1} = \Im'\overrightarrow{a_2} \qquad , \qquad d'\overrightarrow{a_2} = \Im'\overrightarrow{a_1} \qquad \text{(III.2.15)}$$

$$d'\vec{b} = \sigma'_1\overrightarrow{a_1} + \sigma_2'\overrightarrow{a_2} \qquad \text{(III.2.16)}$$

türev denklemleri ile verilmiş olur.

İki parametreli B_{II}-hareketinde $\sigma_i, \sigma'_i, \Im$ ve $\Im'$ ifadeleri φ ve λ yada daha bağımsız olarak u ve v gibi bağımsız iki değişkene göre Pfaff-formlardır. Bu formlar B_{II}-hareketinin tespitinde tamamen keyfi kabul edilemezler. Çoğu kez integrallenebilme şartlarını sağlamak zorundadırlar.

Bir tam diferansiyelin dış türevi sıfır olduğundan

$$d\left(d\vec{a_1}\right) = 0 \qquad (\text{III.2.17})$$

dır. (III.2.13) denklemi ve Teorem I.1 in çarpım ifadesinden dolayı

$$d\left(d\vec{a_1}\right) = d\left(\Im\vec{a_2}\right) = d\vec{a_2} \wedge \Im + d\Im\vec{a_2} = 0$$

$$\Rightarrow \Im\vec{a_1} \wedge \Im + d\Im\vec{a_2} = 0$$

$$\Rightarrow (\Im \wedge \Im)\vec{a_1} + d\Im\vec{a_2} = 0$$

bulunur ve $\Im \wedge \Im = 0$ olduğundan

$$d\Im = 0 \qquad (\text{III.2.18})$$

elde edilir. $\Im$ bir açının değişimi olduğundan $\Im$ doğrudan doğruya geometrik olarak açıklanan bir tam diferensiyeldir.

$$d\left(d\vec{a_2}\right) = 0 \qquad (\text{III.2.19})$$

ifadesine Teorem I.1 deki çarpım kuralı uygulanarak

$$d\left(d\vec{a_2}\right) = d\left(\Im\vec{a_1}\right) = d\vec{a_1} \wedge \Im + d\Im\vec{a_2} = 0$$

$$\Rightarrow \Im\overrightarrow{a_2} \wedge \Im + d\Im\overrightarrow{a_1} = 0$$

$$\Rightarrow (\Im \wedge \Im)\overrightarrow{a_2} + d\Im\overrightarrow{a_1} = 0$$

bulunur ve $\Im \wedge \Im = 0$ olduğundan

$$d\Im = 0$$

bulunur. $\Im$ bir açının değişimi olduğundan $\Im$ nun bir tam diferensiyel olduğu sonucu tekrar elde edilmiş olur.

$$d'\left(d'\overrightarrow{a_1}\right) = 0 \quad , \quad d'\left(d'\overrightarrow{a_2}\right) = 0 \qquad \text{(III.2.20)}$$

ifadelerine (III.2.15) denklemi ve Teorem I.1 in çarpım ifadesi uygulanırsa

$$d'\left(d'\overrightarrow{a_1}\right) = d'\left(\Im'\overrightarrow{a_2}\right) = d'\overrightarrow{a_2} \wedge \Im' + d\Im'\overrightarrow{a_2} = 0$$

$$\Rightarrow \Im'\overrightarrow{a_1} \wedge \Im' + d\Im'\overrightarrow{a_2} = 0$$

$$\Rightarrow (\Im' \wedge \Im')\overrightarrow{a_1} + d\Im'\overrightarrow{a_2} = 0$$

sonucuna ulaşılır ve $\Im' \wedge \Im' = 0$ olduğundan

$$d\Im' = 0 \qquad \text{(III.2.21)}$$

bulunur. Tamamen benzer şekilde

$$d'\left(d'\overrightarrow{a_2}\right) = d'\left(\Im'\overrightarrow{a_1}\right) = d'\overrightarrow{a_1} \wedge \Im' + d\Im'\overrightarrow{a_1} = 0$$

$$\Rightarrow \Im'\overrightarrow{a_2} \wedge \Im' + d\Im'\overrightarrow{a_1} = 0$$

$$\Rightarrow (\Im' \wedge \Im')\overrightarrow{a_2} + d\Im'\overrightarrow{a_1} = 0$$

bulunur. $\Im' \wedge \Im' = 0$ olduğundan

$$d\Im' = 0$$

elde edilir. Bu da bir dönme açısının değişimi olan $\Im'$ ifadesinin bir tam diferensiyel olduğunu ifade eder.

(III.2.14) ifadesinin dış türevini alırsak

$$d\left(d\vec{b}\right) = d\left(\sigma_1\overrightarrow{a_1}\right) + d\left(\sigma_2\overrightarrow{a_2}\right) = 0$$

olur. (III.2.13) ve Teorem I.1 in çarpım kaidesinden dolayı

$$d\left(d\vec{b}\right) = d\left(\sigma_1\overrightarrow{a_1}\right) + d\left(\sigma_2\overrightarrow{a_2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow d\overrightarrow{\mathrm{a}_1} \wedge \sigma_1 + d\sigma_1\overrightarrow{\mathrm{a}_1} + d\overrightarrow{\mathrm{a}_2} \wedge \sigma_2 + d\sigma_2\overrightarrow{\mathrm{a}_2} = 0$$

$$\Rightarrow \Im\overrightarrow{\mathrm{a}_2} \wedge \sigma_1 + d\sigma_1\overrightarrow{\mathrm{a}_1} + \Im\overrightarrow{\mathrm{a}_1} \wedge \sigma_2 + d\sigma_2\overrightarrow{\mathrm{a}_2} = 0$$

$$\Rightarrow (\Im \wedge \sigma_1)\overrightarrow{\mathrm{a}_2} + d\sigma_1\overrightarrow{\mathrm{a}_1} + (\Im \wedge \sigma_2)\overrightarrow{\mathrm{a}_1} + d\sigma_2\overrightarrow{\mathrm{a}_2} = 0$$

$$d\sigma_1\overrightarrow{a_1} + d\sigma_2\overrightarrow{a_2} = -(\Im \wedge \sigma_2)\overrightarrow{a_1} - (\Im \wedge \sigma_1)\overrightarrow{a_2}$$

olur. Aynı vektörlerin katsayıları birbirine eşitlenirse

$$d\sigma_1 = -(\Im \wedge \sigma_2) = \sigma_2 \wedge \Im$$

$$d\sigma_2 = -(\Im \wedge \sigma_1) = \sigma_1 \wedge \Im \qquad (\text{III.2.22})$$

şartlarına ulaşılır.

Aynı şekilde (III.2.16) ifadesinin dış türevi alınırsa

$$d(d'\vec{b}) = d'(\sigma_1 \overrightarrow{a_1}) + d'(\sigma_2' \overrightarrow{a_2}) = 0$$

olur. (III.2.15) değerleri ve Teorem I.1 in çarpım kaidesi uygulanırsa

$$\Rightarrow d'\overrightarrow{a_1} \wedge \sigma_1' + d\sigma_1' \overrightarrow{a_1} + d'\overrightarrow{a_2} \wedge \sigma_2' + d\sigma_2' \overrightarrow{a_2} = 0$$

$$\Rightarrow \Im' \overrightarrow{a_2} \wedge \sigma_1' + d\sigma_1' \overrightarrow{a_1} + \Im' \overrightarrow{a_1} \wedge \sigma_2' + d\sigma_2' \overrightarrow{a_2} = 0$$

$$\Rightarrow (\Im' \wedge \sigma_1')\overrightarrow{a_2} + d\sigma_1' \overrightarrow{a_1} + (\Im' \wedge \sigma_2')\overrightarrow{a_1} + d\sigma_2' \overrightarrow{a_2} = 0$$

$$d\sigma_1' \overrightarrow{a_1} + d\sigma_2' \overrightarrow{a_2} = -(\Im' \wedge \sigma_2')\overrightarrow{a_1} - (\Im' \wedge \sigma_1')\overrightarrow{a_2}$$

$$d\sigma_1' = -(\Im' \wedge \sigma_2') = \sigma_2' \wedge \Im'$$
$$d\sigma_2' = -(\Im' \wedge \sigma_1') = \sigma_1' \wedge \Im' \qquad (\text{III.2.23})$$

şartlarını elde ederiz.

İki parametreli B_{II}-hareketine ait Pfaff-formları (III.2.22) ve (III.2.23) integrallenebilme şartlarını sağlamalıdır. Burada $\Im$ ve $\Im'$ tam diferensiyeldir.

(Şekil.III.1.1) in izafe sistemindeki koordinatları x_1 ve x_2 olan bir X noktasını göz önüne alalım.

$$\overrightarrow{BX} = x_1\overrightarrow{a_1} + x_2\overrightarrow{a_2} \qquad (\text{III}.2.24)$$

$$\vec{X} = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BX} = \vec{b} + x_1\overrightarrow{a_1} + x_2\overrightarrow{a_2} \qquad (\text{III}.2.25)$$

$$\overrightarrow{X'} = \overrightarrow{O'X} = \overrightarrow{O'B} + \overrightarrow{BX} = \overrightarrow{b'} + x_1\overrightarrow{a_1} + x_2\overrightarrow{a_2} \qquad (\text{III}.2.26)$$

vektörleri yazabiliriz.

(III.2.13) ve (III.2.14) türev denklemleri yardımıyla X in L-düzlemine göre değişimi için

$$d\vec{x} = d\vec{b} + dx_1\overrightarrow{a_1} + x_1 d\overrightarrow{a_1} + dx_2\overrightarrow{a_2} + x_2 d\overrightarrow{a_2}$$

$$d\vec{x} = \sigma_1\overrightarrow{a_1} + \sigma_2\overrightarrow{a_2} + dx_1\overrightarrow{a_1} + x_1\Im\overrightarrow{a_2} + dx_2\overrightarrow{a_2} + x_2\Im\overrightarrow{a_1}$$

$$= (dx_1 + \sigma_1 + x_2\Im)\overrightarrow{a_1} + (dx_2 + \sigma_2 + x_1\Im)\overrightarrow{a_2} \qquad (\text{III}.2.27)$$

sonucunu elde ederiz. Buradan da X noktasının

$$\overrightarrow{V_r} = d\vec{x}/dt \qquad (\text{III}.2.28)$$

relatif hız vektörü elde edilmiş olur.

