ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SONLU FARK METODUNU KULLANARAK SİSMİK DALGA MODELLEMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan : Can AKTAŞ
Danışman : Yrd. Doç. Dr. İsmail DEMİR

ÇANAKKALE-2002

Bu çalışma Onsekiz Mart Üniversitesi Araştırma Fonu tarafından desteklenmiştir.

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne,

Bu araştırma, jürimiz tarafından Uygulamalı Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Hüsnü BAYSAL ....

Üye : Yrd. Doç. Dr. İsmail DEMİR ....

Üye : Doç. Dr. Yakup HACIYEV ....

Kod No: 69

Yukardaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ÖZ

Bu çalışmada ilk önce genel ortogonal koordinatlardaki dalga denkleminden hareketle 2-boyutlu kartezyen koordinatlardaki hareket denklemi elde edilmiştir. Ortamdaki dalga yayılımını daha iyi ifade etmek için hareket denklemi, akustik ve elastik dalga denklemlerine indirgenmiştir. Bu dalga denklemleri sonlu farklar metodu ve staggered grid metodu ile çözülmüştür. Daha sonra, birbirinden farklı ortamlar için 2-boyutlu akustik ve elastik dalga modellemesi yapılmıştır. Akustik ve elastik dalga modellemesi için, Fortran ve MathCAD programları kullanılarak çeşitli sismogram grafikleri elde edilmiştir. Bu grafikler yardımıyla, çeşitli ortamlardaki dalga yayılım ve yansımaları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Akustik Dalga Denklemi, Elastik Dalga Denklemi, Sonlu Farklar Metodu, Matematiksel Modelleme.

ABSTRACT

The wave equation has been obtained for the orthogonal coordinates in this research, and then two-dimensional wave equation has been obtained as an equation of motion the Cartesian coordinate system. Then, the equation of motion has been reduced to acoustic and elastic wave equations to represent the wave propagation in the media better. Then two dimensional acoustic and elastic wave modelling has been fulfilled for the different mediums. Fortran and MathCAD programming has been used for to obtain various seismogram graphics for the acoustic and elastic wave modelling. With the help of these graphs wave propagation and reflections has been investigated.

Keywords: Acoustic Wave Equation, Elastic Wave Equation, Finite Difference Method, Mathematical Modelling.

ÇİZELGELER

ŞEKİLLER

ŞEKİL NO	ŞEKİL ADI	SAYFA NO

1. GİRİŞ

Deprem odağından yayılan elastik dalgalar yerin iç yapısı hakkında en güvenilir bilgileri sağlar. Bu nedenle elastik dalgalardan yararlanılarak yerin içinin fiziksel özelliklerinin araştırılması, Sismolojinin önemli bir bölümünü oluşturur. Elastik (sismik) dalgaların kaynağı depremler olabileceği gibi yapay patlamalar da olabilir.

Jeofiziğin temel problemlerinden birisi gözlemsel verilerden yararlanarak ortamı veya kaynağı modellemektir. Bunun için yapılması gereken işlemler sırasıyla; matematiksel modeli oluşturmak, model parametrelerini belirlemek ve sayısal hesaplamalar yapmaktır. Sismolojide tasarlanan bir yer modelinden yapay sismogram hesaplanması sismik kesitlerin modellemesine yardımcı olmaktadır. Modellemede yoğunluk ve hızları belli olan yer kesiti ile bir nokta kaynak için iki boyutlu sismik tepki hesaplanarak araziden elde edilen gerçek sonuçlar karşılaştırılır. Sağlıklı sonuçlar elde etmek için; yeterli uygunluk sağlanana kadar işlem tekrarlanır. Yapay sismogram üretim yöntemlerini beş ayrı başlık altında toplamak mümkündür (Canıtez, 1992).

1- İntegral dönüşümleri
2- Mod toplama
3- Işın teorisi
4- Ayrık koordinat yöntemleri
    a. Sonlu elemanlar
    b. Sonlu farklar
    c. Spektral yöntemler
5- Melez yöntemler

Bunlardan sonlu farklar ve sonlu elemanlar en çok kullanılan yöntemlerdir. Çünkü bu yöntemler karmaşık jeolojik yapıların modellenmesinde kullanımı kolay olup, doğrusal ve doğrusal olmayan problemlerde yaygın olarak uygulanmaktadır. Son yıllarda bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle birlikte sayısal hesaplamalardaki zamanın azalması sonlu fark yaklaşımına olan ilgiyi arttırmıştır. Bu çalışmada akustik ve elastik dalga denklemleri sonlu fark yöntemi ile çözülmüştür. Sonlu fark yöntemi ile akustik ve elastik dalga yayınımı modellenirken grid dispersiyonu, model sınırları için sınır koşulları, uzaklık ve zaman örnekleme aralıkları dikkate alınmalıdır. Bunlar ilerki bölümlerde ele alınacaktır.

1.1 BAZI TEMEL KAVRAMLAR

1.1.1 SİSMOLOJİ VE SİSMOGRAM

Depremin nasıl oluştuğunu, deprem dalgalarının yeryuvarı içinde ne şekilde yayıldıklarını, ölçü aletleri ve ölçme yöntemlerini, kayıtların değerlendirilmesini ve deprem ile ilgili diğer konuları inceleyen bilim dalına "Sismoloji" denir.

Yapay sarsıntı ölçümü ilk kez 1845 yılında Mallet tarafından yapılmış olup, sismik dalgaların yansıma ve kırılmalarını ise 1899 yılında Knott açıklamıştır. Daha sonra sismik dalga teorisi 1907 yılında Zoeppritz Wieher tarafından ortaya atılmış ve I. Dünya Savaşı'nda Almanlar topraklarındaki askeri birliklerin yerlerini saptamak için sismik dalga yayınımından yararlanmışlardır. Sismik yansıma üzerine ilk kez 1913 yılında Reginald Fessender çalışmış ve 1920 yılında Korcher basit bir kayıt aleti yapmayı başarmıştır. Mintrop, 1924 yılında tuzun yüksek hızlı olmasından yararlanarak, bir tuz kütlesinin yerini sismik yöntemle saptamıştır. Daha önce kayıt aletlerinde çizgisel (analog) olarak kaydedilen sismik dalgalar 1953'lü yıllarda manyetik teyplerin kullanılmaya başlamasıyla sayısal (dijital) olarak kaydedilebilmiştir (Us, 1993).

Depremlerin kayıt edilmesinde kullanılan cihazlara sismograf adı verilir. Sismografların kaydettiği, zamana karşı sismik dalgaların değişimini gösteren kayıtlara da sismogram adı verilir.

1.1.2 ELASTİSİTE

Katı bir cismin büyüklüğü ve şekli bu cisme uygulanan dış kuvvet etkisi ile değişebilir. Cisim içerisinde, bu dış kuvvetlere karşı koyan iç kuvvetler meydana gelir. Dış kuvvet ortadan kaldırıldığı zaman cisim ilk haline dönmeye çalışır. Benzer olarak, bir sıvı içersinde hacim değişmelerine karşı koyan iç kuvvetler oluşur fakat şekil değişmelerine karşı koyan iç kuvvetler oluşmaz. Dış kuvvetlerin etkisi ile şekli ve büyüklüğü değişebilen, dış kuvvetler kalktıktan sonra eski haline dönmeye çalışan cisimlere elastik cisimler denir. Elastisite, hacim veya şekil değişikliğine direnme özelliği ve dış kuvvet ortadan kaldırıldığı zaman cismin eski haline dönmesi olarak tanımlanır.

Sismik yöntemle dalga hareketi incelenirken, başlangıçta olayı fazla karmaşık yapmamak için, ortamın elastik, homogen ve izotrop olduğu varsayılır. Homogenlik maddelerin her tarafında fiziksel özelliklerinin eşit olması, izotropluk ise maddenin fiziksel özelliklerinin ölçülen yöne bağımlı olmadan aynı olmasıdır.

1.1.3 GERİLME

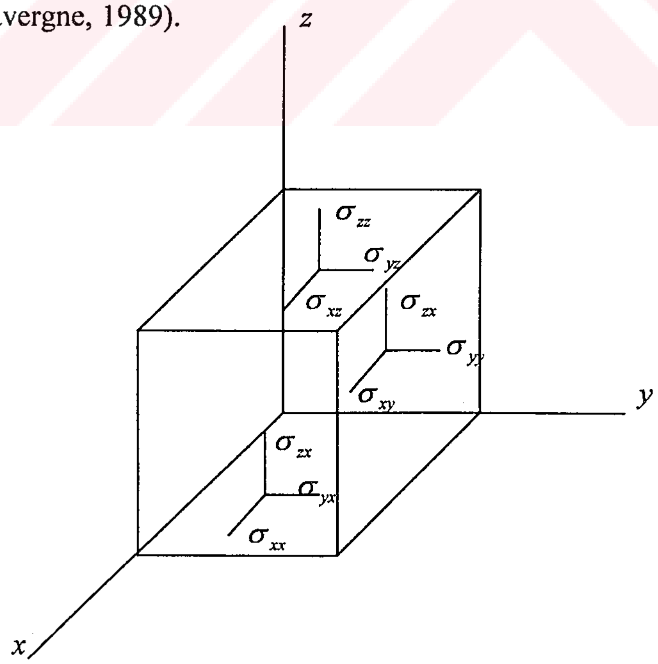
Gerilme birim alana uygulanan kuvvet olarak tanımlanır. Başka bir deyişle, cisme bir dış kuvvet uygulandığında kuvvetin uygulanan alana oranı gerilmeyi verir.

$$\sigma = \lim_{\delta s \to 0} \frac{\delta F}{\delta s}$$

dir. Burada δF birim kuvvet, δs birim yüzeydir. Eğer kuvvet alana dik ise bu gerilmeye normal gerilme veya basınç denir. Kuvvet alanın bir parçasına teğet olduğunda kayma gerilmesi adını alır. Gerilme tensörü birim küpün altı yüzüne uygulanan gerilmelerden oluşur (Şekil 1.1). Gerilme için kullanılan ilk indis gerilmenin doğrultusunu, ikinci indis ise gerilmenin etkidiği yüzeyi gösterir. Gerilme tensörü

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

dir (Lavergne, 1989).



Şekil 1.1 Gerilme tensörü bileşenleri

1.1.4 BİRİM DEFORMASYON (STRAIN)

Elastik bir cisim gerilme altında hacim ve şekil değişikliğine uğrar. Buna birim deformasyon, burulma veya yamulma denir. Deformasyon tensörü

$$E = \begin{pmatrix} E_{xx} & E_{xy} & E_{xz} \\ E_{yx} & E_{yy} & E_{yz} \\ E_{zx} & E_{zy} & E_{zz} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Birim küpteki x, y, z yönündeki yer değiştirmeler sırasıyla u, v, w ile ifade edilirse deformasyonların yer değiştirmeler cinsinden ifadesi aşağıdaki gibidir (Lavergne, 1989).

$$E_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad E_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad E_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$E_{xy} = E_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

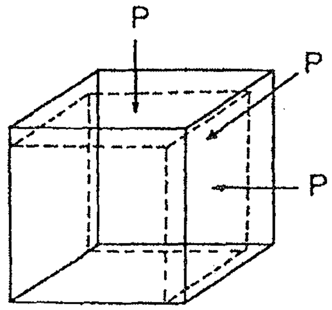
$$E_{yz} = E_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

$$E_{zx} = E_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right).$$

1.1.5 DALGA YAYINIMINDA TEMEL KAVRAMLAR

Sismik dalganın yayıldığı yer altındaki gerçek ortamın karmaşıklığına rağmen, dalga hareketini daha başlangıçta zora sokmamak için ortamlar homojen ve izotrop olarak kabul edilirler. Katı cisimlere herhangi bir kuvvet uygulandığında iki türlü davranış gözlenir. Birincisinde kuvvet uygulanan katı cismin şeklinde değişiklik olmadan hacmi değişir. İkinci türde ise hacim değişikliği olmaksızın şekil değişikliği gözlenir (Dobrin, 1976). Şekil 1.2'de görüldüğü gibi x, y, z boyutlarındaki küp şeklinde bir katı cisim, üç eksenli eşit bir basınç altında hacim küçülmesine uğramıştır.

Deprem sırasında açığa çıkan enerji, ses veya su dalgalarına benzeyen ve sismik dalgalar adı verilen dalgalar ile yayılır. Bu dalgalardan cisim dalgaları, P dalgaları (Primary) ve S dalgaları (Secondary) olarak ikiye ayrılır.



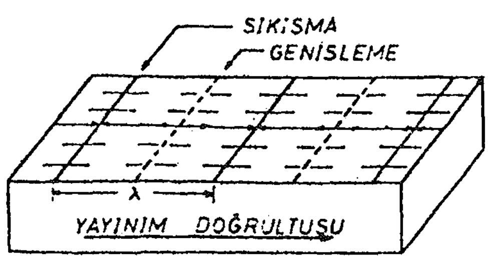
Şekil 1.2 Küp şeklinde bir katı cisme üç boyutta eşit bir basınç uygulanmasıyla meydana gelen hacim küçülmesi

1.2 BOYUNA DALGALAR (P-DALGALARI) (Longitudinal Waves)

P dalgaları, en hızlı yayılan bu yüzden deprem kayıt aletlerine ilk gelen dalgalardır. Bu tip dalgalar, sıkışma veya ilk dalgalar olarak bilinirler ve sadece "P" dalgası şeklinde ifade edilirler. P dalgalarında, titreşim hareketi yayılma doğrultusu ile aynıdır. Bu dalgaların yayınımı sırasında kübik genleşme veya hacim değişikliği (deformasyonu) olur. Boyuna dalgalarda sıkışma ve genleşmeyi temsil eden titreşim doğrultusu dalga yayınım doğrultusuyla aynıdır (Us, 1993). Şekil 1.3'de P dalgasının yayınım şekli görülmektedir. λ ve μ Lame parametresi, ρ ise yoğunluk olmak üzere P dalga hızı

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

şeklinde tanımlanır. P dalgaları sismik kırılma ve yansıma yöntemlerinde başlıca kullanılan dalgalardır.

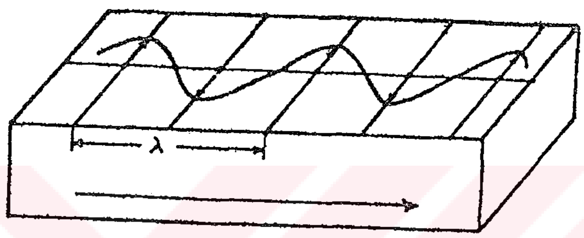


Şekil 1.3 P dalgası (boyuna dalga)

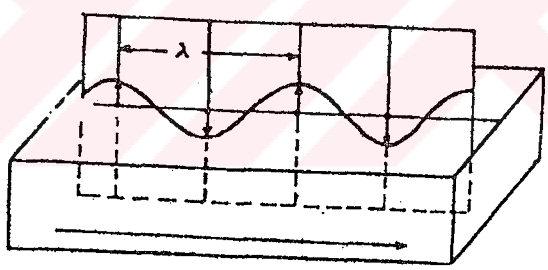
1.3 ENİNE DALGALAR (S) (Shear Waves)

P dalgalarına göre daha yavaş yayılan S dalgaları, kayıt aletlerine ikinci olarak gelen ve titreşim hareketi yayılma doğrultusuna dik olan dalgalardır . S dalgaları sıvı içinde yayılamazlar. Enine dalgaların yayınımı sırasında elemanlarda şekil bozulmaları, yani açılarda değişim gözlenir. Bunun nedeni dalga yayınımında parçacıkların titreşim doğrultusunun, dalga yayınım doğrultusuna dik olmasıdır. Bu tür dalgalar genellikle "S" dalgaları olarak adlandırılır (Us, 1993).

S dalgalarının yayınımında enine olan parçacık salınımı yatay düzlem üzerinde ise dalga SH adını alır (Şekil 1.4). Eğer parçacık hareketleri düşey düzlem üzerinde kalıyorsa SV dalgası olarak adlandırılır (Şekil 1.5).



Şekil 1.4 SH dalgası (yatay düzlemde)



Şekil 1.5 SV dalgası (düşey düzlemde)

S dalgasının V_s hızı aşağıdaki bağıntı ile verilir:

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

P ve S dalgalarının hızlarının birbirine oranı ise,

$$\frac{V_p}{V_s} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}}$$

dir.

1.4 DALGA YAYILMALARININ İNCELENDİĞİ ORTAMLAR

Yeryüzü üç çeşit kaya tabakasından oluşmuştur. Bunlar tortul kayalar, magmatik kayalar ve metamorfik kayalardır. Bu çalışmada kullandığımız kayalar tortul kayalardır. Tortul kayalarla ilgili bilgi aşağıda verilmiştir.

1.4.1 TORTUL KAYALAR

Üç genetik kaya ailesinden olan tortul kayalar, sedimantasyon sonucu meydana gelirler. Genellikle tabakalıdırlar ve çoğu kez fosil içerirler. Tortul kayalar diğer kayalara göre daha kolay anlaşılır. Çünkü çoğu yapıldığı materyal ile benzerlik gösterir. Dünyanın hemen hemen %75'i tortul kayalar ile kaplıdır. Tortul kayalar materyallerin yavaş yavaş birikmesiyle oluşur. Bu nedenle tortul kayalar genelde üst üste tabakalardan oluşur. Bu çalışmada adı geçen bazı kaya yapılarının özellikleri aşağıda verilmiştir.

Kumtaşı

Bu kayaç, çapları 2 mm - 2/16 mm arasında değişik bileşimli kum taneciklerinden oluşur. Bunlar bir birine çimento ile bağlanmıştır. Kumtaşı için P ve S dalga hızları

$V_p = 2770$ m/sn $\qquad V_s = 1100$ m/sn

dir.

Şeyl

Bu tortul kaya silt bileşiminde malzemeden oluşur. Şeyl 1 mm.'nin 1/16'sı kadar çapında küçük kaya parçacıklarından oluşur ve gözle görülebilir. Şeyl için P ve S dalga hızları

$V_p = 2440$ m/sn $\qquad V_s = 1400$ m/sn

dir.

Kireçtaşı

Kireçtaşı deniz suyunda bol bulunan kalsiyum karbonat, kimyasal ve organik olarak çökerek kireçtaşının oluşmasını sağlar. Gevrek ve gözenekli bir yapısı vardır. Kireçtaşı için P ve S dalga hızları

$V_p = 3400$ m/sn $\qquad V_s = 1730$ m/sn

dir.

1.5 ÇALIŞMANIN AMACI VE KAPSAMI

Sismik çalışmalarda modellemenin amacı, yeraltına yerleştirilmiş bir kaynak tarafından meydana getirilen hareketin, tabakalı bir ortam içinde veya serbest yüzeyde belirlenmesidir. Bu çalışmada sonlu fark metodu kullanılarak, yer altındaki çeşitli jeolojik yapılar 2-boyutlu akustik ve elastik dalga denklemleriyle modellenerek sonuçları elde edilmiştir. Bu sonuçlar arasında benzerlik ve farklılıklar bulunmuş ve bunların nedenleri araştırılmıştır.

Bu çalışmada ilk önce genel ortogonal koordinatlardaki dalga denklemi elde edilmiş, sonlu fark metodu ve staggered grid metodu anlatılmıştır. Daha sonra akustik ve elastik dalga denkleminin hangi şartlarda karalı çözümler vereceği tartışılmıştır. Bu bilgiler ışığında tekli ve çoklu ortam için 2-boyutlu akustik ve elastik dalga modellemesi yapılmıştır. Hem akustik hem de elastik dalga modellemesi için Fortran programlama dilinde (Ek 1 ve Ek 2) programlar yazılmış, buradan elde edilen veriler MathCAD programında işlenmiş ve çeşitli sismogram grafikleri üretilmiştir. Nümerik çözümlerden elde edilen bu grafikler yardımıyla, yapay olarak üretilen dalgaların değişik ortamlardaki yayılımı, yansıması ve kırılmaları incelenmiştir.

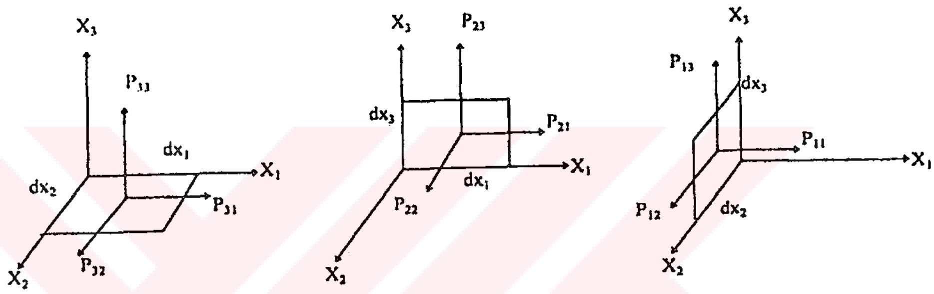
2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1 TEMEL HAREKET DENKLEMİ

2.1.1 CAUCHY HAREKET DENKLEMİ

Homogen ve izotrop bir ortamda yayılan dalganın hareketini tanımlayan denklem, Newton'un ikinci hareket kanunundan yararlanılarak bulunur.

Gerilme tensörü, ayrıtlarının uzunlukları dx_1, dx_2, dx_3 olan birim küpün altı yüzüne uygulanan gerilmelerden oluşur. **P** gerilme tensörü, ayrıtlarının uzunlukları dx_1, dx_2, dx_3 olan birim küpün (Şekil 2.1) altı yüzüne uygulanan P_{ij} gerilme bileşenlerinden oluşur. Kartezyen koordinatlarda $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$'dir. Gerilme için kullanılan ilk indis gerilmenin doğrultusunu, ikinci indis ise gerilmenin etkidiği yüzeyi gösterir.



Şekil 2.1 Ayrıtları dx_1, dx_2, dx_3 olan küp.

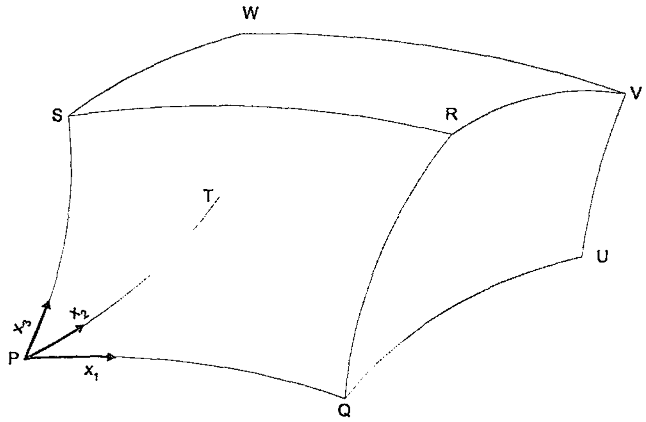
Kartezyen koordinatlardaki $\vec{r}$ yer vektörü, $\vec{r} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ şeklindedir. Burada **i**, **j**, **k**'lar standart birim vektörlerdir. Bu taktirde yay elemanı;

$$(ds)^2 = \sum_n h_n^2 (dx_n)^2 \tag{2.1}$$

dir. Burada h_n^2

$$h_n^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial x_n}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)^2 \tag{2.2}$$

olarak tanımlanır.



Şekil 2.2 Bir basit ortogonal küp

Şekil 2.2'deki küpün P, Q, R, S, T, U, V ve W noktalarının koordinatları,

P(x_1, x_2, x_3), Q(x_1+dx_1, x_2, x_3), R(x_1+dx_1, x_2, x_3+dx_3),

S(x_1, x_2, x_3+dx_3), T(x_1, x_2+dx_2, x_3), U(x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3),

V(x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3), W(x_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3).

ile verilir. $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ ortogonal sistemdeki bir ortogonal birim vektör üçlüsü olsun. P_{ij}' den dolayı kübe uygulanan kuvvetler

$$(AlanPQRS)\left(P_{21}\mathbf{e}_1+P_{22}\mathbf{e}_2+P_{23}\mathbf{e}_3\right)',$$

$$(AlanPSWT)\left(P_{11}\mathbf{e}_1+P_{12}\mathbf{e}_2+P_{13}\mathbf{e}_3\right)',$$

$$(AlanPQUT)\left(P_{31}\mathbf{e}_1+P_{32}\mathbf{e}_2+P_{33}\mathbf{e}_3\right)'$$

dir. Burada $(')$ işareti etkinin (x_1, x_2, x_3) noktasındaki yüzeyler üzerinde hesaplandığını gösterir. Benzer şekilde dx_1, dx_2, dx_3 artımı verilmiş yüzeyler üzerindeki kuvvetler

$$(AlanTUVW)\left(P_{21}\mathbf{e}_1+P_{22}\mathbf{e}_2+P_{23}\mathbf{e}_3\right)'',$$

$$(AlanRQUV)\left(P_{11}\mathbf{e}_1+P_{12}\mathbf{e}_2+P_{13}\mathbf{e}_3\right)'',$$

$$(AlanSRVW)\left(P_{31}\mathbf{e}_1+P_{32}\mathbf{e}_2+P_{33}\mathbf{e}_3\right)''$$

olarak yazılır. $('')$ işareti etkinin sonsuz küçük artma verilen yüzeyler üzerinde hesaplandığını gösterir.

Taylor açılımındaki birinci mertebe terimler yardımıyla, kuvvetteki değişim x_2 koordinatı için yaklaşık olarak aşağıdaki gibi verilir.

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}\left[Alan_1\left(P_{21}\mathbf{e}_1+P_{22}\mathbf{e}_2+P_{23}\mathbf{e}_3\right)\right]\right\}dx_2$$

Benzer şekilde, x_1 ve x_3 koordinatları için aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left[Alan_2\left(P_{11}\mathbf{e}_1+P_{12}\mathbf{e}_2+P_{13}\mathbf{e}_3\right)\right]\right\}dx_1$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}\left[Alan_3\left(P_{31}\mathbf{e}_1+P_{32}\mathbf{e}_2+P_{33}\mathbf{e}_3\right)\right]\right\}dx_3.$$

PQRS için $\text{Alan}_1= h_1h_3dx_1dx_3$, PSWT için $\text{Alan}_2=h_2h_3dx_2dx_3$ ve PQUT için $\text{Alan}_3=h_1h_2dx_1dx_2$ şeklindedir. Buradaki kübün hacmi, $dV=h_1h_2h_3dx_1dx_2dx_3$'dür. Böylece değişimler birinci mertebe yaklaşımla aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(h_1h_3P_{21}\mathbf{e}_1+h_1h_3P_{22}\mathbf{e}_2+h_1h_3P_{23}\mathbf{e}_3\right)dx_1dx_2dx_3, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(h_2h_3P_{11}\mathbf{e}_1+h_2h_3P_{12}\mathbf{e}_2+h_2h_3P_{13}\mathbf{e}_3\right)dx_1dx_2dx_3, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(h_1h_2P_{31}\mathbf{e}_1+h_1h_2P_{32}\mathbf{e}_2+h_1h_2P_{33}\mathbf{e}_3\right)dx_1dx_2dx_3. \tag{2.5}$$

Buradan kübe uygulanan net kuvvetin (2.3), (2.4) ve (2.5) denklemlerinin toplamına eşit olduğu kolayca görülebilir. Newton'un ikinci kanunundan

$$\rho\, dV\,\mathbf{a}=\text{Net Kuvvet} \tag{2.6}$$

yazılır. Burada ρ yoğunluk, $\mathbf{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ ivme vektörü ve dV, P noktasında hesaplanan küpün hacmidir. Her iki taraf dV'ye bölünüp $dV\to 0$ halinde limit alınırsa

$$\rho\mathbf{a}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(h_2h_3P_{11}\mathbf{e}_1+h_2h_3P_{12}\mathbf{e}_2+h_2h_3P_{13}\mathbf{e}_3\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(h_1h_3P_{21}\mathbf{e}_1+h_1h_3P_{22}\mathbf{e}_2+h_1h_3P_{23}\mathbf{e}_3\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(h_1h_2P_{31}\mathbf{e}_1+h_1h_2P_{32}\mathbf{e}_2+h_1h_2P_{33}\mathbf{e}_3\right)\right\} \tag{2.7}$$

elde edilir (Astin, 1974). (2.7)' nin bileşenleri aşağıda verilmiştir.

$$\rho a_1=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(h_2h_3P_{11}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(h_1h_3P_{12}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(h_2h_1P_{13}\right)\right\}$$
$$+\frac{P_{12}}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial x_2}+\frac{P_{13}}{h_1h_3}\frac{\partial h_1}{\partial x_3}-\frac{P_{22}}{h_1h_2}\frac{\partial h_2}{\partial x_1}-\frac{P_{33}}{h_1h_3}\frac{\partial h_3}{\partial x_1} \tag{2.8}$$

$$\rho a_2 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 h_3 P_{12}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(h_1 h_3 P_{22}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(h_2 h_1 P_{23})\right\}$$

$$+\frac{P_{12}}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial x_1} + \frac{P_{23}}{h_2 h_3}\frac{\partial h_2}{\partial x_3} - \frac{P_{11}}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial x_2} - \frac{P_{33}}{h_2 h_3}\frac{\partial h_3}{\partial x_1}, \tag{2.9}$$

$$\rho a_3 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 h_3 P_{13}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(h_1 h_3 P_{23}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(h_2 h_1 P_{33})\right\}$$

$$+\frac{P_{13}}{h_1 h_3}\frac{\partial h_3}{\partial x_1} + \frac{P_{23}}{h_2 h_3}\frac{\partial h_3}{\partial x_2} - \frac{P_{11}}{h_1 h_3}\frac{\partial h_1}{\partial x_3} - \frac{P_{22}}{h_2 h_3}\frac{\partial h_2}{\partial x_3}. \tag{2.10}$$

Buradan Cauchy hareket denklemi vektörel olarak

$$\rho \mathbf{a} = div\ (\mathbf{P}) \tag{2.11}$$

dir. Küçük bir $\mathbf{u}$ yer değişimi için $\mathbf{a} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$ olduğundan (2.11) Cauchy hareket denklemi

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla.\mathbf{P} \tag{2.12}$$

şeklinde yazılır.

2.1.2 GERİLME (STRESS) VE BİRİM DEFORMASYON (STRAIN) ARASINDAKİ BAĞINTILAR

Gerilme (stress) ve deformasyon (strain) tensör bileşenlerini sırasıyla P_{ij} ve E_{ij} ile gösterelim. Bir basit elastik ortam modeli için gerilme ve deformasyon tensörleri simetrik olduğundan P_{ij} ve E_{ij}'nin altı bileşeni vardır.

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left[(\nabla \mathbf{u})_{ij} + (\nabla \mathbf{u})_{ji}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{pmatrix}$$

dir. Gerilme ve deformasyon arasındaki bağıntı Hooke Yasası ile ifade edilir (Demir, 1998).

2.1.3 HOOKE YASASI

Hooke yasası; deformasyon (strain) çok küçük olduğunda deformasyon ve gerilme arasında lineer bir bağıntının varlığını ifade eder. İzotropik olmayan ortamda gerilme ve deformasyon arasındaki lineer bağıntı 21 parametreye, izotropik ortamda 5 parametreye ve homogen izotropik ortamda sadece 2 parametreye bağlıdır (Lavergne, 1989). Homogen izotropik ortam için Hooke yasası

$$P_{ij} = \lambda\Phi\delta_{ij} + 2\mu E_{ij}$$

$$\Phi = E_{11} + E_{22} + E_{33} = div(\mathbf{u})$$

şeklinde yazılır. Burada δ_{ij} Kronecker deltası, λ ve μ Lame parametreleri ve Φ birim küpteki hacim değişikliğidir. Lame parametreleri izotropik katıların elastik özelliklerini tanımlar. μ katılık (sertlik) katsayısı olarak adlandırılır ve

$$\mu = \frac{1}{2}\frac{P_{12}}{E_{12}}$$

şeklinde verilir. λ ve μ parametrelerinin büyüklükleri genellikle 10^9 ve 10^{11} N/m^2 arasındadır.

Hooke yasası kartezyen koordinatlarda, yer değiştirme ile gerilmeler arasında 6 lineer denklemden oluşur. Bunlar aşağıdaki gibidir.

$$P_{11} = \lambda\Phi + 2\mu\frac{\partial u_1}{\partial x},$$

$$P_{22} = \lambda\Phi + 2\mu\frac{\partial u_2}{\partial y},$$

$$P_{33} = \lambda\Phi + 2\mu\frac{\partial u_3}{\partial z},$$

$$P_{12} = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\right),$$

$$P_{13} = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y}\right),$$

$$P_{23} = \mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z}\right).$$

2.1.4 KARTEZYEN KOORDİNATLARDAKİ HAREKET DENKLEMİ

Kartezyen koordinatlar için $h_1= h_2= h_3=1$ ve (x_1, x_2, x_3)'lere karşılık (x, y, z)'ler karşılık gelir. (2.12) Cauchy hareket denkleminden gerilmeye bağlı hareket denklemi aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right) &= \frac{\partial P_{11}}{\partial x} + \frac{\partial P_{12}}{\partial y} + \frac{\partial P_{13}}{\partial z} \\
\rho\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\right) &= \frac{\partial P_{12}}{\partial x} + \frac{\partial P_{22}}{\partial y} + \frac{\partial P_{23}}{\partial z} \\
\rho\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}\right) &= \frac{\partial P_{13}}{\partial x} + \frac{\partial P_{23}}{\partial y} + \frac{\partial P_{33}}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Hooke yasasından, gerilme ve deformasyon arasındaki bağıntılar ise

$$
\begin{aligned}
P_{11} &= \lambda\Phi + 2\mu E_{11} \\
P_{22} &= \lambda\Phi + 2\mu E_{22} \\
P_{33} &= \lambda\Phi + 2\mu E_{33} \\
P_{13} &= 2\mu E_{13} \\
P_{12} &= 2\mu E_{12} \\
P_{23} &= 2\mu E_{23} \\
\Phi &= E_{11} + E_{22} + E_{33}
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Gerilme tensörleri ise

$$
E_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \qquad E_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \qquad E_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{12} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right], \\
E_{23} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y}\right], \\
E_{13} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\right].
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlıdır. Bu denklemler (2.13) denklemlerinde yerine yazılırsa 3-boyutlu kartezyen koordinatlardaki hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right)+(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x\partial z}\right)\\
\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right)+(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial y\partial z}\right)\\
\rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}\right)+(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y\partial z}\right)
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

(2.14) denkleminde $V_p=\sqrt{\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ ve $V_s=\sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$ yazılıp düzenlenirse,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= V_p^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+V_s^2\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right)+\left(V_p^2-V_s^2\right)\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial x\partial z}\right)\\
\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= V_p^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+V_s^2\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right)+\left(V_p^2-V_s^2\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial y\partial z}\right)\\
\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= V_p^2\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}+V_s^2\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}\right)+\left(V_p^2-V_s^2\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y\partial z}\right)
\end{aligned}
$$

3-boyutlu elastik dalga denklemi elde edilir. Bu denklemlerde $V_p^2=V_s^2$ alınmasıyla da

$$
\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=V_p^2\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2}\right), \qquad i=1,2,3
$$

şeklindeki akustik dalga denklemi elde edilir.

2.1.5 ORTOGONAL KOORDİNATLARDA SOĞURAN (ABSORBING) SINIR KOŞULLARI

Dalga problemleri normalde sonsuz ortamlar için çözülür. Fakat bilgisayarda nümerik çözümler sınırlı bir ortamda gerçekleştirilebilir. Bu durumda ise, bilinen sınır koşulları (Dirichlet ve Neumann sınır koşulları) etkisiyle, kırılan dalgalar ve istenmeyen çözümler oluşabilir. Bundan dolayı, sonlu ortamda dalga problemlerindeki kırılmaları önlemek için soğuran sınır koşullarına ihtiyaç duyulur.

Sonlu fark metotlarında, dalga denklemleri için soğuran sınır koşulları bir çok bilim adamı tarafından geliştirilmiştir (Clayton ve Engquist, 1977). Daha sonra kartezyen koordinatlar için farklı sınır koşulları geliştirilmiştir (Reynolds, 1978). Reynolds sınır koşullarının avantajı kolay ve anlaşılabilir olmasıdır.

2.1.6 SOĞURAN SINIR KOŞULLARI YAKLAŞIMI

Öncelikle Reynolds yaklaşımını kullanarak genel ortogonal koordinatlar için soğuran sınır koşulları yaklaşımı geliştirmeye çalışacağız. Daha sonra bunun bir özel hali olan Kartezyen koordinatlar için Reynolds yaklaşımını elde edeceğiz.

Kartezyen koordinatlardaki dalga denklemi

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \tag{2.15}$$

dir. Bu denklemi ortogonal koordinatlara genelleştirmek için aşağıdaki işlemler yapılmıştır.

$\tau = ct$ ve $H = h_1 h_2 h_3$ olan 3-boyutlu dalga denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}=L[u]=L_1[u]+L_2[u]+L_3[u] \tag{2.16}$$

Buradaki $L_i[u]$ operatörü de aşağıdaki gibidir.

$$L_i[u]=\frac{1}{h_i^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\ln\left(\frac{H}{h_i^2}\right)\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right). \tag{2.17}$$

Bu operatör

$$M_i[u]=\frac{1}{h_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}+A_i u\right) \tag{2.18}$$

ve

$$M_i^2[u]=\frac{1}{h_i^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\left(2A_i-\frac{\partial}{\partial x_i}(\ln(h_i))\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\frac{u}{h_i^2}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_i}+A_i^2-A_i\frac{\partial}{\partial x_i}(\ln(h_i))\right) \tag{2.19}$$

olmak üzere

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}=L_i[u]=M_i^2[u]+B_i[u] \tag{2.20}$$

şeklinde yazılır. (2.17) ve (2.19) karşılaştırıldığında

$$2A_i-\frac{\partial}{\partial x_i}(\ln(h_i))=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\ln\left(\frac{H}{h_i^2}\right)\right)$$

$$B_i=\frac{1}{h_i^2}\left(A_i\frac{\partial}{\partial x_i}(\ln(h_i))-A_i^2-\frac{\partial A_i}{\partial x_i}\right)$$

olduğu görülür. Böylece

$$A_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\ln\sqrt{\frac{H}{h_i}}\right)$$

şeklini alır. (2.16) dalga denklemi

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \sqrt{L}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \sqrt{L}\right)[u] = 0 \qquad (2.21)$$

olarak yazılır. Verilen sınır koşulları da

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} \pm \sqrt{L}\right)[u] = 0, \quad x_i = \pm a \qquad (2.22)$$

şeklindedir. (2.22) denklemi ile M_i çarpılırsa

$$\left(\frac{\partial M_i}{\partial \tau} \pm M_i\sqrt{L}\right)[u] = 0$$

sınır koşulları elde edilir. Özel bir yaklaşım olan Reynolds yaklaşımı, $\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}$ yerine $M_i^2 + \frac{p}{p+1}B_i$ alınmasıyla elde edilir (Reynolds, 1978). Buna göre (2.20) denkleminden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \left(M_i^2 + B_i\right)[u] \quad \text{ve} \quad B_i[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - M_i^2[u]$$

ve $M_i\sqrt{L}$ yaklaşımı yerine de

$$M_i^2 + \frac{p}{p+1}\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - M_i^2\right) = \frac{p}{p+1}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{1}{p+1}M_i^2$$

elde edilir. Son olarak sınır şartları aşağıdaki şekli alır.

$$\left(\frac{\partial M_i}{\partial \tau} \pm \frac{1}{p+1}\left(p\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + M_i^2\right)\right)[u] = 0 \qquad (2.23)$$

Ortogonal koordinatlarda τ yerine ct alındığında yaklaşık sınır koşulları

$$\frac{p}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \pm \frac{p+1}{c}\frac{\partial}{\partial t}M_i[u] + M_i^2[u] = 0 \qquad (2.24)$$

olarak bulunur (Demir, 1998).

2.1.7 KARTEZYEN KOORDİNATLARDA SINIR KOŞULLARI

Kartezyen koordinatlardaki soğuran sınır koşulları yaklaşımı, (2.24) denkleminde

$h_1 = h_2 = h_3 = 1$ ve $H = 1$,

$A_1 = A_2 = A_3 = 0$, $M_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $M_2 = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, $M_3 = \dfrac{\partial u}{\partial z}$.

yazılarak bulunur. Böylece $x = \pm a$ için

$$\frac{p}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \pm \frac{p+1}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (2.25)$$

olur. Benzer şekilde $y = \pm a$ 'da

$$\frac{p}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \pm \frac{p+1}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (2.26)$$

ve $z = \pm a$ 'da

$$\frac{p}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \pm \frac{p+1}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \ . \qquad (2.27)$$

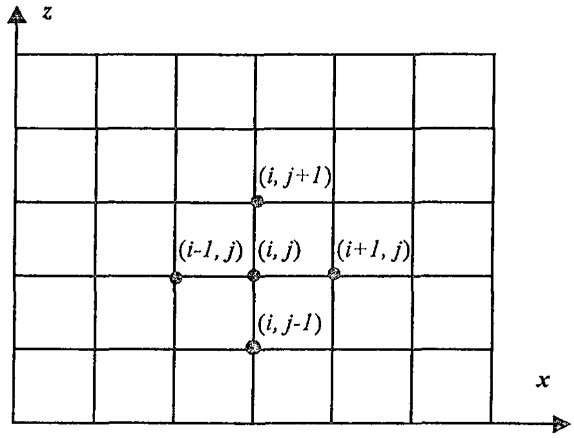
buluruz (Reynolds, 1978).

2.2 SONLU FARKLAR YÖNTEMİ

Sonlu farklar uygulamaları ilk kez Daniel ve Jacob Bernoulli, Leonard Euler, Jacobo Stirling gibi bilim adamları tarafından yapılmıştır. Türev ve integral alma, iç ve dış değer bulma, sayısal veriye polinom uydurma gibi mühendislik alanlarında sık sık karşılaşılan problemler, sonlu farklar yaklaşımı ile çözülebilir. Kısmi diferansiyel denklemler için de pek çok sayısal hesaplama teknikleri vardır. Fakat gerek lineer gerekse lineer olmayan problemlerde en sık kullanılan yöntem sonlu farklardır. Son yıllarda gelişen bilgisayar teknolojisi ve buna bağlı olarak ortaya çıkan hızlı ve süper bilgisayarlar, sayısal hesaplamaları daha cazip hale sokarken, özellikle sonlu farklar yaklaşımı ile ilgili çalışmaların artışındaki en etkili neden olmuştur (Canıtez, 1992).