X noktası L-düzleminde sabit kabul edilirse $\overrightarrow{V_r} = 0$ veya $d\vec{x} = 0$ olur. O halde X in L-düzleminde sabit kalma şartları

$$dx_1 = -\sigma_1 - x_2\Im \quad , \quad dx_2 = -\sigma_2 - x_1\Im \qquad (\text{III}.2.29)$$

denklemleri ile verilir.

Benzer şekilde X in L'-düzlemine göre değişimi için

$$d\vec{x}' = d'\vec{b}' + dx_1\overrightarrow{a_1} + x_1 d'\overrightarrow{a_1} + dx_2\overrightarrow{a_2} + x_2 d'\overrightarrow{a_2}$$

(III.2.15) ve (III.2.16) da elde edilen ifadeler kullanılırsa

$$d\vec{x}' = \sigma_1'\overrightarrow{a_1} + \sigma_2'\overrightarrow{a_2} + dx_1\overrightarrow{a_1} + x_1\Im'\overrightarrow{a_2} + dx_2\overrightarrow{a_2} + x_2\Im'\overrightarrow{a_1}$$

$$= (dx_1 + \sigma_1' + x_2\Im')\overrightarrow{a_1}x + (dx_2 + \sigma_2' + x_1\Im')\overrightarrow{a_2} \qquad \text{(III.2.30)}$$

Mutlak hız vektörü

$$\overrightarrow{V_a} = d'\vec{x}/dt \qquad \text{(III.2.31)}$$

ile verilmiş olur.

$\overrightarrow{V_a} = 0$ veya $d'\vec{x} = 0$ ise X noktası L'-düzleminde sabittir. Buradan X in L'-düzleminde sabit kalma şartları olan

$$dx_1 = -\sigma_1' - x_2\Im' \quad , \quad dx_2 = -\sigma_2' - x_1\Im' \qquad \text{(III. 2.32)}$$

denklemleri elde edilir.

X noktası L-düzleminde sabit tutulursa

$$\overrightarrow{V_f} = d_f\vec{x}/dt \qquad \text{(III.2.33)}$$

sürüklenme hızı X in L'-düzlemine göre $d_f\vec{x}$ değişimine karşılık gelir. (III.2.29) daki sabit kalma şartları (III.2.30) numaralı denklemde yerine yazılırsa

$$d_f\vec{x} = (-\sigma_1 - x_2\Im + \sigma_1' + x_2\Im')\overrightarrow{a_1} + (-\sigma_2 - x_1\Im + \sigma_2' + x_1\Im')\overrightarrow{a_2}$$

$$= [(\sigma_1' - \dot{\sigma}_1) + x_2(\Im' - \Im)]\overrightarrow{a_1} + [(\sigma_2' - \sigma_2) + x_1(\Im' - \Im)]\overrightarrow{a_2} \qquad \text{(III:2.34)}$$

ilişkisi elde edilir. Yukarıdaki formüllerden

$$d_f\vec{x} = d'\vec{x} - d\vec{x}$$

$$d'\vec{x} = d_f\vec{x} + d\vec{x} \qquad \text{(III.2.35)}$$

sonucu elde edilir.

P dönme polü

$$\overrightarrow{BP} = p_1\overrightarrow{a_1} + p_2\overrightarrow{a_2} \qquad \text{(III.2.36)}$$

olmak üzere, sürüklenme hızının sıfır,yani mutlak ve relatif hızların eşit olması ile karekterize edildiğinden

$$d_f\vec{x} = 0 \qquad \text{(III.2.37)}$$

den

$$\begin{aligned} (\sigma_1' - \sigma_1) + x_2(\Im' - \Im) &= 0 \\ (\sigma_2' - \sigma_2) + x_1(\Im' - \Im) &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(III.2.38)}$$

olur. Bu denklem sistemini çözersek

$$(\sigma_2' - \sigma_2) + x_1(\Im' - \Im) = 0$$

$$\Rightarrow x_1(\Im' - \Im) = -(\sigma_2' - \sigma_2)$$

$$\Rightarrow x_1 = -(\sigma_2' - \sigma_2)/(\Im' - \Im)$$

$d_f \vec{x} = 0$ için X noktaları $P(p_1, p_2)$ pol noktalarına eşit olduğundan

$$p_1 = x_1 = -(\sigma_2' - \sigma_2)/(\Im' - \Im) \qquad \text{(III.2.39)}$$

ve

$$(\sigma_1' - \sigma_1) + x_2(\Im' - \Im) = 0$$

$$\Rightarrow x_2(\Im' - \Im) = -(\sigma_1' - \sigma_1)$$

$$x_2 = -(\sigma_1' - \sigma_1)/(\Im' - \Im)$$

aynı şekilde $d_f \vec{x} = 0$ için X noktaları $P(p_1, p_2)$ pol noktaları olduğundan

$$p_2 = x_2 = -(\sigma_1' - \sigma_1)/(\Im' - \Im) \qquad \text{(III.2.40)}$$

bulunur.

σ_i ve σ_i', $\Im'$ ve $\Im$ diferensiyel formları u ve v gibi değişkenlere bağlı olduklarından, P dönme polleri iki Pfaff-formun oranı şeklinde gösterilir. İki değişken için Pfaff-formları

$$W = \sum_{j=1}^{2} a_j du_j = a_1 du_1 + a_2 du_2 \qquad \text{(III.2.41)}$$

$$\varphi = \sum_{j=1}^{2} b_j du_j = b_1 du_1 + b_2 du_2 \qquad \text{(III.2.42)}$$

şeklindedir. Burada

$$a_1 = A = A(u,v) \quad , \quad a_2 = B = B(u,v)$$

$$du_1 = du \quad , \quad du_2 = dv$$

şeklinde tanımlarsak

$$W = A\,du + B\,dv \qquad (\text{III.2.43})$$

olur. Aynı şekilde

$$b_1 = C = C(u,v) \quad , \quad b_2 = D = D(u,v)$$

yazılırsa

$$\varphi = C\,du + D\,dv \qquad (\text{III.2.44})$$

elde edilir.

Dolayısıyla $\mu = dv/du$ dersek

$$p_1 = \frac{W}{\varphi} = \frac{A\,du + B\,dv}{C\,du + D\,dv} = \frac{A + B\,\mu}{C + D\,\mu} \qquad (\text{III.2.45})$$

şeklinde olur. P_2 de aynı şekilde gösterime sahiptir. Burada p dönme polü g ve g' kutup eksenlerini çizer.

Şimdiye kadar tamamen keyfi alınan $\{B; \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ izafe sistemini şimdi, $\{B; \vec{a}_1\}$ ekseni daima kutup ekseni üzerinde bulunsun. Yani $p_2=0$ denklemi sağlanacak şekilde seçelim. O zaman (III.2.40) numaralı ifadeden

$$-(\sigma_1' - \sigma_1) = 0$$

$$\sigma_1' - \sigma_1 = 0$$

$$\sigma_1 = \sigma_1' \qquad (\text{III.2.46})$$

sonucunu elde ederiz. Bu büyüklükleri σ ile gösterirsek yani

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_1' \qquad (\text{III.2.47})$$

yazılır. (III.2.22) ve (III.2.23) den kısaca

$$d\sigma_1 = d\sigma_1' \qquad (\text{III.2.48})$$

olduğundan

$$\sigma_2 \wedge \Im = \sigma_2' \wedge \Im' \qquad (\text{III.2.49})$$

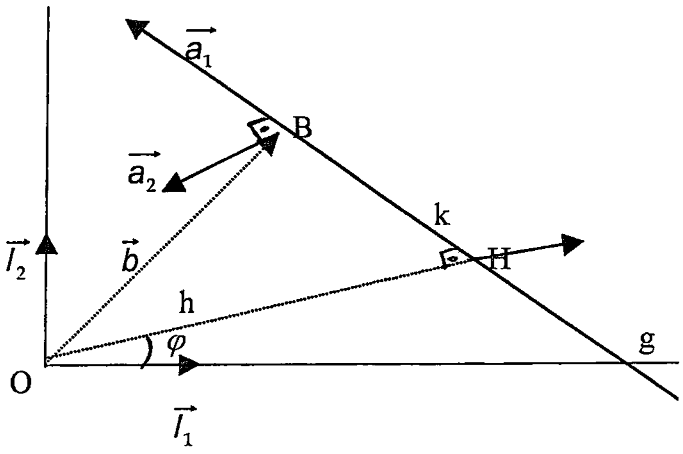
elde edilir. g kutup eksenini L-düzleminin doğrusu olarak alalım. $\{O;\vec{l}_1,\vec{l}_2\}$ koordinat sisteminde g'nin denklemi aşağıdaki şekle göre

$$x_1 \cosh\varphi + x_2 \sinh\varphi = h \qquad (\text{III.2.50})$$

dir. L-düzlemindeki g doğrusunun doğru yoğunluğunu

$$(g) = dh \wedge d\varphi \qquad (\text{III.2.51})$$

olarak alalım.



(Şekil III.2.1)

Bir L-düzlemi ve bu düzlem üzerindeki bir noktadan geçen bir g doğrusu göz önüne alalım. g doğrusu üzerindeki bir B noktasının orjinle birleştiği vektöre $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ diyelim. Bu $\vec{b}$ vektörünü belirlemek için B noktasından g nin doğrultusunda bir $\vec{a_1}$ vektörünü ve g ye dik olan $\vec{a_2}$ vektörünü alalım. $\vec{a_2}$ ye paralele orjinden geçen g kutup eksenini kesen noktaya H diyelim. Vektörlerin toplamından

$$\vec{b} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB} \qquad \text{(III.2.52)}$$

yazılabilir. Bununla birlikte $\forall k,\ h \in R$ skalerleri ve $\vec{a_1}, \vec{a}$ baz vektörlerine göre

$$\overrightarrow{OH} = -h\,\overrightarrow{a_2} \qquad , \qquad \overrightarrow{HB} = k\,\overrightarrow{a_1}$$

yazılabilir. Buradan (III.2.52) ifadesi

$$\vec{b} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB} = k\overrightarrow{a_1} - h\overrightarrow{a_2} \qquad \text{(III.2.53)}$$

olur. Bu ifadenin diferensiyeli ile (III.2.14) ifadesi eşitlenirse

$$d\vec{b} = dk\overrightarrow{a_1} - dh\overrightarrow{a_2} = \sigma_1\overrightarrow{a_1} + \sigma_2\overrightarrow{a_2} \qquad \text{(III.2.54)}$$

$$dk = \sigma_1 \qquad , \qquad dh = -\sigma_2 \qquad \text{(III.2.55)}$$

bulunur.