2.2.1 SONLU FARKLAR GRİDİ

Ortamın (medyanın) x yönünde her birinin büyüklüğü Δx olan M tane parçaya ve z yönünde büyüklüğü Δz olan N tane parçaya ayrılmasıyla oluşan gridler Şekil 2.3'de gösterilmiştir. Burada x yönünde $M+1$ tane, z yönünde $N+1$ tane grid noktası vardır.



Şekil 2.3 Sonlu Farklar Gridi

Ortamın x yönünde M, z yönünde N parçaya bölünmesiyle oluşan grid noktalarını

$$x_i = i.\Delta x, \qquad i = 0, 1, \ldots, M \tag{2.28}$$

$$z_j = j.\Delta z, \qquad j = 0, 1, \ldots, N \tag{2.29}$$

şeklinde tanımlayalım. Δt zaman artışını göstermek üzere

$$t = n.\Delta t \qquad n = 0, 1, \ldots$$

şeklindedir. Genellikle $\Delta x = h$, $\Delta z = k$ ile gösterilir ve $h = \dfrac{X_M}{M}$, $k = \dfrac{Z_N}{N}$ şeklindedir. Burada X_M ve Z_N sırasıyla modellenen ortamın enini ve boyunu ifade eder.

(2.28) ve (2.29) denklemleri ile verilen doğruların kesiştiği noktaya (i, j) grid noktası denir. (i, j) grid noktasının üstündeki nokta $(i, j+1)$, altındaki nokta $(i, j-1)$ noktasıdır. Benzer şekilde $(i+1, j)$ ve $(i-1, j)$ noktaları sırasıyla (i, j) noktasının sağ ve solundaki noktalardır. u fonksiyonunun (i, j)-inci grid noktasındaki değeri $u_{i,j}^{n}$ ile gösterilir.

2.2.2 TÜREVLER İÇİN SONLU FARKLAR YAKLAŞIMI

x ve z'nin sonlu ve sürekli türevlerine sahip olan $u(x,z,t)$ analitik çözümünü ele alalım. Kısmi türevlere sonlu fark yaklaşımı Taylor seri açılımı ile olur. u fonksiyonunun x yönündeki birinci mertebe kısmi türevi sonlu farklar ile aşağıdaki gibi üç şekilde verilir.

i) Merkezi Farklar Yaklaşımı

$$\frac{\partial u_{i,j}^{n}}{\partial x}=\frac{u_{i+1,j}^{n}-u_{i-1,j}^{n}}{2h}+O(h^2)$$

ii) İleri Farklar Yaklaşımı

$$\frac{\partial u_{i,j}^{n}}{\partial x}=\frac{u_{i+1,j}^{n}-u_{i,j}^{n}}{h}+O(h)$$

iii) Geri Farklar Yaklaşımı

$$\frac{\partial u_{i,j}^{n}}{\partial x}=\frac{u_{i,j}^{n}-u_{i-1,j}^{n}}{h}+O(h)$$

Burada $O(h^2)$ ve $O(h)$'lar hata terimleridir. Hata grid büyüklüğüne bağlıdır. Teorik olarak $h\rightarrow 0$ için hata yok kabul edilir.

Buna göre u'nun t'ye göre ikinci mertebe kısmi türevinin sonlu farklar ile ifadesi

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}^{n}}{\partial t^2}=\frac{u_{i,j}^{n+1}-2u_{i,j}^{n}+u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2}+O(\Delta t^2)$$

şeklindedir. Burada

$u_{i,j}^{n+1}$: u fonksiyonunun (i, j) noktasındaki $(n+1)$-inci zaman adımındaki değeridir.

$u_{i,j}^{n}$: u fonksiyonunun (i, j) noktasındaki (n)-inci zaman adımındaki değeridir.

$u_{i,j}^{n-1}$: u fonksiyonunun (i, j) noktasındaki $(n-1)$-inci zaman adımındaki değeridir.

Benzer şekilde u'nun x'e göre ikinci mertebe kısmi türevi

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}^{n}}{\partial x^2}=\frac{u_{i+1,j}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i-1,j}^{n}}{h^2}+O(h^2)$$

ve u'nun x'e ve z'ye göre ikinci mertebe kısmi türevi

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}^{n}}{\partial x\partial z}=\frac{u_{i+1,j+1}^{n}-u_{i+1,j-1}^{n}-u_{i-1,j+1}^{n}+u_{i-1,j-1}^{n}}{4hk}+O(hk)$$

şeklindedir (Morton ve Mayers, 1994).

2.2.3 DALGA DENKLEMİNİN SONLU FARKLAR İLE İFADE EDİLMESİ

2-boyutlu akustik dalga denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V_P^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{2.30}$$

şeklindedir. Burada t zaman, x ve z yatay ve düşey yöndeki mesafe, u yer değiştirme büyüklüğü ve V_P ise dalga hızıdır. İkinci mertebe kısmi türevlerin sonlu farklar ile gösterilmesi aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}^n}{\partial t^2} \approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2}, \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}^n}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{h^2}, \tag{2.32}$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}^n}{\partial z^2} \approx \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{k^2}. \tag{2.33}$$

(2.30) 2-boyutlu akustik dalga denklemindeki kısmi türevler yerine (2.31), (2.32) ve (2.33)'deki sonlu fark denklemlerini yazalım. Böylece

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t^2} = V_P^2\left[\left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{h^2}\right) + \left(\frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{k^2}\right)\right]$$

bu denklem düzenlenirse

$$u_{i,j}^{n+1} = 2u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1} + \frac{V_P^2\Delta t^2}{h^2}\left(u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n\right) + \frac{V_P^2\Delta t^2}{k^2}\left(u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n\right)$$

bulunur. $p_1 = \frac{V_P^2\Delta t^2}{h^2}$ ve $p_2 = \frac{V_P^2\Delta t^2}{k^2}$ ile gösterilirse

$$u_{i,j}^{n+1} = 2u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1} + p_1\left(u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n\right) + p_2\left(u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n\right)$$

elde edilir.

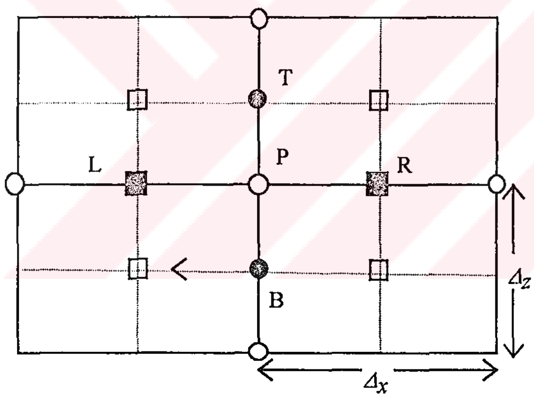
2.2.4 STAGGERED GRİD METODU

Staggered grid metodu sonlu farklar metodundaki grid aralığının yarıya bölünmesiyle elde edilir. Böylece sonlu farklar metodundaki her bir Δx grid noktasında hesaplanan değerler staggered grid metodu ile $\Delta x/2$ grid noktasında hesaplanır. Bunun doğal sonucu olarak staggered grid metodu sonlu farklara göre daha duyarlı sonuçlar verir. Şekil 2.4 ve Şekil 2.5'de u ve w için staggered grid metodun nasıl bir yapıya sahip olduğu verilmiştir. Bu metot ortam özelliklerindeki parçalı süreksizlikler için tam ve kararlı sonuçlar verir (Stephen, 1983).

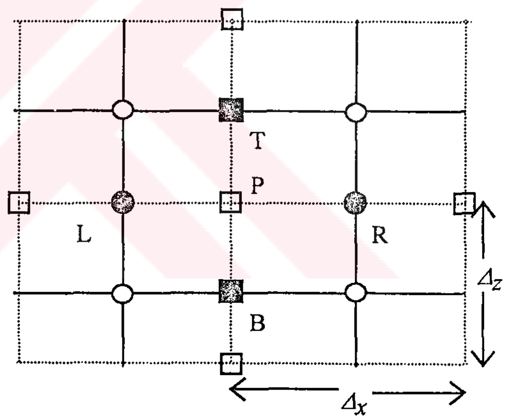
Sonlu fark metodu Poisson oranının 0.25'den daha büyük olduğu durumlarda kararlı değildir. Bu kararlılık problemi staggered grid metodu kullanılarak ortadan kaldırılabilir. Poisson oranı

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

şeklinde tanımlıdır (Stephen, 1983). Buradaki λ ve μ Lame parametreleridir.



Şekil 2.4 u için Stagered Grid şekli



Şekil 2.5 w için Stagered Grid şekli

2-boyutlu kartezyen koordinatlarda momentum korunum denklemleri,

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial P_{11}}{\partial x} + \frac{\partial P_{13}}{\partial z}, \tag{2.34}$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial P_{13}}{\partial x} + \frac{\partial P_{33}}{\partial z} \tag{2.35}$$

şeklindedir. Gerilme-deformasyon bağıntıları aşağıdadır.

$$P_{11} = \lambda\Phi + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$P_{33} = \lambda\Phi + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$P_{13} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right).$$

Aralarında Δx grid aralığı bulunan P'nin sağ ve solundaki noktalar L ve R , alt ve üstündeki noktalar B ve T (Şekil 2.4 ve Şekil 2.5) olmak üzere ikinci mertebe Taylor seri yaklaşımı ile x'e ve z'ye göre birinci mertebe kısmi türevler yaklaşık olarak

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T_R - T_L}{2\Delta x}, \qquad \frac{\partial T}{\partial z} \approx \frac{T_T - T_B}{2\Delta z}$$

şeklindedir. Benzer yolla zamana göre ikinci mertebe türev

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)_P^n = \frac{T_P^{n+1} - 2T_P^n + T_P^{n-1}}{\Delta t^2}$$

dir. Burada

T_P^{n+1} : $(n+1)$-inci zaman adımındaki P noktasındaki T'nin türevi

T_P^n : (n)-inci zaman adımındaki P noktasındaki T'nin türevi

T_P^{n-1} : $(n-1)$-inci zaman adımındaki P noktasındaki T'nin türevidir.

Bu durumda

$$\frac{\partial P_{11}}{\partial x} = \frac{(P_{11})_R - (P_{11})_L}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial P_{13}}{\partial z} = \frac{(P_{13})_T - (P_{13})_B}{2\Delta z}$$

$$\frac{\partial P_{13}}{\partial x} = \frac{(P_{13})_R - (P_{13})_L}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial P_{33}}{\partial z} = \frac{(P_{33})_T - (P_{33})_B}{2\Delta z}$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklemler (2.34) ve (2.35) denklemelerinde yerine yazılırsa,

$$\rho\left[\frac{u_P^{n+1} - 2u_P^n + u_P^{n-1}}{\Delta t^2}\right] = \frac{(P_{11})_R^n - (P_{11})_L^n}{2\Delta x} + \frac{(P_{13})_T^n - (P_{13})_B^n}{2\Delta z}$$

$$\rho\left[\frac{w_P^{n+1} - 2w_P^n + w_P^{n-1}}{\Delta t^2}\right] = \frac{(P_{13})_R^n - (P_{13})_L^n}{2\Delta x} + \frac{(P_{33})_T^n - (P_{33})_B^n}{2\Delta z}$$

elde edilir (Demir, 1998). Buradaki $(P_{11})_L$, $(P_{11})_R$, $(P_{13})_T$, $(P_{13})_B$, $(P_{13})_L$, $(P_{13})_R$, $(P_{33})_L$, $(P_{33})_R$ 'ler aşağıdaki gibidir.

$$(P_{11})_L^n = \lambda\Phi_L + 2\mu\left(\frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x}\right),$$

$$(P_{11})_R^n = \lambda\Phi_R + 2\mu\left(\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta x}\right),$$

$$(P_{33})_T^n = \lambda\Phi_T + 2\mu\left(\frac{w_{i,j+1}^n - w_{i,j}^n}{\Delta z}\right),$$

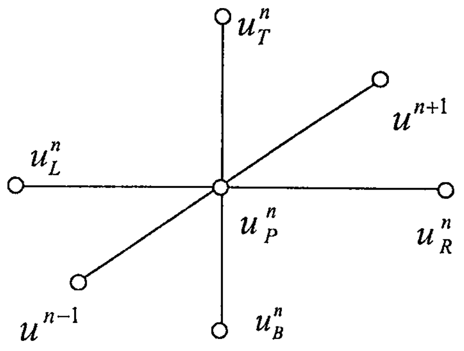
$$(P_{33})_B^n = \lambda\Phi_T + 2\mu\left(\frac{w_{i,j}^n - w_{i,j-1}^n}{\Delta z}\right),$$

$$(P_{13})_T^n = \mu\left[\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{\Delta z} + \frac{w_{i+1,j+1}^n - w_{i,j+1}^n}{\Delta x}\right],$$

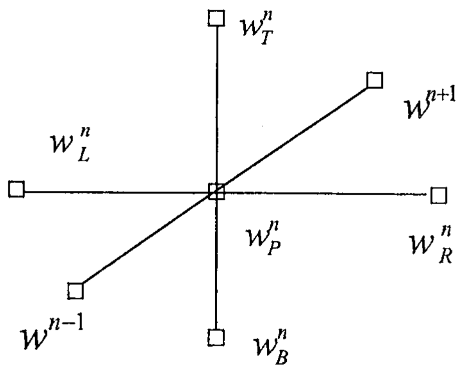
$$(P_{13})_B^n = \mu\left[\frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta z} + \frac{w_{i+1,j}^n - w_{i,j}^n}{\Delta x}\right],$$

$$(P_{13})_L^n = \mu\left[\frac{u_{i-1,j}^n - u_{i-1,j-1}^n}{\Delta z} + \frac{w_{i,j}^n - w_{i-1,j}^n}{\Delta x}\right],$$

$$(P_{13})_R^n = \mu\left[\frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta z} + \frac{w_{i+1,j}^n - w_{i,j}^n}{\Delta x}\right].$$



Şekil 2.6 *u* için zamana bağlı 3-boyutlu sonlu bölümleme



Şekil 2.7 *w* için zamana bağlı 3-boyutlu sonlu bölümleme

2.3 SAYISAL ÇÖZÜM KOŞULLARI

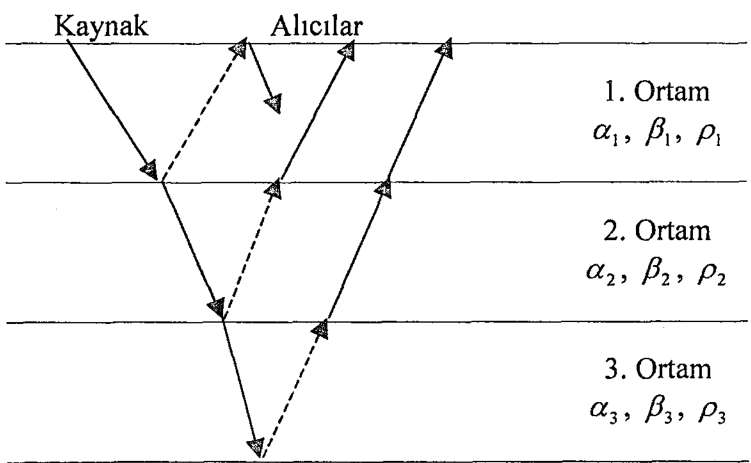
Akustik ve elastik dalga denkleminin sayısal çözümü için bazı koşulların yerine getirilmesi gerekir. Uzaysal örnekleme aralıkları Δx, Δz ve zaman örnekleme aralığı Δt'nin seçimi bazı koşullara bağlıdır. Bu kriterlerin dışına çıkılırsa elde edilmesi gereken değerlerden daha farklı değerler elde edilecek ve modellenmesi düşünülen yapının vereceği sismogramlar elde edilmeyecektir. Akustik ve elastik dalga denkleminin sayısal çözümünde,

1. Sınır koşulları
2. Kararlılık koşulu
3. Grid dispersiyonu

problemlerini çözmek gerekir. Bu koşullar aşağıda verilmektedir.

2.3.1 SINIR KOŞULLARI

Dalganın sınıra dik gelmesi halinde dalganın bir kısmı yansır bir kısmı da diğer ortama kırılarak geçer. Bunun nedeni ortamların yoğunluklarının ve dolayısıyla dalga hızlarının her bir ortamda farklı olmasıdır. Şekil 2.8'de P ve S dalga hızları sırasıyla α_1, β_1, α_2, β_2, α_3, β_3 ve yoğunlukları sırasıyla ρ_1, ρ_2, ρ_3 olan ortamlar için kırılan ve yansıyan dalga yolları gösterilmiştir. Şekil 2.8'de kesikli çizgi halinde verilenler ortam sınırından yansıyan dalgayı, düz çizgi halinde verilenler ise ortam sınırından kırılarak diğer ortama iletilen dalgayı gösterir.



Şekil 2.8 Kırılan ve yansıyan dalga yolları

Dalga denkleminin çözümünde Dirichlet sınır koşulları kullanıldığında Şekil 2.8' deki gibi kırılan ve yansıyan dalgalar oluşacaktır. Soğuran sınır koşulları kullanıldığında Şekil 2.8'de kesikli çizgilerle gösterilen kırılan dalgalar oluşmayacaktır. Gelen dalga kırılmadan diğer ortama iletilecektir.

Akustik ve elastik dalga denklemlerinin sayısal çözümü için kullanılan sınır koşulları birbirine benzemekle birlikte bazı farklılıklar gösterir. Elastik dalga yayılmasında hem yatay hem de düşey yer değiştirmeler vardır. Bu nedenle akustik ve elastik dalga denkleminin sınır koşulları birbirinden farklıdır. Eğer uygun sınır koşulları kullanilmazsa yatay ve düşey yönde yapay süreksizlikler oluşacaktır.

2.3.1.1 AKUSTİK DALGA DENKLEMİ İÇİN SINIR KOŞULLARI

Bu çalışmada modellenen ortam için iki farklı sınır koşulu kullanılmıştır. Bunlar Dirichlet ve Transparent (soğuran) sınır koşullarıdır.

Akustik dalga denkleminin çözümünde başlangıç koşulu olarak,

$$u(x,z,0) = 0,$$

$$\frac{\partial u(x,z,0)}{\partial t} = 0$$

olduğu kabul edilir. Bu koşullar modelin sınırlarda yansımaya uğramaması için uygun koşullardır. Bunlar

$$u(0,z,t) = 0, \qquad u(X_M,z,t) = 0, \qquad u(x,Z_N,t) = 0 \tag{2.36}$$

veya

$$\frac{\partial}{\partial x}u(0,z,t) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}u(X_M,z,t) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z}u(x,Z_N,t) = 0 \tag{2.37}$$

şeklinde verilmektedir. (2.36) ve (2.37) ile verilen denklemlere Dirichlet sınır koşulları denir. Burada X_M ve Z_N modelin sınır noktalarıdır.

(2.36) ve (2.37) denklemlerinin sonlu farklar yöntemiyle ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$u_{i,0}^{n+1} = 0, \qquad 0 \le i \le M,\ 0 \le n \le T$$

$$u_{0,j}^{n+1} = 0, \qquad 0 \le j \le N,\ 0 \le n \le T$$

$$u_{M,j}^{n+1} = 0, \qquad 0 \le j \le N,\ 0 \le n \le T$$

$$u_{i,N}^{n+1} = 0, \qquad 0 \le i \le M,\ 0 \le n \le T.$$

Akustik dalga denklemi için Dirichlet sınır koşulları kullanılarak elde edilen sismogram grafikleri 3. Bölümde verilmiştir.

Dirichlet sınır koşulları kullanıldığında modelin sınırlarından yansımalar oluşmaktadır. Soğuran sınır koşullarında bu yansımalar oluşmamaktadır. 2-boyutlu akustik dalga denklemi için soğuran sınır koşulları aşağıda verilmiştir.

Modelin sol tarafı için sınır koşulu,

$$\left(\frac{1}{V_p}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{q}{V_p}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0, \quad x=0,\ 0\le z\le Z_N$$

Modelin sağ tarafı için sınır koşulu,

$$\left(\frac{1}{V_p}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{q}{V_p}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0, \quad x=X_M,\ 0\le z\le Z_N$$

Modelin alt tarafı için sınır koşulu,

$$\left(\frac{1}{V_p}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{q}{V_p}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\right)u=0, \quad z=Z_N,\ 0\le x\le X_M$$

denklemleriyle verilmektedir. Modelin üst tarafı yeryüzü olduğu için burada Dirichlet sınır koşulu kullanılmıştır. Burada $q=V_p\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$ dir.

Sınır koşullarının sonlu farklar ile ifadesi,

$$u_{0,j}^{n+1}=u_{0,j}^{n}+u_{1,j}^{n}-u_{1,j}^{n-1}+q\left(u_{1,j}^{n}-u_{0,j}^{n}-u_{2,j}^{n-1}+u_{1,j}^{n-1}\right), \qquad 0\le j\le N,\ 0\le n\le T$$

$$u_{M,j}^{n+1}=u_{M,j}^{n}+u_{M-1,j}^{n}-u_{M-1,j}^{n-1}-q\left(u_{M,j}^{n}-u_{M-1,j}^{n}-u_{M-1,j}^{n-1}+u_{M-2,j}^{n-1}\right), \quad 1\le j\le N,\ 0\le n\le T$$

$$u_{i,N}^{n+1}=u_{i,N}^{n}+u_{i,N-1}^{n}-u_{i,N-1}^{n-1}-q\left(u_{i,N}^{n}-u_{i,N-1}^{n}-u_{i,N-1}^{n-1}+u_{i,N-2}^{n-1}\right), \qquad 1\le i\le M,\ 0\le n\le T$$

$$u_{i,0}^{n+1}=0. \qquad 1\le i\le M,\ 0\le n\le T$$

şeklindedir (Demir, 1998).

2.3.1.2 ELASTİK DALGA DENKLEMİ İÇİN SINIR KOŞULLARI

Elastik dalga modellemesi için de Dirichlet ve soğuran sınır koşulları kullanılmıştır. Akustik dalga denklemi için kullanılan Dirichlet sınır koşulları elastik dalga denklemi içinde aynıdır ve aşağıdaki şekilde yazılır.

$$u_{i,0}^{n+1} = 0\,, \qquad 0 \le i \le M\,,\ 0 \le n \le T$$

$$u_{0,j}^{n+1} = 0\,, \qquad 0 \le j \le N\,,\ 0 \le n \le T$$

$$u_{M,j}^{n+1} = 0, \qquad 0 \le j \le N\,,\ 0 \le n \le T$$

$$u_{i,N}^{n+1} = 0\,, \qquad 0 \le i \le M\,,\ 0 \le n \le T\,.$$

Benzer şekilde

$$w_{i,0}^{n+1} = 0, \qquad 0 \le i \le M\,,\ 0 \le n \le T$$

$$w_{0,j}^{n+1} = 0, \qquad 0 \le j \le N\,,\ 0 \le n \le T$$

$$w_{M,j}^{n+1} = 0, \qquad 0 \le j \le N\,,\ 0 \le n \le T$$

$$w_{i,N}^{n+1} = 0. \qquad 0 \le i \le M\,,\ 0 \le n \le T\,.$$

Serbest yüzey sınır koşulları için $P_{33} = 0$ ve $P_{13} = 0$ olmalıdır. Yani

$$P_{33} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$P_{13} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0$$

dir. Denklemler düzenlenirse

$$\left(V_P^2 - 2V_S^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} + V_P^2\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

serbest yüzey sınır koşulları elde edilir. Bu denklemlerden birincisi normal gerilmeyi, ikincisi kayma gerilmesini gösterir.

Elastik dalga modellemesi için kullanılan soğuran sınır koşulları aşağıdaki gibidir. Modelin sol ve sağ sınırlarındaki kenar yansımalarını yok etmek için akustik dalga denklemi çözümünde kullanılan sınır koşulları hem u hem de w için aynen kullanılır. Elastik dalga denklemi için kullanılan serbest yüzey sınır koşullarının sonlu farklar ile ifadesi aşağıdaki gibidir.

Modelin üst tarafı için serbest yüzey sınır koşulları;

$$u_{i,-1}^{n} = u_{i,1}^{n} + w_{i+1,0}^{n} - w_{i-1,0}^{n}$$

$$w_{i,-1}^{n} = w_{i,1}^{n} + \left[1 - 2\left(\frac{V_S}{V_P}\right)^2\right]\left(u_{i+1,0}^{n} - u_{i-1,0}^{n}\right)$$

Modelin sol ve sağ tarafı için sınır koşulları;

$$u_{0,j}^{n+1} = u_{0,j}^{n} + u_{1,j}^{n} - u_{1,j}^{n-1} + q(u_{1,j}^{n} - u_{0,j}^{n} - u_{2,j}^{n-1} + u_{1,j}^{n-1})$$

$$w_{0,j}^{n+1} = w_{0,j}^{n} + w_{1,j}^{n} - w_{1,j}^{n-1} + q(w_{1,j}^{n} - w_{0,j}^{n} - w_{2,j}^{n-1} + w_{1,j}^{n-1})$$

$$u_{M,j}^{n+1} = u_{M,j}^{n} + u_{M-1,j}^{n} - u_{M-1,j}^{n-1} - q(u_{M,j}^{n} - u_{M-1,j}^{n} + u_{M-2,j}^{n-1} - u_{M-1,j}^{n-1})$$

$$w_{M,j}^{n+1} = w_{M,j}^{n} + w_{M-1,j}^{n} - w_{M-1,j}^{n-1} - q(w_{M,j}^{n} - w_{M-1,j}^{n} + w_{M-2,j}^{n-1} - w_{M-1,j}^{n-1})$$

şeklindedir.

Modelin alt tarafı için sınır koşulu;

$$u_{i,N}^{n+1} = u_{i,N}^{n} + u_{i,N-1}^{n} - u_{i,N-1}^{n-1} - q\left(u_{i,N}^{n} - u_{i,N-1}^{n} - u_{i,N-1}^{n-1} + u_{i,N-2}^{n-1}\right)$$

$$w_{i,N}^{n+1} = w_{i,N}^{n} + w_{i,N-1}^{n} - w_{i,N-1}^{n-1} - q\left(w_{i,N}^{n} - w_{i,N-1}^{n} - w_{i,N-1}^{n-1} + w_{i,N-2}^{n-1}\right)$$

Özel olarak modelin köşe noktaları için sınır koşulları ise u için

$$u_{0,0}^{n+1} = u_{0,0}^{n} + q(u_{1,1}^{n} - u_{0,0}^{n})$$

$$u_{0,N}^{n+1} = u_{0,N}^{n} + q(u_{1,N-1}^{n} - u_{0,N}^{n})$$

$$u_{M,0}^{n+1} = u_{M,0}^{n} + q(u_{M-1,1}^{n} - u_{M,0}^{n})$$

$$u_{M,N}^{n+1} = u_{M,N}^{n} + q(u_{M-1,N-1}^{n} - u_{M,N}^{n})$$

ve benzer şekilde w için

$$w_{0,0}^{n+1} = w_{0,0}^{n} + q(w_{1,1}^{n} - w_{0,0}^{n})$$

$$w_{0,N}^{n+1} = w_{0,N}^{n} + q(w_{1,N-1}^{n} - w_{0,N}^{n})$$

$$w_{M,0}^{n+1} = w_{M,0}^{n} + q(w_{M-1,1}^{n} - w_{M,0}^{n})$$

$$w_{M,N}^{n+1} = w_{M,N}^{n} + q(w_{M-1,N-1}^{n} - w_{M,N}^{n})$$

şeklindedir.

2.3.2 KARARLILIK KOŞULU

Sayısal çözümlemede karşımıza çıkan diğer problem kararlılık koşuludur. Dalga denklemi çözümünde Δx, Δz ve Δt'nin seçimi bazı kriterlere bağlıdır. Bu parametreler uygun boyutta seçilerek en doğru sonuca yaklaşılır.

2-boyutlu akustik dalga denklemi için kararlılık koşulu

$$V_p \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

dir. Burada V_p, P dalga hızıdır.

Benzer şekilde 2-boyutlu elastik dalga denklemi için kararlılık koşulu,

$$V_p \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \left(1 + \frac{V_s^2}{V_p^2}\right)^{-1/2}$$

veya

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\left(V_p^2 + V_s^2\right)^{1/2}}$$

dir (Reynolds, 1978). Bu da Δt'nin keyfi olarak seçilemeyip Δx örnekleme aralığına, V_p ve V_s dalga hızlarına bağlı olarak seçileceğini gösterir.

2.3.3 GRİD DİSPERSİYONU

Dalga hızının frekansa bağlı olarak değişimine dispersiyon denir. Ayrık gridde yayılan dalgalar yayılma zamanı arttıkça dispersiyona uğrarlar ve bunun sonucu yüksek frekanslı sinyaller düşük frekanslı sinyallere göre daha geç gelirler. Buna grid dispersiyonu denir. Uzaysal örnekleme aralığı Δx büyüdükçe dispersiyonda artar (Kelly ve ark., 1976). Ortamda ilerleyen dalga, $\lambda = \frac{V_p}{f_p}$ dalga boyuna sahiptir. Burada f_p kaynak fonksiyonun maksimum pik frekansıdır. Dalga boyunun Δx örnekleme aralığına oranı 10 veya daha büyük olmalıdır (Alford ve ark., 1974). Yani grid dispersiyon koşulu,

$$\frac{V_p}{\Delta x f_p} \geq 10 = G \text{ dir.}$$

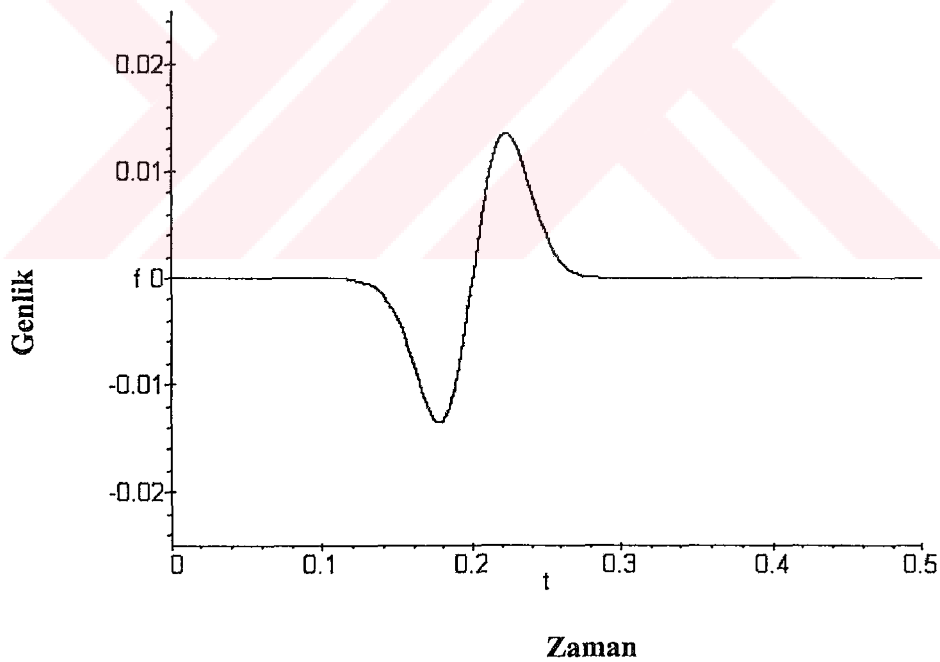
Grid dispersiyonu iyi grid seçimiyle minimum yapılmazsa dalga şeklinde istenmeyen değişimler olur. Bu durumumda da matematiksel modelimizden beklediğimiz sonuçları alamayız.

2.3.4 KAYNAK FONKSİYONLARI

Sismik dalga modelleme çalışmalarında ortamda dalga yayılımını sağlayacak yapay bir kaynağa ihtiyaç vardır. Grid dispersiyonunu önlemek için kaynak fonksiyonu olarak genellikle sıfır fazlı Gauss, Ricker ve Butterwort kaynak fonksiyonları kullanılır. Bu çalışmada akustik dalga denkleminin modellenmesinde Gauss kaynak fonksiyonu kullanılmıştır. Bu fonksiyon,

$$f(t) = (t - t_S)e^{-\alpha(t-t_S)^2}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada α sinyal genişlik parametresi, t_S başlangıç zamanıdır. $\alpha = 1000$ ve $t_S = 0.2\,\text{sn}$ için Gauss kaynak fonksiyonunu grafiği Şekil 2.9'da verilmiştir.



Şekil 2.9 Gauss kaynak fonksiyonu

Elastik dalga denklemi için başka bir kaynak fonksiyonu kullanılmıştır. Bu fonksiyon aşağıda verilmiştir.

$$\hat{u}(x,z,t) = \frac{x - x_s}{R^2} \frac{V_P^2 \, t}{\sqrt{V_P^2 \, t^2 - R^2}} H\left(V_P \, t - R\right) \tag{2.38}$$

$$\hat{w}(x,z,t) = \frac{z - z_s}{R^2} \frac{V_P^2 \, t}{\sqrt{V_P^2 \, t^2 - R^2}} H\left(V_P \, t - R\right) \tag{2.39}$$

Burada x_s ve z_s kaynağın bulunduğu yer, $H(t)$ Heaviside fonksiyonu ve

$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}$ 'dir.

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. (2.38) ve (2.39) denklemleri t'ye göre 2 kere integre edilip daha sonra t'ye göre ikinci mertebe sonlu fark ile hesaplanırsa

$$\hat{u}(x,z,t) = \frac{1}{\Delta^2}\left[u_S(x,z,t) - 2u_S(x,z,t-\Delta) + u_S(x,z,t-2\Delta)\right]$$

$$\hat{w}(x,z,t) = \frac{1}{\Delta^2}\left[w_S(x,z,t) - 2w_S(x,z,t-\Delta) + w_S(x,z,t-2\Delta)\right]$$

olup 2-boyutlu elastik dalga modellemesinde kullanılan kaynak fonksiyonları, u_S ve w_S aşağıdaki gibidir (Alterman ve Rotenberg, 1969).

$$u_S(x,z,t) = \frac{x - x_0}{V_P}\left[\frac{V_P \, t}{R}\sqrt{\left(\frac{V_P \, t}{R}\right)^2 - 1} - \ln\left(\frac{V_P \, t}{R} + \sqrt{\left(\frac{V_P \, t}{R}\right)^2 - 1}\right)\right] H\left(\frac{V_P \, t}{R} - 1\right) \tag{2.40}$$

$$w_S(x,z,t) = \frac{z - z_0}{V_P}\left[\frac{V_P \, t}{R}\sqrt{\left(\frac{V_P \, t}{R}\right)^2 - 1} - \ln\left(\frac{V_P \, t}{R} + \sqrt{\left(\frac{V_P \, t}{R}\right)^2 - 1}\right)\right] H\left(\frac{V_P \, t}{R} - 1\right). \tag{2.41}$$

3.BULGULAR

3.1 AKUSTİK DALGA MODELLEMESİ

Bu bölümde çeşitli kaya yapılarındaki 2-boyutlu akustik dalga denkleminin basit ortam ve çoklu ortamda Dirichlet sınır koşulları ve soğuran sınır koşullarındaki hareketini inceleyeceğiz. Aşağıdaki çizelge 3.1'de çeşitli ortamlar için λ, μ, ρ ve hız değerleri verilmiştir.

Çizelge 3.1 Kaya çeşitlerinin λ, μ, ρ ve hız değerleri

Ortam	**λ (Pa)**	**μ (Pa)**	**ρ (kg/m^3)**	**V_p (m/s)**	**V_s (m/s)**
Çamur	3.71E9	0.00E9	1450	1600	0
Şeyl	4.99E9	4.80E9	2450	2440	1400
Kumtaşı	11.35E9	2.61E9	2160	2770	1100
Kireçtaşı	13.38E9	7.18E9	2400	3400	1730
Deniz Suyu	2.32E9	0.00E9	1030	1500	0

Akustik dalga modellemesinde kullanılan ortamın değer kümesi $D=\{(x,z,t): 0\leq x\leq 500,\ 0\leq z\leq 500,\ 0\leq t\leq 1\}$ olarak alınmıştır. Tüm modellerde alıcılar yerin 10 m altına ve kaynak ise yerin 100 m altına yerleştirilmiştir.

2-boyutlu akustik dalga denklemi

$$\frac{1}{V_P^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\delta_{r,s}f(t) \tag{3.1}$$

şeklindedir. Burada x ve z kartezyen koordinat, t zaman, V_P dalga hızı, $\delta_{r,s}$ Kronecker deltası, $f(t)$ Gauss kaynak fonksiyonunu göstermektedir. (3.1) denkleminin sonlu farklar yöntemiyle yazılmış hali aşağıdaki gibidir.

$$\frac{1}{V_P^2\Delta t^2}\left(u_{i,j}^{n+1}-2u_{i,j}^{n}+u_{i,j}^{n-1}\right)-\frac{1}{h^2}\left[\left(u_{i+1,j}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i-1,j}^{n}\right)+\left(u_{i,j+1}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i,j-1}^{n}\right)\right]-\delta_{r,s}f(t)=0 \tag{3.2}$$

Burada Δt ve h sırasıyla zaman ve uzaklığın grid aralıklarıdır.

(3.2) denkleminde $p=\frac{V_P\Delta t}{h}$ alınıp, $u_{i,j}^{n+1}$ terimi yalnız bırakılırsa,

$$u_{i,j}^{n+1}=2u_{i,j}^{n}-u_{i,j}^{n-1}+p^2\left[\left(u_{i+1,j}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i-1,j}^{n}\right)+\left(u_{i,j+1}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i,j-1}^{n}\right)\right]+V_P^2\Delta t^2\delta_{r,s}f(t_n)$$

bulunur. Elde edilecek çözümün kararlı olması için $p=\frac{V_P\Delta t}{h}<\frac{1}{\sqrt{2}}$ olmalıdır. Kararlılık koşulu grid aralığına ve hıza bağlıdır.

Dalga denkleminin sonlu farklar ile ifadesi, $(n-1)\Delta t$ ve $n\Delta t$ zaman adımlarındaki değerleri kullanarak $t=(n+1)\Delta t$ zaman adımındaki $u_{i,j}^{n+1}$ fonksiyonun değerinin hesaplanmasını sağlar. Bu çalışmada yapılan, önceden tanımlı $u_{i,j}^{n-1}$ ve $u_{i,j}^{n}$ değerlerinden yola çıkarak, Δt zaman adımları ile t istenen zamana ulaşıncaya kadar sonlu fark bağıntısının ardışık olarak kullanılmasıdır.

3.1.1 SINIR KOŞULLARI

Akustik dalga denklemi hem Dirichlet sınır koşulunda hem de soğuran sınır koşulunda incelendi. Bu sınır koşullarının geometrisi Şekil 3.1 ve Şekil 3.2'deki gibidir.

Dirichlet sınır koşullarının sonlu farklar ile ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$u_{i,0}^{n+1}=0 \qquad 0\le i\le M,\ 0\le n\le T$$

$$u_{0,j}^{n+1}=0 \qquad 0\le j\le N,\ 0\le n\le T$$

$$u_{M,j}^{n+1}=0 \qquad 0\le j\le N,\ 0\le n\le T$$

$$u_{i,N}^{n+1}=0 \qquad 0\le i\le M,\ 0\le n\le T.$$

Soğuran sınır koşulları; serbest yüzey (yeryüzü) için, sıfır yer değiştirme-katı yüzey sınır koşulu (Dirichlet) ve diğerleri içinde soğuran sınır koşulları kullanılmıştır. Modellenecek ortamın alt sınırı için soğuran, üst sınırı için Dirichlet sınır koşullarının sonlu farklar formülleriyle ifadesi

$$u_{i,0}^{n+1}=0 \qquad 0\le j\le N,\ 0\le n\le T$$

$$u_{i,N}^{n+1}=u_{i,N}^{n}+u_{i,N-1}^{n}-u_{i,N-1}^{n-1}-p\left(u_{i,N}^{n}-u_{i,N-1}^{n}-u_{i,N-1}^{n-1}+u_{i,N-2}^{n-1}\right), \qquad 1\le i\le M,\ 0\le n\le T$$

şeklindedir.

Benzer şekilde modelin sağ ve sol tarafı için soğuran sınır koşulları

$$u_{0,j}^{n+1} = u_{0,j}^{n} + u_{1,j}^{n} - u_{1,j}^{n-1} + p\left(u_{1,j}^{n} - u_{0,j}^{n} - u_{2,j}^{n-1} + u_{1,j}^{n-1}\right), \qquad 0 \le j \le N,\ 0 \le n \le T$$

$$u_{M,j}^{n+1} = u_{M,j}^{n} + u_{M-1,j}^{n} - u_{M-1,j}^{n-1} - p\left(u_{M,j}^{n} - u_{M-1,j}^{n} - u_{M-1,j}^{n-1} + u_{M-2,j}^{n-1}\right), \qquad 1 \le j \le N,\ 0 \le n \le T$$

ile ifade edilir.

Özel olarak köşe noktaları için sınır koşulları da,

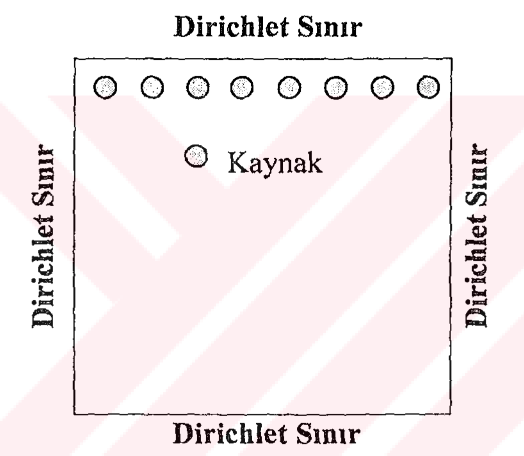
$$u_{0,0}^{n+1} = u_{0,0}^{n} + p\left(u_{1,1}^{n} - u_{0,0}^{n}\right) \qquad 0 \le n \le T$$

$$u_{M,0}^{n+1} = u_{M,0}^{n} + p\left(u_{M-1,1}^{n} - u_{M,0}^{n}\right) \qquad 0 \le n \le T$$

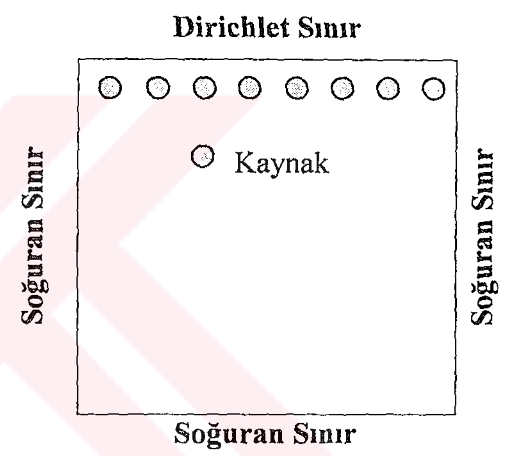
$$u_{0,N}^{n+1} = u_{0,N}^{n} + p\left(u_{1,N-1}^{n} - u_{0,N}^{n}\right) \qquad 0 \le n \le T$$

$$u_{M,N}^{n+1} = u_{M,N}^{n} + p\left(u_{M-1,N-1}^{n} - u_{M,N}^{n}\right) \qquad 0 \le n \le T$$

şeklindedir. Sınır koşulları aşağıdaki gibi bir geometriye sahiptir.