(III.2.9) ve (III.2.55) ifadesinden faydalanarak

$$(g) = dh \wedge d\varphi = -\sigma_2 \wedge \Im \qquad \text{(III.2.56)}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\overrightarrow{b'} = \overrightarrow{O'B} = \overrightarrow{O'H'} + \overrightarrow{H'B'} = k'\overrightarrow{a_1} - h'\overrightarrow{a_2} \qquad \text{(III.2.57)}$$

yazılır ve diferensiyeli alınarak (III.2.16) ifadesinin yardımıyla

$$d'\overrightarrow{b'} = dk'\overrightarrow{a_1} - dh'\overrightarrow{a_2} = \sigma_1'\overrightarrow{a_1} + \sigma_2'\overrightarrow{a_2} \qquad \text{(III.2.58)}$$

yazılır ve katsayıların eşitliğinden

$$dk' = \sigma_1' \qquad , \qquad dh' = -\sigma_2' \qquad \text{(III.2.59)}$$

elde edilir.(III.2.9) ve (III.2.59) ifadelerinden g' kutup ekseni

$$(g') = dh' \wedge d\varphi' = -\sigma_2' \wedge \Im' \qquad \text{(III.2.60)}$$

bulunur. Dolayısıyla (III.2.49) ifadesinden doğrudan doğruya yoğunluklarının eşit olduğu ortaya çıkar.

III.3. Lorentz Anlamında Kutup Eksenleri Dönüşümü

Teorem (III.2.1) de bir B_{II}-hareketiyle kutup eksenlerinin $g \leftrightarrow g'$ gibi yoğunlukları değiştirmeyen bir tekabüle bağlı olduğunu gördük. O halde L ve L'-düzlemleri bu yoğunluğu değiştirmeyen doğrular dönüşümü ile birbirlerine dönüşürler. Şimdi tersine olarak L ve L'-düzlemi arasında böyle yoğunluğu değiştirmeyen doğrular tekabülünü önceden vermek ve bununla nasıl ve ne dereceye kadar 2-parametreli bir B_{II}-hareketini tayin etmek istiyoruz.

Bunun için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

TEOREM III.3.1:

İki L ve L'-düzlemlerinin yoğunluğunu değiştirmeyen bir $g \leftrightarrow g'$ doğru tekabülü vasıtasıyla L-düzleminin L'düzlemine göre (ve tersi) 2-parametreli hareketlerin 1-parametreli bir ailesi belirtilir.

İSPAT:

İki L ve L'-düzlemlerinin yoğunluğu değiştirmeyen bir doğrular dönüşümü mevcut olsun, yani bir L-hareketli düzleminde g herhangi bir doğru olsun. Buna L'-sabit düzleminde $g \leftrightarrow g'$ tekabülü yoğunluğu değiştirmeyecek şekilde bir g' doğrusu karşılık gelir. L ve L'-düzlemleri birer $\{O; \vec{l}_1, \vec{l}_2\}$ ve $\{O'; \vec{l}_1', \vec{l}_2'\}$ eksen sistemleri ihtiva edebilirler. Bu eksen sistemlerinin O ve O' noktalarından sırayla g ve g' doğrularına birer dikme indirelim. Dikme ayakları C ve C' olsun. g doğrusu ile g' doğrusunun üst üste geldiğini düşünelim. Bu doğrularda henüz ötelenme mümkün olmayacağı için bu hareket tek anlamlı değildir. $\{B; \vec{a_1}, \vec{a_2}\}$ izafe sistemini

1- $\{B; \vec{a_1}\}$ ekseni g ve g' doğrusu, 2- B başlangıç noktasını C dikme ayağı ile üst üste olacak şekilde, yani B=C şeklinde seçelim. C ve C' arasındaki uzaklık q ise göre aşağıdaki vektörleri yazabiliriz.

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} = \vec{b} \ , \ \overrightarrow{O'B} = \vec{b'} \ , \ \overrightarrow{O'C'} = \vec{c'} \ , \ \overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{C'B} = q\overrightarrow{a_1} \qquad \text{(III.3.1)}$$

Buradan

$$\vec{b'} = \overrightarrow{O'B} = \overrightarrow{O'C'} + \overrightarrow{C'B} = \vec{c'} + q\overrightarrow{a_1} \qquad \text{(III.3.2)}$$

bağıntısı yazılabilir.

İzafe sisteminin durum değişimi ve g'nin L-düzlemine göre değişimi (III.2.13) ve (III:2.14) sistemi ile verildi. Dolayısıyla buradan ortaya çıkan Pfaff-formları (III.2.22) ile (III.2.23) integrallenebilme şartlarını sağlamak zorundadır.

Yine C' noktasının L'-düzlemine göre değişimi,

$$\overrightarrow{dc} = \overrightarrow{db} = \sigma_1 \overrightarrow{a_1} + \sigma_2 \overrightarrow{a_2}$$

iken

$$\overrightarrow{d'c'} = w_1 \overrightarrow{a_1} + w_2 \overrightarrow{a_2} \qquad \text{(III.3.3)}$$

ile verilsin. Yukarıdaki bağıntının dış türevi alınırsa $d'\left(\overrightarrow{d'c'}\right) = 0$ olur. (III.2.15) ve Teorem I.1 bağıntısının kullanılmasıyla

$$d'\left(\overrightarrow{d'c'}\right) = d'\left(\overrightarrow{a_1} w_1\right) + d'\left(\overrightarrow{a_2} w_2\right) = 0 \qquad \text{(III.3.4)}$$

$$= d'\overrightarrow{a_1} \wedge w_1 + dw_1 \overrightarrow{a_1} + d'\overrightarrow{a_2} \wedge w_2 + dw_2 \overrightarrow{a_2}$$

$$= \Im' \overrightarrow{a_2} \wedge w_1 + dw_1 \overrightarrow{a_1} + \Im' \overrightarrow{a_1} \wedge w_2 + dw_2 \overrightarrow{a_2}$$

$$= (\Im' \wedge w_1)\overrightarrow{a_2} + dw_1\overrightarrow{a_1} + (\Im' \wedge w_2)\overrightarrow{a_1} + dw_2\overrightarrow{a_2}$$

bulunur. Buradan

$$dw_1\overrightarrow{a_1} + dw_2\overrightarrow{a_2} = -(\Im \wedge w_2)\overrightarrow{a_1} - (\Im' \wedge w_1)\overrightarrow{a_2}$$

ve

$$dw_1 = -(\Im' \wedge w_2) = w_2 \wedge \Im'$$

$$dw_2 = -(\Im' \wedge w_1) = w_1 \wedge \Im' \qquad \text{(III.3.5)}$$

türev denklemleri elde edilir. (III.2.56) ve (III.2.60) formülleri doğru yoğunluklarının nasıl hesap edildiklerini göstermektedir. Dolayısıyla g'nin L-düzlemindeki doğru yoğunluğu için

$$(g) = -\sigma_2 \wedge \Im \qquad \text{(III.3.6)}$$

ifadesini ve g' nün L-düzlemindeki yoğunluğu için

$$(g') = -w_2 \wedge \Im' \qquad \text{(III.3.7)}$$

ifadesini buluruz.

Kabulümüze göre $g \leftrightarrow g'$ doğru dönüşümü yoğunluğu değiştirmediğinden

$$\sigma_2 \wedge \Im = w_2 \wedge \Im' \qquad \text{(III.3.8)}$$

eşitliği sağlanmış olur.

Şimdi (III.3.2) bağıntısından L'-düzlemine göre değişim yani

$$\overrightarrow{d'b'} = \overrightarrow{d'b} = \overrightarrow{d'c'} + dq\overrightarrow{a_1} + qd\overrightarrow{a_1}$$

oluşturalım.

(III.2.15) ile (III.2.16) ve (III.3.3) deki değerleri yazarsak

$$\sigma_1'\overrightarrow{a_1} + \sigma_2'\overrightarrow{a_2} = w_1\overrightarrow{a_1} + w_2\overrightarrow{a_2} + q\Im'\overrightarrow{a_2} + dq\overrightarrow{a_1}$$

$$= (w_1 + dq)\overrightarrow{a_1} + (w_2 + q\Im')\overrightarrow{a_2} \qquad \text{(III.3.9)}$$

ifadesini buluruz. Bu takdirde

$$\sigma_1' = w_1 + dq \qquad \text{(III.3.10)}$$

$$\sigma_2' = w_2 + q\Im' \qquad \text{(III.3.11)}$$

olur. Buradan

$$w_2 = \sigma_2' - q\Im' \qquad \text{(III.3.12)}$$

bulunur. Bu değer (III.3.8) bağıntısında yerine yazılırsa

$$\sigma_2 \wedge \Im = w_2 \wedge \Im' = (\sigma_2' - q\Im') \wedge \Im'$$

$$= \sigma_2' \wedge \Im' - q(\Im' \wedge \Im')$$

$(\Im' \wedge \Im' = 0)$ olduğundan

$$\sigma_2 \wedge \Im = \sigma_2' \wedge \Im' \qquad \text{(III.3.13)}$$

bulunur. (III.3.10) diferensiyel denkleminden q doğru parçasının tayini integrallenebilme şartı sağladığı için daima mümkündür. (III.3.10) denkleminden

$$dq = \sigma_1' - w_1 \qquad \text{(III.3.14)}$$

yazılabilir. (III.2.5) türev denklemlerinden (III.3.13) ifadesi ve (III.2.23) ifadesi ile birlikte

$$d(dq) = d\sigma_1' - dw_1 = \sigma_2' \wedge \Im' - w_2 \wedge \Im' = 0 \qquad \text{(III.3.15)}$$

(III.3.8) ve (III.3.13) den

$$\sigma_2 \wedge \Im = \sigma_2' \wedge \Im' = w_2 \wedge \Im'$$

olur. Böylece dq bir tam diferensiyel olup

$$dq = \int (\sigma_1' - w_1) dt \qquad \text{(III.3.16)}$$

dır. İntegralde keyfi bir integrasyon sabiti ortaya çıkar. O halde q doğru parçasının tayini daima keyfi bir parametre tayini ile mümkündür.