Şekil 3.1 Dirichlet sınır koşulları



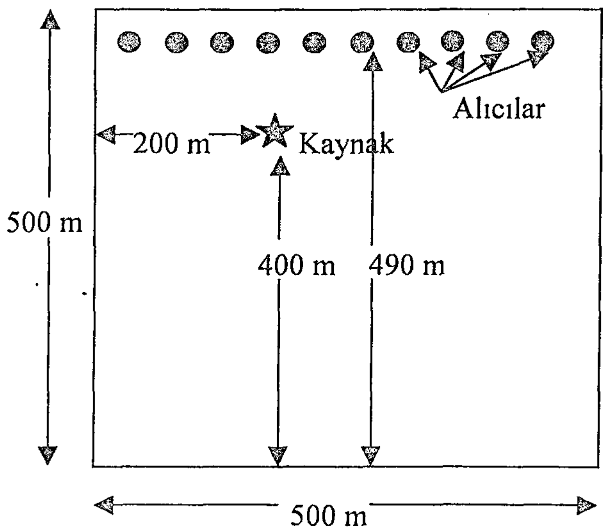
Şekil 3.2 Soğuran sınır koşulları

3.1.2 BASİT ORTAM İÇİN SONUÇLAR

Basit medya için şeyl, kumtaşı, kireçtaşı alınarak çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. Kullanılan kaynak fonksiyonu,

$$f(t) = (t - t_s)e^{-\alpha(t-t_s)^2}$$

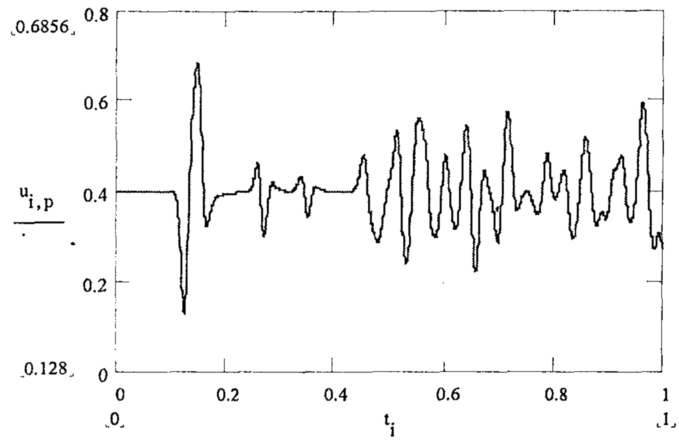
şeklinde tanımlıdır. Burada t_s dalga yayınımının başlangıç zamanı, α sinyal genişlik parametresidir. Bu çalışmada Gauss kaynak fonksiyonundaki t_s=0.1 sn ve α=10000 olarak alınmıştır. x ve z'nin grid aralıkları 2m, zaman aralığı ise 0.0005 saniye olarak alınmıştır. Alıcılar ve kaynak fonksiyonu ortama Şekil 3.3'de gösterildiği gibi yerleştirilmiştir.



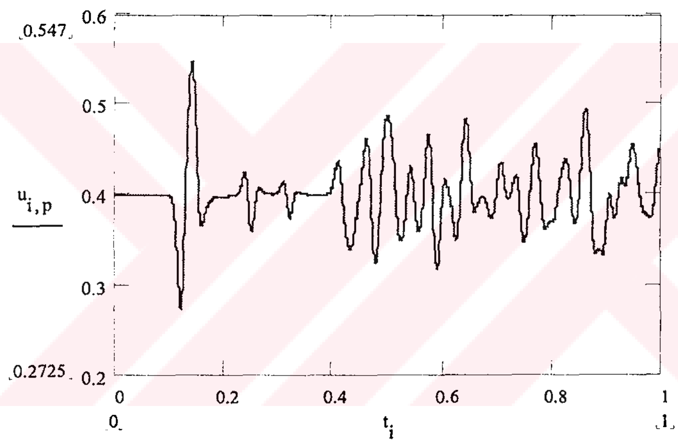
Şekil 3.3 Basit ortam için alıcıların ve kaynağın yeri

Dirichlet sınır koşulları kullanılarak 200 metredeki alıcıdan elde edilen sismogram grafikleri şeyl için Şekil 3.4, kumtaşı için Şekil 3.5 ve kireçtaşı için Şekil 3.6'da verilmiştir. Modelin tamamındaki alıcılardan Dirichlet sınır koşulları kullanılarak elde edilen sismogram grafikleri; şeyl için Şekil 3.7, kumtaşı için Şekil 3.8 ve kireçtaşı için Şekil 3.9'da verilmiştir. Her üç sismogramda da beklendiği gibi yaklaşık olarak 0.1 saniyede ilk dalga alıcıya ulaşmaktadır. Daha sonra ise serbest yüzeyden oluşan kırılan dalgalar görünmektedir. Diğer oluşan dalgalar ise modelin sınırlarından kırılmalar sonucunda oluşan dalgalardır. İlk iki sismogramdaki ortam hızlarının birbirine çok yakın olması sismogramları benzer kılmaktadır. Soğuran sınır koşulları kullanılarak 200 metredeki tek bir alıcıdan elde edilen sismogram grafikleri şeyl için Şekil 3.10, kumtaşı için Şekil 3.11 ve kireçtaşı için Şekil 3.12'de verilmiştir. Şeyl, kumtaşı ve kireçtaşına ait sismogram grafikleri birbirine çok benzemektedir. Kumtaşı ve şeyl sismograflarında alıcı tarafından kaydedilen ilk dalga yaklaşık olarak 0.15 saniyede ve kireçtaşı için 0.1 saniyede görülmektedir. Kireçtaşının diğerlerinden farklılık göstermesinin sebebi, dalga yayılma hızının diğerlerine göre daha büyük olmasıdır. Bu grafikler incelendiğinde birbirine çok benzediği görülmektedir. Bunun nedeni, modellenen ortam özelliklerinin birbirine çok yakın olmasıdır.

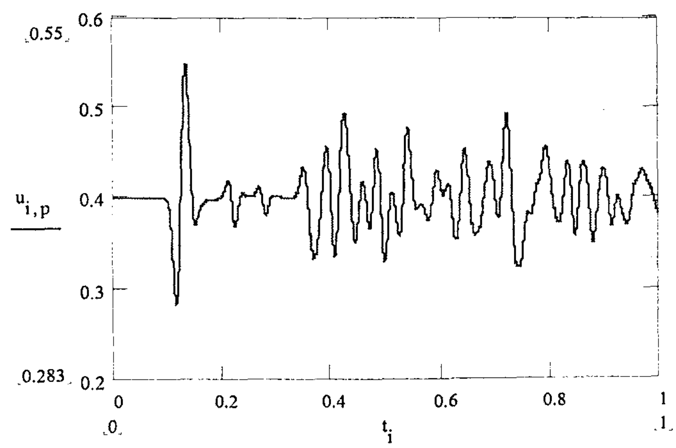
Ayrıca modelin tamamındaki alıcılardan soğuran sınır koşulları kullanılarak elde edilen sismogram grafikleri; şeyl için Şekil 3.13, kumtaşı için Şekil 3.14 ve kireçtaşı için Şekil 3.15'dedir.



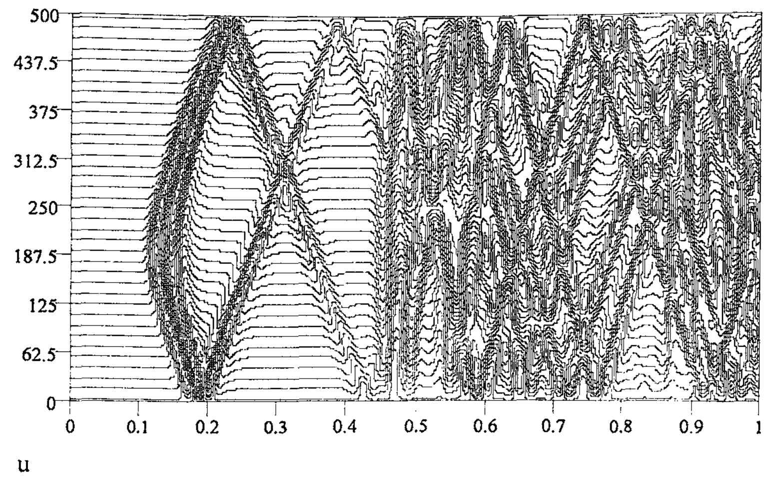
Şekil 3.4 Dirichlet sınır koşulları için 200 m'deki şeyl sismogramı



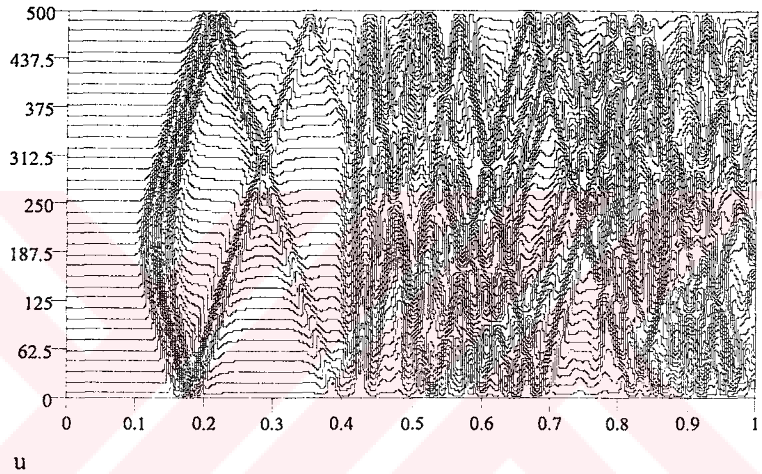
Şekil 3.5 Dirichlet sınır koşulları için 200 m'deki kumtaşı sismogramı



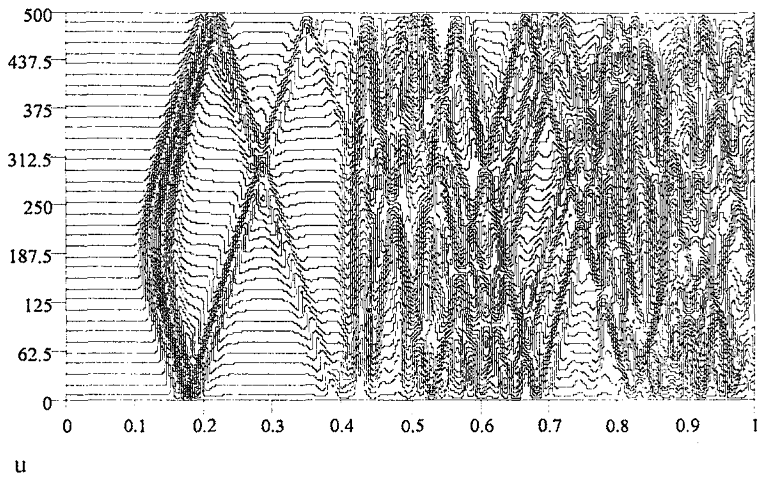
Şekil 3.6 Dirichlet sınır koşulları için 200 m'deki kireçtaşı sismogramı



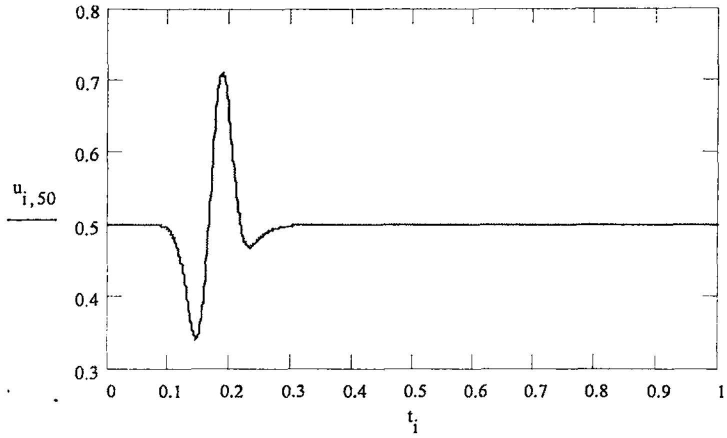
Şekil 3.7 Dirichlet sınır koşulları için şeyl sismogramı



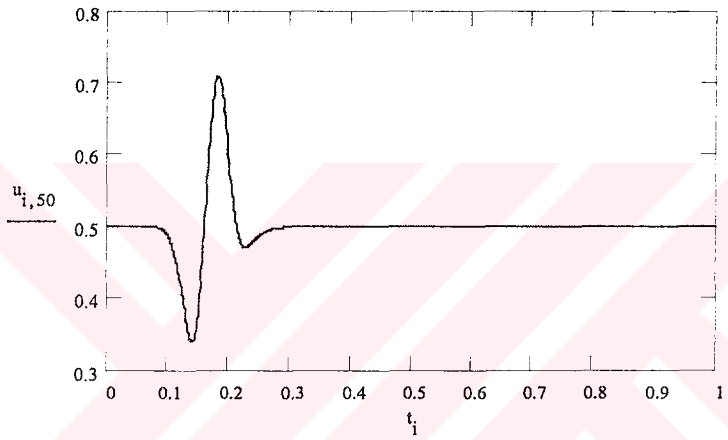
Şekil 3.8 Dirichlet sınır koşulları için kumtaşı sismogramı



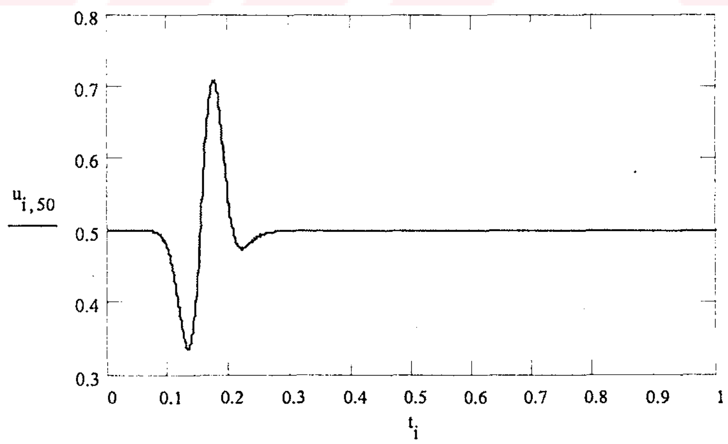
Şekil 3.9 Dirichlet sınır koşulları için kireçtaşı sismogramı



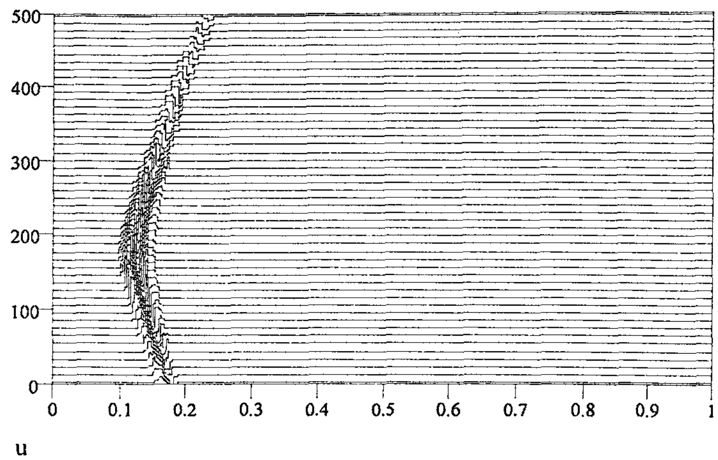
Şekil 3.10 Soğuran sınır koşulları için 200 m'deki şeyl sismogramı



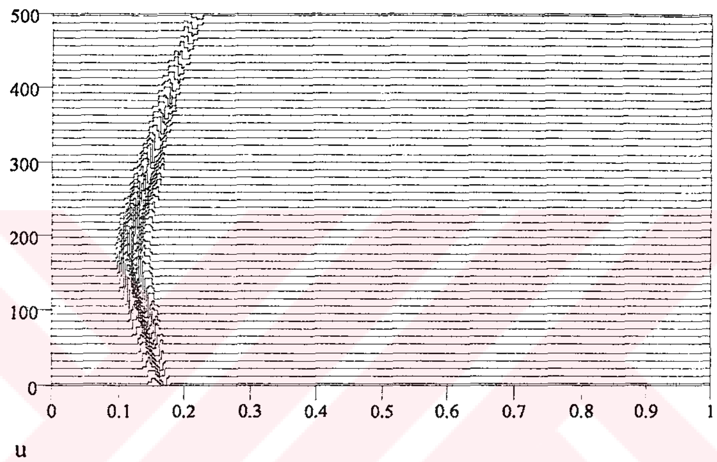
Şekil 3.11 Soğuran sınır koşulları için 200 m'deki kumtaşı sismogramı



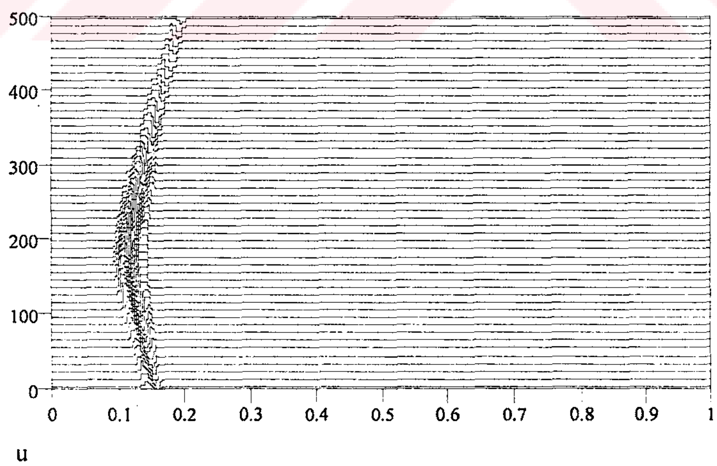
Şekil 3.12 Soğuran sınır koşulları için 200 m'deki kireçtaşı sismogramı



Şekil 3.13 Soğuran sınır koşulları için şeyl sismogramı



Şekil 3.14 Soğuran sınır koşulları için kumtaşı sismogramı

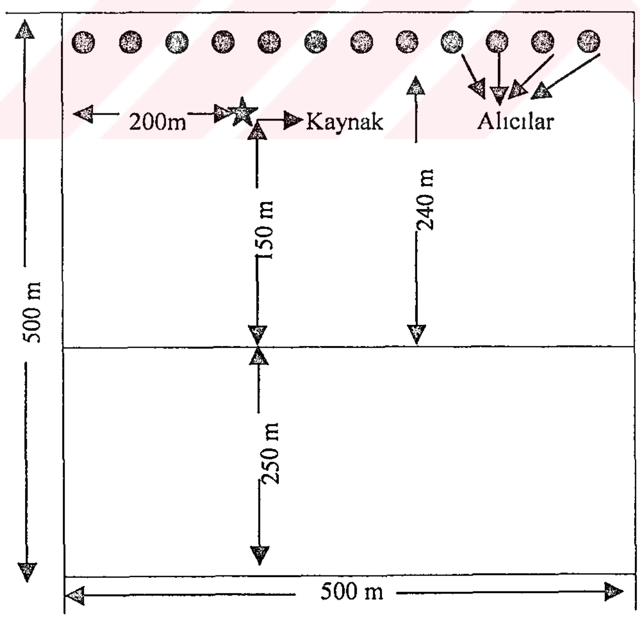


Şekil 3.15 Soğuran sınır koşulları için kireçtaşı sismogramı

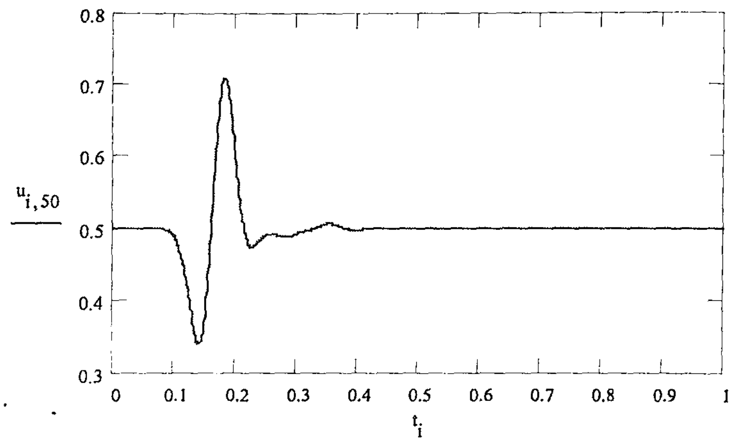
3.1.3 ÇOKLU ORTAMLAR İÇİN SONUÇLAR

3.1.3.1 İKİLİ ORTAM İÇİN SONUÇLAR

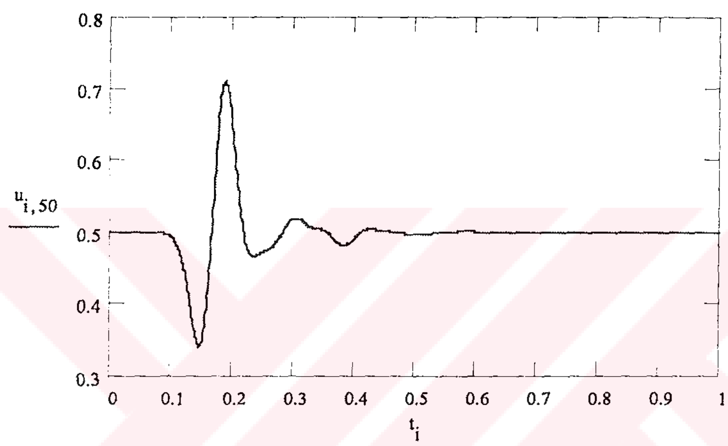
Bu bölümde bir önceki bölümde yer alan şeyl, kumtaşı ve kireçtaşı kayaları ikişerli olarak ele alındı. İkili ortam için geometri Şekil 3.16'da gösterildiği gibidir. 200 metredeki tek bir alıcıdan elde edilen sismogram grafikleri şeyl ve kumtaşı için Şekil 3.17, şeyl ve kireçtaşı için Şekil 3.18, kumtaşı ve kireçtaşı için Şekil 3.19'da verilmiştir. 0.2 saniyeden sonra görülen dalgalar serbest yüzey ve ara yüzeyden oluşan kırılmalardan meydana gelen dalgalardır. İlk sismogramdaki ortamların hızlarının birbirine çok yakın olmasından dolayı kırılan dalgalar diğer sismogramlardaki kadar net görülmemektedir. Şeyl-kumtaşı ve kumtaşı-kireçtaşına ait grafikler birbirine benzemekte fakat şeyl-kireçtaşına ait grafik bunlardan çok az farklılık göstermektedir. Ayrıca modelin tamamındaki alıcılardan soğuran sınır koşulları kullanarak elde edilen sismogram grafikleri şeyl ve kumtaşı için Şekil 3.20, şeyl ve kireçtaşı için Şekil 3.21, kumtaşı ve kireçtaşı için Şekil 3.22'de verilmiştir. Bu sismogram grafikleri de birbirine benzemekte ancak kaya yapılarındaki hız ve yoğunluk farklılığından kaynaklanan küçük farklar görülmektedir. Her üç modele ait sismogram grafikleri birbirine çok benzediği için kaya yapıları hakkında daha fazla bilgi edinmek oldukça zordur.