III.4.Lorentz Geometrisinde Kutup Eksenleri Yoğunluğu Sıfır Olan Hareketler

TEOREM III.4.1:

Kutup eksenleri yoğunluğu sıfır olan iki parametreli bir B_{II}-hareketi daima L-düzleminin bir k eğrisi devamlı olarak L′-düzleminin k′ eğrisine değecek şekilde elde edilir.

İSPAT:

Şimdiye kadar çalışmalarımızda L ve L'-düzlemlerindeki g ve g' kutup eksenlerinin $(g)=(g')$ ortak yoğunluğunun daima sıfır olmadığını kabul ettik. 2-parametreli hareketler altında tam bir istisnai durum daima tarif bölgesinin u,v değerleri için

$$(g) = dh \wedge d\varphi = 0 \qquad \text{(III.4.1)}$$

$$(g') = dh' \wedge d\varphi' = 0 \qquad \text{(III.4.2)}$$

olduğu B_{II}-lerdir. g kutup ekseni L-düzlemine göre

$$x_1 \cosh\varphi + x_2 \sinh\varphi = h \qquad \text{(III.4.3)}$$

denklemine sahiptir. Keza ona karşılık gelen L'-düzlemindeki g' kutup ekseni

$$x_1' \cosh\varphi' + x_2' \sinh\varphi' = h' \qquad \text{(III.4.4)}$$

denklemiyle verilir. (III.4.1) ifadesi dh ve dφ nin lineer bağımlı olduğunu yani

$$f(\varphi,h)dh + g(\varphi,h)d\varphi = 0 \qquad \text{(III.4.5)}$$

şeklinde bir bağıntıya sahip olduklarını ifade eder. Dolayısıyla h ve φ nin bu diferensiyel denklemi sağlayan bir fonksiyonu olarak

$$h = h(\varphi) \qquad \text{(III.4.6)}$$

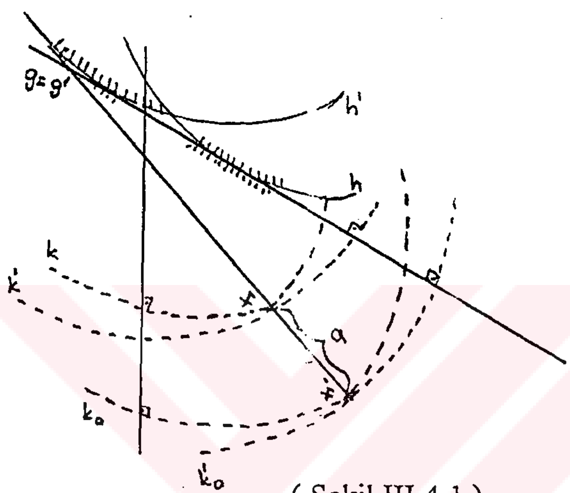
şeklinde ifade edilebilir. (III.4.2) den h' nün

$$h' = h'(\varphi') \qquad \text{(III.4.7)}$$

gibi φ' nün bir fonksiyonu olduğu ortaya çıkar.

Bu $h = h(\varphi)$ ve $h' = h'(\varphi')$ destek fonksiyonları ile L ve L'-düzlemlerinde g ve g' doğrularının birer parametreli ailesi tarif edilir. Bunların zarfları da h ve h' ile gösterilir.

k, L- düzlemindeki doğru ailesine ortogonal bir eğri olsun. bu takdirde k eğrisine h nin bir evolventi denir. k nın g doğrusu ile kesim noktası X ile gösterilsin.



(Şekil III.4.1)

Şimdi B_{II}-hareketinden 1-parametreli B_I-hareketini seçelim. Bu harekete ait p dönme polü g kutup ekseni üzerinde bulunur. L-düzlemindeki k eğrisi bu B_I-hareketinde L'-düzleminde bir k' zarfına sahiptir. k ve k' zarf eğrisini ani değme noktası (g, P polünden k eğrisine çizilen normal olduğu için) X noktasıdır.

L sabit düzlemini inceleyelim. Özellikle $g = g'$ olduğundan, L'-düzleminde g'kutup ekseni k' zarf eğrisini dik keser. Böylece k' zarf eğrisi de L'-düzleminde g' eksen ailesine ortogonal bir eğridir. k' eğrisi h' eğrisinin bir evolventidir. Dolayısıyla k' eğrisi B_{II} –den elde edilen bir parametreli B_I-hareketine bağlı değildir.

Kutup eksenleri yoğunluğu sıfır olan 2-parametreli B_{II}-hareketi, k eğrisinin daima k' eğrisine değmesiyle izah edilebilir.

Tersine olarak $h = h(\varphi), h' = h'(\varphi')$ fonksiyonları ile L ve L'-düzlemlerinde h ve h' eğrilerinin teğetler göstergesi olan 1-parametreli birer doğru ailesi belirtmektedir. Bu eğrilerin herhangi iki k ve k' evolventi, yani bu iki doğru ailesinin herhangi iki ortogonal yörüngesi alınırsa aşağıdaki şekilde 2-parametreli bir B_{II}-hareketi belirtebilir. k eğrisinin bulunduğu L-düzlemi, k daima L'-düzleminin k' eğrisine değecek şekilde hareket ettiriliyor. Buna göre k ve k' eğrileri noktaları birbirine karşılık gelmeyip, sadece her iki eğrinin değme noktası k nın herhangi bir noktasında bulunduğu için, böylece elde edilen hareket iki parametrelidir ve sıfır yoğunluklu önceden verilen eksen dönüşümüne sahiptir. k ve k' eğrileri yerine h ve h'nün k ve k'den aynı a uzaklığında olan k_a ve k'_a gibi iki evolventi alınırsa, aynı B_{II}-hareketi elde edilebilir.

Bununla birlikte h'nın bir k evolventi h''nün her ∞^1 tane farklı k' evolventi ile beraber her defa bir B_{II}-hareketi belirttiği için, B_{II}-nin 1-parametreli bir ailesi $h = h(\varphi)$, $h' = h'(\varphi')$ fonksiyonlarına aittir.

Bunlara bağlı olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

TEOREM III.4.2:

L ve L'-düzlemlerinde bir parametreli iki doğru ailesi önceden verilmiş ise, bu ailelere 2-parametreli B_{II}-hareketinin 1-parametreli bir ailesi aittir. Bu B_{II}-hareketleri L-düzleminin doğru ailesinin ortogonal yörüngelerinin L'-düzleminin ailesinin ortogonal yörüngelerine değmesiyle karekterize edilir.

BÖLÜM IV

IV. Lorentz Geometrisinde Bir Eğri Elementini Çizen Noktalar

TEOREM IV.1:

2-parametreli bir B_{II}-hareketinde genel olarak hareketli L-düzleminin, (u,v) anında yüzey elemanını değil, bilakis bir eğri elemanını çizen noktaların geometrik yeri g kutup eksenleridir. O halde g kutup eksenleri L-düzleminin "eğri çizici" noktasının geometrik yeridir.

İSPAT:

L-hareketli düzleminde bir X noktası alalım. 2-parametreli bir B_{II}-hareketinde bu nokta genel olarak L'-sabit düzleminde bir yüzey elemanı çizer. L-düzlemindeki X noktasının yüzey elemanı yerine X in L'-düzlemindeki nokta yoğunluğundan bahsedebiliriz. Genel olarak bu nokta yoğunluğu sıfırdan farklı olacaktır, yani X noktası bir yüzey elemanı çizecektir. Şimdi, L-düzleminin L'-düzleminde nokta yoğunluğu bir t anında, yani incelenen bir (u,v) konumunda sıfır olan X noktalarını araştıralım. Bu noktalar bir t anında 2-parametreli B_{II}-hareketinde eğri elementi çizeceklerdir.

Şimdiye kadar keyfi alınan $\left\{B;\vec{a}_1,\vec{a}_2\right\}$ izafe sistemini $\left\{B;\vec{a}_1\right\}$ eksenini kutup ekseni ile üst üste gelecek şekilde seçelim. Yani, $p_2=0$ olsun. bu takdirde (III.2.40) gereğince

$$-\left(\sigma_1'-\sigma_1\right)=0 \Rightarrow -\sigma_1'+\sigma_1=0$$

$$\sigma_1=\sigma_1' \qquad \text{(IV.1)}$$

sonucunu buluruz. Bu büyüklükleri σ ile gösterirsek,

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_1' \qquad \text{(IV.2)}$$

olur.

Şimdi de (Şekil III.1.1) ya göre izafe sistemindeki koordinatları x_1,x_2 olan bir X noktası için

$$\overrightarrow{BX} = x_1\overrightarrow{a_1} + x_2\overrightarrow{a_2} \qquad \text{(IV.3)}$$

$$\vec{x} = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BX} = \vec{b} + x_1\overrightarrow{a_1} + x_2\overrightarrow{a_2} \qquad \text{(IV:4)}$$

$$\vec{x}' = \overrightarrow{O'X} = \overrightarrow{O'B} + \overrightarrow{BX} = \vec{b}' + x_1\overrightarrow{a_1} + x_2\overrightarrow{a_2} \qquad \text{(IV.5)}$$

şeklinde yazalım. (III.2.13) ve (III.2.14) türev denklemleri yardımıyla X noktasının L-düzlemine göre (III.2.27) formülü olan, yani

$$d\vec{x} = d\vec{b} + d\left(x_1\overrightarrow{a_1}\right) + d\left(x_2\overrightarrow{a_2}\right)$$

$$= d\vec{b} + dx_1\overrightarrow{a_1} + x_1 d\overrightarrow{a_1} + dx_2\overrightarrow{a_2} + x_2 d\overrightarrow{a_2}$$

$$= \left(\sigma_1\overrightarrow{a_1} + \sigma_2\overrightarrow{a_2}\right) + dx_1\overrightarrow{a_1} + x_1\Im\overrightarrow{a_2} + dx_2\overrightarrow{a_2} + x_2\Im\overrightarrow{a_1}$$

$$= \left(\sigma_1 + dx_1 + x_2\Im\right)\overrightarrow{a_1} + \left(\sigma_2 + dx_2 + x_1\Im\right)\overrightarrow{a_2} \qquad \text{(IV.6)}$$

bulunur. $d\vec{x} = 0$ için X noktası L-düzleminde sabittir. Bu da X'in L-düzleminde sabit kalma şartlarını veya

$$dx_1 = -\sigma_1 - x_2\Im \quad , \quad dx_2 = -\sigma_2 - x_1\Im \qquad \text{(IV.7)}$$

bağıntılarını verir.

X noktasının L'-düzlemine göre değişimi için (III.2.30) ve (III.2.34) formüllerine uygun olarak

$$d'\overrightarrow{x'} = d'\vec{x} = d'\overrightarrow{b'} + dx_1\overrightarrow{a_1} + x_1 d'\overrightarrow{a_1} + dx_2\overrightarrow{a_2} + x_2 d'\overrightarrow{a_2}$$

$$= \sigma_1'\overrightarrow{a_1} + \sigma_2'\overrightarrow{a_2} + dx_1\overrightarrow{a_1} + x_1\mathfrak{I}'\overrightarrow{a_2} + dx_2\overrightarrow{a_2} + x_2\mathfrak{I}'\overrightarrow{a_1}$$

$$= (\sigma_1' + dx_1 + x_2\mathfrak{I}')\overrightarrow{a_1} + (\sigma_2' + dx_2 + x_1\mathfrak{I}')\overrightarrow{a_2} \qquad \text{(IV.8)}$$

ve (IV.7) değeri yerine yazılırsa

$$d_f\vec{x} = [\sigma + (-\sigma - x_2\mathfrak{I}) + x_2\mathfrak{I}']\overrightarrow{a_1} + [\sigma_2' + (-\sigma_2 - x_1\mathfrak{I}) + x_1\mathfrak{I}']\overrightarrow{a_2}$$

$$= x_2(\mathfrak{I}' - \mathfrak{I})\overrightarrow{a_1} + \{(\sigma_2' - \sigma_2) + x_1(\mathfrak{I}' - \mathfrak{I})\}\overrightarrow{a_2} \qquad \text{(IV.9)}$$

sonucunu elde ederiz.

$$x_2(\mathfrak{I}' - \mathfrak{I}) = \eta_1$$

$$(\sigma_2' - \sigma_2) + x_1(\mathfrak{I}' - \mathfrak{I}) = \eta_2 \qquad \text{(IV.10)}$$

yazılarak

$$d_f\vec{x} = \eta_1\overrightarrow{a_1} + \eta_2\overrightarrow{a_2} \qquad \text{(IV.11)}$$

ifadesi elde edilir. Burada $d_f\vec{x}$ 1-parametreli hareketlerdeki sürüklenme hızına karşılık gelir.

X noktasının L'-düzleminde çizdiği yüzey elementi veya X in L'-düzlemindeki nokta yoğunluğu

$$d_f \vec{x} = \eta_1 \wedge \eta_2 = x_2(\Im' - \Im) \wedge [(\sigma_2' - \sigma_2) + x_1(\Im' - \Im)]$$

$$= x_2[(\Im' - \Im) \wedge (\sigma_2' - \sigma_2)] + x_2 x_1[(\Im' - \Im) \wedge (\Im' - \Im)]$$

$$= x_2[(\Im' - \Im) \wedge (\sigma_2' - \sigma_2)] \qquad \text{(IV.12)}$$

dış çarpımı ile verilir. Buradan

$$(\Im' - \Im) \wedge (\sigma_2' - \sigma_2) \neq 0 \qquad \text{(IV.13)}$$

ise $d_f \vec{x}$ yüzey elementi yalnız $x_2=0$ olan X noktaları için sıfırdır. Bu noktalar B_{II}-hareketinin kutup ekseni üzerinde bulunurlar.

$$(\Im' - \Im) \wedge (\sigma_2' - \sigma_2) = 0 \qquad \text{(IV.14)}$$

şartının sağlanması halinde aşağıdaki iki sonuç ortaya çıkar.

1. $\Im' - \Im$ ve $\sigma_2' - \sigma_2$ formları lineer bağımlı iseler, aynı P dönme polü B_{II}-hareketinin (u,v) konumlu bütün B_I-hareketlerine aittir. Yani, esas itibariyle bir kutup ekseni mevcut değildir.

2. $\Im' - \Im = 0$ ise, bu takdirde genel olarak sonsuz uzak poller bulunur.

BÖLÜM V

V. Lorentz Geometrisinde 2-Parametreli B_{II}-Hareketinde Esas B_I-Hareketi ve Normlanmış İzafe Sistemi

2-parametreli bir B_{II}-hareketini $\{B;\vec{a_1}\}$ ekseni ve $g = g'$ kutup ekseni üzerinde bulunan bir $\{B;\vec{a_1},\vec{a_2}\}$ sistemine izafe edelim. B_{II}-hareketinden elde edilen 1-parametreli bir B_I-hareketinin P dönme polünün koordinatları (III.2.39) ile (III.2.40) ve (IV:2) den dolayı

$$p_1 = -\frac{\sigma_2' - \sigma_2}{\mathfrak{I}' - \mathfrak{I}} \quad , \quad p_2 = 0 \tag{V.1}$$

dir.

B_{II}-hareketi içinde, ayna resimli pol eğrilerinin simetrik yuvarlanmasıyla meydana gelen fevkalade B_I- hareketleri vardır. Bu hareketleri esas B_I-olarak ifade etmek istiyoruz. 1-parametreli bir B_I-hareketinin hareketli (P) pol eğrisinin kontengez açısı olarak da $\mathfrak{I}'$ yü alaım. Burada $\mathfrak{I}$, kontengez açısı, yani (P) nin komşu iki teğetinin açısıdır. $\mathfrak{I}'$ kontengez açısı, (P') nün komşu iki teğetinin açısıdır. Bu açılar simetrik yuvarlanma için eşit ve ters işaretli olduğundan,yani

$$\mathfrak{I} + \mathfrak{I}' = 0 \tag{V.2}$$

sağlamak zorundadır. (V.2) ifadesiyle B_{II}-hareketinin her (u,v) durumunda esas B_I-hareketine karşılık dönme polü olan bir Q esas-polü tespit edilir.

$$\mathfrak{I} \wedge \mathfrak{I}' \neq 0 \tag{V.3}$$

kabülü altında Q esas-polünün koordinatları q_1 ve q_2 olmak üzere (V.1) den dolayı

$$q_1 = -\frac{(\sigma_2' - \sigma_2) \wedge (\Im' + \Im)}{(\Im' - \Im) \wedge (\Im' + \Im)}$$

$$= -\frac{(\sigma_2' - \sigma_2) \wedge (\Im' + \Im)}{(\Im' \wedge \Im') + (\Im' \wedge \Im) - (\Im \wedge \Im') - (\Im \wedge \Im)}$$

$$= -\frac{(\sigma_2' - \sigma_2) \wedge (\Im' + \Im)}{(\Im' \wedge \Im) - (\Im \wedge \Im')}$$

$$= -\frac{(\sigma_2' - \sigma_2) \wedge (\Im' + \Im)}{(\Im' \wedge \Im) + (\Im' \wedge \Im)}$$

$$= -\frac{(\sigma_2' - \sigma_2) \wedge (\Im' + \Im)}{-2(\Im \wedge \Im')}$$

$$q_1 = \frac{(\sigma_2' - \sigma_2) \wedge (\Im' + \Im)}{2(\Im \wedge \Im')} \qquad \text{(V.4)}$$

elde ederiz.

$$q_2 = \frac{(\sigma_1' - \sigma_1) \wedge (\Im' + \Im)}{(\Im' - \Im) \wedge (\Im' + \Im)}$$

için (IV.2) den dolayı

$$q_2 = 0 \qquad \text{(V.5)}$$

bulunur. u, v gibi iki değişken halinde Pfaff-formunu

$$W_j = A_j du + B_j dv \qquad (\text{j=1,2,3})$$

şeklinde yazarak

$$W_1 = A_1 du + B_1 dv \tag{V.6}$$

$$W_2 = A_2 du + B_2 dv \tag{V.7}$$

$$W_3 = A_3 du + B_3 dv \tag{V.8}$$

elde edilir. Bunlara bağlı olarak, Pfaff-formların aşağıdaki özelliklerini kullanalım.

$$W_1 = 0 \tag{V.9}$$

diferensiyel denkleminin çözümü için, W_1 lineer bağımsız kabul edilirse, diğer iki formun oranı

$$\left.\frac{W_2}{W_3}\right|_{W_1=0} = \frac{W_1 \wedge W_2}{W_1 \wedge W_3} = \frac{\det(W_1, W_2)}{\det(W_1, W_3)} \tag{V.10}$$

şeklindedir. Yani Pfaff-formların katsayılarının determinantı şeklinde yazılırsa

$$\left.\frac{W_2}{W_3}\right|_{W_1=0} = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 B_3 - A_3 B_1} \tag{V.11}$$

olarak bulunur.