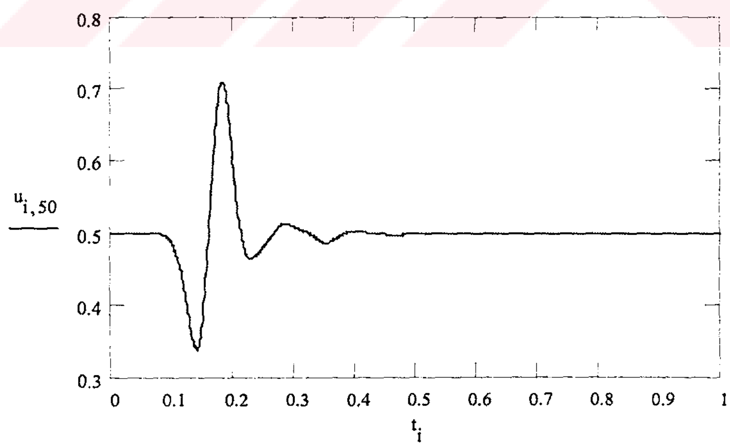
Şekil 3.16 İkili ortam için alıcıların ve kaynağın yeri



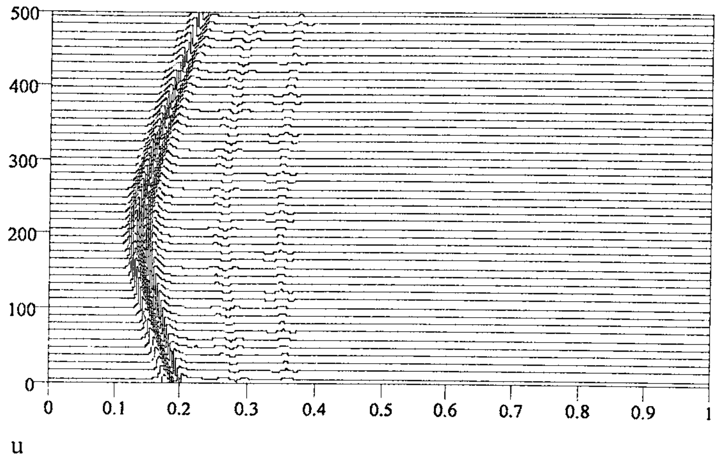
Şekil 3.17 Soğuran sınır koşulları için 200 m'deki şeyl ve kumtaşı sismogramı



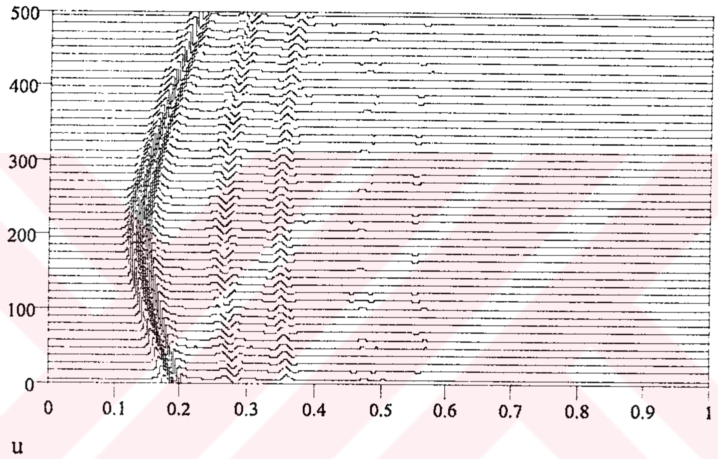
Şekil 3.18 Soğuran sınır koşulları için 200 m'deki şeyl ve kireçtaşı sismogramı



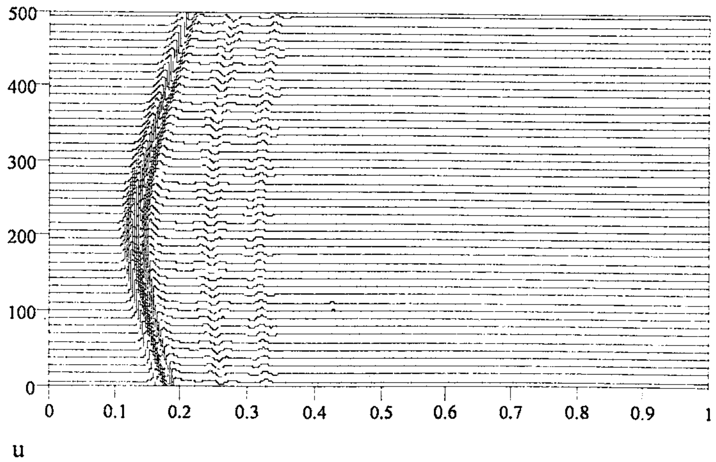
Şekil 3.19 Soğuran sınır koşulları için 200 m'deki kumtaşı ve kireçtaşı sismogramı



Şekil 3.20 Soğuran sınır koşulları için şeyl ve kumtaşı sismogramı



Şekil 3.21 Soğuran sınır koşulları için şeyl ve kireçtaşı sismogramı

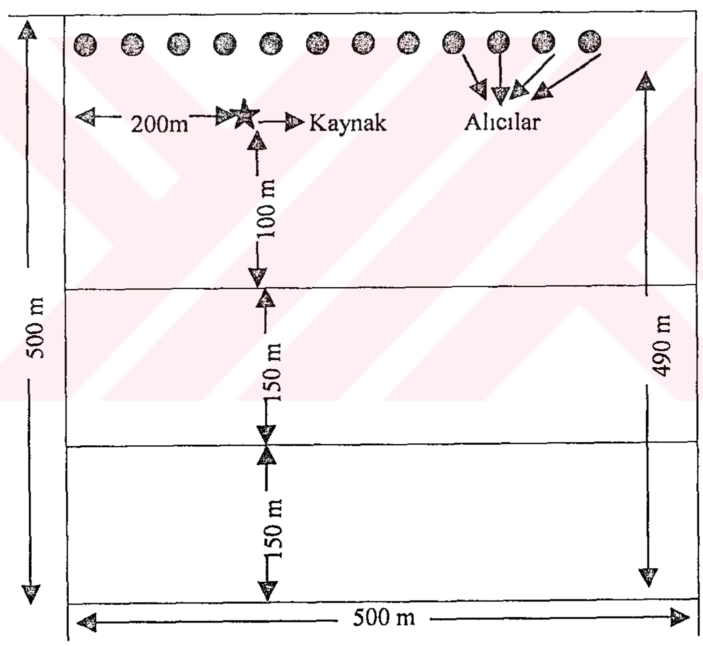


Şekil 3.22 Soğuran sınır koşulları için kumtaşı ve kireçtaşı sismogramı

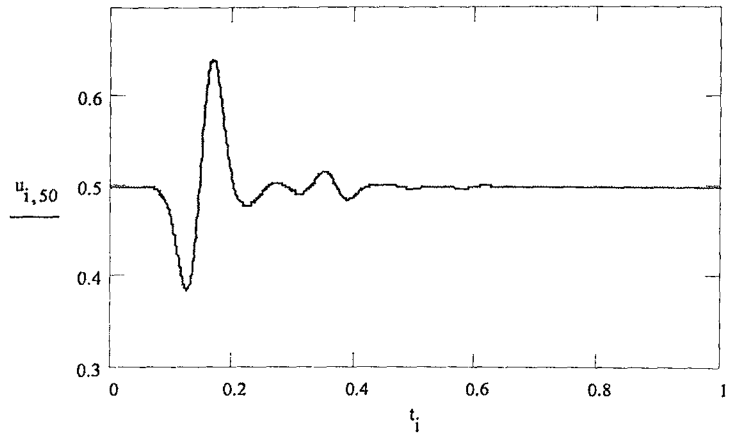
3.1.3.2 ÜÇLÜ ORTAM İÇİN SONUÇLAR

Bu bölümde şeyl-kumtaşı-kireçtaşı ve deniz suyu-kumtaşı-şeylden meydana gelen ortamlar ele alındı. Üçlü ortam modeli için geometri Şekil 3.23'de gösterildiği gibidir. 200 metredeki tek bir alıcıdan elde edilen sismogram grafikleri Şekil 3.24 ve Şekil 3.25'de ve modelin tamamındaki alıcılardan elde edilen sismogram grafikleri Şekil 3.26 ve Şekil 3.27'de verilmiştir.

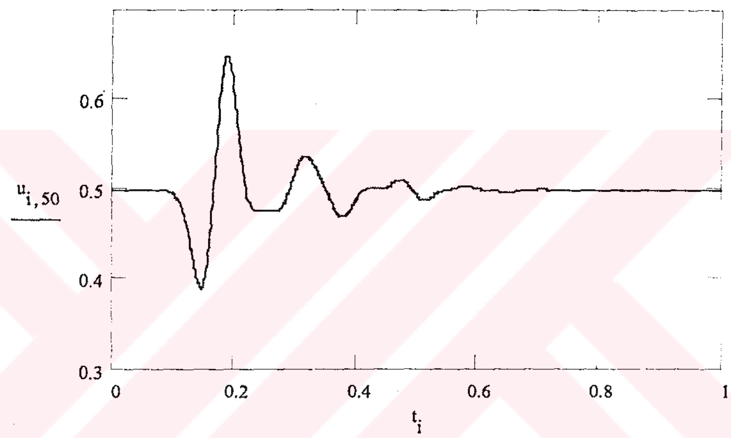
Sismogramlarda alıcıya ilk dalga yaklaşık olarak 0.15 saniyede ulaşmaktadır. İlk kırılan dalga 0.15 saniyede görülen dalga ile iç içe olduğundan görülmemektedir. Daha sonra görülen ikinci dalga diğer ortam sınırından kırılarak alıcıya ulaşan dalgadır. Daha sonra görülenler dalgalar ise tekrarlı kırılmalardan oluşan dalgalardır. Şekil 3.25'deki sismogramdaki sonuçlar Şekil 3.24'deki sonuçlara benzemektedir. Fakat deniz suyunun dalga hızı küçük olduğundan dolayı dalga daha geç alıcıya ulaşmaktadır.



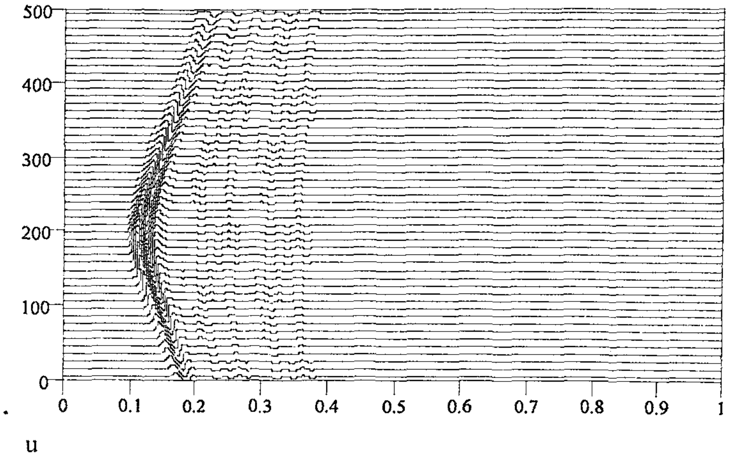
Şekil 3.23 Üçlü ortam için alıcıların ve kaynağın yeri



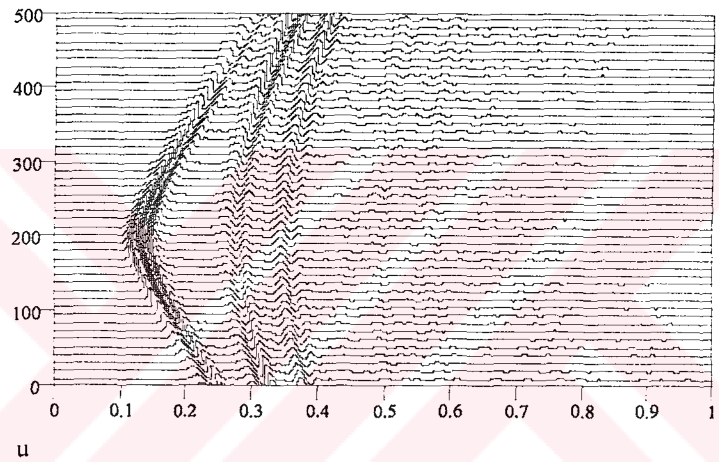
Şekil 3.24 Soğuran sınır koşulları için 200 m'deki şeyl, kumtaşı ve kireçtaşı sismogramı



Şekil 3.25 Soğuran sınır koşulları için 200 m'deki deniz suyu, kumtaşı ve şeyl sismogramı



Şekil 3.26 Soğuran sınır koşulları için şeyl, kumtaşı ve kireçtaşı sismogramı



Şekil 3.27 Soğuran sınır koşulları için deniz suyu, kumtaşı ve şeyl sismogramı

3.2 ELASTİK DALGA MODELLEMESİ

Bu bölümde çeşitli kaya yapılarındaki 2-boyutlu elastik dalga denkleminin basit ortam ve çoklu ortamda Dirichlet ve soğuran sınır koşullarındaki hareketini inceleyeceğiz. Bunun için öncelikle 2-boyutlu elastik dalga denklemini elde edelim.

3.2.1 2-BOYUTLU ELASTİK DALGA DENKLEMİ

2-boyutlu kartezyen koordinatlardaki elastik dalga denklemi (2.13) denkleminden

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial P_{11}}{\partial x} + \frac{\partial P_{13}}{\partial z} \tag{3.3}$$

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial P_{31}}{\partial x} + \frac{\partial P_{33}}{\partial z} \tag{3.4}$$

olarak yazılır. Gerilme bileşenlerinin yer değiştirmeler cinsinden ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} P_{11} &= (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial w}{\partial z} \\ P_{33} &= (\lambda + 2\mu)\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\frac{\partial u}{\partial x} \\ P_{13} &= P_{31} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

(3.5) denklemleri (3.3) ve (3.4) denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\mu}{\rho}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(\frac{\lambda + \mu}{\rho}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \left(\frac{\mu}{\rho}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\lambda + \mu}{\rho}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \tag{3.7}$$

2-boyutlu kartezyen koordinatlardaki elastik dalga denklemi elde edilmiş olur.

3.2.2 ELASTİK DALGA DENKLEMİNİN STAGGERED GRID YÖNTEMİYLE İFADESİ

(3.3) ve (3.4) 2-boyutlu elastik dalga denklemleri staggered grid yöntemiyle ifade edilirse;

$$\rho\left[\frac{u^{n+1}-2u^{n}+u^{n-1}}{\Delta t^{2}}\right]=\frac{(P_{11})_R^n-(P_{11})_L^n}{2\Delta x}+\frac{(P_{13})_T^n-(P_{13})_B^n}{2\Delta z}, \tag{3.8}$$

$$\rho\left[\frac{w^{n+1}-2w^{n}+w^{n-1}}{\Delta t^{2}}\right]=\frac{(P_{13})_R^n-(P_{13})_L^n}{2\Delta x}+\frac{(P_{33})_T^n-(P_{33})_B^n}{2\Delta z} \tag{3.9}$$

elde edilir. (3.8) ve (3.9) denklemlerinden $u_{i,j}^{n+1}$, $w_{i,j}^{n+1}$'ler yalnız bırakılırsa

$$u_{i,j}^{n+1}=2u_{i,j}^{n}-u_{i,j}^{n-1}+\frac{\Delta t^{2}}{\rho}\left[\frac{(P_{11})_R^n-(P_{11})_L^n}{2\Delta x}+\frac{(P_{13})_T^n-(P_{13})_B^n}{2\Delta z}\right] \tag{3.10}$$

$$w_{i,j}^{n+1}=2w_{i,j}^{n}-w_{i,j}^{n-1}+\frac{\Delta t^{2}}{\rho}\left[\frac{(P_{13})_R^n-(P_{13})_L^n}{2\Delta x}+\frac{(P_{33})_T^n-(P_{33})_B^n}{2\Delta z}\right] \tag{3.11}$$

elde edilir. Burada $u_{i,j}^{n+1}$ ve $w_{i,j}^{n+1}$ terimleri *(n+1)Δt* zamanındaki (*ih, jh*) noktasındaki yatay ve düşey yer değiştirmeleri ifade eder.

3.2.3 ELASTİK DALGA DENKLEMİ İÇİN SINIR KOŞULLARI

Serbest yüzey sınır koşulları için $P_{33}=0$ ve $P_{13}=0$ olmalıdır.

$$P_{33}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial w}{\partial z}+\lambda\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

$$P_{13}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0$$

dir. Bu denklemlerin her iki tarafı ρ ile bölünüp V_p ve V_s dalga hızları cinsinden ifade edilirse

$$\begin{aligned}&\left(V_P^2-2V_S^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}+V_P^2\frac{\partial w}{\partial x}=0\\&\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=0\end{aligned} \tag{3.12}$$

serbest sınır koşulları elde edilir.