İzafe sistemini kutup ekseni boyunca B başlangıcı Q esas polüne gelinceye kadar yer değiştirmek suretiyle, normlamak ve tek anlamlı olarak belirtmek gerekir. Bir B_{II}-hareketinin B=Q olan bu kanonik izafe sistemi için

$$q_1 = 0 \quad , \quad q_2 = 0 \tag{V.12}$$

veya

$$(\sigma_2' - \sigma_2) \wedge (\Im' + \Im) = 0 \tag{V.13}$$

olmalıdır. Bu şart daha detaylı olarak

$$(\sigma_2' \wedge \Im') + (\sigma_2' \wedge \Im) - (\sigma_2 \wedge \Im') - (\sigma_2 \wedge \Im) = 0 \tag{V.14}$$

şeklinde yazılır. Yoğunluğun değişmezliğini ifade eden (III.2.49) bağıntısından dolayı

$$\sigma_2' \wedge \Im = \sigma_2 \wedge \Im' \tag{V.15}$$

eşitliği de yazılabilir. A(u,v), B(u,v), F(u,v), F′(u,v), G(u,v), ve G′(u,v) 2-parametreli B_{II}-hareketinde yüzey üzerinde bulunan eğrilerin fonksiyonları olmak üzere, (V.3) ifadesine, yani $\Im$ ve $\Im'$ nün lineer bağımsız olmasından dolayı σ Pfaff-formları $\Im$ ve $\Im'$ cinsinden ifade edilebilir ve sonuçta aşağıdaki bağıntılar bulunur.

$$\sigma = \sigma_1' = \sigma_1 = A\Im - B\Im' \tag{V.16}$$

$$\sigma_2 = F\Im - G\Im' \tag{V.17}$$

$$\sigma_2' = F'\Im - G'\Im' \tag{V.18}$$

şimdi bu ifadeleri (III.2.49) ve (V.15) de yerine koyarsak,

$$\sigma_2 \wedge \Im = \sigma_2' \wedge \Im'$$

$$(F\Im - G\Im') \wedge \Im = (F'\Im - G'\Im') \wedge \Im'$$

$$F(\Im \wedge \Im) - G(\Im' \wedge \Im) = F'(\Im \wedge \Im') - G'(\Im' \wedge \Im')$$

$$-G(\Im' \wedge \Im) = F'(\Im \wedge \Im')$$

$$G(\Im \wedge \Im') = F'(\Im \wedge \Im')$$

$$G = F' \tag{V.19}$$

ve

$$\sigma_2' \wedge \Im = \sigma_2 \wedge \Im'$$

$$(F'\Im - G'\Im') \wedge \Im = (F\Im - G\Im') \wedge \Im'$$

$$F'(\Im \wedge \Im) - G'(\Im' \wedge \Im) = F(\Im \wedge \Im') - G(\Im' \wedge \Im')$$

$$-G'(\Im' \wedge \Im) = F(\Im \wedge \Im')$$

$$G'(\Im \wedge \Im') = F(\Im \wedge \Im')$$

$$G' = F \tag{V.20}$$

bulunur.

Daha önceki bölümlerde g ve g' kutup eksenlerinin denklemlerini sırayla L-düzleminde $\{O;\vec{I}_1,\vec{I}_2\}$ koordinat sistemine göre

$$x_1 \cosh\varphi + x_2 \sinh\varphi = h$$

ve L'-düzlemindeki $\{O';\vec{I}'_1,\vec{I}'_2\}$ koordinat sistemine göre

$$x'_1 \cosh\varphi' + x'_2 \sinh\varphi' = h'$$

şeklinde ifade edilmişti. Dönme açısının $\{B;\vec{a}_1,\vec{a}_2\}$ izafe sistemine göre değişimleri

$$d\varphi = \Im \qquad , \qquad d\varphi' = \Im'$$

olduğu ve $\Im \wedge \Im' \neq 0$ sağlandığı için φ ve φ' açılarını bağımsız değişkenler olarak kabul edip, B_{II}-hareketini onlara izafe edebiliriz.

Bu takdirde (V.16), (V.17) ve (V.18) ifadelerinin dış türevlerinin oluşturulmasıyla

$$d\Im = 0 \quad ve \quad d\Im' = 0 \tag{V.21}$$

ile (V.19) ve (V.20) den dolayı

$$d\sigma_1 = d(A\Im - B\Im') = d(A\Im) - d(B\Im')$$

ve Teorem (I.1) den

$$d\sigma_1 = dA \wedge \Im + Ad\Im - dB \wedge \Im' - Bd\Im'$$
$$d\sigma_1 = dA \wedge \Im - dB \wedge \Im' \tag{V.22}$$

elde edilir. Şimdi φ ve φ' açılarını bağımsız değişken olarak kabul ederek bir irdeleme yapalım.

İRDELEME:

Önce φ bağımsız değişkeni için

$$dA / d\varphi = \partial A / \partial \varphi = A_\varphi$$

$$\Rightarrow dA = A_\varphi d\varphi = A_\varphi \Im \qquad \text{(V.23)}$$

ile gösterilirse (III.2.9) dan dolayı

$$dA \wedge \Im = A_\varphi (\Im \wedge \Im)$$

$$dA \wedge \Im = 0 \qquad \text{(V.24)}$$

bulunur. Ayrıca benzer olarak

$$dB / d\varphi = \partial B / \partial \varphi = B_\varphi$$

$$\Rightarrow dB = B_\varphi d\varphi = B_\varphi \Im \qquad \text{(V.25)}$$

$$dB \wedge \Im' = B_\varphi (\Im \wedge \Im') \qquad \text{(V.26)}$$

elde edilir. Bu değerler (V.22) de yerine yazılırsa

$$d\sigma_1 = -B_\varphi (\Im \wedge \Im') \qquad \text{(V.27)}$$

bulunur. Şimdi de φ' bağımsız değişkeni için

$$dA / d\varphi' = \partial A / \partial \varphi' = A_{\varphi'} \qquad \text{(V.28)}$$

$$dA \wedge \Im = A_{\varphi'}(\Im' \wedge \Im)$$

$$= -A_{\varphi'}(\Im \wedge \Im') \qquad \text{(V.29)}$$

bulunur.

$$dB / d\varphi' = \partial b / \partial \varphi' = B_{\varphi'} \qquad \text{(V.30)}$$

şeklinde gösterirsek

$$dB \wedge \Im' = B_{\varphi'}(\Im' \wedge \Im')$$

$$dB \wedge \Im' = 0 \qquad \text{(V.31)}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$d\sigma_1 = -A_{\varphi'}(\Im \wedge \Im') \qquad \text{(V.32)}$$

elde edilir. Bu takdirde (V.24) ve (V:31) bağıntılarına göre

$$d\sigma_1 = 0 \qquad \text{(V.33)}$$

ve ayrıca (V.26) ve (V.32) ifadelerinden

$$d\sigma_1 = -A_{\varphi'}(\Im \wedge \Im') - B_{\varphi}(\Im \wedge \Im')$$

$$= -(A_{\varphi'} + B_{\varphi})(\Im \wedge \Im') \tag{V.34}$$

elde edilir. bu sonuç bizim için doğru olanıdır. Çünkü (V.16) ifadesi A(u,v) ve B(u,v) gibi eğrilerin fonksiyonlarına bağlıdır.

Benzer şekilde

$$d\sigma_2 = -(F_{\varphi'} + G_{\varphi})(\Im \wedge \Im') \tag{V.35}$$

$$d\sigma_2' = -(F_{\varphi} + G_{\varphi'})(\Im \wedge \Im') \tag{V.36}$$

değerleri bulunur. Bu değerleri (III.2.22) ve (III.2.23) integrallenebilme şartları ile karşılaştırırsak, yani

$$d\sigma_1 = \sigma_2 \wedge \Im$$

$$d\sigma_1 = (F\Im - G\Im') \wedge \Im$$

$$= F(\Im \wedge \Im) - G(\Im' \wedge \Im)$$

$$= -G(\Im' \wedge \Im) \tag{V.37}$$

elde edilir. Bu ifade (V.34) ile karşılaştırılırsa

$$-G(\Im' \wedge \Im) = -(A_{\varphi'} + B_{\varphi})(\Im \wedge \Im')$$

$$G(\Im \wedge \Im') = -(A_{\varphi'} + B_{\varphi})(\Im \wedge \Im')$$

$$G = -(A_{\varphi'} + B_{\varphi}) \tag{V.38}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$d\sigma_2 = \sigma_1 \wedge \Im$$

$$= (A\Im - B\Im') \wedge \Im$$

$$= A(\Im \wedge \Im) - B(\Im' \wedge \Im)$$

$$= B(\Im \wedge \Im') \qquad \text{(V.39)}$$

elde edilir. Bu değeri (V.35) ile karşılaştırırsak

$$B(\Im \wedge \Im') = -(F_{\varphi'} + G_{\varphi})(\Im \wedge \Im')$$

$$B = -(F_{\varphi'} + G_{\varphi}) \qquad \text{(V.40)}$$

bulunur.

$$d\sigma_2' = \sigma_1' \wedge \Im'$$

$$= (A\Im - B\Im') \wedge \Im'$$

$$= A(\Im \wedge \Im') - B(\Im' \wedge \Im')$$

$$= \mathrm{A}(\Im \wedge \Im') \qquad \text{(V:41)}$$

elde edilir. (V.41) ile (V.36) karşılaştırılırsa

$$A(\Im \wedge \Im') = -(F_{\varphi} + G_{\varphi'})(\Im \wedge \Im')$$

$$A = -\left(F_{\varphi} + G_{\varphi'}\right) \tag{V.42}$$

bulabiliriz. Bazen φ bazen de φ′ye göre kısmi türev almamızın sebebi (III.2.9) dan dolayı farklı değerlerin ortaya çıkmasıdır.

Bu nedenle F ve G fonksiyonları keyfi olarak seçilemezler. Bununla birlikte A ve B nin $A_{\varphi'}$ ve B_{φ} kısmi türevleri alınarak (V.38) de yerine konulursa

$$A = -\left(F_{\varphi} + G_{\varphi'}\right)$$

$$A_{\varphi'} = -\left(F_{\varphi\varphi'} + G_{\varphi'\varphi'}\right) \tag{V.43}$$

$$B = -\left(F_{\varphi'} + G_{\varphi}\right)$$

$$B_{\varphi} = -\left(F_{\varphi'\varphi} + G_{\varphi\varphi}\right) \tag{V.44}$$

ve

$$F_{\varphi\varphi'} = F_{\varphi'\varphi} \tag{V.45}$$

şartı kullanılarak

$$G = -\left(A_{\varphi'} + B_{\varphi}\right)$$

$$= -\left[-F_{\varphi\varphi'} - G_{\varphi'\varphi'} - F_{\varphi'\varphi} - G_{\varphi\varphi}\right]$$

$$= -\left[-2F_{\varphi\varphi'} - G_{\varphi'\varphi'} - G_{\varphi\varphi}\right]$$

$$= 2F_{\varphi\varphi'} + G_{\varphi'\varphi'} + G_{\varphi\varphi}$$

ve buradan da

$$G - 2F_{\varphi\varphi'} - G_{\varphi'\varphi'} - G_{\varphi\varphi} = 0 \qquad \text{(V.46)}$$

ifadesi bulunur.