Modelin sol ve sağ sınırlarındaki kenar yansımalarını yok etmek için akustik dalga denklemi çözümünde kullanılan denklemler hem u hem de w için aynen kullanılır. (3.12) serbest yüzey sınır koşulları sonlu farklar yöntemiyle çözümlersek

$$\left(V_P^2 - 2V_S^2\right)\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h} + V_P^2\frac{w_{i,j+1}^n - w_{i,j-1}^n}{2h} = 0$$

$$\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2h} + \frac{w_{i+1,j}^n - w_{i-1,j}^n}{2h} = 0$$

elde edilir. Serbest yüzey sınır koşulları

$$u_{i,-1}^n = u_{i,1}^n + w_{i+1,0}^n - w_{i-1,0}^n,$$

$$w_{i,-1}^n = w_{i,1}^n + \left[1 - 2\left(\frac{V_S}{V_P}\right)^2\right]\left(u_{i+1,0}^n - u_{i-1,0}^n\right).$$

Modelin alt tarafı için sınır koşulları

$$u_{i,N}^{n+1} = u_{i,N}^n + u_{i,N-1}^n - u_{i,N-1}^{n-1} - p\left(u_{i,N}^n - u_{i,N-1}^n - u_{i,N-1}^{n-1} + u_{i,N-2}^{n-1}\right),$$

$$w_{i,N}^{n+1} = w_{i,N}^n + w_{i,N-1}^n - w_{i,N-1}^{n-1} - p\left(w_{i,N}^n - w_{i,N-1}^n - w_{i,N-1}^{n-1} + w_{i,N-2}^{n-1}\right).$$

dir. Modelin sağ ve sol tarafı için soğuran sınır koşulları;

$$u_{0,j}^{n+1} = u_{0,j}^n + u_{1,j}^n - u_{1,j}^{n-1} + p(u_{1,j}^n - u_{0,j}^n - u_{2,j}^{n-1} + u_{1,j}^{n-1}),$$

$$w_{0,j}^{n+1} = w_{0,j}^n + w_{1,j}^n - w_{1,j}^{n-1} + p(w_{1,j}^n - w_{0,j}^n - w_{2,j}^{n-1} + w_{1,j}^{n-1}),$$

$$u_{M,j}^{n+1} = u_{M,j}^n + u_{M-1,j}^n - u_{M-1,j}^{n-1} - p(u_{M,j}^n - u_{M-1,j}^n + u_{M-2,j}^{n-1} - u_{M-1,j}^{n-1}),$$

$$w_{M,j}^{n+1} = w_{M,j}^n + w_{M-1,j}^n - w_{M-1,j}^{n-1} - p(w_{M,j}^n - w_{M-1,j}^n + w_{M-2,j}^{n-1} - w_{M-1,j}^{n-1}).$$

şeklindedir. Modelin köşe noktaları için sınır koşulları ise u için

$$u_{0,0}^{n+1} = u_{0,0}^n + p(u_{1,1}^n - u_{0,0}^n),$$

$$u_{0,N}^{n+1} = u_{0,N}^n + p(u_{1,N-1}^n - u_{0,N}^n),$$

$$u_{M,0}^{n+1} = u_{M,0}^n + p(u_{M-1,1}^n - u_{M,0}^n),$$

$$u_{M,N}^{n+1} = u_{M,N}^n + p(u_{M-1,N-1}^n - u_{M,N}^n).$$

ve benzer şekilde w için

$$w_{0,0}^{n+1} = w_{0,0}^{n} + p_1(w_{1,1}^{n} - w_{0,0}^{n}),$$

$$w_{0,N}^{n+1} = w_{0,N}^{n} + p_1(w_{1,N-1}^{n} - w_{0,N}^{n}),$$

$$w_{M,0}^{n+1} = w_{M,0}^{n} + p_1(w_{M-1,1}^{n} - w_{M,0}^{n}),$$

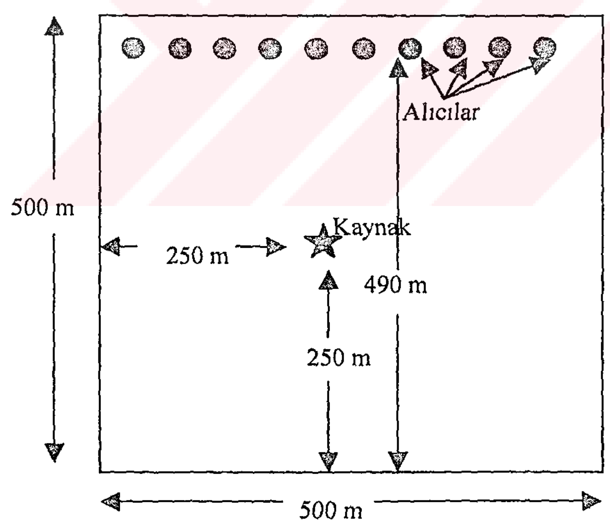
$$w_{M,N}^{n+1} = w_{M,N}^{n} + p_1(w_{M-1,N-1}^{n} - w_{M,N}^{n})$$

şeklindedir.

3.2.4 BASİT ORTAM İÇİN SONUÇLAR

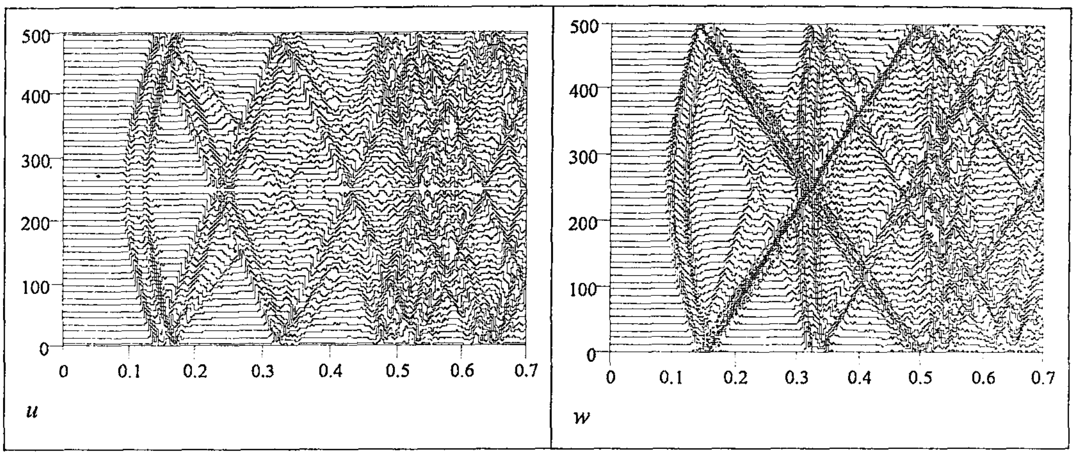
Basit ortam modellemesi için şeyl ve kireçtaşı alınarak çeşitli sonuçlar elde edildi. Şeyl ve kireçtaşına ait λ, μ, ρ ve hız değerleri Çizelge 3.1'de verilmiştir. Kaynak fonksiyonu olarak (2.40) ve (2.41) denklemleriyle verilen fonksiyonlar kullanılmıştır. Alıcılar ve kaynak fonksiyonu ortama Şekil 3.28 gösterildiği gibi yerleştirilmiştir. x ve z'nin grid aralığı 2 m , zaman aralığı ise 0.0003 sn olarak alınmıştır.

Elastik dalga modellemesinde kullanılan ortamın değer kümesi $D = \{(x,z,t): 0 \le x \le 500,\ 0 \le z \le 500,\ 0 \le t \le 0.7\}$ olarak alınmıştır.

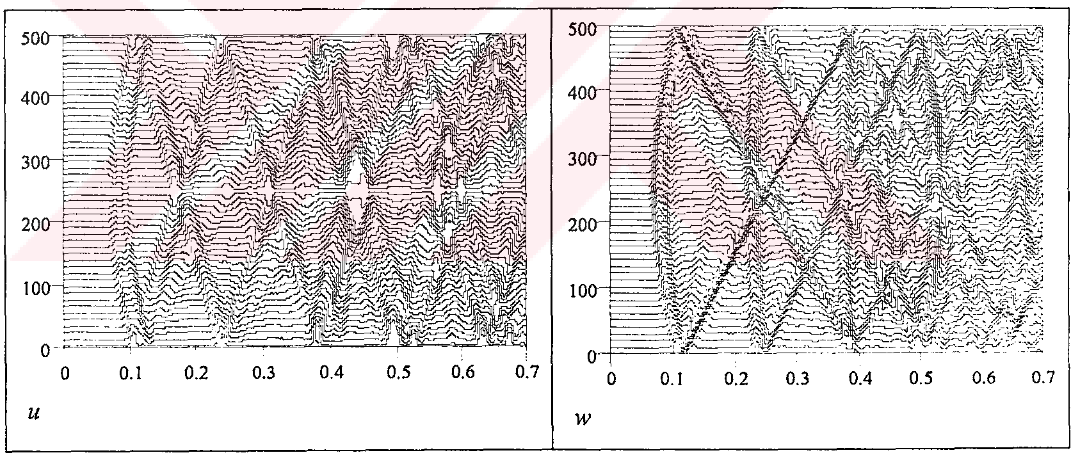


Şekil 3.28 Basit ortam için alıcıların ve kaynağın yeri

Dirichlet sınır koşulları kullanılarak şeyl için elde edilen sismogram grafiği Şekil 3.29'da, kireçtaşı için elde edilen sismogram grafiği de Şekil 3.30'da verilmiştir. Soğuran sınır koşulu kullanılarak şeyl için elde edilen sismogram grafiği Şekil 3.31'de, kireçtaşı için elde edilen sismogram grafiği de Şekil 3.32'de verilmiştir.

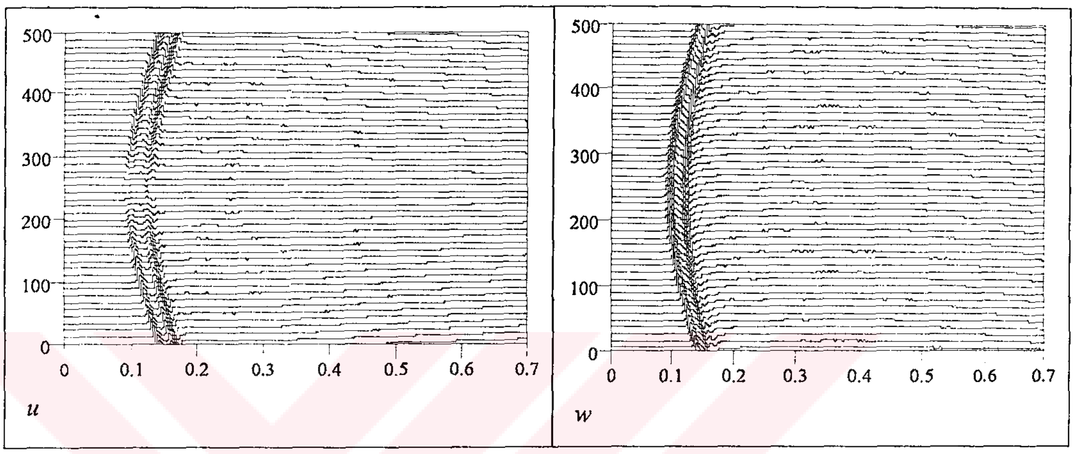


Şekil 3.29 Dirichlet sınır koşullarında şeyl için elde edilen yatay ve düşey sismogramlar

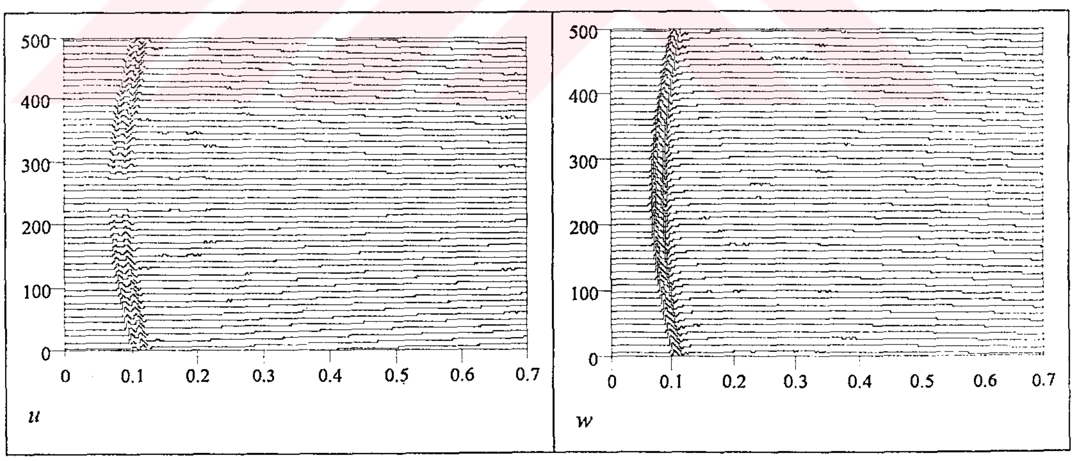


Şekil 3.30 Dirichlet sınır koşullarında kireçtaşı için elde edilen yatay ve düşey sismogramlar

Dirichlet sınır koşulları kullanılarak şeyl ve kireçtaşı için elde edilen sismogram grafikleri incelendiğinde alıcıya ulaşan ilk dalga yaklaşık olarak 0.1 saniyede görülmektedir. Daha sonra görülen dalgalar ise modelin sınırlarından kırılmalar sonucu oluşan dalgalardır. Sismogram grafiğinde çapraz şekilde görülen dalgalar sağ ve sol sınırlardan kırılmalar sonucu oluşan dalgalardır. 0.2 ve 0.4 saniyede görülen dalgalar da serbest yüzeyden ve alt sınırdan kırılmalar sonucu alıcıya ulaşan dalgalardır.



Şekil 3.31 Soğuran sınır koşullarında şeyl için elde edilen yatay ve düşey sismogramlar



Şekil 3.32 Soğuran sınır koşullarında kireçtaşı için elde edilen yatay ve düşey sismogramlar

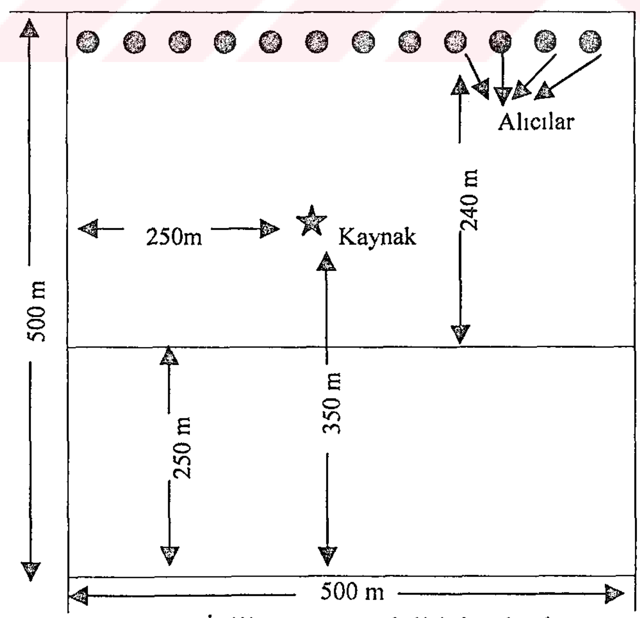
Soğuran sınır koşulları kullanılarak şeyl ve kireçtaşı için elde edilen sismogram grafikleri incelendiğinde alıcıya ilk dalga yaklaşık olarak 0.1 saniyede ulaşmaktadır. Diğer sınırlar soğuran olduğu için sınırlardan kırılma olmamaktadır. Bu nedenle de sismogramda başka dalga görülmemektedir.

3.2.5 İKİLİ ORTAM İÇİN SONUÇLAR

İkili ortam modellemesi için şeyl ve kireçtaşından oluşan ortamlar kullanıldı. Şeyl ve kireçtaşı için modellemede kullanılan değerler Çizelge 3.2'de verilmiştir. Bu değerler kullanılarak sismogram grafikleri elde edilmiştir. Kaynak fonksiyonu olarak (2.40) ve (2.41) denklemleri ile verilen fonksiyonlar kullanılmıştır. Alıcılar ve kaynak fonksiyonu ortama Şekil 3.33'de gösterildiği gibi yerleştirilmiştir. x ve z'nin grid aralığı 2 m , zaman aralığı ise 0.0003 sn olarak alınmıştır.

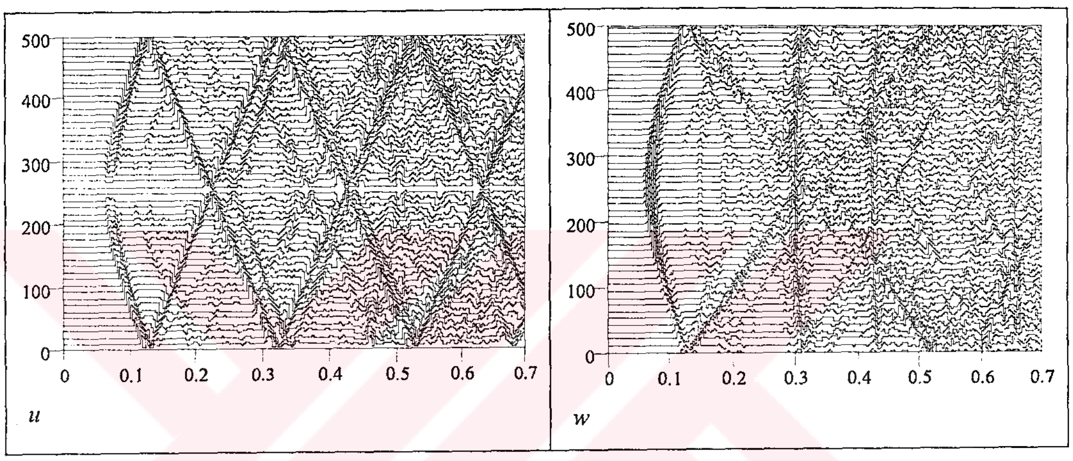
Çizelge 3.2 İkili ortam modelinde kullanılan λ, μ, ρ ve hız değerleri

Medya	**λ (Pa)**	**μ (Pa)**	**ρ (kg/m^3)**	**V_p (m/s)**	**V_s (m/s)**
Şeyl	4.99E9	4.80E9	2450	2440	1400
Kireçtaşı	13.38E9	7.18E9	2400	3400	1730

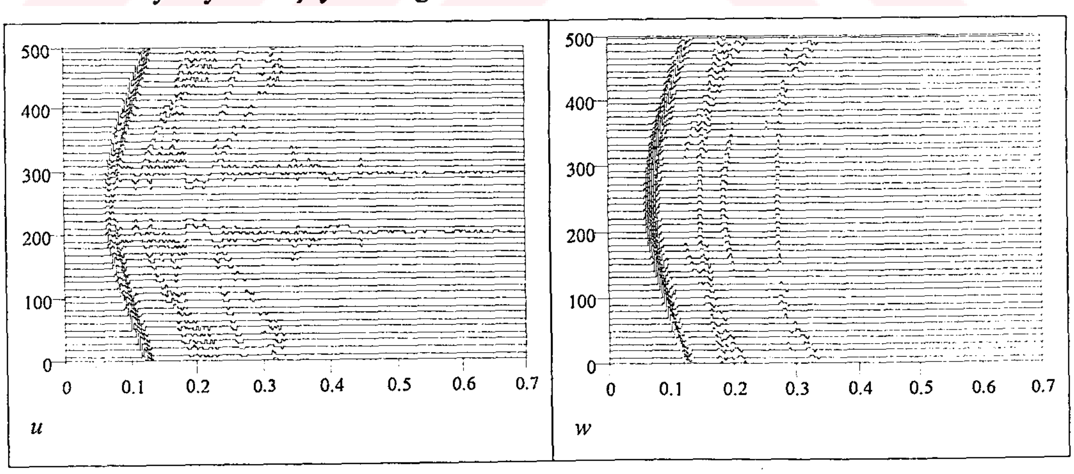


Şekil 3.33 İkili ortam modeli için alıcıların ve kaynağın yeri

Dirichlet sınır koşulları kullanarak şeyl-kireçtaşı için elde edilen sismogram grafiği incelendiğinde alıcıya ilk dalganın yaklaşık olarak 0.1 saniyede ulaştığı görülmektedir. Yine basit ortamdaki gibi sağ ve sol sınırlardan kırılan dalgalar benzer şekilde görülmektedir. Ayrıca iki ortam sınırından yansıyan dalgalar yaklaşık olarak 0.15 saniyede görülmektedir. Yaklaşık olarak 0.3 ve 0.4 saniyede görülen dalgalar ise ara yüzey ve tekrarlı yansıma sonucunda oluşan dalgalardır. Soğuran sınır koşulları kullanarak şeyl-kireçtaşı için elde edilen sismogram grafiği incelendiğinde ise alıcıya ilk dalganın yaklaşık olarak 0.1 saniyede ulaştığı görülür. 0.2 ve 0.3 saniyede görülen dalgalar ara yüzey ve serbest yüzeyden yansıyan dalgalardır.



Şekil 3.34 Şeyl ve kireçtaşı için Dirichlet sınır koşulları kullanılarak elde edilen yatay ve düşey sismogramlar



Şekil 3.35 Şeyl ve kireçtaşı için soğuran sınır koşulları kullanılarak elde edilen yatay ve düşey sismogramlar

SONUÇ

Yapay sismogram modellemesiyle yeraltındaki ortamlarda meydana gelen değişikliklerin dalga biçimlerini nasıl etkilediğinin öğrenmesine çalışılmakta ve buradan elde edilen bulgularla sismik araştırmalara yardımcı olunmaktadır. Bu modelleme özet olarak, değişik ortamlarda dalga yayılma hızlarının farklı olması temeli üzerine oturtulmuştur.

Bu çalışmada, matematiksel modelleme yardımıyla ortamlardaki dalga yayılımı akustik ve elastik dalga denklemleriyle ifade edilmiştir. Bu işlem öncelikle ortogonal koordinatlarda elde edildikten sonra kartezyen koordinatlara geçilmiştir. Modelleme probleminin formulasyonu, başlangıç değer ve sınır değer koşullarının elde edilmesiyle tamamlanmıştır. Bu problem sonlu farklar yöntemiyle nümerik olarak çözülmüş ve değişik ortamlardaki dalga yayılımlarını ifade eden sismogram grafikleri elde edilmiştir.

Akustik dalga modellemesi için elde edilen yapay sismogram grafiklerinde, serbest yüzeyden kırılarak oluşan dalgalar ile modelin diğer sınırlarından yansımalar sonucunda oluşan dalgalar görünmektedir. Soğuran sınır koşulları uygulandığında, basit ortamlardaki kırılmalar sonucunda oluşan dalgalar doğal olarak hemen hemen ortadan kalkmaktadır. İkili ortamlarda ise tek alıcından elde edilen şeyl ve kumtaşı için dalga yayılım hızları hemen hemen aynı olduğundan, bu iki ortamın birleşiminden meydana gelen ortamdaki kırılmalar soncunda oluşan dalgalar çok zayıf olarak ortaya çıkmaktadır. Fakat şeyl ve kireçtaşının (veya kumtaşı ve kireçtaşı) birleşiminden meydana gelmiş olan ortamlardaki kırılmalar kireçtaşındaki dalga yayılma hızının büyük olmasından dolayı daha belirgin olarak ortaya çıkmaktadır. Benzer sonuçlar, ortamın tümüne düzgün olarak yerleştirilmiş olan alıcılardan elde edilen sismogramlarda da görülmektedir. Deniz suyunun bulunduğu üçlü ortamlarda ise kaynaktan yayılan dalgalarda meydana gelen kırılmalar daha belirgin olmaktadır. Sonuç olarak ortamlardaki dalga yayılma hızları arasındaki fark fazla olduğunda kırılmalar daha belirgin olarak ortaya çıkmaktadır.

Elastik dalga modellemesi için elde edilen yapay sismogram grafiklerinden akustik dalga modellemesine benzer sonuçlar elde edilmiştir. Elastik dalga modellemesinde hem yatay hem de düşey yöndeki sismogram grafikleri incelendiğinde serbest yüzey ve modelin diğer sınırlarından yansıma sonucu oluşan dalgalar görülmektedir. Soğuran sınır koşulları kullanılarak elde edilen sismogram grafiklerinde ise sadece tek bir dalga görülmektedir. Ancak soğuran sınır koşulları kullanılarak elde edilen sismogramlarda çok küçük istenmeyen dalgalarda görülmektedir. Bu istenmeyen dalgalar nümerik hesaplamalarda meydana gelen kesme hatalarından kaynaklanmaktadır.

Bu çalışmada 2-boyutlu kartezyen koordinatlarda akustik ve elastik dalga denklemleri matematiksel olarak modellenmiştir. Ancak yeryüzü 3-boyutlu olduğundan elde edilen sismogramlardan yer yapısı hakkında net bir şey söylemek mümkün olmamaktadır. Bu metotla daha hassas sonuçlar elde edilmek isteniyorsa bazı ek düzenlemeler[1] yapılabilir. Bu ise çok hızlı bilgisayarlar gerektirmekte ve hesaplama zamanını arttırmaktadır.

[1] Grid için alınan nokta sayısını arttırmak, değişik kaynak fonksiyonu seçimi gibi

ÖZET

Bu çalışmada, bir yapay kaynaktan yayılan dalgaların değişik ortamlarda nasıl davrandığı matematiksel olarak incelenmiştir. Bundan dolayı genel bir ortam için ortoganal koordinatlarda bir dalganın herhangi bir ortamdaki hareket denklemi elde edilerek, kartezyen koordinatlardaki dalganın hareket denklemleri bulundu. Bununla birlikte, değişik ortamlardaki dalga yayılımı modellenirken, bu hareket denklemlerinin özel hali olan akustik ve elastik dalga denklemleri elde edildi. Her iki denklem için gerekli olan sınır koşulları ilk olarak Dirichlet tipinde ifade edilerek, bu iki denklem ile uygun sınır koşulları nümerik olarak sonlu farklar ve staggered grid metodu kullanılarak çözüldü. Daha sonra ortamın kenarlarından meydana gelen yansımaları önlemek için soğuran sınır koşulları kullanıldı. Bu denklemlerin kararlı çözümlerini elde etmek için gerekli olan kararlılık koşulları incelendi. Bu formulasyon ile hem akustik hem de elastik dalga denklemi basit ve çoklu ortamlar için çözülerek bir çok yapay sismogram grafikleri elde edildi. Bu simogramların yorumlanmasının sonucu olarak, değişik ortamlardaki dalga yayılmasının herhangi bir zamanda izlenebilirliği ve dalgaların yayılma hızları arasında fark yeteri kadar büyük olduğunda yansıyan dalgaların ortaya çıkışının daha net bir şekilde görüldüğü belirlendi.

Fortran programlama dilinde yazılan programlar ile nümerik çözümler elde edilerek, bu çözümler MathCAD programı kullanılarak değişik durumlar için birçok yapay sismogram üretilmiştir.

SUMMARY

In this research, how waves, emitted from a artificial source, propagate in various mediums has been investigated. Therefore, for the general medium, the equation of motion has been obtained to investigate the wave propagation in the orthogonal coordinates, and then equation of motion has been reduced to wave equation in the Cartesian coordinates. Moreover, modelling wave propagation in different medium we have encountered two different equations, namely, acoustic and elastic wave equations. Boundary conditions have been given for both acoustic and elastic wave equations in Dirichlet type. We have solved these two equations with proper boundary conditions in two-dimensional space using finite difference and staggered grid methods. Then, to prevent reflections from the edges of the medium, absorbing boundary conditions has been introduced too. The stability conditions have been investigated for the stable numerical solution of these equations. With this formulation, solving both acoustic and elastic wave equations for single and multiple types of mediums, we have obtained a number of artificial seismograms. As a result of interpretation of these seismograms, it is found that the wave propagation in the different medium has been examined at any time and when the difference in the velocity is high enough, the appearance of reflected waves become clear.

Numerical solutions have been fulfilled a number of computer programs written in the Fortran programming language. The results of the numerical solution has been visualised using MathCAD to obtain artificial seismograms.

EK 1

```
c       D**2(U)/d(t**2)=C**2(D**2(U)/d(X**2)+D**2(U)/D(Y**2))+f(t)
c       Tipindeki 2-Boyutlu Akustik Dalga Denkleminin
c       Soguran Sınır Koşullarında Sonlu Farklar İle Çözümü

        PARAMETER(mm=200,nn=2000)
        real up(0:mm,0:mm),un(0:mm,0:mm),uo(0:mm,0:mm)
        real recx(0:nn,0:mm),dt
        integer t
        common/ONE/ir,is
c       Grid Aralıklarının Girilmesi
        write(6,*)'m,n Please'
        read(5,*) m,n
c       Ortamın Hız Değeri
        c=2400.0
        h=500./m
        dt=1./n
        p=(c*dt)/h

c       Kaynak Fonksiyonunun Ortamdaki Konumu
        x0=200.
        y0=100.
c       Alıcıların Yeri
        yr=10
        jj=int(yr/h+0.49)
        ir=int(x0/h+0.49)
        is=int(y0/h+0.49)
c       Kararlılık Şartı
        IF (P.GT.0.71) THEN
        WRITE(6,*) 'ERROR'
        STOP
        END IF
        scale=1.0
c       SONLU FARK DÖNGÜSÜ
        do t=1,n-1
        tt=t*dt

c       Transparent Sınır koşulları
c       Üst ve Alt Sınır Koşulları
        do i=1,m-1
        un(i,0)=0.
        un(i,m)=up(i,m)+up(i,m-1)-uo(i,m-1)-
&                  p*(up(i,m)-up(i,m-1)-(uo(i,m-1)-uo(i,m-2)))
        enddo

c       Sol ve Sağ Sınır Koşulları
        do j=1,m-1
        un(m,j)=up(m,j)+up(m-1,j)-uo(m-1,j)-
```

```
&                p*(up(m,j)-up(m-1,j)-(uo(m-1,j)-uo(m-2,j)))

        un(0,j)=up(0,j)+up(1,j)-uo(1,j)+
&                  p*(up(1,j)-up(0,j)-(uo(2,j)-uo(1,j)))
        enddo

c       Köşe Noktaları
        un(0,0)=up(0,0)+p*(up(1,1)-up(0,0))
        un(m,0)=up(m,0)+p*(up(m-1,1)-up(m,0))
        un(0,m)=up(0,m)+p*(up(1,m-1)-up(0,m))
        un(m,m)=up(m,m)+p*(up(m-1,m-1)-up(m,m))

        do i=1,m-1
                do j=1,m-1
        un(i,j)=2*up(i,j)-uo(i,j)+
&             (p*p)*(up(i+1,j)-4.*up(i,j)+up(i-1,j)+up(i,j+1)+up(i,j-1))+
&             c*c*dt*dt*delta(i,j)*f(tt)
        enddo
                enddo

        do i=0,m
        do j=0,m
                uo(i,j)=up(i,j)
                up(i,j)=un(i,j)
        enddo
        enddo

        do 11 i=0,m
                RECX(t,i)=UP(i,jj)
11      continue
        enddo
        scale=maxval(abs(recx))
c       Verilerin dosyaya yazdırılması
        open(unit=10,File='akustik.prn',status='unknown')

        do t=0,n
                write(10,14) (recx(t,i)/scale,i=0,m)
        enddo
        write(*,*) 'En Buyuk Deger=',maxval(abs(recx))

14      format(1x,200f5.2)
        close(10)
        stop
        end

c       Kaynak Fonksiyonu
        function f(t)
        alpha=10000.
        t0=0.1
```

```
      f=(t-t0)*exp(-alpha*(t-t0)**2)
      return
      end

c     Kronecker Delta Fonksiyonu
      FUNCTION delta(I,J)
      COMMON/ONE/ir,is
      IF((I.NE.ir).OR.(J.NE.is)) THEN
      delta=0.0
      ELSE
      delta=1.0
      END IF
      RETURN
      END
```

EK 2

```
c       2-Boyutlu Elastik Dalga Denkleminin
c       Soğuran Sınır Koşullarını Kullanarak Stagered Grid Metodu İle Çözümü

        PARAMETER(nn=300,mm=(7*nn)/5,kk=2000)
        REAL uo(0:mm,0:nn),up(0:mm,0:nn),un(0:mm,0:nn)
        REAL wo(0:mm,0:nn),wp(0:mm,0:nn),wn(0:mm,0:nn)
        REAL t(0:kk),recdx(0:kk,0:mm),recdz(0:kk,0:mm)
        REAL lamda,mu,p
        REAL PHIL,PHIR,PHIT,PHIB,PXXL,PXXR,PXYT,PXYB
        REAL PYYT,PYYB,PXYL,PXYR,k,h,x(0:mm),y(0:nn),beta
        INTEGER S
        COMMON/ONE/X0,Y0,ALP
c       Grid Aralıklarının Girilmesi
        WRITE(6,*)'N,S'
        READ(5,*)n,s

        G=0.0
        m=n
c       Ortama Ait Değerlerin Okutulması
        lamda=4.99E9
        mu=4.80E9
        p=2450.0
        H=500.0/FLOAT(n)
        K=H
        DT=1.0/FLOAT(S)
        DT2=DT*DT
c       Kaynak fonksiyonunun ortamdaki konumu
        X0=250.0
        Y0=150.0
        ALP=2440.0
        beta=1400.0
        Q=ALP*dt/h
        is=INT(X0/H+0.49)
        js=INT(Y0/H+0.49)
        JJ=INT(10/H+0.49)
C       Kararlılık Koşulu
        stabilty=(dt*sqrt(alp*alp+beta*beta))/h
        if (stabilty.GT.1) then
        stop
        endif
        scale=1.0
        do L=0,S
        t(L)=L*dt
        enddo
        do i=0,m
        x(i)=i*h
        enddo
```

```
      do j=0,n
      y(j)=j*k
      enddo

      do 10 L=2,S

c     Kose Noktaları
      un(0,0)=up(0,0)+q*(up(1,1)-up(0,0))
      un(0,n)=up(0,n)+q*(up(1,n-1)-up(0,n))
      un(m,0)=up(m,0)+q*(up(m-1,1)-up(m,0))
      un(m,n)=up(m,n)+q*(up(m-1,n-1)-up(m,n))
      wn(0,0)=wp(0,0)+q*(wp(1,1)-wp(0,0))
      wn(0,n+1)=wp(0,n+1)+q*(wp(1,n)-wp(0,n+1))
      wn(m+1,0)=wp(m+1,0)+q*(wp(m,1)-wp(m+1,0))
      wn(m+1,n+1)=wp(m+1,n+1)+q*(wp(m,n)-wp(m+1,n+1))

c     Sol ve Sağ Sınır Koşulları
c     u İçin Sınır Koşulları

      do j=1,n-1
      un(0,j)=up(0,j)+up(1,j)-uo(1,j)+
     &        q*(up(1,j)-up(0,j)-uo(2,j)+uo(1,j))
      un(m,j)=up(m,j)+up(m-1,j)-uo(m-1,j)-
     &        q*(up(m,j)-up(m-1,j)-uo(m-1,j)+uo(m-2,j))
      enddo

c     w İçin Sınır Koşulları
      do j=1,n
      wn(0,j)=wp(0,j)+wp(1,j)-wo(1,j)
     &        +q*(wp(1,j)-wp(0,j)-wo(2,j)+wo(1,j))
      wn(m+1,j)=wp(m+1,j)+wp(m,j)-wo(m,j)
     &        -q*(wp(m+1,j)-wp(m,j)-wo(m,j)+wo(m-1,j))
      enddo
c     Ust ve alt icin sınır kosulları
c     u İçin Sınır Koşulları
      do i=1,m-1
      un(i,n)=up(i,n)+up(i,n-1)-uo(i,n-1)
     &        -q*(up(i,n)-up(i,n-1)-(uo(i,n-1)-uo(i,n-2)))

      un(i,0)=up(i,0)+up(i,1)-uo(i,1)
     &        +q*(up(i,1)-up(i,0)-(uo(i,2)-uo(i,1)))
      enddo

c     w İçin Sınır Koşulları

      do i=1,m
      wn(i,n+1)=wp(i,n+1)+wp(i,n)-wo(i,n)
     &        -q*(wp(i,n+1)-wp(i,n)-(wo(i,n)-wo(i,n-1)))
```

```
      wn(i,0)=wp(i,0)+wp(i,1)-wo(i,1)
&           +q*(wp(i,1)-wp(i,0)-(wo(i,2)-wo(i,1)))
      enddo

      do i=1,m-1
            do j=0,n

      PHIL=(up(i,j)-up(i-1,j))/H+(wp(i,j+1)-wp(i,j))/K
      PHIR=(up(i+1,j)-up(i,j))/H+(wp(i+1,j+1)-wp(i+1,j))/K
      PXXL=lamda*PHIL+2*mu*((up(i,j)-up(i-1,j))/H)
      PXXR=lamda*PHIR+2*mu*((up(i+1,j)-up(i,j))/H)
      PXYT=mu*((up(i,j+1)-up(i,j))/K+(wp(i+1,j+1)-wp(i,j+1))/H)
      PXYB=mu*((up(i,j)-up(i,j-1))/K+(wp(i+1,j)-wp(i,j))/H)

      un(i,j)=2*up(i,j)-uo(i,j)+(DT2/p)*((PXXR-PXXL)/H+(PXYT-PXYB)/K)
      &+us(x(i),y(j),t(l))
            enddo
      enddo

      do i=1,m
            do j=0,n+1

      PHIB=(wp(i,j)-wp(i,j-1))/K+(up(i,j-1)-up(i-1,j-1))/H
      PHIT=(up(i,j)-up(i-1,j))/H+(wp(i,j+1)-wp(i,j))/K
      PYYB=lamda*PHIB+2*mu*(wp(i,j)-wp(i,j-1))/K
      PYYT=lamda*PHIT+2*mu*(wp(i,j+1)-wp(i,j))/K
      PXYL=mu*((up(i-1,j)-up(i-1,j-1))/K+(wp(i,j)-wp(i-1,j))/H)
      PXYR=mu*((up(i,j)-up(i,j-1))/K+(wp(i+1,j)-wp(i,j))/H)

      wn(i,j)=2*wp(i,j)-wo(i,j)-G*DT2+
      &(DT2/p)*((PXYR-PXYL)/H+(PYYT-PYYB)/K)
      &+ws(x(i),y(j),t(l))
            enddo
      enddo

      do i=0,m
      do j=0,n
            uo(i,j)=up(i,j)
            up(i,j)=un(i,j)
      enddo
      enddo
      do i=0,m+1
      do j=0,n+1
            wo(i,j)=wp(i,j)
            wp(i,j)=wn(i,j)
      enddo
      enddo
      do i=0,m
            recdx(L,i)=up(i,JJ)
```

```
        recdz(L,i)=(wp(i,JJ)+wp(i+1,JJ)+wp(i,JJ+1)+wp(i+1,JJ+1))/4
      enddo

10    CONTINUE

      scale1=maxval(abs(recdx))
      scale2=maxval(abs(recdz))
      scale=max(scale1,scale2)
      write(*,*) 'En Buyuk Deger=',maxval(abs(recdx)),maxval(abs(recdz))
c     Dataların dosyaya yazdırılması
      OPEN(12,FILE='staggered.prn')

      do L=0,S
        WRITE(12,40) (recdx(L,i)/scale,i=0,m)
      enddo
      do L=0,S
        WRITE(12,40) (recdz(L,i)/scale,i=0,m)
      enddo
      CLOSE(12)
40    FORMAT(1X,600F5.2)
      stop
      end

c     Kaynak fonksiyonları

      real function UBS(X,Y,T)
      COMMON/ONE/X0,Y0,ALP

      if ((x.eq.x0).and.(y.eq.y0)) then
        UBS=0.0
      else
        R=SQRT((X-X0)**2+(Y-Y0)**2)
      endif

      TR=ALP*T/R
      TR2=TR*TR
      IF(TR.LT.1.0) THEN
      UBS=0.0
      ELSE
      UBS=(X-X0)/(ALP**2)*(TR*SQRT(TR2-1.0)-ALOG(TR+SQRT(TR2-1.0)))
      END IF
      RETURN
      END

      real function VBS(X,Y,T)
      COMMON/ONE/X0,Y0,ALP

      if ((x.eq.x0).and.(y.eq.y0)) then
        VBS=0.0
```

```
else
        R=SQRT((X-X0)**2+(Y-Y0)**2)
endif


TR=ALP*T/R
TR2=TR*TR
IF(TR.LT.1.0) THEN
VBS=0.0
ELSE
VBS=(Y-Y0)/(ALP**2)*(TR*SQRT(TR2-1.0)-ALOG(TR+SQRT(TR2-1.0)))
END IF
RETURN
END

real function us(x,y,t)
common/one/x0,y0,alp
df=0.01
us=(ubs(x,y,t)-2*ubs(x,y,t-df)+ubs(x,y,t-2*df))/(df*df)
return
end

real function ws(x,y,t)
common/one/x0,y0,alp
df=0.01
ws=(vbs(x,y,t)-2*vbs(x,y,t-df)+vbs(x,y,t-2*df))/(df*df)
return
end
```

KAYNAKLAR

Alford, R. M., Kelly, K. R ve Boree, D. M., 1974, Accuracy Of Finite Difference Modelling Of The Acoustic Wave Equation, Geopysics, Vol. 39, 834-842.

Alterman, Z. ve Rotenberg, A., 1969, Seismic Waves In Quarter Plane, Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 59: 347-368.

Astin, J., 1974, Three-dimensional Orthogonal Coordinates, Int. J. Math. Educ. Sci. Techol., Vol. 5: 271-278.

Canıtez, N., 1992, Jeofizikte Modelleme, Literatür Yayıncılık.

Clayton, R. ve Engquist B., 1977, Absorbing Boundary Conditions For Acoustic And Elastic Wave Equations, Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 67 (6): 1529-1540.

Demir, İ., 1998, Seismic Wave Modelling Using Finite Difference Methods, University Of Glamorgan, (Doktora Tezi).

Dobrin, M. B., 1976, Intrıduction To Geopysical Prospecting, McGraw-Hill, New York.

Kelly, K. R., Ward R. W., Treitel, S. ve Alford, R. M., 1976, Synthetic Seismograms:A Finite Difference Approach, Geophysics, 2-27.

Lavergne, M., 1989, Seismic Methods, Graham-Trotman Limited.

Morton, K. W. ve Mayers, D. F., 1994, Numerical Solution Of Partial Differential Equation,Cambridge University Press.

Reynolds, A. C., 1978, Boundary Conditions For The Numerical Solution Of Propagation Problems, Geophysics, Vol. 43: 1099-1110.

Stephen, R. A., 1983, A Comparison Of Finite Difference And Reflectivity Seismograms For Marine Models, Geophysics, Vol. 72: 39-57.

Us, E., 1993, Sismik Yöntemler ve Yorumlamaya Giriş, TMMOB Jeofizik Mühendisleri Odası Eğitim Yayınları No:2.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasını gerçekleştirirken, çalışmam süresince değerli fikirleriyle beni aydınlatan ayrıca konu seçiminde beni yönlendiren ve çalışmanın her aşamasında bana yol gösteren danışmanım Yrd. Doç. Dr. İsmail DEMİR'e en derin saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Konuyla ilgili karşılaştığım problemlerin çözümünde benden yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Yrd. Doç. Dr. Hüsnü BAYSAL'a ve Yrd. Doç. Dr. İbrahim TÜRKYILMAZ'a teşekkürü bir borç bilirim.

Son olarak maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan aileme içtenlikle teşekkür ederim.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Can AKTAŞ

Doğum Yeri ve Yılı : Çanakkale, 1979

Adres : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Eğitim Durumu

1984-1989 : İstiklal İlkokulu, ÇANAKKALE

1989-1992 : Merkez Ortaokulu, ÇANAKKALE

1992-1995 : Çanakkale Lisesi Matematik Bölümü, ÇANAKKALE

1995-1999 : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (Lisans), ÇANAKKALE

Staj - Kurslar

-

Mesleki Deneyim

2000 - : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesinde Araştırma Görevliliği

Çalışma ve İlgi Alanları

-

Aldığı Ödül ve Dereceler

Bölüm Birincisi, Fakülte İkincisi, Üniversite Üçüncüsü