TEOREM V.1:

İki parametreli bir B_{II}-hareketinin her (u,v) konumuyla, ayna resimli pol eğrilerinin simetrik yuvarlanmasıyla meydana gelen bir esas B_I-hareketi elde edilir. bunun Q dönme polü B_{II}-hareketinin incelenen durumdaki esas-polüdür.

TEOREM V.2:

İki parametreli B_{II}-hareketinde $\left\{Q; \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right\}$ kanonik izafe sistemi, Q esas-polünde bir başlangıç noktasına sahiptir. dolayısıyla B_{II}-hareketinde $\left\{Q; \overrightarrow{a_1}\right\}$ ekseni $g = g'$ kutup eksenidir.

Bu normlanmış izafe sistemi için

$$d\overrightarrow{a_1} = \Im\overrightarrow{a_2}\ ,\ d\overrightarrow{a_2} = \Im\overrightarrow{a_1}\ ,\ d\vec{q} = \sigma_1\overrightarrow{a_1} + \sigma_2\overrightarrow{a_2} \qquad \text{(V.47)}$$

$$d'\overrightarrow{a_1} = \Im'\overrightarrow{a_2}\ ,\ d'\overrightarrow{a_2} = \Im'\overrightarrow{a_1}\ ,\ d'\vec{q} = \sigma_1'\overrightarrow{a_1} + \sigma_2'\overrightarrow{a_2} \qquad \text{(V.48)}$$

türev denklemlerinin sistemi mevcuttur. (V.40) ve (V.42) ifadeleri (V16) da yerine konulursa

$$\sigma = -\left(F_{\varphi} + G_{\varphi'}\right)\Im + \left(F_{\varphi'} + G_{\varphi}\right)\Im' \qquad \text{(V.49)}$$

ayrıca (V.19) ve (V.20) den dolayı

$$\sigma_2 = F\Im - G\Im'\ ,\ \sigma_2' = G\Im - F\Im' \qquad \text{(V.50)}$$

yazılabilir. Artık F ve G fonksiyonları yalnız (V.46) integrallenebilme şartlarını sağlamak zorundadır.

L ve L'-düzlemlerindeki g, g' kutup eksenlerinin yoğunlukları (III.2.49) ve (III.2.60) formüllerine göre

$$(g) = (g')$$

$$-\sigma_2 \wedge \Im = -\sigma_2' \wedge \Im'$$

$$-(F\Im - G\Im') \wedge \Im = -(G\Im - F\Im') \wedge \Im'$$

$$-F(\Im \wedge \Im) + G(\Im' \wedge \Im) = -G(\Im \wedge \Im') + F(\Im' \wedge \Im')$$

ve $(\Im \wedge \Im) = 0, (\Im' \wedge \Im') = 0$ olmasından dolayı

$$\begin{aligned}(g) = (g') &= G(\Im' \wedge \Im) \\ &= -G(\Im \wedge \Im') \\ &= -G(d\varphi \wedge d\varphi') \qquad \text{(V.51)}\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla G invaryantı esas itibariyle L ve L'-düzlemlerindeki g, g' kutup eksenlerinin ortak yoğunluklarıdır.

BÖLÜM VI

VI. Lorentz Anlamında 2-Parametreli Hareketlerden Çekilen 1-Parametreli Hareketler

Daha önce 2-parametreli B_{II}-hareketinin bir özel durumu ile elde edilen 1-parametreli B_I-hareketleri altında esas B_I-ler karekterize edilmişti. Bunlar simetrik yuvarlanmaya karşılık gelirler. Şimdi de B_I-hareketlerini açıklamaya çalışalım.

VI.1. Lorentz Anlamında 1-Parametreli S_1-Kayma Hareketleri

Bunun için

$$\Im = \Im' \tag{VI.1.1}$$

yani

$$\varphi = \varphi' \tag{VI.1.2}$$

için bir kayma hareketi mevcuttur. L-düzleminde bir X noktası göz önüne alalım. (IV.9) bağıntısına göre bu noktanın ilerleme doğrultusu için

$$d_f \vec{x} = x_2(\Im' - \Im)\overrightarrow{a_1} + \{(\sigma_2' - \sigma_2) + x_1(\Im' - \Im)\}\overrightarrow{a_2}$$

de (VI.1.1) kullanılırsa

$$d_f \vec{x} = (\sigma_2' - \sigma_2)\overrightarrow{a_2} \tag{VI.1.3}$$

elde edilir. O halde ani kayma yönü her defa kutup eksenine diktir.

X noktasının yörünge eğrisinin komşu noktaları (VI.1.3) ifadesine göre $\sigma_2' - \sigma_2$ uzaklığındadır. Kayma yönü ise $\Im = \Im'$ açısı etrafında değişir. Buna göre

$\Im = \Im'$ kontengez açısı, yani X noktasının yörünge eğrisinin komşu teğetlerinin açısıdır. Dolayısıyla S_1-kayma hareketinin δ eğrilik yarıçapını

$$\delta = \frac{\sigma_2' - \sigma_2}{\Im} \qquad \text{(VI.1.4)}$$

şeklinde gösterebiliriz. (V.50) ifadesinden dolayı

$$\delta = \frac{G\Im - F\Im' - F\Im + G\Im}{\Im}$$

ve $\Im' = \Im$ olduğu için

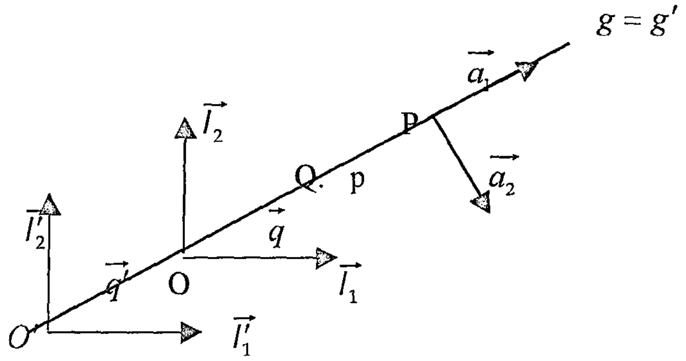
$$\delta = \frac{2G\Im - 2F\Im}{\Im}$$

$$\delta = 2(G - F) \qquad \text{(VI.1.5)}$$

elde edilir.

VI.2. Lorentz Anlamında 1-Parametreli Hareketlerin Oskülatörü

Bundan pol yörüngelerinin her defa kutup eksenlerine değen 1-parametreli B_l-hareketlerini anlıyoruz. Buna karşılık gelen P dönme polü için



(Şekil VI.2.1)

(Şekil VI.2.1) ile (V.1) ve (V.50) ifadelerine göre

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = \vec{q} + p\,\overrightarrow{a_1} \qquad \text{(VI.2.1)}$$

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'Q} + \overrightarrow{QP} = \vec{q'} + p\,\overrightarrow{a_1} \qquad \text{(VI:2.2)}$$

yazılabilir. Buradaki P dönme polü p_1=p ye karşılık geleceğinden

$$p = -\frac{\sigma_2' - \sigma_2}{\Im' - \Im} \qquad \text{(VI.2.3)}$$

yazabiliriz. (V.50) den dolayı

$$p = -\frac{G\Im - F\Im' - F\Im + G\Im'}{\Im' - \Im}$$

$$= \frac{-G\Im + F\Im' + F\Im - G'}{\Im' - \Im}$$

$$= \frac{(F-G)\Im + (F-G)\Im'}{\Im' - \Im}$$

$$= \frac{(F-G)(\Im + \Im')}{\Im' - \Im}$$

$$= (F-G)\frac{\Im + \Im'}{\Im' - \Im} \qquad \text{(VI.2.4)}$$

bulunur. Bizden istenen değme (V.47) ve (V.48) bağıntılarıyla

$$d\overrightarrow{OP} = d\vec{q} + dp\overrightarrow{a_1} + p\,d\overrightarrow{a_1}$$

$$=(\sigma+dp)\overrightarrow{a_1}+(\sigma_2+p\Im)\overrightarrow{a_2} \qquad \text{(VI.2.5)}$$

$$d\overrightarrow{O'P}=d'\overrightarrow{q'}+dp\overrightarrow{a_1}+pd'\overrightarrow{a_1}$$

$$=(\sigma+dp)\overrightarrow{a_1}+(\sigma_2'+p\Im')\overrightarrow{a_2} \qquad \text{(VI.2.6)}$$

değişimlerinin kutup ekseninin $\overrightarrow{a_1}$ doğrultusunda olduğunu yani,

$$\sigma_2+p\Im=0 \quad , \quad \sigma_2'+p\Im'=0 \qquad \text{(VI.2.7)}$$

olduğunu ifade eder.

P koordinatları (VI.2.4) denklemine göre iki Pfaff-formun oranı şeklinde gösterilebilir. Karekterize edilen, B_1-hareketleri için (VI.2.7) şartlarını sağlamak zorundadır. (V.4) ün genel kaidesini uygularsak

$$p=(F-G)\frac{(\Im+\Im')\wedge(\sigma_2+p\Im)}{(\Im'-\Im)\wedge(\sigma_2+p\Im)}$$

$$=(F-G)\frac{(\Im+\Im')\wedge(\sigma_2'+p\Im')}{(\Im'-\Im)\wedge(\sigma_2'+p\Im')} \qquad \text{(VI.2.8)}$$

şeklinde yazabiliriz. Önce eşitliğin birinci tarafı için σ_2'nin (V.50) deki değerini yazarsak

$$p=(F-G)\frac{(\Im'+\Im)\wedge(F\Im-G\Im'+p\Im)}{(\Im'-\Im)\wedge(F\Im-G\Im'+p\Im)}$$

$$=(F-G)\frac{F(\Im'\wedge\Im)-G(\Im'\wedge\Im')+p(\Im'\wedge\Im)+F(\Im\wedge\Im)-G(\Im\wedge\Im')+p(\Im\wedge\Im)}{F(\Im'\wedge\Im)-G(\Im'\wedge\Im')+p(\Im'\wedge\Im)-F(\Im\wedge\Im)+G(\Im\wedge\Im')-p(\Im\wedge\Im)}$$

$$=(F-G)\frac{(F+p)(\mathfrak{I}'\wedge\mathfrak{I})-G(\mathfrak{I}\wedge\mathfrak{I}')}{(F+p)(\mathfrak{I}'\wedge\mathfrak{I})+G(\mathfrak{I}\wedge\mathfrak{I}')}$$

$$=(F-G)\frac{(F+p+G)(\mathfrak{I}'\wedge\mathfrak{I})}{(F+p-G)(\mathfrak{I}'\wedge\mathfrak{I})}$$

$$p=(F-G)\frac{F+p+G}{F+p-G}$$

buradan

$$Fp+p^2-Gp=F^2+Fp+GF-GF-Gp-G^2$$

$$p^2=F^2+Fp+GF-GF-Gp-G^2-Fp+Gp$$

$$p^2=F^2-G^2 \tag{VI.2.9}$$

sonucunu elde ederiz. Eşitliğin ikinci tarafı için benzer hesaplamalar yapılarak aynı sonucu elde ederiz.

Dolayısıyla aşağıdaki teorem verilebilir.

TEOREM VI.1.1:

Bir B_{II}-hareketinin her durumuna karşılık gelen kutup ekseni üzerinde oskülatör-B_I in polü olarak iki dönme polü bulunur. Bu oskülatör poller $F^2 \rangle G^2$ için reel ve $F^2 \langle G^2$ için eşlenik sanaldır. Q esas-polü her iki oskülatör-polün orta noktasıdır.

(VI.2.7) nini denklemleri arasında p büyüklüğü yok edilirse, oskülatör-B_I hareketi için

$$\sigma_2 + p\Im = 0 \qquad , \qquad \sigma_2' + p\Im' = 0$$

$$p = -\frac{\sigma_2'}{\Im'}$$

$$\sigma_2 - \frac{\sigma_2'}{\Im'}\Im = 0$$

$$\sigma_2\Im' - \sigma_2'\Im = 0 \qquad \text{(VI.2.10)}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. (V.50) den dolayı adi çarpım olarak

$$(F\Im - G\Im')\Im' - (G\Im - F\Im')\Im = 0$$

$$F\Im\Im' - G\Im'^2 - G\Im^2 + F\Im'\Im = 0$$

$$G\Im^2 - 2F\Im\Im' + G\Im'^2 = 0 \qquad \text{(VI.2.11)}$$

veya bunun yerine

$$Gd\varphi^2 - 2Fd\varphi\varphi' + Gd\varphi'^2 = 0 \qquad \text{(VI.2.12)}$$

ifadesi de yazılabilir.

VI.3. Lorentz Anlamında 1-Parametreli Hareketlerin Geodezikliği

2-parametreli B_{II}-hareketinin 1-parametreli B_I-hareketlerine, bu hareketlerin pol eğrileri tekabül eden kutup eksenlerine dik olursa geodezik adı verilir. Bu takdirde (VI.2.5) ve (VI.2.6) ifadesindeki bileşenler $\vec{a}_1$ vektörünün doğrultusunda daima sıfır olurlar. Bunlar

$$\sigma + dp = 0 \qquad \text{(VI.3.1)}$$

şartını verir.

(VI.2.7) denkleminin diferensiyeli alınırsa

$$d\sigma_2 + dp\Im + pd\Im = 0 \qquad \text{(VI.3.2)}$$

bulunur. $d\Im = 0$ ve $d\varphi = \Im$ olduğundan

$$d\sigma_2 + d\varphi dp = 0 \qquad \text{(VI.3.3)}$$

ve buradan da

$$dp = -\frac{d\sigma_2}{d\varphi} \qquad \text{(VI.3.4)}$$

elde edilir. (V.50) bağıntısının diferensiyeli alınırsa

$$\frac{d\sigma_2}{d\varphi} = F_\varphi \Im + F\frac{d\Im}{d\varphi} - G_\varphi \Im' - G\frac{d\Im'}{d\varphi} \qquad \text{(VI.3.5)}$$

bulunur. (III.2.9) ve (VI.3.5) ifadelerinden

$$dp = -F_\varphi \Im - F\frac{d\Im}{d\varphi} + G_\varphi \Im' + G\frac{d\Im'}{d\varphi}$$

$$dp = -F_\varphi d\varphi - F\frac{d(d\varphi)}{d\varphi} + G_\varphi (d\varphi') + G\frac{d(d\varphi')}{d\varphi} \qquad \text{(VI.3.6)}$$

yazılır. (V.49) ile (VI.3.6) ifadelerini (VI.3.1) de yerine koyarsak

$$-\left(F_{\varphi}+G_{\varphi'}\right)d\varphi+\left(F_{\varphi'}+G_{\varphi}\right)d\varphi'-F_{\varphi}d\varphi-F\frac{d(d\varphi)}{d\varphi}+G_{\varphi}d\varphi'+G\frac{d(d\varphi')}{d\varphi}=0$$

$$-F_{\varphi}d\varphi-G_{\varphi'}d\varphi+F_{\varphi'}d\varphi'+G_{\varphi}d\varphi'-F_{\varphi}d\varphi-F\frac{d(d\varphi)}{d\varphi}+G_{\varphi}d\varphi'+G\frac{d(d\varphi')}{d\varphi}=0$$

buradan da

$$2G_{\varphi}d\varphi'-2F_{\varphi}d\varphi-G_{\varphi'}d\varphi+F_{\varphi'}d\varphi'+G\frac{d(d\varphi')}{d\varphi}-F\frac{d(d\varphi)}{d\varphi}=0 \qquad \text{(VI.3.7)}$$

her iki taraf $d\varphi$ ile çarpılırsa

$$Gd^{2}\varphi'-Fd^{2}\varphi+2G_{\varphi}d\varphi d\varphi'-2F_{\varphi}(d\varphi)^{2}-G_{\varphi'}(d\varphi)^{2}+F_{\varphi'}d\varphi d\varphi'=0$$

bulunur. (VI.1.1) ifadesinden

$$\Im=\Im'$$

$$\Rightarrow d\varphi=d\varphi' \qquad \text{(VI.3.8)}$$

olur ki bu da $\varphi=\varphi'$ demektir. Dolayısıyla

$$Gd^{2}\varphi-Fd^{2}\varphi+2G_{\varphi}(d\varphi)^{2}-2F_{\varphi}(d\varphi)^{2}-2G_{\varphi}(d\varphi)^{2}+F_{\varphi}(d\varphi)^{2}=0$$

$$(G-F)d^{2}\varphi+G_{\varphi}(d\varphi)^{2}-F_{\varphi}(d\varphi)^{2}=0$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da

$$(G_\varphi - F_\varphi)(d\varphi)^2 + (G - F)d^2\varphi = 0$$

bulunur. Böylece ikinci mertebeden kısmi diferensiyel denklem elde edilmiş olur.

KAYNAKLAR

[1]HACISALİHOĞLU H.H:"Diferansiyel Geometri", İnönü Üniversitesi, Fen-Ed. Fakültesi, MALATYA, 1983.

[2]MÜLLER H.R. :"Kinematik Dersleri", Ankara Üniversitesi press, 1963

[3]ERGİN A.A :"Lorentz Düzleminde Kinematik Geometri", Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktara Tezi, 1989

[4]UĞURLU H.H :"Space-like Doğrultmanlı Bir Time-like Regle Yüzeye Bağlı Ani Dönme Vektörleri", Celal Bayar Üniversitesi Fen-edebiyat Fakültesi Dergisi, 1998, Sayı 4, Sayfa 88-97

[5]HACISALİHOĞLU H.H.:"Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş", Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, İSTANBUL, 1980

[6]ÖZER F. :"İki Parametreli Hareketlerin Kinematik Analizi", Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, ELAZIĞ, 1992

[7]CHURCHILL R.V. :"Karmaşık Değişkenler Ve Uygulamalar", Öğretmen Kitapları Dizisi, İSTANBUL, 1989

ÖZET

Bölüm I de temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Bölüm II de, öncelikle 1-parametreli B_I-hareketi ve 2-parametreli B_{II}-hareketi tartışılmış olup bu hareketlerin uzunlukları invaryant bıraktığı gösterilmiştir.

Bölüm III içerisinde kutup eksenlerinin özellikleri incelenmiş ve kutup eksenleri dönüşümünün yoğunluk değişmezliği gösterilmiş ve kutup eksenleri dönüşümünde doğru parçasının tayininin keyfi bir parametre atayarak mümkün olduğu elde edilmiştir.

Bölüm IV de Lorentz geometrisinde bir eğri elementini çizen noktalar anlatılmıştır.

Bölüm V de normlanmış izafe sistemi ve Bölüm VI da da 2-parametreli B_{II}-hareketinden çekilen 1-parametreli hareketler verilmiştir. S_I-kayma hareketi, Oskülatör-B_I-hareketi ve Geodezik–B_I-hareketi ile ilgili bağıntılar elde edilmiştir.

SUMMARY

In this study, firstly, the fundamental definitions and teorems are given.

In chapter II, 1-parameter B_I-motion and 2-parameter B_{II}-motion are discussed and it is represented that these motions are leave invariant distances.

In chapter III, the properties of the pole axis are examined. Then, density invariant of the pole axis transformation is presented and for the pole axis transformation, it is obtained that the segment determination is possible to appoint an orbitary parameter.

In chapter IV, the points that drawn a curve element in Lorentz geometry are described.

In chapter V and VI, respectively the normed relative system and 1-parameter motions obtained from 1-parameter B_{II}-motions are given. Also, the relations connected with S_I-slide motion, oscilatör B_I-motion and geodesic B_I-motion are obtained.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın yapılmasında ve düzenli bir şekilde yürütülmesinde yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Dr. Ali Paşa AYDIN'a minnet ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca çalışmalarımda bana yardımcı olan Arş. Gör. Esra Erkuş KALE'ye teşekkürü bir borç bilirim.

ÖZGEÇMİŞ

1973 Yılında Uşak ili Banaz ilçesinde doğdu. İlkokul ve ortaokul öğrenimini Banaz'da, lise öğrenimini İzmir'de tamamladı. 1991 yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü kazanıp 1995 yılında mezun oldu. 1996 yılında Milli Eğitim Bakanlığı'nda öğretmen olarak görev yapmaya başladı. 1998 bahar döneminde Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi'nin yüksek lisans sınavını kazandı. Halen Milli Eğitim Bakanlığı'nda öğretmen olarak görevine devam etmektedir.